Κεφ 3 Ομοιόμορφη συνέχεια

- <u>Ορ</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, και $f: A \to \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ τ.ω. $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

  Η f είναι συνεχής στο A, αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$.

  Η f καλείται <u>ομοιόμορφα</u> συνεχής στο A αν

  $$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \underline{\delta(\varepsilon)} > 0 \text{ τ.ω. } x, y \in A, \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

  Το $\delta(\varepsilon)$ εξαρτάται ΜΟΝΟ από το $\varepsilon > 0$ και ΟΧΙ από το σημείο $x \in A$

- <u>Παρατήρηση</u>: $f: A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$ $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A.

- <u>Παραδείγματα</u>: 1) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση που ικανοποιεί $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x-y|$, $\forall x, y \in A$ για μία σταθερά $M > 0$.

  Μία τέτοια συνάρτηση καλείται Lipschitz συνεχής. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Πράγματι, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{M}$ τ.ω $\left.\begin{array}{l} x, y \in A \\ |x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{M} \end{array}\right] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

2) Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, για $\varepsilon = 1$, ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ $\delta > 0$ με την ιδιότητα: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < 1$

διότι αν $x \in \mathbb{R}$ και $y = x + \frac{\delta}{2}$ έχουμε $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x-y|\,|x+y|$

$$= \frac{\delta}{2} \left|2x + \frac{\delta}{2}\right| \xrightarrow[|x| \to \infty]{} \infty$$

3) Αν περιορίσουμε όμως την $f(x) = x^2$ σε ένα φραγμένο διάστημα $[-A, A]$, τότε η f είναι Lipschitz συνεχής στο $[-A, A]$:

$\forall x, y \in [-A, A]$: $|f(x) - f(y)| = |x+y||x-y| \leq 2A\,|x-y|$

Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-A, A]$.

4) Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε αν η f' είναι φραγμένη [$\exists M > 0$ τ.ω $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in I$], η f είναι Lipschitz συνεχής: από ΘΜΤ $\forall x, y \in I$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$.

- <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.

- <u>Παράδειγμα</u>: Η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε διάστημα $[0, b]$ με $b > 0$. Όμως δεν είναι Lipschitz συνεχής στο διάστημα $[0, b]$. Πράγματι, έχουμε

$$\frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x}}{2x - x} = \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} \infty.$$

για $x > 0$

Θα επαληθεύσουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$. Πράγματι, έχουμε για $0 < y < x$: $0 < \sqrt{x} - \sqrt{y} = \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \underset{\uparrow}{<} \dfrac{x-y}{\sqrt{x-y}} = \sqrt{x-y}$

$\sqrt{x-y} < \sqrt{x} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon^2$ ώστε $\left.\begin{array}{l} 0 < y \leq x \\ \text{και } |x-y| < \delta \end{array}\right] \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} < \varepsilon$

Κεφ 4 Ολοκλήρωμα Riemann

§1 Βασικές έννοιες

• Ορισμοί (Διαμέριση): Έστω $[\alpha, \beta]$ διάστημα.

α) Μία διαμέριση του $[\alpha, \beta]$ θα καλούμε ένα σύνολο $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ όπου $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = \beta$.

Χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό $P = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta\}$

β) Κάθε διαμέριση $P = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta\}$ χωρίζει το $[\alpha, \beta]$ στα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Ορίζουμε το πλάτος της P ως $\|P\| = \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, \dots, n\}$

γ) Η διαμέριση P_1 καλείται εκλέπτυνση της P αν $P \subseteq P_1$

δ) Αν P_1 και P_2 είναι διαμερίσεις τότε η $P = P_1 \cup P_2$ καλείται κοινή εκλέπτυνση των P_1 και P_2 και είναι η μικρότερη διαμέριση που είναι εκλέπτυνση των P_1 και P_2

• Ορισμοί (Άνω και κάτω άθροισμα): Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και έστω $P = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta\}$ διαμέριση του $[\alpha, \beta]$.

Για κάθε $k = 1, \dots, n$ ορίζουμε $m_k = m_k(f, P) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

και $M_k = M_k(f, P) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

Ορίζουμε το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς P:

$$\underset{\text{up}}{U(f, P)} = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \quad , \quad \underset{\text{low}}{L(f, P)} = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

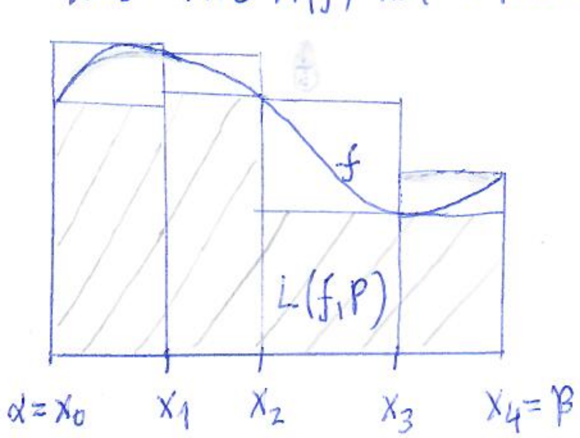
Είναι άμεσο ότι $L(f,P) \leq U(f,P)$. Μάλιστα για κάθε διαμερίσεις P_1 και P_2 του $[\alpha,\beta]$ έχουμε

$$L(f,P_1) \leq L(f,P_1 \cup P_2) \leq U(f,P_1 \cup P_2) \leq U(f,P_2)$$

Ορίζουμε $A(f) = \{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [\alpha,\beta]\}$

$B(f) = \{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [\alpha,\beta]\}$

Τότε $\forall \alpha \in A(f)$ και $\forall \beta \in B(f)$ έχουμε $\alpha \leq \beta$ και συνεπώς $\sup(A(f)) \leq \inf(B(f))$



Ορίζουμε το κάτω ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,\beta]$:

$$\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)\,dx = \sup(A(f))$$

και το άνω ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,\beta]$:

$$\overline{\int_\alpha^\beta} f(x)\,dx = \inf(B(f))$$

Τότε $\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)\,dx \leq \overline{\int_\alpha^\beta} f(x)\,dx$

- <u>Ορ</u>: Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f καλείται Riemann ολοκληρώσιμη αν $\underline{\int_\alpha^\beta} f(x)\,dx = \overline{\int_\alpha^\beta} f(x)\,dx =: I$ και ο αριθμός I λέγεται ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[\alpha,\beta]$ και συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ ή $\int_\alpha^\beta f$.

$\left(\int = \text{sum} \right)$.

- <u>Θεώρημα</u> (Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας Riemann)

Έστω $f : [\alpha,\beta] \to$ φραγμένη. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1) Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη
2) $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει διαμέριση P_ε του $[\alpha,\beta]$ τ.ω. $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$
3) Υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $[\alpha,\beta]$ τ.ω. $\lim_{n\to\infty}\left(U(f,P_n) - L(f,P_n)\right) = 0$

• <u>Παραδείγματα</u> 1) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$, $\forall x\in[0,1]$.

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ορίζουμε $P_n=\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1\}$.

Τότε, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε

$$L(f,P_n)=f(0)\frac{1}{n}+f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(0+\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+\dots+(n-1)^2\right)$$

$$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

(βλ Κεφ 1 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών)

και $U(f,P_n)=f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}+f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\dots+\frac{n^2}{n^2}\right)$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

Συνεπώς $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$. Άρα η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Επίσης, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}=L(f,P_n)\le\underline{\int_0^1}x^2dx=\int_0^1x^2dx=\overline{\int_0^1}x^2dx\le U(f,P_n)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

Άρα καθώς το $n\to\infty$, βρίσκουμε ότι $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

2) Έστω $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x \text{ ρητός}\\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$

Θ.δ.ο. η g δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Πράγματι, έστω $P=\{0=x_0<x_1<\dots<x_n=1\}$. Τότε από πυκνότητα ρητών έχουμε $\forall k=1,\dots,n$ ότι $M_k=\sup\{g(x):x\in[x_{k-1},x_k]\}=1$.

και από πυκνότητα αρρήτων έχουμε $\forall k=1,\dots,n$ ότι

$m_K = \inf\{ g(x) : x \in [x_{K-1}, x_K] \} = 0.$

Άρα $L(g,P) = \sum_{K=1}^{n} m_K (x_K - x_{K-1}) = 0$ ενώ $U(g,P) = \sum_{K=1}^{n} M_K (x_K - x_{K-1})$

$= \sum_{K=1}^{n} (x_K - x_{K-1}) = x_n - x_0 = 1$

Καθώς η P ήταν τυχούσα έχουμε

$$\underline{\int_0^1} g(x)\,dx = 0 \neq \overline{\int_0^1} g(x)dx = 1$$

• <u>Θεώρημα</u> (Κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων)

(i) Κάθε μονότονη και φραγμένη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη

(ii) Κάθε συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη

§2 Ιδιότητες ολοκληρώματος Riemann

Στη συνέχεια θεωρούμε φραγμένες συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

1) Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ σταθερή με τιμή c.

Τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = c(\beta - \alpha)$.

2) Έστω $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες. Τότε η $f+g$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_\alpha^\beta (f+g)(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

3) Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη και $t \in \mathbb{R}$. Τότε η tf είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_\alpha^\beta t f(x)\,dx = t \int_\alpha^\beta f(x)dx$

4) Γραμμικότητα ολοκληρώματος: Έστω $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann

ολοκληρώσιμες και $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε η $\mu f + \lambda g$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\int_\alpha^\beta (\mu f + \lambda g)(x)dx = \mu \int_\alpha^\beta f(x)dx + \lambda \int_\alpha^\beta g(x)dx$

5) Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ και $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ ΑΝΝ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \gamma]$ και στο $[\gamma, \beta]$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

6) Έστω $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες. Αν $f(x) \leq g(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$. Ειδικότερα, αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη με $f(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$

Επίσης, αν $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη και $m, M \in \mathbb{R}$ τ.ω. $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε $m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x) \leq M(\beta - \alpha)$.

7) Έστω $f: [\alpha, \beta] \to [m, M]$ Riemann ολοκληρώσιμη και $\varphi: [m, M] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η $\varphi \circ f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη

8) Έστω $f, g: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες. Τότε

- Η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$
- Οι f^2 και $f \cdot g$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες

9) Αν η $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, η μέση τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$ είναι εξ' ορισμού ο αριθμός $\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta - \alpha}$

Ορίζουμε επίσης $\int_\beta^\alpha f(x)dx = -\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$.