Κεφ 7 Θεώρημα Taylor

§1. Θεώρημα Taylor

- <u>Ορ</u>: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $x_0\in[\alpha,\beta]$, $n\in\mathbb{N}$ και υποθέτουμε ότι η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Ορίζουμε το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n στο x_0 ως $T_{n,f,x_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$T_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- <u>Παρατήρηση</u>: Έχουμε $T_{n,f,x_0}(x_0)=f(x_0)$ και

$$T'_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}\Rightarrow T'_{n,f,x_0}(x_0)=f'(x_0)$$

$$T''_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}\Rightarrow T''_{n,f,x_0}(x_0)=f''(x_0)$$

- - - - - - - - - - -

$$T^{(j)}_{n,f,x_0}(x)=\sum_{k=j}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-j)!}(x-x_0)^{k-j}\Rightarrow T^{(j)}_{n,f,x_0}(x_0)=f^{(j)}(x_0),\ \forall j=0,\dots,n.$$

- <u>Ορ</u>: Ορίζουμε το υπόλοιπο Taylor της f τάξης n στο x_0 ως $R_{n,f,x_0}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$,

$$R_{n,f,x_0}(x)=f(x)-T_{n,f,x_0}(x).$$

• Θεώρημα: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $x_0\in[\alpha,\beta]$, $n\in\mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $(n-1)$-φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και n-φορές στο x_0. Τότε, 1) $\lim_{x\to x_0}\dfrac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0$

2) Το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n στο x_0 είναι το μοναδικό πολυώνυμο T τάξης το πολύ n που ικανοποιεί $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

• Θεώρημα (Taylor): Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $(n+1)$ φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $x_0\in[\alpha,\beta]$. Τότε, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει

1) $$R_{n,f,x_0}(x)=\left(\int_0^1\frac{(1-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0))\,du\right)(x-x_0)^{n+1}$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$, αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

[αλλαγή μεταβλητής $t=x_0+u(x-x_0)$, $u=\dfrac{t-x_0}{x-x_0}$, $1-u=\dfrac{x-t}{x-x_0}$, $du=\dfrac{dt}{x-x_0}$]

2) $R_{n,f,x_0}(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1}$, για κάποιο ξ μεταξύ των x_0 και x.

• <u>Παρατήρηση</u>: Για $n=0$ οι τύποι του Taylor 1) και 2) ταυτίζονται με το 2ο Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και με το Θεώρημα μέσης τιμής αντίστοιχα:

1) $f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$ όταν η f' είναι ολοκληρώσιμη

2) $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)\cdot(x-x_0)$ για κάποιο ξ μεταξύ των x_0 και x.

• <u>Παρατήρηση</u>: Αν $n=1$ η ιδιότητα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_{1,f,x_0}(x)}{x-x_0}=0$ εκφράζει την παραγωγισιμότητα της f στο x_0:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{1,f,x_0}(x)}{x-x_0}=0 \iff \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right)=0$$

$$\iff f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{εξίσωση της εφαπτομένης}}+(x-x_0)\varepsilon(x) \quad \text{με } \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

Δηλαδή, η f προσεγγίζεται από μία γραμμική συνάρτηση.

Τα Θεωρήματα Taylor δίνουν μία καλύτερη προσέγγιση μέσω πολυωνύμου βαθμού n όταν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=0 \iff f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

$$\text{με } \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0.$$

§2 Δυναμοσειρές και αναπτύγματα Taylor

2α) Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=e^x$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ έχουμε $\begin{cases} f^{(k)}(x)=e^x \\ f^{(k)}(0)=1 \end{cases}$

Άρα $\forall n\in\mathbb{N}$ έχουμε $T_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$

Για $x=0$, προφανώς $e^0=1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{0^k}{k!}$ $\left[\frac{0^0}{0!}=1\right]$

Έστω $x\neq 0$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $\exists\,\xi_n$ μεταξύ των 0 και x τ.ω.

$R_{n,f,0}(x)=\frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}x^{n+1}$ και $|R_{n,f,0}(x)|\leq\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}$ αν $x>0$

$|R_{n,f,0}(x)|\leq\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ αν $x<0$ $[x<\xi_n<0 \Rightarrow e^{\xi_n}\leq 1]$

Άρα $|R_{n,f,0}(x)|\leq\frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Έπειτα θεωρούμε την ακολουθία $(\alpha_n)_n=\left(\frac{e^x|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right)_n$ και παρατηρούμε ότι $\alpha_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ από κριτήριο λόγου $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{|x|}{n+2}\xrightarrow{n\to\infty}0<1$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$, $\forall x\neq 0$ και επομένως

$$\boxed{e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\quad\forall x\in\mathbb{R}}$$

2β) Θα δείξουμε επίσης ότι $\boxed{\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k},\ \forall x\in\mathbb{R}}$

Έστω $f(x)=\cos x$.

Με επαγωγή στο k επαληθεύουμε πρώτα ότι $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x$

$f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\sin x$

Άρα $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$ και $f^{(2k+1)}(0)=0$.

Για $x=0$, προφανώς $\cos 0 = 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 0^{2k}$

Έστω $x \neq 0$ και $T_{2n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε επίσης ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, \xi_n$ μεταξύ των 0 και x τ.ω.

$$R_{2n,f,0}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi_n)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \Rightarrow |R_{2n,f,0}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

κριτήριο λόγου

Αυτό αποδεικνύει ότι $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$.

2γ) Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \ \forall x \in \mathbb{R}}$

2δ) Θα δείξουμε ότι $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}, \ \forall x \in (-1,1]}$

Έστω $f(x) = \ln(1+x)$, $\forall x > -1$ επαληθεύουμε με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$ ότι $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$. Άρα $f(0)=0$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ $\forall k \geq 1$

και $T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$. Προφανώς για $x=0$: $\ln(1+0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 0^k}{k}$.

Έστω $x > -1$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε επίσης

$$R_{n,f,0}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt = (-1)^n \int_x^0 \frac{-u^n}{1+u} du$$

αλλαγή μεταβλητών $u = \frac{x-t}{1+t} \Rightarrow du = \frac{-1-t-x+t}{(1+t)^2} dt = -\frac{dt}{1+t}\left(\frac{x-t+1+t}{1+t}\right)$

$$= -\frac{dt}{1+t}(1+u)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν $-1 < x < 0$, τότε $|R_{n,f,0}(x)| \leq \int_x^0 \frac{|u|^n}{1+u}du \leq \frac{1}{1+x}\int_0^{|x|} u^n du = \frac{1}{1+x}\,\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$

Άρα $|R_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

- Αν $0 < x \leq 1$, τότε $|R_{n,f,0}(x)| \leq \int_0^x \frac{u^n}{1+u}du \leq \int_0^x u^n du = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Αυτό αποδεικνύει τον ζητούμενο τύπο και ειδικότερα για $x=1$ έχουμε

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots}$$

2ε) Η διωνυμική συνάρτηση $f(x) = (1+x)^{\alpha} = e^{\alpha \ln(1+x)}$ με $x > -1, \alpha \in \mathbb{R}$.

Αποδεικνύεται ότι $\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{για } |x| < 1}$

όπου για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ και $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Παρατηρείστε ότι αν $\alpha \in \mathbb{N}$, τότε $\forall k > \alpha$ έχουμε $\binom{\alpha}{k} = 0$ και συνεπώς

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$$

2στ) Η συνάρτηση $f(x) = \arctan x$.

Αποδεικνύεται ότι $\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in [-1,1]}$

§3 Συναρτήσεις παραστάσιμες σε δυναμοσειρά

- Υπενθύμιση: Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ δυναμοσειρά με συντελεστές a_k

Ορίσαμε την ακτίνα σύγκλισης ως

$$R = \sup\{|x| : \text{η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\} \quad (\text{μπορεί και } R=\infty)$$

και αποδείξαμε ότι $\forall x \in (-R,R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει

$\forall x \in \mathbb{R}$ με $|x|>R$ η δυναμοσειρά αποκλίνει

- Πρόταση: Ισχύει $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}}$ $\left[\text{θέτουμε } \frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0\right]$

- Ορ: Λέμε ότι μία συνάρτηση $f:(-R,R)\to\mathbb{R}$ είναι αναπαραστάσιμη σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 αν υπάρχει ακολουθία $(a_k)_k$ τ.ω.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad , \forall x \in (-R,R).$$

- Θεώρημα (Μοναδικότητας) Έστω $(a_k)_k$ και $(\beta_k)_k$ ακολουθίες και $R>0$. Υποθέτουμε ότι $\forall x \in (-R,R)$ έχουμε $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k$. Τότε, $a_k = \beta_k$, $\forall k$.

- Θεώρημα (Παραγώγισης Δυναμοσειρών) Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ δυναμοσειρά που συγκλίνει στο $(-R,R)$ για κάποιο $R>0$.
Ορίζουμε $f:(-R,R)\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-R,R)$ και για κάθε $\ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ και $x\in(-R,R)$ έχουμε

$$f^{(\ell)}(x) = \sum_{k=\ell}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-\ell+1) a_k x^{k-\ell}. \text{ Επίσης } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \forall k$$

Κεφ 8 : Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

- <u>παρατήρηση</u>: Έστω $\alpha < \beta$ στο $\mathbb{R}$. Τότε $[\alpha, \beta] = \{(1-t)\alpha + t\beta : t \in [0,1]\}$

- <u>Ορ</u>: Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$. Η f καλείται κυρτή (αντ. γνησίως κυρτή) αν $\forall\, \alpha < \beta$ στο I και $\forall\, t \in (0,1)$ έχουμε

$$f((1-t)\alpha + t\beta) \leq (1-t) f(\alpha) + t f(\beta),$$

(αντ. $f((1-t)\alpha + t\beta) < (1-t) f(\alpha) + t f(\beta)$).

Η f καλείται κοίλη αν η $-f$ είναι κυρτή.

- <u>Ιδιότητες κυρτών συναρτήσεων</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ κυρτή.

Τότε η f είναι συνεχής και για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ και $f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Επίσης, οι $f'_-, f'_+ : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσες και $f'_- \leq f'_+$.

- <u>Παραγωγίσιμες κυρτές συναρτήσεις</u>

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τα εξής είναι ισοδύναμα

i) Η f κυρτή

ii) Η f' είναι αύξουσα

iii) Για κάθε $x, y \in (\alpha, \beta)$ έχουμε ότι $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Τότε η f είναι κυρτή ANN $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

- <u>Ανισότητα Jensen</u>: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ κυρτή με $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in I$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ με $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

  Τότε $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \in I$ και $f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$

- <u>Ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου</u>: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \geq 0$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ με $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

  Τότε $\prod_{j=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_i$

- <u>Ανισότητα Hölder</u>: Έστω p, q συζυγείς εκθέτες: δηλαδή $p, q \geq 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$

  Τότε
  $$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^q\right)^{1/q}$$

  Για $p = q = 2$ έχουμε την ανισότητα Cauchy - Schwarz:

  $$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i} \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2}} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right)^{1/2}}$$

  εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ και $\vec{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

  Ευκλείδεια νόρμα των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B} \in \mathbb{R}^n$

  $$\vec{A} \cdot \vec{B} \leq \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|.$$