ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Καθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει

Απ: ΛΑΘΟΣ

Εχουμε δείξει (βλ. Πx 2 σελ. 1Θ) ότι η ακολουθία $(-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά ΔΕΝ συγκλίνει

Παρατήρηση: Για να είναι (a_n) φραγμένη θα πρέπει να βρουμε καποιον δικό μου $M>0$: $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Αν $a_n = (-1)^n$ τότε i) n αρτιος εχουμε $|(-1)^n| = 1 < 2, 3, 4, \dots$

ii) n περιττός $|(-1)^n| = |-1| = 1 < 2, 3, 4, \dots$

άρα φραγμένη

Πx 2 σελ 1Θ

i) αν $a=1$ τοτε $\exists \varepsilon > 0$ $(\varepsilon = 1)$: $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| \geq \varepsilon\}$

πραγματι $|a_n - a| = |(-1)^n - 1| \begin{cases} \overset{n \text{ περιτ}}{=} |-1-1| = |-2| = 2 > 1 = \varepsilon \\ \overset{n \text{ αρτιος}}{=} |1-1| = |0| = 0 < 1 = \varepsilon \end{cases}$

άρα $a_n \not\to 1$

ii) αν $a = -1$ τοτε $|a_n - a| = |(-1)^n - (-1)| = |(-1)^n + 1| \overset{n \text{ αρτ}}{=} 2 > 1 = \varepsilon$.

άρα $a_n \not\to -1$

2. Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη

__Απ:__ Σωστό (βλ. Θεώρημα 2.2.7 σελ. 41).

Έστω $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = 1 > 0$

Μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$: $|a_n - a| < 1$, $\forall n \geq n_0$

δηλ. $|a_n - a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_n - a < 1 \Leftrightarrow a - 1 < a_n < a + 1$ (1)

Θέτουμε $M_1 = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a-1\}$ (2)

$M_2 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}, a+1\}$ (3)

Άρα $(1) \overset{(2)(3)}{\Longrightarrow} M_1 \leq a_n \leq M_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, άρα $(a_n), n \in \mathbb{N}$ φραγμένη

---

3. Αν (a_n) είναι μια __ακολουθία ακεραίων αριθμών__, τότε η (a_n) συγκλίνει αν-ν είναι τελικά σταθερή

(__Σωστό__)

Λύση.

$(\Rightarrow)$ Αν (a_n) σταθερή, όπου $a_n \in \mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά στο $\mathbb{Z}$) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$: $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$, δηλ. $a_n \to a$ (από ορισμό 2.2.1 ορίου ακολουθίας, σελ 39 βιβλίου). Άρα αν είναι σταθερή τότε συγκλίνει.

$(\Leftarrow)$. Οδο αν $(a_n)^{\in \mathbb{Z}}$ συγκλίνει τότε σταθερή.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \to a$.

Έστω (a_n), $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Z}$

Για $\varepsilon = 1/4$ πρέπει όλοι οι όροι της ακολουθίας από κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ και πέρα να απέχουν από το a απόσταση λιγότερο από ε, δηλ. $\exists n_0 \in \mathbb{N}: a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$.

Δηλ. για $\varepsilon = 1/4$, έχουμε $\exists n_0 \in \mathbb{N}: a_n \in (a - 1/4, a + 1/4)$, $\forall n \geq n_0$. Το διάστημα

... έχει μήκος $2 \cdot 1/4 = 1/2$

4) Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμων

<u>Απ:</u> Λάθος

δηλ. $a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $(a_n), n \in \mathbb{N}$ μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

(Ορισμός 2.1.4) σελ. 38

Θεωρώ το <u>σύνολο των όρων της</u> ακολ.(a_n): $\emptyset \neq A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$

Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Άρα το $A \subseteq \mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, το $a_{n_*} = \min A$. (1)

Αφού η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα, από ορισμό 2.5.1 σελ. 50 βιβλ- έχουμε ότι: $a_{n+1} < a_{n_*}$ (2).

Από (1), (2) $\Rightarrow a_{n+1} < \min A$. (3) Αυτό όμως είναι <u>ΑΤΟΠΟ</u>, γιατί δεν είναι δυνατό να υπαρχει στοιχείο (εδώ το a_{n+1}) που να είναι μικρότερο από το $\min A$.

---

5) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία άρρητων αριθμών συγκλίνει σε άρρητο αριθμό.

<u>Απ:</u> Λαθος

<u>Παραδειγμα</u>: Η ακολουθία $a_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ είναι ακολουθία άρρητων αριθμών, όμως $a_n \to 0$ (για μεγάλες τιμές του n) και ο 0 είναι ρητός.

---

6) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο κάποιας ακολουθίας άρρητων αριθμών

Απ: Σωστό

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ θα ισχύει ότι $x \leq x + 1/n$ ①

Άρα θα υπάρχει κάποιος άρρητος β_n (καθώς οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$) τέτοιος ώστε

$$x \leq \beta_n \leq x + 1/n \quad (2)$$

Όμως, η ακολουθία $a_n = x$ συγκλίνει στο x

και η ακολουθία $\gamma_n = x + 1/n$ συγκλίνει στο x

Από Θ.2.2.4 βιβλίου (σελ. 40) θα έχουμε ότι και η $\beta_n \to x$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

αφού $a_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$.

Άρα, βρήκαμε μία ακολουθία αρρήτων που τείνει στο x.

Παρατήρηση: Όμοια, κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών

---

7) Αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε $a_n \to 0$ αν-ν $\frac{1}{a_n} \to +\infty$

Απ: Σωστό

Έστω ότι $a_n \to 0$ και έστω $M>0$ (όπου M οσοδήποτε μεγάλο)

Για $\varepsilon = 1/M$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $|a_n - 0| < \varepsilon$ δηλ. $|a_n| = a_n < \varepsilon$ ① (αφού $a_n \to 0$)

αλλά $\varepsilon = 1/M$ οπότε ① $\Rightarrow |a_n| < 1/M \Leftrightarrow \frac{1}{|a_n|} > M$ ②.

Σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.8 βιβλίου σελ. 42, λέμε ότι $a_n \to +\infty$ αν $\forall M>0$ $\exists n_0 = n_0(M)$: αν $n \geq n_0$ τότε $a_n > M$

Εμείς αποδείξαμε ότι $\forall \varepsilon = 1/M > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{|a_n|} = \frac{1}{a_n} > M$ άρα θα ισχύει ότι $1/a_n \to +\infty$.

9) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

Απ: Σωστό

Έστω $M > 0$. Αφού η (a_n) ΔΕΝ είναι άνω φραγμένη,

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > M \quad (1)$

Αφού η (a_n) είναι αύξουσα, $\forall n \geq n_0$ ισχύει $a_n \geq a_{n_0}$ (2)

$(1), (2) \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > M \quad (3)$

Από ορισμό 2.2.8(α) βιβλίου σελ. 42, έχουμε ότι λόγω της (3) συμπεραίνουμε ότι $a_n \to +\infty$.

Υπενθύμιση Ορισμός 2.2.8: α) Λέμε ότι $a_n \to +\infty$ αν $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 = n_0(M)$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $a_n > M$.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Παρατήρηση (μετά τους ορισμούς): Το άνω (κάτω) φράγμα, αν υπάρχει δεν είναι μοναδικό. Αν s είναι ένα άνω (κάτω) φράγμα τότε κάθε αριθμός μεγαλύτερος (μικρότερος) του s είναι επίσης άνω (κάτω) φράγμα της a_n.

1) Μια ακολουθία (a_n) λέγεται <u>άνω φραγμένη</u> αν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός s με την ιδιότητα $a_n \leq s$, $\forall n = 1, 2, \ldots$
Ο αριθμός s λέγεται <u>άνω φράγμα</u> της ακολουθίας (a_n).

2) Μια ακολουθία (a_n) λέγεται <u>κάτω φραγμένη</u> αν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός ℓ με την ιδιότητα $\ell \leq a_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$
Ο αριθμός ℓ λέγεται <u>κάτω φράγμα</u> της ακολουθίας (a_n)

3) Μια ακολουθία (a_n) λέγεται <u>φραγμένη</u> αν είναι άνω και κάτω

10) Αν η (a_n) είναι φραγμένη και η (b_n) συγκλίνει τότε η $(a_n b_n)$ συγκλίνει.

<u>Απ:</u> $\boxed{\text{Λάθος}}$

<u>Παράδειγμα:</u> $\left.\begin{array}{l}\text{Η } a_n=(-1)^n \text{ είναι φραγμένη} \\ \text{και η } b_n=1 \text{ συγκλίνει}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $a_n b_n = (-1)^n$ ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ (έχει αποδειχθεί νωρίτερα).

---

11) Αν η $(|a_n|)$ συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει

<u>Απ:</u> $\boxed{\text{Λάθος.}}$

<u>Παράδειγμα:</u> Η $a_n=(-1)^n$ δεν συγκλίνει

αλλά η $|a_n|=1$ συγκλίνει.

Ασκήσεις - Ομάδα Α

(6) Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει και αν ναι, βρείτε το όριό της.

α) $\alpha_n = \dfrac{3^n}{n!}$ β) $\beta_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$ γ) $\gamma_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

δ) $\delta_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ ε) $\varepsilon_n = \left(\sqrt[n]{10} - 1\right)^n$ ζ) $\zeta_n = \dfrac{n^6}{6^n}$

η) $\eta_n = n^2 \sin(1/n^3)$ θ) $\theta_n = \dfrac{\sin n}{n}$ κ) $k_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$

ν) $\nu_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$, ρ) $\rho_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$, σ) $\sigma_n = \dfrac{n^2}{3n^2+n+1}$

τ) $\tau_n = \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$, ξ) $\xi_n = \dfrac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}$

Λύση

α) $\alpha_n = \dfrac{3^n}{n!}$

Κριτήριο Λόγου: Είναι $\alpha_n = \dfrac{3^n}{n!} > 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \frac{\cancel{3^n} \cdot 3 \cdot \cancel{n!}}{\cancel{3^n} \cdot \cancel{n!}\,(n+1)} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$$

Άρα $\alpha_n \to 0$.

Πρόταση 2.4.5 σελ 48 (Κριτήριο Λόγου): Έστω (a_n) ακολουθία μη μηδενικών όρων ($a_n \neq 0$)

(α). Αν $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to l > 1$, τότε $a_n \to +\infty$

(β). Αν $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l < 1$ τότε $a_n \to 0$.

β). $\beta_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$, $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{n(2-1/n)}{n(3+2/n)} = \frac{2-1/n}{3+2/n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

γ) $\gamma_n = n - \sqrt{n^2-n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n = n - \sqrt{n^2-n} = \frac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}+n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{\sqrt{n^2-n}}{n}} = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}.$$

Κριτήριο ρίζας: Έστω (a_ν) ακολ. με μη αρνητ. όρους
(α) Αν $\sqrt[\nu]{a_\nu} \to \rho < 1$ τότε $a_\nu \to 0$
(β) Αν $\sqrt[\nu]{a_\nu} \to \rho > 1$ τότε $a_\nu \to +\infty$.

ε) $\varepsilon_\nu = (\sqrt[\nu]{10} - 1)^\nu$

Σύμφωνα με το <u>κριτήριο ρίζας</u> (Πρόταση 2.4.8 βιβλίο σελ. 49) έχουμε:

αφού $\sqrt[\nu]{10} \xrightarrow{\nu \to +\infty} 1$ θα ισχύει ότι $\sqrt[\nu]{10} - 1 \to 1 - 1 = 0 < 1$

Άρα $\varepsilon_\nu \to 0$. $\xrightarrow{\text{διότι}}$ αν $\alpha > 0$ τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$.

Κριτήριο λόγου: Έστω (a_ν) ακολουθία μη μηδενικών όρων $(a_\nu \neq 0)$
α) Αν $a_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ & $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \to \ell > 1$, τότε $a_\nu \to +\infty$
β) Αν $\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \to \ell < 1$, τότε $a_\nu \to 0$.

ζ) $\zeta_\nu = \frac{\nu^6}{6^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$

<u>Απόδειξη με κριτήριο λόγου:</u> (Πρόταση 2.4.5 σελ. 48)

$$\frac{\zeta_{\nu+1}}{\zeta_\nu} = \frac{\frac{(\nu+1)^6}{6^{\nu+1}}}{\frac{\nu^6}{6^\nu}} = \frac{(\nu+1)^6 \cdot 6^\nu}{\nu^6 \cdot 6^{\nu+1}} = \frac{(\nu+1)^6 \cdot \cancel{6^\nu}}{\nu^6 \cdot \cancel{6^\nu} \cdot 6} = \frac{1}{6}\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^6 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^6 \xrightarrow{\nu \to +\infty} \frac{1}{6} < 1.$$ Άρα, $\zeta_\nu \to 0$.

<u>Απόδειξη με κριτήριο ρίζας</u> (Πρόταση 2.4.8 σελ. 49)

$$\sqrt[\nu]{\zeta_\nu} = \frac{\sqrt[\nu]{\nu^6}}{\sqrt[\nu]{6^\nu}} = \frac{\sqrt[\nu]{\nu^6}}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^6 \xrightarrow{*} \frac{1}{6} \cdot 1^6 = \frac{1}{6}$$

* Πρόταση 2.4.4 → Η ακολουθία $x_\nu = \sqrt[\nu]{\nu} \to 1$.

η) $\eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες: (ιδιότητα συστολής) } Γενικές γνώσεις

(i) $|\sin\alpha - \sin\beta| \le |\alpha-\beta|$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

(ii) $|\cos\alpha - \cos\beta| \le |\alpha-\beta|$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Από (i) αν $\sin\beta = 0 \Leftrightarrow \beta=0$ έχουμε

$|\sin x| \le |x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Θ. 2.2.4 σελ. 40}}$

όποτε $0 \le n^2\cdot \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \le n^2\cdot \frac{1}{n^3} \Rightarrow 0 \le \eta_n \le \frac{1}{n}$ ← ή κριτήριο παρεμβολής

Το $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ άρα από Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι $\eta_n \to 0$.

↑ $\alpha_n \le b_n \le \gamma_n$
αν $\alpha_n, \gamma_n \to \alpha \Rightarrow b_n \to \alpha$.

θ) $\theta_n = \frac{\sin n}{n}$, $n\in\mathbb{N}$

α' τρόπος

Είναι $\theta_n = \frac{1}{n}\cdot \sin n = a_n\cdot b_n$ όπου $a_n = \frac{1}{n}\to 0$ δηλ. a_n μηδενική

και $b_n = \sin n$ όπου $|\sin n| \le 1$

δηλ. $|b_n| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le n \le 1$

δηλ. b_n φραγμένη

Επομένως έχουμε

γινόμενο μηδενικής a_n × φραγμένης b_n = μηδενική θ_n.

β' τρόπος $|\sin n| \le 1 \Leftrightarrow -1 < \sin n < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{n} < \frac{\sin n}{n} < \frac{1}{n}$. Όμως $-\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ όποτε

από Θ. ισοσυγκλινουσών ακολουθιών $\Rightarrow \theta_n = \frac{\sin n}{n} \to 0$

κ) $k_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$

Από κριτήριο λόγου έχουμε:

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}\cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}} = \frac{2^{n+1}\cdot (n+1)! \cdot n^n}{2^n \cdot n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{\cancel{2^n}\cdot 2 \cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}\cdot n^n}{\cancel{2^n}\cdot \cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}\cdot (n+1)^n} =$$

$$= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 2\cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{(*)} \frac{2}{e} < 1$$

(*) Πρόταση 2.54 σελ. 52: $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | Άρα $k_n \to 0$.

ν) $v_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

Είναι $v_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} =$

$$= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}^{\,2} - \sqrt{n}^{\,2}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\cancel{n} + \sqrt{n} - \cancel{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow[\text{τότε } \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.]{\text{όταν } n\to\infty.}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

ρ) $\rho_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

Είναι: $\rho_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2} \overset{*}{\longrightarrow} e^{1/2} = \sqrt{e}$

(*) Πρόταση 2.5.4 σελ 52: $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$

σ) $\sigma_n = \dfrac{n^2}{3n^2+n+1} = \dfrac{1}{\frac{3n^2+n+1}{n^2}} = \dfrac{1}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{3}$

τ) $\tau_n = \dfrac{3^n n!}{n^n}$ (παρόμοια με κ).

$$\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n\cdot n!}{n^n}} = \frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{3^n\, n!\,(n+1)^{n+1}} = \frac{\cancel{3^n}\cdot 3\,\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}\,n^n}{\cancel{3^n}\cdot\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n} =$$

$$= 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\,\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = 3\,\frac{1}{(1+1/n)^n} \to 3/e > 1$$

άρα $\tau_n \to +\infty$.

ζ) $\zeta_n = \dfrac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}$

Είναι $|\sin(n^3)| \le 1$ και $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ $\Big\}$ $\zeta_n \to 0$ ως γινόμενο μηδενικής επί φραγμένη

Άσκηση 7

Για κάθε μια από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της.

α) $\alpha_n = \dfrac{5^n+n}{6^n-n}$ β) $\beta_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}}$ γ) $\gamma_n = (\sqrt[n]{n}-1)^n$

δ) $\delta_n = n^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{1+\dfrac{1}{n+1}}\right)$ ε) $\varepsilon_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos(n^2)$

λ) $\lambda_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{n^2+1}$ μ) $\mu_n = \dfrac{n^n}{n!}$ θ) $\theta_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$

Λύση

α). $a_n = \dfrac{5^n+n}{6^n-n} = \dfrac{\dfrac{5^n+n}{6^n}}{\dfrac{6^n-n}{6^n}} = \dfrac{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n + \dfrac{n}{6^n}}{1-\dfrac{n}{6^n}}$ (1)

Είναι: $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \to 0$ γιατί $\dfrac{5}{6}<1$ και από πρόταση 2.4.2 σελ 47 έχουμε ότι αν $0<a<1$ τότε η ακολουθία $x_n = a^n \to 0$. (2)

Για το $\dfrac{n}{6^n}$ χρησιμοποιούμε το κριτήριο ρίζας (Πρ. 2.4.8 σελ 49)

(α) αν $\sqrt[n]{a_n} \to \rho < 1$ τότε $a_n \to 0$

(β) αν $\sqrt[n]{a_n} \to \rho > 1$ τότε $a_n \to +\infty$.

$\sqrt[n]{\dfrac{n}{6^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{6^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{6} \xrightarrow{(*)} \dfrac{1}{6} < 1$ άρα $\dfrac{n}{6^n} \to 0$. (3)

(*) Από Πρόταση 2.4.4: η ακολουθία $x_n = \sqrt[n]{n} \to 1$

Επομένως, η (1) $\xRightarrow{(2),(3)}$ $a_n \to \dfrac{0+0}{1-0} \Rightarrow \boxed{a_n \to 0}$

β) α' τρόπος

$$\beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}} = \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{3^n \cdot 2^n}} = \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{6^n}} = \frac{\sqrt[n]{3^n+2^n}}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sqrt[n]{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \frac{1}{6} \cdot 3 \sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \quad (1)$$

αλλά $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ γιατί $0 < \frac{2}{3} < 1$ (από πρόταση 2.4.2 έχουμε ότι αν $0 < \alpha < 1$ τότε η $x_n = \alpha^n \to 0$.

Άρα, $b_n \to \frac{1}{2} \sqrt[n]{1+0} \Rightarrow \boxed{b_n \to 1/2}$

β' τρόπος

Είναι: $\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \leq b_n \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{2}$.

αφού $\sqrt[n]{2} \to 1$ από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι $\boxed{b_n \to 1/2}$

Πρόταση 2.4.3
σελ. 47.
Αν $a > 0$ τότε η ακολουθία $\sqrt[n]{a} \to 1$.

γ) $\gamma_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

Με το κριτήριο της ρίζας έχουμε

$$\sqrt[n]{\gamma_n} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n}-1)^n} = \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow{(*)} 1 - 1 = 0$$

(*) Πρόταση 2.4.4 σελ. 48 : Η ακολουθία $\sqrt[n]{n} \to 1$

Άρα $\boxed{\gamma_n \to 0}$

δ) $\delta_n = n^2\left(\sqrt{1+1/n} - \sqrt{1+1/_{n+1}}\right) =$

$$= n^2 \cdot \frac{\cancel{1}+\frac{1}{n} - \cancel{1} - \frac{1}{n+1}}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1+1/_{n+1}}} = \frac{n^2 \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)}}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1+1/_{n+1}}} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1+1/_{n+1}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1+1/_{n+1}}} = \frac{\frac{1}{1+1/n}}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1+1/_{n+1}}} \longrightarrow \frac{\frac{1}{1+0}}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

ε) $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(n^2)$

Είναι $|\cos x| \leq 1$ οπότε $\left.\begin{array}{l}|\cos(n^2)| \leq 1 \\ \text{και } 1/\sqrt{n} \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_n \to 0}$ γιατί έχω γινόμενο μηδενικής × φραγμένη ακολουθία

λ) $\lambda_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{n^2+1}$

Επειδή η $\dfrac{n^2}{n^2+1} \to 1$, η λ_n δεν συγκλίνει γιατί αλλάζει πρόσημο από όρο σε όρο, δηλ.

αν n περιττό τότε $\lambda_n \to -1$

αν n άρτιος τότε $\lambda_n \to 1$

μ) $\mu_n = \dfrac{n^n}{n!}$

Είναι: $\mu_n = \dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}{n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1} \geq n$

Άρα $\boxed{\mu_n \to +\infty}$

θ) $\theta_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$

$$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = \frac{\dfrac{[(n+1)!]^2 \cdot 2^{n+1}}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{(n!)^2 \cdot 2^n}{(2n)!}} = \frac{[(n+1)!]^2 \cdot 2^{n+1} \cdot (2n)!}{[2n+2]! \, (n!)^2 \cdot 2^n} =$$

$$= \frac{\cancel{(2n)!}\, \cancel{2^n} \cdot 2 \cdot \cancel{(n!)^2} (n+1)^2}{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)\cancel{(n!)^2}\, \cancel{2^n}} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\cancel{2}(n+1)^{\cancel{2}}}{(2n+1)\cancel{2}\cancel{(n+1)}} = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$= \frac{\cancel{n}(1+1/n)}{\cancel{n}(2+1/n)} \longrightarrow 1/2.$$

Άσκηση 9

(α) Έστω $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$. Δείξτε ότι

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} \to \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

(β). Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}$$

Λύση

(α) Ορίζουμε $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$a^n \le a_1^n + \dots + a_k^n \le k a^n$$

Άρα,

$$a \le b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} \le \sqrt[n]{k a^n} = a\sqrt[n]{k}$$

Αφού $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{k} = 1$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $b_n \to a$.

Πχ $\sqrt[n]{2^n + 3^n + 7^n} \to 7$

(β) Το πλήθος των προσθετέων (στον ορισμό του $n^{οστού}$ όρου) δεν είναι σταθερό. Ανάλογα με το (α) έχουμε:

$$n^n < 1^n + 2^n + \dots + n^n < n \cdot n^n, \quad \text{αν } n \ge 2$$

Άρα, $1 < x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n} < \sqrt[n]{n}, \quad \forall n \ge 2$

Αφού $\sqrt[n]{n} \to 1$, εφαρμόζεται το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών και $x_n \to 1$