§ 8 Αρχή κιβωτισμένων διαστημάτων

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $([\alpha_n, \beta_n])_n$ μία φθίνουσα ακολουθία <u>κλειστών</u> διαστημάτων, δηλ $[\alpha_1, \beta_1] \supseteq [\alpha_2, \beta_2] \supseteq [\alpha_3, \beta_3] \supseteq \cdots$

Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n] \neq \emptyset$. Αν επιπλέον $\beta_n - \alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ είναι μονοσύνολο.

<u>Απ</u>: Η $(\alpha_n)_n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από β_1 $(\alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_1, \forall n \in \mathbb{N})$

Άρα $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$. Ομοίως, η $(\beta_n)_n$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από α_1. Άρα $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$ για κάποιο $\beta \in \mathbb{R}$.

Καθώς, $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\alpha_n \leq \beta_n$, έχουμε $\alpha \leq \beta$.

Μάλιστα, έχουμε $\alpha_n \leq \alpha \leq \beta \leq \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (επειδή $(\alpha_n)_n \nearrow$ και $(\beta_n)_n \searrow$). Δηλαδή, ισχύει $\emptyset \neq [\alpha, \beta] \subseteq [\alpha_n, \beta_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n] \supseteq [\alpha, \beta] \neq \emptyset$

Θ.δ.ο. $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n] \subseteq [\alpha, \beta]$, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n] = [\alpha, \beta]$.

Πράγματι, αν $x > \beta$, τότε θέτοντας $\varepsilon = x - \beta$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω

$\beta_{n_0} < \beta + \varepsilon = x$ [επειδή $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$].

Άρα $x \notin [\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}]$ και $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$. Ομοίως, αν $x < \alpha$ αποδεικνύουμε ότι $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$.

Παρατήρηση: Είναι απαραίτητο να είναι κλειστά τα διαστήματα.

Π.χ. $\bigcap_{n=0}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$

§9 Αναδρομικές ακολουθίες και σύγκλιση

Αναλυτικό παράδειγμα: Έστω $(a_n)_n$ τ.ω. $a_1 = 0$ και $a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2+1}{2a_n+2}$, $\forall n \geq 1$,

Δ.ο. (i) $0 \leq a_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Η $(a_n)_n$ είναι αύξουσα

(iii) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Λύση: (i) Με επαγωγή στο n. Για $n=1$ ισχύει. Υποθέτουμε

ότι για κάποιο n ισχύει ότι $0 \leq a_n \leq 1$ και θ.δ.ο. $0 \leq a_{n+1} \leq 1$.

Καθώς $a_n \geq 0$ και $a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2+1}{2a_n+2}$ έχουμε $a_{n+1} \geq 0$.

Επίσης $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + (a_n^2+1)}{2a_n+2} \leq \dfrac{2a_n^2+2}{2a_n+2} \leq \dfrac{2a_n+2}{2a_n+2} = 1$

$a_n^2 \leq 1$ και $a_n^2 \leq a_n$ επειδή $0 \leq a_n \leq 1$

(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε

$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow a_n \leq \dfrac{3a_n^2+1}{2a_n+2} \Leftrightarrow 2a_n^2 + 2a_n \leq 3a_n^2 + 1 \Leftrightarrow \underbrace{a_n^2 - 2a_n + 1}_{=(a_n-1)^2} \geq 0$

που ισχύει

(iii) Η $(\alpha_n)_n$ είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει σε κάποιο όριο $\alpha \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, η $(\alpha_{n+1})_n$ που είναι ένα τελικό τμήμα της $(\alpha_n)_n$ συγκλίνει επίσης στο α. Επομένως, έχουμε

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\alpha_n^2+1}{2\alpha_n+2} = \frac{3\alpha^2+1}{2\alpha+2}, \text{ δηλαδή}$$

$$2\alpha^2+2\alpha = 3\alpha^2+1 \iff \alpha^2-2\alpha+1=0 \iff \alpha=1.$$

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία τ.ω. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n}$, $\forall n \geq 1$

Εξετάστε την $(\alpha_n)_n$ ως προς τη σύγκλιση και βρείτε το όριό της

(i) Δείχνουμε πρώτα ότι η $(\alpha_n)_n$ είναι φραγμένη και μάλιστα ότι ισχύει $1 \leq \alpha_n \leq 2$, $\forall n = 1$. Με επαγωγή στο n. Για $n=1$ ισχύει. Υποθέτουμε έπειτα ότι για κάποιο $n \geq 1$ έχουμε $1 \leq \alpha_n \leq 2$. Τότε, έπεται ότι $1 \leq \alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n} \leq \sqrt{3} \leq 2$.

(ii) Δείχνουμε ότι η $(\alpha_n)_n$ είναι αύξουσα. Με επαγωγή στο n. Για $n=1$ ισχύει ότι $\alpha_1 = 1 \leq \alpha_2 = \sqrt{2}$. Υποθέτουμε έπειτα ότι για κάποιο $n \geq 1$ έχουμε $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$. Τότε έπεται ότι $\alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n} \leq \sqrt{1+\alpha_{n+1}} = \alpha_{n+2}$.

(iii) Από το (i) και το (ii) συμπεραίνουμε ότι η $(\alpha_n)_n$ συγκλίνει σε κάποιο όριο $\alpha \in [1,2]$. Επιπλέον, έχουμε

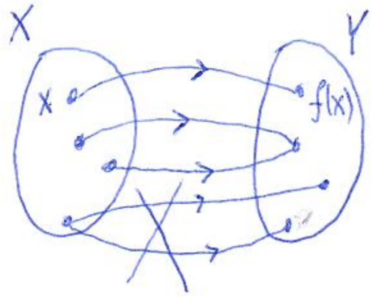
$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\alpha_n} = \sqrt{1+\alpha} \Rightarrow \alpha^2-\alpha-1=0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad \text{άρα } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{επειδή } \alpha \geq 1$$

Κεφ 3 : Συναρτήσεις

§1 Βασικές έννοιες

- "Ορ": Έστω X, Y μη κενά σύνολο. Μία συνάρτηση f από το X στο Y είναι μία "αντιστοίχιση" που σε κάθε στοιχείο του X $(\forall x \in X)$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο του Y, το οποίο το συμβολίζουμε με $f(x)$.



- Ορ: (Καρτεσιανό γινόμενο) = Έστω X, Y μη κενά σύνολα.
Έστω $x \in X$, $y \in Y$. Συμβολίζουμε με (x,y) το διατεταγμένο ζεύγος τους. και θέτουμε $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$.

- Ιδιότητες διατεταγμένου ζεύγους: $(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow x = x'$ και $y = y'$
Εν γένει $(x,y) \neq (y,x)$. Μάλιστα $(x,y) = (y,x) \Longleftrightarrow x = y$.

- Αυστηρός ορισμός συνάρτησης: Έστω X, Y μη κενά σύνολα. Μία συνάρτηση f από το X στο Y (γράφουμε $f = X \to Y$) είναι ένα υποσύνολο f του $X \times Y$ (δηλαδή $f \subseteq X \times Y$)
τ.ω. i) $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ τ.ω. $(x,y) \in f$

ii) $\forall x \in X$ και $y_1, y_2 \in Y$ τ.ω. $(x,y_1), (x,y_2) \in f$ έχουμε $y_1 = y_2$.

Ορισμοί / Συμβολισμοί

- $\forall x \in X$, το μοναδικό $y \in Y$ τ.ω. $(x,y) \in f$, το συμβολίζουμε με $f(x)$
Δηλ $y = f(x)$ ανν $(x,y) \in f$

- Το X καλείται πεδίο ορισμού της f και το Y καλείται πεδίο τιμών της f. Το σύνολο τιμών της f ορίζεται ως

$$f(X) = \{ f(x) : x \in X \} = \{ y \in Y : \exists x \in X \text{ τ.ω. } y = f(x) \}$$

- Παραδείγματα: 1) Έστω $c \in \mathbb{R}$, η σταθερή συνάρτηση $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_1(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_2(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) Έστω $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ και $f_3 : A \to \mathbb{R}$ με $f_3(x) = x$, $\forall x \in A$.

4) Έστω $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_4(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5) Έστω $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ και $f_5 : A \to \mathbb{R}$ με $f_5(x) = x^2$, $\forall x \in A$.

6) $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_6(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

7) $f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_7(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \text{ και } x \neq 0,\ x = \frac{p}{q} \text{ σε ανάγωγη μορφή} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$[p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \gcd(p,q) = 1]$

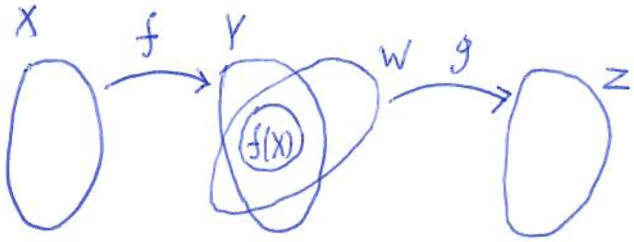
	Πεδίο ορισμού	Πεδίο τιμών	Σύνολο τιμών
f_1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{c\}$
f_2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
f_3	A	$\mathbb{R}$	A
f_4	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
f_5	A	$\mathbb{R}$	A
f_6	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{0, 1\}$
f_7	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

- <u>Παρατήρηση</u>: Αν X, Y, Y' μη κενά σύνολα και $f: X \to Y$ και $f(X) \subseteq Y'$ τότε $f: X \to Y'$.

- <u>Ορ</u>: Έστω X, X', Y μη κενά σύνολα με $X' \subseteq X$ και $f: X \to Y$. Ορίζουμε τον περιορισμό της f στο X' ως $f|_{X'}: X' \to Y$ τ.ω. $\forall x \in X'$, $f|_{X'}(x) = f(x)$.

- <u>Ορ</u>: Έστω X, Y μη κενά σύνολα και $f: X \to Y$.
  i) Η f καλείται επί αν $f(X) = Y$, δηλ $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ τ.ω. $f(x) = y$.
  ii) Η f καλείται 1-1 αν $\forall x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ έχουμε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
  [Ισοδύναμα: Αν ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ για $x_1, x_2 \in X$, τότε έχουμε $x_1 = x_2$].

- <u>Ορ</u> (σύνθεση συναρτήσεων)



Έστω $f: X \to Y$ και $g: W \to Z$ τ.ω. $f(X) \subseteq W$. Τότε ορίζουμε $g \circ f: X \to Z$ θέτοντας $g \circ f(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$.

- <u>Ορ</u>: Έστω $f: X \to Y$
  i) Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε την εικόνα του A μέσω της f ως
  $$f(A) = \{ y \in Y : \exists x \in A \text{ τ.ω. } f(x) = y \} = \{ f(x) : x \in A \}.$$
  ii) Για κάθε $B \subseteq Y$ ορίζουμε την αντίστροφη εικόνα του B μέσω της f ως
  $$f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}.$$

• Βασικές ιδιότητες εικόνας και αντίστροφης εικόνας.

Έστω $f: X \to Y$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

i) Αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, τότε $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

ii) Αν $A_1, A_2 \subseteq X$, τότε $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

iii) Αν $A_1, A_2 \subseteq X$, τότε $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

[Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος: π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Αν $A_1 = [-1, 0]$ και $A_2 = [0, 1]$. Τότε $\{0\} = f(\{0\}) = f(A_1 \cap A_2)$ και
$f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1]$. Αν η f είναι 1-1, έχουμε $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.]

iv) Αν $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$. Επίσης $\begin{cases} f^{-1}(Y) = X \text{ και} \\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \end{cases}$

v) Αν $B_1, B_2 \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
και $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

vi) Αν $B \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

vii) Αν $A \subseteq X$, τότε $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

[Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
και $A = [0, 1]$. Τότε $f^{-1}(f(A)) = [-1, 1]$. Έχουμε $A = f^{-1}(f(A))$ αν η f είναι 1-1.]

viii) Αν $B \subseteq Y$, τότε $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

[Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Π.χ. $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
και $B = [-1, 1]$. Τότε $f(f^{-1}(B)) = [0, 1]$. Έχουμε $f(f^{-1}(B)) = B$, αν η f είναι επί.]