Επίλυση γραμμικών συστημάτων Ι.

Βασίλειος Νάκος

9 Οκτωβρίου 2023

Παράδειγμα 1. Φέρτε τον παρακάτω επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right]$$

Ποιες είναι οι ελεύθερες και ποιες οι βασικές μεταβλητές?

Λύση.

Στα παρακάτω μία γραμμοπράξη της μορφής $\Gamma_i := \Gamma_i - \lambda \Gamma_j$ σημαίνει ότι από την γραμμή i αφαιρώ λ φορές τη γραμμή j. Επίσης, $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ σημαίνει οτι εναλλάσω την i-οστή με τη j-οστή γραμμή΄.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \underline{3} & -6 & 6 & 4 & -5 \\ \underline{3} & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ \underline{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}$$

(εναλλάσουμε γραμμές για να έρθει μια γραμμή με τον αριστερότερο οδηγό πρώτη)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1 := \frac{1}{3}\Gamma_1}$$

(διαιρούμε με $1/3$ για να κάνουμε τον οδηγό της δεύτερης γραμμής 0, θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει αυτή την πράξη τελευταία, στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αλλά διευκολύνονται οι πράξεις αν το κάνουμε τώρα)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 + -3\Gamma_1}$$

(θέλουμε να κάνουμε όλη τη στήλη κάτω από τον πρώτο οδηγό ίση με 0, άρα ξεκινάμε αφαιρόντας το κατάλληλο πολλαπλάσιο για να μηδενιστεί το τριάρι)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

(ξεχνάμε την πρώτη γραμμή και διαιρούμε με $1/2$ για να κάνουμε τον οδηγό της δεύτερης γραμμής 0 - θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει αυτή την πράξη τελευταία, στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αλλά διευκολύνονται οι πράξεις αν το κάνουμε τώρα)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & \underline{1} & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & \underline{3} & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_3:=\Gamma_3-3\Gamma_2}$$

(κάνουμε την στήλη κάτω από τον οδηγό της δεύτερης γραμμής όλη 0 και φτάνουμε σε κλιμακωτή μορφή)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\Gamma_2-\Gamma_3}$$

(κάνουμε τη στήλη πάνω από τον *δεξιότερο* οδηγό ίση με 0 - πρώτα μηδενίζουμε το 1)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\Gamma_1-2\Gamma_3}$$

(μετά μηδενίζουμε το 2)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1:=\Gamma_1+3\Gamma_2}$$

(κάνουμε τη στήλη πάνω από τον επόμενο οδηγό ίση με 0 - μηδενίζουμε το -3)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Ας ονομάσουμε τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Οι βασικές μεταβλητές είναι οι στήλες στις οποίες υπάρχει οδηγός (είπαμε ότι κάθε στήλη λόγω της ιδιότητας της σκάλας περιέχει το πολύ έναν οδηγό) και άρα είναι οι x_1, x_2, x_5. Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι υπόλοιπες, δηλαδή οι $x_3, x4$.

Παράδειγμα 2.
Λύστε το σύστημα που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & 15 \end{array}\right]$$

Λύση.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & 15 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_3:=\Gamma_3-2\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_3:=\Gamma_3-2\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Εφόσον βρεθήκαμε σε μια κατάσταση με εξίσωση $0 = 1$ (τελευταία γραμμή), το σύστημα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 3.

Φέρτε τον παρακάτω επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή κάνοντας απαλοιφή Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 9 & -20 & 22 & -13 & 26 & 28 \\ 6 & -16 & 20 & -14 & 14 & 24 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right]$$

Συζήτηση επί του παραδείγματος.

Αυτός είναι ο πίνακας του πρώτου παραδείγματος συν δύο ακόμη γραμμές, τις $[3, -7, 8, -5, 8, 9]$ και $[9, -20, 22, -13, 26, 28]$.

Οι επιπρόσθετες γραμμές επιλέχθηκαν έτσι ώστε $\Gamma_4 = \Gamma_2 + \Gamma_5$ και $\Gamma_3 = \Gamma_1 + 2\Gamma_2 + \Gamma_5$.

Αυτό σημαίνει ότι η τρίτη και η τέταρτη εξίσωση είναι *περιττές*, δηλαδή μπορούμε να τις παράξουμε προσθέτοντας την πρώτη, δεύτερη και πέμπτη εξίσωση. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα του πρώτου παραδείγματος. Όταν κάνετε απαλοιφή Gauss θα προκύψουν λοιπόν δύο γραμμές που είναι μόνο μηδενικά και οι οποίες αντιστοιχούν σε δύο ταυτοτικές εξισώσεις $(0 = 0)$, τις οποίες μπορείτε να αφαιρέσετε από τον επαυξημένο πίνακα.

Πρόβλημα 1. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεθούν, εφόσον υπάρχουν, οι αντίστροφοι των AB και BA.
β) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει πίνακας $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ ώστε CA να είναι αντιστρέψιμος. Υπόδειξη: Μπορείτε να το κάνετε χωρίς καμία πράξη.

Πρόβλημα 2. Να βρεθεί μία βάση του μηδενοχώρου $\mathrm{Null}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η διάσταση του μηδενοχώρου;

Υπενθύμιση: Γράψτε τις παραμετρικές εξισώσεις που ικανοποιεί κάθε $x \in \mathrm{Null}(A)$, εν συνεχεία εκφράστε το x ως συνάρτηση των ελεύθερων μεταβλητών και γράψτε το σαν γραμμικό συνδυασμό κάποιων κατάλληλων διανυσμάτων.

Πρόβλημα 3. Να βρεθούν τα λ για τα οποία ο πίνακας $A - \lambda I$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

δεν είναι αντιστρέψιμος. Υπόδειξη: Υπολογίστε την ορίζουσα.

Πρόβλημα 4. Λέμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικός όταν $A = A^T$ και αντισυμμετρικός όταν $A = -A^T$. Να δειχθεί ότι για κάθε πίνακα A ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός και ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός. Να δείχθει ότι ο A μπορεί να γραφτεί πάντα ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Πρόβλημα 5. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζουμε το *ίχνος* του ως το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Να δειχθεί ότι $tr(A^T A) = tr(AA^T)$ και ότι είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων όλων των στοιχείων του A.

Πρόβλημα 6. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζουμε το *ίχνος* του ως το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Έστω $W := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | tr(A) = 0\}$. Να δείξετε ότι το W είναι διανυσματικός χώρος και να βρείτε τη διάστασή του. Υπόδειξη: Να βρεθεί μία βάση του, δηλαδή μία συλλογή γραμμικών ανεξάρτητων πινάκων στο W που παράγουν όλους τους πίνακες στο W.

Πρόβλημα 7. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A^2 + A^T = I$ $(\star)$. Να δειχθεί ότι $A^4 - 2A^2 + A = 0$. Δείξτε ότι δεν γίνεται και οι τέσσερις πίνακες A, $(A - I)$, $(A - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} I)$, $(A - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} I)$ να είναι αντιστρέψιμοι.

Πρόβλημα 8. Αν για μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $\ker(T) \subseteq \text{Range}(T)$ τότε $dim\ker(T) \leq \frac{n}{2}$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα της διάλεξης 15.

Πρόβλημα 1. Αν είναι εφικτό, να διαγωνιοποιηθεί ο παρακάτω πίνακας

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 2. Αν είναι εφικτό να διαγωνιοποιηθεί ο παρακάτω πίνακας

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

για τον οποίο δίνονται οι 3 ιδιοτιμές του οι οποίες είναι ίσες με $3, 4, 6$.
Είναι οι στήλες του A γραμμικώς ανεξάρτητες; Είναι ο A αντιστρέψιμος; Είναι η απεικόνιση $T(x) = Ax$ επί στον $\mathbb{R}^3$; Ισχύει ότι ο μηδενοχώρος του A έχει διάσταση τουλάχιστον 1 ;
Να υπολογιστεί επίσης ο A^{-1} αλλά και εν συνεχεία να υπολογιστεί ο πίνακας $\lim_{n\to\infty}(A^{-1})^n$.

Πρόβλημα 3. Για ποιους από τους παρακάτω πίνακες μπορούμε να συμπεράνουμε σίγουρα ότι είναι διαγωνιοποιήσιμοι;
α) Για τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^2 - I = 0$.
β) Για τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $(A^2 - 4A + I)(A + I) = 0$.
γ) Για τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$.
δ) Για τους πίνακες $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ οι οποίοι ικανοποιούν $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{-k} A^k = 0$.

Πρόβλημα 4. Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $AB = BA$. Αν ο A έχει όλες τις ιδιοτιμές του διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς να δείξετε ότι A και B έχουν τα ίδια ακριβώς ιδιοδιανύσματα. Συμπεράνετε ότι και ο A και ο B είναι διαγωνιοποιήσιμοι.

Πανεπιστημιο Αθηνων, Γραμμικη Αλγεβρα
Ενδεικτικα Προβληματα στις πρωτες 6 διαλεξεις

Πρόβλημα 1. Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 - \ x_3 \qquad = 1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Απαντήστε τα κατώθι ερωτήματα.
α) Να γράψετε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος.
β) Να γράψετε το πιο πάνω σύστημα σαν διανυσματική εξίσωση.
γ) Να γράψετε το σύστημα στη μορφή $Ax = \beta$ για κάποιον πίνακα A και κάποιο διάνυσμα β. Ποιες είναι οι διαστάσεις των A, β;
δ) Να φέρετε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές έχει; Ποιος είναι ο βαθμός του πίνακα;
ε) Η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ για τον πίνακα A του ερωτήματος γ) είναι επί;
ζ) Να φέρετε τον επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και να περιγράψετε τις λύσεις του συστήματος, ενδεχομένως σε παραμετρική μορφή.
η) Εξετάστε αν η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι 1-1, όπου A ο πίνακας του ερωτήματος γ).
ϑ) Έστω $a_1, a_2, \ldots$ οι στήλες του πίνακα A του ερωτήματος γ). Έστω C το σύνολο που περιέχει όλα τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε $0 = c_1 \cdot a_1 + c_2 a_2 + \ldots$ (το 0 στο αριστερό μέλος είναι το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$). Εκφράστε το C ως τη γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων, όσων και των ελεύθερων μεταβλητών που αντιστοιχούν στον πίνακα A.

Πρόβλημα 2. Λύστε τα συστήματα

$$\begin{cases} x + y + \ z = 7 \\ x - y + 2z = 8 \\ x - y + 3z = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x + y + \ z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + \ z = -1 \\ x - y + 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι τα τρία συστήματα έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών, άρα η απαλοιφή Gauss θα κάνει τα ίδια βήματα κι κατά συνέπεια μπορούμε να τα λύσουμε και τα 3 ταυτόχρονα, φτιάχνοντας έναν επαυξημένο πίνακα με τρεις αντί για 1 στήλη μετά την κάθετη γραμμή.

Πρόβλημα 3. Έστω τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}$$

α) Εξηγήστε γιατί αυτά τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα και εκφράστε ένα από αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων τριών.
β) Αφού λύσετε το α) και γράψετε κάποιο διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων, αγνοήστε το και μείνετε με τρία διανύσματα. Εξετάστε αν αυτά τα 3 διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή όχι και στην περίπτωση που είναι γράψτε ένα από τα τρία διανύσματα ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο.

Πρόβλημα 4. Έστω τα διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix}3\\2\\-4\end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix}-6\\1\\7\end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix}0\\-5\\2\end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}$$

α) Είναι τα διανύσματα u, v γραμμικώς ανεξάρτητα; Τα διανύσματα u, w; Τα διανύσματα u, z; Τα διανύσματα v, w ; Τα διανύσματα v, z; Τα διανύσματα w, z;
β) Κάποιος βιαστικός συμφοιτητής σας είπε ότι αν όλα τα ζεύγη διανυσμάτων μεταξύ των u, v, w, z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και όλα τα u, v, z, w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συμφωνείτε ;
γ) Κάποιος συμφοιτητής σας ήθελε να ελέγξει αν τα διανύσματα u, v, z, w είναι γραμμικώς εξαρτημένα και ισχυρίστηκε με περίσσια θέρμη ότι αρκεί να ελέγξει αν το w είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων τριών. Έχει δίκιο;
δ) Τελικά, είναι τα διανύσματα u, v, z, w γραμμικώς εξαρτημένα;

Πρόβλημα 5. Έστω

$$A = \begin{bmatrix}1 & -3\\3 & 5\\-1 & 7\end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} b = \begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$$

και έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$.
α) Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με τι ισούται τα m και n ;
β) Βρείτε την εικόνα του u υπό την T, κοινώς το $T(u)$.
γ) Να βρεθεί ένα x (αν υπάρχει) έτσι ώστε η εικόνα του x υπό την T να ισούται με b.
δ) Υπάρχουν περισσότερα από δύο x ώστε η εικόνα τους υπό την T να ισούται με b;
(ε) Είναι η T επί στον $\mathbb{R}^3$;
(ζ) Είναι το διάνυσμα c στο πεδίο τιμών της T, δηλαδή υπάρχει x ώστε $T(x) = c$;

Πρόβλημα 6. Έστω η απεικόνιση

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

δηλαδη $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
α) Με τι ισούται το m και με τι το n;
β) Εξηγήστε γιατί η απεικόνιση T είναι γραμμική.
γ) Βρείτε έναν πίνακα A ώστε $T(x) = Ax$.
Υπενθύμιση: Το διάνυσμα $e_i \in \mathbb{R}^n$ έχει 1 στην i-οστή του συντεταγμένη και 0 οπουδήποτε αλλού. Υπάρχουν ακριβώς n τέτοια διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Για να βρω τον πίνακα της T αρκεί να βρω τα $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$ και να φτιάξω τον πίνακα με στήλες αυτά τα διανύσματα.

Πρόβλημα 7. Έστω η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία ικανοποιεί

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Εξηγήστε γιατί η T είναι γραμμική και γράψτε την T ως $T(x) = Ax$ για κάποιον πίνακα A. Τι σας θυμίζει αυτή η απεικόνιση; Δεν στέλνει το σημείο (x, y) στο συμμετρικό του ως προς την ευθεία $y = x$;

Πρόβλημα 8. Έστω η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στέλνει ένα σημείο (x, y) στο συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$. Γιατί η T είναι γραμμική απεικόνιση; Γράψτε τον πίνακα A ο οποίος αντιστοιχεί στην T. Το ίδιο με την T' η οποία στέλνει ένα σημείο (x, y) στο συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$.