ΑΠΕΙ II

Κεφ 1 : Υπακολουθίες

§1 Βασικές έννοιες

• <u>Ορ</u> : Έστω $(\alpha_n)_n$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Μία ακολουθία $(b_n)_n$ καλείται υπακολουθία της $(\alpha_n)_n$ αν υπάρχει μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $(k_n)_n$ φυσικών αριθμών (δηλ $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ με $k_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$) τ.ω. $b_n = \alpha_{k_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (ισοδύναμα $(b_n)_n = (\alpha_{k_n})_n$).

[Παρατήρηση: $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $k_n \geq n$.]

• <u>Παραδείγματα</u> : Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία.

(i) Έστω $m \in \mathbb{N}$. Το τελικό τμήμα $(\alpha_{n+m-1})_n$ είναι υπακολουθία της $(\alpha_n)_n$.

(ii) Η υπακολουθία $(\alpha_{2n})_n$ των άρτιων όρων της $(\alpha_n)_n$ έχει όρους:

$\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots$

(iii) Η υπακολουθία $(\alpha_{n^3})_n$ της $(\alpha_n)_n$ έχει όρους

$\alpha_1, \alpha_8, \alpha_{27}, \alpha_{64}, \alpha_{125}, \dots$

• <u>Σύγκλιση και υπακολουθίες</u> : Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία

(i) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, τότε $\forall (\alpha_{k_n})_n$ υπακολουθία της $(\alpha_n)_n$ έχουμε ότι $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$. Άρα για να δείξουμε ότι $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\not\to} \alpha$

αρκεί να βρούμε μία υπακολουθία $(\alpha_{k_n})_n$ της $(\alpha_n)_n$ τ.ω

$\alpha_{k_n} \overset{n\to\infty}{\not\to} \alpha$.

(ii) Αντίστροφα, αν κάθε υπακολουθία $(\alpha_{k_n})_n$ της $(\alpha_n)_n$ συγκλίνει,

τότε υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$.

[Και συνεπώς $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, $\forall (\alpha_{k_n})_n$ υπακολουθία της $(\alpha_n)_n$.]

§2 Θεώρημα Bolzano-Weierstrass και οριακά σημεία

- Θεώρημα: Κάθε ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία.

- Θεώρημα (Bolzano-Weierstrass): Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

[Απ: από προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχει μονότονη και φραγμένη υπακολουθία που συνεπώς συγκλίνει]

- Ορισμός (Οριακά σημεία): Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία και $x \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι το x είναι οριακό σημείο (ή υπακολουθιακό όριο) της $(\alpha_n)_n$ αν υπάρχει υπακολουθία $(\alpha_{k_n})_n$ της $(\alpha_n)_n$ τ.ω. $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$. Δηλαδή, ένα $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακό σημείο της $(\alpha_n)_n$ αν $\forall \varepsilon > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq m$ τ.ω $|\alpha_n - x| < \varepsilon$

§3. Ανώτερο και κατώτερο όριο

- Έστω $(a_n)_n$ φραγμένη ακολουθία. Θέτουμε

$$K = \{ x \in \mathbb{R} : x \text{ οριακό σημείο της } (a_n)_n \}.$$

Τότε έχουμε $K \neq \emptyset$ (από Θεώρημα Bolzano-Weierstrass)

και αποδεικνύεται ότι $\sup(K), \inf(K) \in K$.

Άρα υπάρχουν υπακολουθίες $(a_{k_n})_n$ και $(a_{\ell_n})_n$ της (a_n)

τ.ω. $a_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sup K$ και $a_{\ell_n} \xrightarrow{n\to\infty} \inf K$.

- Ορίζουμε $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup K$ ανώτερο όριο της $(a_n)_n$

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf K$ κατώτερο όριο της $(a_n)_n$

Άρα $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός x

για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία $(a_{k_n})_n$ της $(a_n)_n$ τ.ω. $a_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Ομοίως $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός x

για τον οποίο υπάρχει υπακολουθία $(a_{\ell_n})_n$ της $(a_n)_n$ τ.ω. $a_{\ell_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$.

- Πρόταση: Η $(a_n)_n$ συγκλίνει ΑΝΝ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

- Θεώρημα (εναλλακτική περιγραφή των $\limsup\limits_{n\to\infty}$ και $\liminf\limits_{n\to\infty}$):

Έστω $(a_n)_n$ φραγμένη ακολουθία.

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $\beta_n = \sup\{\alpha_k : k \geq n\}$

Τότε $\limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$

[η $(\beta_n)_n$ είναι φθίνουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει.]

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $\gamma_n = \inf\{\alpha_k : k \geq n\}$

Τότε $\liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$

[η $(\gamma_n)_n$ είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει].

• <u>Θεώρημα</u> (Χαρακτηρισμοί των limsup και liminf) Έστω $(\alpha_n)_n$ φραγμένη ακολουθία και $x \in \mathbb{R}$. Τότε

(i) $x \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ ANN $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : \alpha_n > x-\varepsilon\}$ είναι άπειρο.

(ii) $x \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ ANN $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}\ \alpha_n > x+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

(iii) $x = \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ ANN $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : \alpha_n > x-\varepsilon\}$ είναι άπειρο και το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : \alpha_n > x+\varepsilon\}$ πεπερασμένο.

(iv) $x \geq \liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ ANN $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : \alpha_n < x+\varepsilon\}$ είναι άπειρο

(v) $x \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ ANN $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : \alpha_n < x-\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο

(vi) $x = \liminf\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ ANN $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : \alpha_n < x+\varepsilon\}$ είναι άπειρο και το σύνολο $\{n\in\mathbb{N} : \alpha_n < x-\varepsilon\}$ πεπερασμένο.

• **Ορ**: Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία.

→ Αν η $(a_n)_n$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε ορίζουμε $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

→ Αν η $(a_n)_n$ ——— κάτω φραγμένη, ——— $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

§4 Ακολουθίες Cauchy

• **Παρατήρηση**: Έστω $(a_n)_n$ με $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R}$. Τότε εξ' ορισμού

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$m \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

και συνεπώς $n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$

• **Ορ**: Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία. Η $(a_n)_n$ καλείται Cauchy ακολουθία

αν $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n, m \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

• **Πρόταση**: Κάθε Cauchy ακολουθία είναι φραγμένη

• **Πρόταση**: Αν μία Cauchy ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει

• **Θεώρημα**: Έστω $(a_n)_n$ ακολουθία. Τότε η $(a_n)_n$ συγκλίνει ANN είναι Cauchy ακολουθία.

ΑΣΚ: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία τ.ω. $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \in \mathbb{R}$. Ν.δ.ο. για κάθε υπακολουθία $(\alpha_{k_n})_n$ ισχύει ότι $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$.

Λύση: $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, άρα $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$

Επειδή $k_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $n \geq n_0 \Rightarrow k_n \geq n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_{k_n} - \alpha| < \varepsilon$

που αποδεικνύει ότι $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$.

ΑΣΚ: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία. Ν.δ.ο. το $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακό σημείο της $(\alpha_n)_n$ ΑΝΝ $\forall \varepsilon > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq m$ τ.ω. $|\alpha_n - x| < \varepsilon$

Λύση "$\Rightarrow$" Αν το x είναι οριακό σημείο, υπάρχει μία υπακολουθία $(\alpha_{k_n})_n$ ώστε $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$, δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_{k_n} - x| < \varepsilon$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, θέτοντας $n_1 = \max(m, n_0)$ ισχύει $|\alpha_{k_{n_1}} - x| < \varepsilon$ με $k_{n_1} \geq n_1 \geq m$
$k_{n_1} \geq n_1 \geq n_0$

"$\Leftarrow$" Παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και $m = 1$: από την υπόθεση $\exists k_1 \geq 1$ ώστε $|\alpha_{k_1} - x| < 1$

Έπειτα παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και $m = k_1 + 1$: ———— $\exists k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$ ώστε $|\alpha_{k_2} - x| < \frac{1}{2}$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ ώστε $|\alpha_{k_n} - x| < \frac{1}{n}$ και προφανώς $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$

ΑΣΚ: Έστω $(\alpha_n)_n = ((-1)^n)_n$. Ν.δ.ο. $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ και $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n = -1$.

Λύση: Έστω $(\alpha_{k_n})_n$ υπακολουθία της $(\alpha_n)_n$ τ.ω. $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}$

Τότε είτε $\alpha_{k_n} = +1$, $\forall n \geq n_0$ αρκετά μεγάλο

είτε $\alpha_{k_n} = -1$, ————

Επομένως, η $(\alpha_n)_n$ έχει δύο οριακά σημεία: το $1 = \limsup_{n\to\infty} \alpha_n$ και το $-1 = \liminf_{n\to\infty} \alpha_n$

ΑΣΚ: Έστω $(a_n)_n$ μία φραγμένη ακολουθία. Ν.δ.ο η $(a_n)_n$ συγκλίνει ΑΝΝ $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$

Λύση "$\Rightarrow$" Αν η $(a_n)_n$ συγκλίνει, τότε κάθε υπακολουθία συγκλίνει στο ίδιο όριο. Άρα $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

"$\Leftarrow$" Έστω $l = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Αν η $(a_n)_n$ δεν συγκλίνει, τότε $a_n \overset{n\to\infty}{\not\to} l$, δηλαδή

$\exists \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq n_0$ ώστε $|a_n - l| \geq \varepsilon$. Έπεται λοιπόν ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : |a_n - l| \geq \varepsilon\}$ είναι άπειρο και υπάρχει μία υπακολουθία $(a_{k_n})_n$ τ.ω. $|a_{k_n} - l| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή η $(a_{k_n})_n$ είναι φραγμένη, γνωρίζουμε από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass ότι υπάρχει μία υπακολουθία $(a_{k_{s_n}})_n$ τ.ω.

$a_{k_{s_n}} \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{l}$ με $|\tilde{l} - l| \geq \varepsilon$. Εξ' ορισμού των $\begin{cases} \limsup_{n\to\infty} a_n \\ \liminf_{n\to\infty} a_n \end{cases}$, έχουμε ότι

$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \tilde{l} \leq l - \varepsilon \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n$.

ΑΣΚ: Έστω $(a_n)_n$ μία φραγμένη ακολουθία και $\beta_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$.

Ν.δ.ο. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$

Λύση: Η $(\beta_n)_n$ είναι φθίνουσα και φραγμένη. Άρα $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} l = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι το l είναι οριακό σημείο της $(a_n)_n$.

Από τον χαρακτηρισμό του $\beta_1 = \sup\{a_k : k \geq 1\}$ επιλέγοντας $\varepsilon = 1$, βρίσκουμε ένα $k_1 \geq 1$ τ.ω. $\beta_1 - 1 < a_{k_1} \leq \beta_1$.

Από τον χαρακτηρισμό του $\beta_{k_1+1} = \sup\{a_k : k \geq k_1+1\}$ επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Βρίσκουμε ένα $k_2 \geq k_1 + 1$ τ.ω. $\beta_{k_1+1} - \frac{1}{2} < a_{k_2} \leq \beta_{k_1+1}$

Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ ώστε $\beta_{k_n+1} - \frac{1}{n} < a_{k_{n+1}} \leq \beta_{k_n+1}$

Από κριτήριο παρεμβολής οι ακολουθίες $(\beta_{k_n+1})_n$ και $(\alpha_{k_n})_n$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο ℓ. Άρα το ℓ είναι οριακό σημείο της $(\alpha_n)_n$. Θ.δ.ο είναι το μέγιστο οριακό σημείο της $(\alpha_n)_n$. Πράγματι αν η υπακολουθία $(\alpha_{k_n})_n$ συγκλίνει στο $x \in \mathbb{R}$, τότε $\alpha_{k_n} \leq \beta_n = \sup\{\alpha_k : k \geq n\}$ επειδή $k_n \geq n$. Άρα $x \leq \ell$.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $(\alpha_n)_n$ μία φραγμένη ακολουθία και έστω $x \in \mathbb{R}$. Ν.δ.ο.

(i) $x \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ ΑΝΝ $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n > x - \varepsilon\}$ είναι άπειρο

(ii) $x \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ ΑΝΝ $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n > x + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο

<u>Λύση</u> (i) Έστω $(\alpha_{k_n})_n$ τ.ω $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} \ell = \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{k_n \in \mathbb{N} : \alpha_{k_n} \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)\}$ είναι άπειρο και περιέχεται στο σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n > x - \varepsilon\}$ όταν $x \leq \ell$. Αντίστροφα, αν $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n > x - \varepsilon\}$ είναι άπειρο, υπάρχει μία υπακολουθία $(\alpha_{k_n})_n$ τ.ω $\alpha_{k_n} > x - \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και μπορούμε να εξάγουμε μία υπακολουθία $(\alpha_{k_{s_n}})_n$ τ.ω $\alpha_{k_{s_n}} \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{\ell}_\varepsilon$ (ΒΑ B-W). Έχουμε λοιπόν για κάθε $\varepsilon > 0$, ένα οριακό σημείο $\tilde{\ell}_\varepsilon$ της ακολουθίας $(\alpha_n)_n$ τ.ω. $x - \varepsilon \leq \tilde{\ell}_\varepsilon \leq \ell$ και καθώς το $\varepsilon \to 0$ βρίσκουμε ότι $x \leq \ell$.

(ii) Έστω $(\alpha_{k_n})_n$ τ.ω $\alpha_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} \ell = \limsup\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Αν $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n > x + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο, τότε $\exists n_\varepsilon$ ώστε $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \alpha_n \leq x + \varepsilon$. Άρα $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow k_n \geq n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \alpha_{k_n} \leq x + \varepsilon$ και $\ell \leq x + \varepsilon$. Καθώς το $\varepsilon \to 0$ βρίσκουμε $\ell \leq x$. Αντίστροφα, αν για κάποιο $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n > x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο, θ.δ.ο. $x < \ell$. Πράγματι,

υπάρχει μία υπακολουθία $(\alpha_{k_n})_n$ τ.ω. $\alpha_{k_n} > x+\varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και μπορούμε να εξάγουμε μία υπακολουθία $(\alpha_{k_{s_n}})_n$ τ.ω. $\alpha_{k_{s_n}} \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{\ell}$ (ΒΑ Β-W).
Έχουμε λοιπόν $x < x+\varepsilon \leq \tilde{\ell} \leq \ell$.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής και φραγμένη. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass ν.δ.ο. $\exists x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

<u>Λύση</u>: Η f είναι φραγμένη άρα το $\sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = s$ υπάρχει και $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in [a,b]$ με $s - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq s$. Ειδικότερα, για $\varepsilon = \frac{1}{n}$ βρίσκουμε $x_n \in [a,b]$ με $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$. Η ακολουθία $(x_n)_n$ είναι φραγμένη, άρα έπεται από Β-W ότι για μία υπακολουθία $(x_{k_n})_n$ ισχύει $x_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \in [a,b]$. Επιπλέον, έχουμε $s - \frac{1}{k_n} < f(x_{k_n}) \leq s$ άρα $f(x_{k_n}) \xrightarrow{n\to\infty} s$. Όμως έχουμε επίσης ότι $f(x_{k_n}) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$ λόγω της συνέχειας της f. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $s = f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.