$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \quad \text{και} \quad f(x_n) \not\xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$$

ή να βρούμε μία ακολουθία $(x_n)_n$ στο A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ και η $(f(x_n))_n$ να μη συγκλίνει

ή να βρούμε $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ στο A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ και $y_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ και οι $(f(x_n))_n$, $(f(y_n))_n$ να συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

Συνέχεια και πράξεις και σύνθεση

- Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $\begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ x_0 \in A \end{cases}$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο x_0. Τότε οι $f+g$, $f \cdot g$, $f-g$ και tf είναι συνεχείς στο x_0. Επιπλέον αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, η $\frac{f}{g}$ συνεχής στο x_0.

- Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά, $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Έστω επίσης $x_0 \in A$. Αν η f συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η $g \circ f$ συνεχής στο x_0.

Συνέχεια γνωστών συναρτήσεων

- Οι πολυωνυμικές / ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς.
- Οι $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\cot$ είναι συνεχείς.
- Αν $\alpha > 0$, η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$ είναι συνεχής.
- Αν $\beta \in \mathbb{R}$, η $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $g(x) = x^\beta$ είναι συνεχής.

Τοπική συμπεριφορά συνεχών συναρτήσεων

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $x_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει $\rho > 0$ τ.ω.

- Αν υπάρχει $\rho > 0$ τ.ω. $f|_{A \cap (x_0-\rho, x_0+\rho)}$ συνεχής στο x_0, τότε η f συνεχής στο x_0.

- Έστω $B \subseteq A$ με $x_0 \in B$. Αν η f συνεχής στο x_0, τότε $f|_B$ συνεχής στο x_0.
Το αντίστροφο δεν ισχύει. Π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
Η f ασυνεχής στο 0 αλλά αν $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ η $f|_B$ συνεχής στο 0.

- Αν η f συνεχής στο x_0, τότε $\exists \delta > 0$ και $M > 0$ τ.ω.
$\forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, έχουμε $|f(x)| \leq M$
δηλαδή $\exists \delta > 0$ τ.ω. η $f|_{A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$ φραγμένη.

- Αν f συνεχής στο x_0 με $f(x_0) > 0$, τότε $\exists \delta > 0$ τ.ω. $f(x) > 0$, $\forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
——— $f(x_0) < 0$, ——— $f(x) < 0$, ———.

§2 Βασικά Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

- <u>Θεώρημα</u>: Αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f φραγμένη.

- <u>Θεώρημα</u> (Μέγιστης / Ελάχιστης τιμής). Αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής
τότε $\exists x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τ.ω. $\forall x \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $\underbrace{f(x_1)}_{\text{ελάχιστο της } f} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_2)}_{\text{μέγιστο της } f}$

- <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε
$\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f(\xi) = 0$

- <u>Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής</u>: Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε για κάθε ρ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει $x \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f(x) = \rho$.
[δηλ $f(\alpha) < \rho < f(\beta)$ ή $f(\alpha) > \rho > f(\beta)$]

• <u>Ορ</u>: Ένα $I \subseteq \mathbb{R}$ καλείται διάστημα αν $\forall x, y \in I$ με $x < y$ έχουμε $[x, y] \subseteq I$.

• <u>Θεώρημα</u>: Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε $f(I)$ είναι διάστημα.

• <u>Πόρισμα</u>: Έστω $f = [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε, $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ με $m \leq M$ τ.ω. $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$

• <u>Συνέπειες Βασικών Θεωρημάτων</u>

(i) Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

(ii) Θεώρημα σταθερού σημείου: Έστω $\alpha < \beta$ στο $\mathbb{R}$ και $f = [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ συνεχής. Τότε, $\exists\, x_0 \in [\alpha, \beta]$ τ.ω. $f(x_0) = x_0$.

§3 <u>Σημεία συσσώρευσης και μεμονωμένα σημεία</u>

• <u>Ορ</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και $x_0 \in \mathbb{R}$. Το x_0 καλείται σημείο συσσώρευσης του A αν $\forall \delta > 0$, $\exists\, x \in A$ τ.ω. $0 < |x - x_0| < \delta$

[Ισοδύναμα: $\forall \delta > 0$, $\exists\, x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $x \neq x_0$

• <u>Παρατήρηση</u>: Για να είναι το x_0 σημείο συσσώρευσης (= σ.σ.) του A, δεν είναι απαραίτητο να ανήκει στο A.

• <u>Παραδείγματα</u>: i) Έστω $A = (1, 2] \cup \{3\}$. Τότε, κάθε $x_0 \in [1, 2]$ είναι σ.σ. του A. Το 3 όμως δεν είναι σ.σ του A.

ii) Έστω $A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$. Το 0 είναι το μοναδικό σ.σ. του A.

iii) Έστω $A = \mathbb{Z}$. Δεν έχει κανένα σ.σ.

• <u>Ορ</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Το x_0 καλείται μεμονωμένο σημείο του A αν $\exists \delta > 0$ τ.ω. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A = \{x_0\}$.

• <u>Παρατήρηση</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Τότε

είτε → το x_0 μεμονωμένο σημείο του A

είτε → το x_0 σ.σ. του A

(ένα από τα δύο).

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε τις εξής ισοδυναμίες:

Το x_0 σ.σ. του A $\iff$ $\forall \delta > 0$ το $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ είναι άπειρο

$\iff$ Υπάρχει $(x_n)_n$ διαφορετικών ανά δύο και διαφορετικών του x_0 στοιχείων του A τ.ω. $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$.

<u>ΑΣΚ</u>: Δ.ο. η συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

επειδή $|\sin x| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|$$

Συνεπώς $|\sin x - \sin x_0| \leq |x-x_0|$ και

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$ τ.ω. $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| \leq |x-x_0| < \delta = \varepsilon$

δηλαδή η συνάρτηση $\sin$ είναι συνεχής στο x_0.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$. Δ.ο. αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $f(x) > 0$, $\forall x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

<u>Λύση</u>: Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ στον ορισμό της συνέχειας. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$

$$\Rightarrow 0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}$$

<u>ΑΣΚ</u>: Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, δ.ο. αν $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και η $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η εικόνα $f(I)$ της f είναι διάστημα.

<u>Λύση</u>: Έστω $u, v \in f(I)$ με $u < v$ και έστω $u < w < v$. Υπάρχουν $x, y \in I$ ώστε $f(x) = u$ και $f(y) = v$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x < y$. Αφού το I είναι διάστημα, έχουμε $[x,y] \subseteq I$ και η $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[x,y]$.

Αφού $f(x) = u < w < v = f(y)$, υπάρχει $z \in (x,y)$ ώστε $f(z) = w$.
Αφού $z \in I$, συμπεραίνουμε ότι $w = f(z) \in f(I)$ και από τον ορισμό του διαστήματος έπεται ότι το $f(I)$ είναι διάστημα.

<u>ΑΣΚ</u>: Δ.ο. αν η $f : [\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$ είναι συνεχής, τότε $\exists x_0 \in [\alpha,\beta]$ τ.ω. $f(x_0) = x_0$.

<u>Λύση</u>: Αν $f(\alpha) = \alpha$ ή $f(\beta) = \beta$ έχουμε το ζητούμενο για $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f(\alpha) > \alpha$ και $f(\beta) < \beta$. Έπειτα ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $h : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - x$. Έχουμε $h(\alpha) > 0$ ενώ $h(\beta) < 0$, άρα $\exists x_0 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \neq 0 \\ 2 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$,

$g(x) = \lfloor x \rfloor$ ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$, και $h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Προσδιορίστε το είδος ασυνέχειας των f, g, h στο $x = 0$.

<u>Λύση</u>: Η f έχει άρσιμη ασυνέχεια στο $x = 0$ διότι $\lim_{x \to 0} f(x) = l = 0$ ενώ $f(0) = 2 \neq l$. Αν αλλάξουμε την τιμή της f στο 0 και θέσουμε $f(0) = 0$, τότε η f θα είναι συνεχής στο $x = 0$.
Η g έχει ασυνέχεια α' είδους στο $x = 0$, διότι $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$ ενώ $\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$ δηλ. τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά.
Η h έχει ασυνέχεια β' είδους στο $x = 0$, διότι τα πλευρικά όριά της στο $x = 0$ δεν υπάρχουν.

ΑΣΚ: Δ.ο. κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Λύση: Έστω $P(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ όπου $a_m \neq 0$ και m περιττός.

Γράφουμε $P(x) = a_m x^m (1 + \Delta(x))$ όπου $\Delta(x) = \dfrac{a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{a_m x^m}$

και παρατηρούμε ότι αν $|x| > 2\dfrac{|a_{m-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|}{|a_m|} + 1$, τότε

$|x|^k \leq |x|^{m-1}$ για κάθε $k = 0, 1, \dots m-1$

και συνεπώς
$$|\Delta(x)| \leq \frac{|a_{m-1}||x|^{m-1} + \dots + |a_1||x| + |a_0|}{|a_m||x|^m} \leq \frac{|a_{m-1}||x|^{m-1} + \dots + |a_1||x|^{m-1} + |a_0||x|^{m-1}}{|a_m||x|^m}$$
$$\leq \frac{|a_{m-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|}{|a_m||x|} < \frac{1}{2}$$

Άρα, υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$, τότε $1 + \Delta(x) \geq 1 - |\Delta(x)| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

Δηλαδή, αν $|x| \geq M$ τότε οι $P(x)$ και $a_m x^m$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Έπεται ότι ο $P(-M)P(M)$ είναι ομόσημος με τον $a_m^2 (-M)^m (M)^m$ δηλαδή αρνητικός. Από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in (-M, M)$ ώστε $P(\xi) = 0$.