绕任意轴 μ 旋转 φ 对应的欧拉角的新求解公式

王美山, 李文亮, 杨传路, 王德华, 徐　强, 任廷琦
(鲁东大学 物理与电子工程学院, 山东 烟台　264025)

摘要: 首先回顾了如何根据欧拉角得到转动操作的表示矩阵, 然后应用余弦定理、简单的几何关系以及群的特征标理论得到了求解绕任意轴 μ 旋转 φ 对应的欧拉角的新公式, 最后利用得到的公式求出了绕通过原点和 (1, 1, 1) 点的直线旋转 $2\pi/3$ 的欧拉角, 从而验证了所得公式的正确性.

关键词: 欧拉角; 方向余弦; 群表示; 特征标
中图分类号: O 413　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-0712(2006)09-0031-03

根据分子满足的对称群, 分子的几何对称性很容易确定. 利用分子的几何对称性和群表示理论, 人们可以方便地研究分子的许多物理和化学性质, 如分子的光谱项、振子强度、光谱选律以及化学反应的性能[1~3]. 转动操作是构成分子对称群(分子点群、SO(3)、SO(2)等)的重要操作, 它的矩阵表示被广泛应用在量子力学、角动量等领域[4,5]. 知道了绕任意轴 μ 旋转 φ 对应的欧拉角, 便很容易得到绕任意轴 μ 旋转 φ 的转动的表示矩阵[2,6,7]. 在文献[7]中, 虽然发现了根据任意轴 μ 的方向余弦和 φ 求解欧拉角满足的表达式, 但这些表达式存在问题, 需要进行修正. 因此, 进一步研究绕任意轴 μ 旋转 φ 对应的欧拉角关系显得很有意义. 在本文中, 我们首先简要回顾了如何根据欧拉角得到转动操作的表示矩阵; 然后应用余弦定理、简单的几何关系以及群的特征标理论推导了求解绕任意轴 μ 旋转 φ 对应的欧拉角的一组全新公式; 最后根据所得公式求出了绕通过原点和 (1, 1, 1) 点的直线旋转 $2\pi/3$ 的欧拉角, 从而验证了公式的正确性. 根据我们得到的新公式, 人们可以得到绕任意轴 μ 旋转 φ 对应的欧拉角, 从而得到绕任意轴 μ 旋转 φ 的转动操作的表示矩阵.

1　转动操作关于欧拉角的表示矩阵

根据欧拉转动定理, 刚体做定点转动的空间位置需要 3 个独立的变量来确定. 这 3 个独立变量通常采用欧拉于 1776 年提出的欧拉角 α、β、γ. 通过 3 个欧拉角的引入, 绕任意轴 μ 旋转 φ 的转动可表示为[2,4]

$$R_\mu(\varphi) = R(\alpha, \beta, \gamma) \tag{1}$$

其中 α、β、γ 的取法见图 1, 它们使得空间固定坐标系 $F = XYZ$ 通过 3 个连续的有限转动与物体固定坐标系 $g = xyz$ 一致. $R(\alpha, \beta, \gamma)$ 可以分解为 3 个连续的转动:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\gamma) R_N(\beta) R_Z(\alpha) \tag{2}$$

其中 $R_Z(\alpha)$、$R_N(\beta)$、$R_z(\gamma)$ 分别表示绕 Z 轴、N 轴、z 轴转 α、β、γ. 在式(2)中, $R(\alpha, \beta, \gamma)$ 使用了两种坐标系, 在很多场合应用起来不方便. 根据幺正变换的性质, 容易知道 $R_N(\beta)$ 可以通过 $R_Y(\beta)$ 在 $R_Z(\alpha)$ 的变换下得到[4], 即

$$R_N(\beta) = R_Z(\alpha) R_Y(\beta) R_Z^{-1}(\alpha) \tag{3}$$

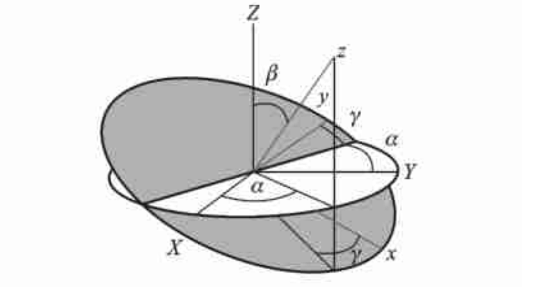

图 1　相对于空间固定坐标系 $F = XYZ$ 与物体固定坐标系 $g = xyz$ 的欧拉角 α、β、γ

同理, 有

$$R_z(\gamma) = R_N(\beta) R_Z(\gamma) R_N^{-1}(\beta) \tag{4}$$

$$R_Z(\gamma) = R_Z(\alpha) R_Z(\gamma) R_Z^{-1}(\alpha) \tag{5}$$

把式(3)、(4)和(5)代入式(2), 得到

收稿日期: 2006-01-15
基金项目: 鲁东大学人才基金资助项目(042802)
作者简介: 王美山(1971—), 男, 鲁东大学物理与电子工程学院教授, 主要从事原子与分子物理的教学和研究.

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_Z(\alpha)\,R_Y(\beta)\,R_Z(\gamma) \tag{6}$$

式(6)给出了绕任意轴 μ 旋转 ϕ 的转动在空间固定坐标系中的表达式.

根据群表示理论,容易得到[2]

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7a}$$

$$R_Y(\beta) = \begin{pmatrix} -\cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{7b}$$

$$R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7c}$$

把式(7a)、(7b)、(7c)代入式(6),得到

$$R_\mu(\phi) = R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} A & B & \cos\alpha\sin\beta \\ C & D & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{8}$$

式中:

$A = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma$

$B = -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma$

$C = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma$

$D = -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma$

根据式(8),只要知道了绕任意轴 μ 旋转 ϕ 对应的欧拉角,对应转动的表示矩阵就很容易得到.

2 根据 μ 与 X、Y、Z 的夹角 ϕ_X、ϕ_Y、ϕ_Z 以及转角 ϕ 确定 α、β、γ

设任意轴 μ 上点 P 的坐标为 (X_0, Y_0, Z_0),且 μ 与空间坐标系的坐标轴 X、Y、Z 的夹角分别为 ϕ_X、ϕ_Y、ϕ_Z,则 μ 的方向余弦为

$$\cos\phi_X = \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}} \tag{9a}$$

$$\cos\phi_Y = \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}} \tag{9b}$$

$$\cos\phi_Z = \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}} \tag{9c}$$

当物体绕任意轴 μ 旋转 ϕ 时,空间固定坐标系的 3 个坐标轴 X、Y、Z 在 3 个不同的圆锥面上运动,最后与物体固定坐标系的 3 个坐标轴 x、y、z 重合. 设 X 和 x、Y 和 y、Z 和 z 之间的夹角分别为 ϕ_X^x、ϕ_Y^y 和 ϕ_Z^z,容易看出 $\phi_Z^z = \beta$. 我们首先研究与 z 轴的夹角 β(见图 2).

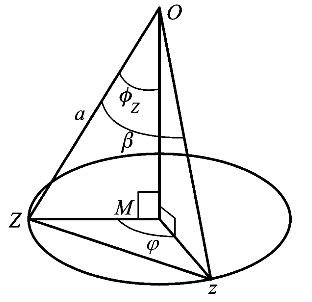

图 2 OZ 绕 μ 旋转 ϕ 形成的四面体 $OZMz$

设 $OZ = a$, Z 在 μ 上的投影为 M,在 $\triangle ZOz$ 和 $\triangle ZMz$ 中分别应用余弦定理,有

$$(Zz)^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\beta \tag{10a}$$

$$(Zz)^2 = 2a^2\sin^2\phi_Z - 2a^2\sin^2\phi_Z\cos\phi \tag{10b}$$

比较式(10a)和(10b),得到

$$\cos\beta = 1 - \sin^2\phi_Z(1 - \cos\phi) \tag{11a}$$

用类似的方法,可以得到

$$\cos\phi_X^x = 1 - \sin^2\phi_X(1 - \cos\phi) \tag{11b}$$

$$\cos\phi_Y^y = 1 - \sin^2\phi_Y(1 - \cos\phi) \tag{11c}$$

式(11b)、(11c)和(11a)给出了绕任意轴 μ 旋转 ϕ 时 X 和 x、Y 和 y、Z 和 z 之间的夹角 ϕ_X^x、ϕ_Y^y 和 ϕ_Z^z (β) 分别所满足的表达式. 物体绕 μ 旋转 ϕ 后,我们容易得到图 3 所示的四面体,其中 ON 是 OY 绕 OZ 旋转 α 到达的位置. 令 $OY = a$,在 $\triangle OYy$ 和 $\triangle YNy$ 中再次应用余弦定理,得到

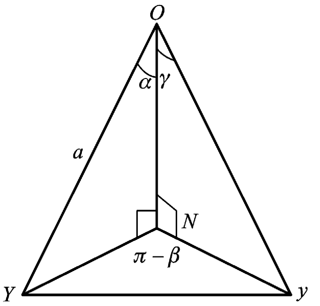

图 3 物体绕 μ 旋转 ϕ 时 OY、ON、Oy 等线段形成的四面体 $OYNy$

$$(Yy)^2 = a^2 + \frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma} - 2\frac{a\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\phi_Y^y \tag{12a}$$

$$(Yy)^2 = (a\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha\tan\gamma)^2 - 2\sin\alpha\tan\gamma\cos\alpha\cos(\pi - \beta) \tag{12b}$$

比较式(12a)、(12b),并考虑式(11c),得到

$$\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma = 1 - \sin^2\phi_Y(1 - \cos\phi) \tag{13}$$

根据 SO(3) 的特征标理论,绕任意轴 μ 旋转 ϕ 的转动矩阵的特征标为[6]

$$X^{(1)}(R_\mu(\phi)) = \frac{\sin(3\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \tag{14}$$

利用式(10)和式(14),有

$$\cos\beta + (1+\cos\beta)\cos(\alpha+\gamma) = \frac{\sin(3\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \tag{15}$$

式(11a)、(13)和(15)给出了根据任意轴 μ 的方向余弦角 ϕ_X、ϕ_Y、ϕ_Z 和 ϕ 确定欧拉角 α、β、γ 的新的求解公式,即

$$\cos\beta = 1 - \sin^2\phi_Z(1-\cos\phi) \tag{16a}$$

$$\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma = 1 - \sin^2\phi_Y(1-\cos\phi) \tag{16b}$$

$$\cos\beta + (1+\cos\beta)\cos(\alpha+\gamma) = \frac{\sin(3\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \tag{16c}$$

3　绕通过原点和点(1,1,1)的直线旋转 2π/3 时的欧拉角

根据式(9a)、(9b)和(9c),得到通过原点和(1,1,1)的直线的方向余弦为

$$\cos\phi_X = \cos\phi_Y = \cos\phi_Z = 1/\sqrt{3} \tag{17}$$

所以

$$\sin^2\phi_X = \sin^2\phi_Y = \sin^2\phi_Z = 2/3 \tag{18}$$

把式(18)和 $\phi = 2\pi/3$ 代入式(16a)～(16c),得到 $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/2$, $\gamma=0$ 和 $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$, $\gamma=\pi/2$ 两组解. 当 $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/2$, $\gamma=0$ 时,由式(10)得到

$$R(\pi/2,\pi/2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

把式(19)作用在$(1\ 1\ 1)^T$上,有

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

由于点(1,1,1)在旋转轴 μ 上,它的值是不随绕 μ 的转动而改变的,因此式(20)的结论是错误的,也就是说解 $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/2$, $\gamma=0$ 应该删去. 所以绕通过原点和点(1,1,1)的直线旋转 2π/3 时的正确欧拉角是 $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$, $\gamma=\pi/2$,从而验证了式(16a)～(16c)的正确性.

文献[7]第 121 页给出了与上面结论形式不同的、根据轴 μ 的方向余弦和转角 ϕ 求解欧拉角的表达式,即

$$\cos\frac{\phi}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2} \tag{21a}$$

$$\lambda = \left(\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\Big/\sin\frac{\phi}{2} \tag{21b}$$

$$\mu = \left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\Big/\sin\frac{\phi}{2} \tag{21c}$$

$$\nu = \left(\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\Big/\sin\frac{\phi}{2} \tag{21d}$$

当用通过原点和(1,1,1)的直线转 2π/3 验证时,得到的结果是 $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/2$, $\gamma=0$. 根据前面分析,此结果是错误的,因此式(21a)～(21d)显然存在问题. 通过仔细分析,发现只要(21b)取下面形式:

$$\lambda = \left(-\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\Big/\sin\frac{\phi}{2} \tag{21b$'$}$$

就能得到正确的结果. 需要指出的是,我们无法确定(21b)中的错误是不是印刷失误造成的.

4　总结

应用余弦定理、简单的几何关系以及群的特征标理论,我们推导了求解绕任意轴 μ 旋转 ϕ 对应的欧拉角的新公式,这组公式只有 3 个表达式,比式(21a)～(21d)更简洁;应用得到的公式,我们正确求出了绕通过原点和(1,1,1)点的直线旋转 2π/2 的欧拉角;把欧拉角结果代入式(10),我们得到了转动操作的表示矩阵;最后,我们分析了文献[7]给出的结果所存在的问题,同时作了相应修正.

参考文献:

[1]　徐亦庄. 分子光谱理论[M]. 北京:清华大学出版社,1998. 98～113.

[2]　徐光宪,黎乐民. 量子化学:基本原理和从头计算法(上册)[M]. 北京:科学出版社,1995. 387～394.

[3]　鲁崇贤,赵长惠. 分子点群及其应用[M]. 北京:高等教育出版社,1995. 159～169.

[4]　杰尔 R N. 角动量:化学及物理学中的方位问题[M]. 赖善桃等译. 北京:科学出版社,1995. 79～84.

[5]　曾谨言. 量子力学　卷 II[M]. 北京:科学出版社,2004. 304～314.

[6]　韩其智,孙洪州. 群论[M]. 北京:北京大学出版社,1988. 101～105.

[7]　方可. 群论及其在物理和化学中的应用[M]. 重庆:重庆大学出版社,1987. 117～126.

(下转 58 页)

Cavity effect in granular matter

WANG Wei-ming , HU Lin
(Department of Physics , Photoelectron Technology and Application Lab , Guizhou University , Guiyang 550025 ,China)

Abstract : The cavity effect in granular matter is studied experimentally. When pulling a stick out the granular matter , it create a sustained cavity under it , and all the system 's construction will be breakdown because of the cavity , the breakdown situation can be explored by the friction force of the stick. The relationship between the breakdown time t and the cavity 's depth h is exponential , t is proportion to $\exp(h/\lambda)$ that we obtained by experiment , and it is unaffected by changing the granular size. We do an two-dimension experiment at the same time , to understand the inside situation of the granular matter clearly.

Key words : granular matter ; cavity ; force chain ; breakdown time

(上接 33 页)

New formulae of Euler angle related to rotating ϕ around arbitrary axis μ

WANG Mei-shan ,LI Wen-liang , YANG Chuan-lu ,WANG De-hua ,REN Ting-qi
(School of Physics and Electronic Engineering ,Ludong University , Yantai 264025 ,China)

Abstract :The method of how to obtain the representation matrix of rotation operation with respect to Euler angles was reviewed. New formulae of Euler angle related to rotating ϕ around arbitrary axis μ are deduced according to cosine theorem ,simple geometry relations and character theory of group. Euler angles related to rotating $2\pi/3$ around line which passes origin and (1 ,1 ,1) are obtained employing the obtained expressions.

Key words :Euler angles ;direction cosine ;group representation ;character of group

(上接 38 页)

参考文献 :

[1] 丁慎训 ,张连芳. 物理实验教程[M]. 北京 :清华大学出版社 ,2002. 9 ,27～31.

A new method using torsion pendulum to verify the parallel axis theorem

QIU Ju[1] ,LIU Yu-xing[2] , KONG Yan[1]
(1. The Pilot College ,Beijing University of Technology ,Beijing 100024 ,China ;
2. College of Applied Science ,Beijing University of Technology ,Beijing 100022 ,China)

Abstract :A new method using torsion pendulum to verify the parallel axis theorem is reported.

Key words :moment of inertia ;parallel axis theorem ; torsion pendulum