• Βασικές ιδιότητες εικόνας και αντίστροφης εικόνας.

Έστω $f: X \to Y$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

i) Αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, τότε $f(A_1) \subseteq f(A_2)$

ii) Αν $A_1, A_2 \subseteq X$, τότε $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

iii) Αν $A_1, A_2 \subseteq X$, τότε $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

[Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος: π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Αν $A_1 = [-1, 0]$ και $A_2 = [0, 1]$. Τότε $\{0\} = f(\{0\}) = f(A_1 \cap A_2)$ και
$f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1]$. Αν η f είναι 1-1, έχουμε $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.]

iv) Αν $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$. Επίσης $\begin{cases} f^{-1}(Y) = X \text{ και} \\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \end{cases}$

v) Αν $B_1, B_2 \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
και $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

vi) Αν $B \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

vii) Αν $A \subseteq X$, τότε $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

[Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$,
και $A = [0, 1]$. Τότε $f^{-1}(f(A)) = [-1, 1]$. Έχουμε $A = f^{-1}(f(A))$ αν η f
είναι 1-1.]

viii) Αν $B \subseteq Y$, τότε $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

[Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. π.χ. $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}$,
και $B = [-1, 1]$. Τότε $f(f^{-1}(B)) = [0, 1]$. Έχουμε $f(f^{-1}(B)) = B$, αν η f είναι επί.]

• <u>Ορ (Αντίστροφης συνάρτησης)</u>: Έστω $f: X \to Y$ 1-1. Τότε $f: X \to f(X)$ 1-1 και επί. Επιπλέον, $\forall y \in f(X)$, $\exists$ μοναδικό $x_y \in X$ τ.ω. $f(x_y) = y$. Ορίζουμε $f^{-1}: f(X) \to X$ όπου για κάθε $y \in f(X)$, θέτουμε $f^{-1}(y) = x_y$ (δηλ. το μοναδικό $x_y \in X$ τ.ω. $f(x_y) = y$). Δηλαδή, έχουμε $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.

Η f καλείται η αντίστροφη συνάρτηση της f.

• <u>Ορ</u>: Αν $X \neq \emptyset$, ορίζουμε την ταυτοτική συνάρτηση επί του X ως (Identity) $Id_X: X \to X$ με κανόνα $Id_X(x) = x$, $\forall x \in X$

• <u>Βασικές ιδιότητες αντίστροφης συνάρτησης</u>: Έστω $f: X \to Y$, 1-1.

→ Οι $f^{-1} \circ f: X \to X$ και $f \circ f^{-1}: f(X) \to f(X)$ ορίζονται

→ $f^{-1} \circ f = Id_X$ και $f \circ f^{-1} = Id_{f(X)}$.

• <u>Πράξεις συναρτήσεων και διάταξη</u>: Έστω $A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: A \to \mathbb{R}$

i) Ορίζουμε $f+g: A \to \mathbb{R}$ με $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$.

ii) Αν $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $tf: A \to \mathbb{R}$ με $(tf)(x) = t f(x)$, $\forall x \in A$.

iii) Ορίζουμε $f \cdot g: A \to \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in A$.

iv) Αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, ορίζουμε $\frac{f}{g}: A \to \mathbb{R}$ με $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall x \in A$.

v) Λέμε ότι $f \leq g$, αν $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$.

• <u>Μονοτονία</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και $f: A \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι

α) Η f αύξουσα (αντ. γνησίως αύξουσα) αν $\forall x, y \in A$ με $x < y$ έχουμε $f(x) \leq f(y)$ (αντ. $f(x) < f(y)$).

ii) Η f φθίνουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) αν $\forall x,y \in A$ με $x<y$ έχουμε $f(x) \geq f(y)$.
(αντ. $f(x) > f(y)$).

iii) Η f μονότονη (αντ γνησίως μονότονη) αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.
(αντ γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα).

• Φραξιμότητα: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και $f: A \to \mathbb{R}$.

i) Η f καλείται άνω φραγμένη αν $\exists M \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) \leq M$, $\forall x \in A$

ii) " " " κάτω φραγμένη ——— $f(x) \geq M$, $\forall x \in A$

iii) " " " φραγμένη αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.
[Ισοδύναμα, $\exists M > 0$ τ.ω. $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$.]

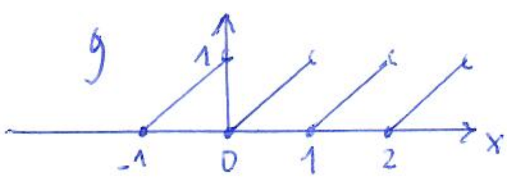
• Ορ: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η f καλείται άρτια (αντ. περιττή) αν $\forall x \in \mathbb{R}$
έχουμε $f(-x) = f(x)$ (αντ. $f(-x) = -f(x)$).

π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ άρτια, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^3$ περιττή

• Ορ: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η f καλείται περιοδική (με περίοδο α), αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$
με $\alpha \neq 0$, τ.ω. $f(x+\alpha) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

π.χ. $f(x) = \sin x$ 2π- περιοδική

$g(x) = x - \lfloor x \rfloor$ 1- περιοδική
$\lfloor x \rfloor$: ακέραιο μέρος



• Παρατήρηση: Αν η f έχει περίοδο $\alpha (\neq 0)$ τότε (και το 2α περίοδος της f)
$\forall k \in \mathbb{Z}$ με $k \neq 0$ το $k \cdot \alpha$ είναι περίοδος της f.

§ 2 Παραδείγματα συναρτήσεων

1) Ακολουθίες $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

2) Πολυωνυμικές συναρτήσεις. Πολυώνυμο καλείται κάθε συνάρτηση $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο της μορφής $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ όπου $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ με $\alpha_n \neq 0$. Το n καλείται βαθμός του πολυωνύμου P. Κάθε $x \in \mathbb{R}$ τ.ω. $P(x) = 0$ καλείται ρίζα του P. Ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n ρίζες.

3) Ρητές συναρτήσεις. Μία $f: X \to \mathbb{R}$ καλείται ρητή αν είναι της μορφής $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ όπου P και Q πολυώνυμα και $X = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

4) Μία $f: X \to \mathbb{R}$ καλείται αλγεβρική αν $\forall x \in X$ ικανοποιεί την εξίσωση

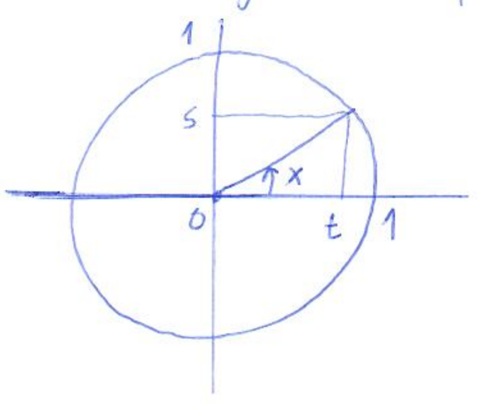
$$P_0(x) + P_1(x) f(x) + P_2(x) (f(x))^2 + \dots + P_k(x) (f(x))^k = 0,$$

όπου $P_0, \dots, P_k$ πολυωνυμικές. π.χ. $f(x) = \sqrt{x}$, $-x + (f(x))^2 = 0$, $\forall x \geq 0$. Κάθε ρητή είναι αλγεβρική $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow -P(x) + Q(x) f(x) = 0$.

5) Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

sin (sinus) → ημίτονο, cos (cosinus) → συνημίτονο, tan (tangent) → εφαπτομένη

cot (cotangent) → συνεφαπτομένη



$\sin x = s$, $\cos x = t$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \forall x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \forall x \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Ιδιότητες τριγωνομετρικών συναρτήσεων

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ και $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

ii) Οι $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ και $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ περιοδικές με ελάχιστη θετική περίοδο το 2π. Η $\cos$ άρτια και η $\sin$ περιττή:

$\cos(-x) = \cos x$ και $\sin(-x) = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $0 < \sin x < x < \tan x$

Πράξεις και ταυτότητες: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

ii) $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

iii) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$

6) Εκθετικές συναρτήσεις

Έστω $\alpha > 0$. Ορίζουμε $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$. Η f καλείται εκθετική με βάση το α.

- Ιδιότητες: i) Αν $\alpha, \beta > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

$$\alpha^{x+y} = \alpha^x \cdot \alpha^y, \quad (\alpha^x)^y = \alpha^{x \cdot y}, \quad \alpha^{-x} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^x, \quad (\alpha\beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$$

ii) Αν $\alpha = 1$, τότε η $f(x) = \alpha^x = 1$ σταθερή

Αν $\alpha > 1$, τότε η $f(x) = \alpha^x$ γνησίως αύξουσα

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε η $f(x) = \alpha^x$ γνησίως φθίνουσα.

- Παρατήρηση: Έστω $\alpha > 0$, μπορούμε να ορίσουμε τον α^x ως εξής:

i) Αν $x \in \mathbb{N}$, θέτουμε $\alpha^x = \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$ (x φορές)

ii) Αν $x = 0$, θέτουμε $\alpha^0 = 1$

iii) Αν $x \in \mathbb{Z}$ και $x < 0$, θέτουμε $\alpha^x = \dfrac{1}{\alpha^{-x}}$

iv) Αν $x = \frac{1}{n}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $\alpha^{1/n} = \sqrt[n]{\alpha}$

v) Αν $x = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $\alpha^x = (\alpha^{1/n})^m$

vi) Αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $(q_n)_n$ ακολουθία ρητών αριθμών με $q_n \xrightarrow{n \to \infty} x$,

θέτουμε $\alpha^x = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha^{q_n}$.

ΑΣΚ (Βασικές ιδιότητες εικόνας και αντίστροφης εικόνας)

Έστω $f: X \to Y$.

Δ.ο. iii) Αν $A_1, A_2 \subseteq X$ τότε $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

και αν η f είναι 1-1 τότε $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

vi) Αν $B \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

vii) Αν $A \subseteq X$, τότε $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

και αν η f είναι 1-1 τότε $A = f^{-1}(f(A))$

viii) Αν $B \subseteq Y$, τότε $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

και αν η f είναι επί, τότε $f(f^{-1}(B)) = B$.

Λύση: iii) Αν $y \in f(A_1 \cap A_2)$, τότε $\exists x \in A_1 \cap A_2$ τ.ω. $f(x) = y$. Άρα $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

Αν τώρα η f είναι 1-1 και $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ τότε $\exists x_1 \in A_1$ και $\exists x_2 \in A_2$ τ.ω. $f(x_1) = f(x_2) = y$. Επειδή όμως η f είναι 1-1 πρέπει να έχουμε $A_1 \ni x_1 = x_2 \in A_2 \Rightarrow y = f(x_1)$ με $x_1 \in A_1 \cap A_2$ δηλαδή $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

vi) Εξ' ορισμού $x \in f^{-1}(Y \setminus B) \overset{op}{\Longleftrightarrow} f(x) \in Y \setminus B \Leftrightarrow f(x) \notin B$

$\Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(B)$.

vii) Εξ' ορισμού $x \in f^{-1}(f(A)) \overset{op}{\Longleftrightarrow} f(x) \in f(A)$ και προφανώς αν $x \in A$, τότε $f(x) \in f(A)$. Άρα $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Αν τώρα η f είναι 1-1 και $x \in f^{-1}(f(A))$, δηλαδή $f(x) \in f(A)$, δηλαδή $f(x) = f(a)$ για κάποιο $a \in A$, τότε έχουμε $x = a \in A$. Επομένως $A = f^{-1}(f(A))$.

viii) Εξ' ορισμού $y \in f(f^{-1}(B)) \Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$ τ.ω. $f(x) = y$

και $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Άρα αν $y \in f(f^{-1}(B))$ ισχύει $y = f(x) \in B$. Αν τώρα η f είναι επί και $y \in B$, τότε υπάρχει $x \in X$ τ.ω. $f(x) = y \in B$. Επομένως $x \in f^{-1}(B)$ και $y \in f(f^{-1}(B))$.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f, g : [0,1] \to [0,1]$ με $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ και $g(t) = 4t(1-t)$. (α) Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$.
(β) Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} αλλά δεν ορίζεται η g^{-1}

<u>Λύση</u> (α): $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = \frac{1-4t(1-t)}{1+4t(1-t)} = \frac{1-4t+4t^2}{1+4t-4t^2}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right) = 4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\frac{2x}{1+x} = \frac{8x(1-x)}{(1+x)^2}$

(β) Έχουμε $f(x) = \frac{2}{1+x} - 1$ και η συνάρτηση $\begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{2}{1+x} \end{array}$ είναι γνησίως φθίνουσα

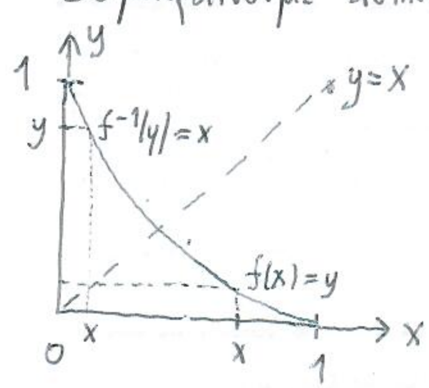
άρα η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.

Μάλιστα έχουμε $f([0,1]) = [0,1]$. Άρα $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$

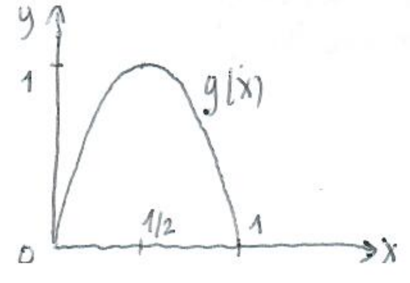
Για να προσδιορίσουμε την f^{-1}, λύνουμε ως προς x την εξίσωση: $y = f(x)$

$\Leftrightarrow y = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow y + yx = 1 - x \Leftrightarrow (y+1)x = 1-y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{1+y}$, δηλαδή $f^{-1} = f$.



Επειδή $f^{-1} = f$, η γραφική παράσταση της $f : [0,1] \to [0,1]$ είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y = x$.



Η συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1, άρα δεν είναι αντιστρέψιμη.

ΑΣΚ: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(y) - f(x) \leq (y-x)^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Δ.ο. η f είναι σταθερή.

Λύση: Εναλλάσσοντας τα x και y, βρίσκουμε πρώτα ότι

$$f(x) - f(y) \leq (y-x)^2, \quad \text{άρα} \quad |f(y) - f(x)| \leq (y-x)^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Έπειτα, θεωρούμε ένα διάστημα $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ και το διαιρούμε σε n ίσα υποδιαστήματα: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots [x_{n-1}, x_n]$ με $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \beta$ και $x_{i+1} - x_i = \frac{\beta - \alpha}{n}$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1$. Έχουμε λοιπόν

$$|f(\beta) - f(\alpha)| = |f(x_n) - \underbrace{f(x_{n-1}) + f(x_{n-1})} - \underbrace{f(x_{n-2}) + \cdots + f(x_1)} - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x_n) - f(x_{n-1})| + |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| + \cdots + |f(x_1) - f(x_0)|$$

$$\leq |x_n - x_{n-1}|^2 + |x_{n-1} - x_{n-2}|^2 + \cdots + |x_1 - x_0|^2$$

$$\leq n \cdot \frac{(\beta - \alpha)^2}{n^2} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{n}$$

Καθώς το n γίνεται μεγάλο, έχουμε $\frac{(\beta - \alpha)^2}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, άρα ισχύει $f(\beta) = f(\alpha)$ για οποιοδήποτε αυθαίρετο διάστημα $[\alpha, \beta]$, δηλαδή η f είναι σταθερή.

ΑΣΚ 15 (Σημειώσεις Γιαννόπουλος σελ 73)

Λύση: (α) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$

$\Rightarrow f(0) = 0$

$f(0) = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

(β) Με επαγωγή: για $n=2$ ισχύει ότι $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Έπειτα υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $m \geq 2$ ότι $f(x_1 + \dots + x_m) = f(x_1) + \dots + f(x_m)$, $\forall x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$.

Επομένως, θα έχουμε για $x_1, \dots, x_{m+1} \in \mathbb{R}$:

$$f((x_1 + \dots + x_m) + x_{m+1}) = \underbrace{f(x_1 + \dots + x_m)}_{\text{η επαγωγική υπόθεση}} + f(x_{m+1})$$

και $f(x_1 + \dots + x_{m+1}) = f(x_1) + \dots + f(x_m) + f(x_{m+1})$.

(γ) Ειδικότερα, έχουμε $f(nx) = n f(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

και $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = n f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1)$.

(δ) Έστω $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$, με $q = \frac{n}{m}$ και $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Αν $n > 0$, τότε έχουμε $\left.\begin{cases} f(n) = f(n \cdot 1) = n f(1) \\ f(n) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = m f\left(\frac{n}{m}\right) \end{cases}\right] \Rightarrow f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m} f(1)$

Αν $n < 0$, τότε έχουμε από (α): $f\left(\frac{n}{m}\right) = -f\left(\frac{-n}{m}\right) = -\left(-\frac{n}{m}\right) f(1)$

$= \frac{n}{m} f(1)$

Άρα $f(q) = q f(1)$, $\forall q \in \mathbb{Q}$.