ΑΝΑΛΥΣΗ 1 − 2012

ΘΕΜΑ 1º

(α) Δώστε τον ορισμό της συνέχειας μίας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ σε ένα σημείο $x_0\in\mathbb{R}$. (1 μονάδα)

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Είναι η f Riemann ολοκληρώσιμη; (0,5 μονάδες)

(γ) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Είναι η fg Riemann ολοκληρώσιμη; (0,5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2º

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\frac{4^n}{n!}, \quad \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}, \quad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \frac{2^n n!}{n^n}$$ (2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3º

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log_2 n)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{2k}-1\right)$$

(2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4º

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$\frac{4^n}{n!}, \quad \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}, \quad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n!}, \quad \frac{2^n n!}{n^n}$$ (2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log_2 n)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{2k}-1\right)$$

(2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

α) $\int x^2 \ln x \, dx$ (0,6 μονάδες) γ) $\int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} dx$ (0,8 μονάδες)

β) $\int x\cos x \, dx$ (0,6 μονάδες)

$\int f(x) g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x) dx$

ΘΕΜΑ 5°:

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.
Αν $P=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1\}$ διαμέριση του $[0,1]$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leq\int_0^1|f'(t)|dt \qquad (2 \text{ μονάδες})$$

ΘΕΜΑ 6°:

(α) Έστω $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0)=f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x\in[0,1]$ με $f(x+1)=f(x)$. (0,5 μονάδες)

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(0)=g(1)$ έχουμε

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt=0.$$

Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$. (1,5 μονάδα)