Κεφ 5 Παράγωγοι

§1 Βασικές έννοιες

- <u>Ορ</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν υπάρχει το όριο $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

$$\left[f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right].$$

- Αν το $I \subset \mathbb{R}$ είναι διάστημα και το $x_0 \in I$ είναι αριστερό ή δεξιό άκρο του I, τότε ορίζουμε $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\left(\text{αντ. } f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$ αν υπάρχει

- Αν η $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in I$ (διάστημα), τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I.

- <u>Παραδείγματα</u>: 1) Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

2) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$. Τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, διότι $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 0}{x - 0} = 1$

ενώ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x - 0}{x - 0} = -1$

3) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

4) Έστω $f(x) = \sin x$. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h} = \cos x_0$$

$\left[\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$ καθώς $\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $(\cos x)' = -\sin x$.

• <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0.

[Το αντίστροφο δεν ισχύει. Π.χ. η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0]

§2 <u>Κανόνες παραγώγισης</u>

• Έστω $f, g: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Τότε έχουμε $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

Αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{(g(x_0))^2}$

<u>Συνέπειες</u>: i) Αν $P(x)=\alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, τότε η P είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $P'(x) = n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + \dots + \alpha_1$

ii) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

• <u>Κανόνας αλυσίδας</u>: Έστω $f:(a,b) \longrightarrow (c,d)$ και $g:(c,d) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και η g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$. Τότε η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

• <u>Παράγωγος αντίστροφης</u>: Έστω $f:(a,b)\to \mathbb{R}$, 1-1, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ με $f'(x_0)\neq 0$. Τότε η f^{-1} παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ με $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

§ 3 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

• Έστω $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a,b)$. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $f':(a,b)\to\mathbb{R}$ με $x \longmapsto f'(x)$. Αν η f' είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε ορίζεται η παράγωγος της f' που καλείται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''.

• Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, έχει οριστεί η n-οστή παράγωγος $f^{(n)}:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$ της f και είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο $(n+1)$-τάξης $f^{(n+1)}$ της f, να είναι η παράγωγος της $f^{(n)}$.

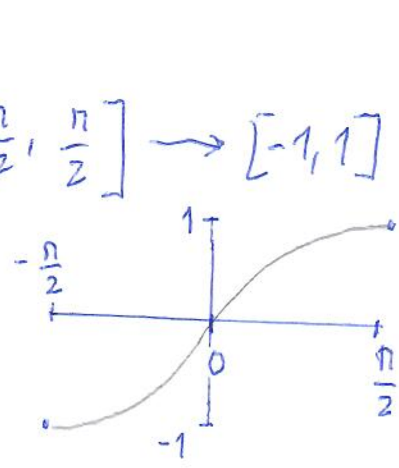
• Έστω $P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει η παράγωγος n-οστής τάξης του P. Μάλιστα $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$, $\forall k = 0, 1, \dots, m$

• <u>Κάποιες σημαντικές παράγωγοι</u>:

$(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

§4 <u>Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις</u>

α) <u>Τόξο ημιτόνου</u>: Η $\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$



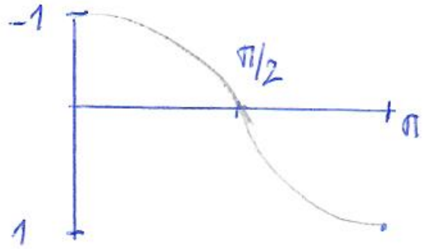
είναι 1-1, συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Ορίζουμε $\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ως $\arcsin = \left(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$

Άρα $\forall y \in [-1,1]$ θέτουμε $\arcsin y = x$ ANN $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\sin x = y$.

Η arcsin είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

β) <u>Τόξο συνημιτόνου</u>: Η $\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ είναι 1-1, συνεχής και γνησίως φθίνουσα.



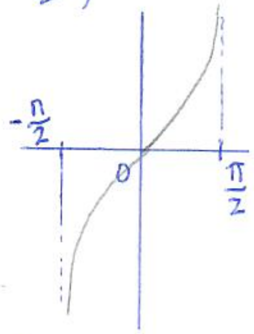
Ορίζουμε

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ ως $\arccos = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$

Άρα $\forall y \in [-1,1]$, θέτουμε $\arccos y = x$ ΑΝΝ $x \in [0,\pi]$ και $\cos x = y$.

Η arccos είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

γ) <u>Τόξο εφαπτομένης</u>: Η $\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, συνεχής και γνησίως αύξουσα.



Ορίζουμε

$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ως $\arctan = \left(\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$.

Άρα $\forall y \in \mathbb{R}$, θέτουμε $\arctan y = x$ ΑΝΝ $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $\tan x = y$.

Η arctan είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$, $\forall y \in \mathbb{R}$

§5 Παράγωγοι, μονοτονία και κρίσιμα σημεία

- Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

  Αν f αύξουσα, τότε $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$,

  Αν f φθίνουσα, τότε $f'(x)\leq 0$, ——— .

<u>Προσοχή</u>: Αν η f γνησίως αύξουσα, τότε δεν συνεπάγεται ότι $f'(x)>0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$. Π.χ. $f(x)=x^3$ είναι γν αύξουσα και $f'(0)=0$.

- <u>Ορ</u>: Έστω $I\subseteq\mathbb{R}$ διάστημα και $x_0\in I$.

  i) Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0, αν υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.

  $$f(x_0)\geq f(x),\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I.$$

  ii) Λέμε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0, αν υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.

  $$f(x_0)\leq f(x),\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I.$$

  iii) Λέμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 αν είτε έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 ή τοπικό ελάχιστο.

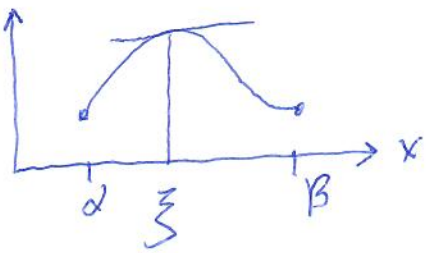
- <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$ τοπικό ακρότατο της f. Υποθέτουμε ότι η f παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε $f'(x_0)=0$.

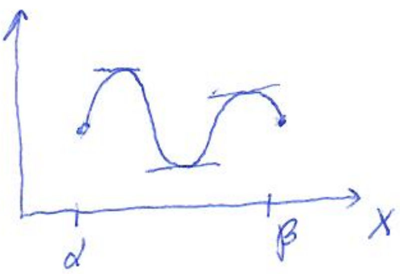
• <u>Παρατήρηση</u>: Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in I$. Τότε είτε το x_0 είναι άκρο του I

ή το x_0 εσωτερικό σημείο του I και $f'(x_0) = 0$.

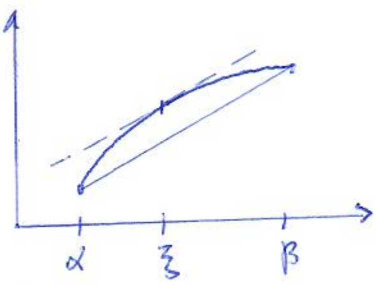
• <u>Ορ</u>: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό σημείο του I λέγεται κρίσιμο αν $f'(x_0) = 0$.

• <u>Θεώρημα</u> (Rolle): Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f'(\xi) = 0$.





• <u>Θεώρημα Μέσης Τιμής</u> (ΘΜΤ): Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$



• <u>Συνέπειες</u>: Έστω $f:(\alpha,\beta)\longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (α,β)

i) Αν $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$, τότε f αύξουσα στο (α,β)

ii) Αν $f'(x)\leq 0$, ———, τότε f φθίνουσα στο (α,β)

iii) Αν $f'(x)>0$, ———, τότε f γνησίως αύξουσα στο (α,β).

iv) Αν $f'(x)<0$, ———, τότε f γνησίως φθίνουσα στο (α,β).

• <u>Θεώρημα</u> (Μέσης Τιμής του Cauchy): Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β). Τότε, $\exists x_0\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $[f(\beta)-f(\alpha)]\,g'(x_0)=[g(\beta)-g(\alpha)]\,f'(x_0)$.

[Παρατήρηση: για $g(x)=x$ έχουμε $g'(x)=1$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$. Άρα

$$[f(\beta)-f(\alpha)]\cdot 1=[\beta-\alpha]\,f'(x_0)\Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\,.\ ]$$

§6 <u>Απροσδιόριστες μορφές - Κανόνας L'Hospital</u>

• Θεωρώντας το όριο $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$ (αντ. $\frac{\infty}{\infty}$) αν $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0$ (αντ $=\pm\infty$).

• <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f,g:(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες τ.ω.

i) $\forall x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ έχουμε $g(x)\neq 0$ και $g'(x)\neq 0$

ii) $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0$ ή $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$.

Αν υπάρχει $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Ο ίδιος κανόνας ισχύει και για όρια της μορφής $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ καθώς και για πλευρικά όρια.

§7 Ιδιότητα Darboux

- Ορ: Μια $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I διάστημα, λέμε ότι έχει την ιδιότητα Darboux αν για κάθε $x, y \in I$ με $x < y$ και $f(x) \neq f(y)$ και για κάθε ρ γνήσια ανάμεσα στα $f(x)$ και $f(y)$ υπάρχει $\xi \in (x, y)$ τ.ω $f(\xi) = \rho$.

[Π.χ. κάθε συνεχής συνάρτηση f ικανοποιεί την ιδιότητα Darboux.]

- Θεώρημα: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (α, β). Τότε η f' ικανοποιεί την ιδιότητα Darboux

[Προσοχή: δεν είναι απαραίτητο ότι η f' είναι συνεχής].

§8 Γεωμετρική σημασία της δεύτερης παραγώγου

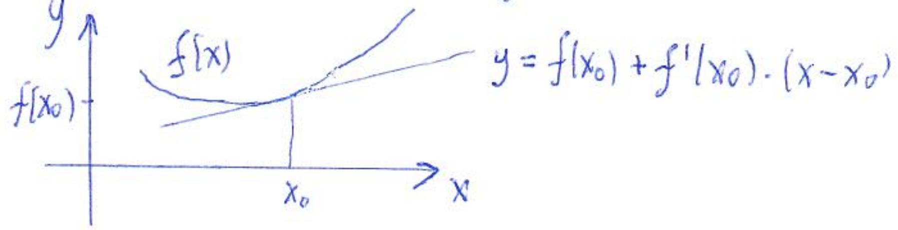
• <u>Θεώρημα</u> (Ικανές συνθήκες για ακρότατο): Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)=0$. Υποθέτουμε ότι η $f''(x_0)$ υπάρχει. Τότε

(i) αν $f''(x_0)>0$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0,

(ii) αν $f''(x_0)<0$, ———————— μέγιστο στο x_0.

• <u>Εξίσωση εφαπτομένης</u>: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

f κυρτή



Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

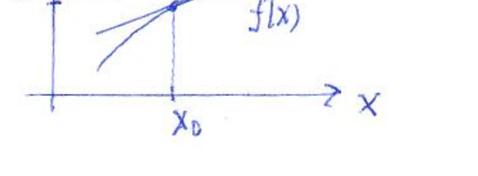
• <u>Οφ</u>: (i) Λέμε ότι η f είναι κυρτή (αντ. γνησίως κυρτή) αν για κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$ έχουμε $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$

(αντίστοιχα $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)\setminus\{x_0\}$)

(ii) Λέμε ότι η f είναι κοίλη (αντ. γνησίως κοίλη) αν για κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$, έχουμε $f(x)\leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$

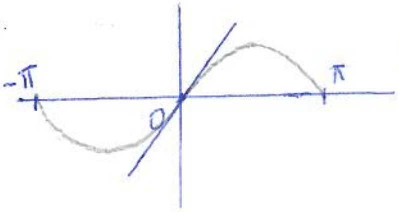
(αντίστοιχα $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)\setminus\{x_0\}$)

f κοίλη



(iii) Λέμε ότι η f έχει σημείο καμπής στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. η f κοίλη στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και κυρτή στο $(x_0, x_0 + \delta)$

ή η f κυρτή ——— και κοίλη ———

Π.χ.: 

Η $f(x) = \sin x$ έχει σημείο καμπής στο 0.

• Θεώρημα: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη.

(i) Αν $f''(x) \geq 0$ (αντ. $f''(x) > 0$) $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι κυρτή (αντ. γνησίως κυρτή) στο (α, β).

(ii) Αν $f''(x) \leq 0$ (αντ. $f''(x) < 0$) $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι κοίλη (αντ. γνησίως κοίλη) στο (α, β)

(iii) Αν η f έχει σημείο καμπής σε κάποιο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τότε $f''(x_0) = 0$.

§9 Ασύμπτωτες

• Ορ: Έστω $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$.

(i) Λέμε ότι η ευθεία $y = \beta$ όπου $\beta \in \mathbb{R}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta$.

(ii) Λέμε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ αν $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$.

[Ομοίως ορίζονται οι ασύμπτωτες της f στο $-\infty$].

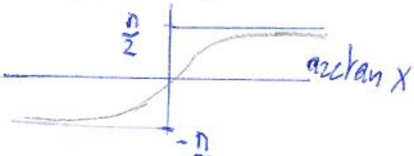
Έστω τώρα $f\,(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \to \mathbb{R}$

(iii) Λέμε ότι η f έχει αριστερή ή δεξιά κατακόρυφη ασύμπτωτη στο x_0 αν $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ αντίστοιχα.

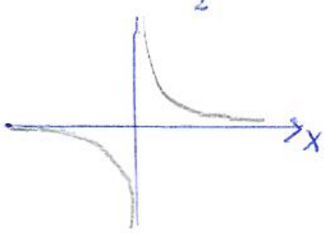
• <u>Παρατήρηση</u>: Αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y = \alpha x + \beta$ στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$.

Αντίστροφα, αν και τα δύο όρια υπάρχουν, τότε η $y = \alpha x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

• <u>Παραδείγματα</u>: 1) Η $f(x) = \arctan x$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη $y = \frac{\pi}{2}$ (αντ. $y = -\frac{\pi}{2}$) στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$)

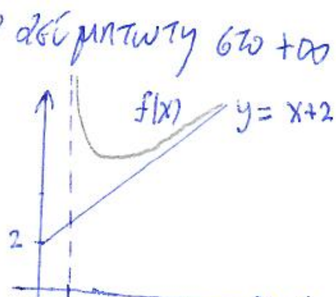


2) Η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0



3) Η $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x + 2$. Πράγματι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} = 1$

ενώ $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{x - 1} = 2$



ΑΣΚ: Ν.δ.ο. (i) $\sin' x = \cos x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\ln' y = \frac{1}{y} \quad , \forall y > 0$

(iii) $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad , \forall y \in (-1,1)$

(iv) $\arctan' y = \frac{1}{1+y^2} \quad , \forall y \in \mathbb{R}$

Λύση (i) Έχουμε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \text{ με } \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

ενώ $\lim_{h\to 0} \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right) = \cos x_0$ επειδή η συνάρτηση cos είναι συνεχής.

Άρα $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0$ και $\sin' x = \cos x$.

(ii) Έστω $y > 0$ με $y = e^x$. Τότε έχουμε

$$\ln' y = \frac{1}{\exp' x} = \frac{1}{\exp x} = \frac{1}{y}$$

(iii) Η arcsin είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και για κάθε $y \in (-1,1)$ με $y = \sin x$ και $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$ επειδή $\cos x > 0$.

(iv) Η arctan είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ με $y = \tan x$ και $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

Δ.ο. η f είναι συνεχής στο x_0

<u>Λύση</u>: Για $x\neq x_0$ γράφουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$

και έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f,g:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

Δ.ο. η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

<u>Λύση</u>: Γράφουμε για $h\neq 0$ κοντά στο 0:

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=f(x_0+h)\,\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+g(x_0)\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=g'(x_0)$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, άρα συνεχής στο x_0 και

έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$

Συνεπώς η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0).$$

ΑΣΚ: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f είναι αύξουσα στο (α,β), δείξτε ότι $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$.

Λύση: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x\in(\alpha,\beta)$, έχουμε $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ με $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$ για $h>0$ αρκετά μικρό (επειδή η f είναι αύξουσα). Άρα $f'(x)\geq 0$.

ΑΣΚ: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$ τοπικό ακρότατο της f. Δείξτε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

Λύση: Χ.β.τ.γ. υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Υπάρχει λοιπόν $\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$ και $f(x_0+h)\leq f(x_0)$, $\forall h\in(-\delta,\delta)$.

Αν $0<h<\delta$, τότε $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0$

Αν $-\delta<h<0$, τότε $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$

Επειδή $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x_0)=0$.

ΑΣΚ: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $f(\alpha)=f(\beta)$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $f'(\xi)=0$.

Λύση: Αν η f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, τότε $f'(x)=0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$.

Διαφορετικά, υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_1)\neq f(\alpha)$ και Χ.β.τ.γ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x_1) > f(\alpha)$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή: $\exists \xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(\xi) = \max\limits_{[\alpha,\beta]} f > f(\alpha) = f(\beta)$.

Ειδικότερα, $\xi \neq \alpha, \beta$. Δηλαδή $\xi \in (\alpha, \beta)$. Από την προηγούμενη ΑΣΚ συμπεραίνουμε ότι $f'(\xi) = 0$

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).
Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

<u>Λύση</u>: Ανάγομαστε στο Θεώρημα του Rolle, θεωρώντας τη συνάρτηση
$h(x) = f(x) - f(\alpha) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Επιπλέον ικανοποιεί $h(\alpha) = h(\beta) = 0$
Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $h'(\xi) = 0 \iff f'(\xi) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0$.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ισχύει $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι αύξουσα στο (α, β).

<u>Λύση</u>: Έστω $x, y \in (\alpha, \beta)$ με $x < y$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έπεται ότι $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$.
Άρα $f(x) \leq f(y)$ που αποδεικνύει ότι η f είναι αύξουσα στο (α, β).

ΑΣΚ: Έστω $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β). Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω.

$$[f(\beta)-f(\alpha)]\, g'(\xi) = [g(\beta)-g(\alpha)]\, f'(\xi).$$

Λύση: Ανάγόμαστε στο Θεώρημα του Rolle, θεωρώντας τη συνάρτηση

$$h(x) = [f(x)-f(\alpha)]\,(g(\beta)-g(\alpha)) - [f(\beta)-f(\alpha)]\,(g(x)-g(\alpha)).$$

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

Επιπλέον ικανοποιεί $h(\alpha) = h(\beta) = 0$. Άρα, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω.

$$h'(\xi) = 0 \iff f'(\xi)\,(g(\beta)-g(\alpha)) = (f(\beta)-f(\alpha))\, g'(\xi).$$

ΑΣΚ: Έστω $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Ν.δ.ο. για $x < y \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x) \neq f'(y)$ και για κάθε ρ γνήσια ανάμεσα στα $f'(x)$ και $f'(y)$, υπάρχει $\xi \in (x, y)$ τ.ω. $f'(\xi) = \rho$

Λύση: Χ.β.τ.γ. υποθέτουμε ότι $f'(x) < f'(y)$ και $f'(x) < \rho < f'(y)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f(t) - \rho t$. Τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $g'(t) = f'(t) - \rho$. Άρα έχουμε $g'(x) < 0 < g'(y)$ και ζητάμε $\xi \in (x, y)$ με την ιδιότητα $g'(\xi) = 0$.

Η g είναι συνεχής στο $[x, y]$ επειδή είναι παραγωγίσιμη στο (α, β).

Επομένως η g παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο $\xi \in [x, y]$.

Επειδή $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x) < 0$, έχουμε επιλέγοντας

$\varepsilon = -\frac{g'(x)}{2} > 0$ στον ορισμό του ορίου :

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} < g'(x) + \varepsilon = \frac{g'(x)}{2} < 0 \text{ για } 0 < h < \delta_1 \text{ και για}$$

κάποιο $\delta_1 \in (0, y-x)$ αρκετά μικρό. Παίρνοντας $x_1 = x + \frac{\delta_1}{2} \in (x, y)$, βλέπουμε ότι $g(x_1) < g(x)$, δηλαδή η g δεν παίρνει ελάχιστη τιμή στο x.

Ομοίως, επειδή $\lim_{h \to 0^-} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = g'(y) > 0$, έχουμε επιλέγοντας

$\varepsilon = \frac{g'(y)}{2}$ στον ορισμό του ορίου :

$$\frac{g(y+h) - g(y)}{h} > g'(y) - \varepsilon = \frac{g'(y)}{2} > 0 \text{ για } -\delta_2 < h < 0 \text{ και}$$

για κάποιο $\delta_2 \in (0, y-x)$. Παίρνοντας $y_1 = y - \frac{\delta_2}{2} \in (x, y)$, βλέπουμε ότι $g(y_1) < g(y)$, δηλαδή η g δεν παίρνει ελάχιστη τιμή στο y.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\xi \in (x, y)$ και $g'(\xi) = 0$ που είναι το ζητούμενο.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = 0$. Ν.δ.ο. αν υπάρχει $f''(x_0)$ και $f''(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

<u>Λύση</u>: Έχουμε $0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε

(i) Αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε $f'(x) > 0$,

(ii) Αν $x_0 - \delta < x < x_0$, τότε $f'(x) < 0$.

Έστω $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(i) Αν $x_0 < y < x_0 + \delta$, τότε εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο $[x_0, y]$ βρίσκουμε $\xi \in (x_0, y)$ ώστε $f(y) - f(x_0) = f'(\xi)(y - x_0) > 0$

(ii) Αν $x_0 - \delta < y < x_0$, τότε εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο $[y, x_0]$ βρίσκουμε $\xi \in (y, x_0)$ ώστε $f(y) - f(x_0) = f'(\xi)(y - x_0) > 0$.

Δηλαδή $f(y) \geq f(x_0)$, $\forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Ν.δ.ο. αν η f' είναι αύξουσα στο (α, β), τότε η f είναι κυρτή στο (α, β).

<u>Λύση</u>: Έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x > x_0$. Από το ΘΜΤ, υπάρχει $\xi_x \in (x_0, x)$ με την ιδιότητα

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{>0} \geq f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

επειδή f' αύξουσα στο (α, β) και $\xi_x > x_0$

Υποθέτουμε τώρα ότι $x < x_0$. Από το ΘΜΤ, υπάρχει $\xi_x \in (x, x_0)$ με την ιδιότητα $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{<0} \geq f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ επειδή $\begin{cases} \xi_x < x_0 \\ \text{και } f'(\xi_x) \leq f'(x_0) \end{cases}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι κυρτή στο (α, β).

ΑΣΚ: Έστω $f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, και έστω $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Ν.δ.ο. αν η f έχει σημείο καμπής στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.
Η g δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο x_0: έχουμε $g(x_0)=0$ και $g>0$ αριστερά του x_0, $g<0$ δεξιά του x_0, ή το αντίστροφο.
Επίσης, $g'(x_0)=0$ και $g''(x_0)=f''(x_0)$. Αν ήταν $g''(x_0)>0$ ή $g''(x_0)<0$, τότε η g θα είχε ακρότατο στο x_0: Άτοπο!
Άρα $f''(x_0)=0$.

ΑΣΚ: Μελετήστε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Λύση: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Παίρνει μέγιστη τιμή στο 0: $f(0)=1$ και $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.
Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f''(x)=\dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$. Άρα $f''>0$ στα $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt3}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt3},+\infty\right)$, ενώ $f''<0$ στο $\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$. Έπεται ότι η f έχει σημείο καμπής στα $\pm\frac{1}{\sqrt3}$ και είναι γνησίως κυρτή στα $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt3}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt3},\infty\right)$, ενώ είναι γνησίως κοίλη στο $\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$.

ΑΣΚ: Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}=0$.

Λύση: Έστω $M>0$ τ.ω. $|f'(x)|\leq M$, $\forall x>0$. Έπεται από το Θ.Μ.Τ ότι για κάθε $x>1$, έχουμε $f(x)-f(1)=f'(\xi_x)(x-1)$ για κάποιο $\xi_x\in(1,x)$.

Άρα $|f(x)|\leq|f(1)|+M(x-1)$, $\forall x>1$

και $\left|\dfrac{f(x)}{x^\alpha}\right|\leq\dfrac{|f(1)|}{x^\alpha}+M\dfrac{x-1}{x^\alpha}$, $\forall x>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}=0$.

ΑΣΚ: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β), ώστε $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Ν.δ.ο. για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση $g_\lambda:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $g_\lambda(x)=f'(x)+\lambda f(x)$ έχει μία ρίζα στο διάστημα (α,β).

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $h_\lambda:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $h_\lambda(x)=e^{\lambda x}f(x)$. Η h_λ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $h_\lambda(\alpha)=h_\lambda(\beta)=0$. Από το Θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $h_\lambda'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α,β). Αφού $h_\lambda'(x)=e^{\lambda x}(f'(x)+\lambda f(x))=e^{\lambda x}g_\lambda(x)$, έπεται ότι η εξίσωση $g_\lambda(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

ΑΣΚ: Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και φραγμένη συνάρτηση. Ν.δ.ο. αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$, τότε είναι ίσο με 0.

Λύση: Με άτοπο. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell \neq 0$ και χ.β.τ.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\ell > 0$.

Επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ στον ορισμό του ορίου, βρίσκουμε $M > 0$ ώστε

$$x > M \Rightarrow f'(x) > \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2}$$

Έπειτα εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στην f στο διάστημα $[M, x]$ όπου $x > M$:

$$f(x) - f(M) = f'(\xi_x)\cdot(x-M) \quad \text{για κάποιο } \xi_x \in (M, x)$$

$$\Rightarrow f(x) > f(M) + \frac{\ell}{2}(x-M), \quad \forall x > M$$

Από το κριτήριο παρεμβολής, έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ που είναι άτοπο.

ΑΣΚ: Έστω $\alpha > 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$. Τότε $g'(x) = e^{-x}(1+x) - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^2 e^{-x}}{2}$. Αφού $g'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, η g είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ενώ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Συνεπώς, η g παίρνει κάθε θετική τιμή α ακριβώς μία φορά. Έπεται το ζητούμενο.

ΑΣΚ: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Ν.δ.ο. $f(x) > 0$, $\forall x > 0$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-x} f(x)$. Τότε $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έπεται ότι $g(x) > g(0) = 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, $\forall x > 0$.