

# 一种新的全角度四元数与欧拉角的转换算法<sup>\*</sup>

张 帆<sup>\*\*</sup> 曹喜滨 邹经湘

(清华大学计算机科学与技术系, 北京 100084)

(哈尔滨工业大学航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

**摘要** 传统的四元数和欧拉角之间的转换只能是 3 个轴的欧拉角都在  $\pm 90^\circ$  之间取值, 或者 2 个轴的欧拉角在  $\pm 180^\circ$  之间, 另一个轴在  $\pm 90^\circ$  之间取值, 因而不能实现全角度的四元数与欧拉角之间的转换。该文提出了一个新的转换算法, 该算法能在 3 个轴的欧拉角都在  $\pm 180^\circ$  之间进行四元数与欧拉角的转换。仿真结果显示, 该算法的正确和实用。

**关键词** 四元数, 姿态控制, 欧拉角

**分类号** V448.22

用欧拉角表示的飞行器姿态运动学方程在大角度时会出现奇异现象, 而采用四元数来表示, 则可以避免这个问题。因此, 飞行器运动学方程都采用四元数来表示。而飞行器的控制规律都采用欧拉角来表示, 且欧拉角表示姿态角比起四元数更加形象, 更易于被人理解, 所以, 在飞行器控制系统仿真设计的时候, 需要四元数与欧拉角之间的转换。给定 1 个欧拉角, 对应 1 个四元数, 因而欧拉角到四元数之间这种一一对应的关系使得欧拉角到四元数的转换比较容易。但是, 1 个四元数通常有 1 个或者 2 个欧拉角与之对应, 它们之间不是一一对应的关系, 因而, 四元数到欧拉角之间的转换比较困难。一般文献或者参考资料上的转换仅仅适于欧拉角在  $-90^\circ \sim +90^\circ$  之间的情况<sup>[1]</sup>。文献[2, 3]中给出了滚动轴在  $-90^\circ \sim +90^\circ$  之间变化, 俯仰轴、偏航轴在  $-180^\circ \sim +180^\circ$  之间变化的四元数到欧拉角的转换公式。本文提出了滚动、俯仰和偏航 3 个轴的欧拉角均在  $-180^\circ \sim +180^\circ$  之间取值的全角度转换算法, 经过数字仿真证实, 这个算法是完全正确的、而且很实用。

## 1 四元数与欧拉角

定义  $e$  为旋转特征向量,  $e = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$ 。以  $e$  为旋转轴, 旋转角度  $\theta$ , 则方向余弦矩阵可表示为

$$A = \cos \theta I_{3 \times 3} + [1 - \cos \theta] e \cdot e^T - \sin \theta e^\times \quad (1)$$

式中,  $I_{3 \times 3}$  为单位矩阵,  $e^\times$  定义为

<sup>\*</sup> 收稿日期: 2001 - 05 - 21

<sup>\*\*</sup> 张 帆 男 28 岁 博士生

$$e^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

展开公式(1), 可得

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta + e_1^2(1 - \cos \theta) & e_1 e_2(1 - \cos \theta) + e_3 \sin \theta & e_1 e_3(1 - \cos \theta) - e_2 \sin \theta \\ e_1 e_2(1 - \cos \theta) - e_3 \sin \theta & \cos \theta + e_2^2(1 - \cos \theta) & e_2 e_3(1 - \cos \theta) + e_1 \sin \theta \\ e_1 e_3(1 - \cos \theta) + e_2 \sin \theta & e_2 e_3(1 - \cos \theta) - e_1 \sin \theta & \cos \theta + e_3^2(1 - \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

设方向余弦矩阵  $A$  的元素为  $a_{ij}$ , 旋转特征向量  $e$  的元素可表示为

$$e_1 = \frac{a_{23} - a_{32}}{2\sin \theta} \quad e_2 = \frac{a_{31} - a_{13}}{2\sin \theta} \quad e_3 = \frac{a_{12} - a_{21}}{2\sin \theta} \quad (4)$$

四元数由矢量部分和标量部分组成, 可写成如下形式:

$$q = q_4 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = q_4 + q_v \quad (5)$$

根据旋转特征向量和旋转角, 定义四元数矢量部分和标量部分如下:

$$\begin{cases} q_1 = e_1 \sin(\theta/2) & q_2 = e_2 \sin(\theta/2) \\ q_3 = e_3 \sin(\theta/2) & q_4 = \cos(\theta/2) \end{cases} \quad (6)$$

(6) 式满足

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad |q| = 1 \quad (7)$$

根据(4) 式和(6) 式, 方向余弦矩阵可用四元数表示为

$$A(q) = (q_4^2 - q_v^T) I_{3 \times 3} + 2 q_v \cdot q_v^T - 2 q_4 q^{\times} \quad (8)$$

$$\text{式中, } q^{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$A(q) = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

显然, 方向余弦矩阵与欧拉角转动顺序有关, 本文以  $Z - Y - X$  转动顺序为例, 即先绕偏航轴转动, 其方向余弦矩阵为  $A_3(\cdot)$ ; 接着绕俯仰轴转动, 其方向余弦矩阵为  $A_2(\cdot)$ ; 最后绕滚动轴转动, 其方向余弦矩阵为  $A_1(\cdot)$ 。则  $Z - Y - X$  转动的方向余弦矩阵为

$$A_{321}(\alpha, \beta, \gamma) = A_1(\gamma) A_2(\beta) A_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (11)$$

设  $Z - Y - X$  转动的四元数为  $q$ , 用四元数表示,  $Z - Y - X$  转动的方向余弦矩阵即是公式(10)。

## 2 欧拉角到四元数的转换

欧拉角到四元数的转换则可以应用超复数映象概念求得。对于  $Z-Y-X$  变换, 欧拉角到四元数的转换可表示为

$$q = (\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot k) \circ (\cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cdot j) \circ (\cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cdot i) \quad (12)$$

将(12)式展开, 得欧拉角到四元数的转换公式:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ -\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 3 四元数到欧拉角的转换

### 3.1 3个轴在 $\pm 90^\circ$ 之间取值

若3个轴在  $\pm 90^\circ$  之间取值, 则比较(10)和(11)式, 得四元数到欧拉角的转换公式为

$$\alpha = \arctan(A_{23}/A_{33}) \quad \beta = \arcsin(-A_{13}) \quad \gamma = \arctan(A_{12}/A_{11}) \quad (14)$$

式中,  $A_{ij}$  为(11)式中方向余弦矩阵的元素。

### 3.2 俯仰轴在 $\pm 90^\circ$ 之间, 滚动和偏航轴在 $\pm 180^\circ$ 之间取值

如果考虑俯仰角在  $-90^\circ \sim +90^\circ$  之间取值, 滚动角和偏航角在  $-180^\circ \sim +180^\circ$  之间取值, 则四元数到欧拉角的转换公式为

$$\begin{cases} \alpha = \begin{cases} \arctan(A_{23}/A_{33}) & A_{33} > 0 \\ -\text{sign } A_{23} + \arctan(A_{23}/A_{33}) & A_{33} < 0 \end{cases} \\ \beta = \arcsin(-A_{13}) \\ \gamma = \begin{cases} \arctan(A_{12}/A_{11}) & A_{11} > 0 \\ -\text{sign } A_{12} + \arctan(A_{12}/A_{11}) & A_{11} < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (15)$$

### 3.3 3个轴在 $\pm 180^\circ$ 之间取值

如果俯仰角取值范围在  $-180^\circ \sim -90^\circ$  或  $+90^\circ \sim +180^\circ$  之间, 滚动角和偏航角取值范围在  $-180^\circ \sim +180^\circ$  之间, 则四元数到欧拉角的转换公式为

$$\begin{cases} \alpha = \begin{cases} \arctan(A_{23}/A_{33}) & A_{33} < 0 \\ -\text{sign } A_{23} + \arctan(A_{23}/A_{33}) & A_{33} > 0 \end{cases} \\ \beta = -\text{sign } A_{13} - \arcsin(-A_{13}) \\ \gamma = \begin{cases} \arctan(A_{12}/A_{11}) & A_{11} < 0 \\ -\text{sign } A_{12} + \arctan(A_{12}/A_{11}) & A_{11} > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

如果欧拉角取值范围都是在  $-180^{\circ} \sim +180^{\circ}$  之间, 给定一四元数  $Q$ , 则对应公式 (15) 和 (16) 存在 2 个欧拉角  $A_1$  和  $A_2$ , 根据欧拉角四元数转换公式, 可以求出它们分别对应的 2 个四元数  $Q_1$  和  $Q_2$ 。如果这 2 个四元数中只有 1 个与给定四元数  $Q$  相等, 则输出那个四元数所对应的欧拉角。如果这 2 个四元数都与给定四元数  $Q$  相等, 则输出与参考欧拉角  $R$  最接近的那个欧拉角。通常取参考欧拉角  $R$  为上一时刻的欧拉角。图 1 给出了详细的转换流程, 与通常的转换相比<sup>[2,3]</sup>, 该转换流程实现了四元数到欧拉角的全角度变换。

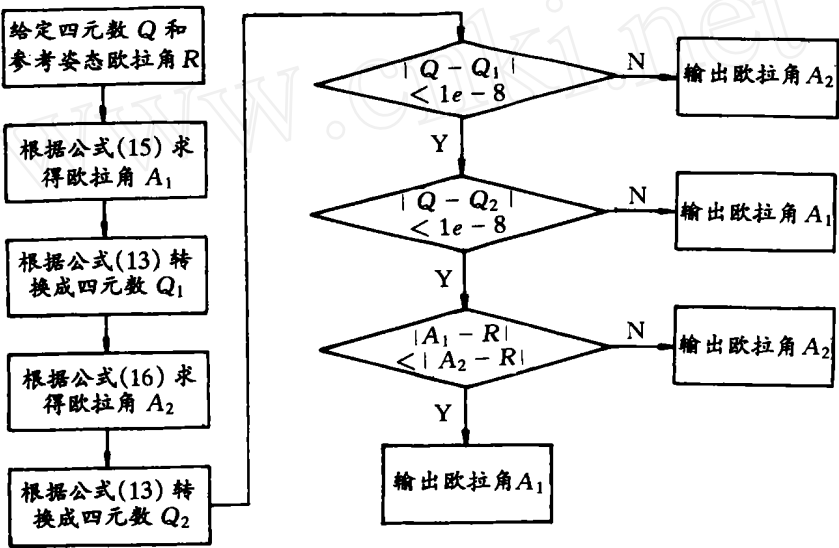


图 1 四元数到欧拉角的转换流程图

Fig. 1 Flowchart of transformation from quaternion to Euler angle

4 数字仿真

欧拉角到四元数的转换显示是正确的, 同时, 3 个轴取值范围在  $\pm 90^{\circ}$  之间的全角度四元数到欧拉角的转换显然能正确输出结果, 所以, 这里就省略它们的数字仿真。

不失一般性, 给出对应  $\alpha = -140^{\circ}$ 、 $\beta = +140^{\circ}$ 、 $\gamma = [-180^{\circ} \ 60^{\circ} \ +180^{\circ}]$  的四元数。算法 1 是俯仰轴在  $\pm 90^{\circ}$  之间, 滚动轴和偏航轴在  $\pm 180^{\circ}$  之间取值的转换算法, 算法 2 是本文提出的全角度四元数与欧拉角的转换算法。这 2 个算法的结果比较见表 1。

表 1 四元数到欧拉角的转换输出比较 (单位:  $^{\circ}$ )

Table 1 Compare on transformation output from quaternion to Euler angle ( $^{\circ}$ )

给定四元数	真实欧拉角	算法 1 输出结果	算法 2 输出结果
[0.321 4, 0.117 0, 0.321 4, 0.883 0]	[- 140, - 180, 140]	[40, - 0, - 40]	[- 140, - 180, 140]
[0.117 6, 0.542 8, 0.117 6, 0.823 2]	[- 140, - 120, 140]	[40, - 60, - 40]	[- 140, - 120, 140]
[0.117 6, 0.823 2, 0.117 6, 0.542 8]	[- 140, - 60, 140]	[- 140, - 60, 140]	[- 140, - 60, 140]
[- 0.321 4, - 0.883 0, 0.321 4, 0.117 0]	[- 140, 0, 140]	[- 140, 0, 140]	[- 140, 0, 140]
[- 0.439 0, - 0.706 2, 0.439 0, - 0.340 2]	[- 140, 60, 140]	[- 140, 60, 140]	[- 140, 60, 140]
[- 0.439 0, - 0.340 2, 0.439 0, - 0.706 2]	[- 140, 120, 140]	[- 140, 120, 140]	[- 140, 120, 140]
[- 0.321 4, 0.117 0, 0.321 4, - 0.883 0]	[- 140, 180, 140]	[- 140, 180, 140]	[- 140, 180, 140]

显然,对于俯仰轴在  $\pm 90^\circ$  之间取值,算法 1 能得出正确结果,但当俯仰轴不在该区间,算法 1 不能完全得出正确结果。而本文提出的全角度四元数与欧拉角的转换算法能完全在整个区间内正确转换。

综上所述,本文提出了一种新的全角度四元数与欧拉角之间的转换算法。仿真表明,这个算法是完全正确的和实用的,特别对于大角度姿态机动运动学方程,具有非常好的实用性。虽然本文只是针对  $Z-Y-X$  的欧拉转换给出了算法的计算公式,但是对于其它变换的计算公式,读者不妨参考文献[4]得出。

## 参 考 文 献

- 1 Werta J. Spacecraft attitude determination and control. Dordrecht:Reidel,1978
- 2 许佩珍,董长虹. 四元数在战斗机飞行仿真中的应用. 北京航空航天大学学报,1997,23(4): 487~491
- 3 田春华. 卫星姿态控制系统的分析、设计和仿真研究:[硕士学位论文]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2000
- 4 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制. 北京:北京航空航天大学出版社,1998
- 5 张帆. 光学遥感卫星总体参数优化设计研究:[硕士学位论文]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,1998
- 6 张景瑞,荆武兴,徐世杰. 空间飞行器大角度姿态跟踪机动问题研究. 飞行力学,1999,17(3): 87~91
- 7 陈万春,肖亚伦. 矢阵与四元数的关系及其在飞行力学中的应用. 宇航学报,1997,18(1):23~39

## A New Large-scale Transformation Algorithm of Quaternion to Euler Angle

Zhang Fan Cao Xibin Zou Jingxiang

(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084)

( Department of Space Engineering and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

**ABSTRACT** Usually, transformation between quaternion and Euler angle is constricted to Euler angle's value from negative  $90^\circ$  to positive  $90^\circ$  in three axes or one axis. A new algorithm that can cope with a large-scale transformation between quaternion and Euler angle which can be valued from negative  $180^\circ$  to positive  $180^\circ$ , is presented in the paper. Digital simulation results show that it is perfectly feasible and applicable.

**KEY WORDS** quaternion, attitude control, Euler angle