Ολοκλήρωμα Riemann

Άθροισμα Riemann:
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, P_ν η διαμέριση $P_\nu: a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{\nu-1}<x_\nu=\beta$ με $\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{\nu}$, $k=1,2,\dots,\nu$ και $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k$ οποιαδήποτε σημεία του $[a,b]$: $x_{k-1}\le \xi_k \le x_k$.
Αθρ. Riem: $R_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_\nu)\Delta x$

Θεώρημα 4.2.2 (κριτήριο Riemann)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν-ν υπάρχει ακολουθία $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}$ διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty}\left(U(f,P_n)-L(f,P_n)\right)=0$$

Επειδή $f(\varepsilon_k)\le f(\xi_k)\le f(p_k)$ ισχύει
$L(f,P)\le R_\nu \le U(f,P)$
άρα και $\lim\limits_{\nu\to\infty} R_\nu = \int_a^b f(x)dx$

Άνω άθροισμα της f ως προς P: $U(f,P)=\sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k\,(x_{k+1}-x_k)$

όπου $M_k(f,P)=M_k=\sup\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$

Κάτω άθροισμα της f ως προς P:

$$L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\,(x_{k+1}-x_k)$$

όπου $m_k(f,P)=m_k=\inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}$

Ισχύει ότι:

$$L(f,P)\le U(f,P).$$

Ισχύει επίσης, τέλος σελ 213
$\int_a^b f(x)dx \le U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon)+\varepsilon \le$
$\le \underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon.$

Κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$: $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{L(f,P): P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$

Άνω ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$: $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{U(f,Q): Q \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$\dots \int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

eclass

<u>Πχ. 1</u> Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$. Να εξεταστεί αν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

<u>Λύση</u>

$\forall n\in\mathbb{N}$ Θεωρούμε τη διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$:

$$P_n=\left\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1\right\}.$$

Η $f(x)=x^2$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$ επομένως

$$L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \qquad \left(m_k=f(\mu_k)=\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{k^2}{n^2},\ k=0,1,2,\dots,n-1\right)$$

$$=f(0)\cdot\frac{1}{n}+f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n} \qquad (f(x)=x^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(0^2+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\dots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

και

$$U(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) \qquad \left(M_k=f(M_k)=\left(\frac{k+1}{n}\right)^2,\ k=0,1,2,\dots,n-1\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}+f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\dots+\frac{n^2}{n^2}\right)=$$

$$= \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

Οπότε

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Άρα, από κριτήριο Riemann $\Rightarrow$ η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Εύρεση τιμής ολοκληρώματος:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = L(f,P_n) \le \underline{\int_0^1} x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \overline{\int_0^1} x^2\,dx \le U(f,P_n) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

Αφού $\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$

και $\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \int_0^1 x^2\,dx \le \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^2\,dx = 1/3.$$

Πx 2: Έστω $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $u(x) = \sqrt{x}$.

(Άσκηση: Να χρησιμοποιηθεί η ακολουθία διαμερίσεων του πx 1).

Τώρα, $\forall n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \left\{ 0 < \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{n^2} < \dots < \frac{(n-1)^2}{n^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1 \right\}.$$

$$a = x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_{n-1} \quad x_n = b.$$

Η u είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως:

$$m_k = f(\mu_k) = \sqrt{\frac{k^2}{n^2}} = \frac{k}{n} \qquad f(x_k).$$

$$L(u, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right)$$

$$M_k = f(x_{k+1})$$

και $$U(u, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right)$$

Άρα $$U(u, P_n) - L(u, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right) = \frac{1}{n} \to 0$$

Από κριτήριο Riemann $\Longrightarrow$ η u Riemann ολοκληρώσιμη

Εύρεση τιμής ολοκληρώματος:

$$L(f, P_n) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ k (k+1)^2 - k^3 \right\} = \dots = \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \to \frac{2}{3}$$

$$U(f, P_n) = \dots \to \frac{2}{3} \quad \text{άρα} \quad \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}$$

eclass

3) Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη

Απάντηση: Λ

Η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ είναι φραγμένη αλλά δεν

είναι ολοκληρώσιμη, γιατί για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$ έχουμε

$U(f,P)=1$ και $L(f,P)=-1$, άρα

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=-1<1=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

---

4) Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη

Απάντηση: Λ

Η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ έχει $|f(x)|=1,\ \forall x\in[0,1]$

Άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, ενώ η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

---

6) Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f,P)=U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, τότε η f είναι σταθερή.

Απάντηση: (Σ)

Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε υπάρχουν $y, z \in [a,b]$: $f(y) < f(z)$.

Έστω η διαμέριση $Q=\{a,b\}$ του $[a,b]$ (που περιέχει μόνο τα άκρα a και b του διαστήματος $[a,b]$) Τότε,

$$U(f,Q)-L(f,Q)=(M_0-m_0)(b-a)$$

όπου

$$m_0=\inf\{f(x): x\in[a,b]\} \leq f(y) < f(z) \leq \sup\{f(x): x\in[a,b]\}=M_0$$

Άρα $M_0-m_0>0$, οπότε $U(f,Q)-L(f,Q)>0$. ΑΤΟΠΟ

γιατί από την υπόθεση έχουμε $L(f,P)=U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$

Άρα, η f είναι σταθερή: υπάρχει $c\in\mathbb{R}$: $f(x)=c$, $\forall x\in[a,b]$ και το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ ισούται με $c(b-a)$

eclass

8) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x)=0$, $\forall x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$

τότε $$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Απάντηση: Σ

Έστω τυχαία διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$ του $[a,b]$

Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k

Από την υπόθεση έχουμε: $f(q_k)=0$, άρα $m_k \leq 0 \leq M_k$.

Άρα,

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1}-x_k) \leq 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1}-x_k) = U(f,P)$$

Άρα,

$$\sup_P L(f,P) \leq 0 \quad \text{και} \quad \inf_P U(f,P) \geq 0$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_P L(f,P) \leq 0 \quad \text{και} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \inf_P U(f,P) \geq 0$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$