ΑΝΑΛΥΣΗ Ι (15/2/2013)

ΘΕΜΑ 1: (α) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας (1 μον.)

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας (1,5 μον.)

(i) Κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

(ii) Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη και $L(f,P)=U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$, τότε η f είναι σταθερή.

(iii) Αν $\alpha_n \to \alpha$, τότε η (α_n) είναι μονότονη.

(iv) Αν η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε είναι φραγμένη.

(v) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$ συγκλίνει.

(vi) Αν $\alpha_k>0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_k}$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει.

ΘΕΜΑ 2: Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k},\quad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\log_2 k)^2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt[k]{k}-1\right),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}\right)$$ (3 μον.)

ΘΕΜΑ 3: Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$\int e^x \sin x\,dx,\quad \int \cos^3 x\,dx,\quad \int x\cos^2 x\,dx,\quad \int\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,dx$$ (2,5 μον.)

[Υπόδειξη: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$]

ΘΕΜΑ 4:

√(α) Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $P=\{\alpha=x_0<\dots<x_n=\beta\}$ διαμέριση του $[a,\beta]$ δείξτε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leq\int_\alpha^\beta|f'(x)|\,dx$$ (1 μο

√(β) Έστω $M>0$ και $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|\quad\forall x,y\in[0,1].$$

Δείξτε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε:

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n}$$ (1 μο

√(γ) Έστω ότι $\alpha_k>0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλί
δείξτε ότι οι σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2,\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{1+\alpha_k},\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2}$$

συγκλίνουν. (1 μον.

(δ) Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1,\dots,x_n\in[a$
Δείξτε ότι υπάρχει $y\in[a,\beta]$ ώστε:

$$f(y)=\frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$$ (0,75 μον.)

(ε) Έστω $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in($ με $x_1\neq x_2$ και τέτοια ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)=0$

(0,75 μον