Κεφάλαιο 6 - Υπακολουθίες και βασικές ακολουθίες

Παρατήρηση 1.1.3 σελ. 144: Έστω (k_n) μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε, $k_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (*)

Άσκηση: Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει. Σωστό ή Λάθος?

Λύση

Έστω $a_n \to a$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$ (αφού η (a_n) συγκλίνει).

Έστω $(b_n) = (a_{k_n})$ υπακολουθία της (a_n) και έστω $\varepsilon > 0$.
Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ έχουμε $k_n \overset{*}{\geq} n \geq n_0$ άρα $|b_n - a| = |a_{k_n} - a| < \varepsilon$

δηλ $b_n \to a$.

Άρα $\boxed{\text{Σωστό}}$

<u>Θεώρημα Bolzano-Weierstrass:</u> Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υπακολουθία που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό

<u>Άσκηση:</u> Υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Σωστό ή Λάθος?

<u>Λύση:</u>

Από το Θ. Bolzano-Weierstrass, κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα $\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$

<u>Άσκηση:</u> Αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη, τότε δεν έχει φραγμένη υπακολουθία. Σωστό ή Λάθος?

<u>Λύση:</u> Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_{2k}=k$ και $a_{2k-1}=1$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Η (a_n) δεν είναι φραγμένη, όμως η υπακολουθία (a_{2k-1}) είναι σταθερή. Άρα, φραγμένη

Ans $\boxed{\text{Λάθος}}$

Ορισμός 1.4.1 (σελ 151)

Μια ακολουθία (a_n) λέγεται ακολουθία Cauchy, αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: αν $m, n \geq n_0(\varepsilon)$, τότε $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Θεώρημα 1.4.5 (σελ. 153)

Μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy

Άσκηση: Έστω η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, για κάθε n. Να δείξετε ότι η (x_n) συγκλίνει

Απόδειξη: (α' τρόπος)

Αρκεί ν.δ.ο. η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy. Έστω $m>n$. Τότε

$$|x_n - x_m| = \left|1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - 1 - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \dots - \frac{1}{m^2}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(m-1)^2} + \frac{1}{m^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(m-2)(m-1)} + \frac{1}{(m-1)m}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

Έστω $\varepsilon>0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει n_0: $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Τότε από το $m > n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$.

Άρα, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και επομένως συγκλίνει β' τρόπος

Έστω $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$, $\forall n$

Ισχύει: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, $\forall n$, οπότε η (x_n) είναι αύξουσα

Παρατηρούμε ότι

$$x_n \leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2, \text{ για κάθε } n$$

Άρα, η (x_n) είναι άνω φραγμένη, οπότε συγκλίνει