ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ομάδα Α'

1) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s\in[a,b]$ τ.ω.
$$\int_a^s f(t)dt=\int_s^b f(t)dt$$

Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a,b)?

Λύση

Έστω η συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$g(s)=\int_a^s f(t)dt-\overbrace{\int_s^b f(t)dt}^{\left(\int_s^a f(t)dt+\int_a^b f(t)dt\right)}=\int_a^s f(t)dt-\left(\int_a^b f(t)dt-\int_a^s f(t)dt\right)=$$

$$=2\int_a^s f(t)dt-\int_a^b f(t)dt$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, η g είναι συνεχής

Παρατηρούμε ότι:
$$g(a)=-\int_a^b f(t)dt \quad \text{και} \quad g(b)=\int_a^b f(t)dt$$

Αφού $g(a)\cdot g(b)=-\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2\le 0$, $\exists\, s\in[a,b]: g(s)=0$

Για κάθε τέτοιο s ισχύει: $\int_a^s f(t)dt=\int_s^b f(t)dt$

(Μπορούμε να επιλέξουμε ένα τέτοιο s στο ανοιχτό δ/μα (a,b) αν $\int_a^b f(t)dt\neq 0$ (γιατί?)). Έστω $f(x)=x$ στο $[-1,1]$, τότε τα μόνα σημεία

3) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι $\exists s\in[0,1]$ τ.ω.

$$\int_0^1 f(x)\cdot x^2\,dx=\frac{f(s)}{3}$$

Λύση

Από Θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού (Θ.5.1.1. σελ 240) έχουμε ότι: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση & $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές τότε $\exists\xi\in[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

Επομένως για την άσκηση μας, αν η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η μη αρνητική συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $s\in[0,1]$ τ.ω.

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx=f(s)\cdot\int_0^1 g(x)\,dx$$

$$\xRightarrow{g(x)=x^2}\int_0^1 f(x)\,x^2\,dx=f(s)\cdot\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=f(s)\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=f(s)\cdot\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{f(s)}{3}.$$

Θ.Μ.Τ ολοκλ λογ. (Θ.5.1.1 σελ 240): Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Υπάρχει & $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Υπάρχει $\xi\in[a,b]$: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

eclass

5): Έστω $f,h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε:

$$F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)\,dt$$

Δείξτε ότι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

Λύση

Αφού η h είναι συνεχής, η συνάρτηση $G(y) = \int_0^y h(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και $G'(y) = h(y)$.

Παρατηρούμε ότι $F(x) = G(f(x)) = (G \circ f)(x)$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε:

$$F'(x) = G'(f(x))\,f'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x).$$

Κανόνας αλυσίδας (Θ. 5.2.3 σελ. 113)

Έστω $f : (a,b) \to (c,d)$ και $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η $g \circ f$ είναι παρ/μη στο x_0 και

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

6/ Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε

$$g(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt$$

Δείξτε ότι η g είναι παρ/μη @ βρείτε την g'

<u>Λύση</u>

Είναι: $g(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt = \int_{x-\delta}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x+\delta} f(t)\,dt =$

$$= -\int_{0}^{x-\delta} f(t)\,dt + \int_{0}^{x+\delta} f(t)\,dt = \int_{0}^{x+\delta} f(t)\,dt - \int_{0}^{x-\delta} f(t)\,dt =$$

$$= H_1(x) - H_2(x)$$

όπου $H_1(x)=\int_{0}^{x+\delta} f(t)\,dt$, και $H_2(x)=\int_{0}^{x-\delta} f(t)\,dt$

Από την <u>άσκ. 5</u> (προηγούμενη) έχουμε ότι οι H_1, H_2 παραγωγίσιμες,

$H_1'(x)=f(x+\delta)\cdot(x+\delta)'=f(x+\delta)$, $H_2'(x)=f(x-\delta)(x-\delta)'=f(x-\delta)$

(αν $0>x+\delta$ ή $0>x-\delta$ τότε το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει γιατί $\int_b^a f = -\int_a^b f$) Άρα $g'(x)=f(x+\delta)-f(x-\delta)$

εκλυσε.

7) Εστω $g,h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Ορίζουμε:

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 \, dt$$

Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και βρείτε την G'.

<u>Λύση</u>

Γράφουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 \, dt = \int_0^{g(x)} t^2 \, dt - \int_0^{h(x)} t^2 \, dt$$

Αφού οι g,h παρ/μες @ η $f(t) = t^2$ συνεχής $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η G είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$ (βλ. ασκ 5 και ασκ 6)

και $G'(x) = g^2(x)\, g'(x) - h^2(x)\, h'(x)$

8) Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x)=\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt$$

Βρείτε την F'.

Λύση

Θέτουμε $u=\frac{x}{t}$ $\Rightarrow t=\frac{u}{x}$. Τότε $dt=-\frac{x}{u^2}du$ και

$$F(x)=\int_x^1 f(u)\cdot\left(-\frac{x}{u^2}\right)du=\int_1^x x\,\frac{f(u)}{u^2}\,du=x\int_1^x\frac{f(u)}{u^2}\,du$$

Άρα
$$F'(x)=x'\int_1^x\frac{f(u)}{u^2}\,du+x\cdot\left(\int_1^x\frac{f(u)}{u^2}\,du\right)'$$

$$=\int_1^x\frac{f(u)}{u^2}\,du+\cancel{x}\,\frac{f(x)}{x^{\cancel{2}}}$$

$$=\int_1^x\frac{f(u)}{u^2}\,du+\frac{f(x)}{x}$$

eclass

9) Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $\forall x\in[0,a]$

$$\int_0^x f(u)\cdot(x-u)\,du = \int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$$

Λύση

Έστω οι συναρτήσεις

$$F(x) = \int_0^x f(u)\cdot(x-u)\,du = \int_0^x x\,f(u)du - \int_0^x u\,f(u)du$$

και

$$G(x) = \int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du = \int_0^x R(u)du$$

Θ. 5.2.4 (πρώτο θεωρ. απειρ. λογ.)
Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι παράγωγη συνάρτηση και $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$

όπου $R(u)=\int_0^u f(t)dt$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,a]$, το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δείχνει ότι οι F, G και R είναι παράγωγες

Επίσης,

$$F'(x) = \int_0^x f(u)du + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(u)du$$

και $G'(x) = R(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(u)du$.

Άρα, $(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = \int_0^x f(u)du - \int_0^x f(u)du = 0$.

Άρα, η $G-F$ είναι σταθερή στο $[0,a]$. Παρατηρώντας ότι $F(0)=G(0)=0$ συμπεραίνουμε ότι $G\equiv F$ στο $[0,a]$, δηλ.

ελλυση

10) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a<b$ και $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$, ν.δ.ο.

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

Λύση

$\forall k = 0, \dots, n-1$, η f είναι συνεχώς παρ/μη στο $[x_k, x_{k+1}]$

Από το 2° Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού (για τη συνεχή συνάρτηση f') έχουμε

Θ. 5.2.7 (2° Θ. απειρ. Λογ.)
Έστω $G:[a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση
Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε
$$\int_a^b G'(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\,dx \right| \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\,dx$$

Άρα,
$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\,dx = \int_a^b |f'(x)|\,dx$$