Κεφ. 6 Τεχνικές ολοκλήρωσης

§1 Πίνακας βασικών ολοκληρωμάτων

- Συμβολισμός: Αν f μία συνάρτηση, συμβολίζουμε μία παράγουσά της ως $\int f(x)\,dx$

- Βασικά ολοκληρώματα: $\forall \alpha \neq -1$: $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$, $(\alpha = -1)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

§2 Υπολογισμός του $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)dx$

Τότε $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

Παράδειγμα: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \underset{\uparrow}{=} \int e^u\, du = e^u + C = e^{\sqrt{x}} + C$

$u = \sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

§3 Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα: Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ , \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \ , \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \ , \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \ , \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos((\alpha-\beta)x) - \cos((\alpha+\beta)x)\right]$$

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin((\alpha+\beta)x) + \sin((\alpha-\beta)x)\right]$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos((\alpha+\beta)x) + \cos((\alpha-\beta)x)\right]$$

Παραδείγματα: 1) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos(2x)\, 2dx \underset{\substack{\uparrow \\ u=2x,\ du = 2dx}}{=} \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos u\, du$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

2) Έστω $m = 2k+1$, $n = 2\ell$ με $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Υπολογίζουμε

$$\int \cos^m x \sin^n x\, dx = \int \cos^{2k} x \sin^{2\ell} x \cos x\, dx = \int (\cos^2 x)^k \sin^{2\ell} x \cos x\, dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^k \sin^{2\ell} x \cos x\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ u = \sin x,\ du = \cos x\, dx}}{=} \int (1-u^2)^k u^{2\ell}\, du = \int \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-u^2)^j u^{2\ell}\, du$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \int u^{2(j+\ell)}\, du = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{u^{2(j+\ell)+1}}{2(j+\ell)+1} + C$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{\binom{k}{j}}{2(j+\ell)+1} \sin^{2(j+\ell)+1} x + C$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία αυτή υπολογίζουμε π.χ.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \,(1-\sin^2 x)\cos x \, dx \underset{\substack{\uparrow \\ u=\sin x,\ du=\cos x\, dx}}{=} \int u^2(1-u^2)\,du$$

$$= \int (u^2-u^4)\,du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

Με ανάλογη διαδικασία υπολογίζονται τα ολοκληρώματα $\int \cos^m x \cdot \sin^n x \, dx$ για $m = 2k$ και $n = 2\ell+1$, $m,n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

3) $$\int \tan^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \tan x - x + c$$

$$\int \cot^2 x \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\cot x - x + c$$

§4 Υπολογισμός $\int f(x)\,dx$

Με αντικατάσταση $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$. Τότε $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$

Παραδείγματα: 1) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{\alpha^2-x^2}$, θέτουμε $x = \alpha\sin t \Rightarrow dx = \alpha\cos t\,dt$ και τότε $\sqrt{\alpha^2-x^2} = \alpha\cos t$.

π.χ. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ x=3\sin t,\ dx=3\cos t\,dt}}{=} \int \frac{3\cos t\,dt}{(9\sin^2 t)(3\cos t)} = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9}\cot t + c$$

$$= -\frac{1}{9}\,\frac{\cos t}{\sin t} + c = -\frac{1}{9}\,\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + c = -\frac{1}{9}\,\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{x/3} + c = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$$

2) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{x^2-\alpha^2}$, θέτουμε $x = \frac{\alpha}{\cos t}$

$\Rightarrow dx = \frac{\alpha \sin t}{\cos^2 t} dt$ και τότε $\sqrt{x^2-\alpha^2} = \alpha\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \alpha\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = \alpha \tan t$

π.χ. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{2\tan t}{\frac{2}{\cos t}} \cdot \frac{2\tan t}{\cos t} dt = \int 2 \tan^2 t \, dt$

$x = \frac{2}{\cos t}$, $dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t} dt = 2\frac{\tan t}{\cos t} dt$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-4} = 2\tan t$, $t = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)$

$$= 2\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = 2\int\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right) dt = 2\tan t - 2t + C$$

$$= \sqrt{x^2-4} - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + C$$

3) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{x^2+\alpha^2}$, θέτουμε $x = \alpha \tan t$

$\Rightarrow dx = \frac{\alpha}{\cos^2 t} dt$ και τότε $\sqrt{x^2+\alpha^2} = \frac{\alpha}{\cos t}$.

π.χ. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4} dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\tan^4 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^4 t} dt$

$x = \tan t$, $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos t}$

$\sin t = \cos t \cdot \tan t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\underset{\uparrow}{=} \int \frac{du}{u^4} = -u^{-3} + C = -\frac{1}{3\sin^3 t} + C \underset{\downarrow}{=} -\frac{1}{3}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{x^3} + C$$

$u = \sin t$, $du = \cos t \, dt$

§5 Ολοκλήρωση κατά μέρη

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Παραδείγματα: 1) $\int x \cdot \sin x\,dx = -\int x(\cos x)'\,dx = -x\cdot\cos x + \int \cos x\,dx$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

2) $I = \int e^x \cos x\,dx = \int (e^x)'\cos x\,dx = e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx$

$$= e^x\cos x + \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

$\Rightarrow 2I = e^x\cos x + e^x\sin x + C \Rightarrow I = e^x\left(\frac{\cos x + \sin x}{2}\right) + C$

3) $\int \ln(x+\sqrt{x})\,dx = \int (x)'\ln(x+\sqrt{x})\,dx = x\ln(x+\sqrt{x}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

και $\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = 2\int \frac{x\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \frac{u^3}{u^2+u}\left(1+\frac{1}{2u}\right)du$

$\left[u=\sqrt{x},\ du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right]$

$$= \int \frac{2u^2+u}{u+1}\,du = \int \left(2u-1+\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$2u^2+u = (u+1)(2u-1)+1$$

$$= u^2 - u + \ln(u+1) + C$$

$$= x - \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1) + C$$

§ 6 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Έστω $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_n x^n + \quad + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \quad + \beta_1 x + \beta_0}$ μία ρητή συνάρτηση.

Αν $\deg(p) = n \geq m = \deg(q)$, τότε υπάρχουν πολυώνυμα $\pi(x)$ και $u(x)$ τ.ω. $p(x) = \pi(x) q(x) + u(x)$ με $\deg(u) < m$, συνεπώς

$$\int f(x)\,dx = \int \pi(x)\,dx + \int \frac{u(x)}{q(x)}\,dx .$$

Υποθέτουμε ότι $n < m$. Βγάζοντας το α_n από τον αριθμητή και το β_m από τον παρονομαστή ως κοινό παράγοντα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_n = \beta_m = 1$.

Επιπλέον, κάθε πολυώνυμο γράφεται ως γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων όρων. Γράφουμε λοιπόν

$$q(x) = (x-\gamma_1)^{r_1} \cdots (x-\gamma_k)^{r_k} (x^2 + \delta_1 x + \varepsilon_1)^{s_1} \cdots (x^2 + \delta_\ell x + \varepsilon_\ell)^{s_\ell}$$

όπου κάθε γ_i είναι ρίζα του q και κάθε $x^2 + \delta_j x + \varepsilon_j$ έχει αρνητική διακρίνουσα. Μάλιστα $m = r_1 + \cdots + r_k + 2s_1 + \cdots + 2s_\ell$.

Άρα $f(x) = \dfrac{x^n + \alpha_{n-1} x^n + \cdots \quad + \alpha_1 x + \alpha_0}{(x-\gamma_1)^{r_1} \cdots (x-\gamma_k)^{r_k} (x^2+\delta_1 x+\varepsilon_1)^{s_1} \cdots (x^2+\delta_\ell x+\varepsilon_\ell)^{s_\ell}}$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα, δηλαδή βρίσκουμε συντελεστές

$A_{11} \cdots A_{1r_1}, \cdots, A_{k1} \cdots A_{kr_k}, \begin{cases} B_{11} \cdots B_{1s_1}, \cdots, B_{\ell 1} \cdots B_{\ell s_\ell} \\ \Gamma_{11} \cdots \Gamma_{1s_1}, \cdots, \Gamma \end{cases}$

ώστε

$$f(x) = \frac{A_{11}}{x-\gamma_1} + \frac{A_{12}}{(x-\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(x-\gamma_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{A_{k1}}{x-\gamma_k} + \frac{A_{k2}}{(x-\gamma_k)^2} + \cdots + \frac{A_{kr_k}}{(x-\gamma_k)^{r_k}}$$

$$+ \frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+\delta_1 x+\varepsilon_1} + \frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+\delta_1 x+\varepsilon_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1s_1}x+\Gamma_{1s_1}}{(x^2+\delta_1 x+\varepsilon_1)^{s_1}} + \cdots + \frac{B_{\ell 1}x+\Gamma_{\ell 1}}{(x^2+\delta_\ell x+\varepsilon_\ell)} + \cdots + \frac{B_{\ell s_\ell}x+\Gamma_{\ell s_\ell}}{(x^2+\delta_\ell x+\varepsilon_\ell)^{s_\ell}}$$

6α) <u>ολοκληρώματα της μορφής</u> $\int \frac{1}{(x-\gamma)^k}\,dx = -\frac{1}{(k-1)(x-\gamma)^{k-1}} + c$ <u>αν $k \geq 2$</u>

$= \ln|x-\gamma| + c$, <u>αν $k=1$</u>

6β) <u>ολοκληρώματα της μορφής</u> $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\delta x+\varepsilon)^k}\,dx$ με $x^2+\delta x+\varepsilon$ να έχει αρνητική διακρίνουσα

Γράφουμε $Bx+\Gamma = \frac{B}{2}(2x+\delta) + \left(\Gamma - \frac{B\delta}{2}\right)$ και ανάγόμαστε στα

$$\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\delta x+\varepsilon)^k}\,dx = \frac{B}{2}\underbrace{\int \frac{2x+\delta}{(x^2+\delta x+\varepsilon)^k}\,dx}_{=I_1} + \left(\Gamma - \frac{B\delta}{2}\right)\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+\delta x+\varepsilon)^k}\,dx}_{=I_2}$$

- Το I_1 υπολογίζεται με αντικατάσταση $u = x^2+\delta x+\varepsilon$

- Για το I_2, γράφουμε $x^2+\delta x+\varepsilon = \left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{4\varepsilon-\delta^2}{4}$ και κάνοντας την αντικατάσταση $x+\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{4\varepsilon-\delta^2}}{2}\,y$, έχουμε

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+\delta x+\varepsilon)^k} = \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2 + \frac{4\varepsilon-\delta^2}{4}\right)^k}\,dx = \frac{\sqrt{4\varepsilon-\delta^2}}{2}\int \frac{dy}{\left(\frac{4\varepsilon-\delta^2}{4}y^2 + \frac{4\varepsilon-\delta^2}{4}\right)^k}$$

$$= \left(\frac{4\varepsilon-\delta^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-k}\underbrace{\int \frac{dy}{(y^2+1)^k}}_{=I_k}$$

- Υπολογισμός I_k: $I_1 = \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan y + c$.

Επίσης

$$I_k = \int \frac{dy}{(y^2+1)^k} = \int y' \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy = \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(y^2+1)^{k+1}}\,dy$$

$$\Rightarrow I_K = \frac{y}{(y^2+1)^K} + 2K \int \frac{(y^2+1)-1}{(y^2+1)^{K+1}} dy = \frac{y}{(y^2+1)^K} + 2K I_K - 2K I_{K+1}$$

Άρα $I_{K+1} = \frac{1}{2K}\left(\frac{y}{(y^2+1)^K} + (2K-1) I_K\right)$

Παράδειγμα: $I = \int \frac{x+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$

Γράφουμε $\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1} + \frac{\delta x+\varepsilon}{(x^2+1)^2}$

$$\Leftrightarrow x+1 = \alpha(x^2+1)^2 + (\beta x+\gamma)(x-1)(x^2+1) + (\delta x+\varepsilon)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x+1 = (\alpha+\beta)x^4 + (-\beta+\gamma)x^3 + (2\alpha+\beta-\gamma+\delta)x^2 + (-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon)x + (\alpha-\gamma-\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta=0,\ -\beta+\gamma=0,\ 2\alpha+\beta-\gamma+\delta=0,\ -\beta+\gamma-\delta+\varepsilon=1,\ \alpha-\gamma-\varepsilon=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{1}{2},\ \gamma=-\frac{1}{2},\ \delta=-1,\ \varepsilon=0$$

Άρα $I = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+1}dx - \int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

και $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + c$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int\frac{x}{x^2+1}dx + \int\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + c$$

$$\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)} + c$$

Συνεπώς $I = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + c$