ΣΕΙΡΕΣ

eclass.

Γεωμετρική Σειρά: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{k+1}}{1-x}$ (1)

Αν $|x| \geq 1$ τότε η (1) αποκλίνει

Αν $|x| < 1$ τότε η (1) συγκλίνει και $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$

(γιατί $x^{k+1} \to 0$)

Θεώρημα 2.1.6. (Κριτήριο Cauchy)

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν-ν ισχύει το εξής: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: αν $N \leq m < n$ τότε $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$

Άσκηση: Ν.δ.ο. η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει

Λύση: Έστω $S_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ Τότε

$$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n \cdot 1}{2n} = \frac{1}{2}$$ δηλ. $S_{2n} - S_n \geq 1/2$ (1)

Σύμφωνα με το κριτήριο Cauchy, αν η αρμονική σειρά συγκλίνει τότε για $\varepsilon = 1/4$ πρέπει να υπάρχει $N \in \mathbb{N}$: αν $N \leq m < n$ τότε $|a_{m+1} + \cdots + a_n| < 1/4$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $1/2 \leq S_{2n} - S_n < 1/4$ Άτοπο. Άρα η αρμονική σειρά αποκλίνει

Ορισμός: Μια ακολουθία (a_n) λέγεται φραγμένη, αν μπορούμε να βρούμε $M>0$: $|a_n| \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Πχ $a_n=(-1)^n$ φραγμένη γιατί $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι $|a_n| < 2 = M$.

Άσκηση: Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Σωστό ή λάθος?

Λύση

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $a_k = (-1)^{k-1}$, τότε έχουμε $s_n = 1$, αν ο n περιττός και $s_n = 0$, αν ο n είναι άρτιος

Πράγματι: $S_1 = a_1 = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1$

$$S_2 = a_1 + a_2 = (-1)^{1-1} + (-1)^{2-1} = 1 + (-1) = 0$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + (-1)^{3-1} = 1$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + (-1)^{4-1} = 1 + (-1) = 0$$

Δηλ. η ακολουθία $s_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη

Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ αποκλίνει, γιατί $a_k \not\to 0$ (αφού παίρνουμε δύο υπακολουθίες (άρτιες-περιττές) με διαφορετικά όρια

3. Αν $|a_k| \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Απ: $\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$

Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε $|a_k| = \frac{1}{k} \to 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$, δηλ. η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ δεν συγκλίνει απολύτως.

---

4. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Απ: $\boxed{\text{ΣΩΣΤΟ}}$

βλ. Πρόταση 2.3.2. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αποδείξαμε στη θεωρία ότι αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει, οπότε Σωστό.

---

5. Αν $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Απ: $\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$

Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} < 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει

αφού $\frac{1}{k} > 0 \Rightarrow k > 0$ άρα $0 < k < k+1 \overset{:k+1}{\Longrightarrow} 0 < \frac{k}{k+1} < 1$

---

6. Αν $a_k > 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

Απ: $\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$

Έστω $a_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και $\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} =$

$= \lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = 1$

(βλ. πχ. σελ 169, 172)

Άσκηση

Αν $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει. Σωστό ή Λάθος?

Λύση

Έστω η $a_k = 1/k^2 > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ συγκλίνει.

Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει. Άρα ΛΑΘΟΣ

Άσκηση Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει

Σ ή Λ?

Απάντηση

Πχ. Έστω $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (1).

Σύμφωνα με το κριτήριο Leibniz έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ συγκλίνει αν (α) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$, $n \geq 1$ (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Έχουμε λοιπόν από την (1) ότι

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} < 1 \Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n|$$

γιατί $0 < \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow 0 < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} < 1$

Άρα αφού $a_{n+1} < a_n$ έχουμε ότι η a_n είναι φθίνουσα

Ισχύει επίσης ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$

Άρα από το κριτήριο Leibnitz συμπεραίνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ με $\alpha_k = (-1)^k/\sqrt{k}$ συγκλίνει

Όμως $\alpha_k^2 = \frac{(-1)^{2k}}{k} = \frac{1}{k}$ και γνωρίζουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει

Άρα $\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$

Θεώρημα 2.3.3 (Κριτήριο σύγκρισης)

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου $b_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$: $|a_k| \leq M \cdot b_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει. Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 2.3.4 (Οριακό κριτήριο σύγκρισης)

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου $b_k > 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$

Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R}$$

και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει $\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty\right)$. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 2.3.5 (Ισοδύναμη Συμπεριφορά)

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, όπου $a_k, b_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0$$

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει αν-ν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Παραδειγμα: (Οριακό Κριτηριο Συγκρισης)

Εξετάσετε τη συγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$

Αποδειξη

Παρατηρουμε ότι αν $a_k = \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ και $b_k = \frac{1}{k^3}$, τοτε

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{k+1}{k^4+k^2+3}}{\frac{1}{k^3}} = \frac{k^4+k^3}{k^4+k^2+3} = \frac{k^4(1+1/k)}{k^4(1+1/k^2+3/k^4)} \to 1$$

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^3$ συγκλινει, συμπεραινουμε από το οριακό κριτηριο συγκρισης ότι και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ συγκλινει

Παραδειγμα: (Ισοδυναμη Συμπεριφορά)

Εξεταστε τη συγκλιση της σειρας $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$

Αποδ: Θεωρουμε τις ακολουθιες $b_k = \frac{k+1}{k^2+2}$ και $a_k = 1/k$.

Τοτε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^2+2}{k^2+k} \to 1 > 0$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$ έχει την ιδια συμπεριφορά με την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, δηλ.

αποκλινει

Απ: $\boxed{\text{Σωστό}}$

Από κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς (Θ. 2.3.5) θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ όπου $a_k, b_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$

Τότε $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k^2}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k^2}{a_k} = \lim_{k\to\infty} a_k = \ell$ αφού από την υπόθεσή μας έχουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Αφού λοιπόν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ (*)

(*) Λύνεται και με το κριτήριο οριακής σύγκλισης (Τετράδιο κόκκινος σελιδοδείκτης) (H/W)

13) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ συγκλίνει.

Απ: $\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$

α' τρόπος

Θέτουμε $a_k = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$

Τότε, $a_k > 0$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)(2k+2)]/k!}{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)]/(k+1)!} = \frac{2k+2}{k+1} = 2 \to 2 > 1$

τότε $a_k \to +\infty$ κριτήριο λόγου

Άρα, η σειρά αποκλίνει

β' τρόπος

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!} = \frac{(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdots(2k)}{k!} = \frac{2^k\, k!}{k!} = 2^k \not\to 0$$

Άρα η σειρά αποκλίνει

14) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ συγκλίνει αν-ν $p<-1$.

Απ: $\boxed{\text{ΣΩΣΤΟ}}$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{k\to\infty} \frac{k(1+k^2)^p}{k^{2p+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1+k^2)^p}{k^{2p}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1+k^2}{k^2}\right)^p =$

$= \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)^p = 1 > 0$

Θεωρούμε τις $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k>0$ $\forall k\in\mathbb{N}$
Έστω $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in \mathbb{R}$ @ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει. Τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως

Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης (Θ. 2.3.4) έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ συγκλίνει αν-ν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-(2p+1)}}$ (*) συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει αν-ν $-(2p+1)>1 \iff -2p-1>1 \iff -2p>2 \iff \boxed{p<-1}$

(*) λόγω του ότι η αρμονική $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει για $p \geq 2$ @ αποκλίνει για $p\leq 1$

Β΄ ΟΜΑΔΑ

Προαπαιτούμενη για την (16β)

---

(15) Δείξτε ότι αν $\lim_{k\to\infty} b_k = b$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_k - b$

Απ:

Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς είναι

$S_n = (b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\dots+(b_n-b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$

Αφού $\lim_{k\to+\infty} b_k = b$ θα έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} S_n = b_1 - b$

Άρα, $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

Β΄ ΟΜΑΔΑ

16) Δείξτε ότι

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ (β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \frac{3}{2}$ (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$

Απ:

(α) Είναι: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{a}{2k-1} + \frac{\beta}{2k+1}$

$$= \frac{a(2k+1)+\beta(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2ak+a+2\beta k-\beta}{(2k-1)(2k+1)}$$

Για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει

$$1 = 1+0k = (\alpha-\beta)+2(\alpha+\beta)k \Leftrightarrow \begin{cases} a-\beta=1 \Rightarrow -2\beta=1 \Rightarrow \boxed{\beta=-1/2} \\ 2(a+\beta)=0 \Leftrightarrow a=-\beta \Rightarrow \boxed{a=1/2} \end{cases}$$

Άρα, $a_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right] = \frac{1}{2}(b_k - b_{k+1})$ δηλ. με $b_k = 1/2k-1$

η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι μια τηλεσκοπική σειρά, επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν-ν η ακολουθία (b_k) συγκλίνει

Έχουμε λοιπόν ότι: $S_n = \frac{1}{2}[a_1 + a_2 + \dots + a_n] =$

$= \frac{1}{2}[(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\dots+(b_n-b_{n+1})] =$

$\frac{1}{2}\left[\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right] \to \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$. Άρα, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$

(β) Γνωρίζουμε ότι αν $0<x<1$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \overset{(*)}{=} x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} \quad (1)$$

(*) Βγάζω κοινό παράγοντα το x, δηλ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x^1+x^2+\dots x^{\infty} = x(x^0+x^1+\dots+x^{\infty+1}) = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Επομένως έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{6}\right)^k+\left(\frac{3}{6}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^k+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \overset{(1)}{=} \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$$

(γ). $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) \overset{(15)}{=} b_1 - b = \frac{1}{\sqrt{1}} - 0 = 1$$

όπου $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ οπότε $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$ δηλ. $b=0$.

→ Θεωρ. 2.3.6 και Θεώρ. 2.3.7.

(19) Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου και ρίζας στις ακόλουθες σειρές.

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ (β) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

(δ) $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$ (ε) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα 2 κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

Λύση

(α) Κριτήριο λόγου →

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μη μηδενικούς όρους.
α) Αν $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως
β) Αν $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

$$\left|\frac{a^{k+1}}{a^k}\right| = \frac{(k+1)^{k+1} |x|^{k+1}}{k^k \cdot |x|^k} \overset{x \neq 0}{=} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \cdot (k+1) \cdot |x| =$$

$$= \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot (k+1) \cdot |x| \rightarrow e \cdot \infty \cdot |x| = \infty.$$

Άρα για $x \neq 0$, η σειρά αποκλίνει.

Αν $x=0$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^k 0^k = 0$, δηλ. συγκλίνει

Κριτήριο ρίζας →

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά πραγματικών αριθμών
(α) Αν $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει απολύτως
(β) αν $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow$ η σειρά αποκλίνει

$$\sqrt[k]{|k^k x^k|} = \sqrt[k]{k^k \cdot |x|^k} = k \cdot |x| \longrightarrow +\infty, \text{ αν } x \neq 0$$

Άρα η σειρά αποκλίνει

(β) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ α' τρόπος

Κριτήριο Λόγου.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \left|\frac{x^{k+1}\cdot k!}{x^k\cdot(k+1)!}\right| = \frac{|x|}{k+1} \to 0 < 1$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Η σειρά συγκλίνει για $\forall x\in\mathbb{R}$.

β' τρόπος. Κριτήριο ρίζας.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k!}} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k!}} \to 0$$ άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$, $x\neq 0$.

Κριτήριο Λόγου

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}}{\frac{x^k}{k^2}}\right| = \left|\frac{k^2\cdot x^{k+1}}{(k+1)^2\cdot x^k}\right| = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2\cdot|x| \to 1\cdot|x| = |x|$$

Αν $|x|<1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως

Αν $|x|>1$, η σειρά αποκλίνει.

Για $x=0$, η σειρά συγκλίνει

Για $x=1$, η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

Για $x=-1$, η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως από Θεώρημα Leibniz β' τρόπος - Κριτήριο ρίζας

$$\sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k^2}\right|} = \frac{\sqrt[k]{|x|^k}}{\sqrt[k]{k^2}} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k^2}} \longrightarrow \frac{|x|}{1} = |x|$$

$(\sqrt[n]{n} \to 1)$

$\left(\text{Ισχύει ότι } \sqrt[k]{k^2} = (\sqrt[k]{k})^2 \to 1\right)$

Αν $|x|<1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως (από κριτήριο ρίζας)

Αν $|x|>1$, τότε η σειρά αποκλίνει

Αν $x=\pm 1$, η σειρά συγκλίνει

Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ συγκλίνει για $-1 \leq x \leq 1$

δ) $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$.

α' τρόπος → Κριτήριο ρίζας

$$\sqrt[k]{k^3 \cdot x^k} = \sqrt[k]{k^3}\ \sqrt[k]{x^k} = \sqrt[k]{k^3} \cdot |x| \to |x|$$

Για $|x|>1$ η σειρά αποκλίνει

Για $|x|<1$ " συγκλίνει

Για $x=1$ η σειρά είναι η $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} k^3 = \infty$ οπότε αποκλίνει γιατί $k^3 \not\to 0$.

Για $x=-1$ είναι $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 (-1)^k = \infty$ αποκλίνει.

ε). $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$

Κριτήριο Λόγου

$$\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \left|\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1}}{\frac{2^k}{k!} x^k}\right| = \left|\frac{2^{k+1} \cdot k!}{2^k \cdot (k+1)!}\right| |x| = \frac{2}{k+1}|x| \to 0$$

άρα, η σειρά συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$
(Ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{1}{0} = \infty$ (βλ. δυναμοσειρές))

---

22). Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ (β) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k$, $k \in \mathbb{N}$

(γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$ (δ) $a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k$

Λύση

(α). $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

Από κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς (Θ. 2.3.5) συγκρίνω με την $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, οπότε έχω

$\boxed{\text{Θ. 2.3.5}}$ Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ όπου $a_k, b_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Έστω $\lim_{k \to \infty} \frac{\alpha_k}{b_k} = l > 0$ Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει ανν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{k}} + 1} \to \frac{1}{2}$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ αποκλίνει, άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ αποκλίνει

γιατί $\frac{1}{\sqrt{k}} = \left(\frac{1}{k}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{k}\right)^p$ ό' έχουμε $p = \frac{1}{2} < 1$

β΄ τρόπος

Αν $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ τότε

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1 \to +\infty.$$

άρα αποκλίνει η σειρά

(β) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k = \dfrac{(\sqrt{1+k^2}-k)(\sqrt{1+k^2}+k)}{\sqrt{1+k^2}+k} = \dfrac{1+\cancel{k^2}-\cancel{k^2}}{\sqrt{1+k^2}+k} =$

$$= \frac{1}{k+\sqrt{1+k^2}}$$

Από κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς έχουμε για $b_k = \frac{1}{k}$.

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{k+\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+k^2}{k^2}}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} \to \frac{1}{2}$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει άρα ⓐ η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει (λόγω κριτηρίου ισοδύναμης συμπεριφοράς)

γ)

(γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} = \frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{1}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$

Θέτω για το κριτήριο ισοδ. συμπ. όπου $b_k = \frac{1}{k\sqrt{k}}$

Είναι: $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k\sqrt{k}}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+1/k}} \to \frac{1}{2}$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει αφού $\frac{3}{2} > 1$ άρα και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ θα συγκλίνει.

(δ) $a_k = (\sqrt[k]{k}-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$

Εφαρμόζουμε κριτήριο ρίζας και έχουμε

$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{(\sqrt[k]{k}-1)^k} = \sqrt[k]{k} - 1 \to 0 < 1$

Άρα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

22) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές.

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}$ (β) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)$

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}$ (δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Λύση

(α) Κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς

Συγκρίνω με $b_k = 1/k^2$. Είναι:

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}}{\frac{1}{k^2}} = k^2 \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1} = \frac{k^3+k^2\sqrt{k}}{2k^3-1} = \frac{1+\frac{\sqrt{k}}{k}}{2-\frac{1}{k^3}} \to \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Από κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς έχουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει επειδή και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

(β). $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)$

Θ.δ.ο. $\sqrt[k]{k}-1 \geq \frac{1}{k}$, για $k \geq e$ (*)

Έχουμε ότι $\sqrt[k]{k}-1 \geq \frac{1}{k} \Leftrightarrow \sqrt[k]{k} \geq 1+\frac{1}{k} \Leftrightarrow k \geq (1+1/k)^k$ (1)

αλλά $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e$, $\forall k \in \mathbb{N}$. (2)

Άρα, για $k \geq e$ ισχύει ότι $\sqrt[k]{\;}-1 \geq 1/k$.

Από (*), η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{k}-1$ αποκλίνει, αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}$

Εφαρμόζουμε κριτήριο σύγκρισης (Θ. 2.3.3)

Θέτω $a_k = \frac{\cos^2 k}{k^2}$ και $b_k = \frac{1}{k^2}$

Τότε $|a_k| \leq b_k$ οπότε αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και αυτή λόγω κριτηρίου σύγκρισης.

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Εφαρμόζουμε κριτήριο λόγου. Έχουμε:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{(k+1)!\, k^k}{k!\,(k+1)^{k+1}} = \frac{(k+1)k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

άρα, η σειρά συγκλίνει.

---

30) Έστω ότι $a_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει,

ν.δ.ο. οι

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ (β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$

συγκλίνουν επίσης.

Θ.2.3.4 (Κριτήριο οριακής σύγκρισης)
Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Υποθέτουμε ότι $\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.
Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

Λύση

(α) Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε ότι $a_k \to 0$ (1)

Θα χρησιμοποιήσω κριτήριο οριακής σύγκρισης (Θ.2.3.4).

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Είναι $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k^2}{a_k} = \lim_{k \to \infty} a_k \overset{(1)}{=} 0$ και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Θα συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$

(β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ Θα χρησιμοποιήσω το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{a_k}{1+a_k}}{\frac{a_k}{1}} = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{a_k(1+a_k)} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{1+a_k} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει θα συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ Χρησιμοποιώ οριακό κριτήριο σύγκρισης με $b_k = a_k^2$

Είναι $\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{a_k^2}{1+a_k^2}}{\frac{a_k^2}{1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+a_k^2} \overset{(\alpha)}{=} \frac{1}{1+0} = 1$

αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει από (α) έχουμε ότι και η

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+\alpha_k^2}$ συγκλίνει.

---

31) Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. α) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει

β) Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Λύση

α) Ισχύει ότι $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+\beta^2-2a\beta \geq 0 \Leftrightarrow a^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$. ①

Αν $\alpha = \sqrt{a_k}$ και $\beta = \sqrt{a_{k+1}}$ τότε η ① γράφεται

$$2\sqrt{a_k a_{k+1}} \leq a_k + a_{k+1} \Rightarrow \sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_k + \alpha_{k+1}}{2}$$

και η $\frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ συγκλίνει. Άρα, από (κριτήριο σύγκρισης)

Έχουμε ότι και η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει

β) $\sqrt{a_k \alpha_{k+1}} \overset{*}{\geq} \sqrt{a_{k+1} \cdot a_{k+1}} = a_{k+1}$ Η α_{k+1} συγκλίνει, άρα @ η

32) Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{k}$ συγκλίνει.

<u>Λύση</u>

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \leq \sqrt{M_1 M_2}$$ (δηλ. S_n φραγμένη και θετική),

όπου $M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$ και $M_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$. διότι M_1, M_2 συγκλίνουν άρα @ η $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει