Τεχνικές ολοκλήρωσης

1. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

α) $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \quad (1)$

Θέτω $u=\phi(x)$, $du=\phi'(x)\,dx \quad (2)$

$(1) \overset{(2)}{=} \int f(u)\,du.$

β) Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων για απλοποίηση τους

<u>πχ1</u> $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

<u>πχ2</u> $\int \sin^5 x\,dx = \int \sin^4 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx \overset{(*)}{=} -\int (1-u^2)^2 du = \cdots$

Θέτω $u=\cos x$, $du=-\sin x\,dx \ (*)$

Την ίδια μέθοδο με πχ2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για οποιοδήποτε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int \cos^m x \, \sin^n x\,dx$$

αν ένας από τους εκθέτες m, n είναι περιττός & ο άλλος άρτιος.

<u>πχ3</u> $\int \tan^2 x\,dx = \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx =$

$= \tan x - x + C$

γ) Υπολογισμός του $\int f(x)dx$ με την αντικατάσταση $x=\phi(t)$

Η αντικατάσταση $x=\phi(t)$, $dx=\phi'(t)dt$ - όπου ϕ αντιστρέψιμη συνάρτηση - μας δίνει:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

<u>Case 1</u>. Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{a^2-x^2}$

Θέτουμε $x = a\sin t$

Τότε $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$ και $dx = a\cos t\, dt$

<u>Case 2</u> Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{x^2-a^2}$

Θέτουμε $x = a/\cos t$. Τότε

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan t \quad \text{και} \quad dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$$

<u>Case 3</u> Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{x^2+a^2}$

Θέτουμε $x = a\tan t$. Τότε

$$\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t} \quad \text{και} \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$$

→

2. Ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

---

3. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων <u>SOS</u>

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι $n < m$ γιατί όταν $n > m$ τότε: $p(x) = \pi(x) \cdot q(x) + v(x)$, οπότε

$$f(x) = \frac{\pi(x)\, q(x) + v(x)}{q(x)} = \pi(x) + \frac{v(x)}{q(x)}$$

Το $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$

$$= \underbrace{(x-a_1)^{r_1} \cdots (x-a_k)^{r_k}}_{\substack{\text{πραγματικές} \\ \text{ρίζες} \\ \text{με } r_j \text{ πολλαπλότητα} \\ \text{ρίζας}}} \cdot \underbrace{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1} \cdots (x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell)^{s_\ell}}_{\text{μιγαδικές ρίζες γιατί}}$$

$x^2 + \beta_i x + \gamma_i = (x - z_i)(x - \bar{z}_i)$

με s_i πολλαπλότητα ρίζας z_i

$\Delta < 0$

Οπότε

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} +$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{A_{k1}}{x-a_k} + \frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2} + \cdots + \frac{A_{kr_k}}{(x-a_k)^{r_k}}$$

$$+ \frac{B_{11} x + \Gamma_1}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{B_{12} x + \Gamma_{12}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1s_1} x + \Gamma_{1s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}}$$

α) Ολοκληρώματα της μορφής: $\int \frac{1}{(x-a)^k}dx$, $k \geq 2$

όπου $$\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + c$$

αν $k=1$ $$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + c$$

β). Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx$ (1)

όπου $x^2+bx+\gamma$ έχει $\Delta<0$. Τότε,

Γράφουμε $Bx+\Gamma = \frac{B}{2}(2x+b) + \left(\Gamma - \frac{Bb}{2}\right)$ (2)

οπότε $$(1) \overset{(2)}{=} \frac{B}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx + \left(\Gamma - \frac{Bb}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+bx+\gamma)^k}dx$$

$$= \frac{B}{2}I_1 + \left(\Gamma - \frac{Bb}{2}\right)I_2 \quad (3)$$

όπου για το I_1 κάνουμε την αντικατάσταση $y = x^2+bx+\gamma$.

και για το I_2 γράφουμε: $x^2+bx+\gamma = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4\gamma-b^2}{4}$

και κάνουμε την αντικατάσταση $x+\frac{b}{2} = \frac{\sqrt{4\gamma-b^2}}{2}y$

οπότε αναγόμαστε σε ολοκληρώματα της μορφής
$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}dy$$

του οποίου ο υπολογισμός βασίζεται στην αναδρομική σχέση
$$I_{k+1} = \frac{1}{2k}\frac{y}{(y^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k}I_k$$ (βλ. απόδ. σελ 263 βιβλίο)

4. Χρήσιμες αντικαταστάσεις

α) Ρητές συναρτήσεις των cosx, sinx.

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx \quad (1)$$

όπου $R(u,v)$ πηλίκο πολυωνύμων με μεταβλητές u και v χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = \tan\frac{x}{2}$.

όπου τότε $\cos x = \dfrac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\cos^2 x/2 + \sin^2 x/2} = \dfrac{1-\tan^2 x/2}{1+\tan^2 x/2} = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \quad (2)$

και $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2u}{1+u^2}$

Επίσης, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2} \Rightarrow dx = \dfrac{2du}{1+u^2} \quad (3)$

Άρα $(1) \overset{(2)(3)}{=} \displaystyle\int R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\,du$

Το οποίο ανάγεται στην ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

β) Ολοκληρώματα αλγεβρικών συναρτήσεων ειδικής μορφής

β1) $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx \quad (1)$

Θέτω $x = \sin t$ οπότε $\sqrt{1-x^2} = \cos t$, $dx = \cos t\,dt \quad (2)$

οπότε $(1) \overset{(2)}{=} \int R(\sin t, \cos t)\cos t\,dt$ το οποίο ανάγεται στην περίπτωση 4α.

β2) $\longrightarrow$

β2) $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx \quad (1)$

α' τρόπος: $x = \frac{1}{\cos t}$, $\sqrt{x^2-1} = \frac{\sin t}{\cos t}$, $dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt \quad (2)$

οπότε $(1) \overset{(2)}{=} \int R\left(\frac{1}{\sin t}, \frac{\sin t}{\cos t}\right)\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \int R_1(\cos t, \sin t)dt$

το οποίο ανάγεται στην περίπτωση 4α

β' τρόπος: (καλύτερος)

$u = x + \sqrt{x^2-1}$ τότε $x = \frac{u^2+1}{2u}$, $\sqrt{x^2-1} = \frac{u^2-1}{2u}$

και $dx = \frac{u^2-1}{2u^2}du \quad (3)$

οπότε $(1) \overset{(3)}{=} \int R\left(\frac{u^2+1}{2u}, \frac{u^2-1}{2u}\right)\frac{u^2-1}{2u^2}du$

το οποίο ανάγεται στην περίπτωση 3.

β3) $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx \quad (1)$

συνεφαπτομένη

α' τρόπος: $x = -\cot t$ Τότε $\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\sin t}$, $dx = \frac{1}{\sin^2 t}dt \quad (2')$

άρα $(1) \overset{(2')}{=} \int R\left(-\frac{\cos t}{\sin t}, \frac{1}{\sin t}\right)\frac{1}{\sin^2 t}dt = \int R_1(\cos t, \sin t)dx$

το οποίο ανάγεται στην 4α

β' τρόπος: (καλύτερος)

$u = x + \sqrt{x^2+1}$ τότε $x = \frac{u^2-1}{2u}$, $\sqrt{x^2-1} = \frac{u^2+1}{2u}$,

$dx = \frac{u^2+1}{2u^2}du \quad (3')$ οπότε $(1) \overset{(3')}{=} \int R\left(\frac{u^2-1}{2u}, \frac{u^2+1}{2u}\right)\frac{u^2+1}{2u^2}du$

το οποίο ανάγεται στην περίπτωση 3.