§ 8 Συνέχεια και όρια

- <u>Πρόταση</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και $f: A \to \mathbb{R}$.

(i) Αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

(ii) Αν x_0 σ.σ. του A τότε η f είναι συνεχής στο x_0 ανν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

[ανν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και ισούνται με $f(x_0)$].

- <u>Παρατήρηση</u> (Είδη ασυνέχειας): Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $x_0 \in A$ σ.σ. του A από αριστερά και δεξιά, και $f: A \to \mathbb{R}$ ασυνεχής στο x_0. Τότε υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

(i) <u>Άρσιμη ασυνέχεια</u>: Τα πλευρικά όρια υπάρχουν και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

όμως η τιμή της f στο x_0 δεν είναι ο ℓ.

(ii) <u>Ασυνέχεια α' είδους</u>: Τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ υπάρχουν

αλλά είναι διαφορετικά.

Η διαφορά $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι το "άλμα" της f στο x_0.

(iii) <u>Ασυνέχεια β' είδους</u>: Κάποιο από τα πλευρικά όρια της f καθώς $x \to x_0$ δεν υπάρχει.

- <u>Θεώρημα</u> (αντίστροφης συνάρτησης): Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ 1-1 και συνεχής. Τότε η f είναι γνησίως μονότονη. Επιπλέον, η $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ (με $f(I)$ διάστημα) είναι συνεχής και έχει την ίδια μονοτονία με την f.

§9 Λογαριθμική συνάρτηση

- Έστω $\alpha \in (0,\infty)$ με $\alpha \neq 1$ και $f_\alpha : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ με $f_\alpha(x) = \alpha^x$.

Τότε η f_α είναι συνεχής και γνησίως μονότονη. Είναι επίσης 1-1 και επί.

Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση $f_\alpha^{-1} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

και το προηγούμενο θεώρημα δείχνει ότι η f_α^{-1} είναι συνεχής.

Συμβολίζουμε την f_α^{-1} με $\log_\alpha$ (λογαριθμική συνάρτηση με βάση α).

Την f_e με $\exp$ και την $\underset{\log_e}{\underset{\shortparallel}{f_e^{-1}}}$ με $\ln$.

- <u>Βασικές ιδιότητες</u>

→ $\forall \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}: \quad \alpha^x = e^{x \cdot \ln \alpha}$

→ $\forall \alpha > 0,\ \alpha \neq 1,\ \forall x > 0: \quad \log_\alpha x = \dfrac{\ln x}{\ln \alpha}$

→ $\forall \alpha > 0,\ \alpha \neq 1,\ \forall x, y > 0: \quad \log_\alpha (x \cdot y) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$

→ Αν $0 < \alpha < 1$, οι α^x και $\log_\alpha x$ γνησίως φθίνουσες

και $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$

ενώ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_\alpha x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = -\infty$

→ Αν $\alpha > 1$, οι α^x και $\log_\alpha x$ γνησίως αύξουσες

και $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$

ενώ $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_\alpha x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_\alpha x = +\infty$

ΑΣΚ: Ν.Δ.Ο. (i) $\alpha^x = e^{x \cdot \ln\alpha}$, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\log_\alpha x = \dfrac{\ln x}{\ln \alpha}$, $\forall \alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $\forall x > 0$

(iii) $\log_\alpha (x \cdot y) = \log_\alpha x + \log_\alpha y$, $\forall \alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $\forall x, y > 0$.

Λύση: (i) $e^{x \cdot \ln \alpha} = \left(e^{\ln \alpha}\right)^x = \alpha^x$

(ii) Έστω $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $x > 0$. Θέτουμε $\begin{cases} \ln x = y \\ \log_\alpha x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^y \\ x = \alpha^z \end{cases}$

Από το (i) έχουμε $x = e^y = \alpha^z = e^{z \ln \alpha} \Rightarrow y = z \ln \alpha \Rightarrow z = \dfrac{y}{\ln \alpha}$

$\Rightarrow \log_\alpha x = \dfrac{\ln x}{\ln \alpha}$

(iii) Έστω $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $x, y > 0$. Θέτουμε $\begin{cases} \log_\alpha x = \tilde{x} \Leftrightarrow x = \alpha^{\tilde{x}} \\ \log_\alpha y = \tilde{y} \Leftrightarrow y = e^{\tilde{y}} \end{cases}$

και έχουμε $\alpha^{\log_\alpha (x \cdot y)} = x \cdot y = \alpha^{\tilde{x}} \cdot \alpha^{\tilde{y}} = \alpha^{\tilde{x} + \tilde{y}}$

$\Rightarrow \log_\alpha (x \cdot y) = \tilde{x} + \tilde{y} = \log_\alpha x + \log_\alpha y$

Αφού $f(x) = u < w < v = f(y)$, υπάρχει $z \in (x, y)$ ώστε $f(z) = w$. Αφού $z \in I$, συμπεραίνουμε ότι $w = f(z) \in f(I)$ και από τον ορισμό του διαστήματος έπεται ότι το $f(I)$ είναι διάστημα.

<u>ΑΣΚ</u>: Δ.ο. αν η $f : [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής, τότε $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$ τ.ω. $f(x_0) = x_0$.

<u>Λύση</u>: Αν $f(\alpha) = \alpha$ ή $f(\beta) = \beta$ έχουμε το ζητούμενο για $x_0 = \alpha$ ή $x_0 = \beta$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f(\alpha) > \alpha$ και $f(\beta) < \beta$. Έπειτα ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - x$. Έχουμε $h(\alpha) > 0$ ενώ $h(\beta) < 0$, άρα $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$ τ.ω $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \neq 0 \\ 2 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$,

$g(x) = \lfloor x \rfloor$ ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$, και $h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

Προσδιορίστε το είδος ασυνέχειας των f, g, h στο $x = 0$.

<u>Λύση</u>: Η f έχει άρσιμη ασυνέχεια στο $x = 0$ διότι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ell = 0$ ενώ $f(0) = 2 \neq \ell$. Αν αλλάξουμε την τιμή της f στο 0 και θέσουμε $f(0) = 0$, τότε η f θα είναι συνεχής στο $x = 0$.

Η g έχει ασυνέχεια α' είδους στο $x = 0$, διότι $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = 0$ ενώ $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) = -1$ δηλ τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά.

Η h έχει ασυνέχεια β' είδους στο $x = 0$, διότι τα πλευρικά όριά της στο $x = 0$ δεν υπάρχουν.

Αντίστροφα αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to +\infty$, τότε $\forall M > 0$, $\exists n_0$ τω $n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M$, άρα $\exists x = x_{n_0}$ ώστε $x = x_{n_0} > M$.

$\underset{A}{\cap}$

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα μεμονωμένο σημείο του A.

Δ.ο. η f είναι συνεχής στο x_0.

<u>Λύση</u>: Αφού το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$. Άρα αν το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, έχουμε ότι $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

<u>ΑΣΚ</u>: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και <u>$x_0 \in A$</u> σ.σ. του A. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 ΑΝΝ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

<u>Λύση</u>: Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ώστε $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

και $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ώστε $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ειδικότερα

Άρα $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Αντίστροφα, αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, τότε

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ώστε $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ενώ για $x = x_0$, έχουμε ούτως ή άλλως $|f(x) - f(x_0)| = 0$. Άρα,
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ώστε $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, δηλ. η f συνεχής στο x_0.

<u>ΑΣΚ:</u> Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ μία συνεχής και 1-1 συνάρτηση. Ν.δ.ο. η $f^{-1}: f(I) \to I$ έχει την ίδια μονοτονία με την f.

<u>Λύση</u> Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$. Αν ήταν $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, τότε θα είχαμε $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$ δηλαδή $y_1 \geq y_2$. Αυτό είναι άτοπο, άρα $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

<u>ΑΣΚ:</u> Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση. Ν.δ.ο. η $f^{-1}: f(I) \to I$ είναι συνεχής.

<u>Λύση</u> Χ.β.τ.γ υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $y_0 \in f(I)$. Υποθέτουμε ότι το y_0 δεν είναι άκρο του $f(I)$ (οι άλλες περιπτώσεις ελέγχονται όμοια). Τότε $y_0 = f(x_0)$ για κάποιο εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$. Έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \in I$. Αφού $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 = f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$, έχουμε $f(x_0 + \varepsilon) = y_0 + \delta_2$ και $f(x_0 - \varepsilon) = y_0 - \delta_1$ για κάποια $\delta_1, \delta_2 > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ και έχουμε $|y - y_0| < \delta \Rightarrow f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x \in I$ ώστε $f(x) = y$. Το x είναι μοναδικό επειδή η f είναι 1-1 και $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$. Δηλαδή η f^{-1} είναι συνεχής στο y_0.

ΑΣΚ: Έστω $I \subsetneq \mathbb{R}$ διάστημα και έστω $f: I \to \mathbb{R}$ μία μονότονη συνάρτηση. Δ.ο. τα πλευρικά όρια της f υπάρχουν σε κάθε $x_0 \in I$ και συνεπώς αν η f είναι ασυνεχής σε κάποιο $x_0 \in I$, τότε παρουσιάζει άλμα στο x_0 (ασυνέχεια α' είδους)

<u>Λύση</u>: Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η f είναι αύξουσα και ότι x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του I. Ορίζουμε $A^-(x_0) = \{ f(x) : x \in I ,\ x < x_0 \}$. Το $A^-(x_0)$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο από το $f(x_0)$. Συνεπώς ορίζεται ο $\ell^- = \sup A^-(x_0)$. Από τον ορισμό του sup και τη μονοτονία της f έχουμε $\ell^- \leq f(x_0)$ και θ.δ.ο. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^-$.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, από τον χαρακτηρισμό του sup, υπάρχει $x_1 \in I$ με $x_1 < x_0$ με $\ell^- - \varepsilon < f(x_1)$. Άρα, θέτοντας $\delta = x_0 - x_1 > 0$ έχουμε ότι

$$x \in I \text{ και } x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow \ell^- - \varepsilon < f(x_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{μονοτονία} \\ \text{της } f}}{\leq} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ορισμός} \\ \sup}}{\leq} \ell^- < \ell^- + \varepsilon$$

δηλ. $x_1 < x < x_0$

Δηλαδή $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^-$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^+ := \inf \{ f(x) : x \in I ,\ x > x_0 \} \geq f(x_0).$$

Αν τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, τότε αφού $\ell^- \leq f(x_0) \leq \ell^+$ συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0.

Διαφορετικά, η f έχει ασυνέχεια α' είδους στο x_0.