Μιγαδικοί αριθμοί

Οι μιγαδικοί αριθμοί ορίζονται ως διαταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y). Το σύστημα των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}$, είναι το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού α με διάνυσμα

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

και του μιγαδικού πολλαπλασιασμού

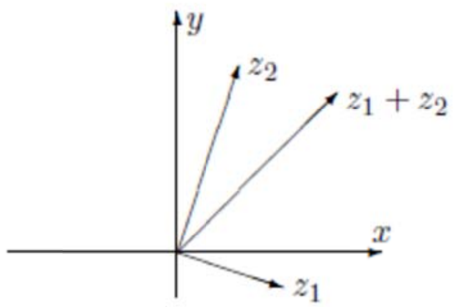
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Ο άξονας των x ονομάζεται πραγματικός και ο άξονας των y ονομάζεται φανταστικός. Το σημείο $(0, 1)$ συμβολίζεται με i. Με χρήση του μιγαδικού πολλαπλασιασμού προκύπτει ότι

$$i^2 = -1.$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί γράφονται

$$z = x + iy = \Re z + i\Im z.$$



Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών αριθμών.

Η πρόσθεση έχει την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα και ουδέτερο στοιχείο το 0. Ο πολλαπλασιασμός έχει την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα, ενώ ισχύει και η επιμεριστική ιδιότητα. Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το 1 και υπάρχει ο αντίστροφος κάθε μιγαδικού αριθμού, πλην του 0,

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}, z \neq 0.$$

Δεδομένου ότι οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν μια διανυσματική αναπαράσταση, μπορούν να παρασταθούν και σε πολική μορφή. Ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού αριθμού z το μήκος του αντίστοιχου διανύσματος,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα (x, y) με το θετικό πραγματικό ημιάξονα ονομάζεται όρισμα, θ, του μιγαδικού αριθμού. Το όρισμα ορίζεται μοναδικά για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό σε ένα γωνιακό διάστημα 2π. Η πρωτεύουσα τιμή του ορίσματος δίδεται ως εξής

$$\mathrm{Arg} z = \theta \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{y}{x}, -\pi < \theta \leqslant \pi, z \neq 0.$$

Με την πολική αναπαράσταση απλοποιείται η έκφραση για το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών. Θα ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2) \pmod{2\pi}.$$

Μέσω αυτής της ιδιότητας προκύπτει ο τύπος του de Moivre που δίδει τη n−οστή δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού. Αν είναι $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Κατόπιν αυτού οι n−οστές ρίζες του $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι

$$z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Επομένως οι n−οστές ρίζες της μονάδας είναι

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ορίζεται ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού $\bar{z} = x - iy$

ιδιότητες:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\qquad z\bar{z} = |z|^2$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ $\qquad |z| = |\bar{z}|$ $\qquad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, z \neq 0$

Μερικά χρήσιμα στοιχεία για τους μιγαδικούς, που αφορούν την χρήση τους για την περιγραφή εναλλασσομένων ηλεκτρικών μεγεθών είναι:

Α) Για πρόσθεση ή αφαίρεση μιγαδικών αριθμών χρησιμοποιούμε την καρτεσιανή μορφή. Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$Z_1 \pm Z_2 = (X_1 \pm X_2) + j(Y_1 \pm Y_2)$$

Β) Για πολλαπλασιασμό και διαίρεση χρησιμοποιούμε την πολική μορφή. Ισχύει:

$$Z_1 Z_2 = (r_1 r_2)e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Γ) Στο παραπάνω πλαίσιο είναι χρήσιμο να θυμάται κάποιος ποιος μετατρέπεται η μία μορφή στην άλλη:

Καρτεσιανή →Πολική		**Πολική → Καρτεσιανή**	
Z=X+jY	$r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ εφφ=Y/X	$re^{j\varphi}$	Z= (rσυνφ)+j(rημφ)

Να γίνει μετατροπή από πολική σε καρτεσιανή μορφή των $50\angle 53.1$, $100\angle -120$

$$50\angle 53.1 = 50(\text{συν}53.1 + j\text{ημ}53.1) = 50(0.6 + j0.8) = 30 + j40$$

$$100\angle -120 = 100(\text{συν}(-120) + j\text{ημ}(-120)) = 100(-0.5 - j0.866) = -50 - j86.6$$

Να γίνει μετατροπή από καρτεσιανή σε πολική μορφή των 4+j3, -10+j20.

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \text{ εφφ}=Y/X=3/4=0.75 \text{ άρα } 4+j3= 5e^{j36.9}$$

$$r = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22.4, \text{ εφφ}=-20/10=-2$$

Όμως, εφαπτομένη -2 έχουν οι γωνίες -63.4° και 116.6°. Από αυτές, μόνο η 116.6° έχει θετική Υ και αρνητική Χ συνιστώσα (στη γωνία -63.4° , τα πρόσημα είναι ανάποδα). Άρα -10+j20= $22.4e^{j116.6}$

iii) Να γίνει ο πολλαπλασιασμός των 4+j3, -10+j20.

Χρησιμοποιώ τις πολικές μορφές που βρήκα προηγουμένως και έχω

$$(4+j3)(-10+j20)=(5e^{j36.9})(22.4e^{j116.6})=(5*22.4)\, e^{j(36.9+116.6)}=112\, e^{j153.5}$$

Χρήση των μιγαδικών αριθμών στα εναλλασσόμενα (AC)

Για κάθε ηλεκτρικό μέγεθος σε ένα πρόβλημα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μιγαδικούς αριθμούς για να περιγράψουμε τα εναλλασσόμενα μεγέθη. Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι απλά ένα μαθηματικό εργαλείο, και μάλιστα πολύ πιο απλό από την τριγωνομετρική ή την διανυσματική απροσέγγιση. Σε κάθε περίπτωση όμως, θα πρέπει να θυμόμαστε τους παρακάτω κανόνες:

(α) Οι ωμικές αντιστάσεις αντιστοιχούν σε πραγματικούς αριθμούς

(β) Οι επαγωγικές και οι χωρητικές αντιστάσεις αντιστοιχούν σε φανταστικούς αριθμούς. Μάλιστα, η επαγωγική αντίσταση θεωρείται θετική, ενώ η χωρητική αρνητική.

(γ) Ο μιγαδικός αριθμός αντιστοιχεί στην σύνθετη αντίσταση ή εμπέδηση. Δηλαδή ισχύει: $Z=R+j(X_L-X_C)$ με $X_L=\omega L$ kai $X_C=1/\omega C$

(δ) Για να πάμε από την τριγωνομετρική στην πολική μορφή, κάνουμε την αντι-κατάσταση: $I=I_0\text{ημ}(\omega t+\varphi)\rightarrow I=I_0e^{j(\omega t+\varphi)}$

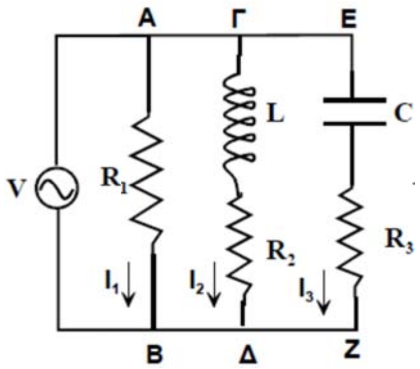
Μία επιπλέον μορφή που χρησιμοποιείται ιδιαίτερα στην ηλεκτρολογία είναι ο φάσορας, που βασίζεται στην πολική μορφή και γράφεται ως: $\mathbf{r}\angle\varphi$, όπου φ είναι η φάση, και r το μέτρο ή η ενεργός τιμή του ηλεκτρικού μεγέθους.

ΠΑΡΑΔΕΪΓΜΑΤΑ

Έστω R=10 Ω, X_L=20 Ω και X_C=10 Ω. Να βρεθεί η εμπέδηση: Z=10+j(20-10)=10+j10=$10\angle 45^o$ Ω

Αν στην προηγούμενη σύνθετη αντίσταση εφαρμόσω τάση $220\angle 0^o$ V , πόσο θα είναι το ρεύμα και η ισχύς;

$$I = \frac{220\angle 0}{14.14\angle 45} = 15.56\angle -45\,\text{A}, \quad P = (220\angle 0)\times(15.56\angle -45) = 3422\angle -45\,\text{w}$$



Στο κύκλωμα του σχήματος: R1=10Ω, R2=3Ω, R3=10Ω, L=10mH, C=250μF και V=70ημ(400t). Να βρεθούν τα i_1, i_2, i_3 και $i_{ολ}$.

$V_{εν} = 49.5e^{j0}$ και:

Αφού $X_L=\omega L=400\times 10\times 10^{-3}=4\Omega$ και $X_C=(\omega C)^{-1}=(400\times 250\times 10^{-6})^{-1}=10\Omega$

Τότε: $z_{AB} = 10$, $z_{ΓΔ} = 3 + j4$ και $z_{EZ} = 10 - j10$ ή $z_{AB} = 10e^{j0}$, $z_{ΓΔ} = 5e^{j53}$

$z_{EZ} = 14.14e^{-j45}$

Άρα τα ρεύματα είναι:

$$I_{AB,εν} = \frac{V_{εν}}{z_{AB}} = \frac{49.5e^{j0}}{10e^{j0}} = 4.95e^{j0} \text{ ή } I_{AB,εν} = 4.95 + j0$$

$$I_{ΓΔ,εν} = \frac{V_{εν}}{z_{ΓΔ}} = \frac{49.5e^{j0}}{5e^{j53}} = 9.9e^{-j53} \text{ ή } I_{ΓΔ,εν} = 5.958 - j7.906$$

$$I_{EZ,εν} = \frac{V_{εν}}{z_{EZ}} = \frac{49.5e^{j0}}{14.14e^{-j45}} = 3.5e^{j45} \text{ ή } I_{EZ,εν} = 2.376 + j2.376$$

Το ολικό ρεύμα είναι:

$$I_{ολ,εν} = (4.95 + 5.958 + 2.376) - j(0 + 7.906 - 2.376) = 13.644 - j5.17$$

ή $I_{ολ,εν} = 14.17e^{-j14.54}$

Συνεπώς το κύκλωμα εμφανίζει επαγωγική συμπεριφορά (φ<0).

Είναι εμφανές ότι η διαδικασία απαιτεί πολλές πράξεις και μεγάλη προσοχή, πολύ λιγότερες όμως απ'ότι η τριγωνομετρική 'ή η διανυσματική προσέγγιση.