Κεφάλαιο 1

Ερωτήσεις κατανόησης

1) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε $\forall x \in A$ έχουμε $x \leq \sup A$

Απάντηση: ΣΩΣΤΟ γιατί

από ορισμό supremum έχουμε ότι αν $A \neq \emptyset$, A άνω φραγμ. $\subseteq \mathbb{R}$. $\exists a \in \Sigma: x \leq a \leq a_1, \forall x \in A$

δηλ. το a είναι άνω φράγμα του A και αν a_1 άλλο άνω φράγμα του A είναι $a \leq a_1$ } ορισμό sup

Άρα ισχύει ότι $x \leq \sup A$, $\forall x \in A$.

2) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ο $x \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν-ν $\sup A \leq x$

Απάντηση: ΣΩΣΤΟ. Πράγματι

($\Rightarrow$) Έστω x άνω φράγμα του A. Τότε από ορισμό supremum έχουμε: $\sup A \leq x$ (σε σχέση με τον ορισμό αντικαθιστούμε το x με $\sup A$ & το a με x, $(x \leq a)$).

($\Leftarrow$) Έστω $\sup A \leq x$, δηλ. το x είναι μεγαλύτερο από το ελάχιστο άνω φράγμα.

Τότε $\forall a \in A$ έχουμε: $a \leq \sup A \leq x$, δηλ. ο x είναι άνω φράγμα του A.

3) Αν το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $\sup A \in A$

Απάντηση: ΛΑΘΟΣ

Έχουμε πει ότι το $\sup A$ (και το $\inf A$) μπορεί να ανήκουν ή να μην ανήκουν στο A (σελ. 13)

Πράγματι, έστω $A = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} \neq \emptyset$ και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$

Αφού είναι άνω φραγμένο θα ισχύει $x \leq 1$ με $\underset{\text{ελάχιστο άνω φράγμα}}{\sup A} = 1 \notin A$

5) Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x \leq a$.

Απάντηση: ΣΩΣΤΟ.

Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$ από πρόταση για supremum (βλ. σελ. 28)

έχουμε $\exists x \in A : a - \varepsilon < x$ (1) (Πρόταση 1.3.9 σελ. 16)

από (α) της πρότασης για supremum

Επίσης ο a είναι άνω φράγμα του A και έχουμε ότι $x \in A$

Άρα, $x \leq a$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow a - \varepsilon < x \leq a$.

---

6) Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x < a$

Απάντηση: ΛΑΘΟΣ

Παράδειγμα $\rightarrow$ Έστω $A = \{1, 2\} \Rightarrow \sup A = 2$

Για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ έχουμε ότι $\exists x \in A : x > a - \varepsilon \Rightarrow x > 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

Όμως για να είναι σωστή η πρόταση μας θα πρέπει να

υπάρχει $x \in A : \frac{3}{2} < x < 2$ το οποίο ΔΕΝ μπορεί να ισχύει

αφού $A = \{1, 2\}$.

7) Αν το A είναι μη κενό και $\sup A - \inf A = 1$, τότε υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y = 1$.

Απάντηση: ΛΑΘΟΣ

Παράδειγμα: Έστω $A = (0,1)$ Τότε $\inf A = 0$, $\sup A = 1$ οπότε

$\sup A - \inf A = 1 - 0 = 1$ (1)

Αν όμως $(x,y) \in (0,1)$ τότε
$$\left.\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \Rightarrow -1 < -y < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -1 < x - y < 1$$

Δηλ. αποδείξαμε ότι $\forall (x,y) \in (0,1)$ έχουμε $x - y \neq 1$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow$ Λάθος γιατί δεν μπορεί $\sup A - \inf A = 1 \Leftrightarrow x - y \neq 1$

---

8). Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος $r \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < r < y$

Απάντηση: ΣΩΣΤΟ.

Απόδειξη με Άτοπο:

Έστω $A \neq \emptyset$ το σύνολο όλων των $r \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < r < y$.
Έστω (για την απόδειξη σε άτοπο) ότι το A έχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία, τα $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

Έχουμε $x < r_1$. Άρα θα υπάρχει ρητός r^* που να ικανοποιεί την $x < r^* < r_1$ (1) Όμως $r_1 < y$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow x < r^* < y$ Άτοπο καθώς $r^* \notin \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$.

Ασκήσεις - Ομάδα Α

1) Δείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο $\mathbb{R}$

(α) Αν $x<y+\varepsilon$, $\forall \varepsilon>0$, τότε $x\leq y$

(β) Αν $x\leq y+\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$, τότε $x\leq y$

(γ) Αν $|x-y|\leq\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$, τότε $x=y$

(δ) Αν $a<x<b$ και $a<y<b$ τότε $|x-y|<b-a$

Λύση

(α) Θα λυθεί με απαγωγή σε άτοπο

Έστω ότι $y<x$ (1) Τότε επιλέγοντας $\varepsilon=\frac{x-y}{2}>0$ έχουμε

$$x-(y+\varepsilon)=x-y-\varepsilon=x-y-\frac{x-y}{2}=\frac{x-y}{2}\overset{(1)}{>}0$$

δηλ. υπάρχει $\varepsilon>0$ τ.ω. $x>y+\varepsilon$. Άτοπο γιατί από την υπόθεσή μας έχουμε $x<y+\varepsilon$

(β) Όμοια, έστω $y<x$ (2). @ $\varepsilon=\frac{x-y}{2}>0$ οπότε

$x-(y+\varepsilon)=\dots=\frac{x-y}{2}>0$ δηλ υπάρχει $\varepsilon>0$ τ.ω. $x>y+\varepsilon$

Άτοπο, γιατί από την υπόθεση έχουμε $x\leq y+\varepsilon$.

(γ) $|x-y|\leq\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<x-y<\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases}-\varepsilon\leq x-y\\ x-y\leq\varepsilon\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\leq x+\varepsilon\\ x\leq y+\varepsilon\end{cases} \overset{(β)}{\Longleftrightarrow}$

$\begin{cases}y\leq x\\ x\leq y\end{cases} \Leftrightarrow x=y.$

(δ) $\left.\begin{array}{l}a<x<b\\ a<y<b\Rightarrow -b<-y<-a\end{array}\right\} \Leftrightarrow a-b<x-y<b-a \Leftrightarrow -(b-a)<x-y<b-a$

$\Leftrightarrow |x-y|<b-a.$

3) Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολ/σιο του 5, $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Λύση</u>

i) για $n=1$ είναι $1^5 - 1 = 0$ είναι πολ/σιο του 5. καθώς $0 \cdot 5 = 0$

ii) Δεχόμαι ότι ισχύει για n, δηλ. $n^5 - n$ είναι πολ/σιο του 5, $\forall n \in \mathbb{N}$

iii) Θδο ισχύει για $n+1$ δηλ. $(n+1)^5 - (n+1)$ είναι πολ/σιο του 5, $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Πράγματι:</u>

$$(n+1)^5 - (n+1) = (n+1)\left[(n+1)^4 - 1\right]$$

$$= (n+1)\cdot(n^4 + 4n^2 + \cancel{1} + 4n^3 + 4n + 2n^2 - \cancel{1})$$

$$= (n+1)(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n)$$

$$= n^5 + 4n^4 + 6n^3 + 4n^2 + n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n$$

$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + \underbrace{4n}_{5n - n}$$

$$= \underbrace{(n^5 - n)}_{\text{πολ/σιο του 5 από ii)}} + \underbrace{5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n}_{\text{πολ/σιο του 5.}}$$

*7) Έστω $a\in\mathbb{R}$ και έστω $n\in\mathbb{N}$. Ν.δ.ο

(α) Αν $a\geq -1$, τότε $(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$

(β) Αν $0<a<1/n$, τότε $(1+a)^n < 1/(1-na)$

(γ) Αν $0\le a\le 1$, τότε

$$1-na \le (1-a)^n \le \frac{1}{1+na}$$

Λύση

(α) Ανισότητα Bernoulli

i) Για $n=1$ η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα $(1+a=1+a)$

ii) Δέχομαι ότι ισχύει για n, δηλ. ισχύει $(1+a)^n \geq 1+na$

iii) Θ.δ.ο ισχύει για $n=m+1$, δηλ. $(1+a)^{m+1} \geq 1+(m+1)a$

Αφού $a\geq -1 \Leftrightarrow 1+a\geq 0$ έχουμε πολ/ντας με $1+a$ και τα 2 μέλη της (ii)

$$(1+a)(1+a)^m \geq (1+a)(1+ma) \Leftrightarrow (1+a)^{m+1} \geq (1+a)(1+ma) =$$

$$= 1+ma+a+ma^2 = 1+(m+1)a+ma^2 \geq 1+(m+1)a.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει γιατί $ma^2\geq 0$.

(β) i) Θ.δ.ο. ισχύει για $n=1$ τότε αν $0<a<1$ θέλουμε νδο $1+a<1/1-a$. Πράγματι, αφού $a<1 \Leftrightarrow 1-a>0$ οπότε

$$1+a<\frac{1}{1-a} \Leftrightarrow (1+a)(1-a)<1 \Leftrightarrow 1-a^2<1 \Leftrightarrow -a^2<0 \text{ ισχ.}$$

ii) Δέχομαι ότι ισχ. για n δηλ. αν $0<a<1/n$ τότε $(1+a)^n<1/(1-na)$

iii) Θ.δ.ο ισχ. για $n=m+1$, δηλ. αν $0<a<1/(m+1)$ τότε $(1+a)^{m+1}<\frac{1}{1-(m+1)a}$

$$(1+a)^{m+1}\cdot\left[1-(m+1)a\right] = (1+\alpha)\cdot\left[1-(m+1)\alpha\right](1+\alpha)^{m} \overset{(ii)}{<}$$

$$\overset{(ii)}{<} (1+\alpha)\cdot\left[1-(m+1)\alpha\right]\cdot\frac{1}{1-ma} \quad (1)$$

Όμως: $(1+\alpha)\left[1-(m+1)\alpha\right] = 1+a-(m+1)a-(m+1)a^2$

$$= 1+\cancel{\alpha}-ma-\cancel{\alpha}-(m+1)a^2$$

$$= 1-ma-(m+1)a^2 < 1-ma \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (1+\alpha)^{m+1}\cdot\left[1-(m+1)\alpha\right] < \frac{1-ma}{1-ma} = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(1+a)^{m+1} < \frac{1}{1-(m+1)a}}$$

(γ) Για την αριστερή ανισότητα, παρατηρήστε ότι $-a \geq -1$

Άρα από (α) θέτοντας $-a$ όπου a έχουμε

αν $-a \geq -1$ τότε $(1-a)^n \geq 1-na$

δηλ αν $a \leq 1$ τότε $(1-\alpha)^n \geq 1-na$

Για την δεξιά ανισότητα παρατηρούμε ότι αν $a=1$ τότε

$(1-\alpha)^n = (1-1)^n = 0$ οπότε ισχύει

Αν $0 \leq a < 1$ από (β) έχουμε $(1+a)^1 < \frac{1}{1-a\cdot 1} \Leftrightarrow 1+a < \frac{1}{1-a}$ (3)

Οπότε, από (3) $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{(1-\alpha)^n} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^n > (1+\alpha)^n \overset{(\alpha)}{\geq} 1+n\alpha$

14) Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $a_0 \in A$ με την ιδιότητα: Για κάθε $a \in A$, $a \leq a_0$. Ν.δ.ο. $a_0 = \sup A$

Με άλλα λόγια, αν το A έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι το supremum του A.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $a \in A$ ισχύει $a \leq a_0$.

Άρα, από ορισμό 1 (σελ 10) έχουμε ότι το A είναι άνω φραγμένο σύνολο και ο a_0 είναι ένα άνω φράγμα του.

Τότε από ορισμό 2 (σελ 10) έχουμε ότι το $\sup A$ υπάρχει και ισχύει $\sup A \leq a_0$ (1).

Αντίστροφα, αφού $a_0 \in A$ και ο $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, έχουμε $a_0 \leq \sup A$ (2)

Από (1), (2) $\Longrightarrow a_0 = \sup A$.

Ορισμός 1.3.1 (σελ. 10 ή 12 βιβλίου)

Έστω Σ ένα διατεταγμένο σώμα Σ. Τότε το $\emptyset \neq A \subseteq \Sigma$ λέγεται άνω φραγμένο αν $\exists a \in \Sigma : x \leq a, \forall x \in A$

κλπ.

Ορισμός 1.3.2. (σελ 10 ή 12 βιβλ.)

Έστω $A \neq \emptyset$ άνω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ

Λέμε ότι το $a \in \Sigma$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του A αν

15) Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A = \inf B$, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

Λύση

Πρόταση 1.3.9 σελ 16.: Έστω $A \neq \emptyset$ άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε $a = \sup A$ αν-ν ισχύουν τα εξής:
(α) Το a είναι άνω φράγμα του A.
(β) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A : x > a - \varepsilon$

Έστω $\varepsilon > 0$.

Από Πρόταση για supremum (σελ. 2Θ) έχουμε ότι υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\forall \underset{=\varepsilon/2}{\varepsilon} > 0$ να ισχύει

$$a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \quad (1) \qquad (1) \Rightarrow \sup A < a + \frac{\varepsilon}{2} \quad (1')$$

Όμοια, από χαρακτηρισμό για Infimum (δεν το γράφει στη Θεωρία) έχουμε ότι μπορούμε να βρούμε $b \in B$ ώστε

$$b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Από την υπόθεση μας έχουμε ότι:

$$\inf B = \sup A$$

$$\Leftrightarrow \inf B + \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(1')}{<} a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = a + \varepsilon$$

Επομένως, βρήκαμε $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwartz:

Αν $a_1, \dots, a_n$ και $b_1, \dots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \quad (1)$$

Απόδειξη:

Αρκεί ν.δ.ο. ισχύει η ανισότητα (1) στην περίπτωση όπου $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $\forall k = 1, \dots, n$.

Θέλουμε ν.δ.ο. ισχύει για $n = m+1$

Έστω $a_1, \dots, a_{m+1} > 0$ και $b_1, \dots, b_{m+1} > 0$. Τότε

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k b_k = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k + a_{m+1} b_{m+1} \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right)^{1/2} + a_{m+1} b_{m+1} \quad (2)$$

Θέτουμε $x = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)^{1/2}$ και $y = \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right)^{1/2}$ (3)

Οπότε

$$(2) \overset{(3)}{=} xy + a_{m+1} b_{m+1}$$

$(x \to a_1, y \to b_1, a_{m+1} \to a_2, b_{m+1} \to b_2)$

$$\overset{(1)}{\leq} \left(x^2 + a_{m+1}^2\right)^{1/2} \left(y^2 + b_{m+1}^2\right)^{1/2}$$

(προκύπτει από την (1) για $n = 2$)

$$\overset{(3)}{=} \left(a_1^2 + \dots + a_m^2 + a_{m+1}^2\right)^{1/2} \left(b_1^2 + \dots + b_m^2 + b_{m+1}^2\right)^{1/2}$$

Οπότε αποδείξαμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k b_k \leq \left(a_1^2 + \dots + a_m^2 + a_{m+1}^2\right)^{1/2} \left(b_1^2 + \dots + b_m^2 + b_{m+1}^2\right)^{1/2}.$$