ΑΣΚ: (i) Ν.δ.ο. $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(ii) Ν.δ.ο. $e \notin \mathbb{Q}$

Λύση: (i) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ και έχουμε επίσης

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} = \ln'(1) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e$

(ii) Αν $e \in \mathbb{Q}$, τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε $ne \in \mathbb{N}$. Γράφουμε λοιπόν

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \underbrace{\left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots\right]}_{= R_n \text{ σφάλμα}}$$

και φράσσουμε το σφάλμα ως εξής:

$$0 < R_n \underset{\uparrow}{<} \frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right]}_{\text{γεωμετρική πρόοδος}} = \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}}_{= \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!\,n}}$$

επειδή $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+1}$

Αφού $ne \in \mathbb{N}$, ισχύει επίσης $n!\,n e \in \mathbb{N}$. Όμως

$$n!\,n e = \underbrace{n!\,n\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right]}_{\substack{\Uparrow \\ \mathbb{N}}} + \underbrace{n!\,n\,R_n}_{\substack{\Uparrow \\ (0,1)}} \text{ : ΑΤΟΠΟ !}$$

ΑΣΚ: Υπολογίστε $\int_1^x \frac{\ln u}{u^n}\,du$, για $x>1$ και $n\in\mathbb{Z}$.

Λύση: Αν $n=1$, τότε $\int_1^x \frac{\ln u}{u}\,du = \int_1^x (\ln u)'(\ln u)\,du = \left[\frac{(\ln u)^2}{2}\right]_1^x = \frac{(\ln x)^2}{2}$

Αν $n\neq 1$, τότε $\int_1^x u^{-n}\ln u\,du = \int_1^x \left(\frac{u^{1-n}}{1-n}\right)'\ln u\,du$

$$\Rightarrow \int_1^x u^{-n}\ln u\,du = \left[\frac{u^{1-n}}{1-n}\ln u\right]_1^x - \frac{1}{1-n}\int_1^x \underbrace{u^{1-n}\cdot\frac{du}{u}}_{u^{-n}du} = \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln x - \frac{1}{1-n}\left[\frac{u^{1-n}}{1-n}\right]_1^x$$

$$= \frac{x^{1-n}\ln x}{1-n} - \frac{x^{1-n}-1}{(1-n)^2}$$

ΑΣΚ Υπολογίστε α) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ και β) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Λύση: α) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2u-2}{u}\,du = 2\int_1^3 du - 2\int_1^3 \frac{du}{u} = 2\left[u-\ln u\right]_1^3$

$u=1+\sqrt{x}$, $x=(u-1)^2$, $dx=2(u-1)\,du$ $\qquad = 4-2\ln 3$

β) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6u^5\,du}{u^3+u^2} = \int \frac{6u^3\,du}{u+1} = \int \frac{6(y-1)^3\,dy}{y}$

$u=\sqrt[6]{x}$, $x=u^6$, $dx=6u^5\,du$ $\qquad$ $y=u+1$, $u=y-1$, $du=dy$

$$= 6\int\left(y^2-3y+3-\frac{1}{y}\right)dy = 2y^3-9y^2+18y-6\ln y + C$$

$y=\sqrt[6]{x}+1$ $\quad \Rightarrow = 2(\sqrt[6]{x}+1)^3 - 9(\sqrt[6]{x}+1)^2 + 18(\sqrt[6]{x}+1) - 6\ln(\sqrt[6]{x}+1) + C$