Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών. Εξετάσεις στο μάθημα
Γραμμική άλγεβρα. Δευτέρα 25 Ιουνίου 2012. *Διδάσκων:Ε.Ράπτης*

Έστω α,β,γ,δ,δ,ζ τα έξη τελευταία ψηφία του Αρ.Μητρώου σας, αρχίζοντας από το τέλος. Δίνεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα: (Σ)

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+2)x+(\beta+8)y+(\gamma+6)z &= \delta \\
x+3y+6z &= \epsilon \\
4x+12y+24z &= \zeta
\end{aligned}
$$

1. Να βρεθεί η τάξη $(rank)$ του πίνακα A του συστήματος και η τάξη $(rank)$ του πίνακα E του επαυξημένου πίνακα.
2. Να εξετασθεί εάν υπάρχουν πίνακες $K, \Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ με $A = K^2\Lambda^2 - \Lambda^2 K^2$
3. Να βρεθεί η διάσταση του χώρου των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς του συστήματος (Σ), δηλαδή του συνόλου λύσεων του συστήματος:
$$
(\mathbf{O\Sigma})\quad
\begin{aligned}
(\alpha+\beta+2)x+(\beta+8)y+(\gamma+6)z &= 0 \\
x+3y+6z &= 0 \\
4x+12y+24z &= 0
\end{aligned}
$$
4. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $\theta : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$ με $\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $Ker\theta$ και μία βάση της εικόνας $Im\theta$.
5. Δίνονται οι πίνακες $\Gamma = A^t A$ και $\Delta = EE^t$. Να εξετασθεί εάν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα του πίνακα Γ κάθετα μεταξύ τους. Να εξετάσετε το ίδιο και για τον πίνακα Δ.
6. Δίνεται ο πίνακας $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta+1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Να προσδιορισθεί η παραγοντοποίηση $\Delta = QR$, όπου Q ορθογώνιος πίνακας και R άνω τριγωνικός

Γενικά

1. Η διάρκεια της εξέτασης είναι **2 ώρες**
2. Κάθε ερώτημα αν απαντηθεί σωστά, βαθμολογείται με 1,7 μονάδες

Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών. Εξετάσεις στο μάθημα

Γραμμική άλγεβρα. Παρασκευή 28 Ιουνίου 2013. Διδάσκων: Ε. Ράπτης

Έστω α , β , γ , δ , ε , ζ τα έξι τελευταία ψηφία του Αρ. Μητρώου σας , αρχίζοντας από το τέλος. Δίνεται το παρακάτω σύστημα: (**Σ**)

$$\begin{aligned}&(\alpha+2)x+(\beta+3)y+(\gamma+4)z=\delta\\&3x+5y+3z=\varepsilon\\&15x+25y+15z=\zeta\end{aligned}$$

1. Να βρεθεί η τάξη (rank) του πίνακα A του συστήματος και η τάξη (rank) του πίνακα E του επαυξημένου πίνακα.
2. Να εξετασθεί εάν υπάρχουν πίνακες Κ,Λ $\in R^{3x3}$ με $\mathrm{A}=\mathrm{K}\Lambda-\Lambda\mathrm{K}+\mathrm{K}^2\Lambda^2-\Lambda^2\mathrm{K}^2$
3. Να βρεθεί η διάσταση του χώρου των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς του συστήματος (**Σ**), δηλαδή του συνόλου λύσεων του συστήματος

   (**ΟΣ**)
   $$\begin{aligned}&(\alpha+2)x+(\beta+3)y+(\gamma+4)z=0\\&3x+5y+3z=0\\&15x+25y+15z=0\end{aligned}$$

4. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση θ: $R^{3x1}\to R^{3x1}$ με $\theta\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\equiv A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

   Να βρεθεί η διάσταση του πυρήνα Kerθ και της εικόνας Imθ

5. Δίνεται ο πίνακας $\Gamma=\mathrm{A}^t\mathrm{A}+\mathrm{A}\mathrm{A}^t$. Να εξετασθεί εάν υπάρχουν δύο ιδιοδιανύσματα του πίνακα Γ κάθετα μεταξύ τους.
6. Δίνεται ο πίνακας $\Delta=\begin{pmatrix}0&\alpha+\beta+12\\1&2\end{pmatrix}$. Να προσδιοριστεί η παραγοντοποίηση Δ=QR, όπου Q ορθογώνιος πίνακας και R άνω τριγωνικός.
7. Να περιγραφεί η ιδιάζουσα ανάλυση (SV Decomposition) του παραπάνω πίνακα Δ.

Γενικά

1. Η διάρκεια της εξέτασης είναι **2 ώρες**
2. Κάθε ερώτημα αν απαντηθεί σωστά βαθμολογείται με 1,5 μονάδες

Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών. Εξετάσεις στο μάθημα
Γραμμική άλγεβρα. Δευτέρα 7 Απριλίου 2014. *Διδάσκων:Ε.Ράπτης*

Έστω α,β,γ,δ,δ,ζ τα έξη τελευταία ψηφία του Αρ.Μητρώου σας, αρχίζοντας από το τέλος. Δίνεται το παρακάτω γραμμικό σύστημα: $(\mathbf{\Sigma})$

$$\begin{aligned}(\alpha+2)x+(\beta+3)y+(\gamma+4)z&=\delta\\ 3x+5y+3z&=\epsilon\\ 15x+25y+15z&=\zeta\end{aligned}$$

1. Δίνεται μία γραμμική απεικόνιση $\theta : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, η οποία είναι 1-1. Εξετάστε εάν υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ με $(\theta : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = I_4$ και $(\theta : \overline{\alpha}, \overline{\alpha}) = I_4$

2. Έστω A ο πίνακας του παραπάνω γραμμικού συστήματος και $\Gamma = A^tA + AA^t$. Να εξετασθεί εάν υπάρχουν δύο ιδιοδιανύσματα του πίνακα Γ κάθετα μεταξύ τους

3. Δίνονται οι πίνακες $A \in \mathbb{R}^{7x8}, B \in \mathbb{R}^{8x5}, \Gamma \in \mathbb{R}^{5x7}$. Να εξετασθεί εάν η ορίζουσα $\mid AB\Gamma \mid$ είναι μηδέν.

4. Δίνονται οι πίνακες $K \in \mathbb{R}^{7x8}, \Lambda \in \mathbb{R}^{8x8}, M \in \mathbb{R}^{8x7}$. Με την υπόθεση ότι ο πίνακας Λ είναι αντιστρέψιμος, εξετάστε εάν $rank(KM) = rank(K\Lambda M)$

5. Στο αρχικό γραμμικό σύστημα, βάζουμε και την εξίσωση $\lambda x + y + z = 0$ Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το νέο γραμμικό σύστημα έχει κενό σύνολο λύσεων;

6. Δίνεται ο πίνακας $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha+\gamma+7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Να προσδιορισθεί η παραγοντοποίηση $\Delta = QR$, όπου Q ορθογώνιος πίνακας και R άνω τριγωνικός

Γενικά

1. Η διάρκεια της εξέτασης είναι **2 ώρες**

2. Κάθε ερώτημα αν απαντηθεί σωστά, βαθμολογείται με 1,8 μονάδες

Αρ. Μητρώου :
Τρίτη 16/2/ 2016 ΟΝΟΜΑ:

Παρακάτω το α είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, β το προτελευταίο, γ το προ-προτελευταίο

Απαντήστε στα παρακάτω κυκλώνοντας ΜΟΝΟ ότι νομίζετε σωστό

1. Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ με πρώτη γραμμή $(\alpha+1\ \beta+2\ \gamma+3)$ έτσι ώστε το σύστημα $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ να έχει μόνο την μηδενική λύση;
2. Υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{R}^{3x2}$ με πρώτη γραμμή $(\alpha+5\ \beta+6)$ έτσι ώστε το σύστημα $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ να έχει μόνο την μηδενική λύση;
3. Υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ με πρώτη γραμμή $(\alpha+1\ \beta+2\ \gamma+3)$ και $B \in \mathbb{R}^{3x2}$ με πρώτη γραμμή $(\alpha+5\ \beta+6)$ έτσι ώστε $AB = I_2$;
4. Υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ με πρώτη γραμμή $(\alpha+1\ \beta+2\ \gamma+3)$ και $B \in \mathbb{R}^{3x2}$ με πρώτη γραμμή $(\alpha+5\ \beta+6)$ έτσι ώστε $BA = I_3$;
5. Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ έχει την ιδιότητα $(A - (\alpha+\beta+\gamma+5)I_2)^5 = 0_2$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος;
6. Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ έχει την ιδιότητα $(A - (\alpha+\beta+\gamma+5)I_2)^5 = 0_2$, τότε ο πίνακας A έχει ορίζουσα $(\alpha+\beta+\gamma+5)^2$;
7. Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ με πρώτη γραμμή $(\alpha+1\ \beta+2\ \gamma+3)$ έτσι ώστε να είναι αντιστρέψιμος και μία από τις ιδιοτιμές του είναι το 0;
8. Υπάρχει ζεύγος πινάκων $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ και $B \in \mathbb{R}^{2x2}$ με τις ίδιες ιδιοτιμές,πρώτη γραμμή$(\alpha+5\ \beta+6)$ και όχι όμοιοι;
9. Υπάρχει ζεύγος πινάκων $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ και $B \in \mathbb{R}^{2x2}$ με το ίδιο $rank$, πρώτη γραμμή$(\alpha+5\ \beta+6)$ και όχι όμοιοι;
10. Υπάρχει συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ με πρώτη γραμμή $(\alpha+1\ \beta+2\ \gamma+3)$ και ιδιοτιμές $1+2i, 1-2i, 3$;

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

Αρ. Μητρώου : [redacted]

Τρίτη 16/2/ 2016 ΟΝΟΜΑ: [redacted]

Παρακάτω το α είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, β το προτελευταίο, γ το προ-προτελευταίο.

α=8
β=2
γ=1

Απαντήστε στα παρακάτω κυκλώνοντας ΜΟΝΟ ότι νομίζετε σωστό

9 4 4

λάθος 1. Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ με πρώτη γραμμή (α+1 β+2 γ+3) έτσι ώστε το σύστημα $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ να έχει μόνο την μηδενική λύση;

13 8

λάθος 2. Υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{R}^{3x2}$ με πρώτη γραμμή (α+5 β+6) έτσι ώστε το σύστημα $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ να έχει μόνο την μηδενική λύση;

9 4 4

σωστό 3. Υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ με πρώτη γραμμή (α+1 β+2 γ+3) και $B \in \mathbb{R}^{3x2}$ με πρώτη γραμμή (α+5 β+6) έτσι ώστε $AB = I_2$; 13 8

λάθος 4. Υπάρχουν πίνακες $A \in \mathbb{R}^{2x3}$ με πρώτη γραμμή (α+1 β+2 γ+3) και $B \in \mathbb{R}^{3x2}$ με πρώτη γραμμή (α+5 β+6) έτσι ώστε $BA = I_3$;

16

5. Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ έχει την ιδιότητα $(A-(\alpha+\beta+\gamma+5)I_2)^5 = 0_2$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος;

6. Αν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ έχει την ιδιότητα $(A-(\alpha+\beta+\gamma+5)I_2)^5 = 0_2$, τότε ο πίνακας A έχει ορίζουσα $(\alpha+\beta+\gamma+5)^2$;

7. Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ με πρώτη γραμμή (α+1 β+2 γ+3) έτσι ώστε να είναι αντιστρέψιμος και μία από τις ιδιοτιμές του είναι το 0;

8. Υπάρχει ζεύγος πινάκων $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ και $B \in \mathbb{R}^{2x2}$ με τις ίδιες ιδιοτιμές,πρώτη γραμμή(α+5 β+6) και όχι όμοιοι;

9. Υπάρχει ζεύγος πινάκων $A \in \mathbb{R}^{2x2}$ και $B \in \mathbb{R}^{2x2}$ με το ίδιο *rank*, πρώτη γραμμή(α+5 β+6) και όχι όμοιοι;

10. Υπάρχει συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ με πρώτη γραμμή (α+1 β+2 γ+3) και ιδιοτιμές $1+2i, 1-2i, 3$;

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

Εθνικόν κα
ΤΜΗΜΑ Μ

[redacted]

Εξετάσεις Γραμμική άλγεβρα: Διδάσκων Ε.Ράπτης
Αρ. Μητρώου : [redacted]
Τρίτη 7/2/ 2017

Παρακάτω το α είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, β το προτελευταίο, γ το προ-προτελευταίο.

1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta+2 & \gamma+3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \lambda \end{pmatrix}$. Για ποιες τιμές του λ ο πίνακας A έχει rank=2;

2. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα $(\alpha+1)x + (\beta+2)y + (\gamma+3)z = 0, 4x + 5y + 6z = 0. 7x + 8y + \lambda z = 0$ έχει άπειρες λύσεις;

3. Για ποιες τιμές του λ υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ με $AB = 0$ και $rank(B) = 2$?

4. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x,y,z) = (x+2y, y+z, 3z)$ και B ο πίνακας της ως προς την κανονική βάση. Να εξετασθεί αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q με $PAQ = B$

5. Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P με $PAP^{-1} = B$?

6. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα B

7. Να βρεθούν όλα τα διανύσματα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε το $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ να είναι κάθετο στο (1,2,3).

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

Εξετάσεις Γραμμική άλγεβρα: Διδάσκων Ε.Ράπτης

Αρ. Μητρώου :

Πέμπτη 7 Σεπτεμβρίου 2017 **ΟΝΟΜΑ:**

$\alpha = 0$
$\beta = 9$
$\gamma = 0$

Παρακάτω το α είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, β το προτελευταίο, γ το προ-προτελευταίο.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \lambda \end{pmatrix}$

1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta+2 & \gamma+3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$. Για ποιες τιμές του λ ο πίνακας A έχει $rank$=1, ή2 ή3 ή 4;

2. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα $(\alpha+1)x + (\beta+2)y + (\gamma+3)z = 0, 4\lambda x + 5\lambda y + 6z = 0, 7x + 8y + \lambda z = 0$ έχει άπειρες λύσεις;

3. Για ποιες τιμές του λ υπάρχει πίνακας $\Delta \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ με $A\Delta = 0$ και $rank(\Delta) = 2$?

4. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x,y,z) = (x+2y, y+z, 3z$ και B ο πίνακας της ως προς την κανονική βάση. Να εξετασθεί αν υπάρχου αντιστρέψιμοι πίνακες P, Q με $PAQ = B$

Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P με $PAP^{-1} = B$?

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του πίνακα B

α βρεθούν όλα τα διανύσματα $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε το $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ να εί θετο στο (α, β, γ).

Διάρκεια εξέτασης 24 ώρες

$-11y + 3z = 0 \Rightarrow x = -11y - 3z.$

$+ 5\lambda y + 6z = 0$

Εξετάσεις Γρα[redacted]
Αρ. Μητρώ[redacted]
Παρασκευή 1/[redacted]

Παρακάτω το α είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, β το προτελευταίο, γ το προ-προτελευταίο.
Με A^t συμβολίζουμε τον ανάστροφο του πίνακα A.

1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta+2 & \gamma+3 & \alpha+\beta+12 \\ 4 & 5 & 6+\lambda & 7 \end{pmatrix}$. Για ποιες τιμές του λ ο πίνακας AA^t έχει ιδιοτιμές πραγματικούς αριθμούς;

2. Να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα $(A^tA)^5$

3. Έστω Σ ένα γραμμικό ομογενές σύστημα, του οποίου ο πίνακας είναι ο A^tA. Εξετάστε εάν το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

4. Να βρεθούν όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, τα οποία είναι κάθετα σε όλα τα διανύσματα- λύσεις του συστήματος $(\alpha+1)x+(\beta+2)y+(\gamma+3)z=0$

5. Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση (αν υπάρχει) $\theta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $ker\theta = Im\theta = <(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1), (1,5,7)>$

6. Να βρεθεί γραμμικό ομογενές σύστημα του οποίου το σύνολο λύσεων είναι το $<(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1), (1,5,7)>$

7. Να κατασκευάσετε μία γραμμική απεικόνιση $\theta : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με $\theta(1,2,3,a) = (1,1,1,1)$, $\theta(1,2,3,a+1) = (1,1,1,2)$ και $dimKer(\theta) = 2$

Να βρεθεί πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ με $A^2 \neq 0$ και $A^3 = 0$

Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

Μόνο προφορική εξέταση

- Τι είναι η διάσταση ενός πίνακα;

-Τι είναι η ιδιοτιμή ενός πίνακα;

-Έστω οι ιδιοτιμές ενός πίνακα με τιμές 3,4,5 (τυχαία τις είπε να βοηθήσει), είναι αντιστρέψιμος/διαγωνιμοποιήσιμος;

-Έστω ένα γραμμικό σύστημα 3x7, πώς βρίσκω τις λύσεις του; Πώς τον λύνω;

-Πότε δεν έχει λύσεις ένα γραμμικό σύστημα;

Θέμα 3. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & \gamma+1 \end{pmatrix}$.

(α) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα A^{10}. Είναι ο A αντιστρέψιμος; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (0.6 μονάδες + 0.15 μονάδες)

(β) Να βρείτε, αν υπάρχει, τον αντίστροφο του A. (1.25 μονάδες)

(γ) (Σ/Λ) Αν A, B είναι $n \times n$ πίνακες τότε $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (0.15 μονάδες)

(δ) (Σ/Λ) Εάν $A^5 = 0$ τότε $\det(A) = 0$. (0.15 μονάδες)

Θέμα 4. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha+4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(α) Να απαντήσετε αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (0.15 μονάδες + 0.6 μονάδες)

(β) Να βρείτε, αν υπάρχει, έναν διαγώνιο πίνακα B, ο οποίος να είναι όμοιος με τον A. (1.25 μονάδες)

(γ) (Σ/Λ) Αν A και B είναι όμοιοι πίνακες τότε $A^n = B^n$. (0.15 μονάδες)

(δ) (Σ/Λ) Αν δύο πίνακες A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές τότε είναι όμοιοι. (0.15 μονάδες)

Θέμα 5. Έστω ο πίνακας $\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 1 & \beta & 2 \\ 1 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

(α) Αν W είναι ο χώρος στηλών του πίνακα A να δώσετε τη διάσταση του $W^\perp$ και να την αιτιολογήσετε χρησιμοποιώντας γνωστό θεώρημα **χωρίς** να υπολογίσετε τον χώρο $W^\perp$. (0.15 μονάδες + 0.6 μονάδες)

(β) Βρείτε την ορθογώνια αποσύνθεση ως προς W του διανύσματος $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (1.25 μονάδες)

(γ) (Σ/Λ) Αν οι στήλες ενός $n \times n$ πίνακα U είναι ορθοκανονικές τότε $UU^T = I_n$. (0.15 μονάδες)

(δ) (Σ/Λ) Δύο ορθογώνια διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. (0.15 μονάδες)

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Γραμμική Άλγεβρα
Σελίδα 1 από 2

Χειμερινό Εξάμηνο 2022 - 2023
Εξέταση 31/01/2023

Οδηγίες: Να συμπληρώσετε τα στοιχεία σας με κεφαλαία γράμματα γράφοντας ένα γράμμα ανά τετράγωνο. Τα στοιχεία σας, συμπεριλαμβανομένου του Α.Μ. στην πλήρη 13-ψήφια μορφή του, πρέπει να αναγράφονται ευκρινώς πάνω στην κόλλα των θεμάτων και στις κόλλες των απαντήσεων. Τα θέματα κατατίθενται μαζί με τις απαντήσεις. Τα σύμβολα α, β, γ αντιστοιχούν στα τρία τελευταία ψηφία του αριθμού μητρώου σας, με α το τελευταίο, β το προτελευταίο και γ το αντιπροτελευταίο. Οι απαντήσεις σας δεν υπόκεινται σε αρνητική βαθμολογία.

Επώνυμο: [redacted]
Όνομα:
Α.Μ.:

1	2	3	4	5	Βαθμός

Θέμα 1. Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 4 \\ 1 & \beta & 2 \\ 3 & 4 & \gamma \end{pmatrix}$.

(α) Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα A. Ποιά είναι η τάξη του A; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (0.6 μονάδες + 0.15 μονάδες)

(β) Να βρεθεί μία βάση του χώρου στηλών του καθώς και μία βάση του μηδενοχώρου ~~δυναμόχωρού~~ του. Μπορεί να γραφεί η πρώτη στήλη σαν γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο; (1 μονάδα + 0.25 μονάδες)

(γ) (Σ/Λ) Ο $\mathbb{R}^2$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. (0.15 μονάδες)

(δ) (Σ/Λ) Εάν 3 διακεκριμένα διανύσματα u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε δεν είναι διανύσματα του $\mathbb{R}^2$. (0.15 μονάδες)

Θέμα 2. Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+1)x_1 + x_2 \\ (\beta+1)x_2 + x_3 \\ (\gamma+1)x_3 + x_1 \end{pmatrix}$.

(α) Να βρείτε τον τυπικό πίνακα του γραμμικού μετασχηματισμού και να απαντήσετε αν ο T είναι ισομορφισμός ή όχι. (0.6 μονάδες + 0.15 μονάδες)

(β) Αν $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός με τυπικό πίνακα τον $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ να βρείτε κλειστό τύπο για την σύνθεση $P \circ T$ της μορφής $P \circ T(x) = Ax$, για κατάλληλο πίνακα A. Με άλλα λόγια, υπολογίστε τον τυπικό πίνακα A της σύνθεσης. (1.25 μονά

(γ) (Σ/Λ) Ο $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός. (0.1

... βάση του $\mathbb{R}^3$ διαφορετική της ορθοκανονικής βάσης $\{e_1, e_2, e_3\}$ ...

Εξετάσεις Γραμμική άλγεβρα: Διδάσκων Ε.Ράπτης
Αρ. Μητρώου : [redacted]
Τετάρτη 5/2/ 2020 ΟΝΟΜΑ: [redacted]

Παρακάτω το α είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, β το προτελευταίο, γ το προ-προτελευταίο. [redacted]

Δίνονται τα διανύσματα $\chi=(1,\lambda,\alpha+5,\beta+7)$ και $\psi=(1,\beta+2,\lambda,\gamma+7)$ **του διανυσματικού χώρου** $\mathbb{R}^4$ [redacted]

1. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες τα διανύσματα χ και ψ είναι κάθετα
2. Να βρεθούν άλλα δύο διανύσματα ζ και ω του $\mathbb{R}^4$ έτσι ώστε τα χ,ψ,ζ,ω να είναι ανά δύο κάθετα
3. Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με πυρήνα τον μηδενικό χώρο και $f(\chi)=\psi$.
4. Να εξετασθεί αν ο πίνακας $A=(f:\hat{e},\hat{e})$ είναι αντιστρέψιμος. Εδώ $\hat{e}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^4$.
5. Να βρείτε ένα Γραμμικό σύστημα του οποίου το σύνολο λύσεων είναι ο υπόχωρος, που παράγεται από τα χ,ψ,ζ.
6. Να εξετασθεί αν κάποια από τις ιδιοτιμές του Α είναι μηδέν
7. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Α
8. Βρείτε το *rank* και τον αντίστροφο πίνακα του A^t

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

Θέμα 1. (2 μονάδες) Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις σημειώστε αν είναι (Σ)ωστή ή (Λ)άθος.

- Ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου κάτω τριγωνικού πίνακα είναι άνω τριγωνικός πίνακας.
- Αν A και B είναι δύο αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες ίδιων διαστάσεων τότε $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A και κάθε πραγματικό c ισχύει ότι $\det(cA) = c\det(A)$.
- Αν A και B είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες ίδιων διαστάσεων και ο A είναι αντιστρέψιμος τότε $\det(A^{-1}BA) = \det(B)$.
- Η ένωση δύο υπόχωρων ενός διανυσματικού χώρου V αποτελεί υπόχωρο του V.
- Υπάρχει διανυσματικός χώρος που αποτελείται από ακριβώς δύο διανύσματα.
- Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι οι ίδιες με τις ιδιοτιμές της αντίστοιχης κλιμακωτής μορφής του.
- Ο $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
- Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας με $m < n$. Τότε για ένα τυχαίο $b \in \mathbb{R}^m$ το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ είτε δεν έχει λύση είτε έχει άπειρες λύσεις.
- Κάθε γραμμικά εξαρτημένο σύνολο περιέχει το μηδενικό διάνυσμα.

Θέμα 3. (3 μονάδες) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Υπολογίστε την ορίζουσα του A^6.

- Είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος; Αν ναι, ποιός είναι ο αντίστροφος;

- Ποιό είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του;

Θέμα 2. (2 μονάδες) Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ και $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$, όπου a και b το τελευταίο και προτελευταίο ψηφίο του Α.Μ. σας.

- Είναι τα διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

- Έχουν οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ και $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1+b \end{pmatrix}$ ίδια ορίζουσα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας χωρίς να υπολογίσετε τις ορίζουσές τους.

Θέμα 4. (3 μονάδες) Δίνονται οι γραμμικοί μετασχηματισμοί:

$$T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \text{ και } T_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot x$$

– Δώστε κλειστό τύπο για τη σύνθεση $T = T_2 \circ T_1$ στην μορφή $= A \cdot x$ για κατάλληλο πίνακα A και δικαιολογήστε την απάντησή σας.

– Ποιανού $b \in \mathbb{R}^3$ είναι εικόνα μέσω του T το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, όπου a το τελευταίο ψηφίο του Α.Μ. σας;

– Είναι τα $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ βάση του $\mathbb{R}^3$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Εξετάσεις Γραμμική άλγεβρα: Διδάσκων Ε.Ράπτης
Αρ. Μητρώου :
Πέμπτη 12/9/ 2019 ΟΝΟΜΑ:

Παρακάτω το α είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, β το προτελευταίο, γ το προ-προτελευταίο.

Δίνονται τα διανύσματα $\chi=(1,2,\alpha,\beta)$ και $\psi=(1,\alpha,\beta,\gamma)$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$

1. Να βρεθούν άλλα δύο διανύσματα ζ και ω του $\mathbb{R}^4$ έτσι ώστε τα χ,ψ,ζ,ω να είναι ανά δύο κάθετα Η γραμμικά ανεξάρτητα
2. Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ με πυρήνα τον μηδενικό χώρο και $f(\chi)=\psi$.
3. Να εξετασθεί αν ο πίνακας $A = (f : \bar{e}, \bar{e})$ είναι αντιστρέψιμος. Εδώ $\bar{e}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^4$.
4. Να βρείτε ένα Γραμμικό σύστημα του οποίου το σύνολο λύσεων είναι ο υπόχωρος, που παράγεται από τα χ,ψ,ζ.
5. Να εξετασθεί αν κάποια από τις ιδιοτιμές του Α είναι μηδέν
6. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα Α
7. Βρείτε τον αντίστροφο του A^2.

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

[illegible]

[illegible]

Επώνυμο:	[redacted]	
Όνομα:		
Α.Μ.:		
Αρ. Θέσης:		

1	2	3	4	Βαθμός

Θέμα 1. [illegible] (Σ)ωστή ή (Λ)άθος.

- Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή ενός πίνακα είναι μοναδική. Σ
- Οι συντελεστές $c_1, c_2, \dots, c_n$ ενός γραμμικού συνδυασμού $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$ δεν μπορούν να είναι όλοι μηδέν. Σ
- Αν ο πίνακας A έχει στοιχείο οδηγό σε κάθε γραμμή τότε η εξίσωση $Ax = \mathbf{b}$ δεν έχει λύση. Λ
- Εάν το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι μία μη-τετριμμένη λύση της εξίσωσης του $Ax = \mathbf{b}$ τότε όλα τα στοιχεία του είναι διάφορα του 0. Λ
- Εάν ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένο τότε έχει πάνω από n διανύσματα. Σ
- Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ απεικονίζει το $(0,0,0)$ στο $(0,0)$. Σ
- Εάν A και $B = (\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2 \ \ \mathbf{b}_3)$ είναι 3×3 πίνακες τότε $AB = (A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2 + A\mathbf{b}_3)$. Σ
- Εάν A, B, C είναι $n \times n$ πίνακες όπου ο A είναι αντιστρέψιμος και $AB = CA$ τότε ισχύει ότι $B = C$. Σ
- Υπάρχει 5×6 πίνακας με 6 ιδιοτιμές. Σ
- Η ορίζουσα ενός αντιστρέψιμου πίνακα είναι 0. Σ

A(3x6) B(6x6) C(3x3) D(5x6)

Θέμα 2 [illegible]

- A·B N (3x?)
- N 3x3
- N 3x6
- O
- O
- N 3x6
- C·A O
- D·A O
- D·B N 5x6
- $(B \cdot D)^T$ O

Θέμα 3. Έστω τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

– Είναι τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ γραμμικά ανεξάρτητα;

– Ποιός είναι ο μηδενόχωρος του συστήματος $Ax = 0$, όπου $A = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$ και ποιά είναι η διάστασή του; Ποιά είναι η τάξη του πίνακα A;

– Ισχύει ότι το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A;

– Αν $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμμικός μετασχηματισμός, είναι τα $T(\mathbf{v}_1)$, $T(\mathbf{v}_2)$, $T(\mathbf{v}_3)$ βάση του $\mathbb{R}^3$;

Θέμα 4. (3 μονάδες) Έστω οι γραμμικοί μετασχηματισμοί $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, όπου

$$T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad T_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot x$$

– Δώστε κλειστό τύπο για την σύνθεση $T = T_2 \circ T_1$ στην μορφή $T(x) = A \cdot x$ για κατάλληλο πίνακα A και δικαιολογήστε με σαφήνεια την απάντησή σας.

– Είναι ο T_2 ισομορφισμός; Αν ναι, ποιός είναι ο τύπος για τον γραμμικό μετασχηματισμό T_2^{-1}; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

– Υπάρχουν διανύσματα $x \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε τα x και $T_2(x)$ να είναι συνευθειακά; (Με άλλα λόγια το $T(x)$ να περιέχεται στην ευθεία που ορίζει το x; Αν ναι, ποιά είναι αυτά;

Γραμμική άλγεβρα(Τμήμα Πληροφορικής) Χειμερινό εξάμηνο 2019-20

Προβολή Άσκησης

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2020.Γραμμική άλγεβρα.Άσκηση. Τμήμα Πληροφορικής

Υπολειπόμενος χρόνος: 20:00

Παρακάτω στην Άσκηση, α θα είναι το τελευταίο ψηφίο του Αρ. Μητρώου σας, και β το προτελευταίο. Επίσης έχουμε:

1. Α είναι ένας πίνακας με (α+3) γραμμές και (β+4) στήλες
2. θ μία γραμμική απεικόνιση από $R^{(\alpha+2)}$ στο $R^{(\beta+4)}$
3. Σ είναι ένα γραμμικό ομογενές σύστημα με α+4 εξισώσεις και α+4 αγνώστους
4. το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων χ και ψ του R^3 είναι 2
5. Οι ιδιοτιμές του πίνακα του συστήματος Σ είναι 2,3,4,5 και 6

1 2 3

Ερώτηση 1 (Πολλαπλής Επιλογής (Πολλαπλές Απαντήσεις) — 0.50 βαθμοί) ✔

Είναι ο πίνακας Α αντιστρέψιμος;;

- [ ] Δεν μπορούμε να αποφασίσουμε. Χρειάζονται και άλλες πληροφορίες
- [ ] Δεν είναι διότι δεν έναι τετραγωνικός
- [ ] Δεν είναι διότι το rank του πίνακα είναι α+2
- [ ] Δεν είναι διότι η ορίζουσα του πίνακα είναι β+3
- [ ] Είναι διότι ο ανηγμένος κλιμακωτός είναι ο μηδενικός

Ερώτηση 2 (Πολλαπλής Επιλογής (Πολλαπλές Απαντήσεις) — 0.50 βαθμοί)

Είναι η γραμμική απεικόνιση θ αντιστρέψιμη;

- [ ] Είναι διότι ο πυρήνας είναι μηδενικός
- [ ] Είναι διότι το σύνολο εικόνων είναι ο δεύτερος χώρος
- [ ] Δεν είναι διότι δεν είναι 1-1
- [ ] Δεν είναι διότι δεν είναι επί
- [ ] Είναι διότι ο πίνακας της θ είναι αντιστρέψιμος

Ερώτηση 3 (Πολλαπλής Επιλογής (Πολλαπλές Απαντήσεις) — 0.50 βαθμοί)

Το σύνολο λύσεων του Σ

- [ ] Είναι υπόχωρος
- [ ] Δεν είναι υπόχωρος
- [ ] Έχει διάσταση 1
- [ ] Έχει διάσταση 10
- [ ] Έχει 5 στοιχεία

Ακύρωση Υποβολή

Εξετάσεις Γραμμική άλγεβρα: Διδάσκων Ε.Ράπτης
Αρ. Μητρώου :
Πέμπτη 1 Φεβρουαρίου 2018 **ΟΝΟΜΑ:**

Παρακάτω το α είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας, β το προτελευταίο, γ το προ-προτελευταίο.

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \beta+2 & \gamma+3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Για ποιες τιμες του λ ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος;
2. Για ποιες τιμές του λ ο πίνακας Α, έχει $rank$ 0,1,2,3,4,5;
3. Βρείτε πίνακες $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \Gamma \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, ώστε ο πίνακας $BA\Gamma$ να είναι αντιστρέψιμος
4. Για ποιες τιμές του λ, ο πίνακας $(AA^t)^3$, έχει ιδιοτιμές πραγματικούς αριθμούς;
5. Έστω $\hat{e}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ώστε $A = (f : \hat{e}, \hat{e})$
6. Βρείτε την διάσταση του $Ker(f)$ και του $Image(f)$ της γραμμικής απεικόνισης f.
7. Βρείτε όλα τα διανύσματα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα με το $(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3)$.
8. Βρείτε την ορίζουσα του πίνακα $(AA^tA)^5$ για τις διάφορες τιμές του λ

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες