A1.

Αν [illegible] το δυναμικό στο σημείο O:

$V_0 = k_e \int \frac{dq}{r} = \frac{k_e Q}{r} = k_e \frac{q}{R} = -k_e \frac{|q|}{R}$ (θεωρώ [illegible] $V_\infty = 0$)

A2 Να υπολογίσετε q_2/q_1

Το πλήθος των δυναμικών γραμμών είναι ανάλογο του φορτίου: $q = \overset{\text{πλήθος δυν. γραμμών}}{n} \, c$ (σταθερά αναλογίας)

Άρα

$$\left.\begin{aligned} q_2 &= c\,n_2 = c \cdot 18 \\ q_1 &= c\,n_1 = c \cdot 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = \frac{18}{6} = 3$$

Άρα q_2 θετικό, q_1 αρνητικό με $q_2 = 3q_1$

A3 Να υπολογιστεί η [ροή από] η επιφάνεια S_2 και S_1 επίπεδη) όταν $\delta \to 0$

Θεωρώ ολόκληρη τη σφαίρα, που θα περιέχει ολόκληρο φορτίο Q. Από Ν.G.:

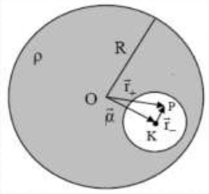
$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{q_{\epsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi_\Sigma = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ ① η ροή από την επιφάνεια όλης της σφαίρας

Εύκολα συμπεραίνουμε για $\delta \to 0$: $\Phi_\Sigma = \Phi_{S_2} + \Phi_{S_2'} = 2\Phi_{S_2} \overset{①}{\Rightarrow} \Phi_{S_2} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}$ ②

Για την κλειστή επιφάνεια του αρχικού ημισφαιρίου, αφού δεν περιέχει φορτίο, θα ισχύει: $\Phi_{S_1+S_2} = 0 = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2}$ ③

$③ \overset{(2)}{\Rightarrow} \Phi_{S_1} = -\Phi_{S_2} = -\frac{Q}{2\varepsilon_0}$

A4. Σφαίρα ακτίνας R με κέντρο στο O είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με πυκνότητα φορτίου ρ και έχει αφόρτιστη σφαιρική κοιλότητα, της οποίας το κέντρο βρίσκεται σε απόσταση α από το O. Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της κοιλότητας.



Δίνεται: $\vec{E} = k_e \frac{Q}{R^3} r \hat{r}$, ① Q το συνολικό φορτίο της σφαίρας (O,R) και $r \leq R$

Το ηλεκτρ. πεδίο, που δημιουργείται στο σημείο P, θεωρούμε ότι οφείλεται στο πεδίο στο εσωτερικό μιας ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας με πυκνότητα φορτίου ρ και μιας σφαίρας φορτισμένης με πυκνότητα φορτίου −ρ, στη θέση της κοιλότητας.

Από ① $\Rightarrow \vec{E} = k_e \frac{Q}{R^3} \vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{r} = \frac{\overset{=\rho}{Q}}{\varepsilon_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot 3} \vec{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}$ ②

$$\left.\begin{aligned} &\text{Σφαίρα με } \rho: \ \vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_+ \\ &\text{-//- με } -\rho: \ \vec{E}_- = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}_- \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{E}_P = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \Rightarrow \vec{E}_P = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$ ③

Παραλλαγή: Δίνεται άπειρη επιφάνεια με επιφ. πυκν. φορτίου σ, που φέρει μια κυκλική οπή ακτίνας R. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρ. πεδίου στο P.

Το πεδίο προκύπτει από το ισοδύναμο πρόβλημα, όπου η οπή θεωρείται κυκλικός δίσκος (O,R) με πυκνότητα φορτίου −σ.

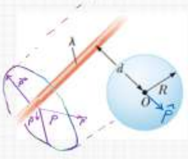
Από το σχήμα εύκολα βλέπουμε ότι: $\vec{\alpha} + \vec{r}_- = \vec{r}_+$ ④. Οπότε:

③④ $\Rightarrow \vec{E}_P = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{\alpha}$. Αφού το $\vec{\alpha}$ είναι σταθερό (η θέση της δοθείσης κοιλότητας), καταλαβαίνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_P$ στο εσωτερικό της κοιλότητας είναι ομογενές.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με εφαρμογή του N. Gauss.

Τι συμβαίνει όταν η σφαίρα και η κοιλότητα είναι ομόκεντρες: $\vec{\alpha} = 0$ και $\vec{E}_P = 0$ (αναμενόμενο λόγω συμμετρίας)

A5. Να υπολογιστεί η ένταση του ηλ. πεδίου που δημιουργεί η άπειρη γραμμική κατανομή φορτίου λ στο O. Στη συνέχεια να υπολογιστεί η ροή δια μέσου της σφαιρικής επιφάνειας (O,R) για d>R και d=0



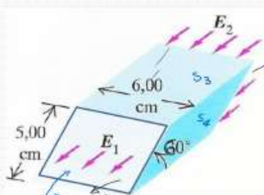
Η ένταση του ηλ. πεδίου που δημιουργεί μια άπειρη γραμμ. κατανομή φορτίου έχει κυλινδρική συμμετρία και δίνεται από τη σχέση: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \rho} \hat{\rho}$ ①, όπου ρ η απόσταση από την κατανομή φορτίου και $\hat{\rho}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του ρ.

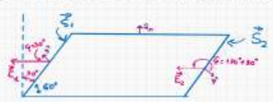
Άρα στο O: $\vec{E}_0 \overset{①}{=} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d} \hat{\rho}$

d>R: από N.G: $\Phi_\Sigma = \frac{q_{\epsilon\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi_\Sigma = 0$ [SI]

d=0 -//- $\Phi_\Sigma = \frac{q_{\epsilon\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda 2R}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi_\Sigma = 2\frac{R\lambda}{\varepsilon_0}$

A6 Αν E1= 10 N/C kai E2=5 N/C, Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή από την κλειστη επιφάνεια :





$\Phi_\Sigma = \Phi_{S_1} + \Phi_{S_2} + \Phi_{S_3} + \Phi_{S_4} + \Phi_{S_5} + \Phi_{S_6}$ ①

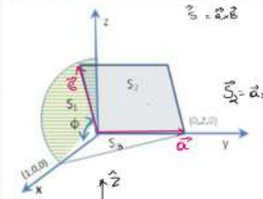
$\Phi_{S_3} = \Phi_{S_4} = \Phi_{S_5} = \Phi_{S_6} = 0$

$\Phi_{S_1} = \vec{E}_1 \cdot \vec{S}_1 = E_1 S_1 \cos 30^\circ = 10 (5 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-2}) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left[\frac{N}{C} m^2\right]$

$\Phi_{S_2} = \vec{E}_2 \cdot \vec{S}_2 = E_2 S_2 \cos 210^\circ = 5 (5 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-2}) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \left[\frac{N}{C} m^2\right]$

① $\Rightarrow \Phi_\Sigma = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left[\frac{N}{C} m^2\right]$

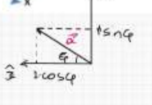
A7. $\vec{E} = 5\hat{x} + 4/\pi\hat{y} + 2\hat{z}$. Να υπολογιστεί η ροη από τις Si



$\vec{S}_1 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi 1^2}{4} \hat{y}$ [SI]

$\vec{S}_3 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2 \ \hat{z}$ [SI]

$\vec{S}_2 = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 2 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = 2\sin\theta \, \hat{x} - 2\cos\theta \, \hat{z}$ [SI]



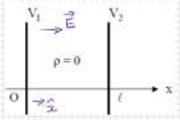
Αλλά $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$ οπότε:

$\vec{S}_1$: $\Phi_{S_1} = \frac{4}{\pi} \frac{\pi}{4} = 1$ [SI]

$\vec{S}_2$: $\Phi_{S_2} = 10\sin\theta - 4\cos\theta$ [SI]

S_3: $\Phi_{S_3} = 2$ [SI] $\quad$ [SI] $= \frac{N}{C} m^2$ ή $V m$

A1. Δυο παράλληλες άπειρες μεταλλικές πλάκες, που απέχουν απόσταση L μεταξύ τους είναι κάθετες στον άξονα x και διατηρούνται σε δυναμικό V1 και V2 αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το δυναμικό V(x) στο χώρο μεταξύ των πλακών καθώς και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, αν στο χώρο μεταξύ των πλακών δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία.



Το ηλ. πεδίο $\vec{E}$ μιας άπειρης πλάκας είναι ομογενές και $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$ όπου $\hat{n} \perp$ στην επιφάνεια και σ η επιφ. πυκνότητα φορτίου. Άρα στη περίπτωση μας η ένταση του ηλ. πεδίου ανάμεσα στις πλάκες θα είναι: $\vec{E} = \left(\frac{\pm\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\pm\sigma_2}{2\varepsilon_0}\right)\hat{x} = E_0\hat{x}$ (1) με E_0 σταθ.

Όμως: $\vec{E} = -\nabla V(x,y,z) \overset{(1)}{=} -\frac{\partial V(x)}{\partial x}\hat{x} = E_0\hat{x} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -E_0 \Rightarrow V(x) = -E_0 x + C$ (2)

Αλλά $V(x=0) = V_1 \overset{(2)}{\Rightarrow} C = V_1$ και $V(x=\ell) = V_2 = -E_0\ell + V_1 \Rightarrow E_0 = \frac{V_1 - V_2}{\ell}$

Άρα το δυναμικό μεταξύ των πλακών είναι: $V(x) = \frac{V_1 - V_2}{\ell}x + V_1$

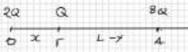
και η ένταση του ηλ. πεδίου: $\vec{E} = E_0\hat{x} = \frac{V_1 - V_2}{\ell}\hat{x}$

A2. Τρία σημειακά φορτία Q, 2Q, 8Q πρέπει να τοποθετηθούν κατά μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, μήκους L=9m. Σε ποιές θέσεις πρέπει να τοποθετηθούν, έτσι ώστε η δυναμική ενέργεια του συστήματος να είναι ελάχιστη; Υπολογίστε την ελάχιστη αυτή ενέργεια αν Q = 1 μC.

φέρνω το 8Q από το ∞: $W_{\infty \to A} = 8Q(V_A - V_\infty)$ — $Q: \infty \to \Gamma$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι: $U = k_e\frac{2Q \cdot 8Q}{L} + \left(k_e\frac{2Q}{x} + k_e\frac{8Q}{L-x}\right)Q \Rightarrow U'(x) = 0 \Rightarrow x_m$

$U''(x_m) \gtrless 0 \Rightarrow x_m$ ελάχ. / x_m μεγ.



$U(x) = k_e\frac{16Q^2}{L} + k_e 2Q^2\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{L-x}\right)$

$U(x) = k_e\frac{2Q \cdot 8Q}{L} + Q(V_\Gamma - V_\infty) = k_e\frac{2Q \cdot 8Q}{L} + Q\left(\frac{k_e 2Q}{x} + k_e\frac{8Q}{L-x}\right) = k_e\frac{16Q^2}{L} + k_e\frac{2Q^2}{x} + k_e\frac{8Q^2}{L-x}$ (1)

$V_\infty = 0$

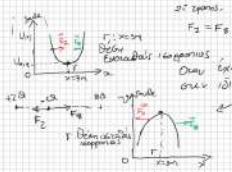
1ος τρόπος: $U(x) = \min \Rightarrow U'(x) = 0,\ U''(x_m) > 0$

2ος τρόπος: Στη θέση που έχουμε U ελάχιστη, το Q από τα άλλα φορτία ισορροπεί!

$F_2 = F_8 \Leftrightarrow k_e\frac{2Q^2}{x^2} - \frac{k_e 8Q^2}{(L-x)^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{4}{(L-x)^2} = 0 \Rightarrow (L-x)^2 - 4x^2 = 0 \Rightarrow (L-3x)(L+x) = 0$ (1)

(1) ⇒ $x = L/3$ ή $x = -L$ (απορρίπτεται): Το Q πρέπει θα τοποθετηθεί σε απόσταση $x = 3m$ από το 2Q

Όταν έχω αντί για Q το −Q καταλήγω στην ίδια εξίσωση (1) — όμως



Η τιμή της ελάχιστης ενέργειας δίνεται από την (1) για $x = 3m$ και $Q = 10^{-6}C$:

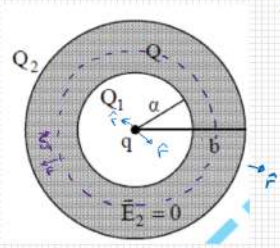
$U(x=3m) = k_e\frac{16Q^2}{9} + k_e\frac{2Q^2}{3} + k_e\frac{8Q^2}{6} = \ldots$

A3 Ένας σφαιρικός αγωγός εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής b είναι φορτισμένος με ηλεκτρικό φορτίο Q, ενώ στο κέντρο του σφαιρικού αγωγού έχει τοποθετηθεί σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q. Να υπολογιστούν :

α) Η τελική κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου Q στο σφαιρικό αγώγιμο φλοιό.

β) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού στο χώρο.

γ) Το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο χώρο.



α) Θεωρώ την επιφάνεια Gauss S_1. Επειδή $\oint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_1 + q}{\varepsilon_0}$ (1)

και $\vec{E} = 0$ (εσωτερικό αγωγού) (1) $\Rightarrow Q_1 + q = 0 \Rightarrow Q_1 = -q$ (2)

Επειδή: $Q_2 + Q_1 = Q$ (αρχή διατήρησης φορτίου) $\overset{(2)}{\Rightarrow} Q_2 = Q + q$ (3)

β) • $0 < r < a$

$\vec{E}_1 = k_e\frac{q}{r^2}\hat{r}$ (πεδίο σημειακού φορτίου q)

• $a < r < b$

Μέσα στον αγωγό $\vec{E}_2 = 0$, για $r = a$: $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(\hat{r}) \overset{(2)}{=} \frac{q}{4\pi a^2}\cdot\frac{1}{\varepsilon_0}$ (ηλεκτρ. πεδίο στην εσωτερική επιφάνεια του αγώγιμου φλοιού), $\sigma < 0$

• $r > b$

$\vec{E}_3 = k_e\frac{Q+q}{r^2}\hat{r}$, για $r = b$: $\vec{E}_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q_2}{4\pi b^2}\hat{r} \overset{(3)}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{b^2}\hat{r}$

γ) Το δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου: $\vec{r} = r\hat{r}$: $V_r - V_\infty = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r}$ με $V_\infty = 0$

$\left(-\int_\infty^r\frac{dr}{r^2} = +\frac{1}{r}\Big|_\infty^r = \frac{1}{r}\right)$

• $r \geq b$: $\vec{E} = \vec{E}_3$ και

$V(r) = k_e\frac{Q+q}{r}$

Το δυναμικό στην επιφάνεια του αγώγιμου φλοιού $r = b$: $V(r=b) = k_e\frac{Q+q}{b}$

• $a \leq r \leq b$ $V(r) = k_e\frac{Q+q}{b}$ αφού κάθε σημείο ενός αγωγού είναι στο ίδιο δυναμικό με την επιφάνεια

• $r \leq a$

$V_r - V_\infty = -\int_\infty^r E\,dr = -\int_\infty^b k\frac{Q+q}{r^2}dr - \int_b^a 0\,dr - \int_a^r k_e\frac{q}{r^2}dr \Rightarrow$

$V_r = k_e\frac{Q+q}{b} + 0 + k_e\frac{q}{r}\Big|_a^r = k_e\frac{Q+q}{b} + k_e q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$

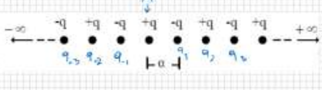
A4. Έστω σύστημα απείρων φορτίων +q και -q τοποθετημένων εναλλάξ σε σταθερή απόσταση α. Να υπολογιστεί η ηλεκτροστατική ενέργεια ενός θετικού φορτίου +q.

Δίνεται το ανάπτυγμα $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

$+qV_A$ ← ηλ. δυναμικό στο A ενώ $V_\infty = 0$

$W_{\infty \to A} = U_A = +q\left(\cdots k_e\frac{q_{-3}}{3a} + k_e\frac{q_{-2}}{2a} + k_e\frac{q_{-1}}{a} + k_e\frac{q_1}{a} + k_e\frac{q_2}{2a} + \cdots\right) \overset{q_{-i} = q_i = (-1)^i q}{=}$

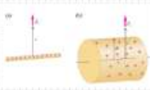
$= +q\frac{k_e}{a}q\left(\cdots -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots\right) = \frac{k_e q^2}{a}\left(-2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \ldots\right) \Rightarrow$

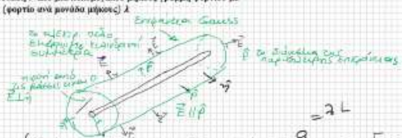


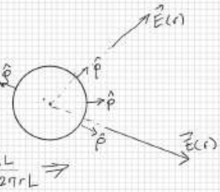
$U_A = -2\frac{k_e q^2}{a}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right)}_{\ln(1+1)} \overset{x=1}{=} -2\ln 2\, k_e\frac{q^2}{a}$

Το "-" στο αποτέλεσμα δείχνει ότι το φορτίο έρχεται "αυθόρμητα" στη θέση A, δηλαδή το σύστημα πεδίο-φορτίο χάνει ενέργεια

A1. Να βρείτε το δυναμικό σε απόσταση r από μια πολύμεγάλου μήκους γραμμή φορτίου με γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους) λ







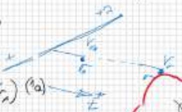
$$N G \quad \int \vec{E}\, d\vec{A} = \int E\, dA = E\int dA = E 2\pi r L = \frac{q}{\varepsilon_0}\ (= \lambda L) \Rightarrow E = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0 2\pi r L} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\rho}$$

$$\underline{\Delta V} \stackrel{\Delta}{=} -\int_{r_A}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{r} \stackrel{d\vec{r}=dr\hat{\rho}}{=} -\int_{r_A}^{r} E\, dr = -\int_{r_A}^{r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_{r_A}^{r} \Rightarrow V_r - V_{r_A} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r - \ln r_A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_r = V(r) = V_A + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_A}\right) \quad (1)$$

Μπορούμε να θέσουμε $V_A = 0\,[V]$ (ή αυθαίρετα) και θέλουμε όπως η ① γίνεται $V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{r_A}\right)$ (1a)



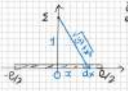
για $y=r_A$: $V_{r_A} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\ell}{r_A}$

$V_{\ell\gg y}$: για $y=r$: $V_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\ell}{r}$

Άρα: $V_r - V_{r_A} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{\ell}{r} - \ln\frac{\ell}{r_A}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\ell/r}{\ell/r_A} = \dots$

παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ηλ. δυναμικό σε απόσταση από λεπτή ράβδο μήκους ℓ και κατά μήκος της μεσοκαθέτου της. $\lambda = \frac{Q}{\ell}$ η γραμμ. πυκν. φορτίου της ράβδου

Δίνεται: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)+c$



Το δυναμικό στο σημείο Σ, από το στοιχειώδες φορτίο dq: $dV = k_e\frac{dq}{\sqrt{y^2+x^2}} = k_e\frac{\lambda dx}{\sqrt{y^2+x^2}}$ (2)

το φορτίο στοιχ. μήκους dx της ράβδου θα είναι: $dq = \lambda dx$

Άρα $V \stackrel{(2)}{=} \int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{k_e\lambda dx}{\sqrt{y^2+x^2}} = k_e\lambda\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{dx}{\sqrt{y^2+x^2}} = k_e\lambda\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = k_e\lambda\ln\frac{\ell/2+\sqrt{\ell^2/4+y^2}}{-\ell/2+\sqrt{\ell^2/4+y^2}}$ ③ $\Big\} \Rightarrow$

Τι γίνεται αν $\ell\to\infty$: Αν $\ell \gg y$ κάνουμε χρήση της προσέγγισης $\sqrt{1+x^2} \stackrel{x\ll 1}{\approx} 1+\frac{1}{2}x^2$

$$V_{\ell\gg y} = k_e\lambda\ln\frac{\frac{\ell}{2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{2y}{\ell}\right)^2}\right)}{\frac{\ell}{2}\left(-1+\sqrt{1+\left(\frac{2y}{\ell}\right)^2}\right)} = k_e\lambda\ln\frac{2+\frac{1}{2}\frac{4y^2}{\ell^2}}{\frac{1}{2}\frac{4y^2}{\ell^2}} \approx k_e\lambda\ln\frac{\ell^2+y^2}{y^2} \stackrel{\ell\to\infty}{=} k_e\lambda\ln\frac{\ell^2}{y^2} \Rightarrow V_{\ell\gg y} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\lambda\ln\frac{\ell}{y} \quad (1\beta)$$

(1a) και (1β) είναι ισοδύναμες!

A2 α) Βρείτε τη διαφορά δυναμικού ΔVe που απαιτείται για να σταματήσει την κίνηση ενός ηλεκτρονίου (ονομάζεται «δυναμικό ακινητοποίησης»), το οποίο κινείται με αρχική ταχύτητα μέτρου 2,85×10 E7m/s. β) Για ένα πρωτόνιο που κινείται με ταχύτητα ίδιου μέτρου απαιτείται μεγαλύτερη ή μικρότερη διαφορά δυναμικού;

Έστω ότι το e εισέρχεται στο σημείο A του πεδίου όπου το δυναμικό είναι V_A και ακινητοποιείται στο σημείο B με δυναμικό V_B. Από ΑΔΕ έχω

Δυναμική ενέργεια: $K_A + U_A = K_B + U_B \Rightarrow \frac{1}{2}m_e v_e^2 + q_e V_A = 0 + q_e V_B \Rightarrow \frac{1}{2}m_e v_e^2 = q_e(V_B - V_A)$ ①

Από την ① επειδή $q_e<0$ πρέπει $V_B<V_A$. Άρα για να ακινητοποιηθεί το e πρέπει να εφαρμοστεί ηλ. πεδίο με ίδια φορά με την ταχύτητα, ενώ η απαραίτητη διαφορά δυναμικού θα είναι από ① $\Rightarrow |\Delta V_e| = \frac{m_e v_e^2}{2q_e}$ ② $= \dots$

Για το πρωτόνιο, επειδή $m_p = 1836\, m_e$ από ② έχουμε:

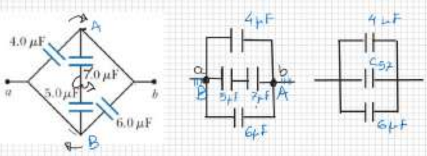
$m_p = 1836\, m_e$

$v_p = v_e$

$$|\Delta V_p| = \frac{1}{2}\,1836\,\frac{m_e v_e^2}{q_e} = 1836|\Delta V_e|$$

Προφανώς η ένταση του ηλ. πεδίου πρέπει να είναι αντιπαράλληλη της ταχύτητας του πρωτονίου.

A3 Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των άκρων a και b την συνδεσμολογίας πυκνωτών

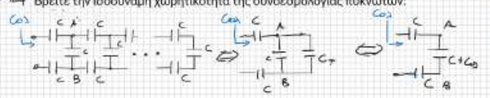


$$\frac{1}{C_{57}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}[\mu F^{-1}] \Rightarrow$$

$$C_{57} = \frac{35}{12}[\mu F]$$

Συνεπώς: $C_{ολ} = 6+4+\frac{35}{12} = \frac{155}{12}[\mu F]$

A4 Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα της συνδεσμολογίας πυκνωτών:



Θεωρώ το τμήμα του κυκλώματος αριστερά των σημείων A και B και το τμήμα δεξιά τους, που έστω ότι έχει χωρητικότητα C_T. Το τμήμα αυτό όμως είναι ίσο μέτρο αρχικό αφού ο αριθμός των πυκνωτών $\to\infty$. Άρα $C_T = C_{ολ}$ ①

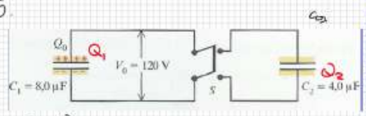
Συνεπώς: $\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C+C_T} + \frac{1}{C} \stackrel{①}{\Rightarrow} \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{2}{C} + \frac{1}{C+C_{ολ}} \Rightarrow$

$\frac{1}{C_{ολ}} - \frac{1}{C+C_{ολ}} = \frac{2}{C} \Rightarrow \frac{C}{(C_{ολ}+C)C_{ολ}} = \frac{2}{C} \Rightarrow C^2 = 2C_{ολ}(C+C_{ολ}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2C_{ολ}^2 + 2CC_{ολ} - C^2 = 0$ ②, που είναι μια εξίσωση 2ου βαθμού ως προς $C_{ολ}$, με $\Delta = 4C^2 + 8C^2 = 12C^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}C$

και ρίζες: $C_{ολ_{1,2}} = \frac{-2C\pm\sqrt{\Delta}}{4} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{-2C+2\sqrt{3}C}{4} \Rightarrow \boxed{C_{ολ} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}C}$ Η αρνητική τιμή απορρίπτεται.

A5



Φορτίζουμε τον πυκνωτή C_1 συνδέοντας τον με πηγή διαφοράς δυναμικού V_0, η οποία δεν είναι σχεδιασμένη. Να βρεθούν:
Α) το φορτίο του πυκνωτή C_1
Β) η ενέργεια που αποθηκεύτηκε στον πυκνωτή
Γ) το φορτίο σε κάθε πυκνωτή αφού κλείσουμε το διακόπτη S
Δ) η ολική ενέργεια του συστήματος μετά το κλείσιμο του διακόπτη S

$C = \frac{Q}{V}$

C_1: $C_1 = \frac{Q_0}{V_0} \Rightarrow Q_0 = C_1 V_0 \Rightarrow Q_0 = 960[\mu C]$

ενέργεια που αποθηκεύεται: $U_0 = \frac{1}{2}Q_0 V_0 = 960\cdot 120\, 10^{-6}\,[J]$ ①

Όταν κλείνει ο διακόπτης ο C_1 εκφορτίζεται και μέρος του φορτίου του (Q_0) μεταφέρεται στον C_2. Η διαδικασία σταματά όταν οι δύο πυκνωτές αποκτήσουν το ίδιο δυναμικό V, και φορτία Q_1, Q_2 αντίστοιχα

C_1: Q_1

C_2: Q_2

κοινό δυναμικό V:

$$\left.\begin{aligned} ΑΔΦ:\ & Q_0 = Q_1 + Q_2 \\ & Q_1 = C_1 V \\ & Q_2 = C_2 V \end{aligned}\right\} \Rightarrow Q_0 = C_1 V + C_2 V \Rightarrow V = \frac{Q_0}{C_1+C_2} = \frac{960\,\mu C}{12\,\mu F} = 80[V]$$

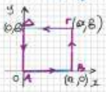
Οπότε: $Q_1 = 8\,\mu F\cdot 80\,V = 640[\mu C]$ και $Q_2 = 4\,\mu F\, 80\,V = 320[\mu C]$

Η συνολική ενέργεια του συστήματος των δύο πυκνωτών θα είναι $U_Σ$: $U_Σ = \frac{1}{2}Q_1 V + \frac{1}{2}Q_2 V = \frac{1}{2}(Q_1+Q_2)V = \frac{1}{2}\,960\cdot 80\, 10^{-6}\,[J]$ ②

Από τις ① και ② βλέπουμε ότι $U_0 > U_Σ$. Δηλαδή η τελική ενέργεια είναι μικρότερη από την αρχική!

Η ενέργεια που "χάθηκε", έγινε ενέργεια σπινθήρων κατά το κλείσιμο του διακόπτη και θερμότητα.

A6 Να εξετάσετε αν το ηλ. πεδίο $\vec{E} = y\hat{x} - x\hat{y}$ είναι συντηρητικό



Θεωρώ την κλειστή διαδρομή του σχήματος. Αν το $\vec{E}$ είναι συντηρητικό πρέπει $I = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ ①

Όμως $I = \oint_{ΑΒΓΔ}\vec{E}\cdot(dx\hat{x}+dy\hat{y}) = \oint_{ΑΒΓΔ}(y\,dx - x\,dy) = \int_{ΑΒ}(y\,dx - x\,dy) + \int_{ΒΓ}(y\,dx - x\,dy) + \int_{ΓΔ}(β\,dx - x\,dy) + \int_{ΔΑ}(y\,dx - x\,dy) =$

$= \int_{ΑΒ}y\,dx - \int_{ΒΓ}x\,dy + \int_{ΓΔ}y\,dx - \int_{ΔΑ}x\,dy = \int_0^a 0\,dx - \int_0^β a\,dy + \int_a^0 β\,dx - \int_β^0 0\,dy = -2aβ \neq 0$

Άρα το $\vec{E}$ είναι μη συντηρητικό.

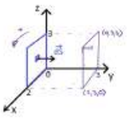
2ος τρόπος: Έστω ότι το $\vec{E}$ είναι συντηρητικό. Τότε υπάρχει συνάρτηση δυναμικού $V(x,y)$: $\vec{E}(x,y) = -\nabla V(x,y) \Rightarrow$

$-\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} = y\hat{x} - x\hat{y} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -y$ (α), $\frac{\partial V}{\partial y} = x$ (β)

(α) $\frac{\partial V}{\partial x} = -y \Rightarrow V(x,y) = -yx + C(y)$ (γ) και (β) $\stackrel{(γ)}{\Rightarrow} \frac{\partial}{\partial y}\left[-yx + C(y)\right] = x \Rightarrow -x + \frac{\partial C(y)}{\partial y} = x \Rightarrow \frac{\partial C(y)}{\partial y} = 2x$ άτοπο

3ος τρόπος: $\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & 0\end{vmatrix} = -2\hat{z} \neq 0$ άρα $\vec{E}$ μη συντηρητικό.

Να βρεθεί το συνολικό ρεύμα που διαρρέει την επιφάνεια του σχήματος όταν η πυκνότητα $\vec{J} = az\hat{x} + bxy\hat{y}$ με $[A/m^2]$



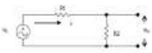
$I = \vec{J}\cdot\vec{S} = (az\hat{x} + bxy\hat{y})\cdot 6\hat{y} = 6bxy\ [A]$

Για S κάθε $y=0 \Rightarrow I = 0\ [A]$

Αν S_2 $y=3$: $\Rightarrow I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}\cdot[dx\,dz]\hat{y} = \int_S bxy\,dx\,dz \overset{y=3}{=} 3b\int_S x\,dx\,dz \Rightarrow$

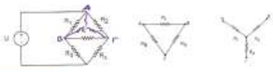
$I = 3b\int_0^3\int_0^2 x\,dx\,dz = 3b\int_0^3 dz\int_0^2 x\,dx = 3b\,z\Big|_0^3 \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2 = 3b\,3\cdot 2\,[A] \Rightarrow I = 18b\ [A]$

Ηλεκτρικά κυκλώματα: $v(t) = i(t)R$, $q(t) = Cv(t)$, $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt}$, $v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$



Διαιρέτης τάσης:
$v_o = \frac{R_2}{R_1+R_2}v_i$

- Σε σειρά σύνδεση: ίδιο ρεύμα ή φορτίο
- Σε παράλληλη σύνδεση: ίδια διαφ. δυναμικού

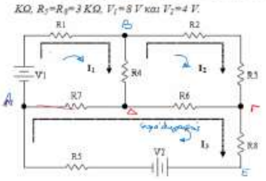


$R_1 = R_B R_\Gamma / (R_A + R_B + R_\Gamma)$ $\quad R_A = (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1) / R_1$

$R_2 = R_A R_\Gamma / (R_A + R_B + R_\Gamma)$ $\quad R_B = (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1) / R_2$

$R_3 = R_B R_A / (R_A + R_B + R_\Gamma)$ $\quad R_\Gamma = (R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1) / R_3$

Άσκηση 2 *Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις R_1, R_2, R_4, R_5, R_6 και R_7. Δίνεται ότι $R_1=R_3=R_7=2$ KΩ, $R_2=R_4=R_6=1$ KΩ, $R_5=R_8=3$ KΩ, $V_1=8$ V και $V_2=4$ V.*

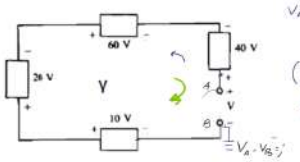


αρ. κόμβων: 4
αρ. κλάδων: 6
$6-(4-1) = 3$ άρα για να εφαρμόσω τη Μέθοδο των βρόχων θα χρειαστώ 3 βρόχους. Το (Σ) για τα ρεύματα I_1, I_2, I_3 σε κάθε βρόχο έχω ότι έχουν τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Τότε:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (R_1+R_4+R_7) & -R_4 & -R_7 \\ -R_4 & (R_2+R_3+R_6+R_4) & -R_6 \\ -R_7 & -R_6 & (R_5+R_8+R_7+R_6) \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} +V_1 \\ 0 \\ -V_2 \end{bmatrix} \quad (\Sigma)$$

$$(\Sigma) \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{οπότε: } I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}} = \dots,\ I_2 = \dots\ I_3 = \dots$$

I_1 ρεύμα που διαρρέει την R_1, $I_1 - I_3$ ρεύμα που διαρρέει την R_7, $I_1 - I_2$ ρεύμα που διαρρέει την R_4 κ.λπ.



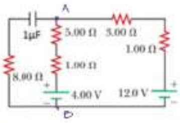
$V_A - 40 + 60 + 20 - 10 = V_B \Rightarrow$

$V_A - V_B = -30$ V

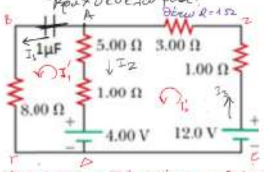
$(V_B - V_A) + 10 - 20 - 60 + 40 = 0 \Rightarrow$

$V_B - V_A = 30\text{V} \Rightarrow$
$\Rightarrow V_A - V_B = -30\text{V}$

Το κύκλωμα που φαίνεται στο διπλανό Σχήμα είναι συνδεδεμένο για 2min. (α) Προσδιορίστε το ρεύμα σε κάθε κλάδο του κυκλώματος τη χρονική στιγμή t=0 s (β) Θεωρώντας ότι μετά από 1 min, ο πυκνωτής έχει φορτιστεί πλήρως, υπολογίστε την ενέργεια, που παρείχε κάθε μπαταρία το τελευταίο min. (γ) Υπολογίστε το φορτίο του πυκνωτή.



για $t=0$ s ο πυκνωτής είναι βραχυκυκλωμένος!



κόμβος A: $I_3 - I_1 - I_2 = 0$ (1)
(ΑΒΓΔΑ): $4 + RI_2 + 5RI_2 - 8RI_1 = 0$
(ΑΔΕΖΑ): $4 + RI_2 + 5RI_2 + 3RI_3 + RI_3 - 12 = 0$
$\Bigg\} \overset{R=1\,\Omega}{\Rightarrow}$

$\left.\begin{array}{l} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ -8I_1 + 6I_2 = -4 \\ +6I_2 + 4I_3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -14I_1 + 6I_3 = -4 \\ -6I_1 + 10I_3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -14I_1 + 6I_3 = -4 \\ 6I_1 - 10I_3 = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_3 = \frac{17}{13}\text{A} \\ I_1 = \frac{11}{13}\text{A} \end{array}$, (1) $\Rightarrow I_2 = \frac{6}{13}$ A

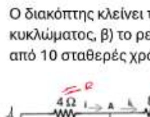
Μέθοδος βρόχων: αριθμός εξισώσεων (βρόχων) = αριθμός κλάδων − (αριθμός κόμβων − 1) $= 3-(2-1) = 2$, Αν I_1', I_2' τα ρεύματα σε κάθε βρόχο, τότε: ο πίνακας του (Σ) για το κύκλωμα είναι:

$$\begin{bmatrix} (8R+R+5R) & -(5R+R) \\ -(5R+R) & (3R+5R+R+R) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4+12 \end{bmatrix} \overset{R=1\Omega}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1' = \dots\ I_1 = 11/13\text{ A} \\ I_2' = \dots\ I_3 = 17/13\text{ A} \end{array}$$

και το ρεύμα στον κλάδο ΑΔ $I_2 = I_2' - I_1' = \frac{6}{13}$ A

Σημείωση: Πήραμε τα ρεύματα κάθε βρόχου αριστερόστροφα. Αυτό δεν επηρεάζει την εφαρμογή της ΜΕΒ. Η σύμβαση για τα πρόσημα παραμένει η ίδια.

B) Όταν ο πυκνωτής φορτιστεί, συμπεριφέρεται σαν ανοιχτός διακόπτης

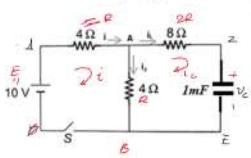


Έχουμε επομένως μόνο τον βρόχο ΑΖΕΔ που τώρα θα διαρρέεται από ρεύμα I
Θα ισχύει: $-10RI = -8 \overset{R=1\Omega}{\Rightarrow} I = 4/5$ A
Ισχύς της μπαταρίας 12 V: $P_{E_1} = E_1 I = 12\frac{4}{5}$ [W]. Η ενέργεια που αποδίδει στο κύκλωμα: $U_{E_1} = P_{E_1}\cdot t \overset{t=60s}{\Rightarrow} U_{E_1} = 12\frac{4}{5}60 = 576$ [J]
Η μπαταρία $E_2 = 4$V διαρρέεται από ρεύμα από το θετικό στον αρνητικό πόλο, άρα $P_{E_2} = \Delta V\cdot I = (-4)\frac{4}{5} = -\frac{16}{5}$ W
και η ενέργεια $U_{E_2} = P_{E_2}\cdot t \overset{t=60s}{=} -\frac{16}{5}60 = -192$ [J]

Η ενέργεια που καταναλώνεται στις αντιστάσεις θα είναι: $U_{R_0} = -I^2 R_0 t \overset{t=60s}{\Rightarrow} U_{R_0} = \frac{-16}{25}10\cdot 60 = -384$ [J]
Εύκολα διαπιστώνεται ότι: $U_{E_1} = U_{E_2} + U_{R_0}$, δηλ. η ενέργεια της μπαταρίας E_1 καταναλώνεται στις αντιστάσεις και στην "φόρτιση" της E_2

γ) Όταν ο C φορτιστεί πλήρως, ο κλάδος που τον περιέχει δεν θα διαρρέεται από ρεύμα και η διαφορά δυναμικού στα άκρα του θα είναι $V_C = V_\Delta - V_A$ (7) όμως: $V_\Delta + E_2 + I(1+5) = V_A \Rightarrow V_\Delta - V_A = \frac{44}{5}$[V]
Άρα το φορτίο Q του πυκνωτή θα είναι: $Q = C|V_\Delta - V_A| = 8{,}8\ \mu C$

Ο διακόπτης κλείνει τη στιγμή t=0, Αν R=4Ω, E=10V και C=1mF, να υπολογίσετε α) τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος, β) το ρεύμα ic συναρτήσει του χρόνου γ) το ρεύμα που διαρρέει το διακόπτη και δ) το ρεύμα μετά από 10 σταθερές χρόνου



Όσο φορτίζει ο πυκνωτής η τάση στα άκρα του θα αυξάνεται, θα είναι δε συνάρτηση του χρόνου t, όπως και το ρεύμα που διαρρέει τους βρόχους (ΔΒΓΔ) και (ΑΒΕΖ), με i το ρεύμα στο βρόχο του διακόπτη και i_c το ρεύμα εφαρμόζω τη μέθοδο των βρόχων

$(\Sigma) \begin{pmatrix} 2R & -R \\ -R & 3R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ -v_c \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2Ri + Ri_c = -E \\ Ri - 3Ri_c = v_c \end{array}\right\}(\Sigma) \rightarrow Ri_c - 6Ri_c = 2v_c - E \Rightarrow 5Ri_c + 2v_c = E$ (1)

$i = \frac{E}{2R} + \frac{1}{2}i_c$ (2)

Όμως $v_c = \frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{dq}{C\,dt} = \frac{1}{C}i_c$ (3)

παραγωγίζοντας την (1): $5R\frac{di_c}{dt} + 2\frac{dv_c}{dt} = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{di_c}{dt} + \frac{1}{\frac{5}{2}RC}i_c = 0$ (4)

(4) $\Rightarrow \frac{di_c}{dt} = -\frac{i_c}{\frac{5}{2}RC} \Rightarrow \frac{di_c}{i_c} = -\frac{dt}{\frac{5}{2}RC} \Rightarrow \ln i_c = -\frac{t}{5/2RC} + C_0 \Rightarrow \boxed{i_c = I_0 e^{-t/\frac{5}{2}RC}}$ (5)

Άρα η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι $\tau = \frac{5}{2}RC$ [s]

ενώ $I_0 = i_c(0)$, δηλ. το ρεύμα στο βρόχο του πυκνωτή για $t=0$ [s]

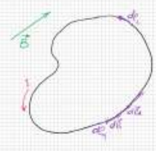
Για $t=0$ [s] ο πυκνωτής είναι βραχυκυκλωμένος ($v_c=0$) οπότε από (1) $\Rightarrow I_0 = \frac{E}{5R}$ (5a)

Σημείωση: Όταν συμβολίζω μια παράμετρο με πεζό γράμμα σημαίνει ότι είναι ανεξάρτητη του χρόνου t, ενώ με πεζό γράμμα ότι είναι χρονομεταβαλλόμενη πχ $i_c = i_c(t)$

(5) $\overset{5a}{\Rightarrow} i_c = \frac{E}{5R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ και (1) $\Rightarrow i = \frac{E}{2R} + \frac{E}{10R}e^{-t/\tau}$ (6)

δ) Μετά από 10 σταθ. χρόνου ο πυκνωτής είναι διακόπτης, οπότε το κύκλωμα γίνεται: και $i = I = \frac{E}{2R}$
Το ίδιο προκύπτει από την (6) για $t \to \infty$, οπότε $i(t\to\infty) = I = \frac{E}{2R}$ ($t \to \infty \sim t = 10\tau$, αφού $e^{-10} \approx 0$)

1. Να αποδειχθεί 'οτι η μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγώγιμο βρόχο τυχαίου σχήματος από ομογενές μαγνητικό πεδίο, είναι μηδενική

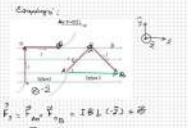


Λύση: $\vec{F}_B = I\,\vec{L}\times\vec{B}$ (1)

Θεωρώ ότι ο αγωγός τυχαίας μορφής μπορεί να αναλυθεί σε στοιχειώδη τμήματα $d\vec{\ell}_i$, $i=1..\eta$ (με φορά). Σε κάθε τμήμα $d\vec{\ell}_i$ θα ασκείται από το ομογενές (σταθερής διεύθυνσης) μαγν. πεδίο $\vec{B}$ δύναμη: $d\vec{F}_{B_i} = I\, d\vec{\ell}_i \times \vec{B}$, οπότε η συνολική δύναμη θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των $d\vec{F}_{B_i}$, δηλαδή:

$$\vec{F}_{B_T} = \sum_{i=1} d\vec{F}_{B_i} = I\left(\sum_i d\vec{\ell}_i\right)\times\vec{B} = I\vec{0}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{F}_{B_T} = \vec{0}$$

(Το $\sum_i d\vec{\ell}_i$ είναι τελικά μηδενικό διάνυσμα, αφού το διάνυσμα είναι κλειστό)

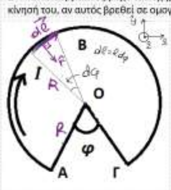


Εφαρμογή:

Σχ 1: $\vec{F}_1 = \vec{F}_{AH} + \vec{F}_{HB} = IBL(-\hat{z}) \neq \vec{0}$

Σχ 2: $\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = \vec{F}^{(1)}_{A\Theta B} = I\,\vec{A\Theta}\times\vec{B} + I\,\vec{\Theta B}\times\vec{B} = I(\vec{A\Theta}+\vec{\Theta B})\times\vec{B} = I\,\vec{AB}\times\vec{B} = 0$ αφού $AB \parallel B$

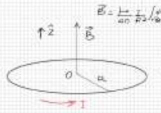
2 Για το συρμάτινο βρόχο του σχήματος, Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο Ο. Σχολιάστε τη δύναμη, που θα ασκηθεί στο βρόχο και την κίνησή του, αν αυτός βρεθεί σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο και στη συνέχεια παράλληλο στη σελίδα.



$OA = R$

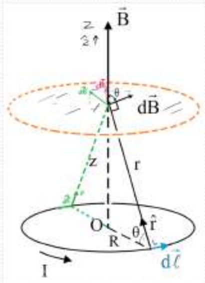
N. Biot-Savart: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{R^2} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell}{R^2}\hat{z} \Rightarrow \vec{B} = \int_{\Gamma B A} d\vec{B} \Rightarrow$

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\int d\ell = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\int_0^{2\pi-\theta} R\,d\varphi\,\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2\pi-\theta)\hat{z}$ (1)



Από (1) για $\theta = 0$: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2R} I\hat{z}$

3. Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση z πάνω από το κέντρο Ο ενός κυκλικού βρόχου ακτίνας R, που διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I



$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$ (1)

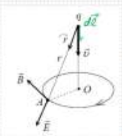
Λόγω συμμετρίας ($d\vec{\ell} \leftrightarrow d\vec{\ell}'$ και $d\vec{B} \leftrightarrow d\vec{B}'$) οι οριζόντιες συνιστώσες των στοιχειωδών συνεισφορών dB αλληλοαναιρούνται. Αυτό σημαίνει ότι το συνολικό $\vec{B}$, κατά μήκος του z, θα έχει μόνο κατακόρυφη συνιστώσα ($\parallel \hat{z}$), δηλαδή για τον υπολογισμό του $\vec{B}$ αρκεί να ληφθεί υπ' όψιν μόνο η dB_z συνιστώσα $dB_z = dB\cos\theta = dB\frac{R}{r} = \frac{dB\,R}{(z^2+R^2)^{1/2}}$ (2)

(1) $\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell}{r^2} \overset{(2)}{\Rightarrow} dB_z = \frac{\mu_0 I\, d\ell\cos\theta}{4\pi r^2} \Rightarrow B = \int dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{1}{z^2+R^2}\frac{R\,d\ell}{(z^2+R^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int d\ell \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R\,2\pi R}{(z^2+R^2)^{3/2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}$ (3)

Όταν $z \to 0$, (3) $\to$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{z}$ (Βλέπε προηγούμενη άσκηση)

3 Ένα φορτίο q κινείται με σταθερή ταχύτητα υ ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή. Δείξτε ότι ως προς αυτό τον παρατηρητή το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο που παράγονται από το φορτίο συνδέονται σε κάθε σημείο του χώρου με τη σχέση: $B = \frac{1}{c^2}(\vec{\upsilon}\times\vec{E})$



Έστω ότι το φορτίο κινείται κατά $d\vec{\ell}$. Θεωρώ ότι $\upsilon \ll c$ (ταχύτητα φωτός) αφού $\vec{\upsilon}$ = σταθερή $\Rightarrow$ ∄ ακτινοβολία. Στο σημείο Α το φορτίο q, δημιουργεί ηλ. πεδίο:

N. Coulomb: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} = \vec{E} = E\hat{r}$ με $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{E}}{E}$ (1)

Το φορτίο, μετατοπιζόμενο κατά $d\ell$ σε χρόνο dt, θα ισοδυναμεί με ρεύμα $I = \frac{q}{dt} \Rightarrow$

$I d\vec{\ell} = \frac{q}{dt}d\vec{\ell} = q\frac{d\vec{\ell}}{dt} = q\vec{\upsilon}$ (2)

Στο Α από N. Biot Savart, θα υπάρχει μαγνητικό πεδίο: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} \overset{(2)}{\Longrightarrow}$

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\upsilon}\times\hat{r}}{r^2}$ (3)

(3) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\upsilon}\times\frac{\vec{E}}{E}}{r^2} = \frac{\mu_0 q\,\vec{\upsilon}\times\vec{E}}{4\pi r^2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} = \mu_0\varepsilon_0(\vec{\upsilon}\times\vec{E})$ $\Big\}\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{\upsilon}\times\vec{E})$

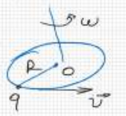
Όμως: $\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

N. Biot Savart

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

Σημείωση:

Φορτίο q περιστρέφεται με γων. ταχ ω, σε κυκλ τροχιά (O,R)

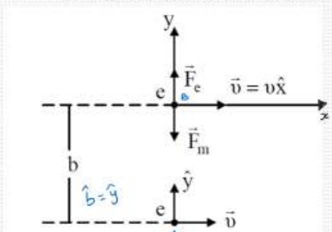


ισοδυναμεί με ρεύμα $i = \frac{q}{T}$, $\omega = 2\pi/T$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{i = q\frac{\omega}{2\pi}}$

Παραλλαγή

Δυο ηλεκτρόνια κινούνται με ταχύτητα υ σε παράλληλες τροχιές, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση b. Ποιες οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτά όπως τις αντιλαμβάνεται ακίνητος παρατηρητής ;

Υπολογίστε το λόγο των μέτρων τους. Τι θα άλλαζε αν ο παρατηρητής κινούνταν μαζί με τα ηλεκτρόνια με την ίδια ταχύτητα;



Το ηλεκτρόνιο Α ασκεί στο άλλο ηλεκτρόνιο ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_e$ και μαγνητική δύναμη F_m, αφού λόγω της ταχύτητας του ισοδυναμεί με ρεύμα I: $I d\vec{x} = q\frac{dx}{dt}\hat{x} = q\upsilon\hat{x}$ και δημιουργεί στη θέση του άλλου ηλεκτρονίου μαγν. πεδίο $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{x}\times\hat{b}}{b^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}q\upsilon\frac{\hat{x}\times\hat{y}}{b^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon}{b^2}(-\hat{z})$ (A) $\vec{B}\otimes$

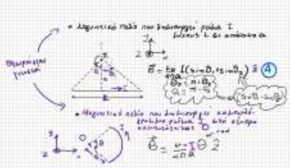
Προφανώς: $\vec{F}_e = \frac{q_e q_e}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{y}$ και $\vec{F}_m = -q_e\vec{\upsilon}\times\vec{B} \overset{(A)}{=} -q_e\upsilon\hat{x}\times\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon}{b^2}(-\hat{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_e^2\upsilon^2}{b^2}(\hat{x}\times\hat{z}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_e^2\upsilon^2}{b^2}(-\hat{y})$

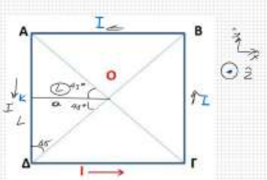
Άρα οι δυνάμεις είναι αντίθετες και $\frac{F_e}{F_m} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0\upsilon^2} = \frac{c^2}{\upsilon^2}$, και $\vec{F}_{AB} = (F_e - F_m)\hat{y}$

Το ηλεκτρόνιο Β ασκεί στο Α δύναμη ίση και αντίθετη, δηλαδή $\vec{F}_{BA} = -(F_e - F_m)\hat{y}$ (αρχή δράσης-αντίδρασης)

Όταν ο παρατηρητής δεν είναι αδρανειακός, αλλά κινείται με την ίδια ταχύτητα με τα e, τα βλέπει ακίνητα, Οπότε δεν ανιχνεύει μαγνητικές δυνάμεις.

Το τετράγωνο πλαίσιο ΑΒΓΔ με πλευρά 2L, διαρρέεται από ρεύμα I, όπως στο σχήμα. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο Ο.





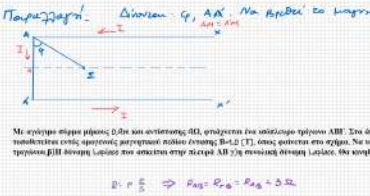
Το τετράγωνο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από 4 αγωγούς μήκους 2L που διαρρέονται από ρεύμα I. Εύκολα διαπιστώνεται ότι κάθε πλευρά δημιουργεί στο Ο. μαγν. πεδίο με φορά προς το +z. Όπως βλέπουμε και από τη σχέση (A) τα μέτρα Β των μαγν. πεδίων θα είναι ίσα. Άρα:

$\vec{B}_O = 4\vec{B}_{A\Delta}$ (1), από $A\hat{O}\Delta$: $OK = K\Delta = 2L/2 = L$

(A) $\overset{\alpha = L}{\Longrightarrow}$ $B_{A\Delta} = \frac{\mu_0}{4\pi L}I(\sin 45^\circ + \sin 45^\circ) = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\sqrt{2}$ (2)

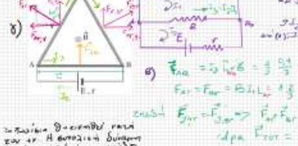
(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\vec{B}_O = \frac{\mu_0 I}{\pi L}\sqrt{2}\,\hat{z}$ [T]

Παραλλαγή: Δίνονται φ, AA'. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο Σ



Με αγώγιμο σύρμα μήκους 0,9m και αντίστασης 9Ω, φτιάχνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στα άκρα Α και Β συνδέεται πηγή E=6V, εσωτερικής αντίστασης r=1Ω. Το τρίγωνο τοποθετείται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης B=1,0 [T], όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν: α) Οι εντάσεις των ρευμάτων, που διαρρέουν κάθε πλευρά του τριγώνου β) Η δύναμη Laplace που ασκείται στην πλευρά AB γ) η συνολική δύναμη Laplace. Θα κινηθεί το πλαίσιο;

$R = \rho\frac{\ell}{S} \Rightarrow R_{A\Gamma} = R_{\Gamma B} = R_{AB} = 3\Omega$



α) Στο ισοδύναμο κύκλωμα εφαρμόζω τη μέθοδο των βρόχων (3-(3-1)=2)

$3RI_1 - RI_2 = 0$, $-RI_1 + (R+r) = E$ $\Big\}\Rightarrow$ $9I_1 - 3I_2 = 0$ (1), $-3I_1 + 4I_2 = -6$ (2)

$9I_2 = 18 \Rightarrow I_2 = 2[A]$

από (1): $I_1 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}[A]$ και $I_3 = I_2 - I_1 = 4/3[A]$. Άρα I_3 έχει φορά όπως στο σχήμα

β) $\vec{F}_{AB} = I_3\, \vec{L}_{AB}\times\vec{B} = \frac{4}{3}\frac{0{,}9}{3}\ldots = 0{,}4\,\hat{x}$ [N]

$F_{A\Gamma} = F_{B\Gamma} = BI_1L_{A\Gamma} = 1\cdot\frac{2}{3}\frac{0{,}9}{3} = 0{,}2$ [N]

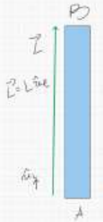
επειδή $\vec{F}_{y,A\Gamma} = -\vec{F}_{y,B\Gamma} \Rightarrow \vec{F}_{A\Gamma} + \vec{F}_{B\Gamma} = (F_{x,A\Gamma} + F_{x,B\Gamma})\hat{x} = 2F_{x,A\Gamma}\hat{x} = 2F_{A\Gamma}\cos 60^\circ\hat{x} = 0{,}2\hat{x}$ [N]

Άρα $\vec{F}_{TOT} = 0{,}6\,\hat{x}$ [N]

γ) Το πλαίσιο θα κινηθεί κατά τον +x. Η συνολική δύναμη είναι ≠ 0 διότι οι κλάδοι του διαρρέονται από διαφορετικά I

Η κίνηση θα είναι μεταφορική (όχι περιστροφή) κατά μήκος του άξονα x.

1. Ράβδος μήκους ℓ (με πολύ μικρή διατομή) κινείται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B με ταχύτητα υ. Να αποδειχθεί ότι η ΗΕΔ εξ επαγωγής που αναπτύσσεται στα άκρα του δίνεται από τη σχέση: $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = \vec{\ell}\cdot(\vec{\upsilon}\times\vec{B})$. Σε ποιές περιπτώσεις η $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi}$ θα είναι μηδέν; Δίνεται $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ [Μονάδες 1.0]



Λόγω της κίνησης της ράβδου στα ηλεκτρόνια της θα ασκηθεί δύναμη Lorentz. Η κίνηση των ηλεκτρονίων θα σταματήσει όταν η δύναμη αυτή γίνει ίση με τη δύναμη, που ασκεί στα ηλεκτρόνια το επαγόμενο ηλ. πεδίο $\vec{E}$ (Ν. Faraday) του οποίου η κυκλοφορία κατά μήκος της ράβδου $\int_A^B \vec{E}\,d\vec{\ell}$ θα ισούται με την επαγόμενη ΗΕΔ, $V_B(\ell=L)-V_A(\ell=0)$.

$$q_e\vec{\upsilon}\times\vec{B}+q_e\vec{E}=0 \Rightarrow \vec{E}=-\vec{\upsilon}\times\vec{B}$$
$$V_B-V_A=-\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \quad (\text{κυκλοφορία } \vec{E})$$
$$\Rightarrow V_B-V_A=\int_A^B(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell} \quad (1)$$

η (1) είναι γενική σχέση που δίνει την $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}$ στα άκρα αγωγού τυχαίας μορφής, απαιτεί δε την υπόθεση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων

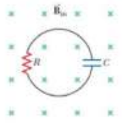
Στην περίπτωσή μας η (1) δίνει:

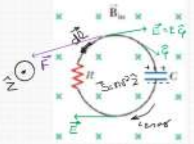
$$V_B-V_A=(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\int_0^L d\vec{\ell}=(\vec{\upsilon}\times\vec{B})L=\vec{L}\cdot(\vec{\upsilon}\times\vec{B}) \Rightarrow \underset{V_B-V_A}{\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}}=\vec{L}\cdot(\vec{\upsilon}\times\vec{B})=\vec{\upsilon}\cdot(\vec{B}\times\vec{L})=\vec{B}\cdot(\vec{L}\times\vec{\upsilon})$$

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι φανερό ότι όταν μια ράβδος κινείται σε $\vec{B}$ δεν εμφανίζεται πάντα $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}$ στα άκρα της (π.χ. όταν $\vec{B}\parallel\vec{L}$)

Σημείωση: Αφού έχουμε αγωγό (ισοδυναμικό) το $\vec{\upsilon}\times\vec{B}$ δείχνει πρός το άκρο με το μεγαλύτερο δυναμικό.

2. Στο σχήμα φαίνεται, ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο που μειώνεται με σταθερό ρυθμό d**B** / dt =-*K*, όπου το *K* είναι θετική σταθερά. Ένας αγώγιμος βρόχος ακτίνας *r*, που περιέχει αντίσταση *R* και χωρητικότητα *C* τοποθετείται με το επίπεδο του κάθετο στο πεδίο. (α) Βρείτε το φορτίο Q στον πυκνωτή όταν φορτιστεί πλήρως. (β) Ποιός οπλισμός, ο πάνω ή ο κάτω, έχει το υψηλότερο δυναμικό; (γ) Σχολιάστε τη δύναμη που προκαλεί το διαχωρισμό των φορτίων (δηλαδή την εμφάνιση ηλ. Ρεύματος) [*Μονάδες 1.5*]





εφ' όσον μεταβάλλεται το $\vec{B}$ μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή στην κυκλική περιοχή που περιβάλλει ο αγώγιμος βρόχος. Συνεπώς στο χώρο θα δημιουργηθεί ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, του οποίου η κυκλοφορία κατά μήκος της διαδρομής που περικλείει την περιοχή της μεταβαλλόμενης μαγν. ροής (δηλαδή κατά μήκος του αγώγιμου βρόχου) θα ισούται με την επαγόμενη $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}$ (Ν. Faraday)

$$\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}=\left|-\frac{d\Phi_B}{dt}\right|=\left|\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}\right|=\oint E\,d\ell=E\oint d\ell=E\,2\pi r \Rightarrow E=\frac{1}{2\pi r}\left|-\frac{d\Phi_B}{dt}\right| \quad (1)$$

Λόγω συμμετρίας το επαγόμενο ηλ. πεδίο θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο του βρόχου, εφαπτόμενο στη περιφέρειά του, έχοντας τη φορά του επαγόμενου ρεύματος, η οποία καθορίζεται από τον κανόνα του Lentz, και με δεδομένο ότι η μαγνητική ροή μειώνεται, είναι όπως επισημαίνεται στο σχήμα (δεξιόστροφη - cw)

όμως $\Phi_B=\vec{B}\cdot\vec{S}=B(t)(-\hat{z})\cdot S\hat{z}=-B(t)\pi r^2$

και $\frac{d\Phi_B}{dt}=\left|\frac{d}{dt}\left(-B(t)\pi r^2\right)\right|=K\pi r^2 \quad (2)$

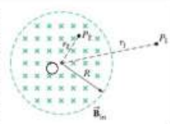
$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} \text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}=K\pi r^2$ με $V_C=\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}$ και $Q=CV_C \Rightarrow Q=CK\pi r^2$ [SI]

β) λόγω της φοράς του ρεύματος $I_{\epsilon\pi\alpha\gamma}$ ο πάνω οπλισμός βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό.

γ) Τα ηλεκτρόνια του βρόχου κινούνται ($I_{\epsilon\pi\alpha\gamma}$) υπό την επίδραση του ηλ. πεδίου που τους ασκεί δύναμη $\vec{F}_e$:

$$\vec{F}_e=(-q_e)\cdot\vec{E} \xrightarrow[(2)]{(1)} F_e=-q_e\frac{1}{2\pi r}K\pi r^2\hat{\varphi}=-q_e\frac{Kr}{2}\hat{\varphi} \quad [SI]$$

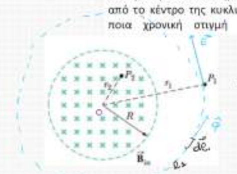
3. Μέσα στον πράσινο διακεκομμένο κύκλο ακτίνας R = 2.50 cm, το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $\boldsymbol{B}=2t^3-4t^2+0.8$ [T], όπου το B το t μετριέται σε [s] και. Τη στιγμή t = 2.00s, υπολογείστε: (α) το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης που δέχεται ένα ηλεκτρόνιο στο σημείο P_1, σε απόσταση r_1 = 5.00 cm από το κέντρο της κυκλικής περιοχής του πεδίου. (β) Σε ποια χρονική στιγμή μηδενίζεται η δύναμη αυτή;



εφ' όσον η μαγνητική ροή μέσω της επιφάνειας αυτού μεταβάλλεται, δημιουργείται επαγόμενο ηλ. πεδίο $\vec{E}$ παντού στο χώρο (Ν. Faraday), συνεπώς το ηλεκτρόνιο θα δεχτεί δύναμη ηλεκτρική $\vec{F}_e=-q_e\vec{E}$ (1) και θα κινηθεί. Το μέτρο του $\vec{E}$ λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας που παρουσιάζει η κατανομή του $\vec{B}$ θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το O, με φορά που θα καθορίζεται από τον κανόνα του Lentz.

Επειδή δε: $B=2t^3-4t^2+0{,}8 \Rightarrow \frac{dB}{dt}=6t^2-8t=2t(3t-4) \Rightarrow$ $0<t<4/3\,s$ $B\downarrow$, $t>4/3\,s$ $B\uparrow$

πρόσημο $\frac{dB}{dt}$: + 0 − 4/3 + t/s



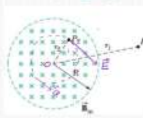
Υπολογισμός $\vec{E}$ για t = 2 [s] στο P_1. Το $\vec{B}$ αυξάνεται.

Η φορά του $\vec{E}$ είναι όπως στο σχήμα. Θεωρώντας την κλειστή καμπύλη ℓ_1 (περιφέρεια κύκλου) από το Ν. Faraday έχουμε: $\oint\vec{E}\,d\vec{\ell}_1=\oint E\,d\ell_1=E\,2\pi r_1=\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}$ (2)

$$\Phi_B=\int\vec{B}(t)\cdot d\vec{S}=\int B(t)\,dS=\int B(t)\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^R B(t)\,r\,dr\,d\varphi+\int_0^{2\pi}\int_R^{r_1}0\cdot r\,dr\,d\varphi=B(t)\pi R^2$$

Οπότε $\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|=\frac{d}{dt}\left|\left(B(t)\pi R^2\right)\right|=\left|(6t^2-8t)\right|\pi R^2=\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}\overset{(2)}{=}E\,2\pi r_1 \Rightarrow \vec{E}=\left|6t^2-8t\right|\frac{R^2}{2r_1}\hat{\varphi} \overset{t=2s}{=} \vec{E}=2\frac{R^2}{r_1}\hat{\varphi}$ [N/C] (3)

$$(1)\overset{(3)}{\Rightarrow}\vec{F}=-q_e\,2\frac{R^2}{r_1}\hat{\varphi}=-2\,1{,}6\,10^{-19}\left(\frac{2{,}5}{5}\right)5\,10^{-2}\,\hat{\varphi}=-0{,}25\;1{,}6\,10^{-20}\,\hat{\varphi}\ [N]$$



Υπολογισμός $\vec{E}$ στο P_2 για t = 1s. Το $\vec{B}(t)$ μειώνεται.

Θεωρώ την περιφέρεια κύκλου που περνά από το P_2. Το $\vec{E}$ θα είναι εφαπτόμενο της περιφέρειας και θα έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.

Από Ν. Faraday $E=\frac{1}{2\pi r_2}\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|$

$$\Phi_B=\int\vec{B}(t)\,d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{r_2}B(t)\,r\,dr\,d\varphi=B(t)\pi r_2^2 \Rightarrow \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|=\left|6t^2-8t\right|\pi r_2^2 \;\Big\}\overset{t=1s}{\Rightarrow} \vec{E}=\frac{-1}{2\pi r_2}2\pi r_2^2\hat{\varphi} \Rightarrow \vec{E}=-r_2\hat{\varphi}\ [N/C] \quad (4)$$

$$(1)\overset{(4)}{\Rightarrow}\vec{F}_e=-q_e(-r_2)\hat{\varphi}=q_e r_2\hat{\varphi}\ [N]$$

Σημείωση: Στην έκφραση για το $\vec{B}$ υπονοείται ότι $B(t)=k(2t^3-4t^2+0{,}8)$ με $k=1\,[T/s]$, t [s]

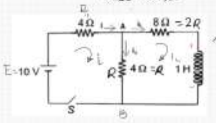
4. Ο διακόπτης κλείνει τη στιγμή t=0. Αν R=4Ω, E=10V και L=1H, να υπολογίσετε α) τη σταθερά χρόνου του κυκλώματος, β) το ρεύμα στο πηνίο συναρτήσει του χρόνου γ) το ρεύμα που διαρρέει το διακόπτη και δ) το ρεύμα μετά από 10 σταθερές χρόνου. [Μονάδες 2.0]

Θέτω R = 4Ω

$\tau=RC$

$\tau=\frac{R}{L}$

$L\frac{di}{dt}+Ri=E$ (A)



$$\text{ΜΕΒ}: \begin{pmatrix}2R & -R\\ -R & 3R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\ i_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E\\ -V_L\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2Ri-Ri_L=E & (1)\\ -Ri+3Ri_L=-V_L=-L\frac{di_L}{dt} & (2)\end{cases}$$

$$-2Ri+6Ri_L=-2L\frac{di_L}{dt} \;(2) \xrightarrow{(1)+(2)} 5Ri_L=E-2L\frac{di_L}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\frac{di_L}{dt}+\frac{5}{2}Ri_L=\frac{E}{2} \quad (B)$$

όμως: $L\frac{di}{dt}+Ri=E \Rightarrow i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ με σταθερά χρόνου $\tau=R/L$ $\Big\}\Rightarrow$ $\tau=\frac{5/2\,R}{L}$ και $i_L=\frac{E/2}{5/2\,R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{E}{5R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ (3)

$(1)\Rightarrow i=\frac{E}{2R}+\frac{i_L}{2}\overset{(3)}{=}i=\frac{E}{2R}+\frac{E}{10R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ ρεύμα που διαρρέει τον διακόπτη S

$i_2=i-i_L=\frac{E}{2R}-\frac{E}{10R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

Όταν $t\to 10\tau$: $e^{-t/\tau}\to 0$

$I_L=E/5R$

$I=\frac{E}{2R}+\frac{E}{10R}$

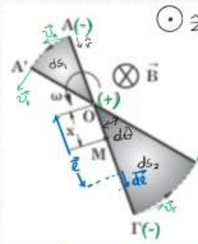
$I_2=\frac{E}{2R}-\frac{E}{10R}$

γιά $t=10\tau$ $e^{-t/\tau}=e^{-10}\simeq 0$

Μπορούμε να πούμε ότι το πηνίο L έχει "φορτιστεί" πλήρως, οπότε συμπεριφέρεται σαν βραχυκύκλωμα

Ισχύει βέβαια $i=i_L+i_2$

5. Λεπτή μεταλλική ράβδος μήκους L, στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ πάνω σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από ένα σημείο O της ράβδου, που απέχει από το μέσον της M απόσταση x. Στο χώρο όπου περιστρέφεται η ράβδος υπάρχει κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο, που η έντασήτου έχει μέτρο $\vec{B}$. Να βρείτε σε συνάρτηση με την απόσταση x, τηνεπαγωγική τάση στις άκρες της ράβδου.



Υπενθυμίζεται ότι $\vec{\upsilon}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ ($\vec{\omega}=\omega\hat{z}$ με $\omega=\frac{d\theta}{dt}$)

κατά την περιστροφή της ράβδου μέσα στο $\vec{B}$ αναπτύσσονται στα τμήματα ΟΓ και ΟΑ $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}$ (ΗΕΔ λόγω κίνησης) με πολικότητες που φαίνονται στο σχήμα και τιμές:

$$\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma,OA}=\frac{d\Phi_1}{dt}\ (1\alpha) \text{ και } \text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma,O\Gamma}=\frac{d\Phi_2}{dt}\ (1\beta)$$

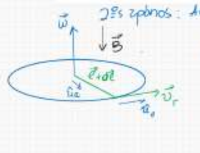
Όπου $d\Phi_{i=1,2}$ είναι οι στοιχειώδεις μαγνητικές ροές μέσα από τις στοιχειώδεις επιφάνειες $dS_{i=1,2}$ των κυκλικών τομέων που σαρώνουν τα ΟΑ και ΟΓ σε χρόνο dt. Είναι δε:

$$dS_1=\frac{1}{2}OA^2d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)^2d\theta\ (2\alpha) \quad \text{και} \quad dS_2=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}+x\right)^2d\theta\ (2\beta) \quad \text{με } d\Phi_{i=1,2}=B\,dS_{i=1,2}\ (3)$$

$$\text{Από τις } (1),(2),(3) \Rightarrow \text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma,OA}=V_O-V_A=B\frac{dS_1}{dt}=\frac{1}{2}B\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}B\left(\frac{L}{2}-x\right)^2\omega\ (4\alpha)$$

$$\text{ομοίως } \text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma,O\Gamma}=V_O-V_\Gamma=\frac{1}{2}B\left(\frac{L}{2}+x\right)^2\omega\ (4\beta)$$

$$(4\beta)-(4\alpha)=V_O-V_\Gamma-(V_O-V_A)=V_A-V_\Gamma=\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma,A\Gamma}=B\omega Lx \quad \text{με } V_A>V_\Gamma \text{ για } x\geq 0 \text{ και } -\frac{L}{2}\leq x\leq\frac{L}{2}$$



2ος τρόπος: Από την Άσκηση 1 έχω: $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}=\int_c(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell}$ (5) Η ταχύτητα του στοιχειώδους τμήματος $d\vec{\ell}$ θα είναι:

$\vec{\upsilon}=\vec{\omega}\times\vec{\ell}=\omega\ell\hat{u}_\theta \Rightarrow \vec{\upsilon}\times\vec{B}=\omega\ell B\,\hat{u}_\theta\times(-\hat{z})=\omega B\ell\,\hat{u}_\ell$ οπότε $(\vec{\upsilon}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell}=\omega B\ell\,d\ell$

Έτσι η (5) γίνεται $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma}=\omega B\int_c \ell\,d\ell$ (6)

ΟΓ: $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma,O\Gamma}=\omega B\int_0^{L/2+x}\ell\,d\ell=\frac{1}{2}\omega B\left(\frac{L}{2}+x\right)^2$ και $\text{ΗΕΔ}_{\epsilon\pi\alpha\gamma,OA}=\omega B\int_0^{L/2-x}\ell\,d\ell=\frac{1}{2}\omega B\left(\frac{L}{2}-x\right)^2$ κλπ

A series *RLC* circuit has $R = 425\ \Omega$, $L = 1.25$ H, and $C = 3.50\ \mu$F. It is connected to an AC source with $f = 60.0$ Hz and $\Delta V_{max} = 150$ V.

(A) Determine the inductive reactance, the capacitive reactance, and the impedance of the circuit.

(B) Find the maximum current in the circuit. (C) Find the phase angle between the current and voltage.

D. Find the maximum voltage across each element.

(E) What replacement value of *L* should an engineer analyzing the circuit choose such that the current leads the applied voltage by 30.0° rather than 34.0°? All other values in the circuit stay the same.

A. $X_L = \omega L \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad Z_T = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ (1)

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 60 = 377$ rad/s

$X_L = 377 \cdot 1{,}25 = 471\ \Omega \quad X_C = (377 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-6})^{-1} = 758\ \Omega$

(1): $Z = 513\ \Omega$

B. $I_{max} \triangleq \frac{\Delta V_{max}}{Z} = \frac{150}{513} = 0{,}3$ A

Γ. $\varphi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \Rightarrow \varphi = -34°$ (2) $\Rightarrow \mathring{Z}_T = Z_T \angle -34°$ ← phasor

$\pi \ \ 180$, $\varphi \ \ -34° \Big] \Rightarrow \varphi = -\frac{34}{180}$

D. $v = \Delta V_{max} \sin \omega t$ } στιγμιαία τιμή

$i \overset{(A)}{=} \frac{\Delta V_{max}}{Z_T} \sin(\omega t - \varphi) \overset{(2)}{=} \frac{\Delta V_{max}}{Z_T} \sin\left(\omega t + 34\frac{\pi}{180°}\right)$ ← διαφορά φάσης

Έχω επομένως χωρητική συμπεριφορά το ρεύμα προηγείται της τάσης

$\boxed{P(t) = v(t)\, i(t) : \text{Στιγμιαία Ισχύς}}$

$v_R = I_{max} R \sin \omega t$, $V_{R\,max} = I_{max} R$

$v_L = I_{max} X_L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad V_{L\,max} = I_{max} X_L$

$v_C = I_{max} X_C \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad V_{C\,max} = I_{max} X_C$

$\boxed{P_{rms} = V_{rms} I_{rms} \cos\varphi = \frac{\Delta V_{max}}{\sqrt{2}} \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \cos\varphi \quad \mu\varepsilon\ \varphi = -34°}$

@ $\omega = \omega_0$ $Z = R$, δηλαδή γιά $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

$P_{rms} = \frac{V_{rms}^2}{R} \cos 0° = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_{max}^2}{R}$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

(E) $\tan\varphi \triangleq \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L' - 1/\omega C}{R} = \tan(-30) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \omega L' - \frac{1}{\omega C} = -\frac{\sqrt{3}}{3} R \Rightarrow L = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega C} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) R \quad [H]$

Έχω $v = \Delta V_{max} \sin \omega t \Rightarrow \mathring{v} = v_0 \angle 0$ με $v_0 = \frac{\Delta V_{max}}{\sqrt{2}}$

τότε $\mathring{i} = \frac{\mathring{v}}{\mathring{Z}_T} = \frac{v \angle 0}{Z_T \angle \varphi} = \frac{v_0}{Z_T} \angle -\varphi \Rightarrow i = \frac{\sqrt{2}\, v_0}{Z_T} \sin(\omega t - \varphi)$ (A)

ή $i = \frac{\Delta V_{max}}{Z_T} \sin(\omega t - \varphi)$

τρίγωνο εμπεδήσεων:

Ισχύουν: $\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$, $\cos\varphi = \frac{R}{Z_T}$, $\sin\varphi = \frac{X_L - X_C}{Z_T}$

Η ισχύς στο χώρο της συχνότητας

Μιγαδική ισχύς S: Έστω κύκλωμα με πηγή AC. $v(t)$ με $\mathring{v} = V_{rms} \angle 0$ και φορτίο $\mathring{Z}_T = Z_T \angle \varphi$. τότε $\mathring{i} = \frac{\mathring{v}}{\mathring{Z}_T} = \frac{V_{rms}}{Z_T} \angle -\varphi = \frac{V_{rms}}{Z_T} e^{-j\varphi} \Rightarrow$

προσοχή! $\mathring{Z}_T = Z_T e^{j\varphi} = Z_T \angle \varphi$

τότε: $S \triangleq \mathring{v}\, \mathring{i}^*$, όπου i^* ο μιγαδικός συζυγής του i $\quad i^* = I_{rms} e^{j\varphi}$ με $\boxed{I_{rms} \triangleq \frac{V_{rms}}{Z_T}}$ (B)

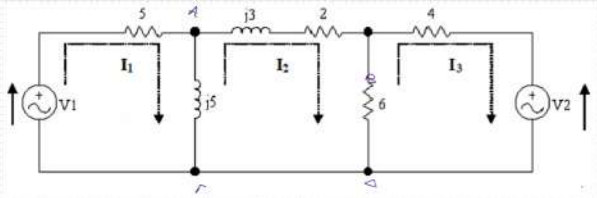
$\Rightarrow S = V_{rms} \angle 0\, I_{rms} e^{j\varphi} = V_{rms} I_{rms} \cos\varphi + j V_{rms} I_{rms} \sin\varphi$

Οπότε: $|S| = V_{rms} I_{rms}$: είναι η φαινόμενη ισχύς. Μετριέται σε [VA] (voltamperes)

$P = V_{rms} I_{rms} \cos\varphi$: είναι η πραγματική ισχύς, μετριέται σε [W], Είναι δε $\boxed{P = V_{rms} I_{rms} \frac{R}{Z_T} \overset{(B)}{=} I_{rms}^2 R}$ (C)

$Q = V_{rms} I_{rms} \sin\varphi$: Είναι η φανταστική ισχύς, (αποδίδεται πίσω στην πηγή) & Μετριέται σε [VAR] voltampere Reactive

να υπολογιστεί το ρεύμα που διέρχεται από την αυτεπαγωγή αντίστασης j3 Ω. Δίνεται $V_1 = 30\angle 0°$ Volts και $V_2 = 20\angle 0°$ Volts. Και οι υπόλοιπες αντιστάσεις είναι σε μονάδες Ω.



Υπενθυμίζεται ότι $v = v_0 \angle \theta = \mathrm{img}\{v_0 e^{j\theta}\}$ ($\in \mathbb{C}$ phasor) $= \mathrm{img}\{v_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}\} = v_0 \sin(\omega t + \theta) \in \mathbb{R}$

Εφαρμόζω την μέθοδο των βρόχων ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, όπως και στα κυκλώματα DC. Έχω 5 κλάδους, 3 κόμβους (Γ και Δ είναι στο ίδιο δυναμικό), οπότε θα χρειαστώ 3 εξισώσεις βρόχων. $(5 - (3-1) = 3)$. Ορίζω τις φορές των ρευμάτων όπως στο σχήμα (CW - η ίδια σε όλους τους βρόχους). Τότε προκύπτει το παρακάτω (Σ) εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} (5+j5) & -j5 & 0 \\ -j5 & (8+8j) & -6 \\ 0 & -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\angle 0° \\ 0 \\ -20\angle 0° \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (1+j) & -j & 0 \\ -j & 8(1+j) & -6 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\angle 0° \\ 0 \\ -10\angle 0° \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1+j) & -j & 0 \\ 0 & -j + \frac{8(1+j)^2}{j} & -\frac{(1+j)6}{j} \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\angle 0° \\ -6\angle 0° \\ -10\angle 0° \end{pmatrix}$$

Όμως: $j - \frac{8(1+j)^2}{j} = j - 16$, $6\frac{1+j}{j} = -6(1+j)j = 6(1-j)$ οπότε $\det\{\Sigma\} = -(1+j)[5(-16+j) - 3 \cdot 6(1-j)] = -(1+j)[-80 + 5j - 18 + 18j] = (1+j)(98 - 23j)$ (1)

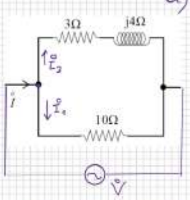
Ενώ η ορίζουσα του αγνώστου i_2: $\det\{i_2\} = \begin{vmatrix} (1+j) & -6\angle 0° & 0 \\ 0 & -6\angle 0° & 6 \\ 0 & 10\angle 0° & 5 \end{vmatrix} = -(1+j)(-30\angle 0° - 60\angle 0°) = (1+j)\, 90\angle 0°$ (2)

Οπότε: $\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} i_2 = \frac{\det\{i_2\}}{\det \Sigma} = \frac{\cancel{(1+j)}\, 90\angle 0°}{\cancel{(1+j)}\, (98 - 23j)} = \frac{90\angle 0°}{100\angle -13°} = 0{,}9\angle 13° \Rightarrow i_2(t) = 0{,}9 \sin(\omega t + 13°)$ [A]

Στο κύκλωμα του σχήματος:

α) Να βρεθεί ο συντελεστής ισχύος

β) Αν η ολική ισχύς είναι 1100W, ποια είναι η ισχύς σε καθεμία αντίσταση ξεχωριστά



α) (A) ΣΙ = $\cos\varphi$ όπου φ η γωνία μεταξύ τάσης πηγής V και του ρεύματος i. Στο χώρο της συχνότητας θα είναι:

$\mathring{I}_1 = \frac{\mathring{V}}{\mathring{Z}_T} = \frac{V_{rms}}{Z_T \angle \varphi}$. Είναι όμως $\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3+j4}$ $[\Omega^{-1}]$ $\xRightarrow{\text{παράλληλη σύνδεση}}$

$Z_T = \frac{10(3+4j)}{13+4j} = 10\frac{5 e^{j(56°)}}{13{,}6\, e^{j(20°)}} \Rightarrow Z_T = 3{,}7\angle 36°\ [\Omega]$ Άρα:

$\Sigma I \overset{(A)}{=} \cos 36° = 0{,}8$.

β) $P_T = P_1 + P_2 = 1100$ [W] (1)

$\mathring{V}_1 = \mathring{V} = \mathring{I}_1 \cdot \mathring{Z}_1 \xRightarrow{\text{μέτρα}} V_{rms} = I_{1,rms} Z_1 \Rightarrow V_{rms} = I_{1,rms}\, 10$ [V]

$\mathring{V}_2 = \mathring{V} = \mathring{I}_2 \mathring{Z}_2 \Rightarrow V_{rms} = I_{2,rms} Z_2 = I_{2,rms}\sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow V_{rms} = I_{2,rms}\, 5$ [V] $\Big\} \Rightarrow \frac{I_{1,rms}}{I_{2,rms}} = \frac{1}{2}$ (2)

Όμως ισχύς στον κλάδο 1: $P_1 = I_{1,rms}^2\, 10$

— // — 2: $P_2 = I_{2,rms}^2\, 3$ $\Big\} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} \overset{(2)}{=} \frac{1}{4} \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{6}$ (3)

Από το (Σ) των (1) και (3) $\Rightarrow P_1 = 500$[W] και $P_2 = 600$[W]

Σημείωση: Επειδή δεν δίνονται στοιχεία γιά τη γεννήτρια ή το ρεύμα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άλλα στοιχεία πχ. ποια είναι η τάση στο πηνίο, το ρεύμα i_1, ή i_2 κλπ.

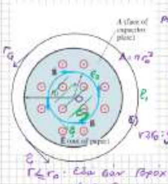
Ένας πυκνωτής 30 pF κενού αέρα έχει κυκλικές πλάκες επιφάνειας A=100 cm2. Φορτίζεται από μια πηγή τάσης 70 V μέσω αντίστασης 2 Ω. Τη στιγμή που η πηγή συνδέεται (t=0) υπολογίστε : α) την τιμή του ρεύματος ανάμεσα στις πλάκες (ρεύμα αγωγιμότητας)
β) το ρυθμό μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών
γ) το μαγνητικό πεδίο που προκαλείται μεταξύ των πλακών

$V_0 = 70\,V$, $A = 100\cdot10^{-4}\,m^2$, $C = 30\cdot10^{-12}\,F$

$$\left.\begin{array}{l} i_d \stackrel{\circ}{=} \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{A\varepsilon_0} \end{array}\right\} i_d = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(EA) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{A\varepsilon_0}A\right) \Rightarrow i_d = \frac{dq}{dt}$$

Δηλαδή το ρεύμα φόρτισης του πυκνωτή $i(t)$ (ρεύμα αγωγιμότητας) ταυτίζεται με το ρεύμα μετατόπισης $i_d(t)$

Ρεύμα φόρτισης πυκνωτή: $i = \frac{dq}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$, άρα $i_d = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$ [A]



α) $i_d(t=0) = V/R = \frac{70}{2} = 35\,A$

β) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{A\varepsilon_0} \Rightarrow$ ρυθμός μεταβολής $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{A\varepsilon_0}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{A\varepsilon_0}\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$ ① $\Rightarrow$

$t=0$: $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{A\varepsilon_0}\frac{V_0}{R} = \frac{1}{100\cdot10^{-4}\, 9\cdot10^{-12}}\frac{70}{2}$ [V/ms]

γ) $r \geq r_0$: $\oint_{\ell_1} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_c + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = 0 + \mu_0 i_d \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 i_d \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}\hat{\varphi}$ [T]

(ρεύμα αγωγιμότητας)

$r \leq r_0$: Εδώ σαν βρόχο Ampere παίρνω την κυκλική διαδρομή (0,r) με $r \leq r_0$ [ℓ_2]

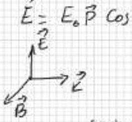
$\oint_{\ell_2} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_c + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = 0 + \mu_0\varepsilon_0 \frac{dE}{dt}S$, όπου S η επιφάνεια, που περικλείει η διαδρομή ℓ_2. Εύκολα βλέπουμε ότι $S = \pi r^2$

$\stackrel{①}{\Rightarrow} B 2\pi r = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{A\varepsilon_0}\frac{V_0}{R}e^{-t/RC} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \frac{r}{2\pi r_0^2}\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}\hat{\varphi}$ [T]

Σε κάθε περίπτωση το μέτρο του $\vec{B}$ εξαρτάται από την απόσταση από τον άξονα συμμετρίας των οπλισμών (xx'), θα βρίσκεται πάνω σε επίπεδα παράλληλα με αυτά των οπλισμών, εφαπτόμενο των δυναμικών γραμμών (περιφέρειες κύκλου με κέντρο επί του xx') και φορά που καθορίζεται από τον κανόνα Δ× (ο αντίχειρας δείχνει το $\vec{E}$)

Για ένα επίπεδο αρμονικό ΗΜ κύμα, που διαδίδεται σε διηλεκτρικό μέσο με δ.δ. n, να αποδείξτε ότι ισχύει: $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E}$ όπου k το διάνυσμα κατά τη διεύθυνση διάδοσης στο μέσο

$\vec{E} = E_0\vec{p}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ $\quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ (καρτεσιανό ΣΣ)



$\hat{E}\times\hat{B} = \hat{k}$ με κυκλική εναλλαγή προκύπτει:

$\hat{B}\times\hat{k} = \hat{E}$

$\hat{k}\times\hat{E} = \hat{B} \Rightarrow \frac{\vec{k}}{k}\times\frac{\vec{E}}{E} = \frac{\vec{B}}{B} \stackrel{B=E/u}{\Longrightarrow} \frac{u}{kE}\vec{k}\times\vec{E} = \vec{B} \Rightarrow \frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{E}{B}}\vec{k}\times\vec{E} = \vec{B} \Rightarrow$

ταχύτητα στο μέσο $u = c/n$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\Rightarrow \frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}u}\vec{k}\times\vec{E} = \vec{B} \Rightarrow \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E} = \vec{B}$

c ταχύτητα στο κενό

λ_0 μ.κ. στο κενό $\quad \frac{c}{\lambda_0} = \frac{u}{\lambda} = f \Rightarrow \frac{c}{u} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = n$

λ μ.κ. στο μέσο. $\quad 2\pi f = \omega$

$\vec{E} = E_0\hat{p}\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) = E_0\hat{p}\cos 2\pi\left(ft - \frac{\vec{k}}{2\pi}\cdot\vec{r}\right) = E_0\hat{p}\cos\left[2\pi\left(ft - \frac{1}{2\pi}(k_x x + k_y y + k_z z)\right)\right]$ Ⓐ Γενική μορφή εξίσ. κύματος

$\hat{p}$ διαν. πόλωσης ηλ. πεδίου.

$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$: διεύθ. διάδοσης κύματος

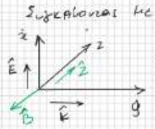
$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$ [m^{-1}]

B. Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει ηλεκτρικό πεδίο, που δίνεται από τη σχέση: $\vec{E} = 10\hat{x}\cos\left[2\pi(10^{14}t - 10^{6}y)\right]$ V/m, t σε [s], y σε [m] και διαδίδεται σε μέσο με δ.δ. n.

α) Η διεύθυνση διάδοσης είναι κατά μήκος του διανύσματος $\hat{y}$…. ενώ η πόλωση κατά μήκος του $\hat{x}$….
Η συχνότητα είναι f=…10^{14}…[Hz], το μήκος κύματος στο μέσο είναι λ=……1……[μm]. Η ταχύτητα διάδοσης στο μέσο είναι u=…10^{8}…[m/s] και n = $\frac{c}{u}$ = 3 και το μήκος κύματος στο κενό είναι λ_0=…3….[μm]
β) Η εξίσωση που περιγράφει το μαγνητικό πεδίο του κύματος στο χώρο και το χρόνο είναι:

Συγκρίνοντας με την Ⓐ προκύπτει εύκολα ότι: διευθ. διάδοσης $\frac{\vec{k}}{2\pi} = \frac{k_y}{2\pi}\hat{y} = 10^6\hat{y}$ (η πόλωση κατά μήκος του $\hat{x}$)

με $k_y = \frac{2\pi}{\lambda}$



$\hat{B} = \hat{k}\times\hat{E} \Rightarrow \hat{B} = \hat{y}\times\hat{x} \Rightarrow \hat{B} = -\hat{z}$

Άρα: $\vec{B} = 10^{8}(-\hat{z})\cos 2\pi(10^{14}t - 10^{6}y)$ [T]

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός ΗΜ κύματος στο κενό είναι: $\vec{E} = (8\hat{x} - 6\hat{y})\sin(\omega t - 3x - 4y)$ [V/m]. Να προσδιοριστούν: η διεύθυνση διάδοσης η συχνότητα και η πόλωση του κύματος. Στη συνέχεια να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου, να επιβεβαιωθεί ότι το κύμα είναι επίπεδο και να υπολογιστεί η rms τιμή της έντασης του.

$\vec{E} = E_0\hat{p}\cos(\omega t - (k_x x + k_y y))$ από Ⓐ, η δοθείσα γράφεται:

$\vec{E} = 10\left(\frac{8}{10}\hat{x} - \frac{6}{10}\hat{y}\right)\cos\left(\omega t - (3x + 4y) - \frac{\pi}{2}\right)$ Άρα με άμεση σύγκριση προκύπτει:

Πλάτος ηλ. πεδίου: $E_0 = 10$ V/m, πόλωση $\hat{p} = \frac{4}{5}\hat{x} - \frac{3}{5}\hat{y}$ (γραμμική που σχηματίζει γωνία $\hat{\varphi}$ με τον άξονα x: $\tan\varphi = -\frac{4}{3} \Rightarrow \varphi = -36°$

$\vec{k} = 3\hat{x} + 4\hat{y}$, $\vec{k} = 5\hat{k}$ με $\hat{k} = \frac{3}{5}\hat{x} + \frac{4}{5}\hat{y}$ η διεύθυνση διάδοσης (σχηματίζει γωνία $\hat{\theta}$ με τον xx': $\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \hat{\theta} = 54°$)

$k = \sqrt{9+16} = 5$ [m^{-1}] $= \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{5}$ [m]

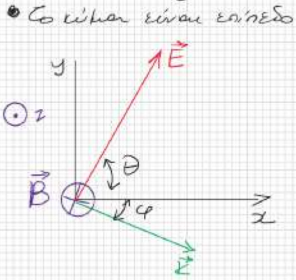
διάδοση στο κενό, άρα ταχύτητα $u = c = 3\,10^8$ m/s και $c = \lambda f$ $\Big\} \Rightarrow f = \frac{15}{2\pi}10^8$ [Hz]

$\hat{E}\times\hat{B} = \hat{k} \Rightarrow \hat{B} = \hat{k}\times\hat{E} \Rightarrow \hat{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}\begin{vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{vmatrix} = \hat{z}\left(-9/25 - 16/25\right) = -\hat{z}$

$B_0 = E/c$ [T]

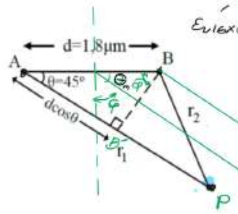
Άρα: $\vec{B} = -\frac{10}{3}10^{-8}\hat{z}\cos(\omega t - 3x - 4y - \frac{\pi}{2})$ [T]

- Το κύμα είναι επίπεδο TEM αφού: $\hat{E}\cdot\hat{B} = \hat{E}\cdot\hat{k} = \hat{B}\cdot\hat{k} = 0$ $\quad (\hat{E} = \hat{p})$



Δυο πανομοιότυπες σημειακές πηγές απέχουν μεταξύ τους 1,80μm και εκπέμπουν λευκό φως (που περιέχει όλα τα μήκη κύματος του ορατού φωτός από 400nm έως 700nm). Για ποιες τιμές του μήκους κύματος θα παρατηρηθεί, λόγω ενισχυτικής συμβολής, μέγιστη ένταση φωτός σε ένα σημείο που απέχει μεγάλη απόσταση από τις πηγές και βρίσκεται στη κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45 ο με την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται οι δυο πηγές;

Θεωρώντας ότι το σημείο $P \to \infty$ η διαφορά δρόμων Δr, θα είναι: $\Delta r = AB' = AB\sin\varphi = d\sin(90-\theta) = d\sin 45^\circ$



Ενίσχυση: $d\sin\theta_m = m\lambda$, $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$ (1)

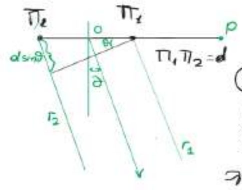
Στη διεύθυνση των 45°, θα ενισχύονται τα λ για τα οποία ισχύει η 1 για κάποιο m ($m \in \mathbb{Z}$)

(1) $\Rightarrow \lambda = \frac{d\sin 45^\circ}{m} = \frac{1{,}8\sqrt{2}/2}{m} = \frac{1{,}26}{m}$ [μm] (1μm = 1000nm)

Άρα
$m = 1$ $\lambda = 1260$ [nm] μη ορατό
$m = 2$ $\lambda = 640$ [nm] } ορατό
$m = 3$ $\lambda = 420$ [nm] } ορατό
$m = 4$ $\lambda = 320$ [nm] μη ορατό

Άρα ενισχύονται 2 μήκη κύματος στο ορατό.

Δυο πανομοιότυπες πηγές απέχουν μεταξύ τους 3μm και εκπέμπουν λευκό φως (περιέχει όλα τα ορατά μήκη κύματος). Να βρεθεί η συνθήκη μέγιστης έντασης λόγω ενισχυτικής συμβολής για τυχόν σημείο της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι δυο πηγές και να βρεθεί ποια μήκη κύματος του ορατού φάσματος (από 400nm εως 700nm) θα παρατηρηθούν με μέγιστη ένταση



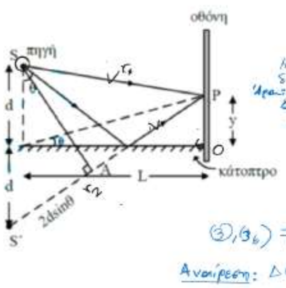
Στη διεύθυνση του σημείου παρατήρησης P η γωνία παρατήρησης είναι $\theta = 90^\circ$. Άρα η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής γράφεται:

(1) $d\sin\theta = d\sin 90^\circ = d = m\lambda$ με $m = \pm1, \pm2, \pm3$ (ο αρνητικές τιμές για P ευρισκόμενο αριστερά)

με $d = 3\mu m = 3000$ nm. Από την (1) προκύπτει ότι τα μήκη κύματος που θα ενισχυθούν θα είναι:

$$\lambda = \frac{d}{m} = \frac{3000}{m}\text{nm} \Rightarrow \begin{cases} m=1 & \lambda = 3000\text{ nm μο} & m=5 & \lambda = 600\text{ nm ορατό} \\ m=2 & \lambda = 1500\text{ nm μο} & m=6 & \lambda = 500\text{ nm "} \\ m=3 & \lambda = 1000\text{ nm μο} & m=7 & \lambda = 428{,}5\text{ nm "} \\ m=4 & \lambda = 750\text{ nm μο} & m=8 & \lambda = 375\text{ nm μο} \end{cases}$$

Κροσσοί συμβολής παράγονται σε πετασμα, σαν αποτέλεσμα των ακτίνων που έρχονται απευθείας από μια πηγή που εκπέμπει φως μήκους κύματος λ και των ακτίνων που ανακλώνται από κάτοπτρο, που βρίσκεται σε απόσταση *d* κάτω από την πηγή. Αν L είναι η απόσταση της οθόνης από την πηγή και L >> *d* να προσδιοριστούν οι αποστάσεις *y*m των φωτεινών και των σκοτεινών κροσσών στην οθόνη πάνω από το κάτοπτρο.
Αν λ = 500nm, L = 100cm και *d* = 1cm να βρεθεί η απόσταση του πρώτου φωτεινού και του πρώτου σκοτεινού κροσσού πάνω από το κάτοπτρο.



Το είδωλο S' της πηγής S ως πρός το κάτοπτρο συμπεριφέρεται σαν δεύτερη πηγή. Άρα έχουμε συμβολή από 2 πηγές που βρίσκονται σε απόσταση $SS' = 2d = D$ (1)

Η διαφορά φάσης σ' ένα σημείο P πάνω στο πέτασμα οφείλεται στη διαφορά δρόμου δr και στην αλλαγή φάσης κατά 180°, που υφίσταται η ανακλώμενη ακτινοβολία.

Άρα:
$\Delta\Phi_1 = (r_2 - r_1)\frac{2\pi}{\lambda}$
$\Delta\Phi_2 = \pi$ λόγω ανάκλασης
$\Rightarrow \Delta\phi = \Delta\phi_1 + \Delta\phi \Rightarrow \Delta\phi = \delta r\frac{2\pi}{\lambda} + \pi \overset{(1)}{=} D\sin\theta\frac{2\pi}{\lambda} + \pi$ (2)

Ενίσχυση: $\Delta\Phi = m 2\pi \overset{(2)}{\Rightarrow} D\sin\theta\frac{2\pi}{\lambda} + \pi = m2\pi \overset{\sin\theta = \theta}{\Rightarrow} D\theta_m = 2(m-1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \theta_m = \frac{2m-1}{4d}\lambda$, (3)
με $m = \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$
$\sin\theta = \theta = \tan\theta$ διότι ισχύει: $L >> d$
$\tan\theta = y/L$ (3_b)

(3),(3_b) $\Rightarrow y_m = \frac{2m-1}{4d}\lambda L$, $m = 1, 2$, οπότε: $y_1 = \frac{\lambda L}{4d} = \frac{500\,10^{-9}}{4\,10^{-2}} 1\,[m] = 1{,}25\,10^{-5}\,[m] = 12{,}5\,[\mu m]$

Αναίρεση: $\Delta\Phi = (2m+1)\pi \Rightarrow D\theta\frac{2\pi}{\lambda} + \cancel{\pi} = (2m+1)\cancel{\pi} \Rightarrow D\theta\frac{2}{\lambda} = 2m \Rightarrow \theta_m = \frac{m\lambda}{2d}$, $m = 0, 1, 2$ (4)

(4),(3_b) $\Rightarrow y_m = \frac{m\lambda}{2d}L$ $m = 0, 1, 2$ ο πρώτος σκοτεινός κροσσός είναι πάνω στο κάτοπτρο m=0 και $y_0 = 0$
ο επόμενος σκοτεινός πάνω από το κάτοπτρο θα είναι: $y_1 = \frac{\lambda}{2d}L = 2\frac{\lambda L}{4d} = 25\,[\mu m]$

Φως μήκους κύματος 550nm διέρχεται από μια απλή σχισμή και σε πέτασμα που απέχει 50cm σχηματίζονται κροσσοί συμβολής. Η απόσταση του πρώτου και του πέμπτου ελάχιστου μετρήθηκε 0,35mm .Να υπολογιστεί το πλάτος της σχισμής.

Έχω μιά σχισμή. Άρα οι κροσσοί συμβολής είναι αποτέλεσμα περίθλασης. Στην περίθλαση η θέση των σκοτεινών κροσσών δίνεται από τη σχέση:

(1) $y_m = m\frac{\lambda}{a}L$, $m = \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$ με a το πλάτος της σχισμής.

1º ελάχιστο: $m = 1$, (1) $\Rightarrow y_1 = \frac{\lambda}{a}L$
5º ελάχιστο: $m = 5$, (1) $\Rightarrow y_5 = 5\frac{\lambda}{a}L$
$\Rightarrow y_5 - y_1 = \frac{4\lambda}{a}L = D_{51}$, $D_{51} = 0{,}35$ mm $\Rightarrow$

$a = \frac{4L}{D_{51}}\lambda \Rightarrow a = \frac{4\,50\,10^{-2}}{0{,}35\,10^{-3}}550\,10^{-9}\,[m] = \frac{1{,}1}{0{,}35}10^{-3} \simeq 3{,}14$ [mm]

Μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας f=15 GHz διαδίδεται στο κενό και προσπίπτει σε δύο σχισμές που έχουν πάχος *a*=5 *cm* και βρίσκονται σε απόσταση *d*=6 *cm*. Να βρεθούν οι γωνίες που έχουμε ελάχιστα ακτινοβολίας (σκοτεινούς κροσσούς).

$c = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\,10^8}{15\,10^9} = 2cm$. Επειδή $\lambda \lesssim a$ εκτός της συμβολής λόγω των δύο πηγών έχουμε και περίθλαση.

Συμβολή: $d\sin\theta_m = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ $m = 0, \pm1, \pm2 \ldots$ (1) Συνθήκη ελαχίστων (σκοτεινοί κροσσοί)

Περίθλαση: $a\sin\theta_n = n \cdot \lambda$ $n = \pm1, \pm2 \ldots$ (2) —//—

Οι κατευθύνσεις (γωνίες) στις οποίες παρατηρούνται ελάχιστα είναι:

λόγω συμβολής (1) $\Rightarrow \theta^s_m = \arcsin\left[(2m+1)\frac{\lambda}{2d}\right]$ $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \Rightarrow \begin{cases} m=0,-1: \theta_1 = |\theta_{-1}| = \arcsin\left[\frac{1}{6}\right] = 0{,}17\text{ rad} = 9{,}6^\circ \\ m=1,-2: \theta_3 = |\theta_{-3}| = \arcsin\left[\frac{1}{2}\right] = 30^\circ \\ m=2,-3: \theta_5 = |\theta_{-5}| = \arcsin\left[\frac{5}{6}\right] = 0{,}985\text{ rad} = 56{,}4^\circ \end{cases}$

για $m \geq 3$ προκύπτει $\sin\theta_m > 1$ ή $\sin\theta_m < -1$ ή $m \leq -4$

λόγω περίθλασης (2) $\Rightarrow \theta^n_n = \arcsin\left[n\frac{\lambda}{a}\right]$ $n = \pm1, \pm2, \ldots \Rightarrow \begin{cases} n=\pm1: \theta^n_{\pm1} = \arcsin\left(\pm\frac{2}{5}\right) = \pm0{,}41\text{ rad} = \pm23{,}5^\circ \\ n=\pm2: \theta^n_{\pm2} = \arcsin\left(\pm\frac{4}{5}\right) = \pm0{,}93\text{ rad} = \pm53{,}2^\circ \end{cases}$

για $n = \pm3, \pm4$ προκύπτει $|\sin\theta_n| > 1$

Σημείωση: Η προσέγγιση $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$ [rad] γίνεται όταν μας δίνεται ότι η παρατήρηση των κροσσών γίνεται σε οθόνη (πέτασμα) που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από τις πηγές ($L >> d, \lambda, a$). Γενικά μπορούμε να χρησιμοποιούμε την προσέγγιση για $\theta \leq 10^\circ = 0{,}175$ rad.