Κεφάλαιο 5

Παράγωγοι Συναρτήσεων

Θεώρημα 5.1.3 σελ. 111 : Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in(a,b)$. Αν η f παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f είναι συνεχής στο x_0

Άσκηση : Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε η f είναι συνεχής στο (a,b). Σωστό ή Λάθος?

Λύση

Έστω $x\in(a,b)$. Αφού από την υπόθεσή μας η f είναι παραγωγίσιμη στο x, θα είναι και συνεχής στο x, βάσει του Θεωρήματος 5.1.3

Άρα ΣΩΣΤΟ

Θεώρημα 4.4.9 σελ. 94 (Αρχή μεταφοράς για το όριο)

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και έστω x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν: για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο ℓ.

Ορισμός 5.1.1 σελ. 109: Έστω $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a,b)$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Άσκηση: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim_{n \to \infty} n f(1/n) = 0$. Σωστό ή λάθος?

Λύση:

Είναι $f(0) = f'(0) = 0$ (1)

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ θα ισχύει ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (2)$$

Από την αρχή της μεταφοράς για το όριο, αν $x_n \neq 0$ και $x_n \to 0$, τότε $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0$. Θεωρώντας την ακολουθία $x_n = 1/n \to 0$ παίρνουμε:

$$\lim_{n \to \infty} n f(1/n) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(1/n)}{1/n} = 0$$

Άρα, $\boxed{\text{ΣΩΣΤΟ}}$

Άσκηση: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0=a$, τότε $f'(a)=0$. Σωστό ή Λάθος?

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=1-x$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0=0$ (αφού $f(0)=1>0=f(1)$, άρα max έχουμε στο $x_0=0$)

Όμως $f'(x)=-1$, για κάθε $x\in[0,1]$, άρα $f'(0)=-1\neq 0$

Άρα, $\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$

Θεώρημα Μέσης Τιμής: (5.6.2 σελ 123) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Άσκηση: Αν $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,\infty)$ και $f(0)=0$, τότε $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,\infty)$

Σωστό ή Λάθος?

Λύση: Έστω $x>0$. Από Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[0,x]$ έχουμε:

Υπάρχει $\xi_x\in(0,x)$ ώστε

$$f'(\xi_x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow f'(\xi_x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow f'(\xi_x)\cdot x=f(x)-f(0)\ (1)$$

Αφού $x>0$ και $f'(\xi_x)\geq 0$ από την (1) έχουμε ότι

$f(x)-f(0)\geq 0\Leftrightarrow f(x)\geq 0$. Για $x=0$, έχουμε $f(x)=f(0)=0$

Άρα, $\boxed{\text{ΣΩΣΤΟ}}$

Θεώρημα 5.6.1 (Rolle) σελ 122: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Υποθέτουμε επιπλέον ότι $f(a)=f(b)$. Τότε υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε $f'(x_0)=0$.

Άσκηση: Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και $f(0)=f(1)=f(2)=0$, τότε υπαρχει $x_0\in(0,2)$ ώστε $f''(x_0)=0$

Σωστό ή Λαθος?

Λύση:

Εφαρμόζοντας το Θ. Rolle για την f στα $[0,1]$ και $[1,2]$ βρίσκουμε $y_1\in(0,1)$ με $f'(y_1)=0$ και $y_2\in(1,2)$ με $f'(y_2)=0$

Εφαρμόζοντας πάλι ($2^{η}$ φορά) το Θ. Rolle για την f' στο $[y_1,y_2]$ βρίσκουμε $x_0\in(y_1,y_2)$ με $f''(x_0)=0$.

Τελος, $0<y_1<x_0<y_2<2$, δηλ. $x_0\in(0,2)$.

Αρα $\boxed{\text{ΣΩΣΤΟ}}$

Θεώρημα Μέσης Τιμής (σελ 123). Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $x_0\in(a,b)$:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Άσκηση: Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in(a,b)$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in(a,b)\setminus\{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$, τότε $f'(x_0)=\ell$. Σωστό ή λάθος?

Λύση:

Για να δείξουμε ότι $f'(x_0)=\ell$ αρκεί ν.δ.ο. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$ (από υπόθεση), υπάρχει $\delta>0$: αν $0<|y-y_0|<\delta$, τότε $|f'(y)-\ell|<\varepsilon$

Έστω $x\in(a,b)$ με $x_0<x<x_0+\delta$. Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι η f συνεχής στο $[x_0,x]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,x), οπότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_0,x]$ βρίσκουμε ότι $y_x\in(x_0,x)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(y_x)$.

Όμως, $0<|y_x-x_0|<|x-x_0|<\delta$, άρα $|f'(y_x)-\ell|<\varepsilon$

Συνεπώς; $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\ell\right|=|f'(y_x)-\ell|<\varepsilon \quad (*)$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχαίο και η $(*)$ ισχύει $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι το όριο από αριστερά ισούται με ℓ, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και

Άσκηση: Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$. Σωστό ή Λάθος?

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -x^2$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$, άρα δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$

Όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0: Έχουμε

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{|x^2|}{|x|} = |x| \to 0, \text{ όταν } x \to 0$$

Άρα $f'(0) = 0$.

Επομένως $\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$

Άσκηση:

Έστω $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, τότε $f'(x)=nx^{n-1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Λύση α' τρόπος

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n.

- Για $n=1$ ισχύει γιατί $f(x)=x$ και $f'(x)=1$
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για n, δηλ. αν $f(x)=x^n$ τότε $f'(x)=nx^{n-1}$
- Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$, δηλ.

Αν $g(x)=x^{n+1}$, τότε $g'(x)=(n+1)x^n$

Πράγματι: $g(x)=x^{n+1}=x\cdot x^n$

και $g'(x)=(x\cdot x^n)'=x'x^n+x(x^n)'=$

$= x^n + x\cdot n x^{n-1} = x(x^{n-1}+n x^{n-1}) =$

$= x\, x^{n-1}(n+1) = x^n(n+1).$

β' τρόπος: $f(x)=x^n=\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{n \text{ φορές}}$. Η συνάρτηση $g(x)=x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Άρα:

$$f'(x)=(\underbrace{x\cdot x\cdot x\cdots x}_{n \text{ όροι}})' = x'(\underbrace{x\cdots x}_{n-1 \text{ όροι}}) + x\cdot x'(\underbrace{x\cdots x}_{n-2 \text{ όροι}}) + \dots + (\underbrace{x\cdots x}_{n-1 \text{ όροι}})x' =$$

$\dfrac{n \text{ αθροίσματα}}{(n-1) \text{ όροι}}$ $\quad n\cdot x^{n-1}$

γ' τρόπος: Είναι: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\dfrac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\dots+x_0^{n-1})}{x-x_0}=$

$= x^{n-1}+x_0x^{n-2}+\dots+x_0^{n-1}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\dots+x_0^{n-1})=n\cdot x_0^{n-1}$$

$f'(x)=nx^{n-1}$

Ασκηση

Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι $f'(x_0) = \cos x_0$

Απόδειξη

Δημιουργώ το πηλίκο

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \frac{2\sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)}{h}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\cos\left(\frac{2x_0+h}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \quad (1)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right) =$$

$$= 1\cdot\cos x_0 = \cos x_0$$

Ασκήσεις Α' ομάδας.

5). Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, αν $x \neq 0$ και $f(0)=1$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν η $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Λύση. Είναι $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ (*)

α) Για ν.δ.ο. $f(x)$ παράγ/μη στο $x_0 = 0$ αρκεί ν.δ.ο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \quad (1)$$

Είναι: $f_1(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2}$, $x \neq 0$ (2).

Θα χρησιμοποιήσουμε πλευρικά όρια.

Παρατηρούμε ότι η $f_1(x)$ είναι περιττή αφού ισχύει ότι $f_1(-x) = -f_1(x)$.

Πράγματι: $f_1(-x) = \frac{\sin(-x) - (-x)}{(-x)^2} = \frac{-\sin x + x}{x^2} = -\frac{\sin x - x}{x^2} = -f_1(x)$

Άρα, $\lim_{x \to 0^-} f_1(x) = -\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = 0$ (3) γιατί:

Γνωρίζουμε ότι για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ισχύει ότι $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ (4)

Από την (4) $\Rightarrow \sin x - \sin x < x - \sin x < \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x$

$$\Leftrightarrow 0 < x - \sin x < \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{x - \sin x}{x^2} < \frac{\sin x \cdot \frac{1-\cos x}{\cos x}}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{x - \sin x}{x^2} < \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{x} \quad (5)$$

Ισχύει ότι $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$

άρα ισχύει ότι: $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$ (6).

4 $(5) \overset{(6)}{\Rightarrow} 0 < \frac{x - \sin x}{x^2} < \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}$

$\Rightarrow 0 < \frac{x - \sin x}{x^2} < \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{x}{2}$ (7)

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \frac{x}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ (8)

Από κριτήριο παρεμβολής έχουμε, λόγω (7), (8), ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^2} = 0$$

Οπότε αποδείχθηκε η (3).

Άρα $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$ (9).

Δηλ. η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

β). Η f' είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Γ.δ.ο. η f' συνεχής στο 0

αρκεί ν.δ.ο. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. όπου $f'(x)$ δίνεται από (*).

Από την (4) έχουμε: $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x \cos x < x\cos x < \sin x \Leftrightarrow \sin x\cos x - \sin x < x\cos x - \sin x < \sin x - \sin x$

$\Leftrightarrow \sin x(\cos x - 1) < x\cos x - \sin x < 0 \Leftrightarrow 0 > \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} > -\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}$ (10)

Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sin x\,\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=0\cdot 1=0.\quad (11)$$

Άρα, από το κριτήριο της παρεμβολής & λόγω των (10), (11) έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=0.\quad (12).$$

Αφού η f' περιττή (καθώς $f'(-x)=-f'(x)$) θα ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}f'(x)=-\lim_{x\to 0^+}f'(x)=0=f'(0)$$

Δηλ., η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

12) Έστω $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f(x_0)=0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Λύση

Αφού η f παραγωγίσιμη στο x_0 έχουμε:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{f(x_0)=0}{=\!=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} \quad (1)$$

Αφού η g συνεχής στο x_0 έχουμε:

$$g(x_0) = \lim_{x \to x_0} g(x) \quad (2)$$

Για να δείξουμε ότι η fg παραγωγίσιμη, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \quad (3)$$

Είναι: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \overset{f(x_0)=0}{=\!=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \overset{(1)(2)}{=\!=} f'(x_0) \cdot g(x_0).$$

Άρα η fg είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0).$$

13) Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα που υποδεικνύεται.

(α) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ στο $[-2, 2]$

(β) $f(x) = x^5 + x + 1$ στο $[-1, 1]$

(γ) $f(x) = x^3 - 3x$ στο $[-1, 2]$

Λύση

(α) Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (-2, 2)$ (γενικά $\forall x_0 \in \mathbb{R}$) ως πολυωνυμική.

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$

Για να βρώ τα κρίσιμα σημεία ψάχνω τις ρίζες της $f'(x)$. Είναι

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0$ (1)

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3(-8) = 4 + 96 = 100$, $x_{1,2} = \frac{2 \pm 10}{6} < \begin{matrix} 2 = x_1 \notin (-2, 2) \\ -\frac{4}{3} = x_2 \in (-2, 2) \end{matrix}$

Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο στο $(-2, 2)$ είναι το $x_2 = -4/3$

Κρίσιμα σημεία είναι επίσης τα άκρα του διαστήματος $[-2, 2]$.

Δηλ. κρίσιμα σημεία είναι και τα $x_3 = 2$ και $x_4 = -2$.

Οπότε έχουμε συνολικά ότι κρίσιμα σημεία είναι τα $x_2 = -4/3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και έχουμε:

$f(-2) = 5$, $f(2) = -11$, $f(-4/3) = 203/27 = 7{,}5$

Άρα $\max(f) = \max\{5, -11, \frac{203}{27}\} = \frac{203}{27}$ και $\min(f) = -11$

β) $f(x) = x^5 + x + 1$, στο $[-1,1]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ ως πολυωνυμική

$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, δηλ η f δεν έχει κρίσιμα σημεία

Έχει όμως κρίσιμα σημεία στα άκρα του $[-1,1]$ δηλ στα

$x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Είναι $f(-1) = -1$ και $f(1) = 3$

Επομένως, $\max(f) = 3$ και $\min(f) = -1$.

δ) $f(x) = x^3 - 3x$ στο $[-1,2]$

Η f είναι παραγ στο $(-1,2)$ ως πολυωνυμική

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ ή $x_2 = 1$

Το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο $(-1,2)$ είναι το $x_2 = 1$

Κρίσιμα σημεία είναι και οι τιμές στα άκρα του $[-1,2]$ δηλ

τα $x_3 = -1$ και $x_4 = 2$.

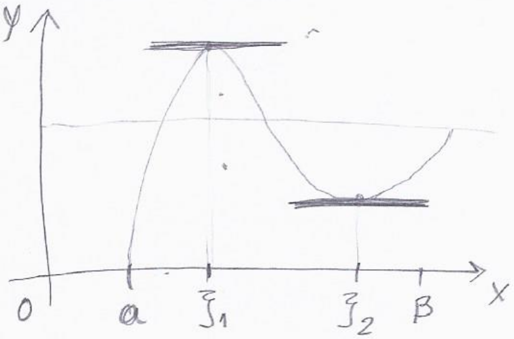
Οπότε υπολογίζουμε τις τιμές

$f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$

Οπότε $\max(f) = 2$ και $\min(f) = -2$

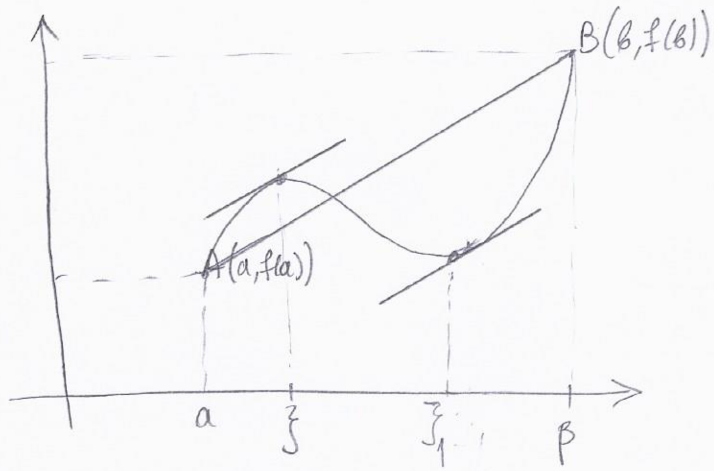
Γεωμετρική Ερμηνεία Θ. Rolle

Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f όπου η εφαπτομένη της είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x



Γεωμετρική ερμηνεία Θ.Μ.Τ

Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f όπου η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$



Παρατήρηση (Θ. Rolle) (Μεθοδολογία)

Όταν θέλουμε ν.δ.ο. μία εξίσωση της μορφής $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) συνήθως χρησιμοποιούμε ένα από τα παρακάτω βασικά θεωρήματα.

α) Θ. Bolzano, που εφαρμόζεται για την f στο $[\alpha,\beta]$

β) Θ. Rolle, που εφαρμόζουμε για τη βοηθητική συνάρτηση F που είναι τ.ω. $F'(x)=f(x)$.

Βασικές περιπτώσεις προσδιορισμού της F, όταν $x\in[\alpha,\beta]$

α) Όταν το συμπέρασμα είναι της μορφής $f'(\xi)=\lambda$, η εφαρμογή γίνεται στη συνάρτηση $F(x)=f(x)-\lambda x$

β) Όταν το συμπέρασμα είναι της μορφής $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$, η εφαρμογή γίνεται στην $F(x)=e^{-\lambda x}f(x)$

γ) Όταν το συμπέρασμα είναι της μορφής $(\xi-\lambda)f'(\xi)=f(\xi)$, η εφαρμογή γίνεται στην $F(x)=\dfrac{f(x)}{x-\lambda}$, $x\neq\lambda$

δ) Όταν το συμπέρασμα είναι της μορφής $\xi f'(\xi)=\nu\cdot f(\xi)$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, η εφαρμογή γίνεται στη συνάρτηση $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^\nu}$

ε) Όταν το συμπέρασμα είναι της μορφής $(\lambda-\xi)f'(\xi)=f(\xi)$, η εφαρμογή γίνεται στη συνάρτηση $F(x)=(x-\lambda)f(x)$

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, υποτίθεται ότι $x\in[\alpha,\beta]$.

Ασκ. 6.175 Κάλλιπος σελ. 282

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^5+4x^3+5x+27=0$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα

ii) Ομοίως και για την εξίσωση: $x^3+4x+a=0$, $a\in\mathbb{R}$.

Λύση

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^5+4x^3+5x+27=0$

Η εξίσωση $f(x)=0$ είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού, επομένως έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι η $f(x)=0$ έχει κι άλλη ρίζα $\rho_1\neq\rho$, με $\rho<\rho_1$, τότε η συνάρτηση $f(x)=x^5+4x^3+5x+27$, $x\in[\rho,\rho_1]$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ. Rolle. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(\rho,\rho_1)$:

$$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 5\xi^4+12\xi^2+5=0$$

Άτοπο, γιατί η τελευταία αυτή εξίσωση δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Ομοίως, καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε $\rho_1<\rho$.

Επομένως, η εξίσωση έχει μια μόνο πραγματική ρίζα

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+4x+a$, $a\in\mathbb{R}$

Η $f(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον πραγματική ρίζα ρ, επειδή είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού. Έστω ότι έχει κι άλλη ρίζα $\rho_1>\rho$, τότε υπάρχει $\xi\in(\rho,\rho_1)$ τ.ω. $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 3\xi^2+4=0$. Άτοπο, διότι η τελευταία αυτή εξίσωση είναι αδύνατη. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $\rho_1<\rho$. Άρα, η $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$

25) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, παρ/μη στο (a,b), με $f(a)=f(b)$. Ν.δ.ο. υπάρχουν $x_1\neq x_2\in(a,b)$: $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

Λύση

σελ. 123

Θ.5.6.2 (Μέσης Τιμής): Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $x_0\in(a,b)$: $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-\alpha}$.

Θέτω $\gamma=\dfrac{\alpha+b}{2}$ (*)

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στα $[a,\gamma]$ και $[\gamma,\beta]$ βρίσκουμε $x_1\in(\alpha,\gamma)$ και $x_2\in(\gamma,b)$ που ικανοποιούν τις

$$f'(x_1)=\frac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-a} \quad \text{και} \quad f'(x_2)=\frac{f(b)-f(\gamma)}{b-\gamma}$$

Χρησιμοποιώντας την $\gamma-\alpha\overset{(*)}{=}\dfrac{b-\alpha}{2}\overset{(*)}{=}b-\gamma$ και την $f(\alpha)=f(b)$ (1) που έχουμε από την υπόθεση έχουμε

$$f'(x_1)+f'(x_2)=\frac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-\alpha}+\frac{f(b)-f(\gamma)}{b-\gamma}=$$

$$=\frac{(b-\gamma)(f(\gamma)-f(\alpha))+(\gamma-\alpha)(f(b)-f(\gamma))}{(\gamma-a)(b-\gamma)}=$$

$$=\frac{\frac{b-\alpha}{2}\cdot\left(\cancel{f(\gamma)}-f(\alpha)+f(b)-\cancel{f(\gamma)}\right)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{2(f(b)-f(\alpha))}{b-\alpha}\overset{(1)}{=}0$$

28) Εστω f,g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[0,a]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,a)$. Υποθέτουμε ότι $f(0)=g(0)=0$ και $f'(x)>0$, $g'(x)>0$ στο $(0,a)$.

α) Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0,a)$, ν.δ.ο. η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0,\alpha)$

β) Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0,\alpha)$, ν.δ.ο. η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$

Λύση

α) Εστω $h(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\in(0,\alpha)$

$$h'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2} \quad (*)$$

Από Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,x]$ για την f, βρίσκουμε ότι υπάρχει

$$\xi\in(0,x) : f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow x f'(\xi)=f(x)-f(0) \Rightarrow$$

$$\overset{\text{υπόθ}}{\Rightarrow} x f'(\xi)=f(x) \quad (1)$$

Όμως η f' αύξουσα και $\xi<x$ άρα $f'(\xi)\leq f'(x)^{(2)}$ οπότε

από (1) λόγω (2) έχουμε ότι $f(x)\leq x f'(x) \Leftrightarrow x f'(x)-f(x)\geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x f'(x)-f(x)}{x^2}\geq 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} h'(x)\geq 0 \text{ στο } (0,a).$$

Αρα η h είναι αύξουσα. (βλ. Θεώρημα 5.6.4 σελ 124)

↳
- αν $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(a,b) \Rightarrow f \uparrow_{\text{στο}} (\alpha,b)$
- αν $f'(x)>0$, $\forall x\in(\alpha,b) \Rightarrow f \Uparrow_{\text{στο}} (\alpha,b)$
- αν $f'(x)\leq 0$, $\forall x\in(\alpha,b) \Rightarrow f \downarrow_{\text{στο}} (\alpha,b)$
- αν $f'(x)<0$, $\forall x\in(\alpha,b) \Rightarrow f \Downarrow_{\text{στο}} (\alpha,b)$
- αν $f'(x)=0$, $\forall x\in(\alpha,b) \Rightarrow f$ σταθερή στο (α,b)

β) Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ καλά ορισμένη στο $(0,\alpha)$

Πράγματι, είναι $\frac{f'}{g'}$ καλά ορισμένη στο $(0,\alpha)$ ⇒ $g'>0$ (από υπόθεση)

Επομένως έχουμε ότι $g(x)>0$ στο $(0,\alpha)$ (βλ. ερώτηση κατανόησης 4)

Έχουμε:

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Από Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$ για την $z_x(t) = f(t)g(x) - g(t)f(x)$

Βρίσκουμε $\xi \in (0,x)$:

$$0 = z_x(x) - z_x(0) = f'(\xi)g(x) - g'(\xi)f(x)$$

Αφού η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα ⇒ $\xi < x$ έχουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Άρα, $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) \geq 0$

Δηλαδή, $h' \geq 0$ στο $(0,\alpha)$, άρα η h είναι αύξουσα

•) Να υπολογιστεί (κανόνας αλυσίδας δηλ. σύνθεση)

$$\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = \frac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

••) Ν.δ.ο. $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

Λύση

• Έστω $y<x$. Θεωρώ του περιορισμό της f στο $[y,x]$.

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ οπότε έχουμε ότι

$$\exists x_0 \in (y,x) : f'(x_0) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \Leftrightarrow \cos x_0 = \frac{\sin x - \sin y}{x-y}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\cos x_0 = \sin x - \sin y$$

δηλ.
$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &= |(x-y)\cdot\cos x_0| \\ &= |x-y|\cdot|\cos x_0| \\ &\leq |x-y|\cdot 1 \\ &= |x-y| \end{aligned}$$

• Όμοια, αν $x<y$.

• Παρατήρηση: Αν $x=y$ τότε ισχύει η αρχική ανισότητα.

A) Να προσδιοριστεί το

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$$

Λύση. Χρήση L' Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

B) Να προσδιοριστεί το $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} = 2.$

Λύση

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot 2x}{\sin x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{\cos x} =$$

$$= \frac{2e^0+4\cdot 0\cdot e^0}{1} = 2.$$

Γ) Νδο. $\lim_{x\to 0}(x\log x) = 0.$

Λύση:

Είναι: $$\lim_{x\to 0}(x\log x) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Δ) Νδο $\lim_{x\to -\infty} e^x(2-x^2) = 0.$

Λύση

Είναι $$\lim_{x\to -\infty} e^x(2-x^2) \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{2-x^2}{\frac{1}{e^x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{-\frac{1}{e^x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim \frac{2}{\ldots} = 0.$$

Μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης

Βήματα:

1. Προσδιορίζουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης A
2. Αναζητούμε συμμετρίες (άρτια, περιττή, περιοδική) γιατί, αν υπάρχουν, μπορούμε να μελετήσουμε την f σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού A
3. Εξετάζουμε τη συνέχειά της στο A
4. Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'', όπου αυτές υπάρχουν, και προσδιορίζουμε το πρόσημό τους.
5. Προσδιορίζουμε τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f, αν υπάρχουν.
6. Προσδιορίζουμε, αν υπάρχουν, τα κοίλα και τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης.
7. Προσδιορίζουμε τις ασύμπτωτες, αν υπάρχουν
8. Προσδιορίζουμε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Όλα τα παραπάνω συγκεντρώνονται στον πίνακα μεταβολών της f.

Παρατήρηση

i) Αν η f είναι περιττή, τότε

α) αν η $f \uparrow$ στο $[a,b] \subseteq A \Rightarrow f \uparrow$ στο $[-b,-a]$

αν η $f \downarrow$ στο $[a,b] \subseteq A \Rightarrow f \downarrow$ στο $[-b,a]$

β) αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $[a,\beta]$, τότε στο $[-b,-a]$ στρέφει τα κοίλα κάτω και αντίστροφα

γ) Αν η f παρουσιάζει ΤΜ στο x_0 τότε στο $-x_0$ παρουσιάζει ΤΕ

ii) Αν η f είναι άρτια, τότε

α) αν η f ↑ στο [a, b] ⇒ f ↓ στο [-b, -a] ⓐ αντίστροφα

β) αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο [a, β] τότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο [-b, -a]

γ) αν η f παρουσιάζει Τ.Ε. στο x_0, τότε η f παρουσιάζει Τ.Ε. και στο $-x_0$. Ομοίως, αν παρουσιάζει Τ.Μ.

Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x+1}$$

Λύση

1. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
2. Η f δεν παρουσιάζει συμμετρίες
3. Η f είναι συνεχής στο A
4. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο A και είναι:

$$f'(x) = \frac{(2x^2+x)'(x+1) - (2x^2+x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(4x+1)(x+1) - (2x^2+x) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2+4x+\cancel{x}+1-2x^2-\cancel{x}}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2} \quad (1)$$

$$f''(x) = \frac{(2x^2+4x+1)'(x+1)^2 - (2x^2+4x+1) \cdot [(x+1)^2]'}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(4x+4)(x+1)^2 - (2x^2+4x+1)\,2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{4(x+1)(x+1)^2 - 2(x+1)(2x^2+4x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{4(x^2+2x+1) - 2(2x^2+4x+1)}{(x+1)^3} = \frac{\cancel{4x^2}+\cancel{8x}+4-\cancel{4x^2}-\cancel{8x}-2}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^3}$$

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&>0 \\ x&\neq -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x^2+4x+1&>0 \\ x&\neq -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x<\frac{-2-\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x>\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} f''(x)&>0 \\ x&\neq -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{2}{(x+1)^3}&>0 \\ x&\neq -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$$

5. Επομένως, η f είναι ↗ στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ και η f είναι ↘ στα διαστήματα $\left[\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, -1\right)$ και $\left(-1, \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right]$

Επίσης, η f έχει Τ.Μ. στο $x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ (αφού $f''\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)<0$)

και Τ.Ε στο $x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$ (αφού $f''\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)>0$)

ή

		$\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$		-1		$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	
$x+\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	−	0	+		+		+
$x-\frac{\sqrt{2}-2}{2}$	−		−		−	0	+
$f'=2x^2+4+1$	+	0	−	‖	−	0	+
	↗	ΤΜ	↘		↘	ΤΕ	↗

6. Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty,-1)$ όπου $f''(x)<0$ και προς τα πάνω στο $(-1,+\infty)$ όπου $f''(x)>0$. Σημεία καμπής δεν υπάρχουν.

7. Η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=-1$

γιατί $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{2x^2+x}{x+1}=\frac{2(-1)^2+(-1)}{-1+1}=\frac{1}{0}=+\infty$

• Πλάγια ασύμπτωτη $y=ax+\beta$, όπου

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2+x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+x}=2.$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=-1.$$

άρα πλάγια ασύμπτωτη η $y=2x-1$ όταν $x\to+\infty$.

Είναι επίσης πλάγια ασύμπτωτη ® όταν $x\to-\infty$.

• Οριζόντια ασύμπτωτη δεν έχει γιατί $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\neq\beta$.

8. Για $x=0$ είναι $f(0)=0$ και για $f(x)=0$ είναι

$$\frac{2x^2+x}{x+1}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x(2x+1)=0 \\ x\neq-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-\tfrac{1}{2}.$$

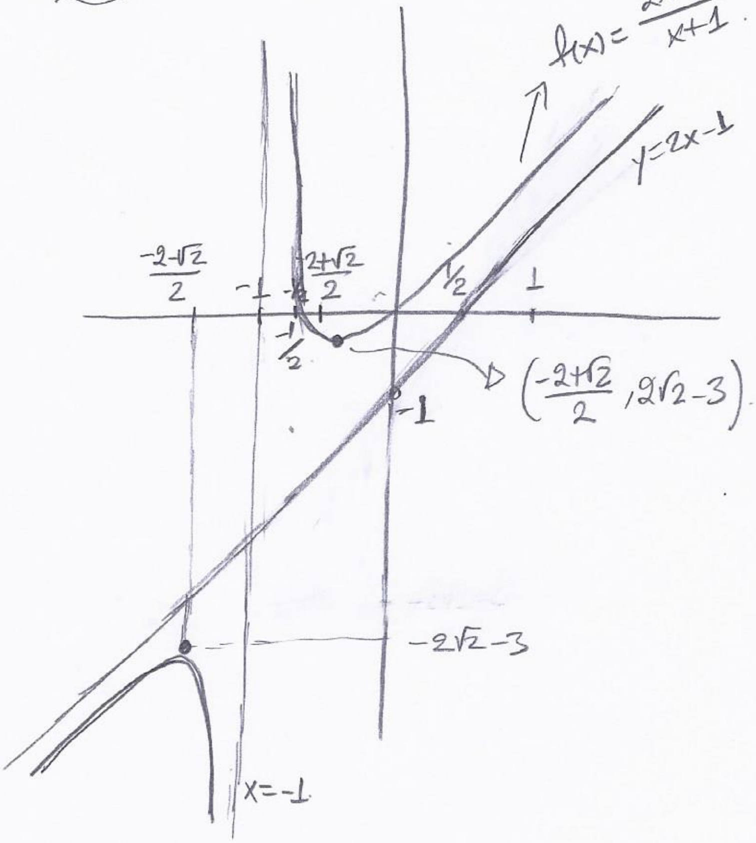
Άρα, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $A(0,0)$ και τον οριζόντιο στα σημεία $A(0,0)$ και $B(-\tfrac{1}{2},0)$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f

x	$-\infty$	$\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$		-1		$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	‖	$-$		$+$
f''	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
f	↗		↘	‖	↘		↗

↗ ΤΜ ↘ ↘ ΤΕ ↗

Γραφική Παράσταση



Εκθετική & λογαριθμική συνάρτηση

30)

α) $\forall x \in \mathbb{R}$, ν.δ.ο. $x+1 \le e^x \le xe^x+1$

β) νδο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

γ) νδο $1-\dfrac{1}{x} \le \ln x \le x-1$, $\forall x \in (0,+\infty)$

δ) νδο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

Λύση

α) Για $x=0$ η ανισότητα γράφεται:

$0+1 \le e^0 \le 0 \cdot e^0 + 1$ που αληθεύει.

• Έστω $x>0$. Για τη συνάρτηση $f(t)=e^t$, $t \in [0,x]$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε $\exists\, \xi \in (0,x)$ τω

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow e^{\xi} = \frac{e^x-1}{x} \qquad (1)$$

Αλλά $0<\xi<x$ και επειδή η $f(t)=e^t$ είναι ↗ ισχύει ότι

$$e^0 < e^{\xi} < e^x \Leftrightarrow 1 < e^{\xi} < e^x \qquad (2)$$

Από (1),(2) $\Rightarrow 1 < \dfrac{e^x-1}{x} < e^x \Leftrightarrow x < e^x - 1 < xe^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1 < e^x < xe^x+1$

• Έστω $x<0$. Τότε με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στο $[x,0]$ θα έχουμε

$x+1 < e^x < xe^x+1$

β) • Για $x>0$ είναι $1<\frac{e^x-1}{x}<e^x$ και επειδή $\lim_{x\to 0^+} e^x = e^0 = 1$,

διότι η e^x είναι συνεχής είναι

$$1 \le \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x} \le 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad (1)$$

• Για $x<0$ είναι $1>\frac{e^x-1}{x}>e^x$, από την οποία προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t)=\ln t \quad , t\in(0,+\infty).$$

• Αν $x>1$, τότε για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[1,x]$, οπότε $\exists\, \xi\in(1,x)$ τ.ω.

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(\xi) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x-1}=\frac{1}{\xi} \quad (1)$$

Επειδή $1<\xi<x$ είναι: $\frac{1}{x}<\frac{1}{\xi}<1 \quad (2)$

Από (1), (2) $\Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{\ln x}{x-1}<1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}<\ln x<x-1$. (3)

• Αν $0<x<1$, από Θ.Μ.Τ στο $[x,1]$ προκύπτει ότι

$$\frac{x-1}{x}<\ln x<x-1 \quad (3')$$

• Αν $x=1$, ισχύει ότι $\frac{x-1}{x}=\ln x=x-1$ (4)

Επομένως, από (3), (3'), (4) $\Rightarrow \forall x\in(0,+\infty)$ ισχύει δ). Για $x>1$ έχουμε.

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1$$ και επειδή $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$, από το

κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad (1)$$

• Για $0<x<1$. έχουμε $\frac{1}{x} > \frac{\ln x}{x-1} > 1$ από την οποία προκύπτει ότι

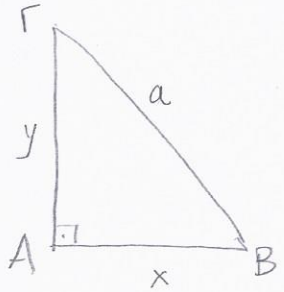
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Άσκηση:

Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που έχουν κοινή υποτείνουσα με μήκος α να βρείτε εκείνο που έχει μέγιστο εμβαδό

Λύση



Αν x, y τα μήκη των κάθετων πλευρών ενός τριγώνου με υποτείνουσα α, έχουμε

$$x^2+y^2=\alpha^2 \Leftrightarrow y^2=\alpha^2-x^2 \Leftrightarrow y=\sqrt{\alpha^2-x^2},\ x\in(0,\alpha)$$

Αν $E(x)$ το εμβαδόν ενός τέτοιου τριγώνου είναι:

$$E(x)=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\sqrt{\alpha^2-x^2}\quad ,x\in(0,\alpha)$$

Η συνάρτηση $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\alpha)$ και είναι:

$$E'(x)=\frac{1}{2}\left[x'\sqrt{\alpha^2-x^2}+x\left(\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)'\right]=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\alpha^2-x^2}+x\frac{\alpha^2-x^2}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\alpha^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\right]=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2}-x^2}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\frac{\alpha^2-2x^2}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

Έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}E'(x)>0\\ x\in(0,\alpha)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\frac{\alpha^2-x^2}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}>0\\ x\in(0,\alpha)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha^2-2x^2>0\\ x\in(0,\alpha)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x^2<\frac{\alpha^2}{2}\\ x\in(0,\alpha)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x<\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως, η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\alpha\sqrt{2}}{2},\alpha\right)$. Συνεπώς, στο σημείο $x_0=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ η $E(x)$ παρουσιάζει μέγιστο. Από τα ζητούμενα τρίγωνα, μέγιστο εμβαδόν έχει εκείνο για το οποίο

$$(AB) = x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$ και

$$(A\Gamma) = y = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

δηλ., το ισοσκελές