§7 Ρητές συναρτήσεις των cos x και sin x

Έστω $R(u,v)$ πηλίκο πολυωνύμων με μεταβλητές u και v
(π.χ. $R(u,v)=\frac{1+u}{1-v}$)

Για να ολοκληρώσουμε $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ συχνά βολεύει η αντικατάσταση $u=\tan\frac{x}{2}$. Τότε $\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

και $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}$

$$du = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2}\,dx \Rightarrow dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

Ανάγόμαστε λοιπόν στο $\int \underbrace{R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}}_{\text{ρητή συνάρτηση}}\,du$

Παράδειγμα: $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx$. Θέτουμε $u=\tan\frac{x}{2}$ και τότε $dx=\frac{2du}{1+u^2}$,
$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, άρα

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{(1+u)^2}{u^2(1+u^2)}\,du$$

§8 Ρητές συναρτήσεις κάποιων αλγεβρικών

Έστω $R(u,v)$ πηλίκο πολυωνύμων με μεταβλητές u και v.

α) Για ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x,\sqrt{1-x^2})\,dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x=\sin t$. Τότε $\sqrt{1-x^2}=\cos t$ και $dx=\cos t\,dt$

Ανάγομαστε λοιπόν στο $\int \underbrace{R(\sin t, \cos t)\cos t}_{\text{ρητή συνάρτηση των } \sin t \text{ και } \cos t.}\, dt$

β) Για ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$, θέτουμε

$u = x + \sqrt{x^2-1}$. Τότε $u - x = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow u^2 + x^2 - 2ux = x^2 - 1$

$\Rightarrow u^2 + 1 = 2ux \Rightarrow x = \dfrac{u^2+1}{2u}$

και επίσης $\sqrt{x^2-1} = u - x = u - \dfrac{u^2+1}{2u} = \dfrac{u^2-1}{2u}$

$$dx = \frac{u^2-1}{2u^2}\,du$$

Ανάγομαστε λοιπόν στο $\int R\left(\dfrac{u^2+1}{2u}, \dfrac{u^2-1}{2u}\right)\dfrac{u^2-1}{2u^2}\,du$

γ) Για ολοκληρώματα της μορφής $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx$, θέτουμε

$u = x + \sqrt{x^2+1}$. Τότε $u - x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow u^2 + x^2 - 2ux = x^2 + 1$

$\Rightarrow u^2 - 1 = 2ux \Rightarrow x = \dfrac{u^2-1}{2u}$

και επίσης $\sqrt{x^2+1} = u - x = u - \dfrac{u^2-1}{2u} = \dfrac{u^2+1}{2u}$

$$dx = \frac{u^2+1}{2u^2}\,du$$

Ανάγομαστε λοιπόν στο $\int \underbrace{R\left(\dfrac{u^2-1}{2u}, \dfrac{u^2+1}{2u}\right)\dfrac{u^2+1}{2u^2}}_{\text{ρητή συνάρτηση}}\,du$

ΑΣΚ: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}dx$

Λύση: α) Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή $x^3+3x^2-4 = (x-1)(x+2)^2$

β) Ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$

Γράφουμε $\frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4} = \frac{a(x+2)^2 + b(x-1)(x+2) + c(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (4a+b+c)x + (4a-2b-c)}{x^3+3x^2-4}$$

και λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 5 = a+b \\ 12 = 4a+b+c \\ 1 = 4a-2b-c \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

Συνεπώς $\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}dx = 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2}$

$$= 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + c$$

ΑΣΚ: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x\,dx}{1+\sin x}$.

Λύση: Θέτουμε $u = \tan\frac{x}{2}$. Αφού $dx = \frac{2}{1+u^2}du$ και $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$

ανάγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int 2\arctan u \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du = 4\int \arctan u \frac{1}{(1+u)^2}du = 4\int \arctan u \left(-\frac{1}{1+u}\right)' du$$

$$= -\frac{4\arctan u}{1+u} + 4\int \frac{1}{(1+u^2)(1+u)}du$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα αναλύεται σε απλά κλάσματα. Ζητάμε $A, B, C \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{1}{(1+u^2)(1+u)} = \frac{A}{1+u} + \frac{Bu+C}{1+u^2} = \frac{A(1+u^2)+(1+u)(Bu+C)}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{(A+B)u^2+(B+C)u+(A+C)}{(1+u)(1+u^2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}$$

Συνεπώς $\displaystyle\int \frac{du}{(1+u^2)(1+u)} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u} - \frac{1}{2}\int\frac{u}{1+u^2}\,du + \frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\arctan u + C$$

και $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{1+\sin x} = -\frac{4\arctan u}{1+u} + 2\ln|1+u| - \ln(1+u^2) + 2\arctan u + C$

$$= -\frac{2x}{1+\tan\frac{x}{2}} + 2\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| - \ln\left(1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right) + x + C$$

ΑΣΚ: Υπολογίστε τα ολοκληρώματα α) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$ και β) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

Λύση α) Γράφουμε $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int\frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}\int\frac{du}{u+1}$

$u=\cos x,\ du=-\sin x\,dx$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + C = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|^{1/2} + C$$

$$= \ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|^{1/2} + C = \ln\left|\frac{\cos^2 x-1}{(\cos x+1)^2}\right|^{1/2} + C = \ln\left(\frac{|\sin x|}{\cos x+1}\right) + C$$

β) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \underset{\uparrow}{=} \int\frac{\cos u\,du}{\sin u\,|\cos u|} = \pm\int\frac{du}{\sin u}$ και ανάγομαστε στο α).

$x=\sin u,\ dx=\cos u\,du$