Ομοιόμορφη Συνέχεια

Λυμένες Ασκήσεις

Παραδείγματα:

1. Μια σταθερή συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί $\forall \varepsilon > 0$, οποιοσδήποτε $\delta > 0$ ικανοποιεί του ορισμό

2. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 1$ είναι Lipschitz γιατί

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

δηλ. ισχύει $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$

Επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής, λόγω της Πρότασης 3.1.3.

3. Η συνάρτηση $f(x)=x^p$, $x \geq 1$, $0<p\leq 1$ είναι Lipschitz

Πράγματι, αν πάρουμε $x,y \geq 1$ με $x \neq y$ τότε από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και y τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(\xi)| = p\xi^{p-1} \leq p$$

δηλ. $|f(x)-f(y)| \leq p|x-y|$, $\forall x,y \geq 1$. Επομένως η f είναι Lipschitz. άρα και ομοιόμορφα συνεχής

4. Η συνάρτηση $f(x)=x^p$, $x \geq 1$, $p>1$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

Πράγματι, αν θεωρήσουμε το ζευγάρι $x_n=n$, $y_n = n+\frac{1}{n^{p-1}}$, τότε

$x_n-y_n \to 0$ και $f(x_n)-f(y_n) \to -p \neq 0$.

(Πχ Για $p=2$: $f(x_n)-f(y_n) = n^2-\left(n+\frac{1}{n}\right)^2 = \cancel{n^2}-\cancel{n^2}-2\cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}} - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0 \text{ γιατί } n\to\infty} = -2 \neq 0$

Για $p=3$: $f(x_n)-f(y_n) = n^3-\left(n+\frac{1}{n^2}\right)^3 = \cancel{n^3}-\cancel{n^3}-3\cancel{n^2}\frac{1}{\cancel{n^2}} - 3n\underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{n^6}}_{\to 0} = -3 \neq 0$)

Παρατηρήσεις:

(1) Το άθροισμα και η σύνθεση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ακολουθιακό χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας

(2) Το γινόμενο δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων δεν είναι κατ' ανάγκη ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Για παράδειγμα: η $f(x)=x, x\in\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά η f^2 όχι

(3) Ομοίως με το πηλίκο. Η $f(x)=x, x>0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά η $1/f$ δεν είναι.

Παράδειγμα: Η $f(x)=\cos\frac{1}{x}, x>0$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί η ακολουθία $x_n=\frac{1}{\pi n}$ είναι Cauchy αλλά η $f(x_n)=(-1)^n$ δεν είναι.

Παραδείγματα:

(1) Η $f(x)=e^{-x^2}, x\in\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

(2) Η $f(x)=1/x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(1,+\infty)$ γιατί τα όρια και στα δύο άκρα υπάρχουν. Δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$ γιατί το όριο στο 0 είναι άπειρο.

Άσκηση 1: Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Ν.δο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη:

α' τρόπος: Από την Πρόταση 3.1.5 έχουμε ότι αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής θα είναι και συνεχής και αφού είναι συνεχής θα είναι και φραγμένη

β' τρόπος: Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $x_n\in(a,b)$ τέτοια ώστε $|f(x_n)|>n$, $\forall n$. Η x_n είναι φραγμένη. Άρα, από το Θ. Bolzano-Weierstrass, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω x_{k_n}. Αφού η x_{k_n} συγκλίνει, είναι Cauchy, άρα και η $f(x_{k_n})$ είναι Cauchy γιατί η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως και η $f(x_{k_n})$ συγκλίνει. Αυτό είναι άτοπο γιατί $|f(x_{k_n})|>k_n\geq n$.

Άσκηση 2: Έστω I ένα διάστημα και $f:I\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο. Νδο είναι ομοιόμορφα συνεχής

Λύση: Αφού η f' είναι φραγμένη, υπάρχει $M>0$: $|f'(x)|\leq M$, $\forall x$

Έτσι από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, $\forall x,y$ με $x\neq y$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(x,y)$: $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(\xi)|\leq M$

Άρα $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$, δηλ. η f είναι Lipschitz ⇒ άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής

Ασκηση 3: Εστω δύο γειτονικά διαστήματα I_1, I_2 με κοινό άκρο το οποίο ανήκει και στα δύο διαστήματα και $f: I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής στο I_1 και στο I_2. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $I_1 \cup I_2$

Λύση: Εστω $I_1 = (a,b]$, $I_2 = [b,c)$ οπου $x \in I_1$, $y \in I_2$.

Αφού η f ομοιομ. συνεχής στο I_1 θα ισχύει

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists \delta_1 > 0 : \forall x, y \in (a,b] : |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon_1$$

Αφού η f ομοιομ. συνεχής στο I_2 θα ισχύει

$$\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists \delta_2 > 0 : \forall x, y \in [b,c) : |x-y| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon_2$$

Εστω $\varepsilon > 0$ θέλουμε να προσδιορισουμε το δ συναρτησει του ε.

Θετουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$ και δ_1, δ_2 τα παραπανω

Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ τοτε

$$\forall x \in (a,b], \forall y \in [b,c) : |f(x)-f(y)| < |f(x)-f(b)| + |f(b)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ασκηση 4

Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις

α) Η $f(x)=\ln x, x>0$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί το όριο στο 0 είναι $-\infty$.

β) Η $f(x)=\ln x,\ x\geq 1$ είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί από το Θ.Μ.Τ. έχουμε ότι $\forall x,y\geq 1$, με $x\neq y$, $\exists \xi\in(x,y)$:

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = f'(\xi)=\frac{1}{\xi}\leq 1$$

Άρα $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$ άρα η f είναι Lipschitz, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής

γ) Η $f(x)=\frac{\sin x}{x}, x>0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί το όριο στο 0 είναι 1 & το όριο στο ∞ είναι 0.

δ) Η $f(x)=\sin\sqrt{x}, x\geq 0$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ως σύνθεση των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων $\sin x$ ($x\in\mathbb{R}$) και $\sqrt{x}, x\geq 0$

ε) Η $f(x)=3x+1$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 3, δηλ.

$$|f(x)-f(y)|\leq 3|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Άσκηση 5: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής & φραγμένη

Νδο η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής

Λύση

Αφού η f είναι φραγμένη, $\exists M>0 : |f(x)|\leq M, \forall x$

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta>0$:

$\forall x,y$ με $|x-y|<\delta$ να έχουμε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M}$

Άρα για κάθε τέτοια x,y έχουμε

$$|f^2(x)-f^2(y)|=|f(x)-f(y)|\,|f(x)+f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M}\left(|f(x)|+|f(y)|\right)\leq\varepsilon$$

Άρα, η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής

Αν η f δεν είναι φραγμένη, τότε το συμπέρασμα γενικά ΔΕΝ ισχύει. Για παράδειγμα, η x είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά η x^2 δεν είναι.

Άσκηση: Η συνάρτηση $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$

Σ ή Λ?

Λύση

Αν μία συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε υπάρχουν τα $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Για την $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ έχουμε $f(x)\to+\infty$ όταν $x\to 0^+$

Άσκηση: Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy

Σ ή Λ?

Λύση Σωστό από Θεώρημα 3.3.2