ΑΝΑΛΥΣΗ 1

Τετάρτη 5 Σεπτεμβρίου 2012

ΘΕΜΑ 1

(α) Δώστε τον ορισμό της συνεχής συνάρτησης (1 μον.)

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας) (2 μον.)

(i) Αν η ακολουθία $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει.

(ii) Αν η (α_n) είναι φραγμένη και η (b_n) συγκλίνει τότε η $(\alpha_n b_n)$ συγκλίνει.

(iii) Αν $\alpha_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει.

(iv) Αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε η f είναι φραγμένη.

ΘΕΜΑ 2

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^8 + ax + b = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες (1 μον.)

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in [a,b]$. Δείξτε ότι για κάθε $t \in [0,1]$ υπάρχει $y_t \in [a,b]$ ώστε:

$$f(y_t) = t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$ (1 μον.)

(γ) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $e > 0$ ώστε $f(x) > g(x) + e$ για κάθε $x \in [a,\beta]$. (1 μον.)

ΘΕΜΑ 3

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx \quad , \quad \int \sin(\ln x)\, dx \quad , \quad \int x \cos x\, dx$$

(2,5 μον.)

ΘΕΜΑ 4

Εξετάσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

? $\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ / $\frac{3^n}{n!}$

0 · φραγμεν =0

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\sin k)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3}$$

0 φραγμ

και $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$ (2,5 μον.).