π.χ 1

(i) Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος του:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(ii) Να λυθεί η εξίσωση: $AX + A^2 = I - A$

ΛΥΣΗ

i] $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{\Gamma_3 : \Gamma_3 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow[\Gamma_2 : \Gamma_2/4]{\Gamma_3 : \Gamma_3/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{\Gamma_2 : \Gamma_2 + \Gamma_3/4} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$

Scanned with CamScanner

$\Gamma_1 : \Gamma_1 - 3\Gamma_3$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$\Gamma_1 : \Gamma_1 - 2\Gamma_2$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/4 & -1/2 & -7/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

A^{-1}

ii] $AX + A^2 = I - A$

$\Rightarrow AX = I - A - A^2$

$\xRightarrow{\cdot A^{-1}} (A^{-1}A)X = IA^{-1} - AA^{-1} - A^2(A^{-1})$

$\Rightarrow X = A^{-1} - I - A$

π.χ 2

Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(i) να βρεθεί ο αντίστροφος (αν υπάρχει)

(ii) να λυθεί η $AX + A^2 = I - A$

ΛΥΣΗ

i]
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 : \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 : \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ A^{-1} !

$$ii]\ AX = I - A - A^2 \begin{cases} \to Ax_1 = 1^\eta \text{ στήλη του } I - A - A^2 \\ \to Ax_2 = 2^\eta \text{ στήλη του } I - A - A^2 \\ \to Ax_3 = 3^\eta \text{ στήλη του } I - A - A^2 \end{cases}$$

π.χ 3

① Με δεδομένους τους:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Να λυθεί η εξίσωση:

$$A^T A + A^2 X = I + A^2 + B$$

$$\overset{\cdot A^{-1}}{\Longrightarrow} A^{-1}A^T A + A^{-1}A^2 X = A^{-1}I + A^{-1}A^2 + A^{-1}B$$

$$\Longrightarrow A^{-1}A^T A + AX = A^{-1}I + A + A^{-1}B$$

$$\overset{\cdot A^{-1}}{\Longrightarrow} (A^{-1})^2 \cdot A^T \cdot A + A^{-1}AX = (A^{-1})^2 \cdot I + A^{-1}A + (A^{-1})^2 B$$

$$\Longrightarrow (A^{-1})^2 \cdot A^T \cdot A + X = (A^{-1})^2 + I + (A^{-1})^2 B$$

$$\Longrightarrow X = (A^{-1})^2 + I + (A^{-1})^2 B - (A^{-1})^2 A^T A$$

π.χ 4

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $A - I$ αντιστρέψιμο

Ν.Δ.Ο:

① $(A^3 - I)(A - I)^{-1} = I + A + A^2$

② $(A-I)^{-1} \cdot (A^3 - I) = I + A + A^2$

ΛΥΣΗ

① $(A^3 - I)(A-I)^{-1} = I + A + A^2$

$\Rightarrow (A^3 - I)(A-I)^{-1} \cdot (A-I) = I(A-I) + A(A-I) + A^2(A-I)$

$\Rightarrow A^3 - I = A - I + A^2 - A + A^3 - A^2$

$\Rightarrow A^3 - I = A^3 - I$

② $(A-I)^{-1} \cdot (A^3 - I) = I + A + A^2$

$\Rightarrow (A-I) \cdot (A-I)^{-1} \cdot (A^3 - I) = I(A-I) + A(A-I) + A^2(A-I)$

$\Rightarrow A^3 - I = A - I + A^2 - A + A^3 - A^2$

$\Rightarrow A^3 - I = A^3 - I$

① Να υπολογισθεί η ορίζουσα των

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

χωρίς χρήση αναπτυγμάτων κατά γραμμή ή στήλη.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1^{η} \leftrightarrow 2^{η}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2^{η} \leftrightarrow 4^{η}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A') = -\det(A)$ $\qquad$ $\det(A'') = -\det(A') = \det(A) = 6.$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{1^{η} \leftrightarrow 3^{η}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 := \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1,\ \Gamma_3 := \Gamma_3 - 4\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 := \Gamma_4 + 2\Gamma_2]{\Gamma_3 := \Gamma_3 + 4\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 := \Gamma_4 - \frac{2}{11}\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\frac{2}{11}4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -1 \cdot 1 \cdot (-11) \cdot \left(6 - \frac{2}{11} \cdot 4\right) = 11 \cdot \left(6 - \frac{2}{11} \cdot 4\right) = 66 - 8 = 58$$

επειδή κάναμε ανταλλαγή δύο γραμμών 1 φορά

(2)
$$A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ \lambda+1 & \lambda & 3 \\ \lambda+1 & 1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

→ Για ποια λ ο A <u>δεν</u> αντιστρέφεται;

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ \lambda+1 & \lambda & 3 \\ \lambda+1 & 1 & \lambda-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 2$

(3) Δείξτε ότι
$\forall x, y, z$: $\det \begin{vmatrix} x+y & x+z & y+z \\ z & y & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

<u>χωρίς</u> αναπτύγματα κατά στήλη ή γραμμή.

$$\begin{bmatrix} x+y & x+z & y+z \\ z & y & x \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & y & x \\ x+y & x+z & y+z \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 := z \cdot \Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-z & x-z \\ x+y & x+z & y+z \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 := \Gamma_3 - (x+y) \cdot \Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-z & x-z \\ 0 & z-y & z-x \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 := \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-z & x-z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $\det(A) = 0$

④ Να βρεθεί η ορίζουσα του $A+2I$ αν $A^2+4A=-3I$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

$A^2+4A=-3I \Rightarrow A^2+4A+4I=-3I+4I \Rightarrow (A+2I)^2=I$

$\det(A+2I)^2=\det I=1$

$\det(A+2I)=\pm 1$

III. Έστω: $x, y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Να δειχθεί ότι

$$\det\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(x) \quad (*)$$

Παράδειγμα για $n=2$:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα για $n=1$:

έχω $\det\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x$

Λύση (για $n=2$)

Αναπτύσσω ως προς την τελευταία γραμμή

$$\det\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

πάλι ως προς την τελευταία γραμμή

$$= (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

▹ Γενικά, για να αποδείξω την $*$, παίρνω συνέχεια ανάπτυγμα ως προς την τελευταία γραμμή εώς ότου μείνει μόνο ο πίνακας X. Στην i-οστή επανάληψη η ορίζουσα του πίνακα ισούται με $(-1)^{(2n-i)(2n-i)} \cdot 1 \cdot$ (ορίζουσα του πίνακα που απομένει) εώς ότου φύγουν οι στήλες και οι γραμμές και μείνει μόνο η ορίζουσα του X, ίση με $\det(x)$.

IV. Για $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ να δειχθεί ότι $\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A-B)\cdot\det(A+B)$.

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array}\right] \overset{\text{προσθέτοντας τη γραμμή } i,\ 1\le i\le n \text{ στη γραμμή } i+n}{=} \det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B+A & A+B \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} A-B & B \\ \hline O & A+B \end{array}\right] =$$

αφαιρώντας τη στήλη i, $n+1\le i\le 2n$ από την στήλη $i-n$. $\{\Sigma_{i-n} \leftarrow \Sigma_{i-n} - \Sigma_i.\}$

απαλοιφή Gauss

$$= \det(A+B)\cdot\det\left[\begin{array}{c|c} A-B & B \\ \hline O & I \end{array}\right]$$ αν αντιστρέψιμος ο $A+B$.

1.

Να λυθεί το XOR σύστημα $Ax=0$ με:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

Λύση:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&0&0&1&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}\overset{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_2}{\Longleftrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_3:=\Gamma_3\oplus\Gamma_1}{\Longleftrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix}\overset{\Gamma_3:=\Gamma_3\oplus\Gamma_2}{\Longleftrightarrow}\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

$Ax=0$

οπότε $(1\cdot x_1)\oplus(0\cdot x_2)\oplus(0\cdot x_3)\oplus(1\cdot x_4)\oplus(1\cdot x_5)=0$

$$\begin{cases}x_1\oplus x_4\oplus x_5=0\\x_2\oplus x_4\oplus x_5=0\\x_3\oplus x_5=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_4+(-x_5)=x_4\oplus x_5\\x_2=x_4\oplus x_5\\x_3=x_5\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4\oplus x_5\\x_4\oplus x_5\\x_5\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4\\x_4\\0\\x_4\\0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}x_5\\x_5\\x_5\\0\\x_5\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\oplus x_5\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

Άρα $\{x\mid Ax=0\}=\text{span}\{v_1,v_2\}$ με $2^2=4$ διανύσματα

Άσκηση ①

Να προσδιοριστεί αν το διάνυσμα $\vec{\beta}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ και $\vec{a}_3$.

$$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Λύση

Αρκεί νδο: $c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2 + c_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{\beta} \iff$

$$\iff c_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \xLeftrightarrow{\Gamma_3 = \Gamma_3 - \Gamma_1}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right] \xLeftrightarrow{\text{βάσει Gauss}}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xLeftrightarrow{\Gamma_2 = \Gamma_2 + 2\Gamma_3}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xLeftrightarrow{\Gamma_2 = \Gamma_2/4}$$

ανηγμένη κλιμακωτή

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Leftrightarrow c_1=-1,\ c_2=0,\ c_3=-2$$

Άσκηση ②

Να βρεθούν οι συντελεστές

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -7 & 2 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2=\Gamma_2-3\Gamma_3]{\Gamma_1=\Gamma_1+5\Gamma_3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -7 & 2 & 0 & 3 & 30 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_1=\Gamma_1+7\Gamma_2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -19 & 0 & 31 & -89 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{βασική} & \text{βασική} & \text{ελεύθερη} & \text{βασική} & \text{ελεύθερη} \end{array} \end{array}$$

Εκφράζω τις βασικές συναρτήσει των ελεύθερων μεταβλητών.

$$x_1 - 19x_3 + 31x_5 = -89 \Leftrightarrow x_1 = 19x_3 - 31x_5 - 89$$
$$x_2 - 3x_3 + 4x_5 = -17 \Leftrightarrow x_2 = 3x_3 - 4x_5 - 17$$
$$x_4 - x_5 = 4 \Leftrightarrow x_4 = x_5 + 4$$

Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19x_3 - 31x_5 - 89 \\ 3x_3 - 4x_5 - 17. \\ x_3 \\ x_5 + 4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19t - 31\delta - 89 \\ 3t - 4\delta - 17 \\ t \\ \delta + 4 \\ \delta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 19t \\ 3t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31\delta \\ -4\delta \\ 0 \\ \delta \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -89 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= t \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} -31 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -89 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Κάθε λύση του συστήματος είναι γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων συν ένα σταθερό διάνυσμα

Άσκηση (Φροντιστήριο)

① $(\mathbb{R}^3)$ $\quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad V_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad V_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί αν είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα και αν ισχύει το πρώτο, να βρεθεί και μια σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ τους

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 = \Gamma_2 - 2\Gamma_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 - 2\Gamma_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 = \Gamma_2(-1/3)]{}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Βασική} & \text{Βασική} & \text{Ελεύθερη} \end{array} \end{array} \xrightarrow[\Gamma_1 = \Gamma_1 - 4\Gamma_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

→ Γραμμικώς εξαρτημένα

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(span γραμμική θήκη)

Δηλαδή, $\forall\, x_1, x_2, x_3$ της μορφής $2x_3, -x_3, x_3$, ισχύει ότι:

$x_1 \cdot \vec{V_1} + x_2 \cdot \vec{V_2} + x_3 \cdot \vec{V_3} = \vec{0}$ (1)

Για $x_3 = 1$, $x_2 = -1$, $x_1 = 2$

Άρα (1) $\Rightarrow 2\vec{V_1} - \vec{V_2} + \vec{V_3} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V_2} = 2\vec{V_1} + \vec{V_3}$ (2)

- ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ (της 2)

$$2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}=\vec{V_2}$$

Άσκηση 2

$$\vec{V_1}=\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix},\quad \vec{V_2}=\begin{bmatrix}1\\2\\8\end{bmatrix},\quad \vec{V_3}=\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}$$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

$$A=\begin{bmatrix}0&1&4\\1&2&-1\\5&8&0\end{bmatrix}\xRightarrow[\Gamma_1\rightleftarrows\Gamma_2]{}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\5&8&0\end{bmatrix}\xRightarrow[\Gamma_3:=\Gamma_3-5\Gamma_1]{}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\0&-2&5\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\Gamma_3=\Gamma_3+2\Gamma_2]{}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\0&0&13\end{bmatrix}$$

Άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού πλήθος οδηγών = πλήθος στηλών

$$\vec{V_1}=\begin{bmatrix}8\\3\\0\\-2\end{bmatrix}\quad \vec{V_2}=\begin{bmatrix}4\\11\\-4\\6\end{bmatrix}\quad \vec{V_3}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}\quad \vec{V_4}=\begin{bmatrix}3\\-9\\-5\\3\end{bmatrix}\quad \vec{V_5}=\begin{bmatrix}0\\-2\\-7\\7\end{bmatrix}$$

Επειδή έχουμε 5 διανύσματα στο $\mathbb{R}^4$, τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

$x_4 - 2x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = 2x_5$
$x_3 = 0$
$x_2 + x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_5$
$x_1 - x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = x_5.$

Για $x_5 = 1$: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$

Άρα $1 \cdot \vec{v}_1 - 1 \cdot \vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + 2\vec{v}_4 + 1 \cdot \vec{v}_5 = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_4 + \vec{v}_5}$$

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Γραμμική Απεικόνιση:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : T(x+y) = T(x) + T(y)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n : T(\lambda x) = \lambda T(x)$

• Επακόλουθα: $T(0) = 0$

$$T(c_1a_1 + c_2a_2 + \dots c_na_n)$$
$$=$$
$$T(c_1a_1) + T(c_2a_2) + \dots T(c_na_n)$$
$$=$$
$$c_1T(a_1) + c_2T(a_2) + \dots c_nT(a_n)$$

Για κάθε γραμμική απεικόνιση:
$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, υπάρχει $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
ώστε $T(x) = Ax$

* Πώς βρίσκω τον T?

Έστω $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

✓ n διανύσματα το πλήθος

Υπολογίζω τα $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ κ' τα βάζω σαν στήλες του A

πχ1 Να βρεθεί αν T γραμμική

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} x+2y \\ z-3x \\ x+y-z \end{bmatrix}$$

• $T(x+x', y+y', z+z')$

$= T(x,y,z) + T(x',y',z')$

$$= \begin{bmatrix} x+2y \\ z-3x \\ x+y-z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'+2y' \\ z'-3x' \\ x'+y'-z' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+x'+2y+2y' \\ z-3x+z'-3x' \\ x+y-z+x'+y'-z' \end{bmatrix} = T(x+x', y+y', z+z') \checkmark$$

• $T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \begin{bmatrix} \lambda x + 2\lambda y \\ \lambda z - 3\lambda x \\ \lambda x + \lambda y - \lambda z \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda(x+2y) \\ \lambda(z-3x) \\ \lambda(x+y-z) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x+2y \\ z-3x \\ x+y-z \end{bmatrix} = \lambda T(x,y,z) \checkmark$$

② Έστω $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $T(e_1) = T(1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $T(e_2) = T(0,1,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $T(e_3) = T(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Άρα $T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 - 3x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix}$ ίδιο πράγμα με τον τύπο!

Π.χ 2
- $T(x,y,z,w) = 2z$, $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$
- $T(x,y) = \begin{bmatrix} x^{2/3} \cdot y^{1/3} \\ 0 \end{bmatrix}$, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\longrightarrow T(x+x', y+y', z+z', w+w') = 2(z+z')$
$= 2z + 2z' = T(x,y,z,w) + T(x',y',z',w')$

$\longrightarrow T(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda \omega) = 2\lambda z = \lambda \cdot 2z = \lambda \cdot T(x, y, z, \omega)$

✓

Εξετάζω αν:

- $T(\lambda x, \lambda y) = \lambda T(x, y)$?

$$\begin{bmatrix} (\lambda x)^{2/3} \cdot (\lambda y)^{1/3} \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x^{2/3} \cdot y^{1/3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα το $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

- $T(x+x', y+y') \underset{?}{=} T(x, y) + T(x', y')$

$$\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}$$

Αρκεί να ελέγξω ότι $\forall x, x', y, y' \in \mathbb{R}$

$$(x+x')^{2/3} \cdot (y+y')^{1/3} = x^{2/3} \cdot y^{1/3} + (x')^{2/3} \cdot (y')^{1/3} \quad (1)$$

Άρα $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ κι $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ θα έχω:

$(1) \Rightarrow 0 = -1 + 2^{1/3}$ ή $1 = 2^{1/3}$ ΑΤΟΠΟ!

(πχ3) Έστω η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ η οποία: ① προβάλλει ένα σημείο (x,y,z) στο επίπεδο των xy

② διαστέλλει τη διάσταση x κατά 2

③ παίρνει το συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{①} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②} \begin{bmatrix} 2x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{③} \begin{bmatrix} -2x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\to T\left(\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2\lambda x \\ -\lambda y \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -2x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda T(x,y,z)$$

$$\to T\left(\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2(x+x') \\ -(y+y') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x' \\ -y' \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right)$$

• Βρίσκω τα $T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Άρα $T(x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

I. Έστω $V:=\{x \mid Ax=0\}$ για κάποιο $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ και $K=\mathbb{R}$. Είναι το V διανυσματικός χώρος; Το $V':=\{x\mid Ax=b\}$ για $b\in\mathbb{R}^m$, $b\neq 0$;

① Θέλουμε να ελέγξουμε αν $x\in V$ και $y\in V \Rightarrow x+y\in V$:

$$\left.\begin{array}{l}Ax=0\\ Ay=0\end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} A(x+y)=0$$

άρα $x+y\in V$

② Αν $x\in V \Rightarrow \lambda x\in V$, διότι

$Ax=0 \xrightarrow{\cdot\lambda} A(\lambda x)=\lambda\cdot 0=0$ άρα $\lambda x\in V$.

③ $x\in V\Rightarrow -x\in V$, διότι

$Ax=0 \xrightarrow{\cdot(-1)} A(-x)=0 \Rightarrow -1\cdot 0=0$ άρα $-x\in V$

④ $0\in V$, διότι

$A\cdot 0=0$

→ Το V' δεν είναι διανυσματικός χώρος, διότι:

- $A\cdot 0\neq b$ άρα $0\notin V'$, άρα δεν ικανοποιείται η συνθήκη "$0\in V$"

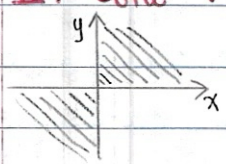
ή

- $$\left.\begin{array}{l}Ax=b\\ Ay=b\end{array}\right\} \xrightarrow{+} A(x+y)=2b\neq b$$ δεν ικανοποιείται το "$x,y\in V \Rightarrow (x+y)\in V$"

ή

- $Ax=b \xrightarrow{\cdot 2} A(2x)=2b\neq b$ άρα $2x\notin V$

II. Έστω $V=\left\{(x,y) \;\begin{array}{l} x\geq 0 \text{ και } y\geq 0\\ \quad\text{ή}\\ x\leq 0 \text{ και } y\leq 0\end{array}\right\}$, $K=\mathbb{R}$. Είναι το V διανυσματικός χώρος;



$\underset{\in V}{(3,2)} + \underset{\in V}{(-2,-7)} = \underset{\notin V}{(1,-5)}$, άρα το V δεν είναι διανυσματικός χώρος.

② Έστω V, V' διανυσματικοί χώροι. Να δειχθεί ότι:

$W := \{v+u \mid v \in V, u \in V'\}$

(α) είναι διανυσματικός χώρος

(β) $V \subseteq W$

$V' \subseteq W$

Λύση:

(α) » Έστω $w, w' \in W$ διανύσματα

$\left.\begin{array}{l} \circ\ w = v+u \\ \circ\ w' = v'+u' \end{array}\right\} v, v' \in V$ και $u, u' \in V'$

$w+w' = (v+u)+(v'+u') = \underbrace{(v+v')}_{v''} + \underbrace{(u+u')}_{u''} =$

$= v'' + u''$, $v'' \in V$ και $u'' \in V'$

Άρα $w+w' \in W$

» $\circ\ w = v+u$

$\lambda w = \lambda(v+u) = \underbrace{\lambda v}_{v'} + \underbrace{\lambda u}_{u'} \Rightarrow \lambda w = v'+u' \in W$

» Σίγουρα $0 \in V$ και $0 \in V'$, άρα $0 = 0+0 \in W$

» Θ.δ.ο $\forall w = v+u$ ισχύει $-v-u = -w \in W$

$-w = \underbrace{(-v)}_{v'} + \underbrace{(-u)}_{u'} = v'+u' \in W$

(β) $V \subseteq W$

αρκεί $\forall\, v \in V$ να ισχύει ότι $v \in W$

Ισχύει $v = v + 0$, $v \in V$, $0 \in V'$ άρα $v \in W$

Ομοίως για **u**.