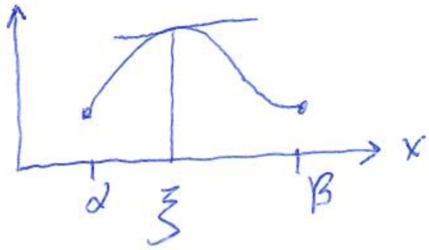
• <u>Παρατήρηση</u>: Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in I$.

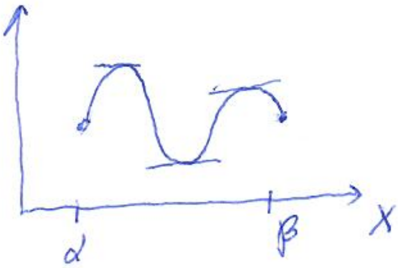
Τότε είτε το x_0 είναι άκρο του I

ή το x_0 εσωτερικό σημείο του I και $f'(x_0) = 0$.

• <u>Ορ</u>: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό σημείο του I λέγεται κρίσιμο αν $f'(x_0) = 0$.

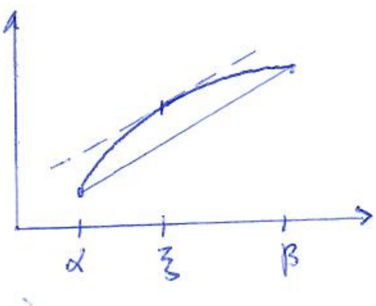
• <u>Θεώρημα</u> (Rolle): Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f'(\xi) = 0$.





• <u>Θεώρημα Μέσης Τιμής</u> (ΘΜΤ): Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$

τ.ω. $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$



• <u>Συνέπειες</u>: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (α,β)

i) Αν $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$, τότε f αύξουσα στο (α,β)

ii) Αν $f'(x)\leq 0$, ——— , τότε f φθίνουσα στο (α,β)

iii) Αν $f'(x)>0$, ——— , τότε f γνησίως αύξουσα στο (α,β).

iv) Αν $f'(x)<0$, ——— , τότε f γνησίως φθίνουσα στο (α,β).

• <u>Θεώρημα</u> (Μέσης Τιμής του Cauchy): Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β). Τότε, $\exists x_0\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $[f(\beta)-f(\alpha)]\,g'(x_0)=[g(\beta)-g(\alpha)]\,f'(x_0)$.

[Παρατήρηση: για $g(x)=x$ έχουμε $g'(x)=1$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$. Άρα

$$[f(\beta)-f(\alpha)]\cdot 1=[\beta-\alpha]\,f'(x_0)\Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\,.\,]$$

§6 <u>Απροσδιόριστες μορφές - Κανόνας L'Hospital</u>

• Θεωρώντας το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή τύπου $\dfrac{0}{0}$ (αντ. $\dfrac{\infty}{\infty}$) αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ (αντ $=\pm\infty$).

• <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f,g:(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες τ.ω.

i) $\forall x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ έχουμε $g(x)\neq 0$ και $g'(x)\neq 0$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$.

Αν υπάρχει $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Ο ίδιος κανόνας ισχύει και για όρια της μορφής $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ καθώς και για πλευρικά όρια.

§7 Ιδιότητα Darboux

• Ορ: Μια $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I διάστημα, λέμε ότι έχει την ιδιότητα Darboux αν για κάθε $x, y \in I$ με $x < y$ και $f(x) \neq f(y)$ και για κάθε ρ γνήσια ανάμεσα στα $f(x)$ και $f(y)$ υπάρχει $\xi \in (x, y)$ τ.ω $f(\xi) = \rho$.

[Π.χ. κάθε συνεχής συνάρτηση f ικανοποιεί την ιδιότητα Darboux.]

• Θεώρημα: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο (α, β). Τότε η f' ικανοποιεί την ιδιότητα Darboux

[Προσοχή: δεν είναι απαραίτητο ότι η f' είναι συνεχής].

§8 Γεωμετρική σημασία της δεύτερης παραγώγου

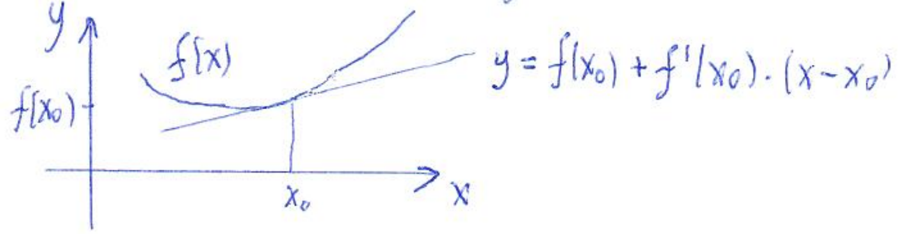
• <u>Θεώρημα</u> (Ικανές συνθήκες για ακρότατο): Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)=0$. Υποθέτουμε ότι η $f''(x_0)$ υπάρχει. Τότε

(i) αν $f''(x_0)>0$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0,

(ii) αν $f''(x_0)<0$, ———————— μέγιστο στο x_0.

• <u>Εξίσωση εφαπτομένης</u>: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

f κυρτή



Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

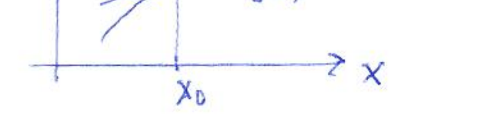
• <u>Ορ</u>: (i) Λέμε ότι η f είναι κυρτή (αντ. γνησίως κυρτή) αν για κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$ έχουμε $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$

(αντίστοιχα $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)\setminus\{x_0\}$)

(ii) Λέμε ότι η f είναι κοίλη (αντ. γνησίως κοίλη) αν για κάθε $x_0\in(\alpha,\beta)$, έχουμε $f(x)\leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$

(αντίστοιχα $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x\in(\alpha,\beta)\setminus\{x_0\}$)

f κοίλη



<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f είναι αύξουσα στο (α,β), δείξτε ότι $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$.

<u>Λύση</u>: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x\in(\alpha,\beta)$, έχουμε $f'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ με $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$ για $h>0$ αρκετά μικρό (επειδή η f είναι αύξουσα). Άρα $f'(x)\geq 0$.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$ τοπικό ακρότατο της f. Δείξτε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

<u>Λύση</u>: Χ.β.τ.γ. υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Υπάρχει λοιπόν $\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$ και $f(x_0+h)\leq f(x_0)$, $\forall h\in(-\delta,\delta)$.

Αν $0<h<\delta$, τότε $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0$

Αν $-\delta<h<0$, τότε $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$

Επειδή $f'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x_0)=0$.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β).

Αν $f(\alpha)=f(\beta)$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $f'(\xi)=0$.

<u>Λύση</u>: Αν η f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, τότε $f'(x)=0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$.

Διαφορετικά, υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_1)\neq f(\alpha)$ και Χ.β.τ.γ μπορούμε

να υποθέσουμε ότι $f(x_1) > f(\alpha)$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή: $\exists \xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(\xi) = \max_{[\alpha,\beta]} f > f(\alpha) = f(\beta)$.
Ειδικότερα, $\xi \neq \alpha, \beta$. Δηλαδή $\xi \in (\alpha, \beta)$. Από την προηγούμενη ΑΣΚ συμπεραίνουμε ότι $f'(\xi) = 0$

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).
Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

<u>Λύση</u>: Ανάγόμαστε στο Θεώρημα του Rolle, θεωρώντας τη συνάρτηση
$h(x) = f(x) - f(\alpha) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Επιπλέον ικανοποιεί $h(\alpha) = h(\beta) = 0$
Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $h'(\xi) = 0 \iff f'(\xi) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0$.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ισχύει $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι αύξουσα στο (α, β).

<u>Λύση</u>: Έστω $x, y \in (\alpha, \beta)$ με $x < y$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έπεται ότι $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$.
Άρα $f(x) \leq f(y)$ που αποδεικνύει ότι η f είναι αύξουσα στο (α, β).

ΑΣΚ = Έστω $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β). Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω.

$$[f(\beta) - f(\alpha)]\, g'(\xi) = [g(\beta) - g(\alpha)]\, f'(\xi).$$

Λύση = Ανάγόμαστε στο Θεώρημα του Rolle, θεωρώντας τη συνάρτηση

$$h(x) = [f(x) - f(\alpha)]\,(g(\beta) - g(\alpha)) - [f(\beta) - f(\alpha)]\,(g(x) - g(\alpha)).$$

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

Επιπλέον ικανοποιεί $h(\alpha) = h(\beta) = 0$. Άρα, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω.

$$h'(\xi) = 0 \iff f'(\xi)\,(g(\beta) - g(\alpha)) = (f(\beta) - f(\alpha))\, g'(\xi).$$

ΑΣΚ: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Ν.δ.ο. για $x < y \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x) \neq f'(y)$ και για κάθε ρ γνήσια ανάμεσα στα $f'(x)$ και $f'(y)$, υπάρχει $\xi \in (x, y)$ τ.ω. $f'(\xi) = \rho$

Λύση: Χ.β.τ.γ. υποθέτουμε ότι $f'(x) < f'(y)$ και $f'(x) < \rho < f'(y)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f(t) - \rho t$. Τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $g'(t) = f'(t) - \rho$. Άρα έχουμε $g'(x) < 0 < g'(y)$ και ζητάμε $\xi \in (x, y)$ με την ιδιότητα $g'(\xi) = 0$.

Η g είναι συνεχής στο $[x, y]$ επειδή είναι παραγωγίσιμη στο (α, β).

Επομένως η g παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο $\xi \in [x, y]$.

Επειδή $\lim_{h \to 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x) < 0$, έχουμε επιλέγοντας

$\varepsilon = -\frac{g'(x)}{2} > 0$ στον ορισμό του ορίου :

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} < g'(x) + \varepsilon = \frac{g'(x)}{2} < 0 \text{ για } 0 < h < \delta_1 \text{ και για}$$

κάποιο $\delta_1 \in (0, y-x)$ αρκετά μικρό. Παίρνοντας $x_1 = x + \frac{\delta_1}{2} \in (x, y)$, βλέπουμε ότι $g(x_1) < g(x)$, δηλαδή η g δεν παίρνει ελάχιστη τιμή στο x.

Ομοίως, επειδή $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = g'(y) > 0$, έχουμε επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{g'(y)}{2}$ στον ορισμό του ορίου :

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} > g'(y) - \varepsilon = \frac{g'(y)}{2} > 0 \text{ για } -\delta_2 < h < 0 \text{ και}$$

για κάποιο $\delta_2 \in (0, y-x)$. Παίρνοντας $y_1 = y - \frac{\delta_2}{2} \in (x, y)$, βλέπουμε ότι $g(y_1) < g(y)$, δηλαδή η g δεν παίρνει ελάχιστη τιμή στο y.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\xi \in (x, y)$ και $g'(\xi) = 0$ που είναι το ζητούμενο.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = 0$. Ν.δ.ο. αν υπάρχει $f''(x_0)$ και $f''(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

<u>Λύση</u>: Έχουμε $0 < f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε

(i) Αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε $f'(x) > 0$,

(ii) Αν $x_0 - \delta < x < x_0$, τότε $f'(x) < 0$.

Έστω $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(i) Αν $x_0 < y < x_0 + \delta$, τότε εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο $[x_0, y]$ βρίσκουμε $\xi \in (x_0, y)$ ώστε $f(y) - f(x_0) = f'(\xi)(y - x_0) > 0$

(ii) Αν $x_0 - \delta < y < x_0$, τότε εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στο $[y, x_0]$ βρίσκουμε $\xi \in (y, x_0)$ ώστε $f(y) - f(x_0) = f'(\xi)(y - x_0) > 0$.

Δηλαδή $f(y) \geq f(x_0)$, $\forall y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Ν.δ.ο. αν η f' είναι αύξουσα στο (α, β), τότε η f είναι κυρτή στο (α, β).

<u>Λύση</u>: Έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x > x_0$. Από το ΘΜΤ, υπάρχει $\xi_x \in (x_0, x)$ με την ιδιότητα

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{>0} \geq f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

επειδή f' αύξουσα στο (α, β) και $\xi_x > x_0$

Υποθέτουμε τώρα ότι $x < x_0$. Από το ΘΜΤ, υπάρχει $\xi_x \in (x, x_0)$ με την ιδιότητα $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x) \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{<0} \geq f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ επειδή $\begin{cases} \xi_x < x_0 \\ \text{και } f'(\xi_x) \leq f'(x_0) \end{cases}$