ΑΣΚ: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$.

Λύση: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-y)}{\sin(\frac{\pi}{2}-y)+\cos(\frac{\pi}{2}-y)}\, dy$

$y = \frac{\pi}{2} - x,\ dy = -dx,\ x = \frac{\pi}{2} - y$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{\cos y + \sin y}\, dy \Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

ΑΣΚ: Δείξτε ότι $\int_0^{\infty} x^p\, dx = +\infty,\ \forall p \in \mathbb{R}$.

Λύση: Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

α) Αν $p > -1$, τότε $\int_1^{\infty} x^p\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M x^p\, dx = \lim_{M\to\infty} \frac{M^{p+1}-1}{p+1} = +\infty$

β) Αν $p < -1$, τότε $\int_0^1 x^p\, dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^1 x^p\, dx = \lim_{\delta\to 0^+} \frac{1-\delta^{p+1}}{\underbrace{p+1}_{<0}} = +\infty$

γ) Αν $p = -1$, τότε $\int_1^{\infty} x^p\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} \ln M = +\infty$

Σε κάθε περίπτωση έπεται ότι $\int_0^{\infty} x^p\, dx = +\infty$.

ΑΣΚ: Δείξτε ότι $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Λύση: Με επαγωγή. Για $n=0$, έχουμε $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε $M>0$ έχουμε

$\int_0^M e^{-x} x^n\, dx = \int_0^M (-e^{-x})' x^n\, dx = \left[-e^{-x} x^n\right]_0^M + n\int_0^M e^{-x} x^{n-1}\, dx$

και όταν $M \to \infty$ βρίσκουμε ότι $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\, dx$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $I_{n-1} = (n-1)!$, τότε $I_n = n!$

ΑΣΚ: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$

Λύση: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right) dy$

$y=\frac{\pi}{4}-x\,,\ dy=-dx\,,\ x=\frac{\pi}{4}-y$

και παρατηρούμε ότι $\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}\cos y-\cos\frac{\pi}{4}\sin y}{\cos\frac{\pi}{4}\cos y+\sin\frac{\pi}{4}\sin y}$

επειδή $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\searrow$ $=\dfrac{\cos y-\sin y}{\cos y+\sin y}=\dfrac{1-\tan y}{1+\tan y}$.

Άρα $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\dfrac{2}{1+\tan y}$ και συνεπώς

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan y}\right)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln 2-\ln(1+\tan y)\right)dy$$

$\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}\ln 2-I \quad\Rightarrow\quad I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

ΑΣΚ: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$

Λύση: $\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int(\tan x)'\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{\tan x}{\cos^2 x}-\int\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' dx$

$$=\frac{\tan x}{\cos^2 x}-\int\tan x\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)dx=\frac{\tan x}{\cos^2 x}-\int\frac{2\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$$

$$=\frac{\tan x}{\cos^2 x}-2\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx=\frac{\tan x}{\cos^2 x}-2\int\frac{dx}{\cos^4 x}+2\int\frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow 3\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\frac{\tan x}{\cos^2 x}+2\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{\tan x}{\cos^2 x}+2\tan x+C$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{\cos^4 x}=\frac{1}{3}\frac{\tan x}{\cos^2 x}+\frac{2}{3}\tan x+C$$

ΑΣΚ Βρείτε τα όρια $\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^6}\int_0^{x^3} e^{t^2}dt$, $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt$

Λύση: Με την αντικατάσταση $y=x^3$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^6}\int_0^{x^3} e^{t^2}dt = \lim_{y\to+\infty} y e^{-y^2}\int_0^{y} e^{t^2}dt = \lim_{y\to+\infty}\frac{\int_0^y e^{t^2}dt}{\frac{e^{y^2}}{y}}$$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{y\to+\infty}\frac{\left(\int_0^y e^{t^2}dt\right)'}{\left(\frac{e^{y^2}}{y}\right)'} = \lim_{y\to\infty}\frac{e^{y^2}}{2e^{y^2}-\frac{1}{y^2}e^{y^2}}$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2-y^{-2}} = \frac{1}{2}$$

Με την αντικατάσταση $y=x^2$ έχουμε

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t\sin t\, dt = \lim_{y\to0^+}\frac{1}{y^2}\int_0^y e^t \sin t\, dt \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{y\to0^+}\frac{\left(\int_0^y e^t\sin t\, dt\right)'}{(y^2)'}$$

$$= \lim_{y\to0^+}\frac{e^y\sin y}{2y} = \frac{1}{2} \quad \left[\text{επειδή } \lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=1\right].$$

ΑΣΚ: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Λύση: $$I=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx \underset{\uparrow}{=} -\int_\pi^0\frac{(\pi-y)\sin y}{1+\cos^2 y}dy = \int_0^\pi \frac{\pi\sin y}{1+\cos^2 y}dy - I$$

$y=\pi-x$, $dy=-dx$, $\cos x=\cos(\pi-y)=-\cos y$

$x=\pi-y$ $\quad \sin x=\sin(\pi-y)=\sin y$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^\pi\frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy \underset{\uparrow}{=} -\pi\int_1^{-1}\frac{du}{1+u^2} = \pi\int_{-1}^{1}\frac{du}{1+u^2} = 2\pi \operatorname{Arctan}(1)$$

$u=\cos y$, $du=-\sin y\, dy$

ΑΣΚ: Έστω $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+(tx)^3}$, $\forall x \geq 0$. Ν.δ.ο η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Λύση: Έχουμε $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+(tx)^3} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{du}{1+u^3}$, $\forall x > 0$

$u = tx$, $du = x\,dt$

και $f(0) = \int_0^1 dt = 1$.

Επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1+x^3}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, άρα το αόριστο ολοκλήρωμά της $G(x) = \int_0^x g(u)\,du$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί $G'(x) = g(x)$, $\forall x \geq 0$.

Αφού $f(x) = \frac{1}{x}G(x)$, $\forall x > 0$, η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$. Στο σημείο 0, η f είναι επίσης συνεχής διότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{G(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{G(x)-G(0)}{x-0} = g(0) = 1 = f(0).$$

ΑΣΚ: Υπολογίστε τα ολοκληρώματα α) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ και β) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

Λύση: α) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{u}\frac{2u}{u^2-1}\,du = \int \frac{2\,du}{u^2-1} = \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1} = \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + c$

$u = \sqrt{1+e^x}$, $du = \frac{e^x dx}{2\sqrt{1+e^x}} = \frac{u^2-1}{2u}\,dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + c$$

β) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{Arctan}\,u + c = \mathrm{Arctan}(e^x) + c$

$u = e^x$, $du = e^x\,dx$