ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΜΥΡΝΕΛΗΣ

SMPANOS@MATH.UOA.GR

ΓΡΑΦΕΙΟ 227 ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

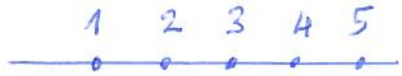
ΩΡΕΣ ΓΡΑΦΕΙΟΥ
- ΔΕΥΤΕΡΑ 1:30 → 3:00
- ΤΕΤΑΡΤΗ 2:00 → 3:00

Κεφ 1 : Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

§1 Οι Φυσικοί Αριθμοί ($\mathbb{N}$ = Natural)

- Με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$



- Ορ: Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ (A υποσύνολο του $\mathbb{N}$) και $x \in \mathbb{N}$, λέμε ότι το x είναι ελάχιστο στοιχείο του A αν
  i) $x \in A$
  ii) $\forall \alpha \in A$ έχουμε $x \leq \alpha$
  (για κάθε α που ανήκει στο A)

- Παρατήρηση: Το $\emptyset$ (το κενό σύνολο, δηλαδή το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο) δεν έχει ελάχιστο.

- Αρχή Ελαχίστου: Κάθε μη κενό υποσύνολο S των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο.

- Αρχή επαγωγής: Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$ τ.ω.

  i) $1 \in A$

  ii) Για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι αν $\kappa \in A$ τότε $\kappa+1 \in A$.

  Τότε $A = \mathbb{N}$

- Μέθοδος της επαγωγής

Έστω $P(n)$ μία μαθηματική πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Υποθέτουμε ότι

i) Η $P(1)$ αληθεύει

ii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι αν η $P(k)$ αληθεύει τότε και η $P(k+1)$ αληθεύει.

Τότε η $P(k)$ αληθεύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

- Παράδειγμα: Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

i) Βάση της επαγωγής: Για $n=1$, έχουμε ότι $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, δηλαδή η $P(1)$ αληθής

ii) Επαγωγικό βήμα: Έστω $k \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$(*)$ $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ (δηλ η $P(k)$ αληθής).

Θ.δ.ο. $1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (δηλ ότι η $P(k+1)$ αληθής)

Πράγματι, $1+2+\dots k+(k+1) \underset{(*)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

• <u>Παραλλαγές της μεθόδου της επαγωγής</u>

Έστω $P(n)$ μία μαθηματική πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n.

α) Υποθέτουμε ότι

i) Η $P(m)$ αληθεύει για κάποιο $m \in \mathbb{N}$.

ii) Για κάθε $k \geq m$, έχουμε ότι αν $P(k)$ αληθής τότε $P(k+1)$ αληθής.

Τότε η $P(k)$ είναι αληθής για κάθε $k \geq m$.

β) Υποθέτουμε ότι

i) Η $P(1)$ αληθεύει

ii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι αν $P(1), \ldots, P(k)$ αληθείς, τότε $P(k+1)$ αληθής.

Τότε η $P(k)$ είναι αληθής για κάθε $k \in \mathbb{N}$

• <u>Παράδειγμα</u>: Δ.ο. $2^n \geq 3n$, $\forall n \geq 4$.

→ Για $n=4$, ισχύει $2^4 = 16 \geq 3.4 = 12$ δηλ η $P(4)$ αληθής

→ Έστω $k \geq 4$ τ.ω. $2^k \geq 3k$ (δηλ η $P(k)$ αληθής)

Τότε ισχύει $2^{k+1} \geq 2(3k) = 6k = 3k + 3k \underset{\text{επειδή } k \geq 4}{\geq} 3(k+1)$

δηλ η $P(k+1)$ αληθής

Άρα αποδείξαμε ότι $2^n \geq 3n$, $\forall n \geq 4$.

§2 Οι ακέραιοι αριθμοί (ℤ Die Zahlen (γερμ) = οι αριθμοί)

- Με $\mathbb{Z}$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακέραιων αριθμών:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

- Διαιρετότητα: Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Λέμε ότι ο α διαιρεί τον β αν υπάρχει $x \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $\beta = x \cdot \alpha$.

  Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο α είναι διαιρέτης του β καθώς επίσης ότι ο β είναι πολλαπλάσιο του α.

- Θεώρημα (Ευκλείδεια διαίρεση): Έστω $\alpha \in \mathbb{N}$ και $\beta \in \mathbb{Z}$.

  Τότε υπάρχουν μοναδικά $q, r \in \mathbb{Z}$ τ.ω.

$$\beta = q\alpha + r \quad \text{και} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{υπόλοιπο}}}{r} \in \{0, 1, \dots, \alpha - 1\}$$

- Παραδείγματα υποσυνόλων του $\mathbb{Z}$: Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Τότε έχουμε

$$\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \{\alpha x + \beta y : x, y \in \mathbb{Z}\} = \gcd(\alpha,\beta)\mathbb{Z} = \{\gcd(\alpha,\beta).x \ : x \in \mathbb{Z}\}$$

gcd = greater common divisor = μέγιστος κοινός διαιρέτης

και

$$\alpha\mathbb{Z} \cap \beta\mathbb{Z} = \mathrm{lcm}(\alpha,\beta)\mathbb{Z}$$ lcm = least common multiple = ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο

§3 Οι ρητοί αριθμοί ($\mathbb{Q}$ = quotient = πηλίκο)

- Με $\mathbb{Q}$ συμβολίζουμε το σύνολο των ρητών αριθμών

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

- Υπενθ: $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ ανν $mn' = nm'$

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{nn'}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'}$$

$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} \quad \text{ανν} \quad m'n - mn' \in \mathbb{N}$$

- Λήμμα: Κάθε ρητός αριθμός γράφεται σε ανάγωγη μορφή: $q = \frac{m}{n}$ με $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. ο μοναδικός φυσικός αριθμός που διαιρεί και τον m και τον n είναι ο 1.

- Παραδείγματα

α) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ δηλ δεν υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τ.ω $q^2 = 2$ (ΑΣΚ Λυκείου)

β) Θα δείξουμε στο μάθημα ότι

$$e = \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n} + \dots \quad \text{και ότι } e \notin \mathbb{Q}$$

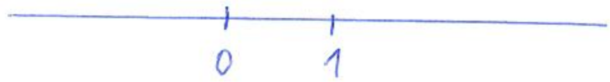
γ) $\pi \notin \mathbb{Q}$, Επιπλέον γνωρίζουμε ότι ο αριθμός π (όπως και ο αριθμός e) δεν είναι ρίζα κάποιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Τέτοιοι αριθμοί λέγονται υπερβατικοί.

δ) Ένας αριθμός είναι ρητός ανν τα δεκαδικά του ψηφία επαναλαμβάνονται περιοδικά.

π.χ. $\frac{1}{11} = 0,\underbrace{09}0909\ldots$, $0,\underbrace{123}123123\ldots = \frac{123}{999}$

§4 <u>Οι πραγματικοί αριθμοί</u> ($\mathbb{R}$ = real)

• Με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών.



• <u>Ορ</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

i) Ένα $x \in \mathbb{R}$ καλείται άνω φράγμα του A αν $\forall \alpha \in A$ έχουμε $\alpha \leq x$.

ii) Ένα $x \in \mathbb{R}$ καλείται κάτω φράγμα του A αν $\forall \alpha \in A$ έχουμε $x \leq \alpha$.

iii) Το A καλείται άνω φραγμένο αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τ.ω. το x άνω φράγμα του A.

iv) ——"—— κάτω φραγμένο ——"—— το x κάτω φράγμα του A.

v) Το A καλείται φραγμένο αν είναι άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο.

• Παρατήρηση: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$

Αν x άνω φράγμα του A και $x' \geqslant x$ τότε το x' άνω φράγμα του A.
—"— x κάτω φράγμα του A και $x' \leq x$ τότε το x' κάτω —"— .

• Ορ: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Το α καλείται ελάχιστο άνω φράγμα του A αν

1) Το α είναι άνω φράγμα του A και

2) για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A έχουμε ότι $\alpha \leq \beta$.

ii) Το α καλείται μέγιστο κάτω φράγμα του A αν

1) Το α είναι κάτω φράγμα του A και

2) για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$ κάτω φράγμα του A έχουμε ότι $\beta \leq \alpha$.

• Παρατήρηση: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Αν το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα τότε είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε με $\sup(A)$ (supremum).

Απ: Προς άτοπο υποθέστε ότι α_1 και α_2 άνω ελάχιστα φράγματα του A.

Απο i) 1) έχουμε ότι το α_1 και το α_2 είναι άνω φράγματα του A.

Από i) 2) για το α_1 έχουμε $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ενώ από i) 2) για το α_2 έχουμε $\alpha_2 \leq \alpha_1$

Άρα $\alpha_1 = \alpha_2$.

Ομοίως, αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ (μη κενό) έχει μέγιστο κάτω φράγμα, τότε είναι μοναδικό και το συμβολίζουμε με $\inf(A)$ (infimum).

• **Παραδείγματα** α) Το $A = (2, +\infty)$ είναι κάτω φραγμένο και έχουμε $\inf(A) = 2$. Δεν είναι όμως άνω φραγμένο.

β) Το $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ είναι φραγμένο. Έχουμε $\sup(A) = 1$ και $\inf(A) = 0$.

• **Αρχή της πληρότητας**: Κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Ομοίως, κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

• **Χαρακτηρισμός supremum**: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, άνω φραγμένο και $\alpha \in \mathbb{R}$. Ισχύει $\alpha = \sup A$ ανν 1) το α άνω φράγμα του A.

2) για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τ.ω $x > \alpha - \varepsilon$.

<u>Απ</u>: "$\Rightarrow$" Καθώς $\alpha = \sup(A)$ ικανοποιείται το 1). Έστω $\varepsilon > 0$, τότε έχουμε $\alpha - \varepsilon < \alpha$ και συνεπώς το $\alpha - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Άρα υπάρχει $x \in A$ τ.ω. $x > \alpha - \varepsilon$.

"$\Leftarrow$" Αρκεί ν.δ.ο για κάθε β άνω φράγμα του A έχουμε ότι $\beta \geq \alpha$. Ισοδύναμα αρκεί ν.δ.ο αν $\beta < \alpha$ τότε το β δεν είναι άνω φράγμα του A. Πράγματι, έστω $\beta < \alpha$ και $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$. Από το 2) υπάρχει $x \in A$ τ.ω. $x > \alpha - \varepsilon = \alpha - (\alpha - \beta) = \beta$, άρα το β δεν είναι άνω φράγμα του A.

• <u>Χαρακτηρισμός infimum</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, κάτω φραγμένο και $\alpha \in \mathbb{R}$. Ισχύει $\alpha = \inf A$ ανν 1) το α κάτω φράγμα του A.

2) για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τ.ω. $x < \alpha + \varepsilon$.

• <u>Ορ</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x καλείται μέγιστο του A αν

1) $x \in A$ και 2) το x άνω φράγμα του A (δηλ $x \geq \alpha$, $\forall \alpha \in A$).

• <u>Παρατηρήσεις</u> α) Αν το A έχει μέγιστο στοιχείο, τότε είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\max(A)$.

β) Δεν ισχύει ότι κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει $\max(A)$. Π.χ. $A = (0,1)$

$A = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

γ) Αν υπάρχει $\max(A)$ τότε A άνω φραγμένο, μη κενό, και $\sup(A) = \max(A)$.

δ) Δεν ισχύει ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό το $\sup(A) \in A$. Π.χ. $A = (0,1)$.

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, άνω φραγμένο, τότε το A έχει $\max(A)$ ανν $\sup(A) \in A$.

• <u>Ορ</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$. Το x καλείται ελάχιστο του A αν

1) $x \in A$ και 2) το x κάτω φράγμα του A (δηλ $x \leq \alpha$, $\forall \alpha \in A$).

Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, τότε είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\min(A)$.

• <u>Παρατηρήσεις</u> Αν υπάρχει $\min(A)$ τότε $\min(A) = \inf(A)$.

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, κάτω φραγμένο, τότε το A έχει $\min(A)$ ανν $\inf(A) \in A$.

ΑΣΚ: Θα υπολογίσουμε απευθείας το άθροισμα

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n$$

Γράφουμε και προσθέτουμε

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& 1 + 2 + \dots + n \\ + \quad S_n &=& n + (n-1) + \dots + 1 \\ \hline = \quad 2S_n &=& (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) \quad (n \text{ φορές}) \\ &=& n(n+1) \end{array}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ΑΣΚ: Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε το άθροισμα

$$T_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(1+x)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

$$\begin{array}{ll} \text{για } x=1: & 2^3 - 1^3 = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \\ \text{για } x=2: & 3^3 - 2^3 = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\ \dots\dots & \\ \text{για } x=n: & (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \\ \hline \end{array}$$

και παίρνουμε το άθροισμα : $(n+1)^3 - 1^3 = 3T_n + 3S_n + n$

$$\Rightarrow 3T_n = (n+1)^3 - 1 - 3S_n - n$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

πράξεις

$$= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\Rightarrow T_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

[Επαλήθευση $T_1 = 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$T_2 = 1 + 2^2 = 5 = \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + \frac{2}{6}$]

Παραδείγματα υποσυνόλων του $\mathbb{Z}$: Προσδιορίστε τα σύνολα

$3\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z}$.

- $3\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z} = \{3x+4y : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Έχουμε ότι $1 = 3\cdot(-1) + 4\cdot 1$ και επίσης $x = 3\cdot(-x) + 4\cdot x$ $(\forall x \in \mathbb{Z})$. Άρα $3\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z} = \mathbb{Z} = \underbrace{\gcd(3,4)}_{=1}\mathbb{Z}$

- $3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \dots\} \cap \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots\}$
$= \{0, \pm 12, \pm 24, \dots\} = 12\mathbb{Z} = \underbrace{\mathrm{lcm}(3,4)}_{=12}\mathbb{Z}$

- $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = \{4x+6y : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Έχουμε ότι $4x+6y = 2\underbrace{(2x+3y)}_{\in \mathbb{Z}}$, άρα $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$. Επίσης ισχύει $2x = (-4)x + 6x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Επομένως $2\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$ και αποδείξαμε ότι

$4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} = \underbrace{\gcd(4,6)}_{=2}\mathbb{Z}$

- $4\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots\} \cap \{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18, \dots\}$
$= \{0, \pm 12, \pm 24, \dots\} = 12\mathbb{Z} = \underbrace{\mathrm{lcm}(4,6)}_{=12}\mathbb{Z}$

ΑΣΚ: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και $-A = \{-\alpha : \alpha \in A\}$.

Δ.ο. αν το A είναι κάτω φραγμένο, τότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο και ισχύει $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Λύση: Έστω x κάτω φράγμα του A, τότε το $-x$ είναι άνω φράγμα του $-A$ και γνωρίζουμε από την αρχή πληρότητας ότι υπάρχει $\sup(-A)$. Επιπλέον το $-\sup(-A)$ είναι κάτω φράγμα του A και μάλιστα το μέγιστο κάτω φράγμα του A. Πράγματι αν $\beta \in \mathbb{R}$ κάτω φράγμα του A τότε $-\beta$ είναι άνω φράγμα του $-A$ και ισχύει $-\beta \geq \sup(-A) \Leftrightarrow \beta \leq -\sup(-A)$. Άρα $\inf(A) = -\sup(-A)$.