2. Σύνολα

Σύνολο είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων δηλαδή διαφορετικών

$\{a, b\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, $[0,1]$, R, το σύνολο των δυνάμεων του 2, $\{2^k : k \in N \text{ νέος}\}$

Στοιχεία ή μέλη ενός συνόλου, ονομάζονται τα αντικείμενα ενός συνόλου

$a \in \{a, b\}$ → το a είναι στοιχείο/μέλος του συνόλου
$\gamma \notin \{a, b\}$ → το γ δεν είναι στοιχείο του συνόλου

Περιγραφή συνόλου

Για οποιοδήποτε αντικείμενο πρέπει να ξέρω αν ανήκει ή δεν ανήκει στο σύνολο (ποτέ και τα 2)

Ένα σύνολο ορίζεται:

1. Με αρίθμηση όλων των στοιχείων
   πχ $A = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

2. Με περιγραφή των στοιχείων
   πχ $A = \{a \in Z : 1 \leq a \leq 3\}$
   λεκτικά: "οι ακέραιοι από 1 έως και 3"

3. Μέσω πράξεων με άλλα σύνολα
   πχ $A = Z \cap [0.5, 3.14]$

Τα στοιχεία ενός συνόλου:

1. Δεν επαναλαμβάνονται
   $\{a, a, b\} = \{a, b\}$
2. Δεν είναι ταξινομημένα
   $\{3, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$ $[0,1] = \{1 - x, x \in [0,1]\}$
3. Μπορεί να είναι διαφορετικού είδους (ακόμα και

συνολα

$P = \{ a, 1, \frac{3}{4}, n, \text{"περοεφανι"}, \{1,2\} \}$.

έτσι έχουμε:

$1 \in P$, $\{1,2\} \in P$, $2 \notin P$, $\{1\} \notin P$, $\{2,1\} \in P$,

$\{1+1, 1\} \in P$

γενικα: $\{1\} \notin \{1\}$, $1 \in \{1,2\}$, $\{1\} \in \{\{1\}\}$ $(\{1\} \neq 1)$

Υποσυνολο: ένα συνολο P ειναι υποσύνολο του συνολου Q και συμβολιζεται με $P \subseteq Q$ αν $\forall p \in P : p \in Q$ δηλαδη

$\forall p : (p \in P) \rightarrow (p \in Q)$

παραδειγματα

$Z \in R$, $\{1,5\} \subseteq \{1,2,5\}$, $\{1,5\} \notin \{1,2,5\}$,

$\{1,5\} \notin \{1,5\}$, $\{1,5\} \subseteq \{1,5\}$

Γνησιο υποσύνολο: λέμε ότι το A ειναι γνήσιο υποσύνολο του B, $A \subset B$, αν και μονο αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$

Προσοχη!

- καθε σύνολο A είναι παντα υποσύνολο του εαυτού του $A \subseteq A$
- Το A δεν είναι γνησιο υποσύνολο του A: $A \not\subset A$ $\neg(A \subset A)$

Ισα συνολα: λέγονται δυο συνολα P και Q $(P = Q)$ αν και μονο αν έχουν ακριβως τα ίδια στοιχεία.

$\{a \in R : 0 \leq a \leq 1\} = [0,1]$

γενικα: $(P \subseteq Q) \wedge (Q \subseteq P) \iff \forall x : (x \in P \iff x \in Q)$

$P \subseteq Q \iff \forall x : (x \in P \rightarrow x \in Q)$

Ερωτηση: Υπαρχουν συνολα A, B ωστε $A \subseteq B$ και $A \in B$.

Ναι υπάρχουν.

$A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, \{\{1\}\{1\}\}\}$

Για καθε συνολο A υπάρχει συνολο B τω $A \in B$, $A \subseteq B$

$B = \{A\} \cup A$

Κενο συνολο λέγεται το συνολο που δεν έχει κανενα στοιχειο. Συμβολίζεται με $\{\}$ ή $\emptyset$.

Γενικα, το κενό ειναι υποσύνολο κάθε συνόλου P ($\emptyset \subseteq P$ για καθε συνολο P)

Προσοχη! Αυτό δεν σημαίνει ότι το κενο συνολο ανήκει παντα στο P

Ερώτηση: Γίνεται $\emptyset \in A$ για κάποιο σύνολο A;

Ναι $\emptyset \in \{1, 2, \emptyset\}$

Το πλήθος των στοιχειων ενος συνολου είναι το μέγεθος ή ο πληθικός αριθμός του συνολου A και συμβολίζεται με $|A|$

πχ. $|\{a, b\}| = 2$, $|\emptyset| = 0$, $|\{\emptyset\}| = 1$, $|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = 2$

$|\{0, \{1, 2\}\}| = 2$, $|[0, 1]| = \infty$, $|\{[0, 1]\}| = 1$

Προσοχη!!

Αν για ένα συνολο A ισχύει:

$|A| < \infty$ τοτε το A ειναι "πεπερασμενο" $\{R : \}$

$|A| = \infty$ τοτε το A ειναι "μη πεπερασμενο" R

παραδείγματα (συνολα-υποσυνολα)

$\emptyset \subseteq \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$ $\{\emptyset\} \subseteq \{1, 2, \emptyset, 10\}$

$\emptyset \notin \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$ $\{\emptyset\} \notin \{1, 2, \emptyset, 10\}$

$\{\emptyset\} \not\subseteq \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$

$\{\emptyset\} \in \{1, 2, \{\emptyset\}, 10\}$

Πράξεις συνόλων

1. Δυναμοσύνολο

Το δυναμοσύνολο (powerset) ενός συνόλου A, είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A. Συμβολίζεται με 2^A ή $P(A)$. $2^A = \{B : B \subseteq A\}$

άδειο σύνολο, το ίδιο το σύνολο.

παραδείγματα

1. $A = \{a, b\}$ $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

2. $A = \{a, b, c\}$

δυαδική αναπαράσταση

0	0	0	$\rightarrow \emptyset$
0	0	1	$\rightarrow \{c\}$
0	1	0	$\rightarrow \{b\}$
1	0	0	$\rightarrow \{a\}$
1	1	0	$\rightarrow \{a,b\}$
0	1	1	$\rightarrow \{b,c\}$
1	0	1	$\rightarrow \{a,c\}$
1	1	1	$\rightarrow \{a,b,c\}$

0: δεν περιέχεται
1: περιέχεται

2. Καρτεσιανό Γινόμενο

Τ. καρτεσιανό γινόμενο δυο συνόλων A, B συμβολίζεται με:
$\{(a, b) : a \in A, b \in B\} = A \times B$
διατεταγμένα ζεύγη (όχι διάστημα)

παραδείγματα

1. $A = \{1, 2\}$ $B = \{2, 4\}$

$A \times B = \{(1,2), (2,4), (1,4), (2,2)\}$

2. $A = \{1, 2\}$ $B = \{2, 4\}$

$B \times A = \{(2,1), (2,2), (4,2), (4,1)\}$

$A \times B \neq B \times A$

Γενικα: αν $|A| = n_A$ και $|B| = n_B$ τοτε $|A \times B| = n_A \times n_B$

3. Ενωση συνολων

$A \cup B = \{ p : (p \in A) \vee (p \in B) \}$	$\{a,b\} \cup \{a,c\} =$
$\cup \iff \vee$ (λογικό ή)	$\{a,b,c\}$
Γενικα: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$	

4. Τομη συνολων

$A \cap B = \{ p : (p \in A) \wedge (p \in B) \}$	$\{a,b\} \cap \{a,c\} =$
$\cap \iff \wedge$ (λογικο και)	$\{a\}$
Γενικα: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$	

5. Διαφορα συνολων

$$A - B = \{ a \in A : a \notin B \}$$

6. Συμπλήρωμα $\bar{A}$ ως προς ένα συνολο αναφορας Ω

$\bar{A} = \Omega - A$	$\overline{\{0,2,4,6,8,10\}} =$
Γενικα: $\bar{\bar{A}} = A$	$\{1,3,5,7,9\}$

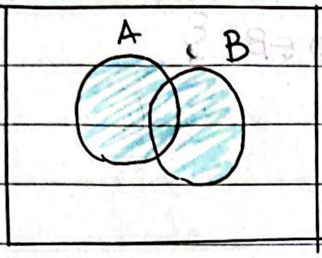
7. Συμμετρική διαφορα

$$A \oplus B = \{ p : (p \in A) \oplus (p \in B) \} = \{ p : (p \in A \cup B) \overset{\text{και}}{\wedge} (p \notin A \cap B) \}$$

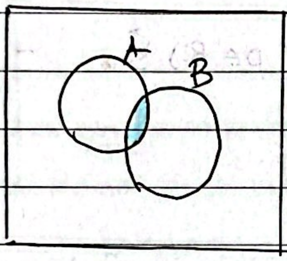
περιέχεται σε ακριβως 1 εκ των 2, όχι και στα δυο	Γενικα: $A \oplus \bar{A} = \Omega$
	$A \oplus \Omega = \bar{A}$
	$A \oplus A = \emptyset$

Διαγραμμα Venn

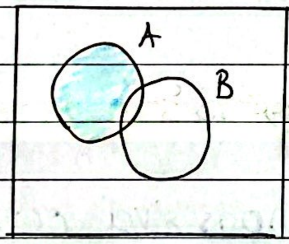
1. Ένωση συνολων



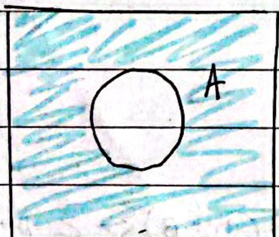
2. Τομή συνολων



3. Διαφορα συνολων

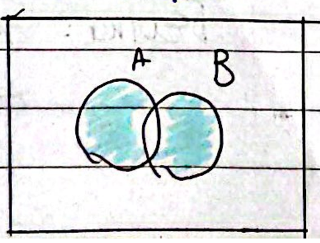


4. Συμπλήρωμα A ως προς ένα σύνολο αναφορας



όλος ο χώρος
πέρα από το A

5. συμμετρική διαφορά



Ιδιοτητες

1. Η ενωση, η τομη και η συμμετρική διαφορά είναι προσεταιριστικές.

πχ. για την ενωση: $(A \cup B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Η διαφορα <u>δεν</u> είναι

πχ. $(A - B - C) \neq (A - B) - C$ Ή $A - (B - C)$

Παραδειγματα

$A = \{1, 2\}$ $B = \{2\}$ $C = \{1, 2, 3\}$

1. $(A - B) - C = \emptyset$ 2. $A - (B - C) = A - \emptyset = A$ 3. $A - (C - B) = \{2\}$

2. Η ένωση, η τομή, και η συμμετρική διαφορά είναι αντιμεταθετικές.

πχ για την ενωση: $(A \cup B) = (B \cup A)$

Η διαφορα <u>δεν</u> είναι

πχ $A - B \neq B - A$

3. Η ενωση και η τομή είναι επιμεριστικές μεταξύ τους.

πχ. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. Ουδέτερα στοιχεία.

$a + 0 = a$ (για προσθεση)

$a \cdot 1 = a$ (για πολ/μο)

$A \cup \emptyset = A$

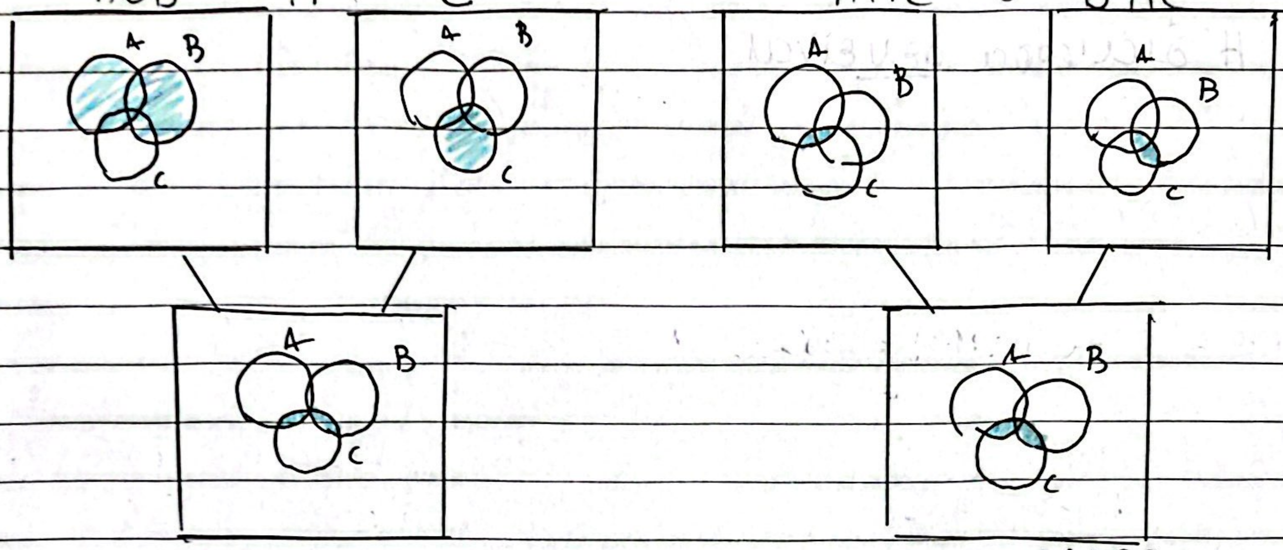
$A \cap \Omega = A$

$A \oplus \emptyset = A$

Αποδείξεις ιδιοτήτων

1. Απόδειξη με διάγραμμα Venn

A∪B ∩ C   A∩C ∪ B∩C



$(A\cup B)\cap C$ $(A\cap C)\cup(B\cap C)$

2. Με πίνακα αλήθειας

A	B	C	$(A\cup B)\cap C$	$(A\cap C)\cup(B\cap C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

3. Απόδειξη με ιδιότητες

Θεώρημα:

$$\underbrace{(A\cup B)\cap C}_{P} = \underbrace{(\overset{Q_1}{A\cap C}) \cup (\overset{Q_2}{B\cap C})}_{Q}$$

Απόδειξη

Θέλω να δείξω ότι $P = Q$

- $Q \subseteq P$

Έχουμε $Q_1 \subseteq A \Rightarrow Q_1 \subseteq A \cup B$, $Q_1 \subseteq C$ $\Big\}$ $Q_1 \subseteq (A \cup B) \cap C$

Αντίστοιχα $Q_2 \subseteq B \Rightarrow Q_2 \subseteq A \cup B$, $Q_2 \subseteq C$ $\Big\}$ $Q_2 \subseteq (A \cup B) \cap C$

οπότε $Q_1 \cup Q_2 = Q \subseteq P$

- $P \subseteq Q$

Έστω $p \in P$ με $p \in A \cup B$ και $p \in C$

Αν $p \in A$, επειδή $p \in C \Rightarrow p \in A \cap C = Q_1$
Αν $p \in B$, επειδή $p \in C \Rightarrow p \in B \cap C = Q_2$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $p \in Q_1 \cup Q_2 = Q$

4. Κανόνες De Morgan για σύνολα

Θεώρημα 1: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
Θεώρημα 2: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Απόδειξη 1: $\overline{A \cap B} = \{x : x \notin A \cap B\} = \{x : \neg (x \in A \cap B)\} =$

$\{x : \neg (x \in A \wedge x \in B)\} = \{x : (\overline{x \in A}) \vee (\overline{x \in B})\} =$

$\{x : (x \notin A) \vee (x \notin B)\} = \{x : (x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B})\} =$

$\{x : x \in (\bar{A} \cup \bar{B})\} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Αναπαράσταση συνόλου στον υπολογιστή.

Έστω $\Omega = \{1, 2, \dots n\}$. Μπορώ να αναπαραστήσω κάθε υποσύνολο $A \subseteq \Omega$ ως μια συμβολοσειρά από bits.

παράδειγμα

$n = 5$, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{1, 3, 4\} \rightarrow 1\ 0\ 1\ 1\ 0$ 0: δεν περιέχεται

$A = \{2, 3\} \rightarrow 0\ 1\ 1\ 0\ 0$ 1: περιέχεται

$A = \emptyset \rightarrow 0\ 0\ 0\ 0\ 0$

Έχουμε: $10110_{(2)} = 22_{(10)}$ και $01100_{(2)} = 12_{(10)}$

πράξεις: $22 \,\&\, 12 = 4$ $(00100)_{(2)}$

$22 \mid 12 = 30$ $(11110)_{(2)}$

$22 \wedge 12 = 26$ $(11010)_{(2)}$

Παιχνίδι με τράπουλα

$A = \{4\diamondsuit, 5\heartsuit\}$ $\Omega = \{A\heartsuit, 2\heartsuit, \dots 4\diamondsuit, 5\heartsuit, \dots K\clubsuit\}$

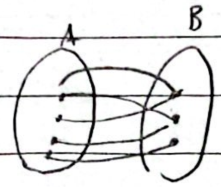
0 0 1 1 0

Συναρτήσεις

Συνάρτηση καλείται μια ανάθεση ακριβώς ενός στοιχείου του B σε κάθε στοιχείο του A όπου A το πεδίο ορισμού της και B το πεδίο τιμών.

A: σύνολο φοιτητών 1ου έτους

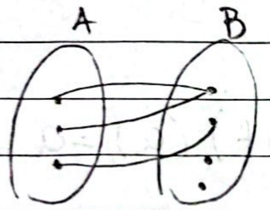
B: βαθμός της τελικής εξέτασης στα διακριτά



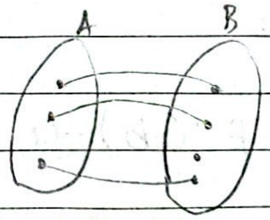
! Η συνάρτηση πρέπει να είναι **μονοσήμαντη** δηλαδή για κάθε $a \in A$ να υπάρχει μοναδικό $b \in B$ τ.ω $b = f(a)$

εικόνα του a

Μια συνάρτηση f λέγεται 1-1, αν για κάθε $a, a' \in A$ με $a \neq a'$ ισχύει $f(a) \neq f(a')$.



δεν είναι 1-1



είναι 1-1

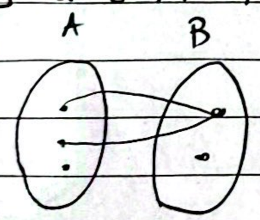
παράδειγμα

$f(x) = x^2$ $f: R \to R$ δεν είναι 1-1 διότι $f(-1) = f(1) = 1$

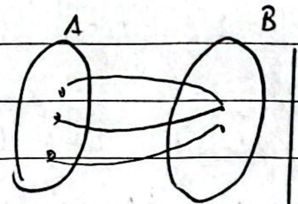
Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι επί αν και μόνο αν $\forall b \in B$ $\exists a \in A: f(a) = b$ δηλαδή $B = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$

παράδειγμα

$f(x) = x^2$ $f: R \to R_0^+$ είναι επί γιατί για κάθε $y \geq 0$ υπάρχει $x = \sqrt{y}$ που να δίνει $f(x) = y$



όχι επί

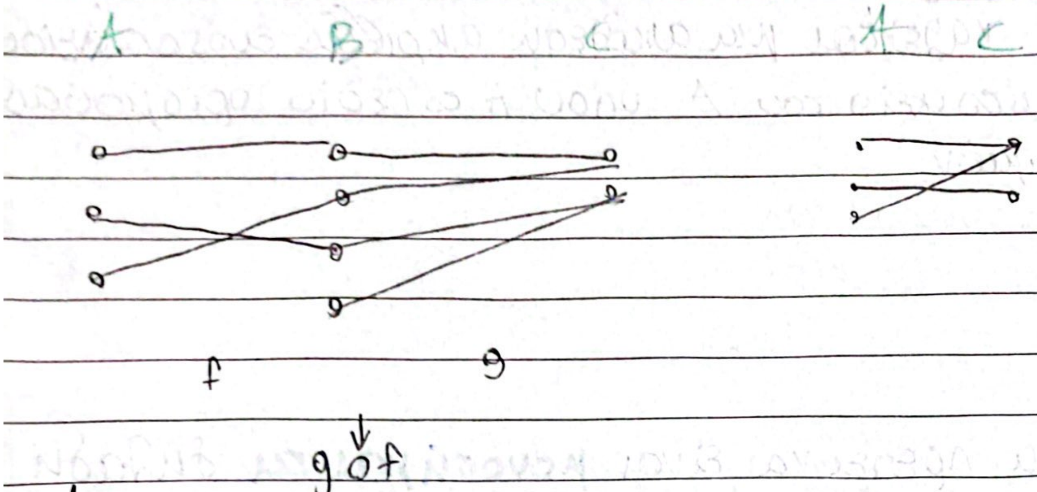


επί

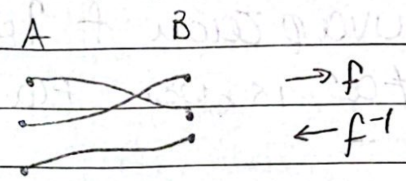
παράδειγμα

$f(x) = x^2$ $f: R \to R$ δεν είναι επί γιατί δεν υπάρχει $x \in R$ που να δίνει $x^2 = -1$

Έστω οι συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: B \to C$. Η σύνθεση της f με την g είναι μια συνάρτηση $g \circ f: A \to C$ όπου $\forall a \in A$ ισχύει $(g \circ f)(a) = g(f(a))$



Μια συνάρτηση που είναι 1-1 και επί ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** και ορίζεται η αντίστροφή της $f: A \to B$, $f^{-1}: B \to A$



Γενικά ισχύουν:

$$f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(b)=a \qquad (f^{-1}\circ f)(a)=a$$

Ενδιαφέρουσες συναρτήσεις

1. παραγοντικό

$\forall n \in N \to n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

$0!=1 \quad 1!=1 \quad 2!=2 \quad 3!=6 \quad 4!=24$

Stirling προσέγγιση: $n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

2. Ακέραιο μέρος ή δάπεδο (floor)

$x \in R \to \lfloor x \rfloor = a \in Z$ αν και μόνο αν ο a είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος με $a \le x$.

$\lfloor 3.7 \rfloor = 3 \quad \lfloor -0.5 \rfloor = -1$

3. Οροφή (ceil)

$x \in R \to \lceil x \rceil = a \in Z$ αν

4. Ακολουθία

Είναι μια συνάρτηση η οποία έχει ως πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών (ή ακεραίων) f: A⊆N→R

Συχνά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $a_n = f(n)$

π.χ. $a_1 = 1$ $a_2 = \frac{1}{2}$ $a_3 = \frac{1}{3}$ .... $a_n = \frac{1}{n}$

Είδη ακολουθίας

1. Αριθμητική πρόοδος

$a_n = a, a+d, a+2d, a+3d \dots a+nd = a+nd$

ως γραμμική συνάρτηση: $f(x) = dx + a$, $x \in N$

για $a=1$ και $d=2$ έχουμε την ακολουθία 1, 3, 5, 7, 9....

2. πολυωνυμική ακολουθία

$a_n = an^2 + bn + c$

ως πολυωνυμική συνάρτηση: $f(x) = ax^2 + bx + c$

1ου βαθμού 1 3 5

2 2 οι διαφορές

0

2ου βαθμού 1 3 7 13 21 ...

2 4 6 8 ...

2 2 2 ...

0 0 ...

3. Γεωμετρική πρόοδος

$a_n = a, ar, ar^2, ar^3 \dots ar^n = ar^n$ ή ra_{n-1}

ως εκθετική συνάρτηση: $f(x) = ar^x$

για $a=1, r=2$ έχουμε την ακολουθία: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

Τρόποι ορισμού ακολουθίας

1. Με κλειστό τύπο

$a_n = 5n+2$

2. Περιγραφικά

με κείμενο: Η ακολουθία των δυνάμεων του 2

με pattern: 1, 2, 4, 8, 16, 32

με ιδιότητα: $a_i = \begin{cases} 0 & \text{αν χάνω με i κομμάτια} \\ 1 & \text{αν κερδίζω με i κομμάτια} \end{cases}$ (παιχνίδι σοκολάτας)

3. Αναδρομική σχέση

Fibonacci : $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (προσθέτω τα 2 προηγούμενα)

Γενικά ισχύει: $a_n = a_{n-1} + 1$ (1)

κλειστός τύπος για την παραπάνω αναδρομική σχέση με $a_0 = 0$

$a_n = a_{n-1} + 1 = a_{n-2} + 2 = a_{n-3} + 3 \dots a_{n-n} + n = a_0 + n \Leftrightarrow a_n = n$

Γενικά ισχύει: $a_n = a_{n-1} + 3$ (2)

κλειστός τύπος για την παραπάνω αναδρομική σχέση με $a_1 = 2$

$a_n = a_{n-1} + 3 = a_{n-2} + 6 = a_{n-(n-1)} + 3(n-1) = a_1 + 3(n-1) =$

$2 + 3(n-1) = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

Παιχνίδι με σοκολάτα (Ενότητα 1) 2, 5, 7 κομμάτια

1. Με κλειστό τύπο

$a_i = \begin{cases} 0 & \text{αν χάνω με i κομμάτια} \\ 1 & \text{αν κερδίζω με i κομμάτια} \end{cases}$

2. Αναδρομικά

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$\vdots$

$a_n = 1 - a_{n-2} a_{n-5} a_{n-7}$

3. Κλειστός τύπος

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \bmod 22 \in \{0,1,4,10,13,14\} \\ 1 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πληθικότητα συνόλων

Δυο σύνολα A και B έχουν ίδια πληθικότητα αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση και επί συνάρτηση $f: A \to B$ τέτοια ώστε $|A| = |B|$

Έτσι, αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to B$, τότε θα είναι $|A| \leq |B|$ (Το πλήθος των στοιχείων του A είναι μικρότερο ή ίσο του πλήθους των στοιχείων του B)

Παραδείγματα

1. και επί και 1-1 $f: A \to B$ με $A = \{1,2,3\}$ και $B = \{5,6,7\}$
   - $|A| = |B| \Leftrightarrow |\{1,2,3\}| = |\{5,6,7\}|$

2. όχι επί και 1-1 $f: A \to B$ με $A = \{1,2\}$ $B = \{5,6,7\}$
   - $|A| \leq |B| \Leftrightarrow |\{1,2\}| \leq |\{5,6,7\}|$

Προσοχή! Το να μετράμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου έχει νόημα μόνο αν το σύνολο είναι πεπερασμένο

Γενίκευση του ορισμού σε σύνολα που είναι άπειρα

Ένα σύνολο A είναι αριθμήσιμο (ή μετρήσιμο) αν $|A| \leq |N|$. (Αν το σύνολο A έχει λιγότερα στοιχεία από τους φυσικούς αριθμούς) δηλαδή αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to N$

Παραδείγματα

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι μετρήσιμα;

1. $\{-3, \pi, \sqrt{2}\}$ ✓

Συνήθως στους φυσικούς, δεν λαμβάνεται υπόψιν το 0

2. $\{2i : i \in N\}$ ✓ 4. Q ✓ 6. Z ✓

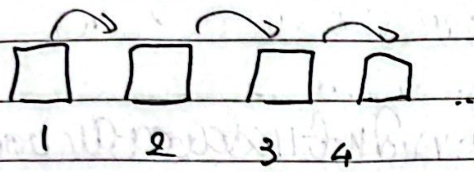
3. Z^2 ✓ 5. Q/Z ✓ 7. $N \cup \{a\}$ ✓

8. $N \times Q$ ✓

Ξενοδοχείο του Hilbert

αν το a είναι αριθμήσιμο.

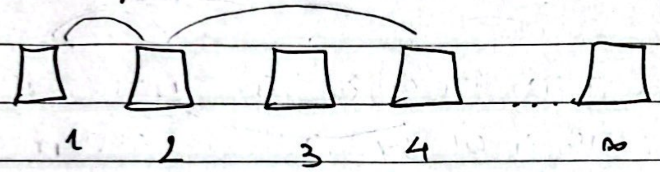
1.



... απειρα δωμάτια

Μπορώ να πω σε κάθε φιλοξενούμενο να πάει στο επόμενο δωμάτιο και να αδειάσει το προηγούμενο.
παράδοξο: όλα τα δωμάτια είναι κατειλημμένα, αλλά πάντα υπάρχει χώρος για νέους επισκέπτες.

2. Αν θέλαμε να φιλοξενήσουμε άπειρους νέους επισκέπτες (όλους τους αρνητικούς φυσικούς)



Μπορώ να πω σε κάθε φιλοξενούμενο να πάει στο αμέσως επόμενο δωμάτιο που ο αριθμός του είναι ζυγός (2,4,6) Στη συνέχεια, τα δωμάτια με περιττούς αριθμούς (1,3,5,7) θα είναι έτοιμα να υποδεχτούν τους νέους επισκέπτες (ο 1 στο 2, ο 2 στο 4, ο 3 στο 6, ο 4 στο 8)

συνάρτηση 1-1 και επί για το παράδειγμα(1)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ x+1, & x \in N \end{cases}$$

συνάρτηση 1-1 και επί για το παράδειγμα(2)

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in N \\ 2|x|+1, & x \in Z - N \end{cases}$$

αρνητικοί

Ερωτήσεις.

① Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; Ναι

ζεύγος

Η συνάρτηση f είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε ζευγάρι φυσικών αριθμών (m,n) όπου $m,n \in \mathbb{N}$ ένα φυσικό αριθμό. Η συνάρτηση αυτή είναι ένας διοδιάστατος χάρτης από το σύνολο των ζευγαριών φυσικών αριθμών στο σύνολο των φυσικών αριθμών. (1-1 αλλα όχι επί)

παραδείγματα συναρτήσεων

1. Συνάρτηση πρόσθεσης: $f(m,n) = m+n$ (όχι 1-1)
2. Συνάρτηση πολ/μού: $f(m,n) = m \times n$
3. Συνάρτηση διαφοράς: $f(m,n) = m-n$.
4. αναγνώρισης του ζεύγους: $f(m,n) = 2^m \cdot 3^m$ (1-1)

Αυτή η συνάρτηση είναι ένα παράδειγμα όπου αντιστοιχούμε το ζεύγος (m,n) σε έναν μοναδικό αριθμό μέσω της μορφής του αριθμού ως γινόμενο 2 βάσεων όπως οι δυνάμεις του 2 και του 3.

② Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$; Ναι

παράδειγμα συνάρτησης

1. Συνάρτηση κλάσματος: $f(m,n) = \frac{m}{n}$, $(m,n) \in \mathbb{N}$ (1-1)

③ Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$; Ναι

Σύνολο $\mathbb{N}^k$: Το $\mathbb{N}^k$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο του $\mathbb{N}$ με τον εαυτό του k φορές. Δηλαδή περιλαμβάνει όλα τα k-αδι αριθμητικά διαστήματα $(n_1, n_2, \dots n_k)$ όπου κάθε n_i είναι φυσικός αριθμός. ($\mathbb{N}^k \to$ αριθμήσιμο) (1-1 όχι επί)

παράδειγμα συνάρτησης

1. $f(n_1, n_2, \dots n_k) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$

όπου:

$p_1, p_2, \dots p_k$ είναι οι πρώτοι αριθμοί (πχ $p_1=2, p_2=3, p_3=5$)
$n_1, n_2, \dots n_k$ είναι τα στοιχεία του $(n_1, n_2, \dots n_k) \in N^k$

Θεώρημα Schroder-Beustein

Αν $|A| \leq |B|$ και $|B| \leq |A|$ τότε $|A| = |B|$

Αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to B$ και 1-1 $g: B \to A$, τότε υπάρχει 1-1 συνάρτηση και επί $h: A \to B$

(4) Υπάρχει ακολουθία a_1, a_2 που να περιέχει κάθε στοιχείο του $N \times Q$ ακριβώς μια φορά; Ναι
(Με βάση το θεώρημα πιο πάνω)

• Υπάρχει συνάρτηση $f: N \to N \times Q$ η οποία είναι 1-1
(Αφού και τα 2 σύνολα N και $N \times Q$ είναι αριθμήσιμα)
για παράδειγμα μια τέτοια συνάρτηση είναι η συνάρτηση που πραγματοποιεί τις παρακάτω αντιστοιχίσεις

$0 \to (0,0)$ $\quad$ $3 \to (0, \frac{1}{2})$ $\quad$ $6 \to (1, \frac{1}{2})$
$1 \to (0,1)$ $\quad$ $4 \to (1, \frac{2}{1})$
$2 \to (1, \frac{1}{1})$ $\quad$ $5 \to (2, \frac{3}{1})$ $\quad$ $7 \to (3, \dots)$

• Υπάρχει συνάρτηση $g: N \times Q \to N$ γιατί το $N \times Q$ είναι αριθμήσιμο

άρα υπάρχει συνάρτηση $h: N \to N \times Q$ που είναι 1-1 και επί, σύμφωνα με το θεώρημα Schroder-Beustein

Μέχρι τώρα τα σύνολα που είδαμε δεν ήταν μεγαλύτερα από τους φυσικούς.

(5) Υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε να πραγματοποιεί την αντιστοίχιση: $\bigcup_{k=1}^{\infty} N^k \xrightarrow{1-1} N$ Ναι

$f(a,b,c,d\dots) = 2^a 3^b 5^c 7^d \dots$

(με τον ίδιο τρόπο μπορώ να αντιστοιχίσω οποιοδήποτε υποσύνολο των φυσικών)

(6) Έστω ότι έχουμε ένα θεωφορείο όπου υπάρχουν όλες οι πιθανές ακολουθίες χαρακτήρων a,b.
$(A = \{ c_i, \ c_i : N \to \{a,b\} \})$ ακολουθία με $c_i \in \{a,b\}$ Είναι το A αριθμήσιμο;
Όχι, καθώς περιέχει περισσότερα στοιχεία από τους φυσικούς αριθμούς.

Απόδειξη (τεχνική της διαγωνοποίησης Cantor)

Έστω ότι υπάρχει τρόπος να χωρέσω όλο το A στο N, δηλαδή υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: A \to N$

n	A
1	a b a a b a ... ∞
2	b a b b b a ... ∞
3	a b b a a b ... ∞
4	
⋮	

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία + η οποία δεν μπήκε, δεν υπάρχει πουθενά και διαφέρει από όλες.
Από κάθε ακολουθία επιλέγουμε ένα στοιχείο που διαφέρει.
Παίρνω τη διαγώνιο, και όποιον χαρακτήρα βλέπω

τον αλλάζω

$x_i = \begin{cases} a & \text{αν ο i-οστός χαρακτήρας του i-οστού αριθμού είναι b} \\ b & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Αν το $f(x)=j$, δηλαδή το x βρίσκεται στη θέση j, τότε καταλήγω σε άτοπο, γιατί θα έπρεπε $x_j \neq x_i$
Άρα το A είναι υπεραριθμήσιμο

Ένα σύνολο είναι υπεραριθμήσιμο / μη αριθμήσιμο αν δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση / δεν υπάρχει τρόπος να γράψω μια ακολουθία που να περιέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου.

παραδείγματα
ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι υπεραριθμήσιμα;
1. $\mathbb{R}$ ✓ 2. $[0,1]$ ✓ 3. $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ (άρρητοι) ✓

! παρατηρήσεις

→ Την διαγωνιοποίηση του Cantor την χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι κάποια σύνολα είναι υπεραριθμήσιμα

→ $|\mathbb{N}| \overset{\aleph_0}{<} |\mathbb{R}|$
$|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|^{\aleph_1}$
$\to |2^{\mathbb{R}}| > \mathbb{R}$ $\quad (|2^{\mathbb{N}}| > A)$
Όλα τα πιθανά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών είναι περισσότερα από τους πραγματικούς αριθμούς.

Πολυώνυμα

1. πολυώνυμο 3ου βαθμού: $a_n = x n^3 + y n^2 + z n + \dots$ w.1

2. πολυώνυμο 2ου βαθμού $a_n = x n^2 + y n + \dots$ w.1

3. πολυώνυμο k βαθμού: $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + b^{k-1})$

4. πολυώνυμο k-1 βαθμού: $a_n = x_{k-1} n^{k-1} + x_{k-2} n^{k-2} \dots + x_1 n + x_0$.

$d_n = a_{n+1} - a_n$ → αναφέρεται στη διαφορά μεταξύ δυο διαδοχικών όρων της ακολουθίας. Αν η διαφορά είναι σταθερή, τότε η ακολουθία είναι αριθμητική.

1	2	4	8	15	26	42	64...		3ου βαθμού
	1	2	4	7	11	16	22		2ου βαθμού
		1	2	3	4	5	6		1ου βαθμού
			0	0	0	0	0		0 βαθμού

Αθροίσματα (σειρά)

- $\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n$

$\sum_{i \in S} a_i = a_3 + a_5 + a_{12}$ με $S \in \{3, 5, 12\}$

- $\bigvee_{i=m}^{n} a_i = a_m \vee a_{m+1} \vee \dots \vee a_n$

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$ (κλειστός τύπος)

1. Αθροισμα γεωμετρικής προόδου $(a_n = a r^n)$

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = \begin{cases} a(n+1), & r=1 \\ \dfrac{ar^{(n+1)} - a}{r-1}, & r \neq 1 \end{cases}$$

Αποδειξη

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} ar^j \overset{\cdot r}{\Longleftrightarrow} rS_n = r\sum_{j=0}^{n} ar^j \Leftrightarrow rS_n = \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1}$$

$i = j+1,\ j=0 \to i=1$

$$\Leftrightarrow rS_n = \sum_{i=1}^{n+1} ar^i \Leftrightarrow rS_n = \sum_{i=1}^{n} ar^i + ar^{(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$rS_n = \sum_{i=0}^{n} ar^i + ar^{n+1} - ar^0 \Leftrightarrow rS_n = S_n + ar^{n+1} - a \cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$rS_n - S_n = ar^{n+1} - a \Leftrightarrow S_n(r-1) = ar^{n+1} - a \overset{r \neq 1}{\Longleftrightarrow}$$

$$S_n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}, \quad r \neq 1$$

παραδειγματα

$a_n = 2^n \quad (a_n = 1 \cdot 2^n)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{2^{n+1} - 1}{2-1} = 2^{n+1} - 1$$

για $n=4$ έχουμε: $\sum_{i=0}^{4} = 2^{4+1} - 1 = 2^5 - 1 = 31$

2. Αθροισμα αριθμητικής προόδου

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Αποδειξη

$$\left.\begin{aligned} S_n &= S_{n1} = 1 + 2 + \dots + n \\ S_n &= S_{n2} = n + n-1 + \dots + 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &2S_n = S_n + S_n = S_{n1} + S_{n2} = \\ &(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

? αν αθροίσω όρους κ βαθμού βγαίνει πολυώνυμο κ+1 βαθμού

$\Leftrightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

παράδειγμα
υπολογίστε το άθροισμα $1+2+3 \dots +100$

$$\begin{cases} 1+2+3 \dots +100 = S_{100} \\ 100+99+98 \dots +1 = S_{100} \end{cases} (+)$$

$101+101+101 \dots +101 = 2S_{100} \Leftrightarrow 101 \cdot 100 = 2S_{100} \Leftrightarrow$
$S_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

οπότε $\sum_{i=1}^{n}(ai+b) = a\sum_{i=1}^{n} i + b\sum_{i=1}^{n} 1 = a\frac{n(n+1)}{2} + bn$

3. Αθροίσματα μέχρι n

θεώρημα του Νικόμαχου

$i^2 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$i^3 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4} = (1+2+3+\dots+n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

$i^4 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

$i^5 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n+1)$

4. Αθροίσματα με άπειρους όρους.

- $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1+x+x^2+x^3+\dots+\infty$ (1)

$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Αν πάρουμε το $\lim_{n\to-\infty} S_n$ θα έχουμε το άθροισμα (1)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{0-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$

διοτι $\lim_{n\to\infty} (x^{n+1}) = 0$ οταν $|x|<1$

- $\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\quad |x|<1$

Αποδειξη

$$\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i\right)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- $\sum_{i=1}^{\infty} i(i-1) x^{i-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\quad |x|<1$

Αποδειξη

$$\sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)x^{i-2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1}\right)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1}\right)' =$$

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

- $\sum_{i=1}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ $\quad |x|<1$

Αποδειξη

$$\sum_{i=1}^{\infty} i x^i = x \sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = x \sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

- $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = f'(x)$ πχ e^x

$$f'(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{i x^{i-1}}{i!}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = f(x)$$

ισοδύναμα

- $$\int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} x^i \, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t x^i \, dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i+1}}{i+1} \overset{j=i+1}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j}$$
- $$\int_0^t \frac{1}{1-x} \, dx = \ln \frac{1}{1-t} = -\ln(1-t)$$

- $$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} i \right) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$