§ 4 Όρια συναρτήσεων

• <u>Ορ</u>: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A και $\ell \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ (ισοδύναμα $\forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ με $x \neq x_0$) έχουμε ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Λέμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, αν $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ έχουμε $f(x) > M$

Λέμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, αν $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ έχουμε $f(x) < -M$.

• <u>Παρατήρηση</u>: Δεν χρειάζεται να ορίζεται η f στο x_0 για να μιλήσουμε για το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Το όριο περιγράφει τη συμπεριφορά της f γύρω από το x_0 και δεν λαμβάνει καθόλου υπόψη το x_0

• <u>Παραδείγματα</u> 1) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Τότε $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

2) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Τότε $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \neq 0 \\ 2 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$. Τότε $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, ενώ $f(0) = 2$.

§5 Πλευρικά σημεία συσσώρευσης και πλευρικά όρια

• <u>Ορ</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Το x_0 καλείται σ.σ του A από τα δεξιά αν $\forall \delta > 0, \exists x \in A \cap (x_0, x_0+\delta)$.

———————— από τα αριστερά αν $\forall \delta > 0, \exists x \in A \cap (x_0-\delta, x_0)$.

• <u>Ορ</u> (Πλευρικά όρια): Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $x_0 \in \mathbb{R}$ σ.σ του A από δεξιά (αντ. αριστερά) και $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$.

i) Έστω $\ell \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ανν

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in A \cap (x_0, x_0+\delta)$ έχουμε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

(Αντίστοιχα, λέμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ ανν

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in A \cap (x_0-\delta, x_0)$ έχουμε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$).

ii) Λέμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ (αντ. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$) ανν

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in A \cap (x_0, x_0+\delta)$ έχουμε $f(x) > M$

(αντ. $\forall x \in A \cap (x_0-\delta, x_0)$)

iii) Λέμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ (αντ. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$) ανν

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in A \cap (x_0, x_0+\delta)$ έχουμε $f(x) < -M$

(αντ. $\forall x \in A \cap (x_0-\delta, x_0)$)

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ σ.σ. του A από αριστερά και από δεξιά. Το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει ανν υπάρχουν τα $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ και είναι ίσα μεταξύ τους.

Στην περίπτωση αυτή: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

§6 <u>Σημεία συσσώρευσης στο ∞ και όρια στο ∞</u>

• <u>Ορ</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι το $+\infty$ (αντίστοιχα το $-\infty$) είναι σ.σ. του A αν $\forall M > 0$, υπάρχει $x \in A$ με $x > M$ (αντίστοιχα $x < -M$).

• <u>Ορ</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ που έχει το $+\infty$ (αντ. το $-\infty$) ως σ.σ. και $f: A \to \mathbb{R}$.

i) Έστω $\ell \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (αντ. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$) ανν

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ τ.ω. $\forall x \in A$ με $x > M$, έχουμε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$
(αντ. με $x < -M$)

ii) Λέμε ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (αντ. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$) ανν

$\forall M_1 > 0$, $\exists M_2 > 0$ τ.ω. $\forall x \in A$ με $x > M_2$, έχουμε $f(x) > M_1$
(αντ. με $x < -M_2$)

iii) Λέμε ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (αντ. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$) ανν

$\forall M_1 > 0$, $\exists M_2 > 0$ τ.ω. $\forall x \in A$ με $x > M_2$, έχουμε $f(x) < -M_1$
(αντ. με $x < -M_2$)

§7 Αρχή μεταφοράς για το όριο / Πράξεις και σύνθεση

- <u>Θεώρημα</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A και $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ανν για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ στοιχείων του A τ.ω. $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, έχουμε $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.

- <u>Παρατήρηση</u>: Για ν.δ.ο. $f(x) \overset{x\to x_0}{\not\longrightarrow} \ell$ αρκεί να βρούμε μία ακολουθία $(x_n)_n$ στο A τ.ω. $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \ell$.

- <u>Πρόταση</u>: Έστω x_0 σ.σ. του $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $\ell, m \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + m, \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell \cdot m$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} (t\, f(x)) = t\,\ell$$

Αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, και $m \neq 0$, έχουμε $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\ell}{m}$.

- <u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $x_0 \in \mathbb{R}$ σ.σ. του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$ και $\ell \in B$. Τότε αν η $g : B \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο ℓ, έχουμε $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\ell)$.

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $x_0 \in \mathbb{R}$ σ.σ. του A και $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τ.ω.

(i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \ \forall x \in A$, (ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$

• <u>Παραδείγματα</u>: 1) Θ.δ.ο. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Επειδή η συνάρτηση $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια, αρκεί ν.δ.ο. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Από τις ανισότητες

$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, προκύπτει ότι $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Συμπεραίνουμε από τη συνέχεια του συνημιτόνου ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$ και από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2) Το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Από την αρχή της μεταφοράς αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $y_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ με $x_n \neq 0, y_n \neq 0$ ώστε $\lim\limits_{n \to \infty} \sin \frac{1}{x_n} \neq \lim\limits_{n \to \infty} \sin \frac{1}{y_n}$. Επιλέγουμε $x_n = \frac{1}{\pi n}$ και

$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι $\sin \frac{1}{x_n} = \sin \pi n = 0 \xrightarrow{n \to \infty} 0$

ενώ $\sin \frac{1}{y_n} = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1$.

§ 8 Συνέχεια και όρια

- <u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και $f: A \to \mathbb{R}$.

(i) Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

(ii) Αν x_0 σ.σ. του A τότε η f είναι συνεχής στο x_0 ανν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

[ανν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και ισούνται με $f(x_0)$].

- <u>Παρατήρηση</u> (Είδη ασυνέχειας): Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $x_0 \in A$ σ.σ. του A από αριστερά και δεξιά, και $f: A \to \mathbb{R}$ ασυνεχής στο x_0. Τότε υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

(i) <u>Άρσιμη ασυνέχεια</u>: Τα πλευρικά όρια υπάρχουν και $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ όμως η τιμή της f στο x_0 δεν είναι ο ℓ.

(ii) <u>Ασυνέχεια α' είδους</u>: Τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά.

Η διαφορά $\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι το "άλμα" της f στο x_0.

(iii) <u>Ασυνέχεια β' είδους</u>: Κάποιο από τα πλευρικά όρια της f καθώς $x \to x_0$ δεν υπάρχει.

- <u>Θεώρημα</u> (αντίστροφης συνάρτησης): Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ 1-1 και συνεχής. Τότε η f είναι γνησίως μονότονη. Επιπλέον, η $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ (με $f(I)$ διάστημα) είναι συνεχής και έχει την ίδια μονοτονία με την f.

ΑΣΚ: Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x\notin\mathbb{Q} \text{ ή } x=0\\ \frac{1}{q} & \text{αν } x=\frac{p}{q} \text{ με } p,q\in\mathbb{N},\ \gcd(p,q)=1\end{cases}$

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

Δ.ο. $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\forall x_0\in[0,1]$.

Λύση: Έστω $x_0\in[0,1]$ και $\varepsilon>0$. Θέτουμε $M_\varepsilon=\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor$ ακέραιο μέρος του $\frac{1}{\varepsilon}$

και $A_\varepsilon=\{y\in[0,1]: y\neq x_0 \text{ και } f(y)\geq\varepsilon\}$. Αν $y\in A_\varepsilon$ τότε $\begin{cases} y\in\mathbb{Q} \text{ και}\\ y\neq 0\end{cases}$

έχουμε $y=\frac{p}{q}$ όπου $p,q\in\mathbb{N}$, $p\leq q$ και $f(y)=\frac{1}{q}\geq\varepsilon$.

Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι το πολύ ίσο με το πλήθος των ζευγαριών $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ όπου $q\leq M_\varepsilon$ και $p\leq q$. Επομένως δεν ξεπερνάει το $\frac{M_\varepsilon(M_\varepsilon+1)}{2}$, δηλ το A_ε είναι πεπερασμένο σύνολο.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $A_\varepsilon=\{y_1,\dots,y_{m_\varepsilon}\}$ όπου $m_\varepsilon\in\mathbb{N}$.

Ο αριθμός $\delta=\min\{|x_0-y_1|,\dots,|x_0-y_{m_\varepsilon}|\}$ είναι γνήσια θετικός.

Επομένως για $x\in[0,1]$, $0<|x-x_0|<\delta$ ισχύει $x\notin A_\varepsilon$

και $0\leq f(x)<\varepsilon$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$.

ΑΣΚ: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$, δ.ο. το $+\infty$ είναι σ.σ. του A αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$.

Λύση: το $+\infty$ είναι σ.σ. του A $\overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall M>0, \exists x\in M$ ώστε $x>M$

Αν το $+\infty$ σ.σ του A, επιλέγοντας $M=1,2,\dots n\dots$ κατασκευάζουμε μία ακολουθία $x_1,\dots,x_n,\dots$ στοιχείων του A τ.ω $x_n>n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα $x_n\xrightarrow{n\to\infty}+\infty$.