三次NURBS曲线曲面矩阵形式的求导计算[1]

吴宝海，王尚锦
西安交通大学能源与动力工程学院（710049）
Email：wubaohaimail@163.com

摘　要：针对在 CAGD 中最为常用的三次 NURBS 曲线曲面，本文对其矩阵形式的求导计算进行了推导，给出了矩阵形式的任意阶导数计算公式。算例表明，该方法实用可靠，并且显著降低了程序的计算量。

关键词：NURBS，矩阵，导数

1．引言

在CAGD中，构造自由型曲线曲面是很重要的一个方面，以往最常用的是B样条方法，它具有能保证曲线曲面具有一定阶数连续性，曲线曲面局部修改方便，计算简便等优点。但是B样条形式不能精确的描述各种解析曲线曲面，如圆锥曲线、锥面等[2, 3]。为此，1975 年Versprille首先考虑到采用有理分式的方法来描述，即有理B样条方法[2]。NURBS对标准解析形状和自由曲线曲面提供了统一的数学表示（非有理B样条、有理及非有理的Bézier曲线曲面是NURBS的特例表示）。因此，国际标准化组织（ISO）在 1991 年颁布的工业产品几何定义STEP标准中，NURBS被定义为唯一的自由型曲线曲面的表示方法[4]。

常用的NURBS曲线曲面的表达形式有两种，一种是基于de Boor算法的递推形式，另一种是矩阵表示形式。其中，de Boor算法概念清晰，但算法复杂，计算量大[1]。由于NURBS表达式的特殊性（有理分式及节点的非均匀）使得其矩阵表达式的求导变得困难起来。基于此，本文推导了NURBS矩阵形式的求导计算，使得程序的计算量大为降低，并且随着MATLAB语言在工程计算中的普及，其强大的矩阵运算功能将使得该方法的优越性得以充分的发挥。

2．B 样条曲线的矩阵表示及其导数计算

B 样条曲线是由分段 B 样条多项式基函数定义的，表示为

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n} p_i N_{i,k}(u) \tag{1}$$

其中，p_i 为控制顶点，$N_{i,k}(u)$ 是 k 次 B 样条基函数。

$$\begin{cases} N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \\ N_{i,k}(u)=\dfrac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i}N_{i,k-1}(u)+\dfrac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}}N_{i+1,k-1}(u) \end{cases}$$

[1]本课题得到高等学校博士学科点专项科研基金（项目编号：20020698042）资助

规定$\frac{0}{0}=0$，节点矢量$U=\{u_0,u_1,\cdots,u_m\}(m=n+k+1)$， n为控制点数减 1。k次B 样条的支撑区间包含$k+1$个节点区间，因此在参数u轴上任一点$u\in[u_i,u_{i+1}]$处，就至多有$k+1$非零的k次 B 样条$N_{j,k}(u)$， $j=i-k,i-k+1,\cdots,i$，其他k次 B 样条基函数在该处为零。一般来讲，k次 B 样条的定义域为$u\in[u_k,u_{n+1}]$。因为为了获得 Bézier 曲线的端点几何性质，首末节点的重复度均为$k+1$。

对于定义域内节点列$U=\{u_k,u_{k+1},\cdots,u_{n+1}\}$，引进新的符号$\nabla$，设

$$\nabla_i^1=\nabla_i=u_{i+1}-u_i$$

$$\nabla_i^2=\nabla_i+\nabla_{i+1}=u_{i+2}-u_i$$

$$\nabla_i^3=\nabla_i+\nabla_{i+1}+\nabla_{i+2}=u_{i+3}-u_i$$

$\vdots$

特别地，$\nabla^0=0$，得到定义域内节点生成列$DU=\{\nabla_k,\nabla_1,\nabla_2,\cdots,\nabla_n\}$

B K Choi[1]采用Boehm[5]的递推公式将B样条基函数化为矩阵形式，对于$u\in[u_i,u_{i+1}]$，令$t=(u-u_i)/(u_{i+1}-u_i)=(u-u_i)/\nabla_i$，则三次B样条曲线方程可写为

$$C_i(t)=(1,t,t^2,t^3)N_i(p_{i-3},p_{i-2},p_{i-1},p_i)^T,\ (i=k,k+1,\cdots,n) \tag{2}$$

其中，

$$N_i=\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ n_{41} & n_{42} & n_{43} & n_{44} \end{bmatrix}$$

$$n_{11}=\frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^2\nabla_{i-2}^3},\quad n_{13}=\frac{(\nabla_{i-1})^2}{\nabla_{i-1}^3\nabla_{i-1}^2},\quad n_{12}=1-n_{11}-n_{13},\quad n_{14}=0$$

$$n_{21}=-3n_{11},\quad n_{23}=\frac{3\nabla_i\nabla_{i-1}}{\nabla_{i-1}^3\nabla_{i-1}^2},\quad n_{22}=3n_{11}-n_{23},\quad n_{24}=0$$

$$n_{31}=3n_{11},\quad n_{33}=\frac{3(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^3\nabla_{i-1}^2},\quad n_{32}=-3n_{11}-n_{33},\quad n_{34}=0$$

$n_{41}=-n_{11}$， $n_{43}=-\left[\frac{1}{3}n_{33}+n_{44}+\frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_i^2\nabla_{i-1}^3}\right]$， $n_{42}=n_{11}-n_{43}-n_{44}$，

$n_{44}=\frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_i^3\nabla_i^2}$

记$T=(1,t,t^2,t^3)$， $P_i=(p_{i-3},p_{i-2},p_{i-1},p_i)$则（2）式可记为

$$C_i(t)=TN_iP_i^T，(i=k,k+1,\cdots,n) \qquad (3)$$

对（3）式求导，即对T求导，其余各项保持不变。

$$T^{'}=(0,1,2t,3t^2)$$

$$T^{''}=(0,1,2,6t)$$

$$T^{'''}=(0,0,0,6)$$

所以，对于 B 样条曲线的r阶导数，其表达式为

$$C_i^{(r)}(t)=T^{(r)}N_iP_i^T \qquad (4)$$

3. NURBS 求导计算

3.1 NURBS 曲线的求导计算

对于 NURBS 曲线

$$C_i(u)=\frac{\sum_{j=i-k}^{i}w_jp_jN_{j,k}(u)}{\sum_{j=i-k}^{i}w_jN_{j,k}(u)} \qquad (5)$$

其中，$u\in[u_i,u_{i+1}],i=k,k+1,\cdots,n$，令$t=(u-u_i)/(u_{i+1}-u_i)=(u-u_i)/\nabla_i$，与之对应的矩阵形式是

$$C_i(t)=\frac{(1,t,t^2,t^3)N_i(w_{i-3}p_{i-3},w_{i-2}p_{i-2},w_{i-1}p_{i-1},w_ip_i)^T}{(1,t,t^2,t^3)N_i(w_{i-3},w_{i-2},w_{i-1},w_i)^T}，u\in[u_i,u_{i+1}] \qquad (6)$$

可以将其变形成如下形式

$$C_i^*(t)=(1,t,t^2,t^3)N_i(w_{i-3}p_{i-3},w_{i-2}p_{i-2},w_{i-1}p_{i-1},w_ip_i)^T，$$

$$W_i(t)=(1,t,t^2,t^3)N_i(w_{i-3},w_{i-2},w_{i-1},w_i)^T，$$

记$\psi_i=w_ip_i$， $\Psi_i=[\psi_{i-3},\psi_{i-2},\psi_{i-1},\psi_i]$， $Z_i=(w_{i-3},w_{i-2},w_{i-1},w_i)$，则

$$C_i^*(t) = TN_i\Psi_i^T$$

$$W_i(t) = TN_iZ_i^T$$

于是，（6）式可写成如下形式

$$C_i(t) = \frac{C_i^*(t)}{W_i(t)} \tag{7}$$

从而，我们可以得到如下的 NURBS 曲线的导矢计算公式

$$C_i^{'}(t) = \frac{C_i^{*'}(t) - W_i^{'}(t)C_i(t)}{W_i(t)} \tag{8}$$

$$C_i^{''}(t) = \frac{C_i^{*''}(t) - 2W_i^{'}(t)C_i^{'}(t) - W_i^{''}(t)C_i(t)}{W_i(t)} \tag{9}$$

更高阶的导矢计算公式可用如下的递推公式来表示

$$C_i^{(r)}(t) = \frac{C_i^{*(r)}(t) - \sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}W_i^{(j)}(t)C_i^{(r-j)}(t)}{W_i(t)} \tag{10}$$

$C_i^*(t)$与$W_i(t)$均可看作 B 样条曲线，其求导算法也基本一致。

$$C_i^{*(r)}(t) = T^{(r)}N_i\Psi_i^T$$

$$W_i^{(r)}(t) = T^{(r)}N_iZ_i^T$$

因此，三次 NURBS 曲线的导矢计算公式写成矩阵形式可以表示为

对于$r=1$，

$$C_i^{'}(t) = \frac{T^{'}N_i\Psi_i^T - (T^{'}N_iW_i^T)C_i(t)}{TN_i\Psi_i^T} \tag{11}$$

对于$r=2$，

$$C_i^{''}(t) = \frac{T^{''}N_i\Psi_i^T - 2(T^{'}N_iW_i^T)C_i^{'}(t) - (T^{''}N_iW_i^T)C_i(t)}{TN_i\Psi_i^T} \tag{12}$$

其余，依次类推。

3.2 NURBS 曲面的求导计算

类似于 NURBS 曲线，一张$k\times l$次 NURBS 曲面可表示为

$$\Omega(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}w_{ij}p_{ij}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}w_{ij}N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)} \tag{13}$$

对于双三次 NURBS 曲面，我们首先需要得到其矩阵的表达形式。由节点列 $U=\{u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{n+k+1}\}$得到定义域内节点生成列 $DU=\{\nabla_k^u,\nabla_{k+1}^u,\cdots,\nabla_n^u\}$；由节点列 $V=\{v_0,v_1,\cdots,v_{m+l+1}\}$ 得到节点列 $DV=\{\nabla_l^v,\nabla_{l+1}^v,\cdots,\nabla_m^v\}$。对于 $u\in[u_i,u_{i+1}]$，令 $t=(u-u_i)/(u_{i+1}-u_i)=(u-u_i)/\nabla_i^u$；对于 $v\in[v_j,v_{j+1}]$，令 $s=(v-v_j)/\nabla_j^v$，则非均匀有理双三次 B 样条曲面可写为

$$\Omega_{ij}(t,s)=\frac{TN_{u,i}P_{w,ij}N_{v,j}^TS^T}{TN_{u,i}W_{ij}N_{v,j}^TS^T} \tag{14}$$

其中，$P_{w,ij}$ 为相应的权因子与控制点的乘积。NURBS 曲面的求导计算主要为计算其 u、v 向偏导矢和 uv 混合偏导矢。曲面 u 向和 v 向偏导矢的计算完全一样，以 u 向偏导矢的计算为例说明。

这样，与 NURBS 曲线相同，我们将 NURBS 曲面写成如下形式

$$\Omega_{i,j}(t,s)=\frac{\Omega_{ij}^*(t,s)}{W_{ij}(t,s)} \tag{15}$$

其中

$$\Omega_{i,j}^*(t,s)=TN_{u,i}P_{w,ij}N_{v,j}^TS^T$$

$$W_{i,j}(t,s)=TN_{u,i}W_{ij}N_{v,j}^TS^T$$

以局部参数 t,s 表示的 NURBS 曲面，其 u 向 r 阶偏导矢的计算即转化为对参数 t 求 r 阶偏导，递归公式为

$$\Omega_{t,ij}^{(r)}(t,s)=\frac{\Omega_{t,ij}^{*(r)}(t,s)-\sum_{j=1}^{r}\binom{r}{j}W_{t,ij}^{(j)}(t,s)\Omega_{t,ij}^{(r-j)}(t,s)}{W_{i,j}(t,s)} \tag{16}$$

其中，$\Omega_{t,ij}^{*(r)}(t,s)$和$W_{t,ij}^{(r)}(t,s)$的计算同 NURBS 曲线的计算相同。获得 NURBS 曲面的 u 向 r 阶偏导矢 $\Omega_{t,ij}^{(r)}(t,s)$后，再对 v 向求 q 阶偏导矢，即可得该曲面的 $r\times q$ 阶混合偏导矢 $\Omega_{t,s}^{(r)(q)}(t,s)$。以$1\times1$阶混合偏导矢为例，我们容易得到

$$\Omega^{11}_{t,s,ij}(t,s)=\frac{\Omega^{*11}_{t,s,ij}(t,s)-W^{1}_{t,ij}(t,s)\Omega^{1}_{t,ij}(t,s)-W^{1}_{s,ij}(t,s)\Omega^{1}_{t,ij}(t,s)-W^{11}_{t,s,ij}(t,s)\Omega_{ij}(t,s)}{W_{ij}(t,s)} \qquad (17)$$

其中，${\Omega^{*}_{t,s,ij}}^{11}(t,s)$、$W^{11}_{t,s,ij}(t,s)$类似于 B 样条曲面混合偏导矢的计算。

4. 算例

本文针对圆弧（$r=1$的半圆)、正弦曲线以及三维自由曲面进行了求导计算，并且得出了圆与正弦曲线的切线（取长度为 1）和曲率以及自由曲面的单位法矢量。实践表明，本文发展的方法实用可靠，并且由于避免了 deboor 算法中基函数的计算，使得计算效率大大提高，以自由曲面法矢量的计算为例，得到图 3 所示的图形（曲面网格数 25×25,法矢量个数 25），deboor 算法需要机时 1.061 秒，而本文的算法只需 0.826 秒，节约了 12.72%的计算时间。当曲面曲线计算点增多时，本文算法的优势将更为突出，并且更加适合具有强大矩阵计算功能的 MATLAB 语言编程计算，降低了编程的难度。

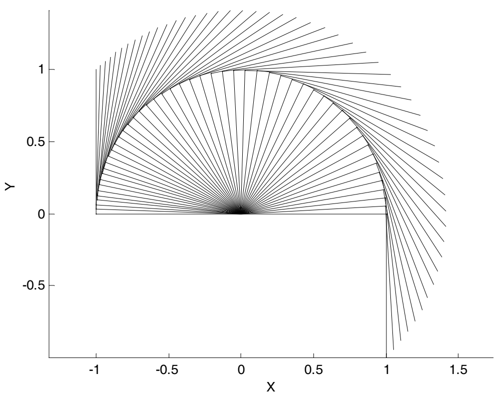

图 1 半圆切线及曲率计算

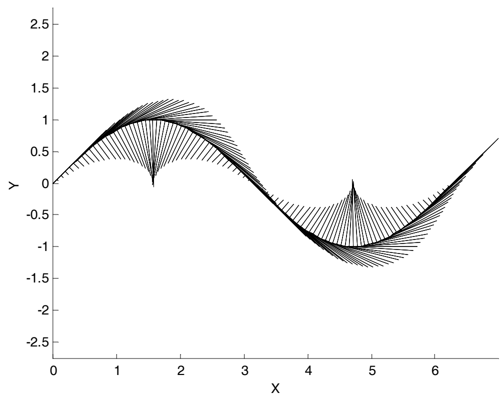

图 2 正弦曲线切线及曲率的计算

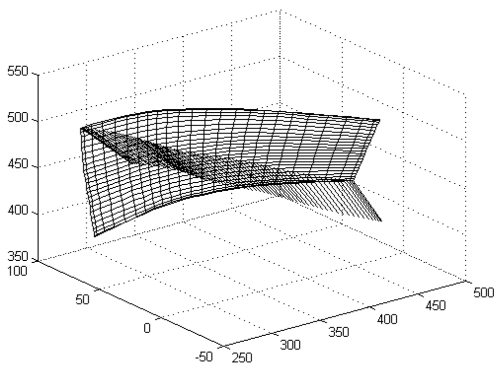

图 3 三维曲面单位法矢量的计算

5. 结论

本文发展了 NURBS 曲线曲面矩阵形式的求导计算。该方法稳定可靠，并且显著降低了计算量。在计算机辅助几何设计、CAD/CAM 中具有很强的实用性，并且随着 MATLAB 语言在工程计算中的大量应用，该方法的优越性将得到充分体现。

参考文献

1. B K Choi, Matrix representation for NURB curves and surfaces, CAD，Vol. 22, No.4, 235-240,1990。
2. 施法中，计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条，北京航空航天大学出版社，1994。
3. 孙家广，杨长贵，计算机图形学，北京，清华大学出版社，1990。
4. 朱心雄，自由曲线曲面造型技术，科学出版社，20000。
5. Boehm W, Inserting new knots into B-spline curves, CAD, Vol. 12, No. 4, 199-201, 1980。

Derivative calculation of the cubic NURBS curves and surfaces based on the matrix representation

Wu Baohai　Wang Shangjin

（School of Energy and Power Engineering, Xi’an Jiaotong University, Xi’an　710049）

Abstract

This paper provides an algorithm for calculating the derivatives of cubic NURBS curves and surfaces, which are commonly used in engineering. Based on the matrix representation, the arbitrary order derivative of cubic NURBS curves and surfaces is obtained. Examples show that the algorithm is practical and stable, and reduces the computing time remarkably.

Keywords：NURBS, Matrix, Derivative