• <u>Παρατήρηση</u>: Αν $\sqrt[n]{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, δεν δίνει συμπέρασμα.

Π.χ. $\alpha_n = n$, $\beta_n = \frac{1}{n}$: τότε $\sqrt[n]{\alpha_n} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ και $\sqrt[n]{\beta_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

με $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία τ.ω. $\alpha_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

α) Αν υπάρχει $0<\rho<1$ τ.ω. $\sqrt[n]{\alpha_n} \leq \rho$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

β) Αν υπάρχει $\rho>1$ τ.ω. $\sqrt[n]{\alpha_n} \geq \rho$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

• <u>Παράδειγμα</u>: Έστω $(\alpha_n)_n = \left((\sqrt[n]{n}-1)^n\right)_n$. Τότε $\sqrt[n]{\alpha_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \to \underbrace{1-1}_{=0}$

Άρα $\alpha_n = (\sqrt[n]{n}-1)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

§7 Μονότονες ακολουθίες και σύγκλιση

• <u>Ορ</u>: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία. Λέμε ότι η $(\alpha_n)_n$ είναι

i) αύξουσα αν $\forall n \leq m$ έχουμε $\alpha_n \leq \alpha_m$

ii) γνησίως αύξουσα αν $\forall n<m$ έχουμε $\alpha_n < \alpha_m$

iii) φθίνουσα αν $\forall n \leq m$ έχουμε $\alpha_n \geq \alpha_m$

iv) γνησίως φθίνουσα αν $\forall n<m$ έχουμε $\alpha_n > \alpha_m$

Η $(\alpha_n)_n$ καλείται μονότονη αν είναι ένα από τα παραπάνω

• Παρατηρήσεις: i) Για να είναι η $(\alpha_n)_n$ αύξουσα (αντ. γν. αύξ, φθίνουσα, γν φθ.) αρκεί $\forall n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ (αντ. $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$).

ii) $(\alpha_n)_n$ γν. αύξ $\Rightarrow$ $(\alpha_n)_n$ αύξ, $(\alpha_n)_n$ γν. φθ. $\Rightarrow$ $(\alpha_n)_n$ φθ.

iii) $(\alpha_n)_n$ αύξουσα $\Rightarrow$ $(\alpha_n)_n$ κάτω φραγμένη (Πράγματι, ισχύει $\alpha_n \geq \alpha_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

iv) $(\alpha_n)_n$ φθίνουσα $\Rightarrow$ $(\alpha_n)_n$ άνω φραγμένη

• Θεώρημα: Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

α) Έστω $(\alpha_n)_n$ αύξουσα, αν $(\alpha_n)_n$ φραγμένη, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

ενώ αν $(\alpha_n)_n$ μη φραγμένη, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

β) Έστω $(\alpha_n)_n$ φθίνουσα, αν $(\alpha_n)_n$ φραγμένη, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \inf\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

ενώ αν $(\alpha_n)_n$ μη φραγμένη, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$

• Παρατηρήσεις

Αν $(\alpha_n)_n$ αύξουσα (αντ. γν αύξ), με $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, τότε $\alpha_n \leq \alpha$ (αντ. $\alpha_n < \alpha$), $\forall n \in \mathbb{N}$

Αν $(\alpha_n)_n$ φθίνουσα (αντ. γν. φθ.), με $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$, τότε $\alpha_n \geq \alpha$ (αντ. $\alpha_n > \alpha$), $\forall n \in \mathbb{N}$

• Ο αριθμός e: Θεωρείστε την ακολουθία $(\alpha_n)_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Αποδεικνύεται ότι η $(\alpha_n)_n$ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη. Άρα συγκλίνει. Ορίζουμε $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Μάλιστα, έχουμε $2 < e < 3$.

ΑΣΚ: Έστω $(a_n)_n$ με $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ και $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \rho < 1$.

Δ.ο. $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Λύση: Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1-\rho}{2} > 0$. Αφού $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \rho$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \rho + \varepsilon = \frac{\rho+1}{2}$. Άρα, θέτοντας $\theta = \frac{\rho+1}{2} \in (0,1)$, έχουμε $0 \leq a_n \leq \theta^n$, $\forall n \geq n_0$.

Αφού $\theta^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, έπεται (από το κριτήριο παρεμβολής) ότι $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

ΑΣΚ: Δ.ο. $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Λύση: Έχουμε $\sqrt[n]{n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, άρα υπάρχει $\theta_n \geq 0$ ώστε $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα, μπορούμε να γράψουμε για $n \geq 2$:

$$n = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n + \underbrace{\binom{n}{2}}_{= \frac{n(n-1)}{2}}\theta_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2$$

Άρα, $0 \leq \theta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, $\forall n \geq 2$ και έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\theta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

ΑΣΚ: Έστω $(\alpha_n)_n$ αύξουσα και φραγμένη και έστω $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Δ.ο. $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$.

Λύση: Το σύνολο $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο (διότι η $(\alpha_n)_n$ είναι (άνω) φραγμένη, άρα από το αξίωμα πληρότητας, υπάρχει το $\sup A = \alpha$. Θ.δ.ο. $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, τότε από τον χαρακτηρισμό του $\sup A$, γνωρίζουμε ότι

1) $\alpha_n \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha - \varepsilon < \alpha_{n_0}$

Συμπεραίνουμε λοιπόν λόγω της μονοτονίας ότι

$$n \geq n_0 \Rightarrow \alpha - \varepsilon < \alpha_{n_0} \leq \alpha_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

και επομένως $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$.

ΑΣΚ: Βρείτε το όριο της $(\alpha_n)_n = \left(\frac{2^n n!}{n^n}\right)_n$

Λύση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1} 2^n \, n!} = \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{e}$$

με $\frac{2}{e} < 1$. Από κριτήριο λόγου $\frac{2^n n!}{n^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ΑΣΚ: Έστω οι ακολουθίες $(a_n)_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_n$ και $(b_n)_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_n$

(i) Δ.ο. η $(a_n)_n$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ η $(b_n)_n$ είναι γνησίως φθίνουσα.

(ii) Δ.ο. οι $(a_n)_n$ και $(b_n)_n$ είναι φραγμένες και ισχύει $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) Δ.ο. οι $(a_n)_n$ και $(b_n)_n$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο που ονομάζεται e.

(iv) Δ.ο. $e \in (2,3)$.

Λύση (i) Θα ελέγξουμε ότι $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{n+2} < \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$$ Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε:

$$1-\frac{n}{(n+1)^2} < \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$$ Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$

το οποίο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ομοίως, θα ελέγξουμε ότι $b_n > b_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1} < \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n+1} < \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}.$$ Από ανισότητα Bernoulli έχουμε $1+\frac{n+1}{n(n+2)} < \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}$

Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $\frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{1}{n+1}$, το οποίο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Προφανώς έχουμε $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, άρα ισχύει $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(iii) και οι $(a)_n$, $(b_n)_n$ είναι φραγμένες. Επειδή, είναι μονότονες συγκλίνουν και μάλιστα έχουν το ίδιο όριο, αφού $b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ και

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

(iv) Έχουμε $a_n < e < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Για $n = 1$, $a_1 = 2 < e < b_1 = 2^2 = 4$

Για να προσεγγίσουμε την τιμή του ορίου e καλύτερα, υπολογίζουμε

για $n = 5$ $\quad a_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 < e < b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6$

$$2,48832 < e < 2,985984 \Rightarrow e \in (2,3).$$

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $(\alpha_n)_n$ και $(\beta_n)_n$ ακολουθίες. Δ.ο. αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$, τότε $\alpha_n \cdot \beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \cdot \beta$.

<u>Λύση</u>: Οι $(\alpha_n)_n$ και $(\beta_n)_n$ είναι φραγμένες, άρα υπάρχει μία σταθερά

$M > 0$ τ.ω. $\begin{cases} |\alpha_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \\ |\beta_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ και $\begin{matrix} |\alpha| \leq M \\ |\beta| \leq M \end{matrix}$

Έστω $\varepsilon > 0$.
Λόγω της σύγκλισης των $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$, έχουμε

$$\exists n_1 \text{ τ.ω. } n \geq n_1 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2M}$$
$$\exists n_2 \text{ τ.ω. } n \geq n_2 \Rightarrow |\beta_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Άρα για $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ ισχύει

$$|\alpha_n\beta_n - \alpha\beta| = |\alpha_n(\beta_n - \beta) + \beta(\alpha_n - \alpha)| \leq |\alpha_n||\beta_n - \beta| + |\beta||\alpha_n - \alpha|$$
$$< \underbrace{M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}}_{=\varepsilon}$$

Δηλαδή $\alpha_n \beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \cdot \beta$