Λογική

Ορισμος

(Μαθηματική / Λογική) Πρόταση είναι μια φράση η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής — όχι και τα δύο —

Π.χ. $2 + 2 = 3$ ✓ μαθηματική πρόταση

$z + 2 = 3$ ✗

Ορισμός

Ταυτολογία αν είναι πάντα αληθεια

1 ή A (αληθής) ή T (true)

Αντίφαση αν πάντα ψευδής

0 ή Ψ (ψευδής) ή F (false)

Συμβολισμός: Γράμματα p, q, r

p = "Χθες έβρεξε"

Πράξεις

- Άρνηση της p : $\overline{p}$ ή $\neg p$ (NOT)
- Σύζευξη (και, and) : $p \wedge q$ — ισχύει όταν και το p και το q αληθή
- Διάζευξη (ή, or) : $p \vee q$ — ισχύει όταν ή το p ή το q αληθές

$$\underbrace{\underbrace{(1+1=2)}_{A} \vee \underbrace{(2+3=7)}_{\Psi}}_{A}$$

$\overline{(\text{"χθες έβρεξε"}) \wedge (\text{"πήγα στη σχολή"})}$

$\parallel$

"χθες δεν έβρεξε" $\vee$ "δεν πήγα στη σχολή"

$$p \wedge q \qquad \neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$(\overline{p \wedge q}) = \overline{p} \vee \overline{q}$$

- Αποκλειστική Διάζευξη (είτε-είτε, xor)

$$p \oplus q$$

ισχύει όταν ακριβώς ένα εκ των p, q είναι αληθές

Πίνακας αλήθειας (Περιπτώσεις)

p	q	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	T	F	T	T

$\bar{p} \vee q$

Συνεπαγωγή

Αν $\overbrace{p}^{\text{υπόθεση}}$ τότε $\overbrace{q}^{\text{συμπέρασμα}}$: $p \to q$

q αν p

Αν	1=1	τότε	2=2	A
Αν	1=1	τότε	1=2	Ψ
Αν	0=1	τότε	1=1	A
Αν	0=1	τότε	1=2	A

αν	Ψ	τότε	A	A
αν	A	τότε	Ψ	Ψ

Ισοδυναμία

p $\underbrace{\text{αν και μόνο αν}}_{\text{ανν}}$ q : $p \leftrightarrow q$

iff

Θεώρημα: $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \to q) \land (q \to p)]$

Απόδειξη

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \land (q \to p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

\lor \land

Παιχνίδι με τη σοκολάτα (2, 5, 7)

P_i : Έχω στρατηγική νίκης αν υπάρχουν i κομμάτια και παίζω πρώτος

P_i αν και μόνο άν $\overline{P_{i-2}} \lor \overline{P_{i-5}} \lor \overline{P_{i-7}}$

$i=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_i	F	F	T	T	F	T	T	T	T	T

10

F

Παραδείγματα μετατροπής φυσικής γλώσσας σε προτασιακή λογική

Μπορείτε να έχετε πρόσβαση στο internet αν σπουδάζετε Πληροφορική ή αν δεν είστε νέοι φοιτητές.

p = "Μπορώ να έχω πρόσβαση στο internet"
q = "Σπουδάζω πληροφορική"
r = "Είμαι νέος φοιτητής"

$$(q \vee \bar{r}) \rightarrow p$$

Μπορείτε να έχετε πρόσβαση στο internet μόνο αν σπουδάζετε Πληροφορική ή αν δεν είστε νέοι φοιτητές.

$$p \rightarrow (q \vee \bar{r}) \quad \equiv \quad p \rightarrow (r \rightarrow q)$$

Αν p τότε q $\quad p \to q$

q αν p

q μόνο αν p $\quad q \to p$

Προτεραιότητα

$\neg$ Άρνηση — υψηλότερη

$\wedge$, $\vee$, $\oplus$ — μεσαία

$\to$, $\leftrightarrow$, $\leftarrow$ — χαμηλότερη

$p \wedge \neg r \to q$ $\quad (p \wedge (\neg r)) \to q$

Γρίφος

Δυο φυλές — Ιππότες : Λένε αλήθεια
— Κλέφτες : Λένε ψέματα

Ερωτ: Υπάρχει χρυσός στο νησί;
Απάντηση: Υπάρχει ανν λέω την αλήθεια

Υπάρχει χρυσός στο νησί;

Λύση

X : Υπάρχει χρυσός
A : Λέω την αλήθεια

Η απάντηση p ήταν $X \leftrightarrow A$

Απο τα δεδομένα
αν πάρω απάντηση P
Η P είναι αλήθεια αν και μόνο αν A

$A \leftrightarrow P$ είναι αληθής

$\equiv$

$A \leftrightarrow (A \leftrightarrow X)$ είναι αληθής

$\equiv$

X είναι αληθής

A	X	$A \leftrightarrow X$	$A \leftrightarrow (A \leftrightarrow X)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Γρίφος 2

Τρία άτομα

A, B, Γ

— Ιππότης : Λέει αλήθεια
— Κλέφτης : Λέει ψέματα
— Τεχνίτης : Λέει αλήθεια ή ψέματα

A — Εγώ είμαι ο τεχνίτης
B — Εγώ είμαι ο τεχνίτης
Γ — Ο A είναι ο τεχνίτης

A	B	Γ	Εγώ είμαι τεχνίτης	Εγώ είμαι τεχνίτης	Ο A είναι τεχνίτης
I	K	T	✗	✓	✓
I	T	K	✗		✓
K	I	T	✓	✗	
K	T	I	✓		✗
T	K	I	✓	✓	✓
T	I	K		✗	

Ιδιότητες

$\neg(\neg p) \equiv p$

$p \leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \equiv q$

$p \to q \equiv \overline{p} \vee q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Αντίθετο αναστροφος

$p \to q \equiv \overline{q} \to \overline{p}$

$p \leftrightarrow q \equiv \overline{q} \leftrightarrow \overline{p}$

$p \wedge 1 \equiv p$

$p \vee 1 \equiv 1$

$p \wedge 0 \equiv 0$

$p \vee 0 \equiv p$

$$\left.\begin{array}{lcl} \neg(p \vee q) & \equiv & \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) & \equiv & \neg p \vee \neg q \end{array}\right] \text{De Morgan}$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Μέχρι τώρα είδαμε

- Προτάσεις
- Μετατροπή από φυσική γλώσσα σε μαθηματική
- Ισοδυναμία προτάσεων
    - Πίνακας τιμών
    - ιδιότητες
- Επίλυση γρίφων

<u>Ορισμός</u>

Κατηγόρημα είναι μια λογική πρόταση της οποίας η αλήθεια εξαρτάται απο την τιμή 1 ή περισσότερων μεταβλητών

π.χ. $\underbrace{P(x)}_{\text{προτασιακή συνάρτηση}} : \overbrace{x > 3}^{\text{κατηγόρημα}}$

$P(1)$ ψευδές ενώ $P(4)$ αληθές

$P(3)$ ψευδές

π.χ. $Q(x,y) : \overbrace{x+y>3}^{\text{κατηγόρημα}}$

$Q(2,5)$ T

$Q(2,1)$ F

<u>Ποσοδείκτες</u>

- Υπαρξιακός Ποσοδείκτης

$\underbrace{\exists x : P(x)}$

Υπάρχει x έτσι ώστε να ισχύει η P(x)

π.χ. $\exists x : x>4$ T γιατί για $x=5$ $5>4$

$\exists x \underbrace{\in \mathbb{R}}_{\text{πεδίο ορισμού}} : x \notin \mathbb{Q}$ T γιατί $x=\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\exists x \in \{1,2,3\} : x^2 > 10$ F

$\exists x \in \{T,F\}, y \in \{T,F\} : \underbrace{x \wedge y}_{\text{κατηγόρημα}}$ T

$\exists x, y \in \{T,F\}$

$$\underbrace{\exists x \in \{T,F\} : \underbrace{\left(\exists y \in \{T,F\} : \underbrace{x \land y}_{\text{κατηγόρημα}} \right)}_{\text{κατηγόρημα}}}_{\text{πρόταση}}$$

- Μοναδική ύπαρξη

$\exists!\ x : P(x)$ υπάρχει μοναδικό x τέτοιο ώστε $P(x)$

$\exists!\ x \in \mathbb{R} : x^2 = 4$ F

$\exists!\ x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$ F

$\exists!\ x \in \mathbb{R} : x^2 = 0$ T

$\exists!\ x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^2 = 4$ T

$\exists!\ x, y \in \{0,1\} : \neg(x \to y)$ T

$x = 1$ $y = 0$

x	y	$x \to y$	$\neg(x \to y)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

- Καθολικός Ποσοδείκτης

$\forall x : P(x)$

Για κάθε x
(σε κάποιο πεδίο ορισμού)
ισχύει η $P(x)$

πχ. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ T

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1$ F

$\forall x : x^2 \geq 0$ F $x = i$

$\forall$ n περιττός ακέραιος : n^2 περιττός T

Αληθής γιατί $n = 2k+1$ όπου k ακέραιος

άρα $n^2 = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2+2k)+1$ περιττός

γιατί $n^2 = 2\lambda+1$

με $\lambda = 2k^2+2k$

Άρνηση ποσοδεικτών

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

DeMorgan

$P(x)$

$\neg(\forall x \in \{1,2,3\} : x^2 < 10)$ F

$\exists x \in \{1,2,3\} : x^2 \geq 10$ F

$\forall x \in \{1,2,3\} : P(x)$

$\equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)$

$\neg(\forall x \in \{1,2,3\} : P(x))$

$\equiv \exists x \in \{1,2,3\} : \overline{P(x)}$

$\equiv \overline{P(1)} \vee \overline{P(2)} \vee \overline{P(3)}$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall x \in S : P(x) \\ \equiv \\ \bigwedge_{x \in S} P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\exists x \in S : P(x) \\ \equiv \\ \bigvee_{x \in S} P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee \ldots\end{gathered}}$$

π.χ. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad n! + 1$ είναι πρώτος

F

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

$1! = 1 \rightarrow 1+1 = 2$

$2! = 1 \cdot 2 = 2 \rightarrow 2+1 = 3$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow 6+1 = 7$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \rightarrow 24+1 = 25$

$\exists n \in \mathbb{N}: \quad n! + 1$ να μην είναι πρώτος

π.χ. $n = 4$

T

Ικανοποιησιμότητα (SATisfiability)

Για ένα κατηγόρημα, υπάρχουν τιμές που το κάνουν αληθές;

$$\exists\, x_1, x_2, x_3 : P(x_1, x_2, x_3)$$

$p, q, r \in \{0, 1\}$

πχ. $P(p, q, r) =$

$$(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge \bar{p} \wedge r$$

$p = 0$ $q = 0$ $r = 0$

$p = 1$ $q = 1$ $r = 1$ X

$$\boxed{P \stackrel{?}{=} NP}$$

Sudoku

Ορίζουμε μεταβλητές $x_{ijv} \in \{T, F\}$

Αν $x_{ijv} = T$ τότε στη θέση (i,j)
η τιμή είναι v

$x_{173} = T$ αν $(1,7)$ έχει τιμή 3

– Στη γραμμή 1 υπάρχει ο αριθμός 1

$$\underbrace{x_{111} \lor x_{121} \lor x_{131} \lor \dots \lor x_{191}}$$

$$\bigvee_{j=1}^{9} x_{1j1}$$

Για κάθε γραμμή i
και κάθε τιμή v

$$\exists j \in \{1, \dots, 9\} \quad x_{ijv}$$

$$\bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{v=1}^{9} \left(\bigvee_{j=1}^{9} x_{ijv} \right)$$

- Αντίστοιχα $$\bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{v=1}^{9} \left(\bigvee_{i=1}^{9} x_{ijv} \right)$$

Για κάθε στήλη j υπάρχει ο αριθμός v

- Για κάθε 3×3 τετράγωνο T και κάθε τιμή v

$$\exists (i,j) \in T : x_{ijv}$$

- Σε κάθε κελί i, j να υπάρχει μοναδικό v ώστε x_{ijv}

$$\exists! v : x_{ijv}$$

Για κάθε $i\ j$
κάθε v και v'
όπου $v \neq v'$
$\overline{x_{ijv}} \vee \overline{x_{ijv'}}$

- Δωσμένα κελιά $(1,1) \to 3$
$x_{1,1,3} = T$

Ποσοτικοποίηση 2 ή περισσότερων μεταβλητών

$$\forall x \; \forall y : P(x,y)$$

$$\equiv$$

$$\forall y \; \forall x : P(x,y)$$

$$\not\equiv$$

$$\forall x \; \forall y : P(y,x)$$

αληθής αν ισχύει για κάθε ζεύγος (x,y)

$$\equiv \quad \forall x,y : P(x,y)$$

$$\exists x \; \exists y : P(x,y)$$

$$=$$

$$\exists y \; \exists x : P(x,y)$$

$$\equiv$$

$$\exists x,y : P(x,y)$$

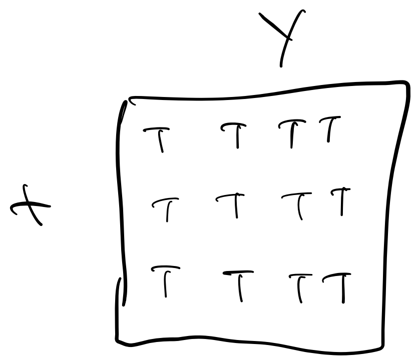
$$\equiv$$

$$\exists y : (\exists x : P(x,y))$$

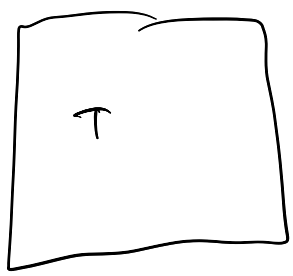
αληθής αν ισχύει για τουλάχιστον 1 ζεύγος (x,y)

$\forall x \; \exists y : P(x,y)$

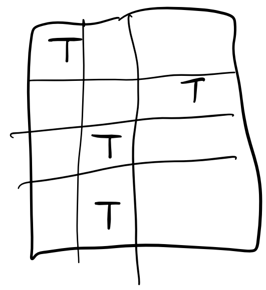
Για κάθε x υπάρχει τουλάχιστον 1 y ώστε $P(x,y)$



$\forall x \forall y$



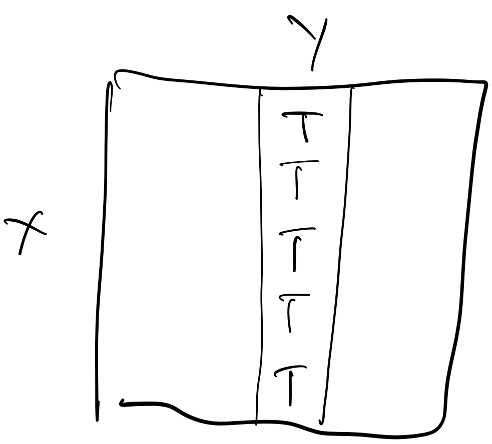
$\exists x \exists y$

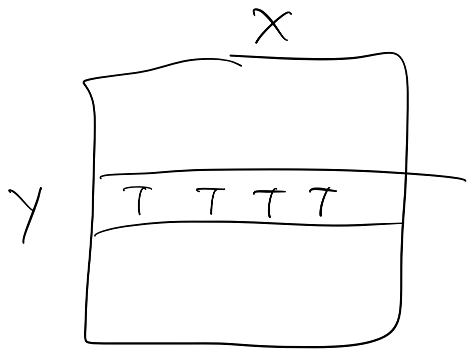


$\forall x \exists y$

$\exists y \; \forall x : P(x,y)$

Υπάρχει y ώστε για κάθε x να ισχύει η $P(x,y)$





$$\exists y \forall x : P(x,y) \not\equiv \forall x \exists y : P(x,y)$$

$$|||$$

$$\exists x \forall y : P(y,x)$$

π.χ. $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y, z \in \mathbb{R} : x = y + z$

Αληθής ότι x να έχω και $z = x - y$

$\exists y, z \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} : x = y + z$

Ψευδής όποια y και z

πρέπει

$0 = y + z$

και $1 = y + z$

$2 = y + z$

$\vdots$

$\exists y^{\in \mathbb{R}} \forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad x \cdot y = 0$

Αληθής $\quad y = 0$

Πρόταση : κάθε πραγματικός αριθμός $x \neq 0$ έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο

$\forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0} \; \exists y \in \mathbb{R}_{\neq 0} \quad : \quad x \cdot y = 1$

Αληθής γιατί για κάθε x μπορώ να διαλέξω $y = \frac{1}{x}$

$\boxed{\exists y \;\; \forall x \quad : \quad x \cdot y = 1}$ ψευδής

Η άρνηση της πρότασης

$\neg \left(\forall x \in \mathbb{R}_{\neq 0} \; \exists y \in \mathbb{R}_{\neq 0} \; : \; x \cdot y = 1 \right)$

$\exists x \in \mathbb{R}_{\neq 0} : \neg \left(\exists y \in \mathbb{R}_{\neq 0} \; : \; x \cdot y = 1 \right)$

$\exists\ x \in \mathbb{R}_{\neq 0} : \forall\ y \in \mathbb{R}_{\neq 0} : \neg(x \cdot y = 1)$

$\exists\ x \in \mathbb{R}_{\neq 0}\ \forall\ y \in \mathbb{R}_{\neq 0} : x \cdot y \neq 1$

Πρόταση: $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\exists$ πρώτος p τέτοιος ώστε $n < p \leq n! + 1$

$n! = 1 . 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$

	n		$n!+1$	
$n=1$	$1 <$	p	≤ 2	$p=2$
$n=2$	$2 <$	p	$\leq 1.2+1=3$	$p=3$
$n=4$	$4 <$	p	≤ 25	$p=7$ ή $p=5$

Απόδειξη: Θα δείξω ότι για κάθε n υπάρχει p πρώτος στο διάστημα $n < p \leq n! + 1$

Αν $n!+1$ είναι πρώτος
τότε $p = n!+1$

Αλλιώς ($n!+1$ δεν είναι πρώτος)

τότε υπάρχει q πρώτος
με $2 \leq q < n!+1$
που διαιρεί το $n!+1$

Θα δείξω ότι $q > n$

Έστω ότι $2 \leq q \leq n$
τότε το q διαιρεί το $n!$
$n! = 1.2.3 \dots q \dots n$
αλλά το q διαιρεί και το $n!+1$
άτοπο

Άρα $q > n$
Τότε θέτω $p = q$ $\square$

Ορισμός

Επιχείρημα είναι μια ακολουθία προτάσεων
Η τελική πρόταση λέγεται συμπέρασμα

Ορθά επιχειρήματα / Κανόνες

- Modus Ponens

$$p \land (p \to q) \to q$$

- Modus Tollens

$$(p \to q) \land \neg q \to \neg p$$

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ \therefore \quad q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore \quad \neg p \end{array}$$

- Υποθετικός συλλογισμός

$$(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$$

- Διαζευκτικός συλλογισμός

$$(p \lor q) \land \neg p \to q$$

- Επίλυση

$$(p \lor q) \land (\neg p \lor r) \to (q \lor r)$$

$$(\neg p \to q) \land (p \to r) \to (q \lor r)$$

Π.χ. – Δεν έχει ήλιο σήμερα και ο καιρός είναι κρύος

– Θα πάμε για μπάνιο μόνο αν έχει ήλιο

∴ Δεν θα πάμε για μπάνιο

$H \equiv$ "Έχει ήλιο σήμερα"
$K \equiv$ "Ο καιρός είναι κρύος"
$M \equiv$ "Θα πάμε για μπάνιο"

$$\begin{array}{l} \neg H \wedge K \\ H \leftarrow M \\ \hline \therefore \neg M \end{array}$$

$H \rightarrow M$
$H \leftarrow M$
$H \leftrightarrow M$

Modus Tollens

Ποσοδείκτες

- Καθολική Εφαρμογή

$\forall x : P(x) \Rightarrow P(c)$

για όποια τιμή c θέλω στο πεδίο ορισμού

- Υπαρξιακή γενίκευση

$P(c) \Rightarrow \exists x : P(x)$

για κάποια τιμή c

- Υπαρξιακή Εφαρμογή

$\underbrace{\exists x : P(x)} \Rightarrow \underbrace{P(c)}$

για κάποιο c που δεν γνωρίζω αναγκαία ποιο είναι

Π.χ. — Όσοι είναι στο πρώτο έτος παρακολουθούν Διακριτά

— Η Μαρία είναι στο 1ο έτος

$\therefore$ Η Μαρία παρακολουθεί Διακριτά

$p(x)$: "Ο x είναι στο πρώτο έτος"

$q(x)$: "Ο x παρακολουθεί Διακριτά"

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x : p(x) \to q(x)\\ p(\text{"Μαρία"})\end{array}}{}$$

$\therefore$ $p(\text{"Μαρία"}) \to q(\text{"Μαρία"})$

$\therefore$ $q(\text{"Μαρία"})$

Απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης P

Τεκμηρίωση της αλήθειας της P με βάση κάποια αξιώματα ή υποθέσεις.

Μέθοδοι Αποδείξεων

- Ευθεία Απόδειξη

$$Y \to Q \to P$$

Αρκεί να δείξω και ισοδυναμίες

$$Y \leftrightarrow Q \to P$$

π.χ. $\forall\, n$ περιττός ακέραιος : n^2 περιττός

n περιττός $\Rightarrow \exists\, \lambda$ ακέραιος : $n = 2\lambda + 1$

$\Rightarrow \quad n^2 = (2\lambda+1)^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$

$\qquad = 2(2\lambda^2 + 2\lambda) + 1$

$\Rightarrow \exists\, \kappa$ ακέραιος : $n^2 = 2\kappa + 1$

$\Rightarrow \quad n^2$ είναι περιττός

- Έμμεση απόδειξη / απαγωγή σε άτοπο

$\neg P \to \ldots \to \neg Y$ (αντίθετο αναστροφος)

π.χ. $\forall$ n ακέραιος (θετικός) : n^2 είναι περιττός
$\to$ n είναι περιττός

Ευθεία απόδειξη

n^2 περιττός $\Rightarrow$ $n^2 = 2k+1$ για κάποιο k
$\Rightarrow n = \sqrt{2k+1}$? ? ?

Απόδειξη

Με άτοπο

$\neg P$

Έστω n όχι περιττός άρα άρτιος

$\Rightarrow$ $n = 2\lambda$ για κάποιο ακέραιο λ

$\Rightarrow$ $n^2 = 4\lambda^2 = 2(2\lambda^2)$

$\Rightarrow$ $n^2 = 2k$ για κάποιο k ακέραιο

$\Rightarrow$ n^2 άρτιος άτοπο γιατί από την υπόθεση n^2 περιττός $\square$

– Υπαρξιακή απόδειξη ή αντιπαράδειγμα

πχ. Να εξετάσετε αν ισχύει

$\forall n \in \mathbb{N}$: n γράφεται σαν άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων

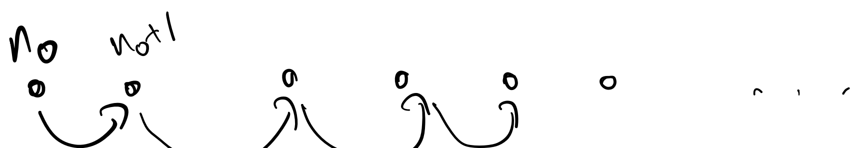
$$1 = 1^2 + 0^2 + 0^2$$
$$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2$$
$$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$$
$$4 = 2^2 + 0 + 0$$
$$5 = 2^2 + 1^2 + 0$$

Το 7 είναι αντιπαράδειγμα
δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα
τριών αριθμών $\{0, 1, 4\}$

- Επαγωγή : $\forall\, n \geq n_0 : P(n)$

Αρκεί να δείξω $P(n_0)$

και $\forall\, k \geq n_0 : P(k) \Rightarrow P(k+1)$



Στρατηγικές Αποδείξεων

1α Απαρίθμηση Περιπτώσεων / Εξαντλητική Απόδειξη

$$Y \equiv Y_1 \lor Y_2 \lor Y_3 \lor \dots \lor Y_n \longrightarrow P$$

αρκεί να δείξω

$Y_1 \rightarrow P$

$Y_2 \rightarrow P$

$\vdots$

$Y_n \rightarrow P$

πχ. $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 \geq n$

Εξετάζω περιπτώσεις

$n \in \mathbb{Z}$ ισοδύναμα $(n=0) \lor (n>0) \lor (n<0)$

- Περίπτωση $n=0$ τότε $0^2 \geq 0$ ✓
- Περίπτωση $n<0$ τότε $n^2 \geq 0$ αλλά $n<0$

$n^2 > n \Rightarrow n^2 \geq n$

- Περίπτωση $n > 0$ τότε $n \geq 1$

$\times n$

$n^2 \geq n$ ✓

1β Αντίστροφος συλλογισμός

$Y \to P$ αρκεί $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow Y$

π.χ. Για θετικούς ακεραίους x, y με $x \neq y$ ο αριθμητικός μέσος (AM) είναι μεγαλύτερος από τον γεωμετρικό μέσο (ΓΜ)

$$(AM) > (\Gamma M)$$

$$(AM) = \frac{x+y}{2} \qquad \Gamma M = \sqrt{xy}$$

π.χ. $x = 3$ $\quad y = 5$

$$(AM) = \frac{3+5}{2} = 4 = \sqrt{16}$$

$$(\Gamma M) = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$$

$$(AM) > (\Gamma M) \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{4} > xy$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 > 4xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy > 4xy$$

$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-2xy > 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 > 0 \quad \checkmark$ γιατί $x \neq y$

2. Εις άτοπο απαγωγή

π.χ. Ν.δ.ο. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (είναι άρρητος)

Απόδειξη: Έστω $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{N}$ όπου ο $ΜΚΔ(a,b)=1$

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (ελαχίστων όρων)

$\frac{10}{15} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 5} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \sqrt{2}^2 = \frac{a^2}{b^2}$

$\Rightarrow \underbrace{2b^2 = a^2}$

$\Rightarrow$ a^2 άρτιος

$\Rightarrow$ a άρτιος

$\Rightarrow$ $a = 2\lambda$, $2b^2 = 4\lambda^2$

$\Rightarrow$ $b^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow b$ άρτιος

– Αν a είναι περιττός, άτοπο γιατί a^2 είναι περιττός αλλά $2b^2$ άρτιος

– Αν a είναι άρτιος: $\underline{a = 2\lambda}$

$$2b^2 = (2\lambda)^2 = 4\lambda^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 2\lambda^2$$

άρα b^2 άρτιος $\Rightarrow$ b άρτιος

άτοπο γιατί $\frac{a}{b}$ ελαχίστων όρων $\Box$

Π.χ. Αν έχουμε 37 άτομα, τουλάχιστον 4 έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα.

Απόδειξη με άτοπο

Έστω ότι υπάρχουν το πολύ 3 άτομα για κάθε μήνα

$\Rightarrow$ Υπάρχουν <u>το πολύ</u> $3 \cdot \underbrace{12}_{\text{μήνες}}$ άτομα

36 άτομα

άτοπο

3. Υπαρξιακή απόδειξη $\exists x : P(x)$

- Κατασκευαστική

π.χ. $\exists\, n \in \mathbb{N}$ που γράφεται ως άθροισμα 2 κύβων με 2 τρόπους

$$n = a^3 + b^3 = c^3 + d^3$$

με $a \le b$ $\quad a \ne c$

$c \le d$ $\quad b \ne d$

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

- Μη κατασκευαστικές

π.χ. $\exists\, x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x^y \in \mathbb{Q}$

Απόδειξη

Έστω $x = y = \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Αν $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι ρητός ✓

Διαφορετικά $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$y = \sqrt{2}$

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \quad ✓ \quad \square$$

Ν.δ.ο. $\nexists\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ τ.ω. $n^2 + n^3 = 100$

Απόδειξη

Αν $n \geq 5$, $n^2+n^3 \geq 5^2+5^3 = 125+25$

$= 150 > 100$

Αν $n \leq 4$

$- \; n = 0$ $\quad 0^2 + 0^3 = 0$

$- \; n = 1$

$\vdots$

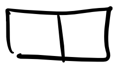
$n \leq 4$ $\quad n^2+n^3 \leq 4^2+4^3 \leq$

$16 + 64$

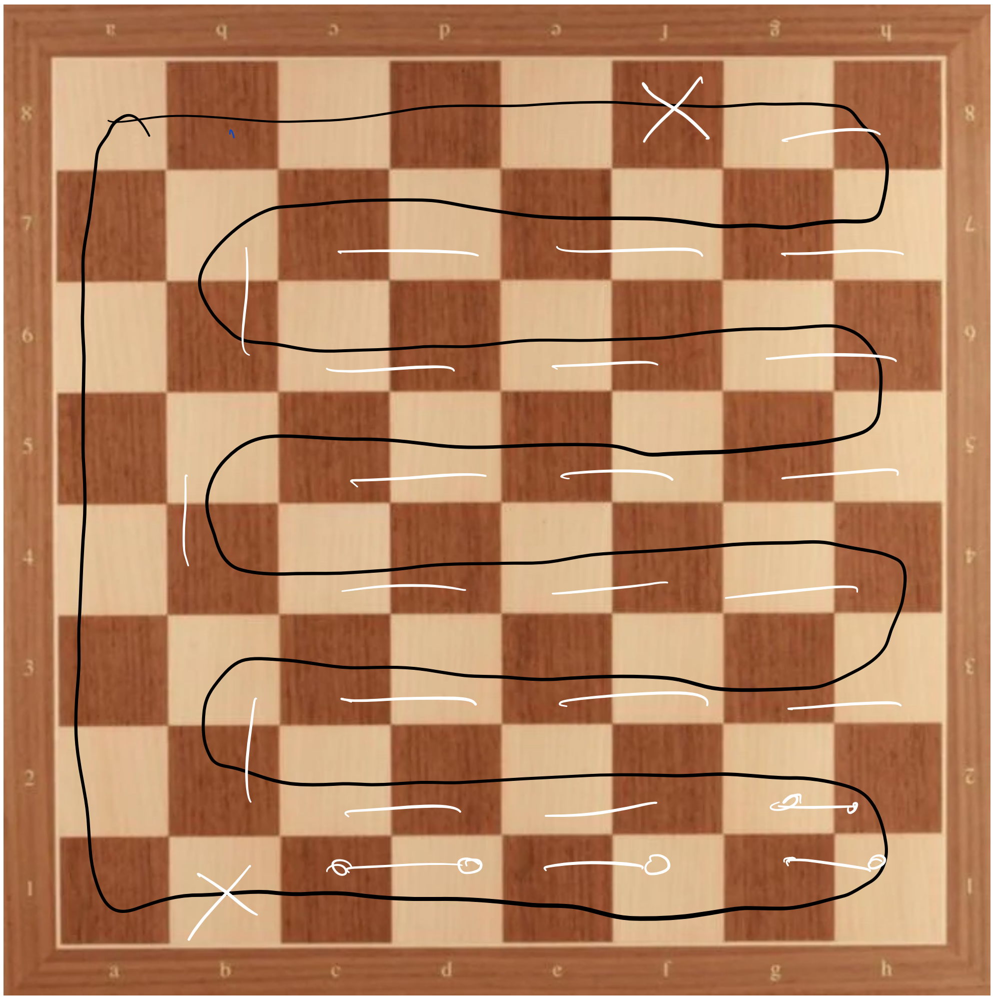
$= 80 < 100$

$\square$

Ντόμινο στη σκακιέρα



Ν.δ.ο. μπορώ να καλύψω τη σκακιέρα με 2x1 ντόμινο



Κατασκευαστικά

Καλύπτω την πρώτη γραμμή και κάθε γραμμή με τον ίδιο τρόπο

Γίνεται να καλύψω άλη τη σκακιέρα πέρα από 1 τετράγωνο;

Δεν γίνεται γιατί τα ντόμινο καλύπτουν πάντα άρτιο αριθμό κελιών αλλά αν λείπει 1 υπάρχουν συνολικά 63 (περιττός)

Αν λείπουν <u>2 άσπρα κουτάκια</u> δεν γίνεται να καλυφθεί η σκακιέρα γιατί τα ντόμινο καλύπτουν τον ίδιο αριθμό απο άσπρα και μαύρα.

Σύνολα

π.χ. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

Ορισμός: Σύνολο είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων (δηλ. διαφορετικών)

π.χ. $\{a, b\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$[0, 1]$, $\mathbb{R}$

Το σύνολο των δυνάμεων του 2

$\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\} = \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$

Τα αντικείμενα ενός συνόλου ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου

$a \in \{a, b\}$ — $\in$: ανήκει

$\gamma \notin \{a, b\}$ — $\notin$: δεν ανήκει

Περιγραφή Συνόλου

Για οποιοδήποτε αντικείμενο πρέπει να ξέρω αν ανήκει ή δεν ανήκει στο σύνολο (ποτέ και τα 2)

Ένα σύνολο ορίζεται

- Με απαρίθμηση όλων των στοιχείων

  π.χ. $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

- Με περιγραφή των στοιχείων

  π.χ. $A = \{a \in \mathbb{Z} : \underbrace{1 \leq a \leq 3}_{\text{συνθήκη}}\}$

  A = "οι ακέραιοι από 1 εως και 3"

- Μέσω πράξεων με άλλα σύνολα

  π.χ. $A = \mathbb{Z} \cap [0.5, 3.14]$

Τα στοιχεία ενός συνόλου

– Δεν επαναλαμβάνονται

$$\{a, a, b\} = \{a, b\}$$

(πολυσύνολο)

δεν έχει νόημα

– Δεν είναι ταξινομημένα

δηλ $\{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$

$$[0,1] = \{1-x : x \in [0,1]\}$$

– Μπορεί να είναι διαφορετικού είδους ακόμα και σύνολα

$$P = \{\underbrace{a}, \underbrace{1}, \underbrace{\tfrac{3}{4}}, \underbrace{\pi}, \underbrace{\text{"Περσεφόνη"}}, \underbrace{\{1,2\}}\}$$

$1 \in P$ $\quad$ $2 \notin P$ $\quad$ $1 \in \{1,2\}$

$\{1,2\} \in P$ $\quad$ $\{1\} \notin P$

$\{2,1\} \in P$ $\quad$ $\{1+1, 1\} \in P$

$\{1\} \notin \{1\}$ $\{1\} \in \{\{1\}\}$

$\{\{1,2\}\} \subseteq P$

$\{1\} \neq 1$ $\{1,2\} \notin P$

$1 \in P$

$2 \in P$

Ορισμός (Υποσύνολο)

Ένα σύνολο P είναι υποσύνολο του συνόλου Q
και συμβολίζεται $P \subseteq Q$
αν $\forall p \in P : p \in Q$
δηλαδή $\forall p : (p \in P) \rightarrow (p \in Q)$

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$\{1,5\} \subseteq \{1,2,5\}$ ← $\{1,5\} \subset \{1,2,5\}$

$\{1,5\} \notin \{1,2,5\}$

$\{1,5\} \notin \{1,5\}$

$\{1,5\} \subseteq \{1,5\}$

Κάθε σύνολο A
είναι υποσύνολο του εαυτού του
$A \subseteq A$

Αλλά το A δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του A

$$A \not\subset A \qquad \neg(A \subset A)$$

Γνήσιο υποσύνολο $A \subset B$

ανν

$A \subseteq B$

και

$A \neq B$

Ορισμός

$P = Q$ ανν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία

$$\Leftrightarrow (P \subseteq Q) \land (Q \subseteq P)$$

$$\Leftrightarrow \forall x : (x \in P \leftrightarrow x \in Q)$$

π.χ. $\{a \in \mathbb{R} : 0 \leq a \leq 1\} = [0, 1]$

Ερώτηση: Υπάρχουν σύνολα A, B τ.ω. $A \subseteq B$ και $A \in B$

Ναι

$$B = \{ A, \{A\} \}$$

$A \in B$

$A \subseteq B$ $\times$

$A = \{1\}$ $\quad B = \{ \{1\}, \{\{1\}\} \}$

$A \in B$

$A \notin B$

$$\boxed{A = \{1\} \qquad B = \{ \{1\}, \{\{1\}\}, 1 \}}$$

$A \in B$

$A \subseteq B$

Πιο γενικά για κάθε A

$$B = \{A\} \cup A$$

Για κάθε σύνολο A υπάρχει σύνολο B τέτοιο ώστε $A \in B$ και $A \subseteq B$

Κενό σύνολο

Κενό είναι το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο

Συμβολισμός $\{\}$, $\emptyset$

Θεώρημα: $\emptyset \subseteq P$ για κάθε σύνολο P

$A \subseteq B$ ανν $\forall x : x \in A \to x \in B$

$\forall x : x \in \emptyset \to x \in P$

$F \to x \in P$ $\quad T$

Ερώτηση: Γίνεται $\emptyset \in A$ για κάποιο σύνολο A

Ναι

$\emptyset \notin \{1, 2\}$ $\qquad$ $\emptyset \in \{1, 2, \emptyset\}$

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A καλείται το μέγεθος ή πληθικός αριθμός και συμβολίζεται με $|A|$

π.χ.

$$|\{a, b\}| = 2$$
$$|\emptyset| = 0$$
$$|\{\emptyset\}| = 1$$
$$|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = 2$$
$$|\{\underbrace{\emptyset}, \underbrace{\{1, 2\}}\}| = 2$$

$$|[0, 1]| = \infty$$
$$|\{[0, 1]\}| = 1$$

Αν για ένα σύνολο A

$|A| < \infty$ τότε το A είναι "πεπερασμένο"

$|A| = \infty$ τότε το A είναι μη πεπερασμένο

$\mathbb{R}$ είναι μη πεπερασμένο

$\{\mathbb{R}\}$ είναι πεπερασμένο

$$\emptyset \ \underset{\notin}{\subseteq} \ \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$$

$$\{\underbrace{\emptyset}\} \ \underset{\in}{\not\subseteq} \ \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$$

$$\{\emptyset\} \ \underset{\notin}{\subseteq} \ \{1, 2, \emptyset, 10\}$$

Πράξεις συνόλων

– Δυναμοσύνολο (powerset)

Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A

Συμβολίζεται 2^A ή $P(A)$

$$2^A = \{ B : B \subseteq A \}$$

π.χ. $A = \{a, b\} \Rightarrow$

$$2^A = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$$

$$\boxed{|2^A| = 2^{|A|}}$$

$$A = \{ a, b, c \}$$

8 στοιχεία του 2^A

a	b	c	
0	0	0	$\emptyset$
0	0	1	$\{c\}$
0	1	0	$\{b\}$
1	0	0	$\{a\}$
1	1	0	$\{a,b\}$

$$\left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & \{b,c\} \\ 1 & 0 & 1 & \{a,c\} \\ 1 & 1 & 1 & \{a,b,c\} \end{matrix}\right.$$

- Καρτεσιανό Γινόμενο δύο συνόλων A, B

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A , b \in B \}$$

διατεταγμένα ζεύγη
(όχι διάστημα!)

π.χ. $A = \{1, 2\}$
$B = \{2, 4\}$

$$A \times B = \{ (1,2), (1,4), (2,2), (2,4) \}$$

$$\neq$$

$$B \times A = \{ (2,1), (2,2), (4,1), (4,2) \}$$

$|A| = n_A$ $\quad$ $|B| = n_B$ $\quad$ $|A \times B| = n_A \cdot n_B$

- Ένωση $A \cup B = \{p : (p \in A) \vee (p \in B)\}$
- Τομή $A \cap B = \{p : (p \in A) \wedge (p \in B)\}$

$$\cup \longleftrightarrow \vee$$
$$\cap \longleftrightarrow \wedge$$

π.χ. $\{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\}$

$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$

Προσεταιριστική ιδιότητα

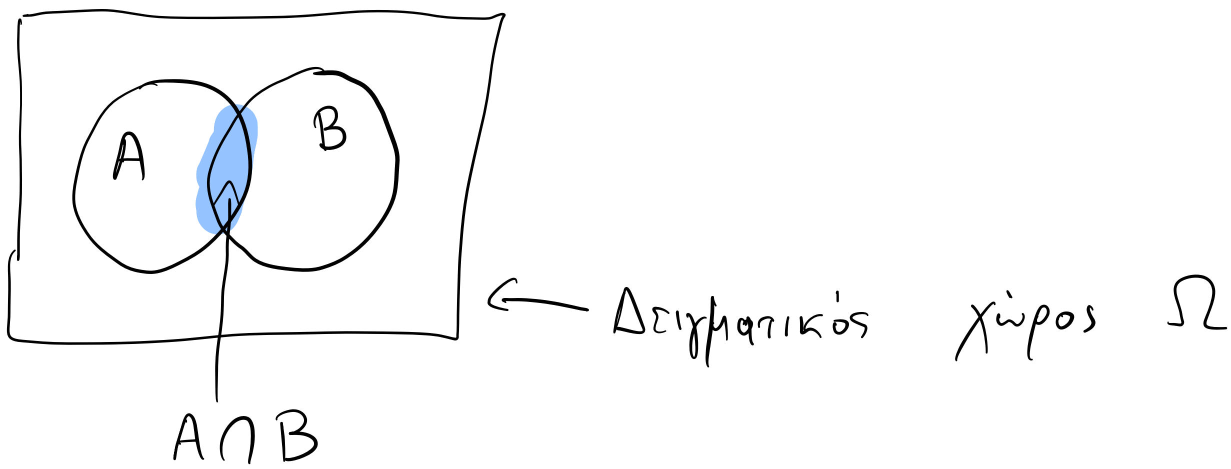
$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$
$$= A \cup (B \cup C)$$

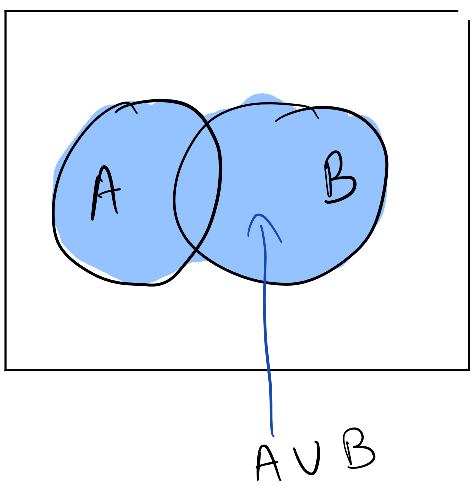
$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$$
$$= A \cap (B \cap C)$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

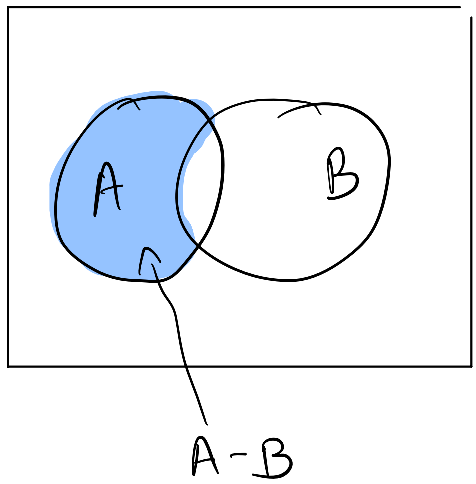
Διάγραμμα Venn





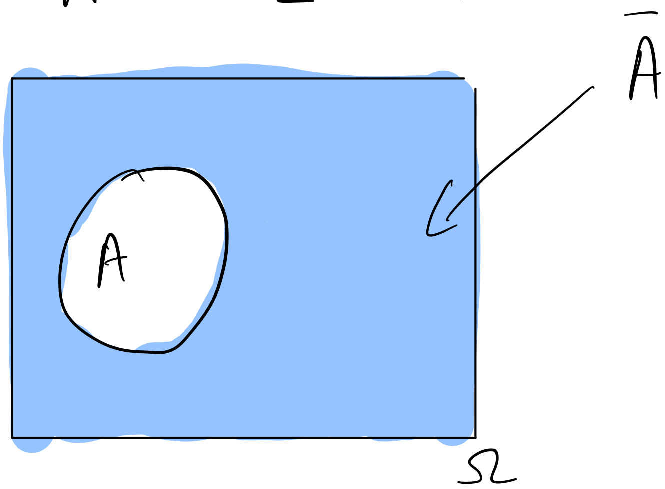
Διαφορά συνόλων

$$A - B = \{ a \in A : a \notin B \}$$



Συμπλήρωμα $\bar{A}$ ως προς ένα σύνολο αναφοράς Ω

$$\bar{A} = \Omega - A$$



$\Omega = \{1,2,3,4\}$

$A = \{2,4\} \rightarrow \bar{A} = \{1,3\}$

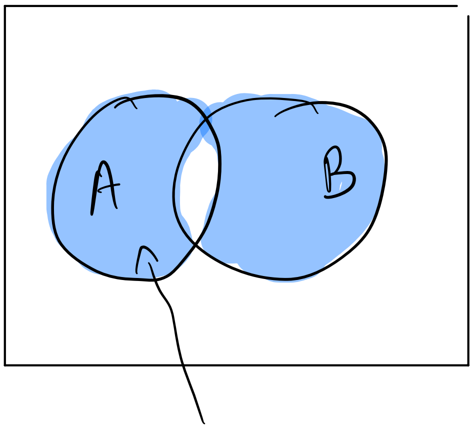
π.χ. $\overline{\{0,2,4,6,8,10,\dots\}} = \{1,3,5,7,9,\dots\}$

ως προς σύνολο αναφοράς τους φυσικούς $\mathbb{N}$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

Συμμετρική διαφορά

$$A \oplus B = \{p : (p \in A) \oplus (p \in B)\}$$
$$= \{p : (p \in A \cup B) \land (p \notin A \cap B)\}$$



$A \oplus B$

Ιδιότητες

- Η ένωση, η τομή και η συμμετρική διαφορά είναι προσεταιριστικές

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Αντίθετα

$$A - B - C = (A - B) - C$$

$$\neq A - (B - C)$$

$A = \{1, 2\}$

$B = \{2\}$

$C = \{1, 2, 3\}$

$$\overbrace{A - B}^{\{1\}} - C = \emptyset$$

$$A - (B - C) = A = \{1, 2\}$$

$$A - \underbrace{(C - B)}_{\{1,3\}} = \{2\}$$

- Η ένωση, η τομή και η συμμετρική διαφορά είναι αντιμεταθετικές

$$A \cup B = B \cup A$$

αλλά $A - B \neq B - A$

- Έχουν ουδέτερο στοιχείο

$$\left(a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a \right)$$

ουδέτερο στοιχείο για πρόσθεση

ουδέτερο στοιχείο για πολ/σμό

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \oplus \emptyset = A$$

$$\boxed{\begin{aligned} A \oplus \overline{A} &= \Omega \\ A \oplus \Omega &= \overline{A} \\ A \oplus A &= \emptyset \end{aligned}}$$

- Η ένωση και η τομή είναι επιμεριστικές μεταξύ τους

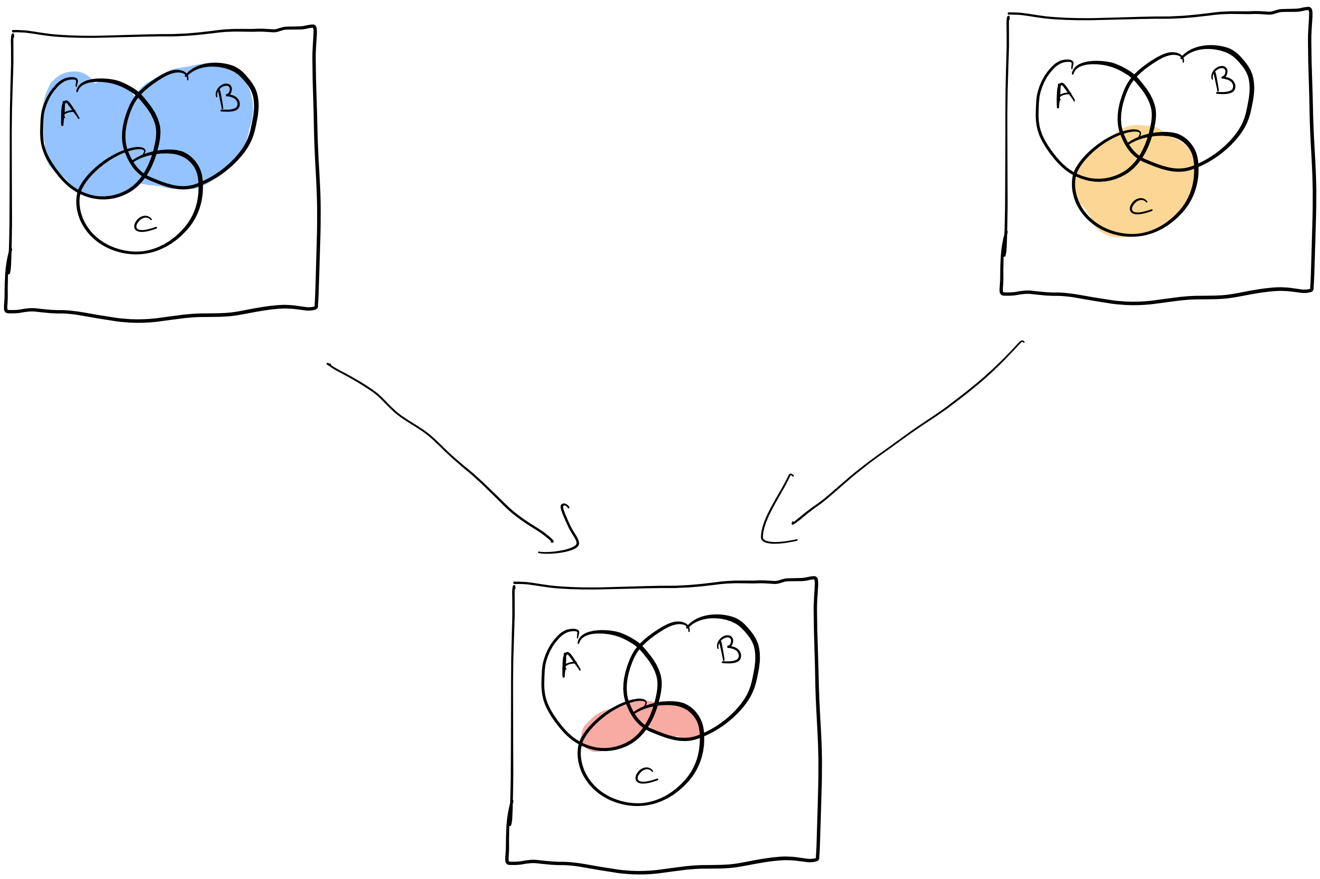
$$\boxed{(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \quad \text{Επιμεριστική ιδιότητα}}$$

$$(\alpha\cdot\beta)+\gamma \neq (\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\gamma)$$

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

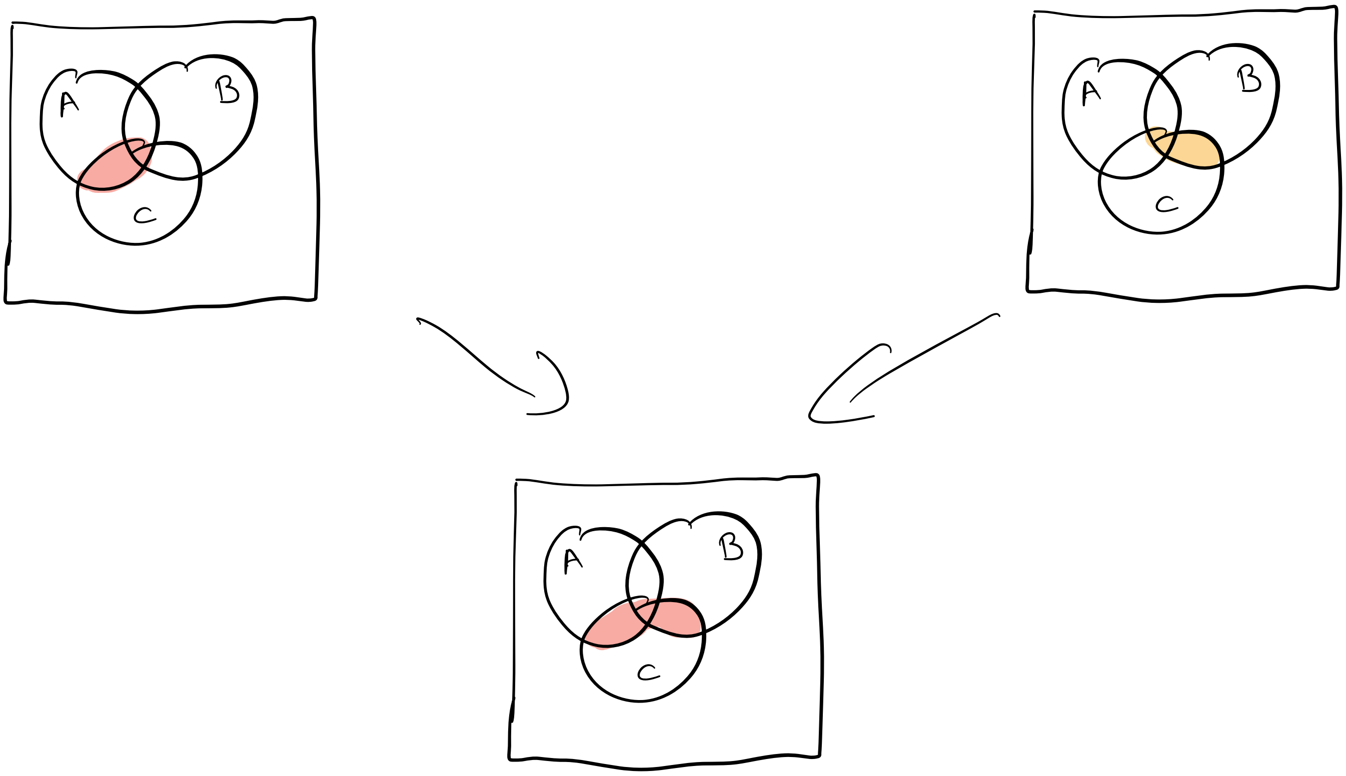
Απόδειξη με διάγραμμα Venn

$(A \cup B)$ $\quad\quad\quad$ $\cap$ $\quad\quad\quad$ C



$(A \cup B) \cap C$

$(A \cap C) \quad \cup \quad (B \cap C)$



$(A \cap C) \cup (B \cap C)$

Με πίνακα αληθείας

	A	B	C	$(A \cup B) \cap C$	$(A \cap C) \cup (B \cap C)$
x	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0
	0	1	0	0	0
	0	1	1	1	1
	1	0	0	0	0

1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Απόδειξη με ιδιότητες

Θεώρημα: $\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{P} = \underbrace{\overbrace{(A \cap C)}^{Q_1} \cup \overbrace{(B \cap C)}^{Q_2}}_{Q}$

Απόδειξη Θέλω να δείξω ότι
$P = Q$

- $Q \subseteq P$

$Q_1 \subseteq A \Rightarrow Q_1 \subseteq A \cup B$
$Q_1 \subseteq C$

$\Downarrow$

$Q_1 \subseteq \underbrace{(A \cup B) \cap C}_{P}$

Αντίστοιχα $Q_2 \subseteq (A \cup B) \cap C$

$Q = Q_1 \cup Q_2 \subseteq P$

- $P \subseteq Q$: Έστω $p \in P$

$\Downarrow$

$p \in A \cup B$

και $p \in C$

- Αν $p \in A$ επειδή $p \in C$

$\Rightarrow p \in A \cap C = Q_1$

- Αν $p \in B$ επειδή $p \in C$

$\Rightarrow p \in B \cap C = Q_2$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$p \in Q_1 \cup Q_2 = Q$ $\square$

- Κανόνες De Morgan για σύνολα

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Θ.δ.ο. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x : x \notin A \cap B\} \\
&= \{x : \neg (x \in A \cap B)\} \\
&= \{x : \neg (x \in A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x : \overline{(x \in A)} \vee \overline{(x \in B)}\} \\
&= \{x : (x \notin A) \vee (x \notin B)\} \\
&= \{x : (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})\} \\
&= \{x : x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} \\
&= \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \square
\end{aligned}
$$

DeMorgan για λογικές προτάσεις

Αναπαράσταση συνόλων στον υπολογιστή

Έστω $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$

Μπορώ να αναπαραστήσω κάθε υποσύνολο $A \subseteq \Omega$ ως μια συμβολοσειρά από bits

Π.χ. $n=5$ $\quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{1,3,4\} \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0}$

$\{2,3\} \quad \longleftrightarrow \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0$

$\emptyset \quad \longleftrightarrow \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$10110_{(2)} = 22_{(10)}$

$0 \ldots 2^5-1$

$01100 = 12_{(10)}$

$A \in 2^{\Omega}$

$00000 = 0_{(10)}$

$|2^{\Omega}| = 2^{|\Omega|}$

$22 \ \& \ 12 = 4 = (00100)_{(2)}$

$22 \mid 12 = 30 = (11110)_{(2)}$

$22 \ \wedge \ 12 = 26 = (11010)_{(2)}$

$0 \ldots 51$

Π.χ. $\{4\diamondsuit, 5\heartsuit\}$

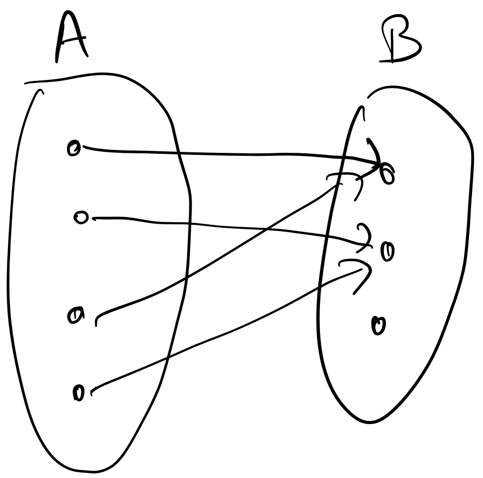
$$\begin{array}{ccccccc} & A\heartsuit & 2\heartsuit & & & K\spadesuit & \\ \Omega = \{ & 1, & 2 & , \ldots, & & 52 & \} \\ & 0 & 0 & \ldots 1 \ldots & 1 & 0 & \end{array}$$

Συναρτήσεις

Συνάρτηση $A \to B$ καλείται μια ανάθεση σε κάθε στοιχείο του A ακριβώς ενός στοιχείου του B

A πεδίο ορισμού

B πεδίο τιμών



π.χ. A = σύνολο των φοιτητών του 1ου έτους

B = βαθμός της τελικής εξέτασης στα διακριτά

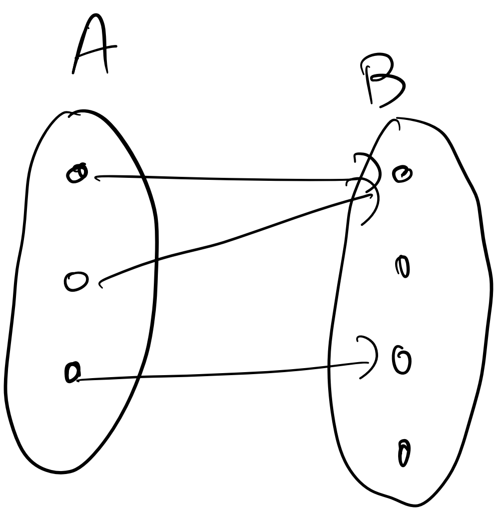
Η συνάρτηση πρέπει να είναι μονοσήμαντη δηλαδή για κάθε $a \in A$ να υπάρχει μοναδικό $b \in B$ τέτοιο ώστε $b = f(a)$

εικόνα του a

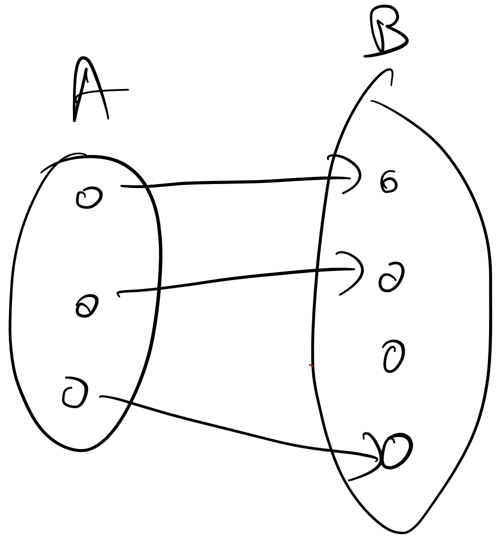
Ορισμος 1-1 συνάρτηση f ανν

Για κάθε $a, a' \in A$
$a \neq a'$
ισχύει $f(a) \neq f(a')$

$|B| \geq |A|$



όχι 1-1

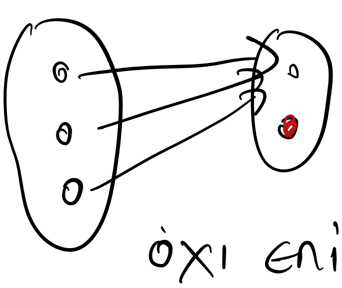


1-1

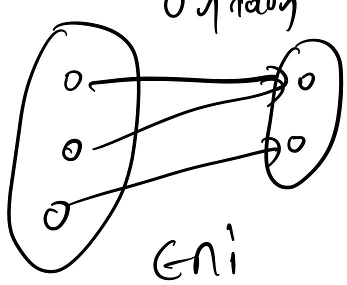
Ορισμός επί συνάρτηση $f: A \to B$ ανν

$\forall\, b \in B \quad \exists\, a \in A : \quad f(a) = b$

δηλαδή $B = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$



όχι επί



επί

π.χ. $f(x) = x^2$ όπου $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

όχι επί γιατί

για $y = -1$

δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = -1$

- $f(x) = x^2$ όπου $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

επί γιατί για κάθε

$y \geq 0$ υπάρχει $x = \sqrt{y}$

που δίνει $f(x) = y$

Ορισμός

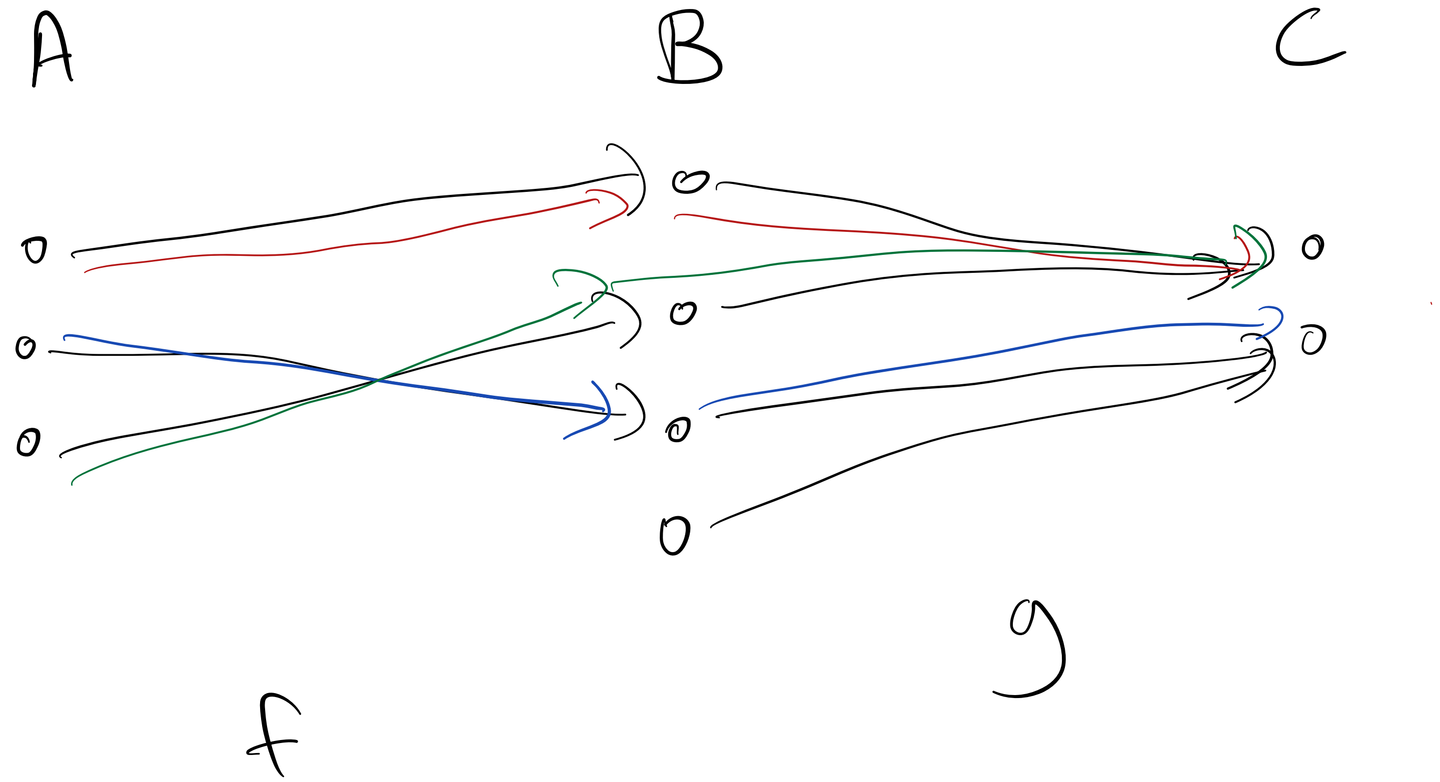
Έστω συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: B \to C$

Η σύνθεση της f με τη g είναι

μια συνάρτηση $g \circ f: A \to C$

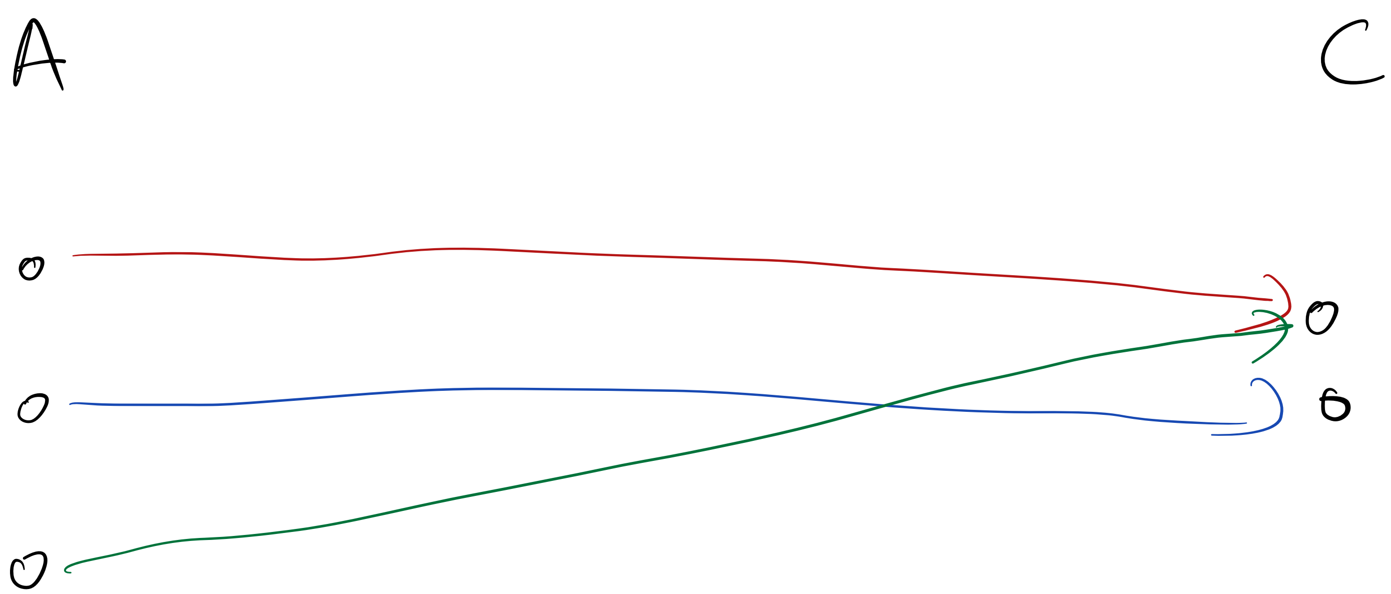
$\forall a \in A$

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$



$\downarrow$

$g \circ f$

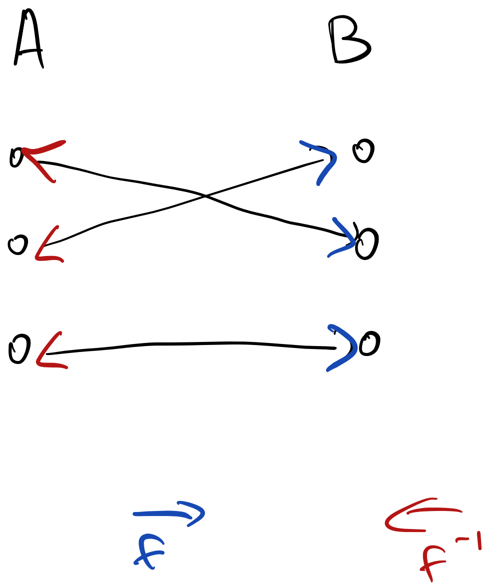


Μια συνάρτηση που είναι 1-1 και επί ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη

Ορίζεται και η αντίστροφη

$f : A \to B$ $\quad\quad f^{-1} : B : A$

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$



$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Ενδιαφέρουσες συναρτήσεις

- Παραγωντικό $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\to$

$\forall\ n \in \mathbb{N} \to n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$

$0! = 1$ $\quad 1! = 1$ $\quad 2! = 2$ $\quad 3! = 6$ $\quad 4! = 24 \ldots$

Stirling προσέγγιση $\quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

- Ακέραιο μέρος ή Δάπεδο (Floor) $\lfloor \ \rfloor$

$x \in \mathbb{R} \to \lfloor x \rfloor = a \in \mathbb{Z}$ ανν ο a είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος με $a \leq x$

π.χ. $\lfloor 3.7 \rfloor = 3 \qquad \lfloor -0.5 \rfloor = -1$

- Οροφή (ceil)

$x \in \mathbb{R} \to \lceil x \rceil = a \in \mathbb{Z}$ ανν a είναι ο μικρότερος ακέραιος με $a \geq x$

π.χ. $\lceil 3.7 \rceil = 4$, $\lceil -0.5 \rceil = 0$

$-\lceil 0.5 \rceil = -1$

Ακολουθίες

Ακολουθία είναι μια συνάρτηση η οποία έχει ως πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών (ή ακεραίων)

$$f : A \subseteq \mathbb{N} \to S$$

Συχνα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $a_n = f(n)$
ή b_n

π.χ. $a_1 = 1$ $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = \frac{1}{3}$, ..., $a_n = \frac{1}{n}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ $\boxed{a_{-1}}$

- Αριθμητική πρόοδος

$$\underset{\substack{\uparrow \\ a_0}}{a}, \quad a \underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{+} d, \quad a \underset{\substack{\uparrow \\ a_2}}{+} 2d, \quad a+3d, \quad a+4d$$

$a_n = a + n \cdot d$ $\xleftrightarrow{\text{γραμμική συνάρτηση}}$ $f(x) = dx + a$

π.χ. $a = 1$, $d = 2$: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

Πολυωνυμική

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\updownarrow$$

$$a_n = an^2 + bn + c$$

Πολυωνυμική 2ου βαθμού

$$1, \; 3, \; 7 \; \overset{?}{\dots}$$

$$a_0, \; a_1, \; a_2$$

1ου βαθμού

1 3 5

2 2 ....

0

1		3		7		13		21
	2		4		6		8 ...	
		2		2		...		
			0		0 ...			

- Εκθετικες $f(x) = a r^x$

$$\updownarrow$$

Γεωμετρική πρόοδος

$$a_n = a r^n$$

$$a_n = r \cdot a_{n-1}$$

$$\underset{a_0}{a}, \; \underset{a_1}{ar}, \; ar^2, \; ar^3 \dots$$

π.χ. $a=1, \; r=2$: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \dots$

Ακολουθίες ορίζονται ως

- Με κλειστό τύπο πχ. $a_n = 5n+2$
- Περιγραφικά: - Η ακολουθία των δυνάμεων του 2
  - 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
  - $a_i = \begin{cases} 0 & \text{αν χάνω με } i \text{ κομμάτια} \\ 1 & \text{αν κερδίζω με } i \text{ κομμάτια} \end{cases}$

    παιχνίδι σοκολάτας
- Αναδρομική σχέση

  Π.χ. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ με $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

  1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... (Fibonacci)

Αναδρομικά

$$\underbrace{a_n} = \underbrace{a_{n-1}} + 1 \quad \text{με} \quad a_0 = 0$$

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \underset{a_{n-1}}{4},\ \underset{a_n}{5},\ \dots$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 1 \\ &= a_{n-2} + 2 \\ &= a_{n-3} + 3 \\ &\dots \\ &= a_{n-n} + n = a_0 + n = n \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = n}$$

Π.χ. $a_n = a_{n-1} + 3$ με $a_1 = 2$

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + 3 \\
&= a_{n-2} + 6 \\
\\
&= a_{n-(n-1)} + 3\cdot(n-1) \\
&= a_1 + 3(n-1) = 2 + 3(n-1) = 3n-1
\end{aligned}
$$

Π.χ. Παιχνίδι με σοκολάτα (2, 5 ή 7 κομμάτια)

Περιγραφικά

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{αν χάνω με } i \text{ κομμάτια} \\ 1 & \text{αν κερδίζω με } i \text{ κομμάτια} \end{cases}$$

Αναδρομικά

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= 0 \\
a_n &= 1 - a_{n-2} \cdot a_{n-5} \cdot a_{n-7}
\end{aligned}
$$

Κλειστός τύπος

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \bmod 22 \in \{0, 1, 4, 10, 13, 14\} \\ 1 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πληθικότητα Συνόλων

Ορισμός: Δυο σύνολα A και B έχουν την ίδια πληθικότητα αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \to B$

$$|A| = |B|$$

Ορισμός: Αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \to B$

$$|A| \leq |B|$$

$$|A| = |B|$$

$$|\{1, 2, 3\}| = |\{5, 6, 7\}|$$

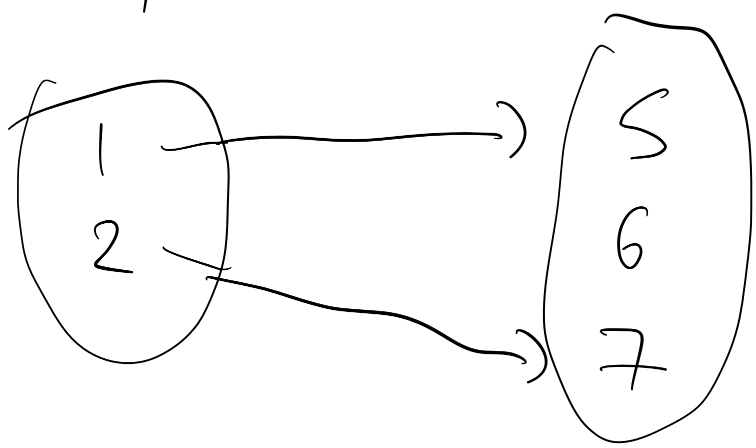
$$1 \longleftrightarrow 5$$

$$2 \longleftrightarrow 6$$

$$3 \longleftrightarrow 7$$

$$|A| \le |B|$$

$$|\{1,2\}| \le |\{5,6,7\}|$$



Ορισμός: Ένα σύνολο A είναι <u>αριθμήσιμο</u> ή <u>μετρήσιμο</u> αν $|A| \le |\mathbb{N}|$ δηλαδή αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to \mathbb{N}$

Πχ. $A = \{-3, \pi, \sqrt{2}\}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = -3 \\ 2 & \text{αν } x = \pi \\ 3 & \text{αν } x = \sqrt{2} \end{cases}$$

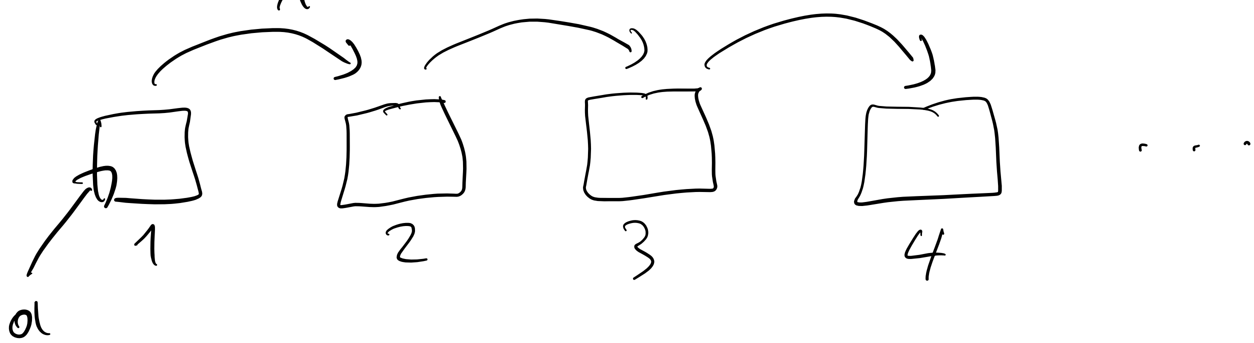
$f: A \to \mathbb{N}$

$$|\underbrace{\{2i : i \in \mathbb{N}\}}_{\text{Άρτιοι}}| \leq |\mathbb{N}|$$

$$f(x) = \frac{x}{2} \qquad f : \text{Άρτιοι} \to \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \cup \{a\} \quad ?$$

Ξενοδοχείο του Hilbert



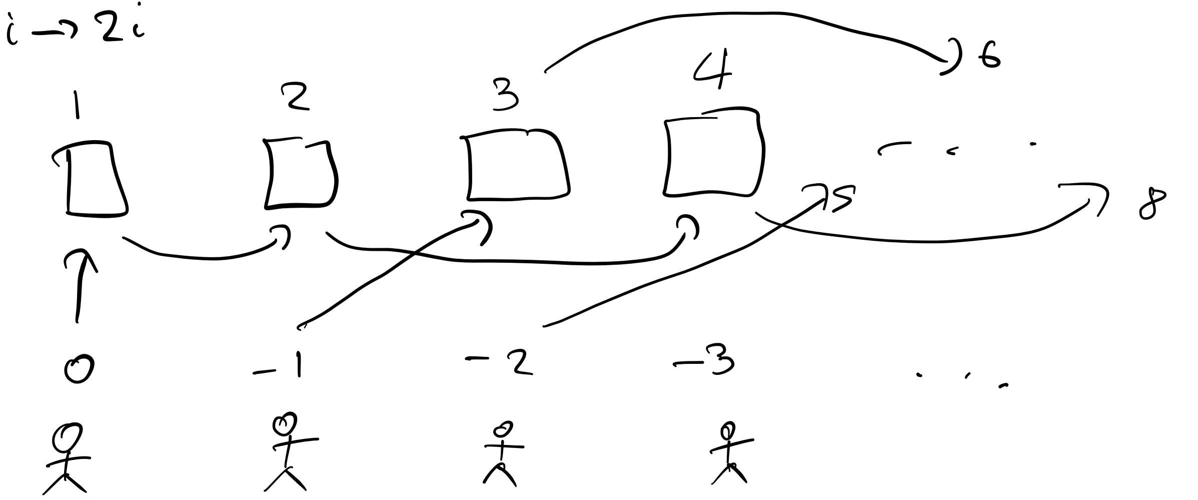
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ x+1 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1-1 συνάρτηση

$$f : \mathbb{N} \cup \{a\} \to \mathbb{N}$$

$$|\mathbb{N} \cup \{a\}| \leq |\mathbb{N}|$$

$$|\mathbb{N} \cup \{a\}| = |\mathbb{N}|$$



Υπάρχει 1-1 συνάρτηση

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{N} \\ 2|x|+1 & x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \end{cases} \qquad 1\text{-}1$$

$|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$ αλλά και $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(1,1) \to$

$(1,2)$

$(2,1)$

$\underbrace{\quad a \quad}_{32}\ \underbrace{\quad b \quad}_{32}$

Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

$(a,b) \to a+b$ όχι 1-1

$(a,b) \to 2^a 3^b \in \mathbb{N}$ 1-1

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \cdots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$

$$\frac{a}{b} \xrightarrow[f:\,1-1]{\text{ελαχίστων όρων}} (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow[1-1]{} \mathbb{N}$$

$$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$$

Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$k=4$

$$\underbrace{(\underbrace{a, b}_{\downarrow\, x}, \underbrace{c, d}_{\downarrow\, y})}_{\downarrow\, z}$$

$(a, b, c, d) \to 2^a 3^b 5^c \cdot 7^d$

1-1 αλλά όχι επί

$|\mathbb{N}^4| \leq |\mathbb{N}|$

Θεώρημα Schroder - Bernstein

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Αν} \quad |A| \leq |B| \quad \text{και} \quad |B| \leq |A| \\ \qquad |A| = |B| \end{array}}$$

Αν υπάρχει 1-1 $f : A \to B$

και 1-1 $g : B \to A$

τότε υπάρχει 1-1 και επί $\underline{h : A \to B}$

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (a, b) \to 2^a 3^b$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad a \to (a, a)$

$\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Υπάρχει ακολουθία $a_1, a_2, \dots$ που να περιέχει κάθε στοιχείο του $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ ακριβώς μια φορά;

$$a_3 = \left(5, \frac{7}{8}\right)$$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ $\quad i \to \left(i, \frac{1}{2}\right)$

$g: \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ $\quad$ γιατί το $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ αριθμήσιμο

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$$

άρα υπάρχει $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ που είναι 1-1 και επί

$$a_i = h(i)$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$$

$$(a, b, c, d \dots) \to 2^a 3^b 5^c 7^d 11^e 13^0 17^0$$

$B = \{A : A \subseteq \mathbb{N}$ με A πεπερασμένο$\}$ αριθμήσιμο

$$B \xrightarrow{1-1} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k \qquad \{1, 7, 9, 18\} \to (1, 7, 9, 18)$$

Λεωφορείο όπου υπάρχουν όλες οι πιθανές ακολουθίες χαρακτήρων a, b

abbabaa a

aaa...

bbb...

$$A = \{ c : \underset{\text{ακολουθία}}{c} : \mathbb{N} \to \{a, b\} \text{ με } c_i \in \{a, b\} \}$$

Είναι το A αριθμήσιμο;

Όχι

Απόδειξη με άτοπο

Έστω ότι υπάρχει τρόπος να χωρέσω όλο το A στο $\mathbb{N}$ δηλ. υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \to \mathbb{N}$

Τεχνική της διαγωνοποίησης (Cantor)

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\mathbb{N} \backslash A & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
1 & a & b & a & a & b & a \ldots \\
2 & b & a & b & b & b & a \ldots \\
3 & a & b & b & a & a & b \ldots \\
4 & \vdots & & & & & \\
5 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
\infty & & & & & &
\end{array}
$$

Θα δείξω ότι υπάρχει μια ακολουθία x που δεν μπήκε

$$
x_i = \begin{cases} a & \text{αν ο } i\text{-οστός χαρακτήρας της } i\text{-οστής ακολουθίας είναι } b \\ b & \text{διαφορετικά} \end{cases}
$$

Αν το $f(x) = j$

δηλαδή το x βρίσκεται στη θέση j τότε καταλήγω σε άτοπο γιατί θα έπρεπε $x_j \neq x_j$

Άρα το A είναι υπεραριθμήσιμο

$$|A| > |\mathbb{N}|$$

- $|A| \leq |\mathbb{R}|$

$f : A \to \mathbb{R}$

a b a
0.01 000

a b b a b a b ... a a...

0.4 5 5 4 5 $\in [0,1]$

$\mathbb{R}$, $[0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμα

$\mathbb{Q}$ ρητοί είναι αριθμήσιμοι
$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ είναι υπεραριθμήσιμοι

$A \cup B$

αριθμήσιμα

$\aleph_0$
$\parallel$

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

$|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}| = \aleph_1$

$|2^{\mathbb{R}}| > |\mathbb{R}|$

$|A| < |2^A|$

$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad \ldots$

πολυώνυμο 3ου βαθμού

$a_n = x n^3 + y n^2 + z n + w \cdot 1$

$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 8$

$a_5 = ;$

$d_n = a_{n+1} - a_n$ πολυώνυμο 2ου βαθμού

$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

$(n+1)^k - n^k =$ πολυωνύμου $k-1$ βαθμού

$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + b^{k-1}\right)$

1	2	4	8	15	26	42	64		3ου βαθμού
1	2	4	7	11	16	22			2ου βαθμού
1	2	3	4	5	6				1ου βαθμού
1	1	1	1	1	...				0ου βαθμού

Αθροίσματα (Σειρά)

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\left[\ \bigvee_{i=m}^{n} a_i = a_m \vee a_{m+1} \vee \dots \vee a_n\ \right]$$

$$\sum_{i \in S} a_i = a_3 + a_5 + a_{12}$$

$$S = \{3, 5, 12\}$$

Κλειστός τύπος

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n \qquad \text{όπου} \qquad a_i = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

π.χ. Άθροισμα γεωμετρικής προόδου

$$a_n = a r^n$$

$$\sum_{j=0}^{n} a r^j = \begin{cases} a(n+1) & r = 1 \\ \dfrac{a r^{n+1} - a}{r-1} & r \neq 1 \end{cases}$$

π.χ. $a_n = 2^n$

$$\begin{array}{ccccc} n=0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 + & 2 + & 4 + & 8 + & 16 \end{array} = 31$$

$a = 1 \qquad r = 2$

$$\sum_{i=0}^{4} a_i = 31$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

Απόδειξη

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} a r^j$$

$$\Rightarrow \quad r \cdot S_n = \sum_{j=0}^{n} a r^{j+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} a r^{i} \qquad \boxed{i = j+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a r^{i} + a r^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a r^{i} + a r^{n+1} - a r^{0}$$

$$= S_n + a r^{n+1} - a$$

$$\Rightarrow \quad r S_n = S_n + a r^{n+1} - a$$

$$\Rightarrow \quad (r-1) S_n = a r^{n+1} - a$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{a r^{n+1} - a}{r-1}$$

Άθροισμα αριθμητικής προόδου

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \dots + n$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = S_{100}$$

$$100 + 99 + 98 + \dots + 1 = S_{100}$$

$$2S_{100} = \overbrace{101 + 101 + \cdots 101}^{100 \text{ φορές}}$$
$$= 100 \cdot 101$$

$$\Rightarrow \quad S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$$
$$S_n = n + (n-1) + \cdots + 1$$
$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$
$$= n(n+1)$$

άρα $\quad S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n} (ai + b) = a \sum_{i=1}^{n} i + b \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= a \frac{n(n+1)}{2} + b \cdot n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ 3ου βαθμού

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$$

$$= (1+2+3+\cdots+n)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Αθροίσματα με άπειρους όρους

Έστω x με $|x|<1$

τότε $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

$$a_i = x^i$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$= \frac{0-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0 \qquad \text{όταν} \quad |x| < 1$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\, x^{i-1} \qquad \text{για} \quad |x| < 1$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

Απόδειξη

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\,x^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x^{i}\right)'$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{i}\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

- $\sum i(i-1)\,x^{i-2} = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$

- $\sum_{i=1}^{\infty} i\,x^{i} = x \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i\,x^{i-1}$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\int_0^t \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t x^i \, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i+1}}{i+1} = \boxed{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j}}$$

$$\int_0^t \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(1-t) = \ln \frac{1}{1-t}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(i \cdot \frac{x^{i-1}}{i!} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = f(x)$$

$$f(x) = e^x$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Αρχές απαρίθμησης

- Συνδυαστική: Μελετάει την απαρίθμηση διαφορετικών αντικειμένων
- Ορισμός: Πείραμα είναι μια διαδικασία με συγκεκριμένο πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων
- Στόχος: Να απαριθμήσουμε όλα τα πιθανά αποτελέσματα

Παράδειγμα

- Password: 6, 7 ή 8 χαρακτήρες
  Χαρακτήρας είναι γράμμα ή ψηφίο
  Υποχρεωτικά ≥ 1 αριθμητικό ψηφίο

π.χ. aaaaa0
abcde1
⋮
1234567

Χαρακτήρας = 26+10
= 36

$$\underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{36}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}$$

(Απάντηση για 6) + (Απάντηση 7) + (Απάντηση για 8)

$'' 36^6 - 26^6 \qquad 36^7 - 26^7 \qquad 36^8 - 26^8$

Εφαρμογές

- Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων
- Κρυπτογραφία
- Σχεδιασμός Συστημάτων : - Τηλεφωνικοί Αριθμοί
  - IP address
  - Πινακίδες Αυτοκινήτων
- Τυχερά Παιχνίδια

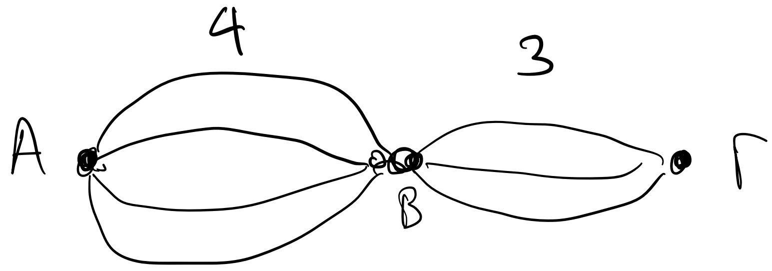
1. Κανόνας του γινομένου

Αν μια διαδικασία διαχωρίζεται σε μια ακολουθία 2 εργασιών

- Αν η πρώτη εργασία έχει a_1 τρόπους εκτέλεσης
- και η δεύτερη a_2 τρόπους εκτέλεσης

Υπάρχουν συνολικά $a_1 \cdot a_2$ τρόποι εκτέλεσης της συνολικής διαδικασίας

Γενικότερα $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$
για n εργασίες



$4 \times 3 = 12$
μονοπάτια από το A στο Γ

Παράδειγμα: Πόσα πιθανά αποτελέσματα με 2 ζάρια;

$(1,1) \quad (1,2) \quad \ldots$

$(2,1) \quad \ldots$

$\ldots$

$(\underbrace{\quad}_{6 \text{ επιλογές}}, \underbrace{\quad}_{6 \text{ επιλογές}})$

$6 \times 6 = 36$ επιλογές

Παράδειγμα: Πόσες συμβολοσειρές με 0/1 μήκους 9;

0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 0 1 0 1 1 1 0 1

⋮

$\underset{2}{\sqcup}\ \underset{2}{\sqcup}\ \underset{2}{\sqcup}\ \dots\ \underset{2}{\sqcup}$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^9 = 512$

Παράδειγμα: Πόσες πινακίδες με 3 ελληνικά γράμματα και 4 νούμερα

ΑΑΑ 0000

ΑΒΓ 1234

⋮

$\underset{24}{\sqcup}\ \underset{24}{\sqcup}\ \underset{24}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}$

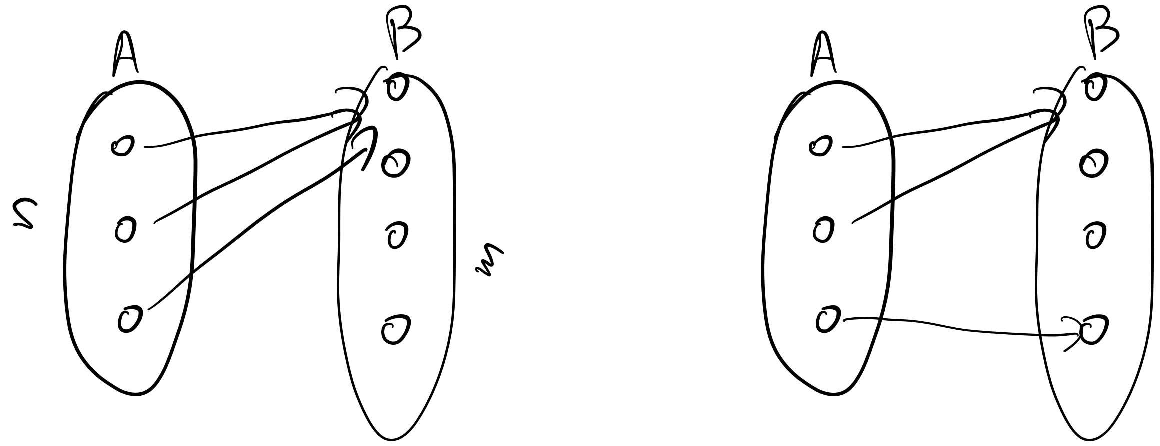
$24^3 \times 10^4 = 138\ 240\ 000$

α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ τ υ φ χ ψ ω

× × × × × × × ×

$14^3 \cdot 10^4$

Παράδειγμα: Πόσες συναρτήσεις $f: A \to B$ υπάρχουν αν $|A| = n$
$|B| = m$

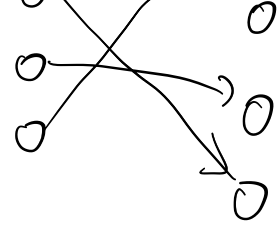


$\underbrace{\text{1ο στοιχείο του A}}_{m \text{ επιλογές}}$ $\quad \underbrace{\text{2ο στοιχείο του A}}_{m \text{ επιλογές}}$ $\quad \ldots \quad$ $\underbrace{\text{n-οστό του A}}_{m \text{ επιλογές}}$

$$m \times m \times m \times \cdots \times m = m^n$$

$f \in B^A$ $\qquad \overbrace{B \times B \times \cdots B}^{B^3}$

$(4, 3, 1)$



Συνολοθεωρητική Προσέγγιση

Αν έχουμε σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$
και το πείραμα είναι

$$A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$$
$$= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : \forall i, a_i \in A_i\}$$

$$|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

Παράδειγμα: 2 ζάρια έτσι ώστε
το πρώτο ζάρι να μην είναι
ίδιο με το δεύτερο

$\underbrace{\text{1ο νούμερο}}_{\text{6 επιλογές}}$ $\underbrace{\text{2ο νούμερο}}_{\text{5 επιλογές}}$ $6 \times 5 = 30$ επιλογές

Κανόνας του αθροίσματος

Αν μια διαδικασία μπορεί να γίνει είτε με n_1 τρόπους
είτε με n_2 τρόπους
(χωρίς κοινά στοιχεία)
τότε υπάρχουν $n_1 + n_2$ τρόποι επιλογής

Συνολοθεωρητικά

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$
$$= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$
αν $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i, j$ με $i \neq j$

Παράδειγμα: Επιλογές για πτυχιακή εργασία
- 18 επιλογές για βιβλιογραφική εργασία
- 35 επιλογές για ανάπτυξη κώδικα

$18 + 35 = 53$ επιλογές

Παράδειγμα

Ένας χαρακτήρας είτε ψηφίο
είτε ελληνικό γράμμα

$\#$ χαρακτήρες $= 10 + 24 = 34$

Παράδειγμα: Μπιλιάρδο

7 μονόχρωμες
15 μπάλες 7 δίχρωμες
1 μαύρη

Μια μονόχρωμη και μια δίχρωμη
$7 \times 7 = 49$ (γινόμενο)

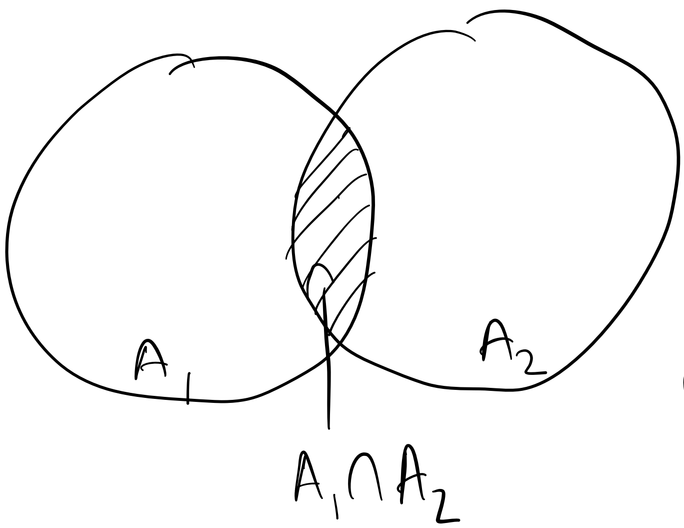
Μια μονόχρωμη ή μια δίχρωμη
$7 + 7 = 14$ (άθροισμα)

Κανόνας της αφαίρεσης

Αν μια διαδικασία μπορεί να γίνει είτε με n_1 τρόπους
είτε με n_2 τρόπους
εκ των οποίων k είναι κοινοί
τότε υπάρχουν $n_1 + n_2 - k$ τρόποι εκτέλεσης

Συνολοθεωρητικά

$$|A_1 \cup A_2| = \underbrace{|A_1| + |A_2|} - |A_1 \cap A_2|$$



$$|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$$

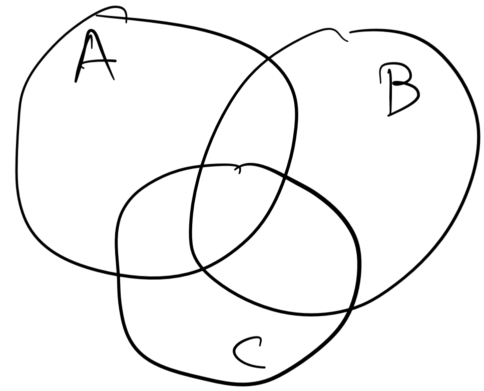
αρχή εγκλεισμού αποκλεισμού

$A_1 = \{a, b\}$ $\qquad$ $A_1 \cup A_2 = \{a, b, c\}$

$A_2 = \{b, c\}$ $\qquad$ $A_1 \oplus A_2 = \{a, c\}$

$A_1 \cap A_2 = \{b\}$

Για 3 σύνολα



$|A \cup B \cup C| =$

$|A| + |B| + |C|$
$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$
$+ |A \cap B \cap C|$

Παράδειγμα: Πόσοι φυσικοί αριθμοί μικρότεροι του 1000 δεν είναι πολ/σια ούτε του 2, ούτε του 3 ούτε του 5

$\boxed{1 \ldots 999}$

A_2 = "πολ/σια του 2"
A_3 = "πολ/σια του 3"
A_5 = "πολ/σια του 5"

$$999 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5|$$

$$= 999 - \big(|A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| \big)$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 333$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor = 199$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{999}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{10} \right\rfloor = 99$$

$$|A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{15} \right\rfloor = 66$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{999}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 499+333+199 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733$$

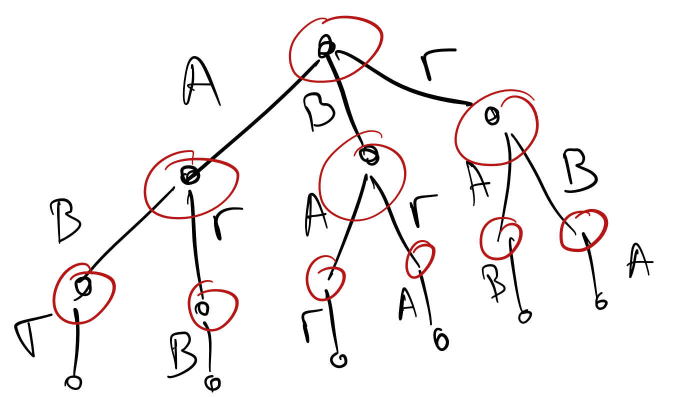
Άρα συνολικά $999 - 733 = 266$ νούμερα.

Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε 3 άτομα σε μια σειρά;

Α	Β	Γ
Α	Γ	Β
Β	Α	Γ
Β	Γ	Α
Γ	Α	Β
Γ	Β	Α

6 τρόποι

Πρώτο άτομο 3
Δεύτερο άτομο 2
Τρίτο άτομο 1

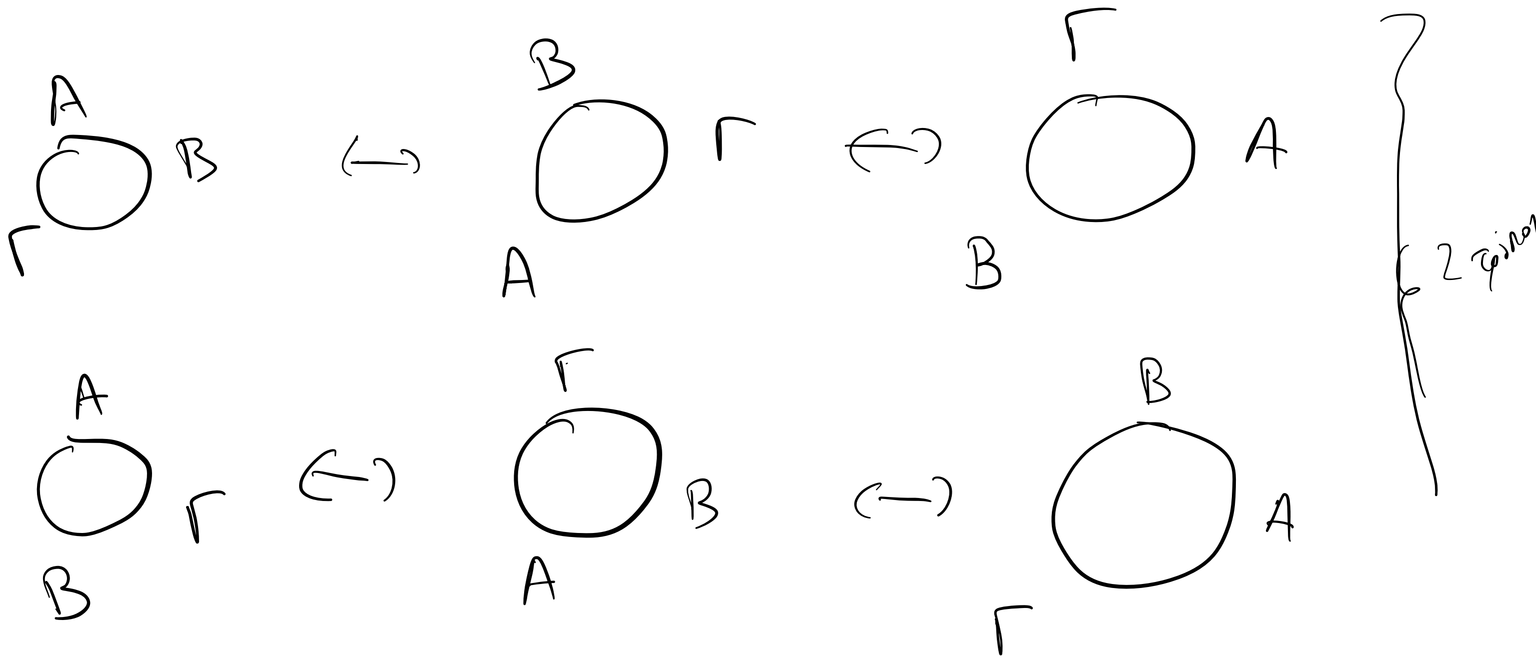


Με 10 άτομα $10!$ τρόποι

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

(Μεταθέσεις)

Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω 3 άτομα σε ένα κύκλο;



$$\frac{3!}{3} = 2$$

Με 10 άτομα

$$\frac{10!}{10} = 9! \text{ τρόποι}$$

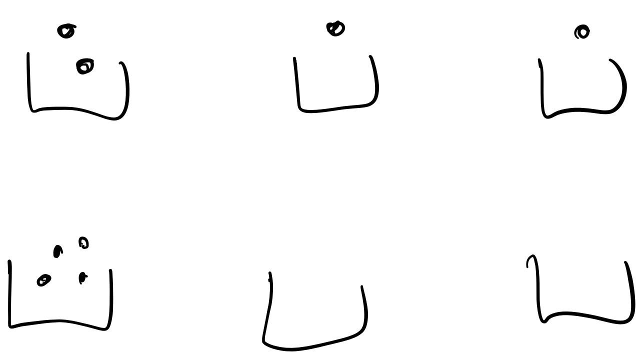
Κάθε τρόπος μετριέται 10 φορές αν τους βάλω σε σειρά

4. Κανόνας της διαίρεσης

Αν έχω ένα τρόπο να μετρήσω το κάθε στοιχείο ακριβώς k φορές, διαιρώντας με το k βρίσκω το πραγματικό πλήθος στοιχείων.

- **Αρχή του Περιστερώνα (Pigeonhole Principle)**

Αν έχουμε $k+1$ αντικείμενα και τα βάλουμε σε k κουτιά τότε υπάρχει τουλάχιστον 1 κουτί με 2 ή περισσότερα αντικείμενα.



Μια συνάρτηση από $k+1$ στοιχεία σε k δεν μπορεί να είναι 1-1

Άσκηση: Αν σε ένα διαγώνισμα μπαίνουν οι βαθμοί $0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, \dots, 10$. Πόσοι φοιτητές πρέπει να έχω για να υπάρχουν σίγουρα 2 με τον ίδιο βαθμό;
22

$$|\{0, 0.5, 1, 1.5, \dots, 10\}| = 21$$
άρα $21+1 = 22$ φοιτητές

Άσκηση: Για κάθε ακέραιο n υπάρχει πολ/σιο που αποτελείται μόνο από 0 ή 1.

π.χ.
$$5 \to 10$$
$$3 \to 111$$
$$4 \to 100$$
$$6 \to 1110$$

Θα δείξω ότι ισχύει για κάθε n

Έστω

$$A = \{1, \ 11, \ 111, \ \ldots, \ \overbrace{111\cdots1}^{n}\}$$

Αν υπάρχει $a \in A$ $\quad a \bmod n = 0$ ✓

Διαφορετικά $\forall a \in A$ $\quad a \bmod n \in \{1, \ldots, n-1\}$

αλλά $|A| = n$

άρα υπάρχουν $a, b \in A$ με $a < b$

$$a \bmod n = b \bmod n$$

$b = 111111$

$a = 111$

$b-a = 111000$

Τότε το $b-a$

- $(b-a) \bmod n = 0$
- και $b-a$ είναι της μορφής

$$111\cdots110\cdots0$$

✓

6

$$A = \{\overset{a}{1}, \ 11, \ 111, \ \overset{b}{1111}, \ 11111, \ 111111\}$$

$$\bmod 6 \quad 1 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 3$$

$11111 - 11 = 11100$

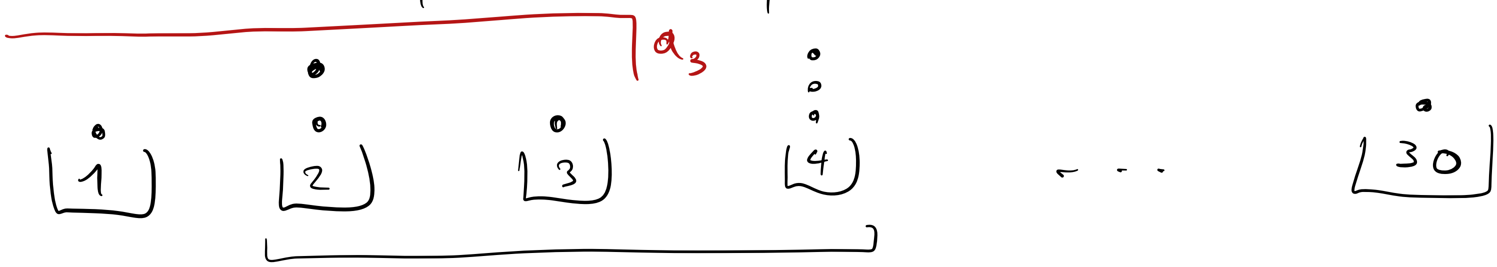
$$1111 - 1 = 1110$$

$\square$

Άσκηση

- 30 κουτιά αριθμημένα 1...30
- 45 μπάλες
- Τουλάχιστον 1 μπάλα σε κάθε κουτί.

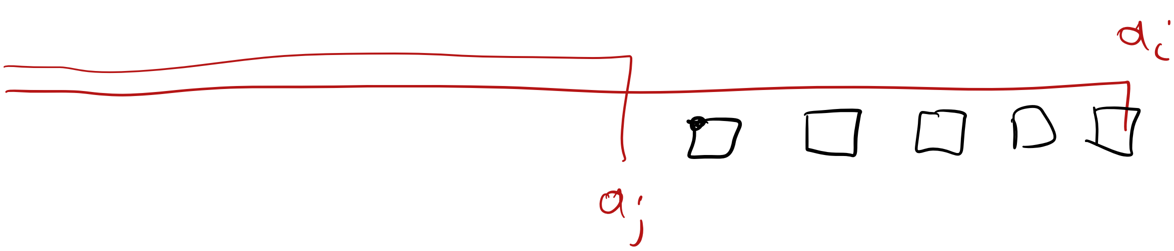
Ν.δ.ο. υπάρχουν διαδοχικά κουτιά με ακριβώς 14 μπάλες.



a_i = "Το πλήθος από μπάλες στα πρώτα i κουτιά"

$$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{30} = 45$$

Αν υπάρχει j τ.ω. $a_i = a_j + 14$ τελειώνω γιατί τα κουτιά $j+1 \ldots i$ έχουν 14 μπάλες



$$b_j = a_j + 14$$

$1 \leq a_1, a_2, \ldots, a_{30}, b_1, b_2, \ldots, b_{30} \leq \underset{59}{\underset{\parallel}{45+14}}$

Άρα υπάρχει i και j

$a_i = b_j$ γιατί 2 όροι της a δεν μπορεί να είναι ίσοι ούτε της b

$\Downarrow$

$a_i = a_j + 14$

Θεώρημα: Κάθε ακολουθία από n^2+1 διαφορετικούς αριθμούς περιέχει είτε μια γνησίως αύξουσα υπακολουθία μήκους $n+1$ είτε μια γνησίως φθίνουσα

Π.χ. $n=2$ $\quad 7, 3, 6, 5, 8$

$3, 5, 8$ αύξουσα ή $3, 6, 8$

$7, 6, 5$ φθίνουσα

1 , 2 , 3 , 5 , 4

1, 2, 3, 5 αύξουσα

Ορίζω

a_i = μεγαλύτερη αύξουσα υπακολουθία που ξεκινάει από τη θέση i

φ_i = μεγαλύτερη φθίνουσα υπακολουθία που ξεκινάει από τη θέση i

	7	3	6	5	8
a_i	2	3	2	2	1
φ_i	3	1	2	1	1

Αν κάποιο a_i ή $\varphi_i \geq n+1$ τελειώνω.

Υποθέτω ότι $\forall i$ $a_i, \varphi_i \leq n$ για να καταλήξω σε άτοπο

Πόσα ζεύγη (a_i, φ_i) υπάρχουν;

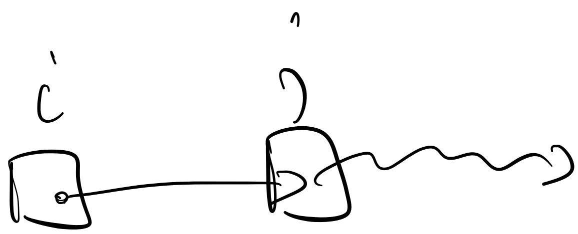
$\{1, \dots, n\}$

n^2 επιλογές $\underbrace{}_{n \text{ πρώτο}}$ $\underbrace{}_{n \text{ για το δεύτερο}}$

αλλά η ακολουθία έχει μήκος n^2+1

Άρα υπάρχει $i < j$ με

$$a_i = a_j$$
$$\varphi_i = \varphi_j$$



Αν $x_i < x_j$ πρέπει $a_i \geq a_j + 1$

Αν $x_i > x_j$ πρέπει $\varphi_i \geq \varphi_j + 1$

Σε κάθε περίπτωση $(a_i, \varphi_i) \neq (a_j, \varphi_j)$

Άτοπο $\square$

Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Μετάθεση: Τρόπος διάταξης η στοιχείων σε μια ευθεία

π.χ. 5 άτομα

Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά για φωτογράφιση;

$$\left.\begin{matrix} A & B & C & D & E \\ B & A & C & D & E \end{matrix}\right\} \text{μεταθέσεις}$$

$\sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup$

5 επιλογές 4 3 2 1

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Αν είχα μόνο 3 θέσεις

$\underset{5}{\sqcup} \quad \underset{4}{\sqcup} \quad \underset{3}{\sqcup}$ $\quad 5 \cdot 4 \cdot 3 \Big\}$ μεταθέσεις -3

Θεώρημα: Αν n θετικός ακέραιος και k ακέραιος με $1 \le k \le n$ οι μεταθέσεις-k ενός συνόλου με n διαφορετικά στοιχεία είναι

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Δλ.δ. $$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \underbrace{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}_{(n-k)!}$$

π.χ. 100 άτομα σε αγώνα
Πόσες 3-άδες νικητών μπορούμε να έχουμε;

$$P(100,3) = \frac{100!}{97!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970{,}200$$

Π.χ. Πόσες μεταθέσεις των γραμμάτων ABCDEFGH υπάρχουν όπου εμφανίζεται μέσα η συμβολοσειρά ABC

D E ABC F H G

Υπάρχουν 6 αντικείμενα
ABC, D, E, F, G, H
κάθε μετάθεση αντιστοιχεί σε διαφορετική λύση άρα $6!$ τρόποι

D E A B F C H G

Αν δεν θέλω να εμφανίζεται το ABC $8! - 6!$

Συνδυασμοί

Επιλογή κ αντικείμενα από n χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά (σαν μεταθέσεις-κ χωρίς διάταξη)

π.χ. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 3 άτομα από 4;

$$\left.\begin{array}{l} ABC \\ ABD \\ CBD \\ ACD \end{array}\right]$$

Με 4 τρόπους

$C(4,3)$

Συμβολίζουμε $C(n,k)$ το πλήθος των επιλογών κ αντικειμένων από n

π.χ. $C(100,3)$

$$\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} ABC \\ ACB \\ BAC \\ CBA \\ BCA \\ CAB \end{array}\right] \text{ίδια λύση}$$

$$P(n,k) = C(n,k) \cdot k!$$

με νοιάζει η σειρά — δεν με νοιάζει η σειρά

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!}$$

Θεώρημα: Το πλήθος των συνδυασμών-k από n στοιχεία είναι

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

πχ. Από 4 να επιλέξω 3:

$$C(4,3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

πχ. Έχω 52 χαρτιά και θέλω 5;

$$C(52,5) = \frac{52!}{47!\,5!}$$

π.χ. Πόσες συμβολοσειρές με bit 0 ή 1 μήκους n που έχουν k άσσους;

π.χ. $n = 5$ $k = 2$

00011 $\rightarrow$ $\{4, 5\}$

00101 $\rightarrow$ $\{3, 5\}$

00110

⋮

$C(5, 2)$

Γενικότερα $C(n, k)$

$$C(5, 2) = C(5, 3)$$

$C(5, 2)$: από τις 5 θέσεις — επιλέγω 2 θέσεις για τους άσσους

$C(5, 3)$: από τις 5 θέσεις — επιλέγω 3 θέσεις για μηδενικά

$$C(n,k) = C(n,n-k)$$

$$C(n,n-k) = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C(n,k)$$

$$C(n,k) = \binom{n}{k}$$

διωνυμικός συντελεστής (n ανά k)

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}}$$

διωνυμικό θεώρημα

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$

x^2y^2

$\binom{4}{2}$

Όλες οι συμβολοσειρές μήκους 4 με γράμματα $\{x,y\}$ και 2 x

$$\left.\begin{array}{l} xxyy \\ xyxy \\ xyyx \\ yxxy \\ yxyx \\ yyxx \end{array}\right\} \binom{4}{2} = 6$$

$(x+y)^n$ ο συντελεστής του $x^k y^{(n-k)}$ $C(n,k) = \binom{n}{k}$

Πόρισμα: $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Απόδειξη

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1^{i}} \, \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{1^{n-i}} = (1+1)^n = 2^n \qquad \square$$

Εναλλακτικά $\binom{n}{i}$ είναι το πλήθος των συμβολοσειρών 0-1 μήκους n με i άσσους

τότε $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ είναι το πλήθος όλων των συμβολοσειρών το οποίο είναι ίσο με $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ γιατί έχω 2 επιλογές (0 ή 1) για κάθε μια από τις n θέσεις.

Πόρισμα $$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = 0$$

π.χ. $$\underbrace{\binom{3}{0}} - \underbrace{\binom{3}{1}} + \underbrace{\binom{3}{2}} - \underbrace{\binom{3}{3}}$$

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

Απόδειξη

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underset{x}{(-1)^i} \cdot \underset{y}{1^{n-i}} = (-1+1)^n = 0$$

Πόρισμα $$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

Απόδειξη: $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{(n-k)} = (2+1)^n = 3^n$$

$\square$

Το πλήθος των συνόλων $A, B \subseteq \{1, \dots, n\}$ με $A \subseteq B$

π.χ. $n = 3$

$B = \{1,2,3\} \to \begin{matrix} A \in 2^B \\ |2^B| = 8 \end{matrix}$

$B = \{1,2\} \to \begin{matrix} A \in 2^B \\ |2^B| = 4 \end{matrix}$

$$\binom{3}{3} 2^3 + \binom{3}{2} 2^2 + \binom{3}{1} 2^1 + \binom{3}{0} 2^0$$

γενικότερα $\sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{τρόποι να επιλέξω το B από n στοιχεία αν το B έχει i στοιχεία}} 2^i$ ← Το πλήθος των υποσυνόλων του B

Διαφορετικά για κάθε στοιχείο $i = 1 \dots n$

έχω 3 επιλογές

είτε $i \in A$ και $i \in B$

$i \notin A$ και $i \in B$

$i \notin A$ και $i \notin B$

~~$i \in A$ και $i \notin B$~~ γιατί $A \subseteq B$

3^n

Τρίγωνο του Pascal

0	1	$(x+y)^0$
1	1 1	$(x+y)^1$
2	1 2 1	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
3	1 3 3 1	$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
4	1 4 6 4 1	$(x+y)^4$
5	1 5 10 10 5 1	$(x+y)^5$
$\vdots$		
n	$\cdot \quad C(n,i) \quad \cdot$	
	$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad n$	

Η βασική ιδιότητα

$$\binom{n}{k-1} \qquad \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k}$$

Θεώρημα: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Απόδειξη με πράξεις $\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!}$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1-k)}{k!\,(n+1-k)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1-k+k)}{k!\,(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

Διαφορετική απόδειξη

$\binom{n+1}{k}$ = επιλογή k στοιχείων από $n+1$

- Διαφορετικά μπορώ να μετρήσω τις k-άδες που δεν έχουν το n+1

$\binom{n}{k}$ τρόποι

- Οι λύσεις που ο n+1 είναι μέσα — Έχω k−1 θέσεις και n νούμερα

$\binom{n}{k-1}$

$$\binom{n+1}{k} = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{ο } n+1 \text{ δεν είναι μέσα}} + \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\text{ο } n+1 \text{ είναι μέσα}}$$

$\square$

Συνδυασμοί n ανά k

$$\underbrace{\binom{n}{k} = C(n,k)}_{} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

- Επιλέγω k αντικείμενα από n
- Πόσες συμβολοσειρές bit με n χαρακτήρες έχουν ακριβώς k άσσους (δηλ. $n-k$ μηδενικά)

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

$$\updownarrow$$

$$\{2, 6, 7\}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Θεώρημα Vandermonde:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

m αγόρια + n κορίτσια
και θέλω ομάδα με r άτομα

A τρόπος: $m+n$ άτομα
άρα $\binom{m+n}{r}$ πιθανές
ομάδες r ατόμων

B τρόπος: Ομάδες με k κορίτσια
και r άτομα

Από n κορίτσια
επιλέγω k

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{m}{r-k}$$

Από m αγόρια
επιλέγω $r-k$

Άρα συνολικά $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$

Ν.δ.ο. $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}}$$

Θέλω από n άτομα να επιλέξω μια ομάδα με 1 αρχηγό

Έστω $n=3$ → 12

$\{1,2,3\} \to 1$

$\{1,2,3\} \to 2$

$\{1,2,3\} \to 3$

$\{1,2\} \to 1$

$\{1,2\} \to 2$

$\{1,3\} \to 1$

$\{1,3\} \to 3$

$\{2,3\} \to 2$

$\{2,3\} \to 3$

$\{1\} \to 1$

$\{2\} \to 2$

$\{3\} \to 3$

Α' τρόπος : Πρώτα διαλέγω ομάδα. Αν η ομάδα έχει k άτομα

$$\binom{n}{k} \cdot k$$

επιλέγω τα άτομα από n

από τα k επιλεγμένα διαλέγω αρχηγό

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

Β τρόπος : Πρώτα διαλέγω τον αρχηγό

$$n \cdot 2^{n-1}$$

n: επιλογές για τον αρχηγό

2^{n-1}: σύνολο των υπολοίπων παικτών

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}$$

$$\frac{\partial (1+x)^n}{\partial x} = \sum_{k=0}^{n} k\, x^{k-1} \binom{n}{k}$$

$$\| $$

$$n(1+x)^{n-1} \qquad \text{για} \quad x=1$$

$$n\, 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

N.δ.ο. $$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2}_{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}} = n \binom{2n-1}{n-1}$$

Υπάρχουν n αγόρια και n κορίτσια
Θέλω να φτιάξω μια ομάδα n
ατόμων και αρχηγό κορίτσι

Α τρόπος : Για κάθε πλήθος κοριτσιών k

- Επιλέγω k κορίτσια $\quad \binom{n}{k}$
- Επιλέγω $n-k$ αγόρια $\quad \binom{n}{n-k}$
- Επιλέγω από τα k κορίτσια αρχηγό $\quad k$

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

Β τρόπος : - Επιλέγω κορίτσι για αρχηγό $\quad n$

- Από τα $2n-1$ άτομα που περισσεύουν συμπληρώνω την ομάδα $\quad \binom{2n-1}{n-1}$

$$n\binom{2n-1}{n-1} \longleftarrow$$

KINO

- 80 αριθμοί 1 2 3 ... 80
- 20 αριθμοί κληρώνονται
- Παίχτης παίζει 1 έως 12 αριθμούς

πχ. Παίζω 5 αριθμούς
Πιάνω 3 αριθμούς
↳ ×2 λεφτά

Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσω αν παίξω 1 νούμερο;

$$\frac{\text{Ευνοϊκά Αποτελέσματα}}{\text{Συνολικά Αποτελέσματα}}$$

Συνολικά Αποτελέσματα $= \binom{80}{20}$
Ευνοϊκά Αποτελέσματα $= \binom{79}{19}$

$$X \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{19 \text{ θέσεις}}$$

$$\frac{\binom{79}{19}}{\binom{80}{20}} = \frac{\frac{79!}{19!\,60!}}{\frac{80!}{20!\,60!}} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \underbrace{2,5}_{\text{απόδοση}} + \frac{3}{4}\,0 = \frac{5}{8} = 0.625$$

$$1 - 0.625 = 0,375$$

Αν παίξω 2 ταίριρα

- Με τι πιθανότητα πιάνω και τα 2 (τότε βγάζω 5)

Συνολικά αποτελέσματα $\binom{78}{18}$

$$\frac{\binom{78}{18}}{\binom{80}{20}} = \frac{\frac{78!}{18!\cdot 60!}}{\frac{80!}{20!\cdot 60!}} = \frac{19\cdot 20}{79\cdot 80}$$

$$= \frac{19}{79}\,\frac{1}{4} = 0.0601$$

$$0.0601 \cdot \underbrace{5}_{\text{αποδοση}} = 0.3005$$

Αν πιάσω το 1 από τα 2 παίρνω πίσω τα λεφτά $(\times 1)$

Πόσα συνολικά αποτελέσματα

$$2\cdot\binom{78}{19}$$

Η πιθανότητα

$$\frac{2\binom{78}{19}}{\binom{80}{20}} = 2\,\frac{\frac{78!}{19!\,59!}}{\frac{80!}{20!\,60!}} = \frac{2\cdot 20\cdot 60}{79\cdot 80} \simeq 0.38$$

Συνολικά

$$6\% \times 5 + 38\% \times 1 = 0.68$$

$$1 - 0.68 = 0.32$$

Γενικότερα η πιθανότητα να πιάσω κ ακριβώς αν έχω παίξει n αριθμούς $1 \le n \le 12$;

$$\boxed{\dfrac{\binom{80-n}{20-k}\cdot\binom{n}{k}}{\binom{80}{20}}}$$

n $\qquad\qquad$ $80-n$

καλά $\qquad\qquad$ κακά

$$\underbrace{\overset{k}{\overbrace{\underset{1}{\sqcup}\quad \underset{2}{\sqcup}\ \cdots\ \underset{k}{\sqcup}}}}_{\binom{n}{k}}\ \Bigg|\ \underbrace{\overset{20-k}{\overbrace{\sqcup\ \cdots\qquad \underset{20}{\sqcup}}}}_{\binom{80-n}{20-k}}$$

×2 ×2 ×4

Μονα – Ζυγά – Ισοπαλία

Από τα 20 11+ μονά

Από τα 20 11+ ζυγά

Από τα 20 10 μονα 10 ζυγά

Με πόσους τρόπους ισοπαλία

Μονά

$\underbrace{1, 3, 5, 7, \dots, 79}_{40 \text{ νούμερα}}$

Ζυγά

$\underbrace{2, 4, 6, 8, \dots, 80}_{40 \text{ νούμερα}}$

$$\underbrace{\binom{40}{10}}_{10 \text{ μονα}} \cdot \underbrace{\binom{40}{10}}_{10 \text{ ζυγα}}$$

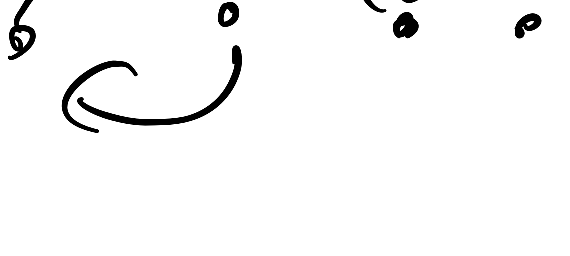
Πιθανότητα ισοπαλίας

$$\frac{\binom{40}{10}^2}{\binom{80}{20}} = 0,2032 \quad > \quad 20\%$$

$$20\% \cdot 4 = 0,80$$

Πιθανότητα μονά $< \dfrac{100\% - 20\%}{2} = 40\%$

$$40\% \cdot 2 = 0.8$$



$\frac{1}{4}$

Β	Γ	Δ	Α
Γ	Δ	Α	Β
Δ	Α	Β	Γ
Β	Α	Δ	Γ
Δ	Γ	Β	Α

Γενικευμένες Μεταθέσεις και Συνδυασμοί

Από n αντικείμενα επιλέγω k

π.χ. $n = 3$ $\{A, B, C\}$ $k = 2$

Μεταθέσεις		Συνδυασμοί
AB	BA	AB
AC	CA	AC
BC	CB	BC
6 τρόποι		3 τρόποι

Με επανάληψη;

Μεταθέσεις (Μας ενδιαφέρει η σειρά)

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} AB & BA & AA \\ AC & CA & BB \\ BC & CB & CC \end{array}}_{9 \text{ τρόποι}}$$

$$\underset{3}{\sqcup} \times \underset{3}{\sqcup} = 9$$

$$\underset{n}{\sqcup}\ \underset{n}{\sqcup} \cdots \underset{n}{\sqcup} = n^k$$

Συνδυασμοί με επανάληψη (Δεν μας απασχολεί η σειρά)

$$\underbrace{\begin{array}{ll} AB & AA \\ AC & BB \\ BC & CC \end{array}}_{6 \text{ τρόποι}}$$

$n=3$
$k=3$

$$\left.\begin{array}{l} AAA \\ AAB \\ AAC \\ ABB \\ ABC \\ ACC \\ BBB \\ BBC \\ BCC \\ CCC \end{array}\right\} 10 \text{ τρόποι}$$

Θεώρημα: Οι συνδυασμοί με επανάληψη k στοιχείων από n είναι $\binom{n+k-1}{k}$

$n=3 \quad k=3$

$$\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$

$n=3 \quad k=2$

$$\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$$

n αντικείμενα

k θέσεις

$k \quad \times \quad \sqcup$

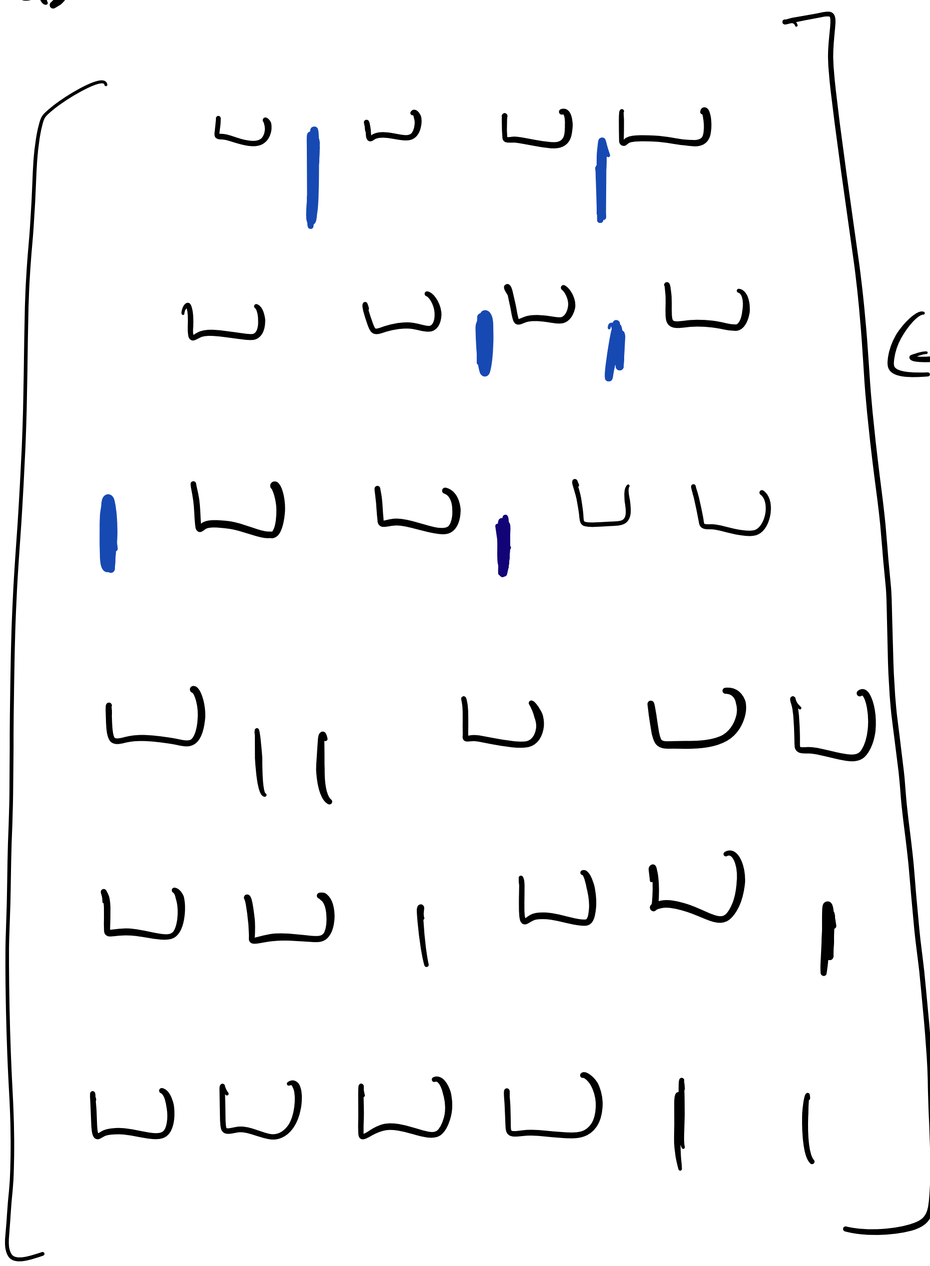
$(n-1) \quad \times \quad |$

$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

n αντικείμενα $\underbrace{A \quad B \quad C}$

k θέσεις

$\binom{6}{2}$



$\Leftrightarrow$

ABBC

AABC

BBCC

ACCC

AABB

AAAA

Το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων που μπορώ να διατάξω κ θέσεις ($\sqcup$) και n-1 διαχωριστικά (|)

n=4 κ=3 A, B, C, D

$\sqcup \,|\,|\, \sqcup \,|\, \sqcup \longleftrightarrow$ ACD

Πόσοι 5-ψήφιοι αριθμοί έχουν τα ψηφία σε μη φθίνουσα διάταξη

πχ.

13599 ✓

11288 ✓

15489 ✗

06889 ✗ 4 ψήφιος

13 5 99

⊔ || ⊔ || ⊔ |||| ⊔ ⊔

$\kappa = 5$ θέσεις

$n = 9$ ψηφία $1 \dots 9$

άρα $n-1$ διαχωριστικά

$$\binom{9-1+5}{5} = \binom{13}{5}$$

⊔ ⊔ ⊔ ⊔ ⊔

9 10 10 10 10

10 βιβλία και 3 ράφια

Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε τα βιβλία στα ράφια;

– Διαφορετικά ράφια
Ίδια βιβλία

$$| \circ | \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$$

$$\downarrow$$

$$(0, 1, 9)$$

$$\binom{10+2}{2}$$

1 βιβλίο τουλάχιστον
σε κάθε ράφι

7 βιβλία για 3 ράφια

9 θέσεις για 2 διαχωριστικά

$\binom{9}{2}$

- Διαφορετικά βιβλία

$$\frac{\frac{1\ 3}{2\ 4\ 5\ 6}}{7\ 8\ 9\ 10} \neq \begin{matrix} 3\ 1 \\ 2\ 4\ 5\ 6 \\ 7\ 8\ 9\ 10 \end{matrix}$$

$10!\ \binom{12}{2}$

- Αν δεν με νοιάζει η σειρά στο ράφι

3^{10}

Αν ξέραμε

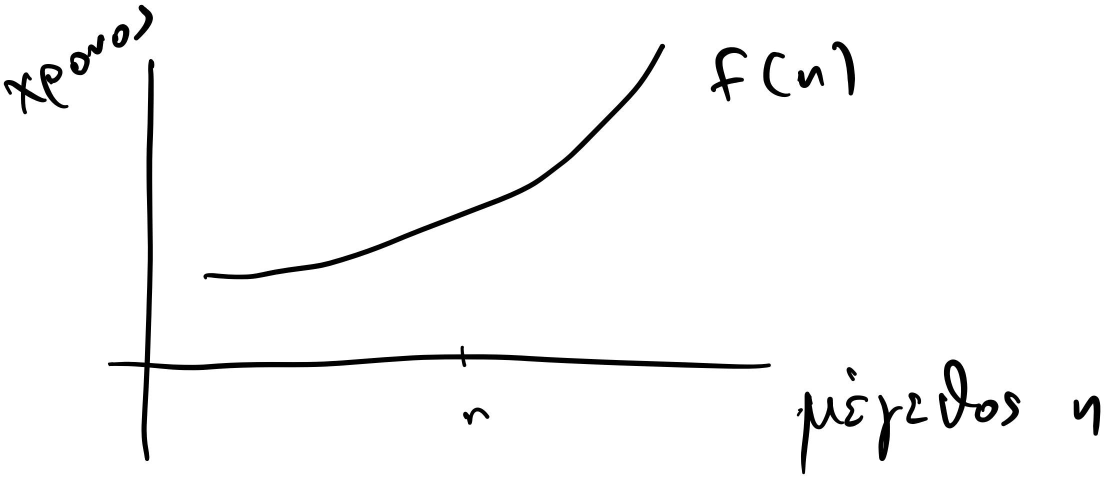
3 στο πρώτο
4 στο δεύτερο
3 στο τρίτο

$$\frac{10!}{3!\,4!\,3!} = \binom{10}{3,4,3}$$

Αλγόριθμοι και Ρυθμός Αύξησης Συναρτήσεων

Αριθμητικές Συναρτήσεις $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$

π.χ. Ο χρόνος εκτέλεσης μιας διεργασίας όταν το μέγεθος εισόδου είναι $n \in \mathbb{N}$




```
For(int i=0; i<n; i++) {
   ...
}
```

n φορές

$f(n) = n$

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    for (int j=0; j<n; j++) {
        ...
    }
}
```

$\leftarrow n^2$ loops

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    for (int j=i+1; j<n; j++) {
        ...
    }
}
```

$\leftarrow \binom{n}{2}$ loops

Αναζήτηση

- Εύρεση ενός αριθμού μέσα σε ένα πίνακα

[1, 3, 7, 5, 4, 8, 2]

Να βρώ το 4

Γραμμική αναζήτηση

Στη χειρότερη περίπτωση χρειάζεται να εξετάσουμε n στοιχεία

$f(n) = n$

- Εύρεση ενός αριθμού σε ένα ταξινομημένο πίνακα

[1, 2, 3, 4, 5, 7, 8]

Βρες το 5

κοιτάω το 4 : $4 < 5$
άρα $[5, 7, 8]$

κοιτάω το 7 : $7 > 5$
άρα $[5]$

κοιτάω το 5 : $5 = 5$
τέλος

Δυαδική αναζήτηση

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 1 + f(n/2) \\
&= 2 + f(n/4) \\
&= 3 + f(n/8) \\
&= i + f(n/2^i) \\
&\cdots \\
&= \underbrace{\log_2 n} + f(1) = \log_2 n
\end{aligned}
$$

$$\boxed{2^i \geq n \Rightarrow i \geq \log_2 n}$$

Γραμμική αναζήτηση | Δυαδική αναζήτηση

$n = 10^6 \rightarrow \log_2 n \simeq 20$

$10^9 \rightarrow \log_2 n \simeq 30$

Με μία πράξη $f(n) = 1$

Αν έχω

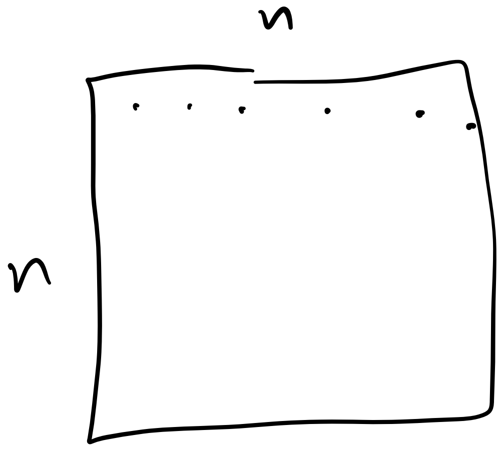
Για κάθε αριθμό x στη θέση i

$Index[x] = i$

Αν ψάχνω το 4

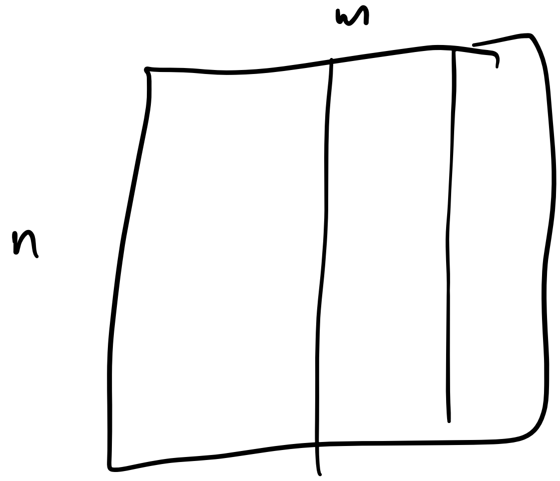
$Index[4]$

Όλοι οι κόμβοι



$$f(n) = n^2$$

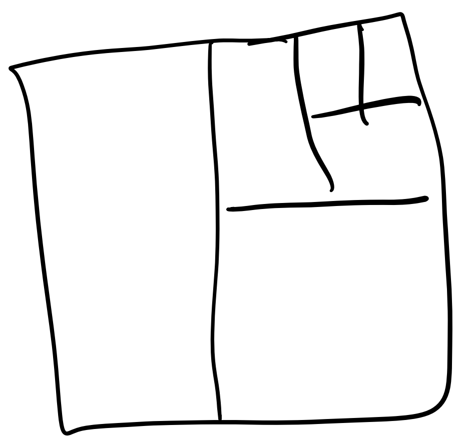
Δυαδική Αναζήτηση στις στήλες



$$f(n,m) = n + f(n, m/2)$$
$$= \dots$$
$$= n \log_2 m$$

Αν $n=m$

$$f(n) = n \log_2 n$$



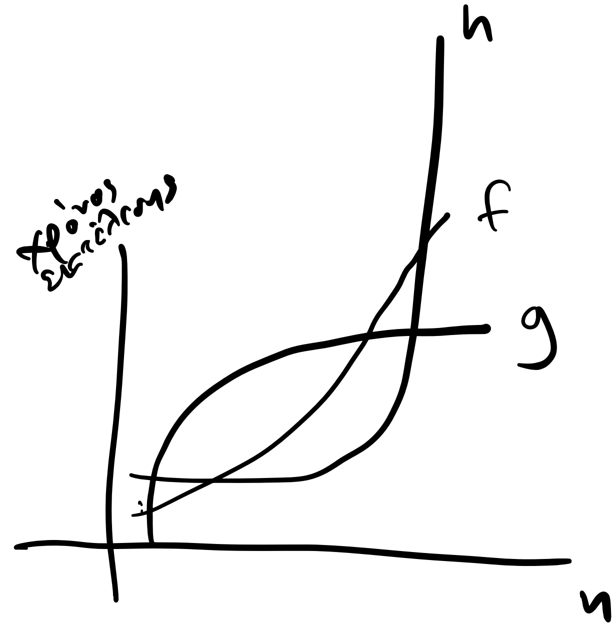
$$f(n,n) = n + \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

$$f(n) = 1.5n + f\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$= 1.5\,(1 + 2 + 4 + 8 + \dots n)$$
$$\simeq 1.5 \quad 2n = 3n$$

Αριθμητική Συνάρτηση

- $f(n) = n^2$
- $g(n) = 3\log_2(n)$
- $h(n) = 3^n$



Ορισμός

Έστω f και g αριθμητικές συναρτήσεις με θετικές τιμές. Λέμε ότι

$$\boxed{f(n) = O(g(n))}$$

"big-O"

Αν $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < +\infty$

Ανισότητα

$f \leq g$

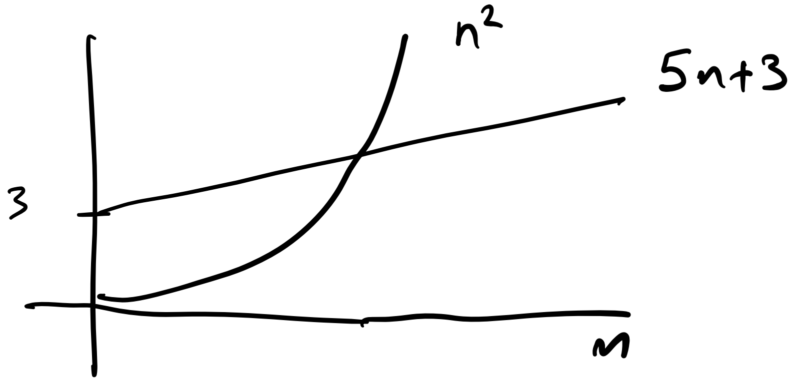
Διαφορετικά

Υπάρχει n_0, και c σταθερά

τ.ω. $f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \forall\, n \geq n_0$

π.χ. $f(n) = 5n + 3$

$g(n) = n^2$



$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n^2} = 0$$

Άρα $f(n) = O(g(n))$

- $f(n) = 5n + 3$

  $g(n) = n$

$f(n) \leq 10 g(n) \quad \forall n \geq 1$

$f(n) = O(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{n} = 5 < +\infty$$ αλλά και $g(n) = O(f(n))$

$n = O(5n+3)$

$5n+3 = O(n)$

$O(n)$ $\Theta(n)$

$\sqrt{n}$ $100\sqrt{n}$	$<$	$5n+3$ n	$<$	n^2 $8n^2$

$\Omega(n)$

Δεν γράφουμε $\underbrace{5n+3} < \underbrace{n^2}$ ✗

αλλά $5n+3 = O(n^2)$

$\rightarrow 5n+3 \in O(n^2)$

- $f(n) = n$
  $g(n) = 100\sqrt{n}$

$$100\sqrt{n} = O(n)$$

γιατί $100\sqrt{n} \leq n$

$$\forall n \geq 100^2$$

Αν $f(n) = O(g(n))$
$g(n) = O(f(n))$

τότε $f(n) = \Theta(g(n))$

(σημαίνει ότι $f(n) \simeq g(n)$)

$5n+3 = \Theta(n)$

Το τεστ του ορίου

$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$ τότε $f(n) = O(g(n))$

Απόδειξη

Έστω $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c < \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists n_0 :$$

$n > n_0$

$$\frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon$$

Άρα $\quad f(n) < (c+\varepsilon)\, g(n) \quad$ για $n > n_0$

Για $\varepsilon = 1 \quad f(n) < \underbrace{(c+1)}_{\substack{\text{σταθερά} \\ c'}} g(n) \quad$ για $n > n_0$

- $f(n) = \frac{1}{n} + 7$

$g(n) = n$

$$\frac{1}{n} + 7 \leq n \qquad \forall\ n \geq 8$$

$$\frac{1}{n} + 7 = O(n)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} + 7}{n} = 0 < \infty$$

- $f(n) = \frac{1}{n} + 7$ $\quad\quad f(n) \stackrel{?}{=} O(1)$

  $g(n) = 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 7 < +\infty$$

$$\frac{1}{n} + 7 \leq 8 \cdot 1 \quad \forall n \geq 1$$

ἀρα $\quad f(n) = O(1)$

- $f(n) = \frac{1}{n} + 7$ $\quad\quad f(n) \stackrel{?}{=} O(g(n))$

  $g(n) = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+7}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n+1}{1}$$

$$= +\infty$$

$$\frac{1}{n}+7 = O(n)$$

$$\frac{1}{n}+7 = O(1)$$

$$\frac{1}{n}+7 \neq O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n}+7 = \Theta(1)$$

Ισχύει επίσης

$$1 = O\left(\frac{1}{n}+7\right)$$

Αν ισχύει $f(n) = O(g(n))$

και $g(n) = O(f(n))$

τότε $f(n) = \Theta(g(n))$

και $g(n) = \Theta(f(n))$

Αν ισχύει $f(n) = O(g(n))$

τότε $g(n) = \Omega(f(n))$

$\leq$	O
$=$	Θ
$\geq$	Ω
$<$	o
$>$	ω

Κατηγορίες συναρτήσεων

- Πολυωνυμικές

$$f(n) = 5n^3 + 2n^4 + 3n = O(n^4)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5n^3 + 2n^4 + 3n}{n^4} = 2 < \infty$$

Επίσης

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^4}{5n^3 + 2n^4 + 3n} = \frac{1}{2} < \infty$$

Γενικά αν έχω μια συνάρτηση $f(n) = O(n^k)$ για σταθερό k αυτή η συνάρτηση λέγεται πολυωνυμική

π.χ. $2n^3 + \eta\mu(n) = \Theta(n^3)$

π.χ. $f(n) = 5n^{1/3} + \sqrt{n} + n^{1.2} = \Theta(n^{1.2})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(5n^{1/3-1} + n^{1/2-1} + n^{0.2}\right)$$

$$= +\infty$$

- Εκθετικές $f(n) = a^n$ για σταθερό a

$\forall$ $a>1$ και k σταθερό
$n^k = O(a^n)$

Απόδειξη για ακέραιο κ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\kappa}}{a^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^{\kappa})'}{(a^{n})'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa\, n^{\kappa-1}}{a^{n} \ln a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa(\kappa-1)\, n^{\kappa-2}}{a^{n} \ln^{2} a}$$

$$\ldots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa!}{a^{n} \ln^{\kappa} a} = 0$$

Πολυωνυμικά $<$ Εκθετικά

Ποιο είναι μεγαλύτερο

$$\underset{8^{n}}{\overset{\parallel}{2^{3n}}} \quad \text{ή} \quad \underset{9^{n}}{\overset{\parallel}{3^{2n}}}$$

$\Rightarrow$ ισχύει ότι $2^{3n} = O(3^{2n})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8^n}{9^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

Αντίθετα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{8^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{8}\right)^n = +\infty$$

$8^n = o(9^n)$

σημαίνει ότι $8^n = O(9^n)$

αλλά όχι $8^n = \Theta(9^n)$

o $n^{100}\, 8^n$

$9^n = 8^n \cdot a^n$

για $a = \frac{9}{8}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}\, 8^n}{9^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{\left(\frac{9}{8}\right)^n} = 0$$

Γενικά αν $a(n) = O(b(n))$

$c(n) = O(d(n))$

τότε $a(n)c(n) = O(b(n)d(n))$

Λογάριθμοι

$f(n) = \log_b(n)$ όπου $b > 1$ σταθερά

Για κάθε $b, b' > 1$

$$\log_b(n) = O(\log_{b'}(n))$$

$$\log_b(n) = \frac{\ln n}{\ln b} = \frac{\ln b'}{\ln b} \frac{\ln n}{\ln b'}$$

$$= \underbrace{\frac{\ln b'}{\ln b}}_{= c \text{ σταθερά}} \log_{b'}(n)$$

Άρα $\log_b(n) = O(\log n)$

Λογαριθμικές $<$ Πολυωνυμικό

Για κάθε $a, b > 0$

$$(\log_2 n)^{a} = O(n^b)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\log_2 n)^a}{n^b} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\log_2 n)^a}{\left(2^{\log_2 n}\right)^b}$$

Θέτω $m = \log_2 n$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{m^a}{2^{mb}}$$

$$= 0$$

$\frac{\text{Πολυωνυμική}}{\text{εκθετική}}$

3^n $n2^n$ $\sqrt{n}$ n $\frac{2^n}{n}$ $n\log n$ 1.7^n $\frac{n}{\log_2 n}$ 2^n

$$\sqrt{n} < \frac{n}{\log n} < n < n\log n < 1.7^n < \frac{2^n}{n} < 2^n < n2^n < 3^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n \cdot n^b \log^c n}{a'^n \cdot n^{b'} \log^{c'} n} < +\infty$$

Αν $a < a'$ ✓

Αν $a = a'$ και $b < b'$ ✓

Αν $a = a'$ και $b = b'$ και $c \leq c'$ ✓

$$n^5 \log n + n^4 \log^2 n + n^3 = \Theta(n^5 \log n)$$

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \Theta(n^2)$

  $= \frac{n(n+1)}{2}$

- $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{n}$

  $= n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{\Theta(\log n)} = \Theta(n \log n)$

- $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \cdots = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$

  $= \Theta(n)$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \le n \cdot n \cdot n \cdots n = O(n^n)$$

$$O(2^{n \log_2 n})$$

$$n! \geq \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2}}_{n/2 \text{ copies}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \Omega\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2}\right)$$

$$n! \simeq \underbrace{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}_{\text{stirling}} = \Theta\left(\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

Για κάθε $a > 1$ $\quad a^n = O(n!)$

$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$ άρα για $n > e \cdot a$

$$n! \geq a^n$$

Λογάριθμοι	Πολυωνυμικές	Εκθετικές	Παραγοντικές
$\log n$, $\log^2 n$	n, $n\log n$, n^2, n^3	2^n, 5^n	$n!$

$$\log(n!) \leq$$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \leq n! \leq n^n$$

$$\underbrace{\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} \le \log(n!) \le n\log n}_{\Theta(n\log n)}$$

$$(\log n)! = (\log n)^{\log n} = \left(2^{\log\log n}\right)^{\log n} = \left(2^{\log n}\right)^{\log\log n} = n^{\log\log n}$$

Συνδυασμοί $\binom{n}{k}$ με σταθερό k

υποσύνολα μεγέθους k

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le n^k$$

$$\binom{n}{k} = O(n^k)$$

$$\underbrace{\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot}_{n/k}\ \ \underbrace{\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot}_{n/k}\ \ \underbrace{\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot}_{n/k}\ \ \underbrace{\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot}_{n/k}$$

$$\left(n/k\right)^k = \Omega\left(n^k\right)$$

Υποσύνολα που έχουν ακριβώς ένα στοιχείο σε κάθε group

$$\binom{n}{k} = \Theta\left(n^k\right)$$

$$\binom{n}{n/2} = \Theta\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{2\pi n\left(\frac{n}{2e}\right)^n} = c\cdot\frac{2^n}{\sqrt{n}}$$

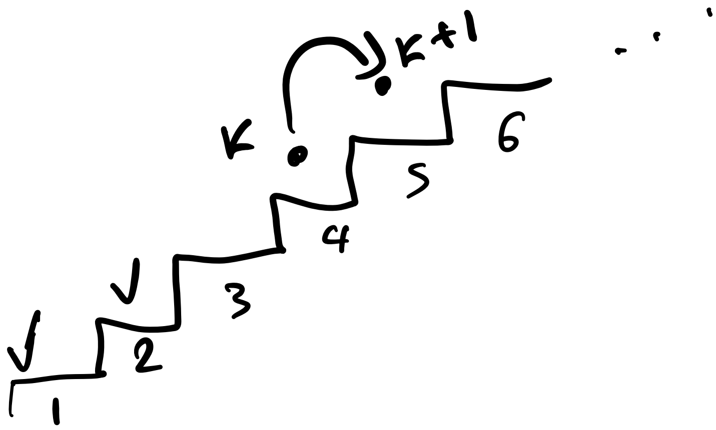
Επαγωγή

$\forall\, n \geq n_0 \quad : \quad P(n)$] απόδειξη αυτής της μορφής

Αρκεί να δείξουμε:

- Βάση της επαγωγής: $P(n_0)$
- Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για $n=k$
- Επαγωγικό Βήμα: Δείχνω ότι ισχύει για $n=k+1$

$$P(n_0) \land \left(\forall\, n \geq n_0 : \ P(n) \Rightarrow P(n+1) \right)$$
$$\Rightarrow \ \forall\, n \geq n_0 : \ P(n)$$



$$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3)$$
$$\Rightarrow P(4) \Rightarrow \ldots$$

Παράδειγμα 1

Ν.δ.ο. $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Απόδειξη:

$P(n)$ είναι η πρόταση $\sum_{i=1}^{n} i \overset{?}{=} \frac{n(n+1)}{2}$

Βάση: $P(1)$ $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ✓

$P(2)$ $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$ ✓

Υπόθεση: Έστω ότι ισχύει $P(k)$

Βήμα: Θα δείξω ότι ισχύει η $P(k+1)$

$$\underbrace{1+2+3+\dots+k}_{= \frac{k(k+1)}{2}} + k+1 \overset{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

από επαγωγική υπόθεση

Άρα αρκεί να δείξω ότι $\frac{k(k+1)}{2} + k+1$ είναι ίσο με $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ ✓

Άρα ισχύει η $P(k+1)$
Επομένως λειτουργεί η επαγωγή και ισχύει η $P(n)$ $\forall\ n \geq 1$ $\blacksquare$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε και να αποδείξετε κλειστό τύπο για το άθροισμα
$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$$

Απόδειξη

Για

$n=1 \to 1 = 1^2$

$n=2 \to 4 = 2^2$

$n=3 \to 9 = 3^2$

$n=4 \to 16 = 4^2$

$n=5 \to 25 = 5^2$

$$P(n): \quad 1+3+5\ldots+(2n-1) = n^2$$

Βάση : $P(1), P(2), \ldots, P(5)$
Υπόθεση : Έστω ότι ισχύει για $n=k$ η $P(k)$
Βήμα : Θα δείξω ότι ισχύει η $P(k+1)$

Ξέρω ότι

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2k-1)} = \underbrace{k^2}$$

Αν προσθέσω $(2(k+1)-1) = (2k+1)$

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) = \overbrace{k^2+(2k+1)}$$
$$= (k+1)^2$$

Άρα ισχύει η $P(k+1)$ $\square$

$$(k+1)^2 + 2(k+1) + 1$$
$$= (k+2)^2$$

Ν.δ.ο. $1+2+4+8+\dots 2^{n-1}=2^n-1$

Βάση: $n=1$ $\quad 1=2^1-1$ ✓

$n=2$ $\quad 1+2=2^2-1$ ✓

Υπόθεση: Έστω ότι

$1+2+4+\dots+2^{k-1}=2^k-1$

Βήμα: Θα δείξω ότι

$$\underbrace{1+2+4+\dots+2^{k-1}}_{\overset{\shortparallel}{2^k-1}}+2^k \overset{?}{=} 2^{k+1}-1$$

από υπόθεση

Άρα αρκεί να δείξω

$$2^k-1+2^k=2^{k+1}-1$$

$$2\cdot 2^k-1=2^{k+1}-1$$ ✓

Γενικότερα $$\sum_{i=0}^{n} ar^i = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

Παράδειγμα 4

Ν.δ.ο. $n < 2^n$ για κάθε θετικό ακέραιο

Βάση : $n=1$ $\quad 1 < 2^1 = 2$

$n=2$ $\quad 2 < 2^2 = 4$

Υπόθεση : Έστω ότι $k < 2^k$

Βήμα : Θ.δ.ο. $k+1 < 2^{k+1}$

Ξέρω $k < 2^k$

$$\Rightarrow k+1 < 2^k + 1$$
$$\leq 2^k + 2^k \quad \text{γιατί } 2^k \geq 1 \text{ αν } k \geq 0$$
$$= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

$\square$

Παράδειγμα

✓ αρμονικοί αριθμοί

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m}$$

$$H_m \simeq \log_2 m \qquad\qquad H_m = \Theta(\log m)$$

- $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$
- $H_{2^n} \leq 1 + n$

Ν.δ.ο. $\quad H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \forall\, n \geq 0$

Βάση $\quad n = 0 \quad H_{2^0} = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$

$\quad n = 1 \quad H_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq 1 + \frac{1}{2}$

Υπόθεση $\quad$ Έστω $\quad H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$

Βήμα $\quad$ Θ.δ.ο. $\quad H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$

$$H_{2^{k+1}} = \overbrace{\underbrace{\overbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k}}^{2^k \text{ όροι}}}_{\substack{\| \\ H_{2^k} \,\geq\, 1 + \frac{k}{2}}} + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}}^{2^{k+1} \text{ όροι}}$$

$$\geq 1 + \frac{k}{2} + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}$$

$$\geq 1 + \frac{k}{2} + 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}$$

Άρα $\quad H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{k+1}{2}$ $\square$

Ν.δ.ο. $\quad H_{2^n} \leq 1 + n \quad \forall\, n \geq 0$

Βάση $\quad n = 0 \quad H_{2^0} = 1 \leq 1 + 0$

$\quad\quad n = 1 \quad H_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + 1 = 2$

Υπόθεση $\quad$ Έστω $\quad H_{2^k} \leq 1 + k$

Βήμα $\quad$ Θ.δ.ο. $\quad H_{2^{k+1}} \leq 1 + (k+1)$

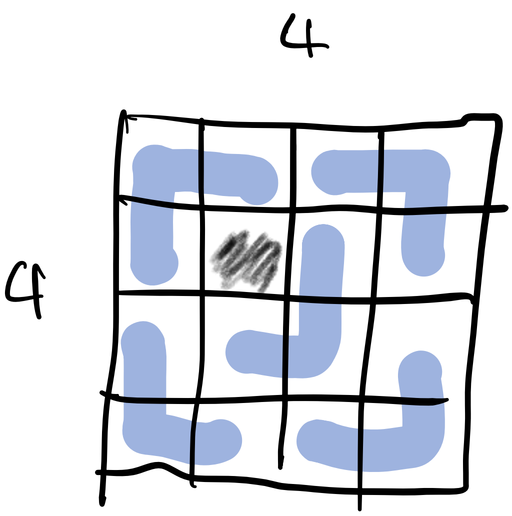
$$H_{2^{k+1}} = \overbrace{\underbrace{\overbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad + \frac{1}{2^k}}^{2^k \text{ όροι}}}_{H_{2^k} \leq 1 + k} + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}}^{2^{k+1} \text{ όροι}}$$

$$\leq 1 + k + \overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ όροι}}$$

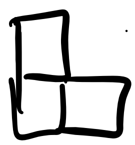
$$\leq 1 + k + 2^k \frac{1}{2^k} = 1 + k + 1 = 1 + (k+1)$$

Άρα $H_{2^{k+1}} \leq 1 + (k+1)$ $\square$

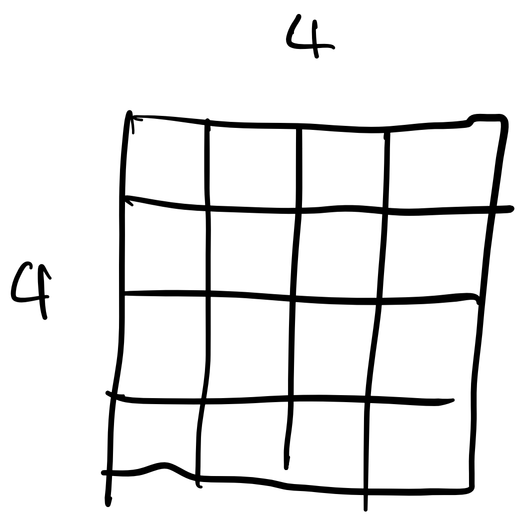
Τριόμινο στη σκακιέρα



Τριόμινο

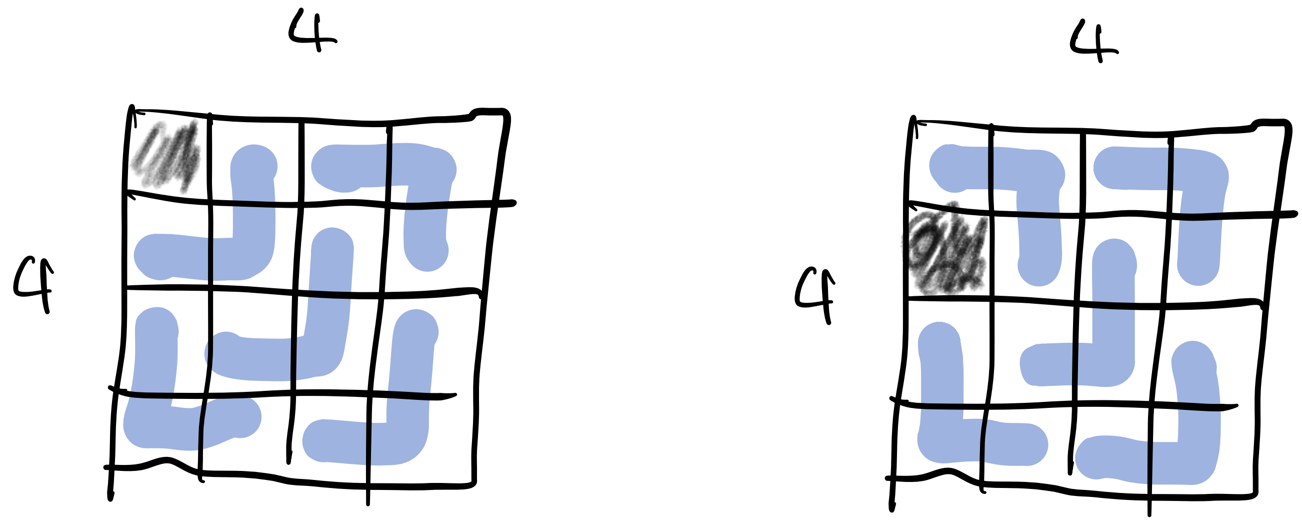


Μπορώ να καλύψω τη σκακιέρα;



Όχι γιατί έχω 16 κουτιά και κάθε τριόμινο καλύπτει 3

Αλλά το 16 δεν είναι πολ/σιο του 3

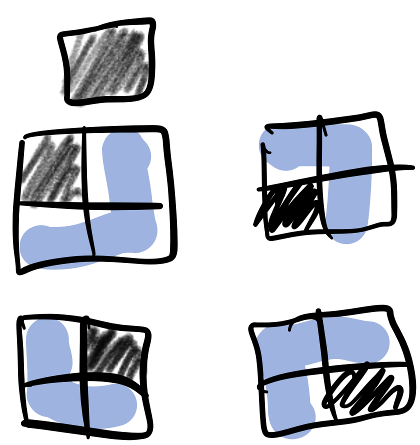


Ν.δ.ο. κάθε $2^n \times 2^n$ σκακιέρα που της λείπει 1 κουτάκι καλύπτεται με τριόμινο. $P(n)$

Απόδειξη με επαγωγή

Βάση $n=0$

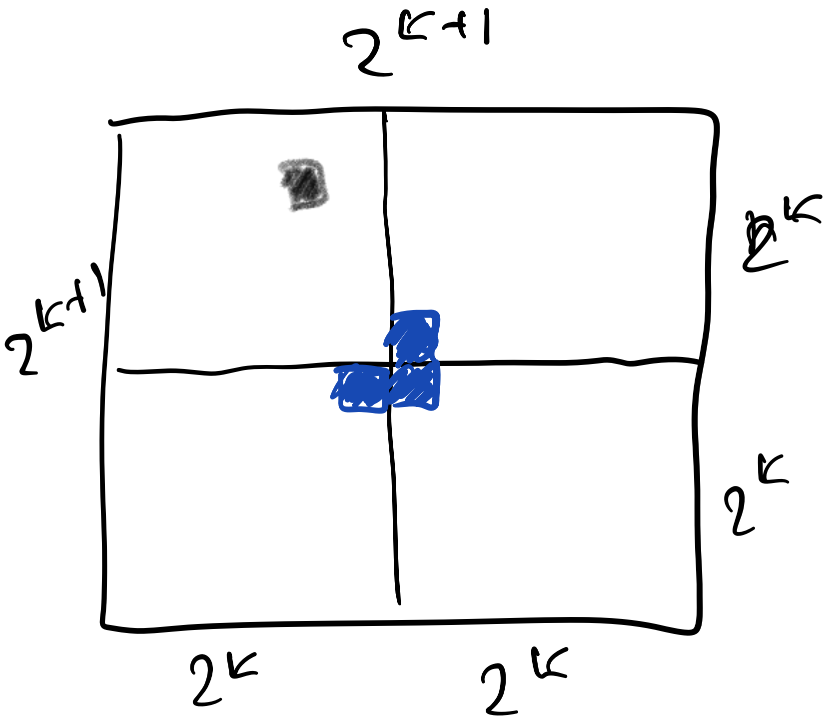
$n=1$



Υπόθεση: Έστω ότι ισχύει η P(κ)

Βήμα: $n = \kappa+1$

Θα δείξω ότι η $2^{\kappa+1} \times 2^{\kappa+1}$ καλύπτεται όποιο κοντάκι και να λείπει.



- Σπάω την $2^{\kappa+1} \times 2^{\kappa+1}$ σκακιέρα σε 4 $2^{\kappa} \times 2^{\kappa}$

- Καλύπτω τη σκακιέρα που έχει το κενό από Επαγ. Υπόθεση

- Για τις υπόλοιπες 3 τις καλύπτω ολόκληρες λίρα από το κεντρικό κομμάτι

- Μένουν 3 ακάλυπτα κουτάκια στο κέντρο και τα καλύπτω με 1 τριόμινο

□

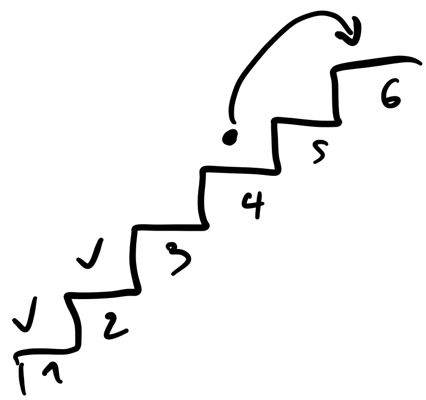
Ισχυρή Επαγωγή

Βάση : $P(n_0)$

Υπόθεση : Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n_0 \le n \le k$

Βήμα : $P(n)$ για $k+1$

Παράδειγμα



Έχω μια σκάλα και ξέρω ότι μπορώ να ανέβω το σκαλί 1 και 2. Επίσης ξέρω ότι αν έχω φτάσει στο k μπορώ να φτάσω στο $k+2$.

Ν.δ.ο. μπορώ να φτάσω σε κάθε σκαλί $n \geq 1$

Απόδειξη

Βάση : φτάνω στο 1

στο 2

Υπόθεση : Υποθέτω ότι για κάθε $1 \leq n \leq k$

μπορώ να φτάσω στο σκαλί n

Βήμα : Θα δείξω ότι μπορώ να φτάνω

στο $k+1$ (για $k \geq 2$)

Από Ε.Υ. φτάνω στο $k-1$

γιατί $1 \leq k-1 \leq k$

άρα μπορώ να φτάσω και

στο $(k-1)+2 = k+1$

γιατί ανεβαίνω 2-2 τα

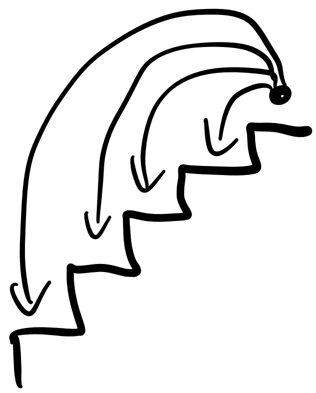
σκαλιά $\square$

Αν $P(n_0)$ ισχύει

και για κάθε $n \geq n_0$

$$P(n_0) \land P(n_0+1) \land P(n_0+2) \land \dots \land P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

τότε $\forall n \geq n_0 : P(n)$



Ν.δ.ο. Κάθε αριθμός $n \geq 2$ γράφεται σαν γινόμενο πρώτων αριθμών.

π.χ.

$$7 = 7$$
$$14 = 2 \cdot 7$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Βάση: Για $n=2$ γίνεται γιατί 2 πρώτος

Υπόθεση: Ισχύει για $2 \leq n \leq k$

Βήμα: Θα δείξω ότι ισχύει για $k+1$

$k+1$ γράφεται σαν γινόμενο πρώτων.

Αν $k+1$ είναι πρώτος ✓

Διαφορετικά

$k+1 = a \cdot b$ όπου $1 < a, b < k+1$

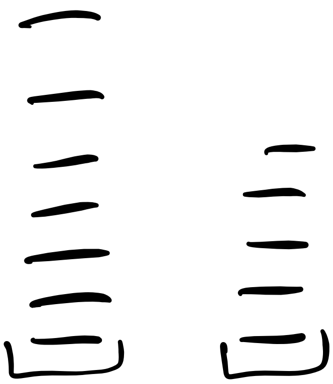
άρα $2 \leq a, b \leq k$

Από επαγωγική υπόθεση ο a και ο b γράφονται σαν γινόμενα πρώτων άρα και το γινόμενο τους είναι γινόμενο πρώτων $\square$

π.χ. $24 = \underset{\substack{\| \\ 2 \cdot 2}}{4} \cdot \underset{\substack{\| \\ 2 \cdot 3}}{6} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Παράδειγμα

Το παιχνίδι Nim



A B

- Δύο παίχτες
- Δυο στήλες A, B με σπίρτα n_A, n_B
- Σε κάθε γύρο επιλέγει ο παίχτης μια στήλη και αφαιρεί όσα σπίρτα θέλει (τουλάχιστον 1)
- Χάνει όποιος δεν μπορεί να πάρει σπίρτο

$$
\begin{array}{cc}
7 & 5 \\
\downarrow & \\
4 & 5 \\
\downarrow & \\
4 & 1 \\
\downarrow & \\
4 & 0 \\
\downarrow & \\
0 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
(7 \quad 5) \\
\downarrow \\
(7 \quad 2) \\
\downarrow \\
(2 \quad 2) \\
\downarrow \\
(2 \quad 0) \to (0, 0)
\end{array}
$$

$(1,0) \to (0,0)$

N.δ.ο. Αν $n_A = n_B = n$ τότε ο 2ος παίχτης έχει στρατηγική νίκης.

Βάση : $n=0$ ο πρώτος χάνει

Υπόθεση : Έστω ότι ισχύει για $0 \leq n \leq k$

Δηλαδή ο 2ος κερδίζει αν οι 2 στήλες έχουν τον ίδιο αριθμό σπίρτων και το πολύ k

Βήμα : Θα δείξω ότι ο 2ος κερδίζει στο $(k+1, k+1)$

Ο πρώτος παίρνει από μία στήλη $1 \leq a \leq k+1$

↳ $(k+1-a, k+1)$

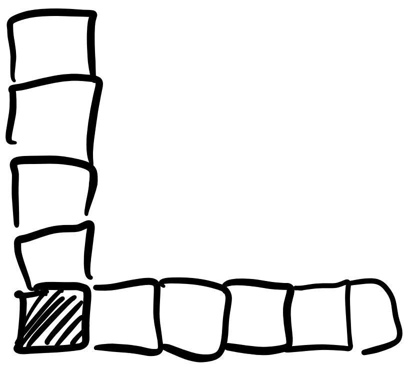
τότε ο 2ος

↳ $(k+1-a, k+1-a)$

Αλλα $0 \le (k+1-a) \le k$ άρα

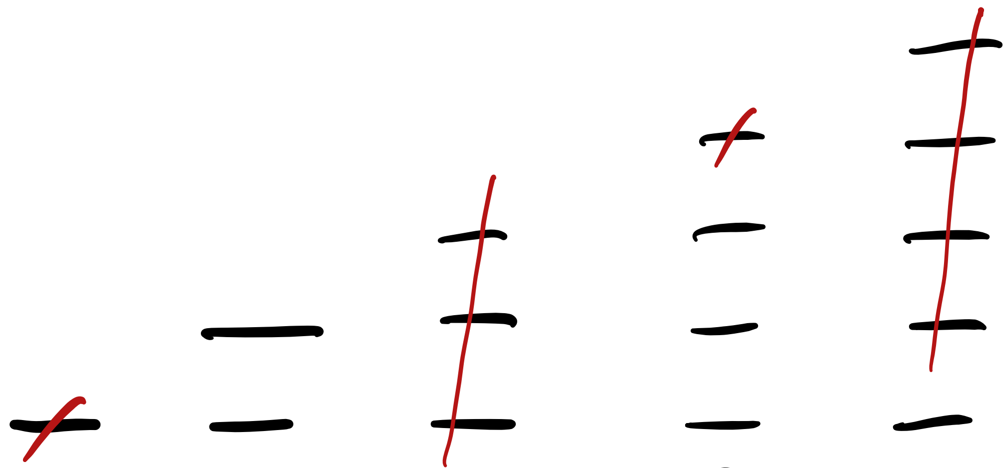
απο Ε.Υ. ο 2ος κερδίζει □

A



B

Παιχνίδι σοκολάτας



Επιλέγω μια στοίβα και παίρνω όσα θέλω

A	B	C	D	E
0	2	0	3	1
↓	↓	↓	↓	↓
000	010	000	011	001

Χάνω αν το xor των αριθμών είναι 0.

~~001 1~~

010 2

011 3

100 4

101 5

$$\begin{array}{r} 010 \\ 011 \\ \oplus\ 001 \\ \hline 000 \end{array}$$

Άσκηση: Fibonacci

$f_0 = 1$
$f_1 = 1$
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Να εξετάσετε αν το f_n είναι άρτιος ή περιττός, να βρείτε γενικό κανόνα και να τον δείξετε με επαγωγή

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_n =$	1	1	2	3	5	8	13	21
	περιττός	περιττός	άρτιος	περιττά	περιττός	άρτιος	περιττός	περιττός

$P(n)$: Αν το $n \bmod 3 = 2$ είναι άρτιος αλλιώς περιττός ($n+1$ πολ/σιο του 3)

Βάση: αν $n \leq 7$ ισχύει
Υπόθεση: Ισχύει για $0 \leq n \leq K$

Βήμα : Θ.δ.ο. ισχύει για $n=k+1$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Περιπτώσεις

A — $n \bmod 3 = 0 \Rightarrow$ $(n-1) \bmod 3 = 2$, $(n-2) \bmod 3 = 1$

B — $n \bmod 3 = 1 \Rightarrow$ $(n-1) \bmod 3 = 0$, $(n-2) \bmod 3 = 2$

Γ — $n \bmod 3 = 2 \Rightarrow$ $(n-1) \bmod 3 = 1$, $(n-2) \bmod 3 = 0$

Από ΕΥ

A) f_{n-1} άρτιος

f_{n-2} περιττός

άρτιος + περιττός = περιττός ✓

f_n περιττός

Β)

f_{n-1} περιττός

f_{n-2} άρτιος

περιττός + άρτιος = περιττός ✓

f_n περιττός

Γ)

f_{n-1} περιττός

f_{n-2} περιττός

περιττός + περιττός = άρτιος ✓

f_n άρτιος

$\square$

Άσκηση: Γραμματόσημα αξίας 4 και 5 ευρώ. Ποια ποσά μπορώ να σχηματίσω;

$4\alpha + 5\beta$ με ακέραια $0 \le \alpha, \beta$

$P(n)$ Μπορώ να φτιάξω κάθε ποσό n εκτός αν $n \in \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$

Απόδειξη

$4 = 4$

$5 = 5$

$8 = 4+4$

$9 = 4+5$

$10 = 5+5$

$12 = 4+4+4$

$13 = 4+4+5$

$14 = 4+5+5$

$15 = 5+5+5$

$16 = 4+4+4+4$

Βάση: Η $P(n)$ ισχύει για $n=1 \ldots 16$

Υπόθεση: Η $P(n)$ ισχύει για κάθε $1 \leq n \leq k$

Βήμα: Θ.δ.ο $P(n)$ ισχύει για $n=k+1$

$n \geq 16$

δηλαδή ότι το n γράφεται σαν $n=4a+5b$

$$n = \underbrace{k}_{\text{φτιάχνεται από ΕΥ}} + \underbrace{1}_{\text{όχι}}$$

$$= (k-3) + 4$$

$11 < k-3 \leq k$

άρα γράφεται σαν

$k-3 = 4a + 5b$

τότε $n = 4(a+1) + 5b$

Ιδιότητα της καλής διάταξης

κάθε υποσύνολο των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο

[Αν $n \geq 16$ τότε το n γράφεται σαν $4a+5b$]

Με άτοπο

Έστω το μικρότερο n που δεν γράφεται

Τότε πρέπει και $n-4$ και $n-5$ να μην γράφονται

Αν το $n \geq 20$ άτοπο γιατί το n το n δεν είναι το μικρότερο που δεν γράφεται

Αλλα άν το $n \in [16, 19]$ άτοπο γιατί το 12, 13, 14 φτιάχνονται.