ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξέταση Χειμερινού Εξαμήνου, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ονοματεπώνυμο:

ΑΜ:

Θέμα 1. [2 μονάδες] Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

1. Η διανυσματική εξίσωση $x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = \beta$, όπου $a_1, a_2, \ldots, \beta$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^m$ είναι ισοδύναμη με ένα γραμμικό σύστημα με n μεταβλητές και m εξισώσεις.
α) Σωστό β) Λάθος

2. Ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με r ελεύθερες μεταβλητές έχει σύνολο λύσεων το οποίο ισούται με τη γραμμική θήκη r διανυσμάτων.
α) Σωστό β) Λάθος

3. Η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης ισούται με το ελάχιστο πλήθος διανυσμάτων του V τα οποία παράγουν όλο το χώρο.
α) Σωστό β) Λάθος

4. Αν ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει 2 διακριτές ιδιοτιμές τότε και ο A^2 έχει δύο διακριτές ιδιοτιμές.
α) Σωστό β) Λάθος

5. Υπάρχουν $C \in \mathbb{R}^{60 \times 5}$ και $A \in \mathbb{R}^{5 \times 60}$ με CA αντιστρέψιμο.
α) Σωστό β) Λάθος

6. Το γινόμενο $A^T x$ με $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A.
α) Σωστό β) Λάθος

7. Η γραμμική θήκη $\text{span}\{u, v, w\}$ για οποιαδήποτε τρία διανύσματα u, v, w σε έναν διανυσματικό χώρο V είναι υποχώρος του V.
α) Σωστό β) Λάθος

8. Αν $u_1, u_2, \ldots, u_n$ γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα σε έναν διανυσματικό χώρο V τότε σίγουρα το u_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων $n - 1$.
α) Σωστό β) Λάθος

9. Το σύνολο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z^2 = 0\}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.
α) Σωστό β) Λάθος

10. Το σύνολο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_2^3 : x + y + z^2 = 0\}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{F}_2^3$. Υπενθύμιση ότι το σώμα $\mathbb{F}_2$ είναι το σύνολο $\{0, 1\}$ όπου η πρόσθεση είναι το αποκλειστικό Ή (xor) και ο πολλαπλασιασμός το λογικό ΚΑΙ.

α) Σωστό β) Λάθος

Θέμα 2. [4 μονάδες] Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

1. Σε έναν πίνακα A ο βαθμός ισούται πάντα με

α) Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών

β) Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών

γ) Το πλήθος των οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A

δ) Όλα τα παραπάνω.

2. Η τομή των υπερεπιπέδων $\{(x, y, z, w) : x + 2y - z = 0\}$ και $\{(x, y, z, w) : 3x - 3y + z = 0\}$ είναι

α) μια ευθεία στον $\mathbb{R}^4$

β) ένα υποχώρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης 2

γ) ένας κύκλος που περνάει από την αρχή των αξόνων

δ) η γραμμική θήκη τριών διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^4$

3. Η οριζουσα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ισούται με

α) 0

β) -2

γ) 2

δ) 1

4. Το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ισούται με

α)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

β)

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

γ)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2

δ)

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Αν A αντιστρέψιμος και $A^{100} = A^{99}$ τότε
α) $A = I$
β) $A = 0$
γ) $A^{-1} = 0$
ε) Δεν μπορούμε να ξέρουμε ποιος είναι ο A

6. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες ξέρουμε σίγουρα ότι
α) Ο βαθμός του είναι n
β) Ο βαθμός του είναι m
γ) Και οι γραμμές του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες
δ) Έχει m οδηγούς στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του.

7. Ο διανυσματικός χώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} | A_{13} = A_{22} = A_{44} = A_{31} = 0\}$, όπου A_{ij} συμβολίζει το στοιχείο του πίνακα A στη γραμμή i και στήλη j, έχει διάσταση Η σωστή απάντηση είναι 12 και δεν υπάρχει ανάμεσα στις επιλεγμένες, άρα θα το πιάσω σε όλους σωστό. α) 4
β) 16
γ) 10
δ) 6

8. Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ισχύει ότι
α) $T(x) = Ax$ για κάποιον $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$
β) $T(x) = Ax$ για κάποιον $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και ο A αντιστρέψιμος
γ) $T(0) = 0$ όπου το πρώτο 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$ και το δεύτερο το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$.
δ) $T(0) = 0$ όπου το πρώτο 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ και το δεύτερο το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$.

9. Ο αντίστροφος ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ υπάρχει όταν
α) Οι γραμμές του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες
β) Οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες
γ) Ο βαθμός του ισούται με 4
δ) Όλα τα παραπάνω

10. Αν οι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουν ορίζουσα 3 και -3 αντίστοιχα, τότε ο πίνακας $AB^{-1}AB^{-1}$ έχει ορίζουσα
α) 1
γ) -81
γ) 81
δ) 9

Θέμα 3.[3 μονάδες] Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

α) Είναι ο A αντιστρέψιμος; Είναι η απεικόνιση $T(x) = Ax$ επί στον $\mathbb{R}^3$; Ισχύει ότι ο μηδενοχώρος του A έχει διάσταση τουλάχιστον 1 ;

β) Να συμπληρωθεί η μορφή του πίνακα $A = P\Lambda P^{-1}$ όπου Λ είναι ο πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές του A στη διαγώνιο (εφόσον αυτό γίνεται). (Να εξηγηθεί η διαδικασία και οι πράξεις για την εύρεση των P, P^{-1} να γίνουν στο πρόχειρο).

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{P^{-1}}$$

γ) Να υπολογισθεί ο πίνακας $A^{25} + A^3 + A^{1821}$.

<u>Απάντηση:</u>

α) Ο A έχει δύο ίδιες στήλες, άρα δεν γίνεται να είναι αντιστρέψιμος (γραμμικώς εξαρτημένες στήλες). Η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ δεν είναι επί εφόσον ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Ο μηδενοχώρος έχει διάσταση τουλάχιστον 1 (πχ το διάνυσμα $[1, 0, -1]^T$ ανήκει στον μηδενοχώρο).

β) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ με ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη γραμμή: $p(\lambda) = (-1-\lambda)((\frac{1}{2}-\lambda)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2) = -(\lambda+1)\lambda \cdot (1-\lambda)$. Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του $p(\lambda)$ άρα οι $-1, 0, 1$. Εφόσον όλες είναι διακριτές, A διαγωνιοποιήσιμος και εφόσον A συμμετρικός υπάρχει P ώστε $A = P\Lambda P^T$. Βρίσκω τους μηδενοχώρους που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή:

$$Null(A+I) = \text{span}\{[0, 1, 0]^T\},$$

$$Null(A-I) = \text{span}\{[1, 0, 1]^T\}$$

$$Null(A) = \text{span}\{[-1, 0, 1]^T\}.$$

Παίρνω ένα ιδιοδιάνυσμα από κάθε μηδενοχώρο, το κανονικοποιώ (διαιρώντας το με τη ρίζα του εσωτερικού γινομένου με τον εαυτό του, βλέπε τρίτη σειρά ασκήσεων) έτσι να φτιάξω τις στήλες του P. Τότε υπάρχει η εγγύηση ότι $P^{-1} = P^T$. Βάζω τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο του Λ στη σωστή σειρά.

γ) Γνωρίζουμε ότι $A^\kappa = P\Lambda^\kappa P^{-1}$ και εφόσον οι ιδιοτιμές είναι $-1, 0, 1$ έχουμε $\Lambda^\kappa = \Lambda$ αν κ περιττός. Άρα το ζητούμενο άθροισμα ισούται με $3P\Lambda P^{-1} = 3A$.

Θέμα 4. [2 μονάδες] Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

α) [0, 5 μονάδες] Να αποδειχθεί ότι $AA^T = 0$ συνεπάγεται $A = 0$. Να αποδειχθεί ομοίως ότι $A^T A = 0$ συνεπάγεται $A = 0$ (στις προαναφερθείσες εξισώσεις 0 είναι ο $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει παντού μηδενικά).

β) [0, 5 μονάδες] Αν $B^2+(B^T)^2 = BB^T+B^TB$ να αποδειχθεί ότι ο B είναι συμμετρικός, δηλαδή $B = B^T$.

γ) [0, 5 μονάδες] Έστω $W := \{C \in \mathbb{R}^{n\times n}|C^2 + (C^T)^2 = -CC^T - C^TC\}$. Να αποδειχθεί ότι το W είναι διανυσματικός χώρος και να βρεθεί η διάστασή του.

δ) [0, 5 μονάδες] Να δειχθεί ότι η συνθήκη $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι απαραίτητη για να ισχύει η συνεπαγωγή του ερωτήματος α). Με άλλα λόγια, να βρείτε ένα σώμα K, έναν αριθμό n και έναν πίνακα $A \in K^{n\times n}$ έτσι ώστε $AA^T = 0$ αλλά $A \neq 0$.

Απάντηση:

α) Προκύπτει άμεσα από το Πρόβλημα 5 της Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων. Πιο αναλυτικά, έχουμε ότι το $(AA^T)_{ii}$ ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής του A με τον εαυτό της και άρα με το άθροισμα των τετραγώνων αυτής της γραμμής. Οπότε, εφόσον $(AA^T)_{ii} = 0$ πρέπει όλη η i-οστή γραμμή να ισούται με 0. Εφόσον ισχύει για κάθε i, έχουμε $A = 0$. Όμοια όταν $A^TA = 0$, ή πιο απλά εφαρμόζουμε το προηγούμενο στον $A' := A^T$.

β) Η συνθήκη ισοδυναμεί με $(B - B^T)^2 = 0$. Ωστόσο, από εδώ **δεν** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $B - B^T = 0$ (δεν ισχύει $X^2 = 0 \Rightarrow X = 0$ σε πίνακες). Αντί αυτού, την γράφουμε $(B - B^T)^T(B - B^T) = 0$ και εφαρμόζουμε το α) στον πίνακα $B - B^T$ για να πάρουμε $B - B^T = 0$.

γ) Παρόμοια η συνθήκη γράφεται $(C + C^T)^T(C + C^T) = 0$ και άρα για τον ίδιο λόγο έχουμε $C = -C^T$ και έτσι $W = \{C \in \mathbb{R}^{n\times n}|C = -C^T\}$. Επαληθεύουμε ότι ισχύουν ιδιότητες του διανυσματικού χώρου ($0 \in W$, κλειστότητα ως προς πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό κλπ). Η συνθήκη $C = -C^T$ σημαίνει ότι $C_{ii} = 0$ και $C_{ij} = -C_{ji}$ για $i \neq j$. Μια βάση του χώρου είναι η συλλογή πινάκων $\{E^{(i,j)}\}_{i<j}$ με $E^{(i,j)}$ να έχει 1 στη θέση (i, j), -1 στη θέση (j, i) και 0 οπουδήποτε αλλού. Άρα η διάσταση του W είναι $\binom{n}{2} = n(n - 1)/2$.

δ) Παίρνουμε $K = \mathbb{F}_2$ (το σύνολο $\{0, 1\}$ με πρόσθεση το αποκλειστικό Ή και πολλαπλασιασμό το λογικό ΚΑΙ) και παίρνουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$