vi) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\kappa \in \mathbb{N}$, τότε $\sqrt[\kappa]{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[\kappa]{\alpha}$.

vii) Αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και $(\beta_n)_n$ φραγμένη, τότε $\alpha_n \cdot \beta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(Προσοχή, το $(\beta_n)_n$ είναι απαραίτητο. π.χ. $(\alpha_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$ και $(\beta_n)_n = (n^2)_n$)

viii) Αν $\alpha_n \leq \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$,

τότε $\alpha \leq \beta$.

(προσοχή: αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$, $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$, και $\alpha_n < \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

ΔΕΝ συνεπάγεται ότι $\alpha < \beta$ (μόνο ότι $\alpha \leq \beta$)

π.χ. $(\alpha_n)_n = \left(\frac{-1}{n}\right)_n$ και $(\beta_n)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n$, τότε έχουμε $\alpha_n < \beta_n$,

$\forall n \in \mathbb{N}$, αλλά $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$).

ix) Αν $m \leq \alpha_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (όπου $m, M \in \mathbb{R}$) και $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$,

τότε $m \leq \alpha \leq M$.

§5 Κάποια βασικά όρια

1) Συμπεριφορά της $(\alpha_n)_n = (\alpha^n)_n$ όπου $\alpha > 0$.

Αν $\alpha = 1$, τότε $\alpha^n \xrightarrow{n\to\infty} 1$,

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\alpha^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

2) Αν $\alpha > 0$, τότε $\sqrt[n]{\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

3) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Παραδείγματα: i) $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 + 0 = 1$

ii) $\frac{n^2 - n}{n^2 + n} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

iii) $\alpha_n = (1 - \sqrt[n]{5})(7 + (-1)^n 3)$

Έστω $(\beta_n)_n = (1 - \sqrt[n]{5})$ και $(\gamma_n)_n = (7 + (-1)^n \cdot 3)_n$,

τότε $\beta_n = 1 - \sqrt[n]{5} \longrightarrow 1 - 1 = 0$ ενώ $(\gamma_n)_n$ φραγμένη

$(|\gamma_n| \leq 7 + |(-1)^n| \cdot 3 = 10)$. Άρα $\alpha_n = \beta_n \cdot \gamma_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

iv) $(\alpha_n)_n = \left(\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \right)_n$. Παρατηρείστε ότι $\forall n \geq 2$, έχουμε

$2 - \frac{1}{n} \geq 2 - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n, \forall n \geq 2$ με $\left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

αφού $\frac{3}{2} > 1$

Άρα $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

§6 Κριτήρια Σύγκλισης

• Πρόταση (Κριτήριο λόγου) Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία μη μηδενικών όρων (δηλ. $\alpha_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

α) Αν $\alpha_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \ell > 1$, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

β) Αν $\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} \ell < 1$, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

• <u>Παρατήρηση</u>: Αν $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ δεν δίνει συμπέρασμα.

Π.χ. $\alpha_n = n$ και $\beta_n = \frac{1}{n}$. Τότε $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ και $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

ενώ $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

• <u>Πρόταση</u>: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία

α) Αν $\alpha_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και υπάρχει $\mu > 1$ τ.ω. $\alpha_{n+1} \geq \mu \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

Τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

β) Αν υπάρχει $0 < \mu < 1$ τ.ω. $|\alpha_{n+1}| \leq \mu |\alpha_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

• <u>Παραδείγματα</u>: 1) $(\alpha_n)_n = \left(\frac{5^n}{n!}\right)_n$. Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \frac{5^{n+1}}{5^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{5}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$, άρα $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

2) $(\beta_n)_n = \frac{\left(7+\frac{1}{n}\right)^n}{n!}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$0 < \beta_n \leq \frac{8^n}{n!}$ και θέτοντας $\gamma_n = \frac{8^n}{n!}$, γνωρίζουμε από 1) ότι $\gamma_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα, από κριτήριο παρεμβολής: $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

• <u>Πρόταση</u> (Κριτήριο ρίζας) Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία τ.ω. $\alpha_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

α) Αν $\sqrt[n]{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \rho < 1$, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

β) Αν $\sqrt[n]{\alpha_n} \to \rho > 1$, τότε $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

ΑΣΚ: Έστω $(\alpha_n)_n$ ακολουθία. Δ.ο. αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, τότε $\frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$ και $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Επειδή $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, έχουμε

(επιλέγοντας $M = \frac{1}{\varepsilon}$ στον ορισμό): $\alpha_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο. Άρα ισχύει $0 < \frac{1}{\alpha_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$ για $n \geq n_0$, και επίσης $-\varepsilon < \frac{1}{\alpha_n} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

ΑΣΚ: Έστω $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n$ ακολουθίες και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Δ.ο. αν $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$ και $\beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \beta$, τότε $\alpha_n + \beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha+\beta$.

Λύση: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού οι $(\alpha_n)_n$ και $(\beta_n)_n$ συγκλίνουν, έχουμε

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } n \geq n_1 \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } n \geq n_2 \Rightarrow |\beta_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } n \geq n_0 \Rightarrow |(\alpha_n + \beta_n) - (\alpha+\beta)| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και αυτό αποδεικνύει ότι $\alpha_n + \beta_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha+\beta$

ΑΣΚ: Έστω $\alpha \in (0,1)$. Δ.ο. $\alpha^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Λύση: Έχουμε $\frac{1}{\alpha} > 1$, άρα υπάρχει $\theta > 0$ ώστε $\frac{1}{\alpha} = 1+\theta$ και

$$\frac{1}{\alpha^n} = (1+\theta)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ανισότητα Bernoulli}}}{\geq} 1 + n\theta > n\theta \Rightarrow 0 < \alpha^n < \frac{1}{n\theta} \Rightarrow \alpha^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ΑΣΚ: Αν $\alpha > 0$, δείξτε ότι $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Λύση: 1) Όταν $\alpha > 1$, έχουμε $\sqrt[n]{a} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα υπάρχει $\theta_n > 0$ ώστε $\sqrt[n]{\alpha} = 1 + \theta_n$ και από την ανισότητα Bernoulli προκύπτει ότι

$$\alpha = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n > n\theta_n \Rightarrow 0 < \theta_n < \frac{a}{n}$$

$$\Rightarrow \theta_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ (από κριτήριο παρεμβολής)} \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

2) Όταν $0 < \alpha < 1$, από το 1) έχουμε $\sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ και συνεπώς $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

ΑΣΚ: Έστω $(\alpha_n)_n$ με $\alpha_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \ell > 1$.
Δ.ο. $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

Λύση: Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$. Αφού $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \ell$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} > \ell - \varepsilon = \frac{\ell+1}{2} > 1$. Άρα, θέτοντας $\theta = \frac{\ell+1}{2}$, έχουμε

$$\alpha_{n_0+1} > \theta\,\alpha_{n_0}$$

$$\alpha_{n_0+2} > \theta\,\alpha_{n_0+1} > \theta^2\alpha_{n_0} \quad \cdots\cdots$$

και γενικά

$$\alpha_n > \underbrace{\theta^{n-n_0}\alpha_{n_0}}_{= \theta^n \cdot \frac{\alpha_{n_0}}{\theta^{n_0}}}, \quad \forall n > n_0$$

Αφού $\theta^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, έπεται ότι $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.