Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Όλγα Φουρτουνέλλη
Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό 2020-2021

Προτάσεις

Πρόταση είναι μια δηλωτική φράση (δηλαδή μια φράση που δηλώνει ένα γεγονός), η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής, **αλλά όχι και τα δυο.**

- Σήμερα είναι το πρώτο μας μάθημα.
- $7 + 2 = 12$.
- Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.
- Απάντησε σε αυτήν την ερώτηση.
- Τι ώρα γίνεται το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών;
- $x + 8 = 10$.

Ποια είναι η άρνηση καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις;

- Το μάθημα των διακριτών παρακολουθούν τουλάχιστον 50 δευτεροετείς φοιτητές.
- Όλοι οι φοιτητές αγαπούν το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών.
- Κάποιος φοιτητής πήρε 10 στην τελική εξέταση των Διακριτών Μαθηματικών.
- Αν ο n διαιρείται με το 6, τότε ο n διαιρείται με το 2 και με το 3.
- Αν ο n διαιρείται με το 6, τότε ο n διαιρείται με το 2 ή με το 3.

Σωστό ή Λάθος;

- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- $(p \to q) \to r \equiv p \to (q \to r)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
- $p \to q \equiv \neg p \vee q$

Σωστό ή Λάθος;

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ Σωστό

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	F	F				
F	F	T				
F	T	T				
F	T	F				

Σωστό ή Λάθος;

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ Σωστό

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F

Σωστό ή Λάθος;

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ Σωστό.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

Σωστό ή Λάθος;

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ Σωστό.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Το κυνήγι του θησαυρού

Σε μία σπηλιά, υπάρχουν τρία σεντούκια, ένα κόκκινο ένα πράσινο και ένα μαύρο, καθένα από τα οποία έχει τις εξής επιγραφές:
-Κόκκινο σεντούκι: Ο θησαυρός είναι εδώ.
-Μαύρο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι εδώ.
-Πράσινο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι στο κόκκινο σεντούκι.

Γνωρίζοντας ότι μόνο ένα σεντούκι έχει το θησαυρό και πως το πολύ μία επιγραφή είναι αληθής, μπορείτε να βρείτε που βρίσκεται ο θησαυρός;

Το κυνήγι του θησαυρού

-Κόκκινο σεντούκι: Ο θησαυρός είναι εδώ.
-Μαύρο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι εδώ.
-Πράσινο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι στο κόκκινο σεντούκι.
Μόνο ένα σεντούκι έχει το θησαυρό και το πολύ μία επιγραφή είναι αληθής

p: «ο θησαυρός είναι στο κόκκινο σεντούκι»
q: «ο θησαυρός είναι στο μαύρο σεντούκι»
r: «ο θησαυρός είναι στο πράσινο σεντούκι»

p	q	r	$\mathrm{K}: p$	$\mathrm{M}: \neg q$	$\Pi: \neg p$
F	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F
T	T	T	T	F	F

Άσκηση 1

Να βρεθεί σύνθετη πρόταση με τις προτασιακές μεταβλητές p, q, r και s που είναι αληθής μόνο όταν τρεις από αυτές τις προτασιακές μεταβλητές είναι αληθείς και ψευδής διαφορετικά.

Άσκηση 1

Να βρεθεί σύνθετη πρόταση με τις προτασιακές μεταβλητές p, q, r και s που είναι αληθής μόνο όταν τρεις από αυτές τις προτασιακές μεταβλητές είναι αληθείς και ψευδής διαφορετικά.

Μια προφανής λύση είναι η

$$(p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$$

Άσκηση 2

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

Άσκηση 2

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

p	q	¬p	¬q	(¬p ↔ ¬q)	p ↔ q	(¬p ↔ ¬q) ↔ (p ↔ q)
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

Άσκηση 2

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

p	q	¬p	¬q	(¬p ↔ ¬q)	p ↔ q	(¬p ↔ ¬q) ↔ (p ↔ q)
T	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*
F	*T*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

Τρόπος 1

Πίνακας αλήθειας για την πρόταση $P \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$:

p	q	r	$\neg p$	$(p \vee q)$	$\neg p \vee r$	$q \vee r$	P
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	F	F					
F	F	T					
F	T	T					
F	T	F					

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

Τρόπος 2

Έστω ότι η πρόταση δεν είναι ταυτολογία. Τότε θα υπάρχουν τιμές αλήθειας των p, q, r για τις οποίες θα είναι ψευδής. Μια συνεπαγωγή είναι ψευδής μόνο όταν το αριστερό μέρος είναι αληθές και το δεξί ψευδές. Εφόσον το αριστερό μέρος είναι αληθές πρέπει να είναι αληθής τόσο η πρόταση $p \vee q$ όσο και η πρόταση $\neg p \vee r$. Εφόσον το δεξί μέρος είναι ψευδές πρέπει να είναι ψευδής τόσο η q όσο και η r. Ως εκ τούτου, πρέπει να είναι αληθής τόσο η p όσο και η $\neg p$. Καταλήξαμε σε αντίφαση (σε άτοπο). Άρα η πρόταση είναι ταυτολογία.

Τρεις φίλοι κάθονται σε ένα μπαράκι. Ο μπάρμαν ρωτάει: «Θα πιείτε όλοι σφηνάκια;»

⋆ Ο πρώτος λέει: «Δεν ξέρω».
⋆ Ο δεύτερος λέει «Δεν ξέρω».
⋆ Ο τρίτος λέει: «Όχι».

Ο μπάρμαν σε ποιους θα βάλει σφηνάκια;

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

α) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ **β)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

α) $(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$ **β)** $((p \lor q) \land \neg p) \to q$

α) $(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$

Τρόπος 1

$(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p \equiv \neg(\neg q \land (p \to q)) \lor \neg p \equiv (q \lor \neg(p \to q)) \lor \neg p \equiv$
$(\neg p \lor q) \lor \neg(p \to q) \equiv (p \to q) \lor \neg(p \to q) \equiv T$

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:
α) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ **β)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

α) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$

Τρόπος 2

Εάν το αριστερό μέρος της πρότασης, $\neg q \wedge (p \to q)$, είναι ψευδές, τότε η πρόταση είναι αληθής. Εάν είναι αληθές πρέπει τόσο το $\neg q$ να είναι αληθές, όσο και το $p \to q$, άρα το p είναι ψευδές. Το τελευταίο δείχνει ότι και το δεξί μέρος $\neg p$ είναι αληθές και ως εκ τούτου η πρόταση είναι ταυτολογία.

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:
α) $(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$ **β)** $((p \lor q) \land \neg p) \to q$

β) $((p \lor q) \land \neg p) \to q$

Τρόπος 1

Πίνακας αλήθειας για την πρόταση $((p \lor q) \land \neg p) \to q$:

p	q	$p \lor q$	$\neg p$	$(p \lor q) \land \neg p$	$((p \lor q) \land \neg p) \to q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:
α) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ **β)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

β) $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

Τρόπος 2

$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q \equiv \neg((p \vee q) \wedge \neg p) \vee q \equiv (\neg(p \vee q) \vee p) \vee q \equiv$
$((\neg p \wedge \neg q) \vee p) \vee q \equiv ((p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q)) \vee q \equiv (p \vee \neg q) \vee q \equiv p \vee T \equiv T$

Ο κληρονόμος

Έχετε έναν πολύ πλούσιο θείο. Στην κατοχή του έχει ένα αυτοκίνητο πολυτελείας, μια βίλα και ένα νησί. Σας λέει ότι αν κάνετε μια αληθή δήλωση θα σας χαρίσει ένα από τα τρία, όποιο θέλει αυτός, ενώ αν κάνετε μια ψευδή δεν θα πάρετε τίποτα. Εσείς θέλετε το νησί. Με ποιά δήλωση θα καταφέρετε να το πάρετε;

Ο κληρονόμος

Έχετε έναν πολύ πλούσιο θείο. Στην κατοχή του έχει ένα αυτοκίνητο πολυτελείας, μια βίλα και ένα νησί. Σας λέει ότι αν κάνετε μια αληθή δήλωση θα σας χαρίσει ένα από τα τρία, όποιο θέλει αυτός, ενώ αν κάνετε μια ψευδή δεν θα πάρετε τίποτα. Εσείς θέλετε το νησί. Με ποιά δήλωση θα καταφέρετε να το πάρετε;

Μία δήλωση πο
υ επιτυγχάνει το ζητούμενο είναι η:
«Δεν θα μου δώσεις ούτε το αυτοκίνητο ούτε τη βίλα».

Φήμες ή πραγματικότητα;

«Ο θείος Κώστας είναι πολύ πλούσιος» είπε ο ξάδερφος σας. «Έχει τουλάχιστον 10 συλλεκτικά αυτοκίνητα». «Αποκλείεται», είπε η ξαδέρφη σας.«Είμαι σίγουρη ότι έχει λιγότερα από 10». «Απ΄όσο ξέρω εγώ, έχει τουλάχιστον ένα», πρόσθεσε ο πατέρας σας. Αν μόνο ένας έχει δίκιο, τότε πόσα αυτοκίνητα έχει ο θείος Κώστας;

Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το $\mathbb{R}$:

1. $\forall x \exists y \left(x^2 = y\right)$
2. $\forall x \exists y \left(x = y^2\right)$
3. $\exists x \forall y \,(xy = 0)$
4. $\exists x \exists y \,(x + y \neq y + x)$
5. $\forall x \,(x \neq 0 \rightarrow \exists y \,(xy = 1))$
6. $\exists x \forall y \,(y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$
7. $\forall x \exists y \,(x + y = 0)$
8. $\exists x \exists y \,(x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$
9. $\forall x \exists y \,(x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$
10. $\forall x \forall y \exists z \,(z = (x + y)/2)$

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το $\mathbb{R}$:

1. $\forall x \exists y \left(x^2 = y\right)$	T, για οποιοδήποτε c στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $y = c^2$, οπότε βάσει καθολικής γενίκευσης
2. $\forall x \exists y \left(x = y^2\right)$	F, $y^2 \geq 0$ άρα για $x < 0$ δεν ισχύει
3. $\exists x \forall y \left(xy = 0\right)$	T, εφόσον αν $x = 0$, $xy = 0$ για κάθε y
4. $\exists x \exists y \left(x + y \neq y + x\right)$	F, εφόσον ισχύει ο προσεταιριστικός νόμος
5. $\forall x \left(x \neq 0 \rightarrow \exists y \left(xy = 1\right)\right)$	T, εφόσον αν $x \neq 0, y = 1/x$
6. $\exists x \forall y \left(y \neq 0 \rightarrow xy = 1\right)$	F, καθώς για οποιοδήποτε $x = c$ αν $y \neq 1/c, xy \neq 1$
7. $\forall x \exists y \left(x + y = 0\right)$	T, εφόσον $\forall x, y = -x$
8. $\exists x \exists y \left(x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5\right)$	F, Το σύστημα είναι αδύνατο
9. $\forall x \exists y \left(x + y = 2 \wedge 2x - y = 1\right)$	F, Μοναδική λύση $x = 1, y = 1$
10. $\forall x \forall y \exists z \left(z = (x + y)/2\right)$	T , προφανώς

Άσκηση 6

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ η πρόταση «Ο x είναι κοντύτερος του y». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Άσκηση 6

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ η πρόταση «ο x είναι κοντύτερος του y». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Από την υπόθεση $\exists s S(s, Max)$ δεν προκύπτει το συμπέρασμα $S(Max, Max)$

Άσκηση 7

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

1. $\neg\forall x\exists y\forall z T(x, y, z)$
2. $\neg(\exists x\exists y P(x, y) \wedge \forall x\forall y Q(x, y))$
3. $\neg\exists x\exists y(Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$
4. $\neg\forall y\exists x\exists z(T(x, y, z) \vee Q(x, y))$

Άσκηση 7

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

1. $\neg\forall x\exists y\forall z T(x,y,z)$
2. $\neg(\exists x\exists y P(x,y) \wedge \forall x\forall y Q(x,y))$
3. $\neg\exists x\exists y(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$
4. $\neg\forall y\exists x\exists z(T(x,y,z) \vee Q(x,y))$

Η πρόταση 1 είναι λογικά ισοδύναμη με $\exists x\neg\exists y\forall T(x,y,z) \equiv \exists x\forall y\neg\forall z T(x,y,z)$ $\equiv \exists x\forall y\exists z\neg T(x,y,z)$

Η πρόταση 2 είναι λογικά ισοδύναμη με $\neg\exists x\exists y P(x,y) \vee \neg\forall x\forall y Q(x,y) \equiv$ $\forall x\neg\exists y P(x,y) \vee \exists x\neg\forall y Q(x,y) \equiv \forall x\forall y\neg P(x,y) \vee \exists x\exists y\neg Q(x,y)$

Η πρόταση $\neg(p \leftrightarrow q)$ είναι αληθής όταν η p και η q έχουν διαφορετικές τιμές αλήθειας. Επομένως, είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $\neg p \leftrightarrow q$
Συνεπώς η πρόταση 3, $\forall x\forall y\neg(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)) \equiv \forall x\forall y(\neg Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$

Η πρόταση 4 είναι λογικά ισοδύναμη με $\exists y\forall x\forall z\neg(T(x,y,z) \vee Q(x,y)) \equiv$ $\exists y\forall x\forall z(\neg T(x,y,z) \wedge \neg Q(x,y))$

Άσκηση 8

Έστω $P(x)$ η πρόταση «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ η πρόταση «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό.
β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής.
γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό.
δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό.
ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό.

Άσκηση 8

Έστω $P(x)$ η πρόταση «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ η πρόταση «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό. $\exists x P(x)$
β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής. $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$
γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό. $\forall y Q(y)$
δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό. $\forall x P(x)$
ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό. $\exists y \neg Q(y)$

Άσκηση 9

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y((x \neq y) \rightarrow \forall z((z = x) \vee (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Άσκηση 9

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y((x \neq y) \rightarrow \forall z((z = x) \vee (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Οποιοδήποτε πεδίο έχει δύο ακριβώς στοιχεία a και b, αν $x \neq y$ για κάθε x και για κάθε y, τότε είτε $x = a$ και $y = b$ είτε $x = b$ και $y = a$. Άρα για κάθε z εκ των a, b $(z = x) \vee (z = y)$.

Έστω πεδίο με τρία τουλάχιστον διαφορετικά στοιχεία a, b, c. Αν $x = a$ και $y = b$ τότε υπάρχει $z = c$ για το οποίο δεν είναι αληθής η πρόταση $(z = x) \vee (z = y)$.

Άσκηση 10

Έστω $P(m,n)$ η πρόταση «ο m διαιρεί τον n», όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

α) $P(4,5)$

β) $P(2,4)$

γ) $\forall m \forall n P(m,n)$

δ) $\exists m \forall n P(m,n)$

ε) $\exists n \forall m P(m,n)$

στ) $\forall n P(1,n)$

Άσκηση 10

Έστω $P(m, n)$ η πρόταση «ο m διαιρεί τον n», όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

α) $P(4, 5)$
β) $P(2, 4)$
γ) $\forall m \forall n P(m, n)$
δ) $\exists m \forall n P(m, n)$
ε) $\exists n \forall m P(m, n)$
στ) $\forall n P(1, n)$

α. Ψευδής

β. Αληθής

γ. Ψευδής, π.χ. αντιπαράδειγμα α.

δ. Αληθής, m = 1.

ε. Ψευδής, για κάθε n στο πεδίο αν επιλέξω $m = n + 1$ δεν τον διαιρεί. Άρα είναι αληθής η άρνηση της πρότασης $\forall n \exists m \neg P(m, n)$.

στ. Αληθής

Άσκηση 11

Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ και $\forall x \forall y \, (P(x) \vee Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Άσκηση 11

Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ και $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Για να αποδειχτεί η λογική ισοδυναμία πρέπει να αποδειχτεί ότι η πρόταση $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ είναι ταυτολογία.

1. Αν $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ αληθής.
Έστω $\forall x P(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ αληθής.
Έστω $\forall x Q(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ αληθής.

2. Αν $\forall x \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής.
Αν $\forall x P(x)$ αληθής, $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής. Διαφορετικά $\exists x0$ έτσι ώστε $P(x0)$ ψευδής. Τότε όμως $\forall y\, (P(x0) \vee Q(y))$ αληθής και άρα $\forall y Q(y)$ αληθής. Συνεπώς, $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής.

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Όλγα Φουρτουνέλλη
Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό 2020-2021

Προτάσεις

Πρόταση είναι μια δηλωτική φράση (δηλαδή μια φράση που δηλώνει ένα γεγονός), η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής, **αλλά όχι και τα δυο.**

- Σήμερα είναι το πρώτο μας μάθημα.
- 7 + 2= 12.
- Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.
- Απάντησε σε αυτήν την ερώτηση.
- Τι ώρα γίνεται το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών;
- x+ 8= 10.

Ποια είναι η άρνηση καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις;

- Το μάθημα των διακριτών παρακολουθούν τουλάχιστον 50 δευτεροετείς φοιτητές.
- Όλοι οι φοιτητές αγαπούν το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών.
- Κάποιος φοιτητής πήρε 10 στην τελική εξέταση των Διακριτών Μαθηματικών.
- Αν ο n διαιρείται με το 6, τότε ο n διαιρείται με το 2 και με το 3.
- Αν ο n διαιρείται με το 6, τότε ο n διαιρείται με το 2 ή με το 3.

Σωστό ή Λάθος;

- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Σωστό ή Λάθος;

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ Σωστό

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	F	F				
F	F	T				
F	T	T				
F	T	F				

Σωστό ή Λάθος;

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ Σωστό

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F

Σωστό ή Λάθος;

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ Σωστό.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

Σωστό ή Λάθος;

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ Σωστό.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Το κυνήγι του θησαυρού

Σε μία σπηλιά, υπάρχουν τρία σεντούκια, ένα κόκκινο ένα πράσινο και ένα μαύρο, καθένα από τα οποία έχει τις εξής επιγραφές:
-Κόκκινο σεντούκι: Ο θησαυρός είναι εδώ.
-Μαύρο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι εδώ.
-Πράσινο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι στο κόκκινο σεντούκι.

Γνωρίζοντας ότι μόνο ένα σεντούκι έχει το θησαυρό και πως το πολύ μία επιγραφή είναι αληθής, μπορείτε να βρείτε που βρίσκεται ο θησαυρός;

Το κυνήγι του θησαυρού

-Κόκκινο σεντούκι: Ο θησαυρός είναι εδώ.
-Μαύρο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι εδώ.
-Πράσινο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι στο κόκκινο σεντούκι.
Μόνο ένα σεντούκι έχει το θησαυρό και το πολύ μία επιγραφή είναι αληθής

p: «ο θησαυρός είναι στο κόκκινο σεντούκι»
q: «ο θησαυρός είναι στο μαύρο σεντούκι»
r: «ο θησαυρός είναι στο πράσινο σεντούκι»

p	q	r	$\mathrm{K}:p$	$\mathrm{M}:\neg q$	$\Pi:\neg p$
F	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F
T	T	T	T	F	F

Άσκηση 1

Να βρεθεί σύνθετη πρόταση με τις προτασιακές μεταβλητές p, q, r και s που είναι αληθής μόνο όταν τρεις από αυτές τις προτασιακές μεταβλητές είναι αληθείς και ψευδής διαφορετικά.

Άσκηση 1

Να βρεθεί σύνθετη πρόταση με τις προτασιακές μεταβλητές p, q, r και s που είναι αληθής μόνο όταν τρεις από αυτές τις προτασιακές μεταβλητές είναι αληθείς και ψευδής διαφορετικά.

Μια προφανής λύση είναι η

$$(p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$$

Άσκηση 2

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

Άσκηση 2

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

p	q	¬p	¬q	(¬p ↔ ¬q)	p ↔ q	(¬p ↔ ¬q) ↔ (p ↔ q)
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

Άσκηση 2

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

p	q	¬p	¬q	(¬p ↔ ¬q)	p ↔ q	(¬p ↔ ¬q) ↔ (p ↔ q)
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

Τρόπος 1

Πίνακας αλήθειας για την πρόταση $P \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$:

p	q	r	$\neg p$	$(p \vee q)$	$\neg p \vee r$	$q \vee r$	P
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	F	F					
F	F	T					
F	T	T					
F	T	F					

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$

Τρόπος 2

Έστω ότι η πρόταση δεν είναι ταυτολογία. Τότε θα υπάρχουν τιμές αλήθειας των p, q, r για τις οποίες θα είναι ψευδής. Μια συνεπαγωγή είναι ψευδής μόνο όταν το αριστερό μέρος είναι αληθές και το δεξί ψευδές. Εφόσον το αριστερό μέρος είναι αληθές πρέπει να είναι αληθής τόσο η πρόταση $p \vee q$ όσο και η πρόταση $\neg p \vee r$. Εφόσον το δεξί μέρος είναι ψευδές πρέπει να είναι ψευδής τόσο η q όσο και η r. Ως εκ τούτου, πρέπει να είναι αληθής τόσο η p όσο και η $\neg p$. Καταλήξαμε σε αντίφαση (σε άτοπο). Άρα η πρόταση είναι ταυτολογία.

Τρεις φίλοι κάθονται σε ένα μπαράκι. Ο μπάρμαν ρωτάει: «Θα πιείτε όλοι σφηνάκια;»

⋆ Ο πρώτος λέει: «Δεν ξέρω».
⋆ Ο δεύτερος λέει «Δεν ξέρω».
⋆ Ο τρίτος λέει: «Όχι».

Ο μπάρμαν σε ποιους θα βάλει σφηνάκια;

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

α) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$ **β)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:
α) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ **β)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

α) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$

Τρόπος 1

$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p \equiv \neg(\neg q \wedge (p \to q)) \vee \neg p \equiv (q \vee \neg(p \to q)) \vee \neg p \equiv$
$(\neg p \vee q) \vee \neg(p \to q) \equiv (p \to q) \vee \neg(p \to q) \equiv T$

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:
α) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ **β)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

α) $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$

Τρόπος 2

Εάν το αριστερό μέρος της πρότασης, $\neg q \wedge (p \to q)$, είναι ψευδές, τότε η πρόταση είναι αληθής. Εάν είναι αληθές πρέπει τόσο το $\neg q$ να είναι αληθές, όσο και το $p \to q$, άρα το p είναι ψευδές. Το τελευταίο δείχνει ότι και το δεξί μέρος $\neg p$ είναι αληθές και ως εκ τούτου η πρόταση είναι ταυτολογία.

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:
α) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ **β)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

β) $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

Τρόπος 1

Πίνακας αλήθειας για την πρόταση $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:
α) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ **β)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

β) $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

Τρόπος 2

$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q \equiv \neg((p \vee q) \wedge \neg p) \vee q \equiv (\neg(p \vee q) \vee p) \vee q \equiv$
$((\neg p \wedge \neg q) \vee p) \vee q \equiv ((p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q)) \vee q \equiv (p \vee \neg q) \vee q \equiv p \vee T \equiv T$

Ο κληρονόμος

Έχετε έναν πολύ πλούσιο θείο. Στην κατοχή του έχει ένα αυτοκίνητο πολυτελείας, μια βίλα και ένα νησί. Σας λέει ότι αν κάνετε μια αληθή δήλωση θα σας χαρίσει ένα από τα τρία, όποιο θέλει αυτός, ενώ αν κάνετε μια ψευδή δεν θα πάρετε τίποτα. Εσείς θέλετε το νησί. Με ποιά δήλωση θα καταφέρετε να το πάρετε;

Ο κληρονόμος

Έχετε έναν πολύ πλούσιο θείο. Στην κατοχή του έχει ένα αυτοκίνητο πολυτελείας, μια βίλα και ένα νησί. Σας λέει ότι αν κάνετε μια αληθή δήλωση θα σας χαρίσει ένα από τα τρία, όποιο θέλει αυτός, ενώ αν κάνετε μια ψευδή δεν θα πάρετε τίποτα. Εσείς θέλετε το νησί. Με ποιά δήλωση θα καταφέρετε να το πάρετε;

Μία δήλωση πο
υ επιτυγχάνει το ζητούμενο είναι η:
«Δεν θα μου δώσεις ούτε το αυτοκίνητο ούτε τη βίλα».

Φήμες ή πραγματικότητα;

«Ο θείος Κώστας είναι πολύ πλούσιος» είπε ο ξάδερφος σας. «Έχει τουλάχιστον 10 συλλεκτικά αυτοκίνητα». «Αποκλείεται», είπε η ξαδέρφη σας.«Είμαι σίγουρη ότι έχει λιγότερα από 10». «Απ΄όσο ξέρω εγώ, έχει τουλάχιστον ένα», πρόσθεσε ο πατέρας σας. Αν μόνο ένας έχει δίκιο, τότε πόσα αυτοκίνητα έχει ο θείος Κώστας;

Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το $\mathbb{R}$:

1. $\forall x \exists y \left(x^2 = y\right)$
2. $\forall x \exists y \left(x = y^2\right)$
3. $\exists x \forall y \, (xy = 0)$
4. $\exists x \exists y \, (x + y \neq y + x)$
5. $\forall x \, (x \neq 0 \rightarrow \exists y \, (xy = 1))$
6. $\exists x \forall y \, (y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$
7. $\forall x \exists y \, (x + y = 0)$
8. $\exists x \exists y \, (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$
9. $\forall x \exists y \, (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$
10. $\forall x \forall y \exists z \, (z = (x + y)/2)$

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το $\mathbb{R}$:

1.$\forall x \exists y \left(x^2 = y\right)$	T, για οποιοδήποτε c στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $y = c^2$, οπότε βάσει καθολικής γενίκευσης
2.$\forall x \exists y \left(x = y^2\right)$	F, $y^2 \geq 0$ άρα για $x < 0$ δεν ισχύει
3.$\exists x \forall y \left(xy = 0\right)$	T, εφόσον αν $x = 0$, $xy = 0$ για κάθε y
4.$\exists x \exists y \left(x + y \neq y + x\right)$	F, εφόσον ισχύει ο προσεταιριστικός νόμος
5.$\forall x \left(x \neq 0 \rightarrow \exists y \left(xy = 1\right)\right)$	T, εφόσον αν $x \neq 0, y = 1/x$
6.$\exists x \forall y \left(y \neq 0 \rightarrow xy = 1\right)$	F, καθώς για οποιοδήποτε $x = c$ αν $y \neq 1/c, xy \neq 1$
7.$\forall x \exists y \left(x + y = 0\right)$	T, εφόσον $\forall x, y = -x$
8.$\exists x \exists y \left(x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5\right)$	F, Το σύστημα είναι αδύνατο
9.$\forall x \exists y \left(x + y = 2 \wedge 2x - y = 1\right)$	F, Μοναδική λύση $x = 1, y = 1$
10.$\forall x \forall y \exists z \left(z = (x + y)/2\right)$	T , προφανώς

Άσκηση 6

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ η πρόταση «Ο x είναι κοντύτερος του y». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Άσκηση 6

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ η πρόταση «ο x είναι κοντύτερος του y». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Από την υπόθεση $\exists s S(s, Max)$ δεν προκύπτει το συμπέρασμα $S(Max, Max)$

Άσκηση 7

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

1. $\neg\forall x\exists y\forall z T(x,y,z)$
2. $\neg(\exists x\exists y P(x,y) \wedge \forall x\forall y Q(x,y))$
3. $\neg\exists x\exists y(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$
4. $\neg\forall y\exists x\exists z(T(x,y,z) \vee Q(x,y))$

Άσκηση 7

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

1. $\neg\forall x\exists y\forall z T(x,y,z)$
2. $\neg(\exists x\exists y P(x,y) \land \forall x\forall y Q(x,y))$
3. $\neg\exists x\exists y(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$
4. $\neg\forall y\exists x\exists z(T(x,y,z) \lor Q(x,y))$

Η πρόταση 1 είναι λογικά ισοδύναμη με $\exists x\neg\exists y\forall T(x,y,z) \equiv \exists x\forall y\neg\forall z T(x,y,z)$ $\equiv \exists x\forall y\exists z\neg T(x,y,z)$

Η πρόταση 2 είναι λογικά ισοδύναμη με $\neg\exists x\exists y P(x,y) \lor \neg\forall x\forall y Q(x,y) \equiv$ $\forall x\neg\exists y P(x,y) \lor \exists x\neg\forall y Q(x,y) \equiv \forall x\forall y\neg P(x,y) \lor \exists x\exists y\neg Q(x,y)$

Η πρόταση $\neg(p \leftrightarrow q)$ είναι αληθής όταν η p και η q έχουν διαφορετικές τιμές αλήθειας. Επομένως, είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $\neg p \leftrightarrow q$
Συνεπώς η πρόταση 3, $\forall x\forall y\neg(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)) \equiv \forall x\forall y(\neg Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$

Η πρόταση 4 είναι λογικά ισοδύναμη με $\exists y\forall x\forall z\neg(T(x,y,z) \lor Q(x,y)) \equiv$ $\exists y\forall x\forall z(\neg T(x,y,z) \land \neg Q(x,y))$

Άσκηση 8

Έστω $P(x)$ η πρόταση «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ η πρόταση «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό.
β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής.
γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό.
δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό.
ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό.

Άσκηση 8

Έστω $P(x)$ η πρόταση «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ η πρόταση «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό. $\exists x P(x)$
β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής. $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$
γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό. $\forall y Q(y)$
δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό. $\forall x P(x)$
ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό. $\exists y \neg Q(y)$

Άσκηση 9

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y((x \neq y) \rightarrow \forall z((z = x) \vee (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Άσκηση 9

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y((x \neq y) \rightarrow \forall z((z = x) \vee (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Οποιοδήποτε πεδίο έχει δύο ακριβώς στοιχεία a και b, αν $x \neq y$ για κάθε x και για κάθε y, τότε είτε $x = a$ και $y = b$ είτε $x = b$ και $y = a$. Άρα για κάθε z εκ των a, b $(z = x) \vee (z = y)$.

Έστω πεδίο με τρία τουλάχιστον διαφορετικά στοιχεία a, b, c. Αν $x = a$ και $y = b$ τότε υπάρχει $z = c$ για το οποίο δεν είναι αληθής η πρόταση $(z = x) \vee (z = y)$.

Άσκηση 10

Έστω $P(m,n)$ η πρόταση «ο m διαιρεί τον n», όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

α) $P(4,5)$
β) $P(2,4)$
γ) $\forall m \forall n P(m,n)$
δ) $\exists m \forall n P(m,n)$
ε) $\exists n \forall m P(m,n)$
στ) $\forall n P(1,n)$

Άσκηση 10

Έστω $P(m,n)$ η πρόταση «ο m διαιρεί τον n», όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

α) $P(4,5)$
β) $P(2,4)$
γ) $\forall m \forall n P(m,n)$
δ) $\exists m \forall n P(m,n)$
ε) $\exists n \forall m P(m,n)$
στ) $\forall n P(1,n)$

α. Ψευδής

β. Αληθής

γ. Ψευδής, π.χ. αντιπαράδειγμα α.

δ. Αληθής, m = 1.

ε. Ψευδής, για κάθε n στο πεδίο αν επιλέξω $m = n + 1$ δεν τον διαιρεί. Άρα είναι αληθής η άρνηση της πρότασης $\forall n \exists m \neg P(m,n)$.

στ. Αληθής

Άσκηση 11

Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ και $\forall x \forall y \, (P(x) \lor Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Άσκηση 11

Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ και $\forall x \forall y\,(P(x) \vee Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Για να αποδειχτεί η λογική ισοδυναμία πρέπει να αποδειχτεί ότι η πρόταση $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x \forall y\,(P(x) \vee Q(y))$ είναι ταυτολογία.

1. Αν $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x \forall y\,(P(x) \vee Q(y))$ αληθής.
Έστω $\forall x P(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x \forall y\,(P(x) \vee Q(y))$ αληθής.
Έστω $\forall x Q(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x \forall y\,(P(x) \vee Q(y))$ αληθής.

2. Αν $\forall x \forall y\,(P(x) \vee Q(y))$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής.
Αν $\forall x P(x)$ αληθής, $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής. Διαφορετικά $\exists x0$ έτσι ώστε $P(x0)$ ψευδής. Τότε όμως $\forall y\,(P(x0) \vee Q(y))$ αληθής και άρα $\forall y Q(y)$ αληθής. Συνεπώς, $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ αληθής.

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ο n είναι άρτιος, αν και μόνο, αν ο αριθμός 7n+4 είναι άρτιος.

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ο n είναι άρτιος, **αν και μόνο, αν** ο αριθμός 7n+4 είναι άρτιος.

$$\Rightarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν ο n είναι άρτιος, τότε ο 7n+4 είναι άρτιος.

Έστω ότι ο n είναι άρτιος. Τότε $n = 2k$ για κάποιο ακέραιο k. Άρα, είναι $7n+4=2(7k+2)$, που σημαίνει οτι ο 7n+4 είναι άρτιος αριθμός.

$$\Leftarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν ο 7n+4 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος.

Έστω ότι ο n δεν είναι άρτιος, δηλαδή έστω n περιττός. Τότε $n = 2k+1$ για κάποιο ακέραιο k. Άρα, είναι $7n+4=2(7k+5)+1$, που σημαίνει οτι ο 7n+4 είναι περιττός αριθμός, κάτι που αντιβαίνει την υπόθεση μας.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 5y^2 = 14$.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 5y^2 = 14$.

Μπορούμε γρήγορα να περιορίσουμε την απόδειξη στον έλεγχο ορισμένων απλών περιπτώσεων, αφού αν $|y| \geq 2$ τότε $2x^2 + 5y^2 \geq 20 > 14$. Άρα αρκεί να εξετάσουμε μόνο τις περιπτώσεις όπου το y είναι ίσο με -1,0 ή 1.

- Αν y=0 τότε έχουμε $x^2 = 7$, που προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.
- Αν $|y| = 1$ τότε έχουμε $2x^2 = 9$, που προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.

'Αρα, δεν είναι δυνατόν η εξίσωση $2x^2 + 5y^2 = 14$ να έχει ακέραιες λύσεις.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα το πολύ δυο τετραγώνων και ενός κύβου μη αρνητικών ακέραιων.
- Υπάρχει θετικός ακέραιος, ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τετραγώνων 2 θετικών ακεραίων με 2 τρόπους.
- Ανάμεσα σε κάθε ρητό και κάθε άρρητο αριθμό βρίσκεται ένας άρρητος αριθμός.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα το πολύ δυο τετραγώνων και ενός κύβου μη αρνητικών ακέραιων.

Λάθος. Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.
Αν εξετάσουμε τον αριθμό 7 έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Κανένα τετράγωνο: ο αριθμός 7 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Ένα τετράγωνο:
$1^2 + 6 = 7$ Το 6 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.
$2^2 + 3 = 7$ Το 3 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Δύο τετράγωνα:
$1^2 + 1^2 + 5 = 7$ Το 5 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.
$2^2 + 1^2 + 2 = 7$ Το 2 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Υπάρχει θετικός ακέραιος, ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τετραγώνων 2 θετικών ακεραίων με 2 τρόπους.

Σωστό. $5^2 + 5^2 = 50$ και $1^2 + 7^2 = 50$

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Ανάμεσα σε κάθε ρητό και κάθε άρρητο αριθμό βρίσκεται ένας άρρητος αριθμός.

Καταρχάς θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου αριθμού είναι άρρητος αριθμος με απαγωγή σε άτοπο (με αντίφαση).

Έστω ότι το άθροισμα s ενός ρητού αριθμού r και ενός άρρητου αριθμού i είναι ρητός αριθμός. Τότε και το άθροισμα των ρητών αριθμών s και -r θα είναι ρητό. Όμως $s + (-r) = i$ και καταλήξαμε σε άτοπο.

Ο μέσος όρος των αριθμών r και i είναι $\frac{(r+i)}{2}$, που βάσει του προηγούμενου αποτελέσματος είναι άρρητος.

Άσκηση 4

Σε μία αίθουσα με 49 άτομα να αποδείξετε ότι υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Άσκηση 4

Σε μία αίθουσα με 49 άτομα να αποδείξετε ότι υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Αποδεικνύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με απαγωγή σε άτοπο (απόδειξη με αντίφαση). Έστω μία αίθουσα με 49 άτομα στην οποία δεν υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα. Άρα για κάθε έναν από τους 12 μήνες, το πολύ 4 άτομα στην αίθουσα έχουν γενέθλια αυτόν τον μήνα. Συνεπώς η αίθουσα έχει το πολύ 48 άτομα, καταλήγοντας σε αντίφαση στην υπόθεση ότι η αίθουσα έχει 49 άτομα.

Άσκηση 5

Έστω ότι πέντε μονάδες και τέσσερα μηδενικά τοποθετούνται σε ένα κύκλο. Ανάμεσα σε κάθε δύο ίσα bits, εισάγουμε ένα μηδενικό και ανάμεσα σε άνισα bits εισάγουμε τη μονάδα, για να παραγουμε 9 νέα bits. Έπειτα, σβήνουμε τα 9 αρχικά bits. Να δείξετε ότι, όταν επαναλαμβάνετε τη διαδικασία, δεν μπορείτε ποτέ να λάβετε 9 μηδενικά.

Άσκηση 5

Έστω ότι πέντε μονάδες και τέσσερα μηδενικά τοποθετούνται σε ένα κύκλο. Ανάμεσα σε κάθε δύο ίσα bits, εισάγουμε ένα μηδενικό και ανάμεσα σε άνισα bits εισάγουμε τη μονάδα, για να παραγουμε 9 νέα bits. Έπειτα, σβήνουμε τα 9 αρχικά bits. Να δείξετε ότι, όταν επαναλάβετε τη διαδικασία, δεν μπορείτε ποτέ να λάβετε 9 μηδενικά.

Έστω ότι καταλήγουμε σε 9 μηδενικά. Αυτό σημαίνει ότι στο προηγούμενο βήμα είχαμε 9 ίσα bits (είτε 0 είτε 1).
Μπορεί να συμβεί αυτο;

-Για να έχουμε 9 μηδενικά θα πρέπει στο προηγούμενο βήμα να είχαμε ίσα bits. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ξεκινάμε με διαφορετικά bits.

-Για να έχουμε 9 μονάδες θα πρέπει στο προηγούμενο βήμα να εναλλάσονται τα bits (0101...). Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ξεκινάμε με περιττό πλήθος bits εφόσον αναγκαία δύο μονάδες θα ήταν συνεχόμενες στον κύκλο (101010101 ή 010101011).

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι, το γινόμενο δύο εκ των αριθμών $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$, $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$ και $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$ είναι μη αρνητικό.

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι, το γινόμενο δύο εκ των αριθμών $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$, $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$ και $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$ είναι μη αρνητικό.

Αν κάποιος από αυτούς τους αριθμούς είναι μηδέν τότε προκύπτει το ζητούμενο.

Αν έχουν όλοι το ίδιο πρόσημο, προφανώς το γινόμενο δύο από αυτούς είναι θετικό.

Αν δεν έχουν όλοι το ίδιο πρόσημο, επειδή τα πρόσημα είναι δύο, δύο από τους αριθμούς θα έχουν διαφορετικά πρόσημα και ο τρίτος θα έχει αναγκαία το ίδιο πρόσημο με έναν από τους δύο πρώτους. Το γινόμενο των δύο αριθμών που έχουν το ίδιο πρόσημο είναι θετικό.

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Όλγα Φουρτουνέλλη
Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό 2020-2021

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ εάν και μόνο εάν $A \subseteq B$.

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ **εάν και μόνο εάν** $A \subseteq B$.

$$\Rightarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, τότε $A \subseteq B$.

Έστω $a \in A$. Τότε $\{a\} \subseteq A$ οπότε $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ και από υπόθεση $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$. Δηλαδή $\{a\} \subseteq B$ και ως εκ τούτου $a \in B$.

$$\Leftarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν $A \subseteq B$, τότε $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Έστω ότι $A \subseteq B$. Τότε λόγω μεταβατικής ιδιότητας για κάθε υποσύνολο C του A ισχύει ότι $C \subseteq B$. Άρα ισχύει πως $\forall C \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow C \in \mathcal{P}(B)$ αποδεικνύοντας πως $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Άσκηση 2

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $(A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D)$.
- $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A \times B = B \times A$

Άσκηση 2

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $(A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D)$

Ψευδής. Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.

$A = \{a, b, c\}, B = \{a, c\}, C = \emptyset, D = \{a\}$.

Τότε, $(A - B) = \{b\}, (C - D) = \emptyset$, $(A - C) = \{a, b, c\}, (B - D) = \{c\}$.

Συνεπώς $(A - B) - (C - D) = \{b\}$ και $(A - C) - (B - D) = \{a, b\}$

Άσκηση 2

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Αληθής. $A \subseteq B$ ανν $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

Η αντιθετοαντίστροφη ισοδύναμη πρόταση είναι $\forall x(\neg(x \in B) \rightarrow \neg(x \in A)) \equiv \forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A)$. Συνεπώς $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

-$A \times B = B \times A$

Ψευδής. Τα στοιχεία των καρτεσιανών γινομένων είναι διατεταγμένα ζεύγη. Έστω $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ και $\alpha \neq \beta$ τότε $(\alpha, \beta) \in A \times B$ αλλά $(\alpha, \beta) \notin B \times A$

Άσκηση 3

Η ομοιότητα Jaccard $J(A,B)$ των πεπερασμένων συνόλων A και B είναι $J(A,B) = |A \cap B|/|A \cup B|$, όπου $J(\emptyset, \emptyset) = 1$. Να βρείτε την ομοιότητα Jaccard για τα παρακάτω ζεύγη συνόλων.

- i $A = \{1,3,5\}$ και $B = \{2,4,6\}$
- ii $A = \{1,2,3,4\}$ και $B = \{3,4,5,6\}$
- iii $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ και $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
- iv $A = \{1\}$ και $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Να αποδείξετε ότι οι ιδιότητες a έως d ισχύουν, όταν τα A και B είναι πεπερασμένα σύνολα.

- a $J(A,A) = 1$
- b $J(A,B) = J(B,A)$
- c $J(A,B) = 1$ ανν $A = B$
- d $0 \leq J(A,B) \leq 1$

Άσκηση 3

i) 0, ii) 1/3, iii) 1, iv) 1/6

- a $J(A, A) = |A \cap A|/|A \cup A| = |A|/|A| = 1$
- b $J(A, B) = |A \cap B|/|A \cup B| = |B \cap A|/|B \cup A| = J(B, A)$ (αντιμεταθετικός νόμος)
- c Αν $J(A, B) = 1$ τότε $|A \cap B|/|A \cup B| = 1$ και επομένως $|A \cap B| = |A \cup B|$. Όταν $x \in A$ και $x \notin B$ τότε $x \in (A \cup B)$ και $x \notin (A \cap B)$, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση καθώς η τομή των δύο συνόλων θα περιέχει σε αυτή την περίπτωση λιγότερα στοιχεία από την ένωση (εφόσον η ένωση περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία της τομής). Αντίστοιχα όταν $x \notin A$ και $x \in B$. Συνεπώς, $\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ και $A = B$. Αν $A = B$ τότε $J(A, B) = 1$ (βλ. a.)
- d Ισχύει ότι $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$. Συνεπώς, $|A \cap B| \leq |A \cup B|$. Διαιρώντας με την ένωση $J(A, B) \leq 1$. Η πληθικότητα ενός συνόλου είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0 και συνεπώς $J(A, B) \geq 0$. Στην περίπτωση που $A = B = \emptyset, J(A, B) = 1$

Άσκηση 4

Να βρείτε τα $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ και $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ για κάθε θετικό ακέραιο i:

1. $A_i = \{i, i+1, i+2, ...\}$
2. $A_i = \{0, i\}$
3. $A_i = (0, i)$
4. $A_i = (i, \infty)$

Άσκηση 4

1. **Ένωση**: Εφόσον $1 \leq i$ είναι $A_i \subseteq A_1$ και επομένως $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_1 = A_1$. (νόμος αυτοδυναμίας). Προφανώς $A_1 \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Λαμβάνοντας το όριο όταν n τείνει στο άπειρο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = \mathbb{Z}^+$

Τομή: $\cap_{i=1}^{n} A_i = \cap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, ...\} = \{n, n+1, n+2, ...\} = A_n$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

2. **Ένωση**: $\cup_{i=1}^{n} A_i = \{0,1\} \cup \{0,2\} \cup ... \cup \{0,n\} = \{0,1,2,3,...,n\}$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$

Τομή: $\cap_{i=1}^{n} A_i = \{0,1\} \cap \{0,2\} \cap ... \cap \{0,n\} = \{0\}$. Συνεπώς $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$

3. **Ένωση**: Προφανώς $A_i \subset A_n$ εφόσον $A_i = (0, i)$. Συνεπώς, $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_n = A_n$. Επίσης, $A_n \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_n$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, \infty)$

Τομή: Προφανώς $A_1 \subset A_i$ και επομένως $\cap_{i=1}^{n} A_1 \subseteq \cap_{i=1}^{n} A_i$. Βάσει του νόμου αυτοδυναμίας $A_1 \subseteq \cap_{i=1}^{n} A_i$. Από τον ορισμό της τομής $\cap_{i=1}^{n} A_i \subseteq A_1$. Προκύπτει $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Συνεπώς $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (0,1)$

Άσκηση 4

4. **Ένωση**: Εφόσον $1 \leq i$ προκύπτει $A_i \subseteq A_1$ (καθώς $(i, \infty) \subseteq (1, \infty)$) και επομένως $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_1 = A_1$. (νόμος αυτοδυναμίας). Προφανώς $A_1 \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Λαμβάνοντας το όριο όταν n τείνει στο άπειρο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (1, \infty)$

Τομή: Προφανώς $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_n$. Εφόσον $A_n = (n, \infty) \cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Ασκηση 5

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

α. Είναι η f ένα-προς-ένα? Είναι η g ένα-προς-ένα?

β. Είναι η f επί? Είναι η g επί?

γ. Έχει η f ή η g αντίστροφη? Αν ναι να βρείτε την αντίστροφη.

Ασκηση 5

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

α. Είναι η f ένα-προς-ένα? Είναι η g ένα-προς-ένα?

β. Είναι η f επί? Είναι η g επί?

γ. Έχει η f ή η g αντίστροφη? Αν ναι να βρεθεί αυτή.

α. Η f είναι ένα-προς-ένα ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$), ενώ η g όχι ($g(a) = g(d)$).

β. Η f είναι επί (κάθε στοιχείο του B αποτελεί εικόνα ενός στοιχείου του A), ενώ η g όχι ($\nexists x \in B : g(x) = 4$).

γ. Η f έχει αντίστροφη ως ένα-προς-ένα και επί. Αυτή είναι η $f^{-1} : B \to A$ με τιμές $f^{-1}(a) = 3, f^{-1}(b) = 4, f^{-1}(c) = 2, f^{-1}(d) = 1$. Η g δεν έχει αντίστροφη αφού δεν είναι ούτε ένα-προς-ένα ούτε επί.

Ασκηση 6

Σωστό ή Λάθος;

- Η σύνθεση δύο ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.
- Αν η f και η $f \circ g$ είναι ένα-προς-ένα, τότε και η g είναι ένα-προς-ένα.
- Αν η f και η $f \circ g$ είναι επί, τότε και η g είναι επί.

Ασκηση 6

- Η σύνθεση δύο ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

Λάθος, διότι δεν γνωρίζουμε αν είναι επί.

- Αν η f και η f∘g είναι ένα-προς-ένα, τότε και η g είναι ένα-προς-ένα.

Σωστό Άμεση απόδειξη: Έστω $f : B \to C$ και $g : A \to B$. Ας υποθέσουμε $g(a) = g(b)$. Ως εκ τούτου $f(g(a)) = f(g(b))$. Από τον ορισμό της σύνθεσης των συναρτήσεων προκύπτει $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$. Επειδή η $f \circ g$ είναι 1-1, προκύπτει $a = b$. Άρα και η g είναι 1-1.

- Αν η f και η f∘g είναι επί, τότε και η g είναι επί.

Λάθος. Απόδειξη με αντιπαράδειγμα.

Έστω $f : B \to C$ και $g : A \to B$ και $A = \{0\}, B = \{0, 1\}, C = \{0\}$. Επίσης $g(0) = 0, f(0) = 0, f(1) = 0$. Η f είναι επί γιατί για κάθε στοιχείο του πεδίου τιμών $y \in C$ (που είναι μοναδικό, y=0) υπάρχει $x \in B$ ώστε $f(x) = y$. Επίσης η $f \circ g$ είναι επί διότι για κάθε στοιχείο $y \in C$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $(f \circ g)(x) = y$. Πράγματι, $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$. Ωστόσο, η g δεν είναι επί γιατί δεν υπάρχει $a \in A$ ώστε $g(a) = 1$.

Ασκηση 7

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
2. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$
3. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτηση για την οποία η σχέση υποσύνολο του ερωτήματος 2 είναι γνήσια
4. Να δείξετε ότι αν η f είναι 1-1, η σχέση του ερωτήματος 2 είναι ισότητα

Ασκηση 7

1. Έστω $y \in f(S \cup T)$. Τότε υπάρχει $x \in S \cup T$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Από τον ορισμό της ένωσης ισχύει $x \in S \vee x \in T$. Επομένως ισχύει $f(x) \in f(S) \vee f(x) \in f(T)$. Εφόσον f(x)=y προκύπτει $y \in f(S) \vee y \in f(T)$. Συνεπώς $y \in f(S) \cup f(T)$. Δείχτηκε ότι $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$ (1)

   Έστω $y \in f(S) \cup f(T)$. Τότε $y \in f(S) \vee y \in f(T)$. Επομένως, υπάρχει $x \in S \vee x \in T$ ώστε $f(x) = y$. Από το ορισμό της ένωσης προκύπτει $x \in S \cup T$ και $y = f(x) \in f(S \cup T)$. Συνεπώς, $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει$f(S) \cup f(T) = f(S \cup T)$

2. Έστω $y \in f(S \cap T)$. Τότε υπάρχει $x \in S \cap T$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Από τον ορισμό της τομής ισχύει $x \in S \wedge x \in T$. Επομένως ισχύει $f(x) \in f(S) \wedge f(x) \in f(T)$. Εφόσον f(x)=y προκύπτει $y \in f(S) \wedge y \in f(T)$. Συνεπώς $y \in f(S) \cap f(T)$. Δείχτηκε ότι $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

Ασκηση 7

3. Έστω $f : A \to B$ και $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2\}$. Έστω ότι $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2$. $S = \{1,2\}, T = \{1,3\}, S \cap T = \{1\}$
$f(S \cap T) = \{1\}, f(S) = \{1,2\}, f(T) = \{1,2\}$
Συνεπώς $f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$

4. Στο ερώτημα 2 δίνεται το πρώτο σκέλος της απόδειξης. Στο δεύτερο σκέλος θα δειχτεί ότι $f(S) \cap f(T) \subseteq f(S \cap T)$ αν η f είναι 1-1. Έστω $y \in f(S) \cap f(T)$. Από τον ορισμό της τομής προκύπτει $y \in f(S) \wedge y \in f(T)$. Συνεπώς υπάρχει ένα $x \in S$ και ένα $z \in T$ ώστε $f(x) = y$ και $f(z) = y$. Επειδή η f είναι 1-1 προκύπτει $x = z$. Συνεπώς, $x \in S \wedge x \in T$ και $x \in S \cap T$. Άρα $y = f(x) \in f(S \cap T)$. Το ζητούμενο αποδείχτηκε $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι εάν ο n είναι ακέραιος τότε $n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι εάν ο n είναι ακέραιος τότε $n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- Έστω n άρτιος. Τότε υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k$. Προφανώς $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k$. Άρα το άθροισμα αυτών των 2 ισούται με το n.

- Αν n περιττός, τότε υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k + 1$. Δηλαδή, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = k$ και $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k + 1$, δίνοντας πάλι την ισότητα στο άθροισμα.

Άσκηση 9

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:

-$\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor$?

-$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Άσκηση 9

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:
-$\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor$?

Έστω $x = n + \varepsilon$ και $y = m + \delta$, όπου $n = \lfloor x \rfloor, m = \lfloor y \rfloor$ και $\varepsilon, \delta \in [0, 1)$

Αν $\varepsilon = \delta = 0$, τότε και οι δύο πλευρές είναι ίσες με $n + m$.

Αν $\varepsilon = 0, \delta > 0$, τότε η αριστερή πλευρά είναι $n + m + 1$ και η δεξιά $n + m$.

Αν $\varepsilon > 0$, τότε η δεξιά πλευρά είναι $n + m + 1$. Η αριστερή πλευρά είναι $n + m + 1$ ανν $\varepsilon + \delta \leq 1$ διαφορετικά $\lceil x + y \rceil = n + m + 2$.

Συνεπώς, η ισότητα ισχύει ανν αμφότεροι οι x και y είναι ακέραιοι ή όταν ο x δεν είναι ακέραιος και το άθροισμά των κλασματικών μερών των δύο αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο με 1.

Άσκηση 9

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:
-$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Προφανώς ισχύει αν είτε ο x είτε ο y είναι ακέραιος. (Βλ. ταυτότητα 4a, Ενότητα 2.3)

Έστω $x = n + \varepsilon$ και $y = m + \delta$, όπου $n = \lfloor x \rfloor, m = \lfloor y \rfloor$ και $\varepsilon, \delta \in [0, 1)$

Δεδομένου ότι $x + y = m + n + \varepsilon + \delta$, η ισότητα ισχύει όταν $\varepsilon + \delta < 1$. Διαφορετικά, Αν $\varepsilon + \delta \geq 1$, τότε $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Συνεπώς, η ισότητα ισχύει ανν τουλάχιστον ένας εκ των x και y είναι ακέραιος ή αν το άθροισμά των κλασματικών μερών των δύο αριθμών είναι μικρότερο από 1.

Ασκηση 10

Σωστό ή Λάθος;

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μετρήσιμο.
2. Το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι μετρήσιμο.
3. Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι μη-μετρήσιμο.

Ασκηση 10

Σωστό ή Λάθος;

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι μετρήσιμο.

1. Λάθος. Έχει αποδειχτεί μέσω της πρότασης διαγωνιοποίησης του Cantor.

Ασκηση 10

Σωστό ή Λάθος;

2. Το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι μετρήσιμο.

2. Σωστό. Η συνάρτηση $f : \mathbb{Z}^+ \to S$ με $f(n) = n$ αν n θετικός άρτιος και $f(n) = -(n-1)$ αν n θετικός περιττός όπου S το σύνολο των άρτιων αριθμών, είναι ένα-προς-ένα και επί.

1-1: Αν $f(x) = f(y)$ τότε είτε x άρτιος και y άρτιος, είτε x περιττός και y περιττός, γιατί η εξίσωση $x = -(y-1)$ ισοδύναμα $x + y = 1$ δεν έχει λύσεις, εφόσον $x + y \geq 2$.

Στην πρώτη περίπτωση $x = y$ και στη δεύτερη περίπτωση $-(x-1) = -(y-1)$, άρα $x = y$.

Επί: Έστω m θετικός άρτιος. Τότε $m = 2k$ για $k > 0$. Υπάρχει θετικός αρτιος αριθμός $x = 2k$ ώστε $m = 2k = f(x)$

Έστω m αρνητικός άρτιος ή μηδέν. Τότε $m = -2k$ για $k \geq 0$. Υπάρχει θετικός περιττός αριθμός $x = 2k+1$ ώστε $f(x) = -(2k+1-1) = -2k$.

Ασκηση 10

Σωστό ή Λάθος;

3. Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι μη-μετρήσιμο.

Σωστό. Απόδειξη με αντίφαση

Το σύνολο των άρρητων αριθμών $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών. Έστω ότι το I είναι μετρήσιμο. Τότε το σύνολο $I \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο ως ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων. Γνωρίζουμε όμως ότι το $\mathbb{R}$ είναι μη-μετρήσιμο. Ως εκ τούτου καταλήξαμε σε αντίφαση.

Ασκηση 11

Να δείξετε ότι αν το S είναι σύνολο, τότε δεν υπάρχει συνάρτηση επί $f : S \rightarrow P(S)$, το δυναμοσύνολο του S

Ασκηση 11

Να δείξετε ότι αν το S είναι σύνολο, τότε δεν υπάρχει συνάρτηση επί $f : S \rightarrow P(S)$, όπου P(S) το δυναμοσύνολο του S

Θα χρησιμοποιήσουμε μέθοδο απόδειξης με αντίφαση.

Έστω συνάρτηση επί $f : S \rightarrow P(S)$.

Έστω σύνολο $T = \{x \in S | x \notin f(x)\}$. Δεδομένου ότι το σύνολο T περιλαμβάνει μόνο στοιχεία του S, αποτελεί υποσύνολο του S και συνεπώς $T \in P(S)$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι επί, $\exists t \in S$ έτσι ώστε $f(t) = T$.

1. Αν $t \in T$, τότε εξ ορισμού του T, $t \notin f(t)$, συνεπώς $t \notin T$. Αντίφαση.
2. Αν $t \notin T = f(t)$, τότε $t \notin f(t)$ και συνεπώς $t \in T$. Αντίφαση.

Συνεπώς, δεν υπάρχει συνάρτηση f από το S στο $P(S)$ που να είναι επί.

Ασκηση 12

Να δείξετε ότι αν το S είναι σύνολο, τότε $|S| < |P(S)|$, όπου $P(S)$ το δυναμοσύνολο του S.

Ασκηση 12

Στην προηγούμενη άσκηση αποδείξαμε ότι $|S| \neq |P(S)|$ καθώς δεν υπάρχει συνάρτηση επί από το S στο $P(S)$. Για να δείξουμε ότι $|S| < |P(S)|$ αρκεί να δείξουμε ότι $|S| = |E|$, για κάποιο υποσύνολο $E \subset P(S)$.

Έστω σύνολο $E = \{\{x\} : x \in S\}$, το σύνολο που περιέχει όλα τα υποσύνολα του S που έχουν μόνο ένα στοιχείο. Προφανώς $E \subset P(S)$ (γνήσιο) γιατί δεν περιέχει το $\emptyset$.

Η συνάρτηση $g : S \to E$, $g(x) = \{x\}$ είναι 1-1 και επί, συνεπώς $|S| = |E|$ και, εφόσον $|E| < |P(S)|$, $|S| < |P(S)|$.

1. 1-1: Έστω $g(x) = g(y)$, τότε $\{x\} = \{y\}$. Καθώς 2 πεπερασμένα σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια στοιχεία $x = y$.

2. Επί: Προφανώς, $\forall y \in E$, $\exists x \in S$, $g(x) = y$. (Έστω $y = \{x_0\}$, αν $x = x_0$, τότε $g(x) = \{x_0\} = y$).

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Όλγα Φουρτουνέλλη
Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό 2020-2021

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί ότι αν $h > -1$ τότε $1 + nh \leq (1+h)^n$, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n. Αυτή είναι η λεγόμενη **ανισότητα Bernoulli**.

Έστω $P(n)$ η πρόταση $1 + nh \leq (1 + h)^n, \forall h > -1$.

Βήμα βάσης: $P(0)$ είναι αληθής καθώς $\forall h > -1$ έχουμε $(1 + h)^0 = 1$, άρα η ανισότητα γίνεται $1 \leq 1$.

Επαγώγικο βήμα: Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή $1 + kh \leq (1 + h)^k$. Τότε αφού $1 + h > 0$ έχουμε $(1 + h)^{k+1} = (1 + h)(1 + h)^k \geq (1 + h)(1 + kh)$ βάσει επαγωγικής υπόθεσης. Το δεύτερο μέρος της ανισότητας αναπτύσσεται ως $1 + kh + h + kh^2 = 1 + (k + 1)h + kh^2 \geq 1 + (k + 1)h$, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $n^2 - 1$ διαιρείται από το 8, οποτεδήποτε ο n είναι περιττός θετικός αριθμός.

Έστω $P(n)$ η πρόταση ο αριθμός $n^2 - 1$ διαιρείται από το 8, αν n θετικός περιττός. Θέτουμε $n = 2k - 1$ και θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για κάθε k.

Βήμα βάσης: Αν $k = 1$, τότε $n^2 - 1 = 0$ και προφανώς διαιρείται από το 8, δείχνοντας ότι η $P(1)$ ισχύει.

Επαγώγικο βήμα: Έστω ότι $P(k)$ αληθής, δηλαδή $(2k-1)^2 - 1$ διαιρείται από το 8. Τότε $(2k-1)^2 - 1 = 8m$ για κάποιον m θετικό ακέραιο. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι $(2(k+1)-1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 =$ $4k^2 - 4k + 1 - 1 + 8k = (2k-1)^2 - 1 + 8k = 8m + 8k$, αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό.

Άσκηση 3

α. Βρείτε έναν τύπο για το άθροισμα

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

εξετάζοντας τις τιμές έκφρασης για μικρές τιμές του n.

β. Να αποδείξετε τη σχέση που βρήκατε στο ερώτημα (α) .

α. Συμβολίζουμε το άθροισμα με $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$. Παρατηρούμε ότι $S(1) = \frac{1}{2}, S(2) = \frac{3}{4}, S(3) = \frac{7}{8} \dots$ Άρα υποθέτουμε ότι $S(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

β. Έστω $P(n)$ η πρόταση $S(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$. Θα αποδείξουμε την πρόταση για κάθε $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: $S(1) = \frac{1}{2}$, οπότε η $P(1)$ ισχύει.

Επαγώγικο βήμα: Έστω ότι $P(k)$ αληθής, δηλαδή $S(k) = \frac{2^k - 1}{2^k}$.
Έχουμε $S(k+1) = S(k) + \frac{1}{2^{k+1}}$, από τον ορισμό του αθροίσματος. Άρα $S(k+1) = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$ από επαγωγική υπόθεση. Δηλαδή $S(k+1) = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$, αποδεικνύοντας ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Άσκηση 4

Σε μια τράπεζα το ATM έχει χαρτονομίσματα των 20 και 50 €. Ποια χρηματικά ποσά μπορεί να δίνει αν θεωρήσουμε ότι έχει απεριόριστη ποσότητα αυτών των χαρτονομισμάτων? Η απάντηση να αποδειχτεί με χρήση μαθηματικής επαγωγής.

Μπορεί να δώσει όλα τα χρηματικά ποσά που είναι πολλαπλάσια των 10€ που είναι μεγαλύτερα ή ίσα από 40€, καθώς και το ποσό των 20€. Έστω $P(n)$ η πρόταση $\Pi(n) = 10n$.

Βήμα βάσης: Για $n = 4$ μπορεί να δοθεί το ποσό των 40€ $\Pi(n) = 40 = 20n_{20}$, $P(4)$ αληθής και $n_{20} = 2$ (δύο εισοσάευρα)

Επαγώγικο βήμα: Έστω $P(k)$ αληθής για $k > 4$. Τότε η επαγωγική υπόθεση είναι: $\Pi(k) = 10k = 50n_{50} + 20n_{20}$, όπου n_{50}, n_{20} μη αρνητικοί ακέραιοι (πενηντάευρα και εικοσάευρα). Αν $n_{50} > 0$, τότε ένα πενηντάευρο μπορεί να αντικατασταθεί από τρια εικοσάευρα και πράγματι ισχύει $10(k+1) = 50(n_{50} - 1) + 20(n_{20} + 3)$. Συνεπώς $P(k+1)$ αληθής. Από την άλλη, αν $n_{50} = 0$, τότε δύο εικοσάευρα μπορούν να αντικατασταθούν από ένα πενηντάευρο και πράγματι ισχύει $10(k+1) = 50(n_{50} + 1) + 20(n_{20} - 2)$ (αφού το ποσό είναι μεγαλύτερο των 40€ και άρα $n_{20} \geq 2$), συνεπώς $P(k+1)$ αληθής, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 5

α. Να προσδιοριστεί ποια ποσά ταχυδρομικών τελών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα αξίας 3 και 10 λεπτών.

β. Να αποδείξετε την απάντηση που δώσατε για το ερώτημα (α) με μαθηματική επαγωγή. Να βεβαιωθείτε ότι διατυπώνετε ρητά την επαγωγική υπόθεση και το επαγωγικό βήμα.

γ. Να αποδείξετε την απάντηση που δώσατε για το ερώτημα (α) με ισχυρή επαγωγή. Με ποιον τρόπο διαφέρει αυτή η απόδειξη από την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή?

α. $3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16$ και όλα τα ποσά από 18 λεπτά και πάνω.

β. Θεωρούμε $P(n)$ την πρόταση «μπορούμε να σχηματίσουμε ταχυδρομικό τέλος n λεπτών μόνο με γραμματόσημα των 3 και 10 λεπτών». Θα δείξουμε με επαγωγή ότι αυτή η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n \geq 18$.
Βήμα βάσης: $18 = 3 \cdot 6$, άρα η $P(18)$ ισχύει.
Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η $P(k)$. Τότε $k = 3 \cdot i + 10 \cdot j$, για κάποιους i, j ακέραιους. Αν $i \geq 3$, τότε μπορούμε να γράψουμε την ισότητα $k + 1 = 3 \cdot (i - 3) + 10 \cdot (j + 1)$. Αν $i < 3$, τότε το j πρέπει να είναι σίγουρα μεγαλύτερο ή ίσο του 2, αφού το βήμα βάσης είναι το 18. Άρα μπορούμα να αντικαταστήσουμε 2 γραμματόσημα των 10 λεπτών με 7 των 3 λεπτών, έχοντας πράγματι $k + 1 = 3 \cdot (i + 7) + 10 \cdot (j - 2)$.

γ. **Βήμα βάσης:** Θα δείξουμε ότι τα τέλη $18, 19$ και 20 λεπτών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα των 3 και 10 λεπτών (προφανώς το τέλος των 21 λεπτών φτιάχνεται εφόσον κάποιος χρησιμοποιήσει επιπλέον ένα γραμματόσημο των 3 λεπτών στο τέλος των 18 λεπτών). Πράγματι $19 = 3 \cdot 3 + 10 \cdot 1, 20 = 2 \cdot 10$, ενώ την περίπτωση της $P(18)$ την δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Επαγωγικό βήμα: Έστω η ισχυρή επαγωγή ότι η πρόταση P είναι αληθής για κάθε j τέτοιο ώστε $18 \leq j \leq k$. Τότε, $k - 2 \geq 18$ (για τα υπόλοιπα επιληφθήκαμε στο βήμα βάσης) και βάσει ισχυρής επαγωγικής υπόθεσης η πρόταση $P(k-2)$ είναι αληθής, οπότε $k - 2 = 3 \cdot i + 10 \cdot j$. Οπότε προσθέτοντας ένα ακόμα γραμματόσημο των 3 λεπτών έχουμε ότι $k + 1 = 3 \cdot (i + 1) + 10 \cdot j$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα, χρησιμοποιώντας την ισχυρή επαγωγή έπρεπε να επεκτείνουμε το βήμα βάσης, αλλά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $P(j)$ είναι αληθής για κάθε $18 \leq j \leq k$ δεν χρειάστηκε να πάρουμε περιπτώσεις για την ολοκλήρωση της απόδειξης.

Άσκηση 6

Να βρείτε το σφάλμα στην παρακάτω "απόδειξη" ότι κάθε ταχυδρομικό τέλος αξίας 3 ή περισσότερων λεπτών μπορεί να σχηματιστεί χρησιμοποιώντας γραμματόσημα αξίας 3 και 4 λεπτών.

Βήμα βάσης: Μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τέλος αξίας 3 λεπτών με ένα γραμματόσημο αξίας 3 λεπτών και ένα τέλος αξίας 4 λεπτών με ένα γραμματόσημο αξίας 4 λεπτών.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τέλος αξίας j λεπτών για κάθε μη αρνητικό ακέραιο j με $j \leq k$, χρησιμοποιώντας μόνο γραμματόσημα αξίας 3 και 4 λεπτών. Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τέλος αξίας $k+1$ λεπτών είτε αντικαθιστώντας ένα γραμματόσημο 3 λεπτών με ένα γραμματόσημο 4 λεπτών είτε αντικαθιστώντας 2 γραμματόσημα 4 λεπτών με 3 γραμματόσημα 3 λεπτών.

Το λάθος βρίσκεται στο ότι για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος χρησιμοποιείται υπόθεση που δεν δικαιολογείται από το βήμα βάσης. Για να αντικαταστήσουμε 1 γραμματόσημο των 3 λεπτών πρέπει το ελάχιστο τέλος να είναι 3 λεπτά, ενώ για να αντικαταστήσουμε 2 γραμματόσημα των 4 λεπτών πρέπει το ελάχιστο τέλος να είναι 8 λεπτά. Οι ενδιάμεσες τιμές δεν ελέγχθηκαν στο βήμα βάσης. Πράγματι, ενώ υπάρχει η δυνατότητα να σχηματιστούν τέλη των $4, 6$ και 7 λεπτών, κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό για το τέλος των 5 λεπτών.

Για να επαναδιατυπωθεί σε σωστή βάση η πρόταση πρέπει να αλλάξει τόσο η πρόταση προς απόδειξη: "*Κάθε ταχυδρομικό τέλος αξίας 6 ή περισσότερων λεπτών μπορεί να σχηματιστεί χρησιμοποιώντας γραμματόσημα αξίας 3 και 4 λεπτών*" όσο και τα βήματα της επαγωγής

Βήμα βάσης: Θα δείξουμε ότι τα τέλη $6, 7$ και 8 λεπτών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα των 3 και 4 λεπτών. Πράγματι $6 = 3 \cdot 2, 7 = 3 + 4, 8 = 4 \cdot 2$. $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$ αληθείς.

Επαγωγικό βήμα: Έστω η ισχυρή επαγωγή ότι η πρόταση P είναι αληθής για κάθε j τέτοιο ώστε $6 \leq j \leq k$. Τότε, $k - 2 \geq 6$ (για τα υπόλοιπα επιληφθήκαμε στο βήμα βάσης) και βάσει ισχυρής επαγωγικής υπόθεσης η πρόταση $P(k-2)$ είναι αληθής, οπότε $k - 2 = 3 \cdot i + 4 \cdot j$. Οπότε προσθέτοντας ένα ακόμα γραμματόσημο των 3 λεπτών έχουμε ότι $k + 1 = 3 \cdot (i+1) + 4 \cdot j$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Άσκηση 7

Έστω ότι S είναι το υποσύνολο του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών ακεραίων που ορίζονται αναδρομικά από τα βήματα:

Βήμα βάσης: $(0, 0) \in S$

Αναδρομικό βήμα: Αν $(a, b) \in S$ τότε το $(a, b+1) \in S$, $(a+1, b+1) \in S$ και $(a+2, b+1) \in S$.

α. Να παραθέσετε τα στοιχεία του S που παράγονται από τις 4 πρώτες εφαρμογές του αναδρομικού ορισμού.

β. Να χρησιμοποιήσετε την ισχυρή επαγωγή ως προς το πλήθος των εφαρμογών του αναδρομικού βήματος του ορισμού για να δείξετε ότι, $a \leq 2b$, οποτεδήποτε $(a, b) \in S$.

γ. Να χρησιμοποιήσετε τη δομική επαγωγή ως προς το πλήθος των εφαρμογών του αναδρομικού βήματος του ορισμού για να δείξετε ότι, $a \leq 2b$, οποτεδήποτε $(a, b) \in S$.

α. Εφαρμόζουμε τον τύπο 4 φορές:

Βάση	1η	2η	3η	4η
				$(0,4)$
			$(0,3)$	$(1,4)$
		$(0,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$
	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$
$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(3,3)$	$(4,4)$
	$(2,1)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$
		$(4,2)$	$(5,3)$	$(6,4)$
			$(6,3)$	$(7,4)$
				$(8,4)$

β. Θα δείξουμε με ισχυρή επαγωγή την πρόταση $P(n)$ "$a \leq 2b, \forall (a, b) \in S$ στην n-οστή εφαρμογή του αναδρομικού τύπου".

Βήμα βάσης: Η πρόταση $P(0)$ προφανώς ισχύει καθώς μόνο το $(0, 0)$ είναι μέρος του συνόλου σε αυτήν την περίπτωση.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει $a \leq 2b$ για κάθε $(a, b) \in S$, εφόσον το S φτιάχτηκε με k ή λιγότερα αναδρομικά βήματα. Θεωρούμε ένα στοιχείο (a', b') που φτιάχτηκε με $k + 1$ εφαρμογές του αναδρομκού βήματος. Επειδή η τελική εφαρμογή πρέπει να γίνει σε ένα στοιχείο (a, b) που κατασκευάστηκε με λιγότερες εφαρμογές του αναδρομικού τύπου, έχουμε για αυτό το στοιχείο $a \leq 2b$. Οπότε εφαρμόζοντας μια τελευταία φορά τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι $b' = b + 1$ και $a' = a, a + 1$ ή $a + 2$. Σε κάθε περίπτωση $a' \leq 2b'$.

γ. Η υπόθεση ισχύει για το βήμα βάσης, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα. Αν ισχύει αυτό για το στοιχείο $(a, b) \in S$ τότε ισχύει επίσης και για κάθε στοιχείο που λαμβάνεται από το (a, b) με μια εφαρμογή του αναδρομικού τύπου, καθώς
$a \leq 2b \Rightarrow (a \leq 2(b+1)) \wedge (a+1 \leq 2(b+1)) \wedge (a+2 \leq 2(b+1))$.

Άσκηση 8

Έστω f_n ο n-οστός αριθμός Fibonacci .

α. Να αποδείξετε ότι $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$, για κάθε n θετικό ακέραιο.

β. Να αποδείξετε ότι $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$, για κάθε n θετικό ακέραιο.

Έστω f_n ο n-οστός αριθμός Fibonacci .

α. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι η πρόταση $P(n)$: $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: Για $n = 1$ έχουμε $f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι η πρόταση $P(k)$ ισχύει. Τότε βάσει ορισμού της ακολουθίας Fibonacci $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$, άρα $f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 = (f_k + f_{k+1})f_k - f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k - f_{k+1}) + f_k^2$. Όμως πάλι βάσει ορισμού της ακολουθίας $f_k - f_{k+1} = -f_{k-1}$, δίνοντας τελικά ότι $f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 = -f_{k-1}f_{k+1} + f_k^2 = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$, βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, δείχνοντας ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Έστω f_n ο n-οστός αριθμός Fibonacci .

β. Έστω το άθροισμα $F(n) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \cdot f_i$. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι η πρόταση $P(n)$: $F(n) = f_{2n-1} - 1$ ισχύει για κάθε ακέραιο.

Βήμα βάσης: Για $n = 1$ έχουμε $f_0 - f_1 + f_2 = 0 = f_1 - 1$, οπότε ισχύει η πρόταση $P(1)$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η πρόταση $P(k)$. Τότε $F(k+1) = F(k) - f_{2k+1} + f_{2k+2}$. Από τον ορισμό της ακολουθίας Fibonacci $f_{2k+2} = f_{2k+1} + f_{2k}$ και από την επαγωγική υπόθεση $F(k) = f_{2k-1} - 1$. Συνολικά $F(k+1) = f_{2k-1} - 1 + f_{2k} = f_{2k+1} - 1$, αποδεικνύοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 9

Θεωρούμε ότι μια πλάκα σοκολάτας αποτελείται από n τετραγωνάκια που είναι διατεταγμένα σε ορθογώνια διάταξη.

Η πλάκα ή μικρότερο ορθογώνιο κομμάτι της πλάκας μπορεί να σπάσει κατα μήκος της κατακόρυφης ή οριζόντιας γραμμής που χωρίζει τα τετραγωνάκια.

Αν θεωρήσουμε ότι κάθε φορά μπορεί να σπάζει ένα κομμάτι, να προσδιοριστεί πόσα σπασίματα πρέπει να κάνουμε διαδοχικά για να σπάσουμε την πλάκα σε n ξεχωριστά τετραγωνάκια.

Η απάντηση να αποδειχτεί με ισχυρή επαγωγή.

Ισχυριζόμαστε ότι χρειάζονται ακριβώς $n-1$ σπασίματα για να σπάσει η πλάκα σε n τετραγωνάκια.

Βήμα βάσης: Αρχικά για $n=1$ είναι εμφανές ότι χρειάζονται $n-1=0$ σπασίματα.

Επαγωγικό βήμα: Θα προχωρήσουμε με υπόθεση ισχυρής επαγωγης για k κομμάτια ή λιγότερα. Θα αποδείξουμε ότι μια πλάκα με $k+1$ τετράγωνα χρειάζεται ακριβώς k σπασίματα.

Ξεκινάμε με ένα σπάσιμο που θα αφήσει 2 κομμάτια, εκ των οποίων το ένα θα έχει $i+1$ τετράγωνα, ενώ το άλλο θα έχει $k-i$ κομμάτια, ενώ ισχύει ότι $0 \leq i \leq k-1$. (Δηλαδή κάθε κομμάτι έχει τουλάχιστον 1 και μέχρι k κομμάτια). Από την υπόθεση ισχυρής επαγωγής θα έχουμε ότι το πρώτο κομμάτι θα χρειαστεί i σπασίματα για να γίνει $i+1$ κομμάτια, ενώ το δεύτερο κομμάτι θα χρειαστεί $k-i-1$ σπασίματα για να γίνει $k-i$ κομμάτια.

Συνολικά, προσθέτοντας το πρώτο σπάσιμο θα έχουμε $1+i+k-i-1=k$ σπασίματα ακριβώς, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 10

Ένα παζλ σχηματίζεται μέσω της διαδοχικής συνένωσης κομματιών που συγκροτούν μπλοκ. Μια κίνηση γίνεται κάθε φορά που ένα κομμάτι προστίθεται σε ένα μπλοκ ή όταν συνενώνονται δύο μπλοκ. Με τη χρήση της ισχυρής επαγωγής να αποδειχτεί ότι ανεξάρτητα από τον τρόπο εκτέλεσης των κινήσεων, χρειάζονται μόνο $n-1$ κινήσεις για τη συναρμολόγηση παζλ με n κομμάτια.

Έστω $P(n)$ η πρόταση ότι χρειάζονται μόνο $n-1$ κινήσεις για τη συναρμολόγηση παζλ με n κομμάτια.

Βήμα βάσης: Προφανώς, η $P(1)$ είναι αληθής.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η $P(j)$ για κάθε $1 < j \leq k$. Η τελευταία κίνηση σχηματισμού ενός παζλ με $k+1$ κομμάτια πρέπει να είναι η συνένωση 2 μπλοκ μεγέθους m και $k+1-m$ κομμάτια αντίστοιχα, όπου $1 \leq m \leq k$. Από την επαγωγική υπόθεση, το μπλοκ με m κομμάτια απαιτεί για τον σχηματισμό του $m-1$ κινήσεις και το μπλοκ με $k+1-m$ κομμάτια, απαιτεί $k-m$ κινήσεις. Συνεπώς, για το σχηματισμό του παζλ με $k+1$ κομμάτια απαιτούνται $1+m-1+k-m=k$ κινήσεις, και το επαγωγικό βήμα ολοκληρώνεται.

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Όλγα Φουρτουνέλλη
Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό 2020-2021

Άσκηση 1

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να καθίσουν 4 άνθρωποι από ένα σύνολο 10 ανθρώπων γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι, οπού δυο τοποθετήσεις θεωρούνται ίδιες εφόσον κάθε άνθρωπος έχει τον ίδιο γείτονα αμέσως δεξιά και αριστερά του?

Η απάντηση στηρίζεται στην εφαρμογή τόσο του κανόνα του γινομένου, όσο και του κανόνα της διαίρεσης. Αριθμούμε τις θέσεις από το 1 έως το 4. Για την πρώτη θέση υπάρχουν 10 διαφορετικές επιλογές ανθρώπων που μπορούν να καθίσουν. Για την δεύτερη υπάρχουν 9, ενώ για την τρίτη και την τέταρτη 8 και 7 επιλογές αντίστοιχα. Άρα βάση του κανόνα του γινομένου υπάρχουν $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$ πιθανές τοποθετήσεις.

Εφόσον υπάρχουν 4 τοποθετήσεις τέτοιες ώστε ο κάθε άνθρωπος να έχει τον ίδιο γείτονα αμέσως δεξιά και αριστερά, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της διαίρεσης βρίσκουμε ότι υπάρχουν συνολικά

$$n = \frac{5.040}{4} = 1.260$$

διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν οι 4 από τους 10 γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι.

Άσκηση 2

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος 10 είτε ξεκινούν από 3 μηδενικά είτε τελειώνουν με 2 μηδενικά;

Έστω τα σύνολα A και B που περιλαμβάνουν όλες τις συμβολοσειρές bit με μήκος 10 που ξεκινούν από 3 και τελειώνουν με 2 μηδενικά αντίστοιχα. Το πρώτο σύνολο αριθμεί βάσει του κανόνα του γινομένου $|A| = 2^{10-3} = 128$ στοιχεία, αφού ξεκινώντας με 3 μηδενικά μένει μια συμβολοσειρά bit με 7 στοιχεία. Ομοίως το δεύτερο σύνολο έχει $|B| = 2^{10-2} = 256$ στοιχεία. Η τομή τους αριθμεί $|A \cap B| = 2^{10-3-2} = 32$ στοιχεία. Συνολικά, βάσει της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού το ζητούμενο σύνολο αριθμεί $128 + 256 - 32 = 352$ στοιχεία.

Άσκηση 3

Έστω ότι (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, ένα σύνολο 9 διαφορετικών σημείων με ακέραιες συντεταγμένες στο χώρο $\Re^3$. Να δείξετε ότι, το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τουλάχιστον ένα ζεύγος αυτών των σημείων έχει ακέραιες συντεταγμένες.

Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει 2 διακριτά σημεία (x_i, y_i, z_i) και (x_j, y_j, z_j), είναι το σημείο $((x_i + x_j)/2, (y_i + y_j)/2, (z_i + z_j)/2)$.

Προφανώς, οι συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος είναι ακέραιες αν και μόνον αν οι συντεταγμένες των άκρων του έχουν την ίδια ισοτιμία (η x_i με την x_j, κ.λπ.).

Από την αρχή του γινομένου προκύπτει ότι υπάρχουν $2^3 = 8$ τριπλέτες ισοτιμιών: (περιττή, περιττή, περιττή), (περιττή, περιττή, άρτια), ... , (άρτια, άρτια, άρτια).

Δεδομένου ότι έχουμε 9 σημεία, βάσει της αρχής του περιστερώνα θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία με τις ίδιες τριπλέτες ισοτιμιών. Το μέσο αυτών των δύο σημείων θα έχει συνεπώς ακέραιες συντεταγμένες.

Άσκηση 4

Πόσα πιθανά αποτελέσματα υπάρχουν σε έναν αγώνα ταχύτητας με 3 άλογα, αν είναι δυνατή η ισοπαλία? *[Παρατήρηση: Δύο ή τρία άλογα μπορεί να είναι ισόπαλα.]*

Αν δεν υπάρχουν ισοπαλίες υπάρχουν $3! = 6$ μεταθέσεις του συνόλου των τρίων αλόγων που αντιστοιχούν σε 6 πιθανά αποτελέσματα.

Αν δύο άλογα είναι ισόπαλα, υπάρχουν 3 διαφορετικοί τρόποι να επιλεγεί πιο άλογο δεν θα είναι ισόπαλο. Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους, υπάρχουν δύο τρόποι να επιλεγεί αν αυτό το άλογο θα είναι πρώτο ή δεύτερο. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου έχουμε $3 \cdot 2 = 6$ τρόπους.

Τέλος υπάρχει η περίπτωση και τα τρία άλογα να είναι ισόπαλα. Συνεπώς τα πιθανά αποτελέσματα είναι σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος $6 + 6 + 1 = 13$.

Άσκηση 5

Μια ομάδα περιέχει n άνδρες και n γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να τοποθετήσουμε τα άτομα αυτά σε μια σειρά, όπου οι άνδρες και οι γυναίκες εναλλάσσονται;

Υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις των ανδρών και $n!$ μεταθέσεις (διατεταγμένες τοποθετήσεις) των γυναικών.

Για κάθε τρόπο τοποθέτησης των ανδρών και των γυναικών, υπάρχουν δύο δυνατότητες: είτε κάθε γυναίκα θα έπεται του αντίστοιχου άνδρα MWMWMW....MW, είτε κάθε άνδρας θα έπεται της αντίστοιχης γυναίκας WMWMW....WM.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου και εφόσον η τοποθέτηση των ατόμων σε μια εναλλασσόμενη σειρά αναλύεται στις 3 παραπάνω διαδικασίες, υπάρχουν $2 * n! * n! = 2(n!)^2$ τρόποι.

Άσκηση 6

Πόσοι τρόποι υπάρχουν έτσι ώστε 8 άνδρες και 5 γυναίκες να σταθούν σε μία γραμμή χωρίς μία γυναίκα να στέκεται δίπλα σε μία άλλη;*[Υπόδειξη: Πρώτα τοποθετήστε τους άνδρες και μετά εξετάστε πιθανές θέσεις για τις γυναίκες]*

Καταρχάς υπάρχουν $P(8,8) = 8!$ μεταθέσεις, δηλαδή διατεταγμένες τοποθετήσεις των ανδρών. Όπως φαίνεται, υπάρχουν 9 θέσεις στις οποίες μπορούν να σταθούν οι γυναίκες χωρίς να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη: -M-M-M-M-M-M-M-M-.

Υπάρχουν $P(9,5) = 9!/4!$ τρόποι να τοποθετηθούν διατεταγμένα 5 γυναίκες σε αυτές τις 9 θέσεις.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά $8! \cdot 9!/4! = 609.638.400$ τρόποι.

Άσκηση 7

Πόσες συμβολοσειρές bit μήκους 10 περιέχουν

α. ακριβώς τέσσερις μονάδες;

β. το πολύ τέσσερις μονάδες;

γ. το λιγότερο τέσσερις μονάδες;

δ. ίσο αριθμό μηδενικών και μονάδων;

α. Για να προσδιορίζουμε μια συμβολοσειρά μήκους 10 με ακριβώς 4 μονάδες αρκεί να προσδιορίσουμε τις θέσεις όπου θα βρίσκονται οι μονάδες. Έχουμε λοιπόν να επιλέξουμε έναν συνδυασμό 4 θέσεων από τις 10 συνολικά θέσεις, εφόσον δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία θα τις επιλέξουμε. Συνεπώς υπάρχουν $C(10, 4) = 210$ τρόποι επιλογής των θέσεων και ίσο πλήθος συμβολοσειρών.

β. Σε αυτή την περίπτωση η συμβολοσειρά περιέχει είτε 0, είτε 1, είτε 2, είτε 3, είτε 4 μονάδες. Από τον κανόνα αθροίσματος προκύπτει ότι υπάρχουν $C(10, 4) + C(10, 3) + C(10, 2) + C(10, 1) + C(10, 0) =$ $210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386$ τέτοιες συμβολοσειρές.

γ. Αντιστοίχως, σε αυτή την περίπτωση η συμβολοσειρά περιέχει 4,5,6,7,8,9 ή 10 μονάδες. Επομένως υπάρχουν $C(10, 10) + ... + C(10, 4) = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 = 848$ τέτοιες συμβολοσειρές. Ένας δεύτερος τρόπος θα ήταν να αφαιρέσουμε από το συνολικό πλήθος συμβολοσειρών, τις συμβολοσειρές που έχουν μέχρι 3 μονάδες.

δ. Οι συμβολοσειρές έχουν σε αυτή την περίπτωση 5 ακριβώς μονάδες οπότε το πλήθος τους είναι $C(10,5) = 252$.

Εδώ προκύπτει και ένας διαφορετικός τρόπος απάντησης του ερωτήματος β. Όταν δεν έχουμε ίσο πλήθος μηδενικών και μονάδων τότε έχουμε είτε το πολύ 4 είτε τουλάχιστον 6 μονάδες. Λόγω συμμετρίας των συνδυασμών έχουμε το πολύ 4 μονάδες στις μισές από αυτές τις περιπτώσεις. Επομένως, η απάντηση σε αυτή την περίπτωση είναι $(2^{10} - C(10,5))/2 = (1024 - 252)/2 = 386$.

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι, αν f μια συνάρτηση από το S στο T, όπου S, T είναι μη κενά πεπερασμένα σύνολα και $m = \lceil |S|/|T| \rceil$, τότε υπάρχουν τουλάχιστον m στοιχεία του S, τα οποία αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή του T. Με άλλα λόγια να δείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία $s_1, s_2, \dots, s_m$ του S, τέτοια ώστε $f(s_1) = f(s_2) = \cdots = f(s_m)$.

Η συνάρτηση f τοποθετεί όλα τα στοιχεία του συνόλου S στο σύνολο T. Θεωρούμε τα στοιχεία του T ως θέσεις, ωστέ να εφαρμόσουμε την γενικευμένη αρχή του περιστερώνα. Βάσει αυτής, η τοποθέτηση $|S|$ στοιχείων σε $|T|$ θέσεις συνεπάγεται ότι για τουλάχιστον μία θέση $t \in T$ θα υπάρχουν $m = \lceil |S|/|T| \rceil$ στοιχεία του S τέτοια ώστε να απεικονίζονται μέσω της f σε αυτό.

Άσκηση 9

Υπάρχουν 6 δρομείς σε έναν αγώνα 100 μέτρων. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να απονεμηθούν μετάλλια αν είναι δυνατή η ισοπαλία; (ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν ταχύτερα λαμβάνουν χρυσά μετάλλια, ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν πίσω ακριβώς από έναν δρομέα λαμβάνουν ασημένια μετάλλια και ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν πίσω ακριβώς από δύο δρομείς, λαμβάνουν χάλκινα μετάλλια).

Η επίλυση αυτού του προβλήματος απαιτεί την ανάλυσή του σε περιπτώσεις:

1. Αν υπάρχουν μοναδικοί νικητές του χρυσού και του ασημένιου μετάλλιου, υπάρχουν $P(6,2) = 6 \cdot 5 = 30$ τρόποι επιλογής τους. Το χάλκινο μετάλλιο μπορεί να δοθεί σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο S των 4 δρομέων που απομένουν. Τα μη κενά υποσύνολα είναι στο πλήθος $2^{|S|} - 1 = 15$. Επομένως, υπάρχουν συνολικά $30 \cdot 15 = 450$ τρόποι σε αυτή την περίπτωση.

2. Αν υπάρχει μια ισοπαλία 2 ατόμων για την πρώτη θέση τότε προφανώς υπάρχουν $C(6,2) = 15$ τρόποι να επιλεγούν οι δρομείς που θα λάβουν το χρυσό. Το χάλκινο μετάλλιο (εφόσον σε αυτή την περίπτωση δεν απονέμεται ασημένιο) μπορεί να δοθεί σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο των υπόλοιπων 4 δρομέων, που είναι στο πλήθος 15. Συνεπώς υπάρχουν $15 \cdot 15 = 225$ τρόποι απονομής των μεταλλίων σε αυτή την περίπτωση.

3. Αν k δρομείς τερματίσουν πρώτοι με $k \geq 3$, τότε υπάρχουν $C(6, k)$ τρόποι απονομής του χρυσού μετάλλιου. Σε αυτή την περίπτωση δεν δίνονται άλλα μετάλλια συνεπώς σύμφωνα με τον κανόνα αθροίσματος υπάρχουν $C(6,3) + C(6,4) + C(6,5) + C(6,6) = 20 + 15 + 6 + 1 = 42$ τρόποι απονομής του χρυσού.

4. Η μόνη άλλη περίπτωση είναι να υπάρχει μοναδικός νικητής του χρυσού και k δρομείς να τερματίσουν δεύτεροι, όπου $k \geq 2$. Σε αυτή την περίπτωση δεν απονέμονται χάλκινα μετάλλια. Ο νικητής μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους ενώ στη δεύτερη θέση μπορεί να βρίσκονται οι δρομείς σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο των υπόλοιπων 5 δρομέων εκτός από τα υποσύνολα που έχουν μόνο ένα στοιχείο, καθώς $k \geq 2$. Το πλήθος αυτών των υποσυνόλων είναι $2^5 - 5 - 1 = 26$. Συνεπώς υπάρχουν συνολικά $6 * 26 = 156$ τρόποι απονομής μεταλλίων σε αυτή την περίπτωση.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αθροίσματος, υπάρχουν συνολικά $450 + 225 + 42 + 156 = 873$ τρόποι απονομής μεταλλίων.

Άσκηση 10

Να δείξετε ότι, αν επιλέξουμε 5 σημεία στην εσωτερική περιοχή ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς ίσο με 2, τότε τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία δεν απέχουν περισσότερο από $\sqrt{2}$.

Το τετράγωνο μπορεί να χωριστεί σε 4 μικρότερα τετράγωνα με μήκος πλευράς ίσο με 1. Από την αρχή του περιστερώνα προκύπτει ότι 2 τουλάχιστον σημεία από τα 5 θα βρίσκονται στο ίδιο εσωτερικό τετράγωνο. Η μέγιστη απόσταση δύο σημείων σε ένα τετράγωνο είναι ίση με το μήκος της διαγωνίου του που στην προκειμένη περίπτωση είναι $\sqrt{2}$.

Συνεπώς υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία τα οποία δεν απέχουν περισσότερο από $\sqrt{2}$.

Άσκηση 11

Πόσοι τρόποι υπάρχουν έτσι ώστε 20 άνδρες και 4 γυναίκες να σταθούν σε μία γραμμή χωρίς μία γυναίκα να στέκεται δίπλα σε μία άλλη και το πλήθος των ανδρων σε διαδοχικές θέσεις να είναι άρτιο;

Καταρχάς υπάρχουν $P(20,20) = 20!$ μεταθέσεις, δηλαδή διατεταγμένες τοποθετήσεις των ανδρών. Όπως φαίνεται, υπάρχουν 11 θέσεις στις οποίες μπορούν να σταθούν οι γυναίκες χωρίς να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη και το πλήθος των ανδρών σε διαδοχικές θέσεις να είναι άρτιο:
-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-.

Υπάρχουν $P(11,4) = 11!/(11-4)! = 11!/7!$ τρόποι να τοποθετηθούν διατεταγμένα 4 γυναίκες σε αυτές τις 11 θέσεις.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά $20! \cdot 11!/7!$ τρόποι (πολύ μεγάλος αριθμός).

Ασκηση 12

Ο πλούσιος θείος μας έχει και εργοστάσιο με σοκολάτες.Παρασκευάζει 3 είδη σοκολάτας: γάλακτος, λευκή και με αμύγδαλα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε:

1. 10 σοκολάτες;

2. 10 σοκολάτες, έτσι ώστε να έχω τουλάχιστον 1 γάλακτος, τουλάχιστον 2 αμυγδάλου και τουλάχιστον 1 με λευκη σοκολάτα;

3. 14 σοκολάτες, έτσι ώστε να έχω το πολύ 4 γάλακτος, το πολύ 5 αμυγδάλου και το πολύ 6 με λευκη σοκολάτα;

1. Σε αυτή την άσκηση παρατηρούμε ότι έχουμε να επιλέξουμε από ένα σύνολο τριών στοιχείων (τα είδη της σοκολάτας) 10 αντικείμενα, όπου επιτρέπεται η επανάληψη. Συνεπώς το πλήθος των λύσεων είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των 3 στοιχείων ανά 10 με επανάληψη $=$ $\binom{3+10-1}{10} = (3+10-1)!/(2! * 10!) = 12 \cdot 11/2 = 66$.

2. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγονται αρχικά αυτές που πρέπει τουλάχιστον να υπάρχουν, που είναι 4. Οι υπόλοιπες 6 επιλέγονται από το σύνολο 3 στοιχείων, συνεπώς το πλήθος των τρόπων επιλογής είναι $\binom{3+6-1}{6} = 8!/(6! * 2!) = 28$.

Το πρόβλημα μπορεί να εκφραστεί ως εξής: έστω x_1 σοκολάτες γάλακτος, x_2 αμυγδάλου και x_3 με λευκή σοκολάτα. Μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα επιλογής σαν την εύρεση του πλήθους των λύσεων όπου $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ και $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 1$. Έστω x_i' το πλήθος των σοκολάτων πλέον των αναγκαίων. Τότε ισχύει $x_1 = x_1' + 1$, $x_2 = x_2' + 2$, $x_3 = x_3' + 1$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση προκύπτει $x_1' + x_2' + x_3' = 6$, οπότε η λύση προκύπτει όπως στο ερώτημα 1 (επιλογή 6 αντικειμένων από σύνολο τριών στοιχείων).

Το προβλήμα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των λύσεων της εξίσωσης: $x_1 + x_2 + x_3 = 14$, όπου $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 5$, $x_3 \leq 6$. Το πλήθος των λύσεων αυτής της εξίσωσης μπορεί να βρεθεί αν αφαιρεθεί από το συνολικό πλήθος των λύσεων της εξίσωσης χωρίς περιορισμούς, το πλήθος των λύσεων που τους παραβιάζουν. Οι περιορισμοί παραβιάζονται είτε όταν $x_1 \geq 5$, είτε όταν $x_2 \geq 6$, είτε όταν $x_3 \geq 7$. Ωστόσο, αυτές οι τρεις περιπτώσεις δεν είναι ξένες, δηλαδή αν τις εκφράσουμε ως σύνολα A, B και C έχουν κοινά στοιχεία.

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού προκύπτει ότι:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Σύμφωνα με το ερώτημα 2: $|A| = \binom{3+9-1}{9} = 55$, $|B| = \binom{3+8-1}{8} = 45$, $|C| = \binom{3+7-1}{7} = 36$, $|A \cap B| = \binom{3+3-1}{3} = 10$,$|A \cap C| = \binom{3+2-1}{2} = 6$, $|B \cap C| = \binom{3+1-1}{1} = 3$, $|A \cap B \cap C| = 0$.

Επομένως το πλήθος των λύσεων είναι:
$\binom{3+14-1}{14} - |A \cup B \cup C| = 120 - 55 - 45 - 36 + 10 + 6 + 3 = 3$.

Άσκηση 13

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε:

1. 40 διακεκριμένα βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια, έτσι ώστε σε κάθε ράφι να έχω 10 βιβλία (δεν μας ενδιαφέρουν οι θέσεις των βιβλίων στα ράφια);

2. 40 διακεκριμένα βιβλία σε 4 όμοια ράφια, έτσι ώστε σε κάθε ράφι να έχω 10 βιβλία (δεν μας ενδιαφέρουν οι θέσεις των βιβλίων στα ράφια);

3. 40 όμοια βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια;

4. 40 διακεκριμένα βιβλία σε 4 διακεκριμένα ράφια, αν η θέση των βιβλίων στα ράφια έχει σημασία;

1. Από τη θεωρία προκύπτει ότι το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\frac{40!}{10! \cdot 10! \cdot 10! \cdot 10!} = \frac{40!}{(10!)^4}$$

2. Δεδομένου ότι τα ράφια είναι πλέον όμοια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα διαίρεσης. Οι διαφορετικές μεταθέσεις των τεσσάρων ραφιών αντιστοιχούν στην ίδια τοποθέτηση των βιβλίων. Το πλήθος των μεταθέσεων είναι 4!, συνεπώς το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\frac{40!}{(10!)^4 \cdot 4!}$$

3. Από τη θεωρία προκύπτει ότι το πλήθος των τρόπων είναι:

$$\binom{4+40-1}{40} = 12.341$$

4. Μπορούμε να χωρίσουμε τη διαδικασία τοποθέτησης σε δύο επιμέρους διαδικασίες: α) Την τοποθέτηση των 40 βιβλίων στα 4 διακεκριμένα ράφια σαν να μη διακρίνονταν μεταξύ τους και β) τη διάταξή τους. Το πλήθος των τρόπων για την πραγματοποίηση της α) διαδικασίας υπολογίστηκε στο ερώτημα 3. Το πλήθος των διαφορετικών διατεταγμένων τοποθετήσεων των 40 βιβλίων είναι ίσο με το πλήθος των μεταθέσεών τους. Από τον κανόνα γινομένου προκύπτει ότι το συνολικό πλήθος των τρόπων είναι:

$$\binom{4+40-1}{40} \cdot 40! = 12.341 \cdot 40!$$

Ασκηση 14

Με πόσους τρόπους μπορούμε να αναθέσουμε 7 εργασίες σε 4 φοιτητές ώστε κάθε φοιτητής να έχει τουλάχιστον μία εργασία;

Η ερώτηση είναι ανάλογη με την απαρίθμηση των επί συναρτήσεων από το σύνολο των εργασιών (με 7 στοιχεία) στο σύνολο των φοιτητών (με 4 στοιχεία).

Δηλαδή, σύμφωνα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού υπάρχουν:
$4^7 - C(4,1) \cdot (4-1)^7 + C(4,2) \cdot (4-2)^7 - C(4,3)$
συναρτήσεις αυτού του τύπου.

Ασκηση 15

Πόσες μεταθέσεις των 26 γραμμάτων του Λατινικού αλφαβήτου δεν περιέχουν καμία από τις συμβολόσειρές fish, bird, ή rat;

Υπάρχουν συνολικά 26! μεταθέσεις όλου του αλφαβήτου. Για να αποκλείσουμε τις περιπτώσεις που περιέχουν τη λέξη fish, τοποθετούμε μαζί αυτά τα 4 γράμματα και τα μεταθέτουμε μαζί με τα άλλα 22 γράμματα, άρα υπάρχουν συνολικά 23! μεταθέσεις για αυτήν την επιλογή. Ομοίως υπάρχουν 23! μεταθέσεις που να περιέχουν τη λέξη bird και 24! που να περιέχουν τη λέξη rat.

Ωστόσο για να μη μετρήσουμε διπλά τις μεταθέσεις που αφαιρούμε εφαρμόζουμε την αρχή του εγκλεισμού αποκλεισμού. Έστω A, B και C τα αντίστοιχα σύνολα μεταθέσεων που δεν περιέχουν τις παραπάνω λέξεις. Τότε ισχύει: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Στην περίπτωση που οι μεταθέσεις περιέχουν και την λέξη fish και τη λέξη rat, μένουν 19 γράμματα που μαζί με τις 2 λέξεις που τοποθετούνται μαζί, συνιστούν 21 στοιχεία που μετατίθενται. Συνεπώς $|A \cap C| = 21!$.

Δεν υπάρχουν μεταθέσεις που να περιέχουν ταυτόχρονα τη λέξη bird και τη λέξη fish, ούτε τη λέξη bird και τη λέξη rat, γιατί και στις δύο περιπτώσεις οι λέξεις έχουν κοινούς χαρακτήρες που μπορούν να εμφανίζονται μόνο μία φορά (i και r αντίστοιχα). Προφανώς, δεν υπάρχουν μεταθέσεις που να περιέχουν ταυτόχρονα και τις 3 λέξεις.

Συνεπώς, $|A \cap B| = 0$, $|B \cap C| = 0$, $|A \cap B \cap C| = 0$ και το συνολικό πλήθος των μεταθέσεων είναι $26! - 23! - 23! - 24! + 21!$.

Ασκηση 16

Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 = 13$, όπου οι x_1, x_2 και x_3 είναι μη αρνητικοί ακέραιοι μικρότεροι του 6?

Αρχικά θα βρούμε πόσες είναι οι συνολικές λύσεις χωρίς περιορισμό. Αυτές είναι $C(3+13-1,13)=C(15,2)=105$. Στην συνέχεια θα βρούμε πόσες είναι οι λύσεις εφόσον 1 μεταβλητή παραβιάζει τον περιορισμό.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $x_1 \geq 6$ και θέτουμε $x_1' = x_1 - 6$. Οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις του αθροίσματος $x_1' + x_2 + x_3 = 7$ είναι $C(3+7-1,7)=C(9,2)=36$.

Βάσει συμμετρίας για κάθε μεταβλητή συμβαίνει το ίδιο και άρα υπάρχουν $3 \cdot 36 = 108$ λύσεις που να παραβιάζουν τον περιορισμό.

Έπειτα απαριθμούμε τις περιπτώσεις κατά τις οποίες 2 μεταβλητές παραβιάζουν τον περιορισμό.

Υπάρχουν $C(3,2) = 3$ τέτοιες περιπτώσεις που είναι ισοδύναμες λόγω συμμετρίας. Πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε $x_1, x_2 \geq 6$ και θέτουμε $x_1' = x_1 - 6$ και $x_2' = x_2 - 6$. Άρα θέλουμε να βρούμε τον αριθμό μη αρνητικών λύσεων για την εξίσωση $x_1' + x_2' + x_3 = 1$. Υπάρχουν $C(1+3-1, 1) = 3$ τέτοιες λύσεις και συνολικά $3 \cdot 3 = 9$ λύσεις για όλα τα ζευγάρια μεταβλητών.

Από την στιγμή που $3 \cdot 6 = 18 > 13$, δεν υπάρχει καμία λύση τέτοια ώστε και οι τρεις μεταβλητές να παραβιάζουν τον περιορισμό. Συνολικά, εφαρμόζοντας την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, (βλ. άσκηση 12) βρίσκουμε ότι υπάρχουν $105 - 108 + 9 = 6$ λύσεις που για το αρχικό μας πρόβλημα.

Ασκηση 17

Πόσοι θετικοί αριθμοί μικρότεροι από 1.000.000 έχουν ακριβώς ενα ψηφίο ίσο με 9 και το άθροισμα των ψηφίων τους ειναι ίσο με 13?

Έστω $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ τα ψηφία ενός αριθμού μικρότερου από 1.000.000. Για κάθε ψηφίο ισχύει $0 \leq d_i \leq 9$ (θεωρούμε ότι οι πρώτοι όροι μπορούν να είναι μηδενικά). Συνεπώς, αναζητούμε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 = 13$ που υπόκεινται στις προαναφερθείσες ανισότητες, όταν ένα ακριβώς ψηφίο είναι ίσο με 9.

Χωρίς βλάβη στη γενικότητα, μπορούμε να θέσουμε το $d_6 = 9$ οπότε αναζητούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 4$. Για να μετρήσουμε τον αριθμό των λύσεων, παρατηρούμε ότι η λύση αντιστοιχεί στην επιλογή 4 αντικειμένων από ένα σύνολο 5 στοιχείων με τους περιορισμούς που θέτουν οι ανισότητες, με επανάληψη. Αν δεν λάβουμε υπόψιν μας τον περιορισμό του άνω ορίου (δηλαδή ότι $d_i \leq 9$), υπάρχουν ακριβώς $C(5 + 4 - 1, 4) = C(8, 4) = 70$ λύσεις της εξίσωσης.

Δεδομένου ότι οι αριθμοί διαφοροποιούνται ανάλογα με το που βρίσκεται το 9 και ότι υπάρχουν 6 δυνατές θέσεις για αυτό, το συνολικό πλήθος των λύσεων είναι $6 \cdot 70 = 420$.

Χρειάζεται να αφαιρέσουμε τα ενδεχόμενα για τα οποία $\exists i$ τέτοιο ώστε $d_i > 9$. Εφόσον το άθροισμα είναι ίσο με 4, δεν υπάρχει κανένα τέτοιο ενδεχόμενο. Συνεπώς, υπάρχουν ακριβώς 420 τέτοιοι θετικοί αριθμοί.

Ασκηση 18

Πόσοι θετικοί ακέραιοι μικροτεροι ή ίσοι με 1000 δεν διαιρούνται από το 4, το 6 και το 9;

Έστω A το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το 4, B το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το 6 και C το σύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το 9. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο θα πρέπει να αφαιρέσουμε από το συνολικό πλήθος τον πληθάριθμο της ένωσης των παραπάνω συνόλων $|A \cup B \cup C|$.

Εφαρμόζουμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Συνεπώς, και δεδομένου ότι το πλήθος των θετικών ακέραιων αριθμών που διαιρούνται με ακέραιο d εντός του διαστήματος $[1, n]$ είναι $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ το πλήθος είναι ίσο με:

$$1000 - \lfloor \frac{1000}{4} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{9} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{12} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{36} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{18} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{36} \rfloor = 445.$$

Για την εύρεση του πληθάριθμου των τομών βασιζόμαστε στην ιδιότητα ότι ένας ακέραιος διαιρείται από δύο άλλους ακέραιους αν και μονο αν διαιρείται από το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιό τους.