Κεφ 5: Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

§ 1 Το Θεώρημα μέσης τιμής

- Παρατήρηση: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη και συνεχής

Έστω $m=\min\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}$ και $M=\max\{f(x): x\in[\alpha,\beta]\}$.

Από Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής: $\forall y\in[m,M], \exists x\in[\alpha,\beta]$ τ.ω. $f(x)=y$.

Επίσης καθώς $m\le f(x)\le M, \forall x\in[\alpha,\beta]$ έχουμε ότι

$$m(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\le M(\beta-\alpha)\Rightarrow m\le\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\le M$$

Άρα $\exists\xi\in[\alpha,\beta]$ τ.ω $f(\xi)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

Αναγκαιότητα συνέχειας: Θεωρείστε $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1 & x\ge 1\\ 0 & x<1\end{cases}$

Τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη με $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\notin f([0,2])$.

- Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με μη αρνητικές τιμές. Τότε $\exists\xi\in[\alpha,\beta]$ τ.ω.

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$ [Για $g(x)=1, \forall x\in[\alpha,\beta]$ έχουμε την παρατήρηση]

§2 Τα Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

- <u>Ορ</u> (Αόριστο ολοκλήρωμα): Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Το αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι η συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ τ.ω. $\forall x\in[\alpha,\beta]$: $F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt$.

- <u>Ιδιότητες αόριστου ολοκληρώματος</u>: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και F το αόριστο ολοκλήρωμα της f.

  1) Η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

  2) Αν $x_0\in[\alpha,\beta]$ και η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $F'(x_0)=f(x_0)$.

  3) <u>Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού</u>: Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη και $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$.

- <u>Ορ</u> (Παράγουσα): Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Μία $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ καλείται παράγουσα της f, αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $\forall x\in[\alpha,\beta]$: $\varphi'(x)=f(x)$.

- <u>Παρατηρήσεις</u>: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής

  1) Αν $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε η F είναι παράγουσα της f.

  2) Αν η φ είναι παράγουσα της f και $c\in\mathbb{R}$, τότε η $\varphi+c$ είναι παράγουσα της f.

  3) Έστω φ_1,φ_2 δύο παράγουσες της f. Τότε $\forall x\in[\alpha,\beta]$ έχουμε $(\varphi_1-\varphi_2)'(x)=\varphi_1'(x)-\varphi_2'(x)=f(x)-f(x)=0 \Rightarrow$ η $\varphi_1-\varphi_2$ είναι σταθερή.

Άρα $\exists c \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) + c$

4) Ειδικότερα, αν η G είναι παράγουσα της f, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τ.ω. $G = F + c$ όπου F το αόριστο ολοκλήρωμα της f

Επίσης $F(\alpha) = \int_\alpha^\alpha f(t)dt = 0 \Rightarrow G(\alpha) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + G(\alpha)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$

$$= \int_\alpha^x f(t)dt + G(\alpha)$$

$$\Rightarrow G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

• Θεώρημα (2° Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

Έστω $G : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta G'(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$

Άρα έχουμε επίσης $G(x) = G(\alpha) + \int_\alpha^x G'(t)dt$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

• Παρατήρηση: Δεν είναι σωστό ότι $\int_\alpha^\beta G'(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$ αν υποθέσουμε ΜΟΝΟ ότι η $G : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη.

§3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

• Συμβολισμός: Αν $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ τότε $[F(x)]_\alpha^\beta = F(x)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha)$

• Θεώρημα ολοκλήρωσης κατά μέλη: Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες.

Τότε $\forall x \in [\alpha, \beta]$: $\int_\alpha^x f(t)g'(t)dt = (f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(\alpha) - \int_\alpha^x f'(t)g(t)dt$

και ειδικότερα $\int_\alpha^\beta f \cdot g' = [f \cdot g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f' \cdot g$

○ <u>Θεώρημα αντικατάστασης</u>: Έστω $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με φ' ολοκληρώσιμη. Αν $I = \varphi([\alpha, \beta])$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\, ds$

§4 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Επεκτάσεις ορισμού ολοκληρώματος

○ <u>1η περίπτωση</u>: Έστω $b \in \mathbb{R}$ ή $b = +\infty$ και $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ τ.ω. $\forall x \in (a, b)$ έχουμε ότι η f ολοκληρώσιμη στο $[a, x]$.
Αν υπάρχει το όριο (στο $\mathbb{R}$) $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b)$ και ορίζουμε $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$.
Αν το όριο $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ αποκλίνει στο $\pm\infty$, τότε λέμε ότι $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ αποκλίνει στο $\pm\infty$ αντίστοιχα.

○ <u>2η περίπτωση</u>: Ομοίως αν $a \in \mathbb{R}$ ή $a = -\infty$ και $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ τ.ω. η f ολοκληρώσιμη στο $[x, b]$, $\forall x \in (a, b)$, τότε ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f στο $(a, b]$ ως $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$

<u>Παραδείγματα</u>: 1) Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2}$
Για κάθε $x > 1$ έχουμε $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to \infty} 1$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, \infty)$ και $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1$.

2) Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \left[\ln t\right]_1^x = \ln x \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty. \text{ Άρα } \int_1^{\infty}\frac{dt}{t}=+\infty.$$

3) Έστω $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x$ (δεν είναι φραγμένη).

Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε $(x\ln x - x)' = \ln x$ και

$$\int_x^1 \ln t\, dt = \left[t\ln t - t\right]_x^1 = -1 - x\ln x + x \xrightarrow{x\to 0^+} -1$$

$$\left[\text{L'Hospital } \lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0\right].$$

Άρα $\int_0^1 \ln t\, dt = -1$

4) Έστω $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \underset{\uparrow}{=} -\int_0^x \frac{\varphi'(t)\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}} = -\int_1^{1-x}\frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_{1-x}^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left[2\sqrt{s}\right]_{1-x}^1 = 2(1-\sqrt{1-x})$$

$\varphi(t)=1-t$, $\varphi'(t)=-1$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(x)=1-x$

$$\text{Άρα } \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x\to1^-}\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x\to1^-}\left(2(1-\sqrt{1-x})\right) = 2$$

• <u>3η περίπτωση</u>: Υποθέτουμε ότι $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$ και $b\in\mathbb{R}$ ή $b=+\infty$.

Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ τ.ω. $\forall a<x<y<b$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,y]$.

Θεωρούμε τυχόν $c\in(a,b)$. Αν υπάρχουν τα $\int_a^c f(x)\,dx$ και $\int_c^b f(x)\,dx$ (*)

τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ΑΣΚ: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ μη αρνητική και ολοκληρώσιμη. Ν.δ.ο υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή:

$$m=\min\{f(x): x\in[a,b]\} \quad \text{και} \quad M=\max\{f(x): x\in[a,b]\}$$

Επιπλέον, αφού $g\geq 0$ έχουμε $mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$, $\forall x\in[a,b]$.

Συνεπώς $m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$.

- Αν $\int_a^b g(x)dx=0$ τότε $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$ και έχουμε το ζητούμενο για οποιοδήποτε $\xi\in[a,b]$.
- Διαφορετικά, αν $\int_a^b g(x)dx>0$, τότε $m\leq \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq M$ και έπεται από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής ότι υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

ΑΣΚ: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in[a,b]$. Ν.δ.ο. η F είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Λύση: Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι εξ' ορισμού φραγμένη: $\exists M>0$ ώστε $|f(x)|\leq M$, $\forall x\in[a,b]$. Θ.δ.ο η F είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M. Άρα η F είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Επαλήθευση: έστω $a\leq x<y\leq b$. Τότε

$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_a^y f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M(y-x).$$

ΑΣΚ: Έστω $f=[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $\forall x\in[a,b]$. Ν.δ.ο. αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0)=f(x_0)$.

Λύση: Υποθέτουμε ότι $a<x_0<b$ (οι δύο περιπτώσεις $x_0=a$ ή $x_0=b$ ελέγχονται όμοια). Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι συνεχής στο x_0 άρα $\exists\delta>0$ αρκετά μικρό ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(a,b)$

και $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Αν $0<h<\delta$, υπολογίζουμε

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt-\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(x_0)dt=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt$$

$$\Rightarrow\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|\leq\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt<\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\, dt=\varepsilon$$

Αν $-\delta<h<0$ βρίσκουμε επίσης ότι $\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|<\varepsilon$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)\Leftrightarrow F'(x_0)=f(x_0)$.

ΑΣΚ: Έστω $f,g=[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ν.δ.ο. αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε $\int_a^b f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

Λύση: Η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη και $(f\cdot g)'=f\cdot g'+f'\cdot g$. Επιπλέον, από την υπόθεση οι συναρτήσεις $f\cdot g'$ και $f'\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμες, άρα και η $(f\cdot g)'$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται από το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού ότι $\int_a^b f(x)g'(x)dx+\int_a^b f'(x)g(x)dx=\int_a^b(f\cdot g)'(x)dx=(f\cdot g)(b)-(f\cdot g)(a)$.