Ασκήσεις - Κυρτές και Κοίλες συναρτήσεις.

1. Έστω $f, f_n : I \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι κυρτή συνάρτηση και ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$. Ν.δ.ο. η f είναι κυρτή.

Λύση

Έστω $x, y \in I$ και έστω $t \in [0,1]$

Αφού από την υπόθεση έχουμε ότι $f_n(x) \to f(x)$ θα έχουμε και ότι

$f_n(y) \to f(y)$ και $f_n((1-t)x + ty) \to f((1-t)x + ty)$ όταν $n \to \infty$

Από την κυρτότητα της f_n έχουμε

$$f_n((1-t)x + ty) \le (1-t) f_n(x) + t f_n(y), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα,

$$f((1-t)x + ty) = \lim_{n\to\infty} f_n((1-t)x + ty) \le \lim_{n\to\infty} \left((1-t) f_n(x) + t f_n(y)\right) =$$

$$= (1-t) \lim_{n\to\infty} f_n(x) + t \lim_{n\to\infty} f_n(y) = (1-t) f(x) + t f(y)$$

Αφού τα $x, y \in I$ και $t \in [0,1]$ ήταν τυχαία, η f είναι κυρτή.

2. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Υποθέτουμε επίσης ότι η g είναι αύξουσα. Ν.δ.ο. η $g\circ f$ είναι κυρτή

Λύση

Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ και $t\in[0,1]$. Αφού η f είναι κυρτή, έχουμε

$$f((1-t)x+ty)\le(1-t)f(x)+tf(y)$$

Η g είναι αύξουσα, άρα

$$(g\circ f)((1-t)x+ty)=g(f((1-t)x+ty))\le g((1-t)f(x)+tf(y)) \quad (1)$$

Αφού η g είναι κυρτή έχουμε

$$g((1-t)f(x)+tf(y))\le(1-t)g(f(x))+tg(f(y))=$$
$$=(1-t)(g\circ f)(x)+t(g\circ f)(y) \quad (2)$$

Από (1),(2) $\Rightarrow (g\circ f)((1-t)x+ty)\le(1-t)(g\circ f)(x)+t(g\circ f)(y)$

Αφού τα $x,y\in\mathbb{R}$ και $t\in[0,1]$ ήταν τυχαία, η $g\circ f$ είναι κυρτή

3. Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Νδο. $f(x_1+\delta)-f(x_1) \leq f(x_2+\delta)-f(x_2)$ για κάθε $x_1<x_2 \in I$ και $\delta>0$ για το οποίο $x_1+\delta, x_2+\delta \in I$

Λύση:

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις

(α) $x_1+\delta < x_2$: Εφαρμόζοντας το Λήμμα των 3 χορδών για τα $x_1 < x_1+\delta < x_2$ και $x_1+\delta < x_2 < x_2+\delta$, παίρνουμε

$$\frac{f(x_1+\delta)-f(x_1)}{x_1+\delta-x_1} = \frac{f(x_1+\delta)-f(x_1)}{\delta} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1+\delta)}{x_2-x_1-\delta} \leq \frac{f(x_2+\delta)-f(x_2)}{x_2+\delta-x_2} = \frac{f(x_2+\delta)-f(x_2)}{\delta}$$

Συνεπώς $f(x_1+\delta)-f(x_1) \leq f(x_2+\delta)-f(x_2)$

(β) $x_2 < x_1+\delta$: Εφαρμόζοντας το Λήμμα των 3 χορδών για τα $x_1 < x_2 < x_1+\delta$ και $x_2 < x_1+\delta < x_2+\delta$ παίρνουμε

$$\frac{f(x_1+\delta)-f(x_1)}{\delta} \leq \frac{f(x_1+\delta)-f(x_2)}{x_1+\delta-x_2} \leq \frac{f(x_2+\delta)-f(x_2)}{\delta}$$

Συνεπώς, $f(x_1+\delta)-f(x_1) \leq f(x_2+\delta)-f(x_2)$.

(γ) $x_2 = x_1+\delta$: Προκύπτει άμεσα από το λήμμα των 3 χορδών για τα $x_1 < x_2 = x_1+\delta < x_2+\delta$

4. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνάρτηση Lipschitz σε ολόκληρο το $[a,b]$ ακόμη και αν υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη. Επίσης δείξτε ότι η f δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο $[a,b]$.

Λύση

(α) Η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=1-\sqrt{x}$ είναι κυρτή

Πράγματι έχουμε: $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=1-\sqrt{\lambda x+(1-\lambda)y}$. Θα το αποδείξουμε με άτοπο. Έστω ότι η f δεν είναι κυρτή, άρα υπάρχει $\lambda\in[0,1]$:

$$1-\sqrt{\lambda x+(1-\lambda)y}=f(\lambda x+(1-\lambda)y)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
$$=\lambda(1-\sqrt{x})+(1-\lambda)(1-\sqrt{y})$$
$$=1-\lambda\sqrt{x}-(1-\lambda)\sqrt{y}$$

Άρα, $\sqrt{\lambda x+(1-\lambda)y}<\lambda\sqrt{x}+(1-\lambda)\sqrt{y}$

$$\Leftrightarrow \lambda x+(1-\lambda)y<\lambda^2x+(1-\lambda)^2y+2\lambda(1-\lambda)\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)x+\lambda(1-\lambda)y<2\lambda(1-\lambda)\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow x+y<2\sqrt{xy}\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy}<0\Leftrightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2<0$$ άτοπο. Άρα η f είναι κυρτή.

Είναι επίσης φραγμένη στο $[0,1]$. Δεν είναι όμως Lipschitz συνεχής στο $[0,1]$ γιατί $\dfrac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\to+\infty$ καθώς $x\to0^+$

(β) $\longrightarrow$

(β) Παρατηρούμε ότι η $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ όταν $-1<x<1$ και $f(-1)=f(1)=2$ είναι κυρτή συνάρτηση. Πράγματι σύμφωνα με το Θεώρημα 8.3.1 αν η f' είναι αύξουσα είναι και κυρτή. Επομένως αν $x,y\in(-1,1)$ τότε αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ θα ισχύει $f'(x)=2x$ δηλ. η f' αύξουσα συνάρτηση άρα η f κυρτή στο $(-1,1)$.

- Αν $x=-1$, $y\in(-1,1)$ τότε

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)=(\lambda x+(1-\lambda)y)^2=(-\lambda+(1-\lambda)y)^2\leq\lambda^2+(1-\lambda)^2y^2-2\lambda(1-\lambda)y\overset{y\geq-1}{\leq}$$
$$\leq\lambda^2+(1-\lambda)^2y^2+2\lambda(1-\lambda)=\lambda(\lambda+2-2\lambda)+(1-\lambda)^2y^2=$$
$$=\lambda(2-\lambda)+(1-\lambda)^2y^2\overset{\lambda\in(0,1)}{\leq}2\lambda+(1-\lambda)y^2=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

- Αν $x=1$, $y\in(-1,1)$ τότε

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)=\lambda^2+(1-\lambda)^2y^2+2\lambda(1-\lambda)y\overset{y<1}{<}\lambda^2+2\lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)^2y^2\overset{\text{όπως πριν}}{\leq}$$
$$\leq2\lambda+(1-\lambda)y^2=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

- Αν $x=-1$, $y=1$ τότε $\lambda x+(1-\lambda)y=1-2\lambda$. Άρα $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=f(1-2\lambda)=$

$$=(1-2\lambda)^2\overset{\lambda\in(0,1)}{\leq}1<2=2\lambda+2(1-\lambda)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $[-1,1]$.

Όμως, η f δεν είναι συνεχής στα άκρα του $[-1,1]$, καθώς $f(-1)=f(1)=2$ @ $\lim_{x\to\pm1}f(x)=1$.

5. Έστω $f:(\alpha,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση & $\xi\in(\alpha,b)$ Νδο

α) αν η f έχει ολικό μέγιστο στο ξ τότε η f είναι σταθερή

β) αν η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ τότε η f είναι φθίνουσα στο (α,ξ) και αύξουσα στο (ξ,b)

<u>Λύση</u>

α) Έστω ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο ξ. Τότε, $f(x)\le f(\xi)$, $\forall x\in(a,b)$

Επιλέγουμε τυχαία $x_1,x_2\in(a,b)$ με $x_1<\xi<x_2$. Τότε υπάρχει $t\in[0,1]$: $\xi=(1-t)x_1+tx_2$

Η f είναι κυρτή, άρα

$$f(\xi)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\le(1-t)f(\xi)+tf(\xi)=f(\xi)$$

Άρα, $f(x_1)=f(x_2)=f(\xi)$ (γιατί αφού $t\in[0,1]$ και $f(\xi)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\le f(\xi)$
$\Leftrightarrow f(\xi)=(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$. (*)
Για $t=0$ η (*) $\Rightarrow f(\xi)=f(x_1)$
Για $t=1$ η (*) $\Rightarrow f(\xi)=f(x_2)$)

Άρα, $f(x)=f(\xi)$ $\forall x\in[\alpha,b]$ (δηλ. η f είναι σταθερή)

β) Έστω ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο ξ. Έστω $a<x<y<\xi$

Αφού $y<\xi$ & η f έχει ολικό ελάχιστο $\Rightarrow f(\xi)\le f(y)$.

Επίσης υπάρχει $t\in[0,1]$: $y=(1-t)x+t\xi$ και η f κυρτή, άρα

$$f(y)\le(1-t)f(x)+tf(\xi)\le(1-t)f(x)+tf(y)$$

Από το αριστερό & δεξί άκρο της ανωτέρω ανισότητας έχουμε ότι $(1-t)f(y)\le(1-t)f(x)$. Αφού $0<1-t<1$ συμπεραίνουμε ότι $f(y)\le f(x)$ ... φθίνουσα στο (α,ξ). Όμοια, ελέγχουμε ότι η f αύξουσα στο (ξ,b)