2) Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \left[\ln t\right]_1^x = \ln x \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty.$$ Άρα $\int_1^\infty \frac{dt}{t} = +\infty$.

3) Έστω $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x$ (δεν είναι φραγμένη).

Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε $(x\ln x - x)' = \ln x$ και

$$\int_x^1 \ln t\, dt = \left[t\ln t - t\right]_x^1 = -1 - x\ln x + x \xrightarrow{x\to 0^+} -1$$

$$\left[\text{L'Hospital } \lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0\right].$$

Άρα $\int_0^1 \ln t\, dt = -1$

4) Έστω $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \underset{\uparrow}{=} -\int_0^x \frac{\varphi'(t)\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}} = -\int_1^{1-x}\frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_{1-x}^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left[2\sqrt{s}\right]_{1-x}^1 = 2(1-\sqrt{1-x})$$

$\varphi(t)=1-t$, $\varphi'(t)=-1$, $\varphi(0)=1$, $\varphi(x)=1-x$

Άρα $$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x\to1^-}\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x\to1^-}\left(2(1-\sqrt{1-x})\right) = 2$$

• <u>3η περίπτωση</u>: Υποθέτουμε ότι $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$ και $b\in\mathbb{R}$ ή $b=+\infty$.

Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ τ.ω. $\forall\, a<x<y<b$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,y]$.

Θεωρούμε τυχόν $c\in(a,b)$. Αν υπάρχουν τα $\int_a^c f(x)dx$ και $\int_c^b f(x)dx$ (*)

τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ υπάρχει και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Αν ένα από τα δύο ολοκληρώματα στο (*) δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το $\int_a^b f(x)\,dx$ δεν ορίζεται. Αν ένα από τα δύο ολοκληρώματα στο (*) υπάρχει και το άλλο είναι $\pm\infty$ ή και τα δύο είναι είτε $+\infty$ είτε $-\infty$, τότε το $\int_a^b f(x)dx = \pm\infty$

Παρατήρηση: ο προηγούμενος ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του $c \in (a,b)$. Πράγματι, αν $a < c_1 < c_2 < b$, τότε

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^b f(x)dx = \int_a^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^b f(x)dx$$

Παραδείγματα: 1) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Έχουμε

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t\,dt}{t^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = +\infty$$

Ομοίως βρίσκουμε $\int_{-\infty}^0 f(t)dt = -\infty$. Άρα το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ δεν ορίζεται (απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)+(-\infty)$).

2) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Τότε

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Ομοίως βρίσκουμε $\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$, άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \pi$.

3) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$. Τότε

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^t dt = \lim_{x\to+\infty} (e^x - 1) = +\infty$$

και $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{0} e^{t}\,dt = \lim_{x\to-\infty} (1-e^{x}) = 1.$

Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty.$

4) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|e^{-x^2}$. Τότε

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{x} t e^{-t^2} dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Ομοίως βρίσκουμε $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-x^2} dx = 1.$

§5 Το κριτήριο του ολοκληρώματος

- Παρατήρηση: Έστω $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq a$ και f ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$, $\forall x > a$. Έστω επίσης $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Τότε η F είναι αύξουσα στο $(a,+\infty)$. Άρα $\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{x\to\infty} F(x)$ υπάρχει αν η F είναι φραγμένη, αλλιώς $\int_a^{\infty} f(t)dt = +\infty$.

- Θεώρημα: Έστω $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ μη αρνητική και φθίνουσα. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει ανν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(t)dt$ υπάρχει.

- Παραδείγματα: 1) Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ αποκλίνει. Πράγματι, έστω $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $\forall x \geq 2$. Τότε η f είναι μη αρνητική και φθίνουσα με

$$\int_2^{\infty} f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{dt}{t \ln t} \overset{\varphi(t)=\ln t}{=} \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \lim_{x\to\infty} \left[\ln \varphi(t)\right]_2^x$$

$$\Rightarrow \int_2^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \left(\ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \right) = +\infty$$

2) Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ συγκλίνει. Έστω $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, $\forall x \geq 2$.

Τότε η f είναι μη αρνητική και φθίνουσα με

$$\int_2^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt \underset{\varphi(t)=\ln t}{=} \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{1}{\varphi(t)} \right]_2^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{\ln 2} < \infty .$$

<u>ΑΣΚ</u> : Έστω $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ μη αρνητική και φθίνουσα. Ν.δ.ο. η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(t)dt$ υπάρχει

<u>Λύση</u>: Από το γεγονός ότι η f είναι φθίνουσα προκύπτει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[k,k+1]$ και $f(k+1)\le \int_k^{k+1} f(t)dt \le f(k)$, $\forall k\in\mathbb{N}$

Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει, τότε για κάθε $x>1$ έχουμε

$$\int_1^x f(t)dt \le \int_1^{\lfloor x\rfloor+1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor}\int_k^{k+1} f(t)dt \le \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor} f(k) \le \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$$

$\lfloor x\rfloor$ = ακέραιο μέρος του x

Έπεται λοιπόν ότι το $\int_1^{\infty} f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)dt$ υπάρχει.

Αντίστροφα, αν το $\int_1^{\infty} f(t)dt$ υπάρχει, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$S_n = f(1)+f(2)+\dots+f(n) \le f(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)dt = f(1)+\int_1^n f(t)dt$$

$\Rightarrow S_n \le f(1)+\int_1^{\infty} f(t)dt < \infty$. Αφού η ακολουθία $(S_n)_n$ των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ συγκλίνει.

Κεφ. 6 Τεχνικές ολοκλήρωσης

§1 Πίνακας βασικών ολοκληρωμάτων

- Συμβολισμός: Αν f μία συνάρτηση, συμβολίζουμε μία παράγουσά της ως $\int f(x)\,dx$
- Βασικά ολοκληρώματα: $\forall \alpha \neq -1$: $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

$$\int e^x dx = e^x + c, \qquad (\alpha=-1) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

§2 Υπολογισμός του $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$

Θεωρούμε την αντικατάσταση $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)dx$

Τότε $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du$

Παράδειγμα: $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ u=\sqrt{x},\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}}}{=} \int e^u du = e^u + c = e^{\sqrt{x}} + c$

§3 Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα: Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos((\alpha-\beta)x) - \cos((\alpha+\beta)x)\right]$$

$$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\sin((\alpha+\beta)x) + \sin((\alpha-\beta)x)\right]$$

$$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left[\cos((\alpha+\beta)x) + \cos((\alpha-\beta)x)\right]$$

Παραδείγματα: 1) $\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos(2x)\, 2dx \underset{\substack{\uparrow \\ u=2x,\ du=2dx}}{=} \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int \cos u \, du$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

2) Έστω $m = 2k+1$, $n = 2\ell$ με $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Υπολογίζουμε

$$\int \cos^m x \sin^n x \, dx = \int \cos^{2k} x \sin^{2\ell} x \cos x \, dx = \int (\cos^2 x)^k \sin^{2\ell} x \cos x \, dx$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^k \sin^{2\ell} x \cos x \, dx \underset{\substack{\uparrow \\ u=\sin x,\ du=\cos x\, dx}}{=} \int (1-u^2)^k u^{2\ell} du = \int \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-u^2)^j u^{2\ell} du$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \int u^{2(j+\ell)} du = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{u^{2(j+\ell)+1}}{2(j+\ell)+1} + C$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{\binom{k}{j}}{2(j+\ell)+1} \sin^{2(j+\ell)+1} x + C$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία αυτή υπολογίζουμε π.χ.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x) \cos x \, dx \underset{\substack{\uparrow \\ u=\sin x,\ du=\cos x\, dx}}{=} \int u^2 (1-u^2) du$$

$$= \int (u^2 - u^4) du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

Με ανάλογη διαδικασία υπολογίζονται τα ολοκληρώματα $\int \cos^m x \cdot \sin^n x \, dx$ για $m = 2k$ και $n = 2\ell+1$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3) $$\int \tan^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + c$$

$$\int \cot^2 x \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = -\cot x - x + c$$

§4 Υπολογισμός $\int f(x) dx$

Με αντικατάσταση $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$. Τότε $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$

Παραδείγματα: 1) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, θέτουμε $x = \alpha \sin t \Rightarrow dx = \alpha \cos t \, dt$ και τότε $\sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha \cos t$.

π.χ. $$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9-x^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ x=3\sin t,\ dx=3\cos t\, dt}}{=} \int \frac{3 \cos t \, dt}{(9 \sin^2 t)(3 \cos t)} = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9} \cot t + c$$

$$= -\frac{1}{9} \frac{\cos t}{\sin t} + c = -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + c = -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{x/3} + c = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$$