ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR (Πχ από Θεωρία)

Πχ (i) σελ 276

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1-x}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και έχουμε ότι:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots\ ,\ \forall\ |x|<1$$

γιατί

Έστω $f(x)=\frac{1}{1-x}$

Τότε $f'(x)=\frac{1'(1-x)-1(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{-1(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$

$$f''(x)=\frac{1'(1-x)^2-1\cdot[(1-x)^2]'}{(1-x)^4}=\frac{-1\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=\frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x)=\frac{2'(1-x)^3-2\cdot[(1-x)^3]'}{(1-x)^6}=\frac{-2\cdot 3(1-x)^2\cdot(-1)}{(1-x)^6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}$$

άρα $$f^{(n)}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(1-x)^{n+1}}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

οπότε $f(0)=1$, $f'(0)=1$, $\frac{f''(0)}{2!}=\frac{2!}{2!}=1$, $\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{3!}{3!}=1,\dots$

δηλ. το πολυώνυμο Taylor είναι

$$P(0)=1+1\cdot(x-0)+1(x-0)^2+\dots+1(x-0)^n$$
$$=1+x+x^2+\dots+x^n=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$T_n(x)=f(x)$

Θ.δ.ο. $T_{n,f,0}(x)=T_n(x)=1+x+\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\lim \frac{f(x)-T_n(x)}{\dots}=$

Θεώρημα Taylor - Στοιχεία από τη Θεωρία

Ορισμός 7.1.1: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in[a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι η φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Το πολυώνυμο Taylor τάξης η της f στο x_0 είναι

$$T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

δηλ.

$$T_{n,f,x_0}(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Το υπόλοιπο Taylor τάξης η της f στο x_0 είναι: η συνάρτηση $R_{n,f,x_0}:[a,b]\to\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$R_{n,f,x_0}(x)=f(x)-T_{n,f,x_0}(x).$$

Όταν $x_0=0$ έχουμε αντίστοιχα πολυώνυμο και υπόλοιπο MacLaurin

---

Θεώρημα 7.1.6 σελ. 276: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in[a,b]$ Υποθέτουμε ότι η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και η φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε το πολυώνυμο Taylor τάξης η της f στο x_0 είναι το μοναδικό πολυώνυμο T βαθμού το πολύ ίσου με η το οποίο ικανοποιεί την

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n}=0. \quad (*)$$

Σχόλιο
Το Θεώρημα αυτό μας δίνει έναν έμμεσο τρόπο για να βρίσκουμε το πολυώνυμο Taylor τάξης η μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0

Θεώρημα 7.1.8 (Θεώρημα Taylor)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση $n+1$ φορές παραγ. στο $[a,b]$ και έστω $x_0\in[a,b]$. Τότε, $\forall x\in[a,b]$

(i) Μορφή Cauchy υπολοίπου Taylor

$$\exists \xi\in(x_0,x):\quad R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot(x-\xi)^n(x-x_0).$$

(ii) Μορφή Lagrange υπολοίπου Taylor

$$\exists \xi\in(x_0,x):\quad R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(iii) Ολοκληρωτική μορφή υπολοίπου Taylor:

Αν η $f^{(n+1)}$ ολοκληρώσιμη τότε $R_{n,f,x_0}(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$

Παρατήρηση (Finney σελ 653)

Αν $R_n(x)\to 0$ καθώς $n\to\infty$, $\forall x\in I$, λέμε ότι η σειρά Taylor που παράγεται από τη f στο $x=x_0$ συγκλίνει στην f στο I, και γράφουμε:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR -Ασκήσεις-

1). Έστω $p(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ πολυώνυμο βαθμού n και έστω $a\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $b_0, b_1, \dots, b_n \in\mathbb{R}$ ώστε

$$p(x)=b_0+b_1(x-a)+\dots+b_n(x-a)^n, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Δείξτε ότι: $b_k=\dfrac{p^{(k)}(a)}{k!}$, $k=0,1,\dots,n$.

Λύση

Με επαγωγή.

Θ.δ.ο. ισχύει για $n=1$.

Είναι: $p(x)=a_0+a_1x=a_0+a_1\cdot a-a_1a+a_1x$

$$=\underbrace{a_0+a_1a}+a_1(x-a)$$

$$=b_0+b_1(x-a).$$

όπου $b_0=a_0+a_1a=p(a)$, $b_1=a_1$ το οποίο ισχύει

γιατί $b_0=\dfrac{p^{(0)}(a)}{0!}=a_0+a_1a$, $b_1=\dfrac{p'(a)}{1!}=\dfrac{a_1}{1}=a_1$

Δέχομαι ότι ισχύει για $n-1$

Θδο ισχύει για n.

Είναι: $p(x)-p(a)=(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)-(a_0+a_1a+\dots+a_na^n)$

$$=a_1(x-a)+a_2(x^2-a^2)+\dots+a_n(x^n-a^n)$$

$$=(x-a)\left[a_1+a_2(x-a)+\dots+a_n(x^{n-1}+\dots+a^{n-1})\right]$$

$$=(x-a)\,p_1(x), \text{ όπου } p_1(x) \text{ πολυώνυμο βαθμού } n-1$$

→

Το $p_1(x)$ λόγω της επαγωγικής υπόθεσης μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$p_1(x) = b_1 + b_2(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^{n-1} \qquad (1)$$

οπότε

$$p(x) = p(a) + (x-a)p_1(x)$$

$$\overset{(1)}{=} b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n, \quad \text{με } b_0 = p(a)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε ότι

$$p^{(k)}(x) = \sum_{s=k}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)b_s(x-a)^{s-k},$$

οπότε $p^{(k)}(a) = [k(k-1)\cdots 1]b_k = k!\,b_k.$

2) Γράψτε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα στη μορφή

$$b_0 + b_1(x-3) + \dots + b_n(x-3)^n$$

α) $P_1(x) = x^2 - 4x - 9$. β) $P_2(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$ γ) $P_3(x) = x^5$.

Λύση

α) Έστω $P_1(x) = x^2 - 4x - 9$ $\qquad P_1(3) = 3^2 - 4\cdot 3 - 9 = -12$

Τότε $P_1'(x) = 2x - 4$, $P_1''(x) = 2$, $P_1'''(x) = 0$, οπότε

$P_1'(3) = 2\cdot 3 - 4 = 2$

$P_1''(3) = 2 \Rightarrow \frac{P_1''(3)}{2!} = 1$

$P_1'''(3) = 0 \Rightarrow \frac{P_1'''(3)}{3!} = 0$

δηλ. το πολυώνυμο Taylor στο $x_0 = 3$ είναι:

$$P_1(3) = -12 + 2(x-3) + 1\cdot(x-3)^2 + 0\cdot(x-3)^3 + \dots + 0$$

$$= -12 + 2(x-3) + (x-3)^2$$

Επαλήθευση: Αν κάνω τις πράξεις, πράγματι παίρνω ότι

$$-12 + 2(x-3) + (x-3)^2 = x^2 - 4x - 9.$$

→

β) Έστω $P_2(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$ οπότε $P_2(3) = 3^4 - 12\cdot 3^3 + 44\cdot 3^2 +$
$+ 2\cdot 3 + 1 = 160.$

Τότε $P_2'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 88x + 2$ οπότε $P_2'(3) = 50$

$P_2''(x) = 12x^2 - 72x + 88$ οπότε $\frac{P_2''(3)}{2!} = \frac{-20}{2} = -10$

$P_2'''(x) = 24x - 72$ οπότε $\frac{P_2'''(3)}{3!} = \frac{0}{3!} = 0$

$P_2^{(4)}(x) = 24$ οπότε $\frac{P_2^{(4)}(3)}{4!} = \frac{24}{4!} = \frac{24}{24} = 1$

$P_2^{(5)}(x) = 0.$ οπότε $\frac{P_2^{(5)}(3)}{5!} = 0.$

δηλ. το πολυώνυμο Taylor στο $x_0 = 3$ είναι

$$P_2(3) = 160 + 50(x-3) - 10(x-3)^2 + 0(x-3)^3 + 1(x-3)^4$$

$$= 160 + 50(x-3) - 10(x-3)^2 + (x-3)^4$$

Επαλήθευση: Πράγματι αν κάνω τις πράξεις ισχύει ότι

$$160 + 50(x-3) - 10(x-3)^2 + (x-3)^4 = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$$

γ) $P_3(x) = x^5$.   οπότε $P_3(3) = 243$

$P_3'(x) = 5x^4$ $P_3'(3) = 405$

$P_3''(x) = 20x^3$ $P_3''(3) = 540$

$P_3'''(x) = 60x^2$ $P_3'''(3) = 540$

$P_3^{(4)}(x) = 120x$ $P_3^{(4)}(3) = 360$.

$P_3^{(5)}(x) = 120$ $P_3^{(5)}(3) = 120$

$P_3^{(6)}(x) = 0$. $P_3^{(6)}(3) = 0$.

δηλ. το πολυώνυμο Taylor στο $x_0 = 3$ είναι

$$P_3(3) = 243 + 405(x-3) + \frac{540}{2!}(x-3)^2 + \frac{540}{3!}(x-3)^3 + \frac{360}{4!}(x-3)^4 + \frac{120}{5!}(x-3)^5$$

$$= 243 + 405(x-3) + 270(x-3)^2 + 90(x-3)^3 + 15(x-3)^4 + (x-3)^5$$

3) Για καθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ που υποδεικνύεται.

α) $(T_{3,f,0})$: $f(x) = \exp(\sin x)$

β) $(T_{2n+1,f,0})$: $f(x) = (1+x^2)^{-1}$

γ) $(T_{n,f,0})$: $f(x) = (1+x)^{-1}$

δ) $(T_{4,f,0})$: $f(x) = x^5 + x^3 + x$

ε) $(T_{6,f,0})$: $f(x) = x^5 + x^3 + x$

στ) $(T_{5,f,1})$: $f(x) = x^5 + x^3 + x$

Λύση

α) Από (7.2.1.) εχουμε οτι όταν $f(x) = e^x$ τοτε

$$T_n(x) = T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (1)$$

Τωρα εχουμε την $f(x) = e^{\sin x}$ και $n=3$ οποτε στην (1) αντικαθιστουμε όπου $n=3$ και x το $\sin x$ και εχουμε

$$T_{3,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\sin^k x}{k!} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!}$$

β) Από πχ2 σελ 276 εχουμε για την $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ότι

$$T_{2n+1,f,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1-(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

γ) $(T_{n,f,0})$: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

Είναι $f'(x) = \dfrac{1'(1+x) - 1(1+x)'}{(1+x)^2} = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$

$$f''(x) = \frac{(-1)'(1+x)^2 - (-1)\cdot 2(1+x)\cdot(1+x)'}{(1+x)^4} = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{2'(1+x)^3 - 2[(1+x)^3]'}{(1+x)^6} = \frac{-2\cdot 3(1+x)^2(1+x)'}{(1+x)^6} = \frac{-6(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{\overset{1\cdot 2\cdot 3}{-6}}{(1+x)^4}$$

άρα

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2}{2!} = 1,\ \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{-6}{6} = -1, \dots$$

δηλ. το πολυώνυμο Taylor θα είναι:

$$T_{n,f,0}(x) = 1 + (-1)(x-0) + 1(x-0)^2 + (-1)(x-0)^3 + \dots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

δ) $f(x) = x^5 + x^3 + x$ Να βρεθεί $T_{4,f,0}$

Είναι: $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

$f''(x) = 20x^3 + 6x$

$f'''(x) = 60x^2 + 6$

$f^{(4)}(x) = 120x$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$\dfrac{f''(0)}{2!} = 0$

$\dfrac{f'''(0)}{3!} = \dfrac{6}{6} = 1$

$\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0$

δηλ. το πολυώνυμο Taylor στο $x_0 = 0$ είναι

$$T_{4,f,0} = 0 + 1(x-0) + 0(x-0)^2 + 1(x-0)^3 + 0(x-0)^4 = x + x^3.$$

ε). $f(x) = x^5 + x^3 + x$ να βρεθει $T_{6,f,0}$

οπότε συνεχίζω από δ) και έχω

$f^{(5)}(x) = 120$ άρα $\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{120}{120} = 1$

$f^{(6)}(x) = 0$ $\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = 0.$

δηλ. το πολυώνυμο Taylor στο $x_0 = 0$ είναι:

$$T_{6,f,0} = 0 + 1(x-0) + 0(x-0)^2 + 1(x-0)^3 + 0(x-0)^4 + 1(x-0)^5 + 0(x-0)^6$$

$$= x + x^3 + x^5.$$

στ) $f(x) = x^5 + x^3 + x$ να βρεθει $T_{5,f,1}$

οπότε από τις παραγώγους για δ), ε) έχω:

$f(1) = 3$

$f'(1) = 9$

$\frac{f''(1)}{2!} = \frac{26}{2!} = 13$

$\frac{f'''(1)}{3!} = \frac{66}{6} = 11$

$\frac{f^{(4)}(1)}{4!} = \frac{120}{24} = 5$

$\frac{f^{(5)}(1)}{5!} = \frac{120}{120} = 1$

δηλ. το πολυώνυμο Taylor στο $x_0 = 1$ είναι το

$$T_{5,f,1} = 3 + 9(x-1) + 13(x-1)^2 + 11(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + 1(x-1)^5$$

---

4) Έστω $n \geq 1$ και $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (1), \quad g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (2)$$

και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}$$

Λύση

Είναι: $T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$

$$= \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (3)$$

Όμοια, λόγω της (2) είναι:

$$T_{n,g,x_0}(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (4).$$

Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$, οπότε από την Πρόταση 7.1.4 σελ. 274 έχουμε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad (5) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,g,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad (6)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = T_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x) \quad (7)$$

Όμοια, $g(x) = T_{n,g,x_0}(x) + R_{n,g,x_0}(x) \quad (8)$

Άρα, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{(7)(8)}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{T_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x)}{T_{n,g,x_0}(x) + R_{n,g,x_0}(x)} =$

$$\overset{(3)(4)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n,f,x_0}(x)}{\dfrac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n,g,x_0}(x)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)^n}\left[\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \dfrac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}\right]}{\cancel{(x-x_0)^n}\left[\dfrac{g^{(n)}(x_0)}{n!} + \dfrac{R_{n,g,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}\right]}$$

$$\overset{(5)(6)}{=} \frac{\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + 0}{\dfrac{g^{(n)}(x_0)}{n!} + 0} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

6) Αν $f(x)=\ln x$, $x>0$, βρείτε την πλησιέστερη ευθεία και την πλησιέστερη παραβολή στο γράφημα της f στο σημείο $(e,1)$

Λύση

Ζητάμε τα $T_{1,f,e}(x) \rightsquigarrow$ πλησιέστερη ευθεία

και $T_{2,f,e}(x) \rightsquigarrow$ πλησιέστερη παραβολή

Αφού $f(e)=1$ (έχουμε το σημείο $(e,1)$ και $f(x)=\ln x$)

είναι $f'(e)=1/e$ $\qquad f'(x)=1/x$

$f''(e)=-1/e^2$ $\qquad f''(x)=-1/x^2$

Άρα, τα πολυώνυμα Taylor που ζητάμε είναι τα:

$$T_{1,f,e}(x)=1+\frac{1}{e}(x-e)=1+\frac{x-e}{e}=\frac{e+x-e}{e}=\frac{x}{e}$$

και $$T_{2,f,e}(x)=1+\frac{1}{e}(x-e)-\frac{1}{e^2}(x-e)^2=\frac{x}{e}-\frac{1}{e^2}(x-e)^2$$