Κεφ 4: Συνέχεια συναρτήσεων και όρια συναρτήσεων

§1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

- Ορ: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Η f καλείται συνεχής στο x_0 αν

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } \forall x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta, \text{ έχουμε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$[\text{ισοδ. } \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \qquad [\text{ισοδ. } f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)]$$

Ισοδύναμα, η f συνεχής στο x_0 αν

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ τ.ω. } f(A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

- Η f καλείται συνεχής στο A αν η f συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$.

- Παραδείγματα: i) Έστω $c \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, τότε επιλέγοντας π.χ. $\delta = 1$ έχουμε ότι $|x - x_0| < \delta = 1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

ii) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0. Πράγματι, για $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο, επιλέγουμε $\delta = \varepsilon$ και έχουμε

$$|x - x_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

iii) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2$, και $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0. Πράγματι για $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο, θα επιλέξουμε $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ για $|x - x_0| < \delta$. Έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| = 3|x^2 - x_0^2| = 3|x + x_0| \cdot |x - x_0| \le 3(|x_0| + |x|) \cdot |x - x_0|$$

και $|x| = |x - x_0 + x_0| \le |x - x_0| + |x_0| \le 1 + |x_0|$ αν $|x - x_0| \le 1$

Επιλέγοντας λοιπόν $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{3(2|x_0| + 1)}\right\}$ συμπεραίνουμε ότι

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \underset{\uparrow}{\leq} 3(2|x_0|+1)|x-x_0| < \varepsilon$$

επειδή $3(|x_0|+|x|) \leq 3(2|x_0|+1)$

- Άρνηση ορισμού συνέχειας: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

  Η f είναι ασυνεχής στο x_0 αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω.

  $\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ με $|x-x_0|<\delta$ τ.ω. $|f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon$

  δηλ $\exists x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$

- Παράδειγμα: Η συνάρτηση Dirichlet $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

  είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

  Πράγματι, έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Τότε για κάθε $\delta > 0$ έχουμε

  Αν $x_0 \in \mathbb{Q}$, $\exists x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ με $x \notin \mathbb{Q}$ (πυκνότητα αρρήτων)

  και συνεπώς $|f(x)-f(x_0)| = |0-1| = 1 \geq \varepsilon$.

  Αν $x_0 \notin \mathbb{Q}$, $\exists x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ με $x \in \mathbb{Q}$ (πυκνότητα ρητών)

  και συνεπώς $|f(x)-f(x_0)| = |1-0| = 1 \geq \varepsilon$.

Αρχή μεταφοράς

- Θεώρημα: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

  Η f είναι συνεχής στο x_0 ANN για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ στο A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ έχουμε ότι $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$.

- Παρατήρηση: Η αρχή μεταφοράς είναι πολύ χρήσιμη για να δείξουμε ασυνέχεια στο $x_0 \in A$ καθώς τότε αρκεί να βρούμε μία $(x_n)_n$ ακολουθία στο A τ.ω.

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \quad \text{και} \quad f(x_n) \not\xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$$

ή να βρούμε μία ακολουθία $(x_n)_n$ στο A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ και η $(f(x_n))_n$ να μη συγκλίνει

ή να βρούμε $(x_n)_n$ και $(y_n)_n$ στο A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ και $y_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ και οι $(f(x_n))_n$, $(f(y_n))_n$ να συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

Συνέχεια και πράξεις και σύνθεση

- Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $t \in \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και $f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο x_0. Τότε οι $f+g$, $f\cdot g$, $f-g$ και tf είναι συνεχείς στο x_0. Επιπλέον αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, η $\frac{f}{g}$ συνεχής στο x_0.

- Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη κενά, $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Έστω επίσης $x_0 \in A$. Αν η f συνεχής στο x_0 και η g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η $g\circ f$ συνεχής στο x_0.

Συνέχεια γνωστών συναρτήσεων

- Οι πολυωνυμικές / ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς.
- Οι $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\cot$ είναι συνεχείς.
- Αν $\alpha > 0$, η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \alpha^x$ είναι συνεχής.
- Αν $\beta \in \mathbb{R}$, η $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $g(x) = x^\beta$ είναι συνεχής.

Τοπική συμπεριφορά συνεχών συναρτήσεων

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό, $x_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει $\rho > 0$ τ.ω.

- Αν υπάρχει $\rho > 0$ τ.ω. $f|_{A\cap(x_0-\rho, x_0+\rho)}$ συνεχής στο x_0, τότε η f συνεχής στο x_0.

ΑΣΚ: Αποδείξτε την αρχή της μεταφοράς, δηλαδή ότι η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A \iff$ για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ σημείων του A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, έχουμε $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$.

Λύση: "$\Rightarrow$" Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 και $(x_n)_n \subset A$ με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$.

θ.δ.ο. $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Αφού $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$.

"$\Leftarrow$" Με άτοπο. Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ σημείων του A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, έχουμε $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι ασυνεχής στο x_0. Άρα $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ τ.ω. $\begin{cases} |x - x_0| < \delta \text{ και} \\ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \end{cases}$ $(*)$

Χρησιμοποιούμε την $(*)$ διαδοχικά με $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε $x_n \in A$ με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Είναι φανερό ότι $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ και από την υπόθεση που κάναμε πρέπει $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΑΣΚ: Έστω $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \leq 0 \\ 1/x & \text{για } x > 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{για } x \neq 0 \\ 0 & \text{για } x = 0. \end{cases}$

Δ.ο. οι f και g είναι ασυνεχείς στο 0.

Λύση: Έστω $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ενώ

$f(x_n) = \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ (δεν συγκλίνει). Άρα από αρχή

μεταφοράς η f είναι ασυνεχής στο 0.

Έστω $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ενώ

$g(x_n) = \cos\frac{1}{x_n} = \cos(2\pi n) = 1 \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(0) = 0$. Άρα από

αρχή μεταφοράς η g είναι ασυνεχής στο 0.

ΑΣΚ: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Δ.ο. αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.

Λύση: Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία σημείων του A με $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, η αρχή μεταφοράς δείχνει ότι $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$. Ομοίως, αφού η g είναι συνεχής στο $f(x_0) \in B$ και η ακολουθία $(f(x_n))_n$ αποτελείται από σημεία του B, έχουμε $g(f(x_n)) \xrightarrow{n\to\infty} g(f(x_0))$. Επομένως η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.