§ 5 n-οστή ρίζα και διωνυμικό ανάπτυγμα

- **Θεώρημα:** Έστω $\rho \in \mathbb{R}$ με $\rho > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει μοναδικός $x > 0$ στο $\mathbb{R}$ τ.ω. $x^n = \rho$. Είναι η n-οστή ρίζα του ρ. Συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\rho}$.
- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (n παραγοντικό)

  και επίσης ορίζουμε $0! = 1$. Παρατηρείστε ότι $n! = (n-1)!\, n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ ορίζουμε

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \in \mathbb{N}$$

Τότε για $n = 0, 1, 2 \ldots$, έχουμε $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

- **Λήμμα:** Αν $1 \leq k \leq n$, τότε $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	....	k
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3 +	1 =		
$n=4$	1	4	6	4	1	
....						$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ =
n	....					$\binom{n}{k}$

(Τρίγωνο του Pascal)

- <u>Συμβολισμός</u>: Έστω $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m = \sum_{\ell=1}^{n+1} \alpha_{\ell-1}$$

- <u>Διωνυμικό ανάπτυγμα</u>: Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k$.

(Έχουμε τη σύμβαση ότι $0^0 = 1$)

π.χ. $(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$

§6 Κάποιες ιδιότητες των συνόλων $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

Αρχιμήδειες Ιδιότητες

- <u>Θεώρημα</u>: Το σύνολο $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

- <u>Θεώρημα</u>: Έστω $\varepsilon > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $n\varepsilon > \alpha$.
  ($\varepsilon \in \mathbb{R}$)

- <u>Θεώρημα</u>: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\varepsilon > \frac{1}{n} > 0$.

Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού

- <u>Θεώρημα</u>: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικός $m \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $m \leq x < m+1$. Συμβολίζουμε τον μοναδικό αυτόν m με $\lfloor x \rfloor$.

Πυκνότητα ρητών ($=\mathbb{Q}$) και αρρήτων ($=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$)

- <u>Θεώρημα</u> (πυκνότητα ρητών): Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x<y$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $x<q<y$.

- <u>Θεώρημα</u> (πυκνότητα αρρήτων): Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x<y$ υπάρχει $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ τ.ω. $x<r<y$.

§7 <u>Η απόλυτη τιμή</u>

- <u>Ορ</u>: Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$

Το $|\alpha|$ καλείται η απόλυτη τιμή του α και έχουμε $|\alpha| = \max\{\alpha, -\alpha\}$.

- <u>Βασικές ιδιότητες</u>:
  - $|\alpha| \geq 0$
  - $|\alpha| = |-\alpha|$
  - $|\alpha| \leq \rho \iff -\rho \leq \alpha \leq \rho$
  - $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
  - $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha-\beta|$
  - $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha+\beta|$

§8 Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

ΟΡΙΖΟΥΜΕ:

i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha + (+\infty) = (+\infty) + \alpha = \alpha - (-\infty) = +\infty$$
$$\alpha + (-\infty) = (-\infty) + \alpha = \alpha - (+\infty) = -\infty$$

ii) $\forall \alpha > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \alpha = +\infty$$
$$\alpha \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \alpha = -\infty$$

iii) $\forall \alpha < 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \alpha = -\infty$$
$$\alpha \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \alpha = +\infty$$

iv) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

ΔΕΝ ΟΡΙΖΟΥΜΕ ΤΑ

$(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

- Αν A μη κενό και ΟΧΙ άνω φραγμένο, λέμε $\sup(A) = +\infty$
- Αν A ——— ΟΧΙ κάτω φραγμένο, λέμε $\inf(A) = -\infty$

§ 9 Κάποιες σημαντικές ανισότητες

- Ανισότητα Bernoulli: Αν $x > -1$, τότε

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Ανισότητα Αριθμητικού - Γεωμετρικού μέσου: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n}$$

- Ανισότητα Cauchy-Schwarz: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, τότε

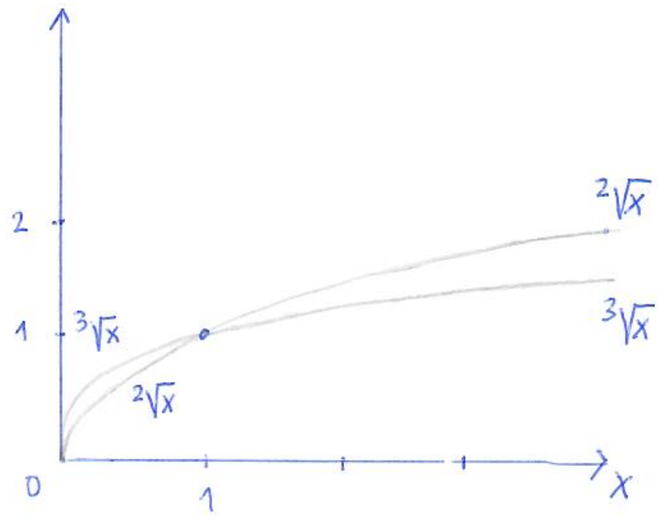
$$\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j \beta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \right)^{1/2}.$$

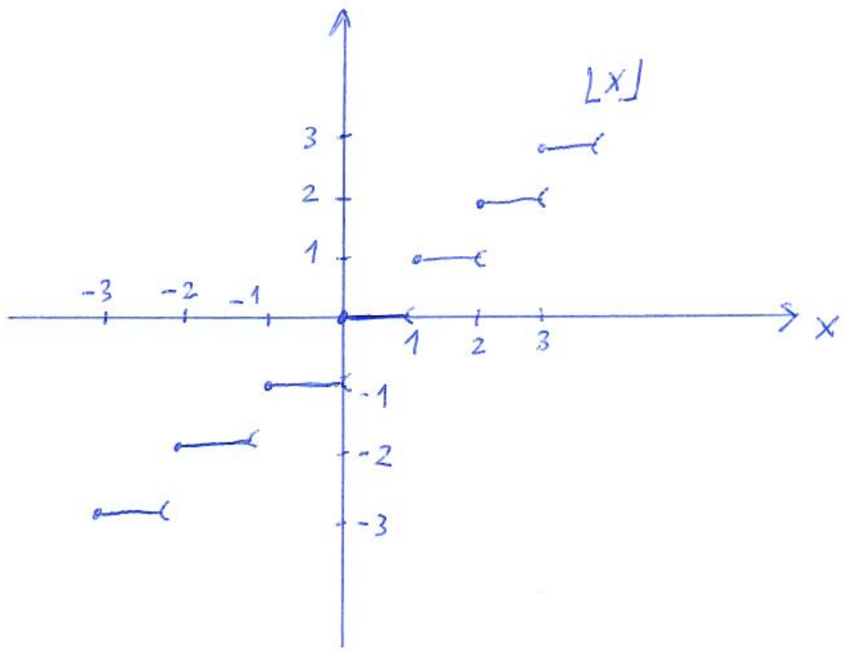
Γεωμετρική ερμηνεία: Αν $\vec{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\underbrace{\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j \right|}_{= |\vec{A} \cdot \vec{B}|} \leq \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \right)^{1/2}}_{= \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\|}$$

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| \leq \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \quad \text{με} \begin{cases} \cdot \ \text{εσωτερικό γινόμενο στο } \mathbb{R}^n \\ \| \ \| \ \text{Ευκλείδεια νόρμα στο } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Γραφικές παραστάσεις της n-οστής ρίζας και του ακέραιου μέρους.





$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ΑΣΚ: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ και $-A = \{-\alpha : \alpha \in A\}$.

Δ.ο. αν το A είναι κάτω φραγμένο, τότε το $-A$ είναι άνω φραγμένο και ισχύει $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Λύση: Έστω x κάτω φράγμα του A, τότε το $-x$ είναι άνω φράγμα του $-A$ και γνωρίζουμε από την αρχή πληρότητας ότι υπάρχει $\sup(-A)$. Επιπλέον το $-\sup(-A)$ είναι κάτω φράγμα του A και μάλιστα το μέγιστο κάτω φράγμα του A. Πράγματι αν $\beta \in \mathbb{R}$ κατω φράγμα του A τότε $-\beta$ είναι άνω φράγμα του $-A$ και ισχύει $-\beta \geq \sup(-A) \Leftrightarrow \beta \leq -\sup(-A)$. Άρα $\inf(A) = -\sup(-A)$.

ΑΣΚ: Έστω $A \subseteq$ μη κενό, άνω φραγμένο.

Δ.ο. το A έχει $\max(A)$ ανν $\sup(A) \in A$

Λύση: "$\Rightarrow$" Αν $\alpha = \max(A)$, τότε α είναι άνω φράγμα του A. Επιπλέον, αν β είναι άνω φράγμα του A, τότε $\beta \geq \alpha$ επειδή $\alpha \in A$.

Άρα $\sup(A) = \alpha = \max(A) \in A$.

"$\Leftarrow$" Αν $\tilde{\alpha} = \sup(A)$, τότε $\tilde{\alpha}$ είναι άνω φράγμα του A.

Εξ' υποθέσεως $\tilde{\alpha} = \sup(A) \in A$, άρα $\tilde{\alpha} = \max(A)$.

ΑΣΚ: Δ.ο. $2^n > n^2$, $\forall n \geq 5$

Λύση: Για $n=5$ ισχύει $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

Έστω $K \geq 5$ τ.ω. $2^K > K^2$.

Τότε, $2^{K+1} = 2^K \cdot 2 > 2K^2 > (K+1)^2$.

αν ισχύει η ανισότητα $K^2 > 2K+1$

Όμως, αφού $K \geq 5$, έχουμε $K^2 > 3K = 2K + K > 2K+1$.

Άρα ισχύει ότι $2^{K+1} > (K+1)^2$ και αποδείξαμε ότι $2^K > K^2$, $\forall K \geq 5$.

ΑΣΚ: Έστω $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$.

Δ.ο. $\left(\sum_{K=1}^{n} (\alpha_K + \beta_K)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{K=1}^{n} \alpha_K^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{K=1}^{n} \beta_K^2\right)^{1/2}$ (ανισότητα Minkowski)

Λύση: Γράφουμε

$$\sum_{K=1}^{n} (\alpha_K + \beta_K)^2 = \sum_{K=1}^{n} \alpha_K (\alpha_K + \beta_K) + \sum_{K=1}^{n} \beta_K (\alpha_K + \beta_K)$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{K=1}^{n} \alpha_K^2\right)^{1/2} \left(\sum_{K=1}^{n} (\alpha_K + \beta_K)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{K=1}^{n} \beta_K^2\right)^{1/2} \left(\sum_{K=1}^{n} (\alpha_K + \beta_K)^2\right)^{1/2}$$

Κεφ 2 : Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

§1 Βασικές Έννοιες

• Ορ : Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μία συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Συνηθίζουμε να συμβολίζουμε τις τιμές της με $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$

• Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αναφερόμαστε στον αριθμό α_n ως τον n-οστό όρο της ακολουθίας. Επίσης συμβολίζουμε μία ακολουθία ως $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\alpha_n\}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_n$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$

• Παραδείγματα:

α) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Η σταθερή ακολουθία $(\alpha_n)_n$ με τιμή c τ.ω.

$$\alpha_n = c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

β) $(\alpha_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$. Τότε, $\alpha_1 = \frac{1}{1} = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}, \dots$

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha_n)_n = (\alpha^n)_n$, τότε $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^2$, $\alpha_3 = \alpha^3 \dots$

δ) $(\alpha_n)_n = (2n-1)_n$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\dots$

ε) (Αναδρομικός ορισμός) $\alpha_1 = 1$ και $\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$\alpha_{n+1} = \sqrt{1+\alpha_n}$ (ισοδύναμα $\forall n \geq 2 : \alpha_n = \sqrt{1+\alpha_{n-1}}$)

$\Rightarrow \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$, $\alpha_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\dots$

στ) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$\alpha_1 = \alpha$ και $\forall n \in \mathbb{N}: \alpha_{n+1} = \alpha \cdot \alpha_n$. Τότε $\alpha_n = \alpha^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

ζ) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ και $\forall n \in \mathbb{N}$: $\alpha_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1}$. Τότε

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 3, \alpha_5 = 5, \alpha_6 = 8, \alpha_7 = 13 \ldots$

η) $\alpha_n = \begin{cases} 3n^2 & \text{αν } n = 2K \\ \dfrac{1}{7n} & \text{αν } n = 2K-1 \end{cases}$ $(K \in \mathbb{N})$. Τότε $\begin{cases} \alpha_4 = 48 \\ \alpha_5 = \dfrac{1}{45} \end{cases}$

• <u>Ορ</u>: Έστω $(\alpha_n)_n$ και (β_n) ακολουθίες.

(i) Λέμε ότι $(\alpha_n)_n = (\beta_n)_n$ αν ισχύει $\alpha_n = \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Ορίζουμε $(\alpha_n)_n + (\beta_n)_n = (\alpha_n + \beta_n)_n$

$(\alpha_n)_n - (\beta_n)_n = (\alpha_n - \beta_n)_n$

$(\alpha_n)_n \cdot (\beta_n)_n = (\alpha_n \beta_n)_n$

Αν $\beta_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $\dfrac{(\alpha_n)_n}{(\beta_n)_n} = \left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_n$

• <u>Ορ</u> (Σύνολο τιμών): Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία. Το σύνολο τιμών της $(\alpha_n)_n$ είναι το σύνολο $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$.

• <u>Παραδείγματα</u>: i) Η $(\alpha_n)_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)_n$ έχει ως σύνολο τιμών, το σύνολο $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

ii) Η $(\alpha_n)_n = ((-1)^n)_n$ έχει ως σύνολο τιμών το $\{-1, 1\}$.