Κεφ 2 Σειρές πραγματικών αριθμών

§1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

- Ορ: Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Το σύμβολο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι η σειρά με n-οστό όρο τον a_n. Το s_n καλείται n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Η $(s_n)_n$ καλείται ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Ορ (σύγκλιση) Αν η $(s_n)_n$ συγκλίνει σε κάποιο $s \in \mathbb{R}$, τότε γράφουμε $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο s.
  Αν $s_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ ή $s_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, τότε γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ ή $-\infty$ και λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.
  Αν η $(s_n)_n$ δεν συγκλίνει, τότε λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

- Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = t$ και $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε
  $$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu a_n + \lambda \beta_n) = \mu s + \lambda t = \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

- Αν απαλείψουμε ή αλλάξουμε πεπερασμένους όρους μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλισή της.

• <u>Πρόταση</u>: Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

[Προσοχή δεν ισχύει το αντίστροφο.]

• <u>Παρατήρηση</u>: Η $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$ συγκλίνει <u>ANN</u>

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq N_0$ έχουμε $\left|\sum_{K=n+1}^{\infty} a_K\right| < \varepsilon$ ορισμός της σύγκλισης

και <u>ANN</u>

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n > m \geq N_0$ έχουμε $\left|\sum_{K=m+1}^{n} a_K\right| < \varepsilon$ κριτήριο Cauchy

• <u>Παραδείγματα</u>: 1) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Η γεωμετρική σειρά με λόγο x είναι $\sum_{K=0}^{\infty} x^K$. Για κάθε $x \neq 1$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $1 + x^1 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Αν $|x| \geq 1$, τότε $x^K \overset{K\to\infty}{\not\to} 0$ άρα η $\sum_{K=0}^{\infty} x^K$ αποκλίνει

Αν $|x| < 1$, τότε $x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και συνεπώς έχουμε $\sum_{K=0}^{\infty} x^K = \frac{1}{1-x}$.

2) Τηλεσκοπικές σειρές: Μία σειρά $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$ καλείται τηλεσκοπική αν υπάρχει μία ακολουθία $(\beta_K)_K$ τ.ω. $a_K = \beta_K - \beta_{K+1}$, $\forall K \in \mathbb{N}$.

Τότε $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$= (\beta_1 - \beta_2) + (\beta_2 - \beta_3) + \dots + (\beta_n - \beta_{n+1}) = \beta_1 - \beta_{n+1}$$

Άρα η $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$ συγκλίνει ANN η $(\beta_n)_n$ συγκλίνει

π.χ. η σειρά $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K(K+1)}$. Τότε $a_K = \frac{1}{K(K+1)} = \frac{1}{K} - \frac{1}{K+1} = \beta_K - \beta_{K+1}$

και $S_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 - \beta_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$.

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

3) Η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει. Από κριτήριο Cauchy αρκεί ν.δ.ο. $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n > m \geq n_0$ τ.ω. $\left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon$.

Πράγματι, θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$, τότε $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $m = n_0 + 1$ και $n = 2n_0$ και έχουμε $\sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \dots + \frac{1}{2n_0} \geq \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon$.

§2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

- Παρατήρηση: Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ με $\alpha_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(s_n)_n$ είναι αύξουσα. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει ανν η $(s_n)_n$ είναι φραγμένη. Αν η $(s_n)_n$ είναι μη φραγμένη τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.
  Π.χ. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

- Κριτήριο Cauchy για σειρές με φθίνοντες μη αρνητικούς όρους

  Έστω $(\alpha_k)_k$ φθίνουσα ακολουθία με $\alpha_k > 0$ και $\alpha_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει ανν $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \alpha_{2^k}$ συγκλίνει

- Παραδείγματα: 1) Έστω $p > 0$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$. Πράγματι, έχουμε $\alpha_k = \frac{1}{k^p} > 0$ και η $(\alpha_k)_k$ είναι φθίνουσα με $\alpha_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Επιπλέον $\alpha_{2^k} = \frac{1}{(2^k)^p}$ και $2^k \alpha_{2^k} = \frac{2^k}{(2^k)^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \alpha_{2^k}$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$.

Αν $p>1 \Rightarrow \frac{1}{2^{p-1}}<1$ συγκλίνει ενώ αν $p\in(0,1] \Rightarrow \frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$ αποκλίνει

2) Έστω $p>0$. Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ συγκλίνει αν $p>1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $0<p\leq 1$. Πράγματι, επαληθεύουμε τις υποθέσεις του κριτηρίου:

- Η $(\alpha_k)_k = \left(\frac{1}{k(\ln k)^p}\right)_k$ είναι φθίνουσα με θετικούς όρους και συγκλίνει στο 0.
- Έχουμε $2^k \alpha_{2^k} = \frac{2^k}{2^k (k\ln 2)^p} = \frac{1}{k^p (\ln 2)^p}$, επομένως η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \alpha_{2^k}$ συγκλίνει αν $p>1$ και αποκλίνει αν $p\in(0,1]$.

§3 Απόλυτη σύγκλιση

- Ορ: Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απολύτως αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ συγκλίνει
- Πρόταση: Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει
- Παραδείγματα: $\begin{cases} \text{Η } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ συγκλίνει απολύτως} \\ \text{Η } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως} \end{cases}$
- Παρατήρηση: Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ με $\alpha_n \geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε η σειρά συγκλίνει ανν συγκλίνει απολύτως.

§4 Κριτήρια Σύγκρισης

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ σειρές με $\beta_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

1) Αν $\exists M > 0$ τ.ω $|\alpha_k| \leq M \beta_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει απολύτως.

π.χ. Έστω $x \in \mathbb{R}$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

2) Αν $\frac{\alpha_k}{\beta_k} \xrightarrow{k\to\infty} \ell \in \mathbb{R}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει απολύτως

π.χ. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k}{k^4+3k}$ συγκλίνει διότι θέτοντας $\beta_k = \frac{1}{k^2}$ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < +\infty$

και

$$\frac{\frac{k^2+2k}{k^4+3k}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^4+2k^3}{k^4+3k} = \frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{3}{k^3}} \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

§5 Κριτήρια λόγου, ρίζας και Dirichlet

• <u>Θεώρημα</u> (Κριτήριο λόγου) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ με $\alpha_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

α) Αν $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απολύτως

β) Αν $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ αποκλίνει

• <u>Παράδειγμα</u>: Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει διότι $\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Σε επόμενο κεφάλαιο θ.δ.ο:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

• <u>Θεώρημα</u> (Κριτήριο ρίζας): Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$

α) Αν $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|} < 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει απολύτως

β) Αν $\liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|} > 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ αποκλίνει

• <u>Θεώρημα</u> (Κριτήριο Dirichlet): Έστω $(\alpha_k)_k$ και $(\beta_k)_k$ ακολουθίες.
Υποθέτουμε ότι α) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\beta_k > 0$; $(\beta_k)_k$ φθίνουσα και $\beta_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$,
β) Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ είναι φραγμένη.
[Δηλαδή, $\exists M > 0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε $|\alpha_1 + \dots + \alpha_n| \leq M$]
Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ συγκλίνει

• <u>Παρατήρηση</u>: Αν $(\beta_k)_k$ ακολουθία θετικών όρων που φθίνει στο 0, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \beta_k$ συγκλίνει. Π.χ. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει

§ 6 <u>Δυναμοσειρές</u>

• <u>Ορ</u>: Έστω $(\alpha_k)_k$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ καλείται δυναμοσειρά με συντελεστές α_k.

[Για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ μπορεί να συγκλίνει, για κάποιες άλλες όχι]

Αν για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ η $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ συγκλίνει, λέμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει στο x.

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ μία δυναμοσειρά.

α) Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $y \neq 0$ και $|x|<|y|$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο x.

β) Αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο y και $|x|>|y|$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

• <u>Ορ</u>: Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ μία δυναμοσειρά. Ορίζουμε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς ως $R = \sup\{|x| : \text{η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\}$ [μπορεί να είναι και $+\infty$]

Τότε

(i) $\forall x \in (-R, R)$, η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως

(ii) $\forall x \notin [-R, R]$, η δυναμοσειρά αποκλίνει.

[Η δυναμοσειρά μπορεί να συγκλίνει ή να μην συγκλίνει στα σημεία R και $-R$]

• <u>Ορ</u>: Το διάστημα $(-R, R)$ καλείται διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

• <u>Θεώρημα</u>: Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ μία δυναμοσειρά και R η ακτίνα σύγκλισής της.

1) Αν υπάρχει $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\alpha_k|} = \alpha \in [0, +\infty]$, τότε $R = \frac{1}{\alpha}$ (όπου $\frac{1}{0} = +\infty$ και $\frac{1}{\infty} = 0$).

2) Αν $\alpha_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \alpha \in [0, +\infty]$, τότε $R = \frac{1}{\alpha}$.

ΑΣΚ: Ν.δ.ο. αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Λύση: Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, τότε $s_n \xrightarrow{n\to\infty} s$ και $s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} s$.

Άρα $a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

ΑΣΚ: Έστω $(a_k)_k$ μία φθίνουσα ακολουθία με $a_k > 0$ και $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Ν.δ.ο. η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει ΑΝΝ η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει

Λύση: Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$t_n = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n} \leq M$ για μία σταθερά $M > 0$. Θ.δ.ο.

$s_m = a_1 + \dots + a_m \leq M$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Πράγματι έχουμε $2^n \leq m < 2^{n+1}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και

$$\begin{aligned} s_m &= a_1 + (a_2+a_3) + (a_4 + \dots + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n-1}) + (a_{2^n} + \dots + a_m) \\ &\leq a_1 + (a_2+a_3) + (a_4 + \dots + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n-1}) + (a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} \leq M \end{aligned}$$

Αφού $a_k > 0$ και η ακολουθία $(s_m)_m$ είναι άνω φραγμένη, έπεται ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δηλαδή $s_m \leq M$, $\forall m \in \mathbb{N}$ για μία σταθερά $M > 0$. Τότε έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} &\leq 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + \dots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \\ &\leq 2s_{2^n} \leq 2M \Rightarrow \text{η } \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ συγκλίνει} \end{aligned}$$

ΑΣΚ: Ν.δ.ο.

αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Λύση: Θ.δ.ο. ικανοποιείται το κριτήριο Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά

$\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$ συγκλίνει, υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε $N\le m<n \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n}|\alpha_k|<\varepsilon$.

Τότε, για κάθε $N\le m<n$ ισχύει $\left|\sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k\right|\le\sum_{k=m+1}^{n}|\alpha_k|<\varepsilon$. Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy και συγκλίνει.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ με $\alpha_k\neq 0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Ν-δ-ο.

(i) αν $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|=\ell<1$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει απολύτως

(ii) αν $\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|=\ell>1$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ αποκλίνει

<u>Λύση</u> (i) Έστω $x\in(\ell,1)$. Τότε, $\exists N\in\mathbb{N}$ ώστε $k\ge N \Rightarrow \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|\le x$. Δηλαδή $|\alpha_{N+1}|\le x|\alpha_N|$, $|\alpha_{N+2}|\le x|\alpha_{N+1}|\le x^2|\alpha_N|$ και επαγωγικά $\underset{\forall k\ge N}{\underset{\uparrow}{|\alpha_k|\le}} x^{k-N}|\alpha_N|=x^k\frac{|\alpha_N|}{x^N}$

Επειδή η σειρά $\underset{x\in(0,1)}{\underset{\uparrow}{\sum_{k=N}^{\infty}x^k}}$ συγκλίνει, έπεται από το κριτήριο σύγκρισης ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|$ συγκλίνει.

(ii) Αφού $\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|>1$, υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|\ge 1$, $\forall k\ge N$.

Δηλαδή $|\alpha_k|\ge|\alpha_{k-1}|\ge\cdots|\alpha_N|>0$. Τότε $\alpha_k \overset{k\to\infty}{\not\to} 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ αποκλίνει.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$ μία δυναμοσειρά. Ν-δ-ο.

(i) αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο $y\neq 0$ και αν $|x|<|y|$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.

(ii) αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο $y\neq 0$ και $|x|>|y|$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

<u>Λύση</u>: Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k y^k$ συγκλίνει, έχουμε $\alpha_k y^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Άρα $\exists N\in\mathbb{N}$ ώστε

$|\alpha_K y^K| \leq 1$, $\forall K \geq N$. Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < |y|$. Για κάθε $K \geq N$ έχουμε $|\alpha_K x^K| = |\alpha_K y^K| \left|\frac{x}{y}\right|^K \leq \left|\frac{x}{y}\right|^K$ και η γεωμετρική σειρά $\sum_{K=N}^{\infty} \left|\frac{x}{y}\right|^K$ συγκλίνει διότι $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$. Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται το συμπέρασμα.

(ii) Αν η δυναμοσειρά συνέκλινε στο x, από το (i) θα συνέκλινε στο y = Άτοπο!

ΑΣΚ = Έστω $\sum_{K=0}^{\infty} \alpha_K x^K$ μία δυναμοσειρά και R η ακτίνα σύγκλισής της. Ν-δ-ο. αν υπάρχει $\lim_{K\to\infty} \sqrt[K]{|\alpha_K|} = \alpha \in [0, +\infty]$, τότε $R = \frac{1}{\alpha}$.

Λύση = Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας για τη σύγκλιση σειρών. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $\alpha \in (0, +\infty)$. (α) Αν $|x| < \frac{1}{\alpha}$, τότε

$$\lim_{K\to\infty} \sqrt[K]{|\alpha_K x^K|} = |x| \lim_{K\to\infty} \sqrt[K]{|\alpha_K|} = |x|\alpha < 1 \underset{\text{κριτήριο ρίζας}}{\Rightarrow} \text{η } \sum_{K=0}^{\infty} \alpha_K x^K \text{ συγκλίνει απολύτως}$$

(β) Αν $|x| > \frac{1}{\alpha}$, τότε $\lim_{K\to\infty} \sqrt[K]{|\alpha_K x^K|} = |x|\alpha > 1 \Rightarrow$ η $\sum_{K=0}^{\infty} \alpha_K x^K$ αποκλίνει

Αυτό αποδεικνύει ότι $R = \frac{1}{\alpha}$.

ΑΣΚ = Προσδιορίστε τα σημεία $x \in \mathbb{R}$ όπου οι σειρές α) $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{x^K}{K}$ και β) $\sum_{K=0}^{\infty} \frac{x^K}{K!}$ συγκλίνουν

α) Έχουμε $\lim_{K\to\infty} \left|\frac{K}{K+1}\right| = 1$, άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1$

Για $x = 1$, η σειρά $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K}$ αποκλίνει, ενώ για $x = -1$ η σειρά $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K}$ συγκλίνει

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in [-1, 1)$.

β) Έχουμε $\lim_{K\to\infty} \left|\frac{K!}{(K+1)!}\right| = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K+1} = 0$, άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \infty$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.