Κεφ 2 : Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

§1 Βασικές Έννοιες

- Ορ : Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μία συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Συνηθίζουμε να συμβολίζουμε τις τιμές της με $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$

- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αναφερόμαστε στον αριθμό α_n ως τον n-οστό όρο της ακολουθίας. Επίσης συμβολίζουμε μία ακολουθία ως $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\alpha_n\}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots)$

- Παραδείγματα:

α) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Η σταθερή ακολουθία $(\alpha_n)_n$ με τιμή c τ.ω.
$$\alpha_n = c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

β) $(\alpha_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$. Τότε, $\alpha_1 = \frac{1}{1} = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}$, ...

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha_n)_n = (\alpha^n)_n$, τότε $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^2$, $\alpha_3 = \alpha^3 \ldots$

δ) $(\alpha_n)_n = (2n-1)_n$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, ...

ε) (Αναδρομικός ορισμός) $\alpha_1 = 1$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε
$\alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n}$ (ισοδύναμα $\forall n \geq 2 : \alpha_n = \sqrt{1+\alpha_{n-1}}$)

$\Rightarrow \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$, $\alpha_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, ...

στ) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$\alpha_1 = \alpha$ και $\forall n \in \mathbb{N}: \alpha_{n+1} = \alpha \cdot \alpha_n$. Τότε $\alpha_n = \alpha^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ζ) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ και $\forall n \in \mathbb{N}$: $\alpha_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1}$. Τότε

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 3$, $\alpha_5 = 5$, $\alpha_6 = 8$, $\alpha_7 = 13 \ldots$

η) $\alpha_n = \begin{cases} 3n^2 & \text{αν } n = 2K \\ \dfrac{1}{7n} & \text{αν } n = 2K-1 \end{cases}$ $(K \in \mathbb{N})$. Τότε $\begin{cases} \alpha_4 = 48 \\ \alpha_5 = \dfrac{1}{45} \end{cases}$

• Ορ: Έστω $(\alpha_n)_n$ και (β_n) ακολουθίες.

(i) Λέμε ότι $(\alpha_n)_n = (\beta_n)_n$ αν ισχύει $\alpha_n = \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Ορίζουμε $(\alpha_n)_n + (\beta_n)_n = (\alpha_n + \beta_n)_n$

$$(\alpha_n)_n - (\beta_n)_n = (\alpha_n - \beta_n)_n$$

$$(\alpha_n)_n \cdot (\beta_n)_n = (\alpha_n \beta_n)_n$$

Αν $\beta_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $\dfrac{(\alpha_n)_n}{(\beta_n)_n} = \left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_n$

• Ορ (Σύνολο τιμών): Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία. Το σύνολο τιμών της $(\alpha_n)_n$ είναι το σύνολο $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$.

• Παραδείγματα: i) Η $(\alpha_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ έχει ως σύνολο τιμών, το σύνολο $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Η $(\alpha_n)_n = ((-1)^n)_n$ έχει ως σύνολο τιμών το $\{-1, 1\}$.

§2 Σύγκλιση Ακολουθιών

- Ας εξετάσουμε την ακολουθία $(\alpha_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$.

Για $n=1$: $\alpha_1 = 1$, για $n=5$: $\alpha_n = \frac{1}{5}$ ..., για $n=1000$: $\alpha_n = \frac{1}{1000}$

Καθώς το n γίνεται "μεγάλο", ο α_n πλησιάζει τον αριθμό 0.
Δηλαδή, η $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ συγκλίνει στο 0.

- Γενικά, έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία και $\alpha \in \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η $(\alpha_n)_n$ συγκλίνει στον α αν

"καθώς το n μεγαλώνει ο α_n έρχεται οσοδήποτε κοντά στο α";

"για οσοδήποτε κοντά στο α θελήσουμε, θα βρίσκονται οι όροι της α_n, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο";

"όσο κοντά και αν θελήσουμε ($\forall \varepsilon > 0$) να είμαστε στο α, θα έχουμε ότι από κάποιον όρο και μετά ($\exists n_0$ τ.ω $\forall n \geq n_0$) το $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \alpha_n \in (\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$ (δηλ το α_n ανήκει σε μία ε-περιοχή του α).

- <u>Αυστηρός ορισμός της σύγκλισης:</u> Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία και $\alpha \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η $(\alpha_n)_n$ συγκλίνει στο α και γράφουμε $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$
ή $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, όταν

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, έχουμε $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$.
[για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 τ.ω για κάθε $n \geq n_0$ . . . .]

• <u>Παρατήρηση</u>: Το n_0 εξαρτάται από το ε.

• <u>Παραδείγματα</u>

i) Αν $a_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, με $c \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

ii) $(a_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, τότε από την

Αρχιμήδεια ιδιότητα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

[μάλιστα μπορούμε να πάρουμε $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$]

Άρα $\forall n \geq n_0$, έχουμε ότι $\varepsilon > \frac{1}{n_0} \geq \frac{1}{n} = a_n > 0 > -\varepsilon$.

iii) $a_n = \dfrac{n^2-n}{n^2+n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\left| \frac{n^2-n}{n^2+n} - 1 \right| = \left| \frac{n^2-n-n^2-n}{n^2+n} \right| = \left| \frac{2n}{n^2+n} \right| = 2\left| \frac{1}{n+1} \right| \leq \frac{2}{n}.$$

Από Αρχιμήδεια ιδιότητα, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα $\forall n \geq n_0$,

έχουμε $|a_n - 1| \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon$

iv) Η $(a_n)_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

<u>Βασικές ιδιότητες</u>

i) Το όριο κάθε ακολουθίας (όταν υπάρχει) είναι μοναδικό.

ii) <u>Κριτήριο Παρεμβολής</u>: Έστω $(a_n)_n, (\beta_n)_n, (\gamma_n)_n$ ακολουθίες

και $\ell \in \mathbb{R}$, τ.ω.

1) $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$, $\forall n \geq n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \ell$

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \ell$

<u>Ορ</u>: Μία ακολουθία $(\alpha_n)_n$ καλείται φραγμένη αν $\exists\, M>0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|\alpha_n| \leq M$

<u>π.χ.</u> Οι $((-1)^n)_n$ και $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ είναι φραγμένες. Η $(n^2+2)_n$ δεν είναι φραγμένη.

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη

[Προσοχή: δεν ισχύει το αντίστροφο π.χ. $((-1)^n)_n$.]

<u>Ορ</u>: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία. Ένα τελικό τμήμα της $(\alpha_n)_n$ είναι μία ακολουθία της μορφής $(\beta_n)_n = (\alpha_{m+n-1})_n = (\alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots)$.

(με $m \geq 1$)

<u>π.χ.</u> Η $\left(\frac{1}{12+n}\right)_n$ είναι τελικό τμήμα της $\left(\frac{1}{n}\right)_n$

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha_n)_n$ και $(\beta_n)_n$ ακολουθίες.

Αν για κάποιο $m_0 \in \mathbb{N}$ ισχύει $\alpha_n = \beta_n$, $\forall n \geq m_0$,

τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ ανν $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$.

2) Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία και $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$

ΑΝΝ υπάρχει τελικό τμήμα της $(\alpha_n)_n$ που να συγκλίνει στο α

και ΑΝΝ ΚΑΘΕ τελικό τμήμα —— " —— " —— " α.

3) Έστω (α_n) ακολουθία και $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \alpha$

ANN $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq n_0$ τ.ω. $|\alpha_n - \alpha| \geq \varepsilon$.

και ANN $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : |\alpha_n - \alpha| \geq \varepsilon\}$ άπειρο.

§3 Απόκλιση στο άπειρο

Ορ: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία.

i) Λέμε ότι η $(\alpha_n)_n$ τείνει στο $+\infty$ (ή αποκλίνει στο $+\infty$ ή $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$)

αν $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ έχουμε $\alpha_n > M$

ii) Λέμε ότι η $(\alpha_n)_n$ τείνει στο $-\infty$ (ή αποκλίνει στο $-\infty$ ή $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$)

αν $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ έχουμε $\alpha_n < -M$.

Παραδείγματα: $n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, $n^2 - n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, $-n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$,

ενώ η $((-1)^n \cdot n)_n$ δεν τείνει ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$.

Παρατηρήσεις: Έστω $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ ακολουθίες

i) Αν $\alpha_n \leq \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, τότε $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

ii) Αν $\alpha_n \geq \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, τότε $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

iii) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ ή $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, τότε $\dfrac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

iv) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και $\alpha_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\dfrac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

v) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και $\alpha_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\dfrac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$.

§4 Άλγεβρα ορίων

Παρατηρήσεις: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία και $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Η $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ΑΝΝ $|\alpha_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (π.χ. $(-1)^n \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$).

ii) Η $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ ΑΝΝ $\alpha_n - \alpha \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ΑΝΝ $|\alpha_n - \alpha| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

iii) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, τότε $|\alpha_n| \xrightarrow{n\to\infty} |\alpha|$ (Προσοχή: δεν ισχύει το αντίστροφο, π.χ. $\alpha_n = (-1)^n$)

Πράξεις, διάταξη και σύγκλιση: Έστω $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ ακολουθίες και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

i) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$, τότε $\alpha_n + \beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha + \beta$

Ειδικότερα, αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, τότε $\alpha_n + c \xrightarrow{n\to\infty} \alpha + c$.

ii) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$ τότε $\alpha_n \cdot \beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \cdot \beta$

Ειδικότερα, αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, τότε $c \cdot \alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} c \cdot \alpha$.

iii) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$, τότε $\alpha_n - \beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha - \beta$

iv) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$ τ.ω. $\beta_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ και $\beta \neq 0$,

τότε $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{\alpha}{\beta}$.

v) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $k \in \mathbb{N}$, τότε $\alpha_n^k \xrightarrow{n\to\infty} \alpha^k$.

(Προσοχή το k σταθερό ως προς n)

vi) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε $\sqrt[\kappa]{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[\kappa]{\alpha}$.

vii) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και $(\beta_n)_n$ φραγμένη, τότε $\alpha_n \cdot \beta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(Προσοχή, το $(\beta_n)_n$ είναι απαραίτητο. π.χ. $(\alpha_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ και $(\beta_n)_n = (n^2)_n$)

viii) Αν $\alpha_n \le \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$,

τότε $\alpha \le \beta$.

(προσοχή: αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$, και $\alpha_n < \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

ΔΕΝ συνεπάγεται ότι $\alpha < \beta$ (μόνο ότι $\alpha \le \beta$)

π.χ. $(\alpha_n)_n = \left(\frac{-1}{n}\right)_n$ και $(\beta_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$, τότε έχουμε $\alpha_n < \beta_n$,

$\forall n \in \mathbb{N}$, αλλά $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$).

ix) Αν $m \le \alpha_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (όπου $m, M \in \mathbb{R}$) και $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$,

τότε $m \le \alpha \le M$.

§5 Κάποια βασικά όρια

1) Συμπεριφορά της $(\alpha_n)_n = (\alpha^n)_n$ όπου $\alpha > 0$.

Αν $\alpha = 1$, τότε $\alpha^n \xrightarrow{n\to\infty} 1$,

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\alpha^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

$\underline{ΑΣΚ}$: Δ.ο. αν $\alpha_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = c$.

$\underline{Λύση}$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = 1$ τ.ω. $\forall n \geq n_0 = 1$ έχουμε $\underbrace{|\alpha_n - c|}_{=0} < \varepsilon$.

$\underline{ΑΣΚ}$: Δ.ο. αν $(\alpha_n)_n = (-1)^n$, τότε η $(\alpha_n)_n$ δεν συγκλίνει

$\underline{Λύση}$: Θ.δ.ο. η (α_n) δεν συγκλίνει σε κανένα όριο $\alpha \in \mathbb{R}$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις και επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

- Αν $\alpha \geq 0$, έχουμε $|\alpha_n - \alpha| = |-1-\alpha| = 1+\alpha \geq 1 > \varepsilon$

  για κάθε n περιττό $n = 1, 3, 5 \ldots$

- Αν $\alpha \leq 0$, έχουμε $|\alpha_n - \alpha| = |1-\alpha| = 1-\alpha \geq 1 > \varepsilon$

  για κάθε n άρτιο $n = 2, 4, 6 \ldots$

Άρα δεν ισχύει ότι από κάποιο όρο και μετά (για $n \geq n_0$ αρκετά μεγάλο) έχουμε $\alpha_n \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \iff |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$

$\underline{ΑΣΚ}$: Δ.ο. το όριο κάθε ακολουθίας (όταν υπάρχει) είναι μοναδικό.

$\underline{Λύση}$: Έστω ότι για την ακολουθία $(\alpha_n)_n$ ισχύει $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{\alpha}$ με $\alpha < \tilde{\alpha}$. Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{2}$ στον ορισμό της σύγκλισης και έχουμε

$\exists n_0$ τ.ω $n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, $\exists \tilde{n}_0$ τ.ω. $n \geq \tilde{n}_0 \Rightarrow |\alpha_n - \tilde{\alpha}| < \varepsilon$

Άρα για $n \geq \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$ ισχύει $\underbrace{|\tilde{\alpha} - \alpha|}_{\tilde{\alpha} - \alpha} \leq |\tilde{\alpha} - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = \tilde{\alpha} - \alpha$, ΑΤΟΠΟ!

ΑΣΚ: Έστω $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$, $(\gamma_n)_n$ ακολουθίες και $\ell \in \mathbb{R}$ τ.ω:

1) $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n \quad \forall n \geq n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \ell$

Δ.ο. $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \ell$

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$, αφού οι $(\alpha_n)_n$ και $(\gamma_n)_n$ συγκλίνουν στο όριο ℓ

έχουμε $\quad \exists N_1 \quad$ τ.ω $\quad n \geq N_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \alpha_n < \ell + \varepsilon$

$\exists N_2 \quad$ τ.ω $\quad n \geq N_2 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \gamma_n < \ell + \varepsilon$

Άρα για $n \geq \max\{n_0, N_1, N_2\}$ ισχύει $\ell - \varepsilon < \alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n < \ell + \varepsilon$

και αυτό αποδεικνύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \ell$

ΑΣΚ: Δ.ο. κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Λύση: Έστω $(\alpha_n)_n$ τ.ω. $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \in \mathbb{R}$. Επιλέγοντας $\varepsilon = 1$ και για κάποιο n_0

έχουμε ότι $\alpha - 1 < \alpha_n < \alpha + 1$ για $n \geq n_0$ αρκετά μεγάλο

Άρα, $|\alpha_n| \leq |\alpha| + 1$, $\forall n \geq n_0$

ενώ $|\alpha_n| \leq \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n_0-1}|\}$

Θέτοντας λοιπόν $M = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n_0-1}|, |\alpha| + 1\}$

ισχύει $|\alpha_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλ. η $(\alpha_n)_n$ είναι φραγμένη.