ΑΝΑΛΥΣΗ 1

Τετάρτη 15 Ιουνίου 2022
Slot 1: 9:00–10:30

1. (3 μον.)

(α) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας.

(β) Δείξτε ότι αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει. Ισχύει το συμπέρασμα αν δεν υποθέσουμε ότι $a_k > 0$;

2. (3 μον.)

$$\text{(i)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log_2 k)^{3/2}}, \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\, k!}{k^k}, \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}}.$$

3. (4 μον.) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int e^x \cos x\, dx, \quad \text{(ii)} \int \frac{x^2+x+3}{(x+2)(x^2+1)}\, dx.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Παρατήρηση: η κατανομή της βαθμολογίας είναι ενδεικτική.

ΑΝΑΛΥΣΗ 1
Πέμπτη 15 Σεπτεμβρίου 2022
Slot 1, Ώρα 9:00–10:30

Θέμα 1. (**1+2=3 μον.**)

(α) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας.

(β) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) = 0$ για κάθε $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

Θέμα 2. (**3 μον.**) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - k}{8k^3 + k^{5/2}}, \quad \text{(ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\, k!}{k^k}, \quad \text{(iii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{4k} - 1).$$

Θέμα 3. (**1.25+2.75=4 μον.**) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int x^3 \ln x \, dx, \quad \text{(ii)} \int \frac{5x^2 - 17x + 23}{(x-2)^2\,(x+1)}\, dx.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΝΑΛΥΣΗ 1
Τρίτη 9 Ιουλίου 2024
8:45–11:45

1. **(0.75+0.75+0.5+1=3 μον.)**

(α) Δώστε τον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης.

(β) Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφα συνεχούς συνάρτησης.

(γ) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης που είναι συνεχής και όχι ομοιόμορφα συνεχής.

(δ) Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς τέτοιες ώστε $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $\max(f) < \max(g)$. (Όπου $\max(f) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.)

2. **(3 μον.)** Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\, 2^k}{k^k}, \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{2k} - \frac{1}{2}\right)^k, \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{k^2},$$

$$\text{(iv)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log_2(k)^3}, \quad \text{(v)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}.$$

3. **(0.75+0.75+1.5=3 μον.)** Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int (\sin x)^3 (\cos x)^2 \, dx, \quad \text{(ii)} \int e^x \cos(x) dx, \quad \text{(iii)} \int \frac{2x^3+2x+2}{(x-1)^2\,(x^2+1)}\, dx.$$

4. **(1+1+1=3 μον.)**

(α) Έστω $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $\int_a^s f(t)\, dt = \int_s^b f(t)\, dt$.

(β) Έστω $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $|f'(x)| \le \frac{1}{x^2}$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \big(f(2x) - f(x)\big) = 0$.

(γ) Έστω $(a_k)_k$ ακολουθία θετικών όρων τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^3}{2+a_k^3}$ συγκλίνει.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Παρατήρηση: η κατανομή της βαθμολογίας είναι ενδεικτική.

ΑΝΑΛΥΣΗ 1
Τρίτη 30 Ιουνίου 2020
Slot 2

1. (1+2=3 μον.)

(α) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας.

(β) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν $\mathcal{P} = \{0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}$ είναι διαμέριση του $[0,1]$, δείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_0^1 |f'(t)|\, dt$.

2. (3 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{4k} - 1), \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cos k)^3}{k^2}.$$

3. (1.25+2.75=4 μον.) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int x (\sin x)^2 \, dx, \quad \text{(ii)} \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x+3)(x-1)^2} \, dx.$$

[*Υπόδειξη:* $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.]

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΝΑΛΥΣΗ 1

Δευτέρα 7 Σεπτεμβρίου 2020

Slot 1, Ώρα 8:30–11:00

1. (1+2=3 μον.)

(α) Δώστε τον ορισμό της συνεχής συνάρτησης.

(β) Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι σειρές: (β.i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, (β.ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$, και (β.iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$, συγκλίνουν.

2. (3 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log_2 k)^{2/3}}, \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^5+1} - \sqrt{k^5}), \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!}.$$

3. (1.25+2.75=4 μον.) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int (\sin x)^3 (\cos x)^2 \, dx, \quad \text{(ii)} \int \frac{3x^2+3x-2}{(x+3)(x-1)^2} \, dx.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΝΑΛΥΣΗ 1
Τετάρτη 28 Ιουνίου 2023
8:45–11:45

1. (1+0.5+0.5+0.5=2.5 μον.)

(α) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β.i) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(β.ii) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β.iii) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε και η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

2. (3 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log_2 k)}, \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}-k}{k^2},$$

$$\text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}(\cos k)^8}, \quad \text{(v)} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{4k} - 1).$$

3. (0.75+0.75+2.5=4 μον.) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int (\sin x)(\cos x)^4 \, dx, \quad \text{(ii)} \int \sin(\ln x) dx, \quad \text{(iii)} \int \frac{3x^2+4x+6}{(x+2)^2\,(x^2+1)}\, dx.$$

4. (1+1+1=3 μον.)

(α) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) = 0$ για κάθε $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

(β) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 1$ έχουμε $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(γ) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0) = 0$. Δείξτε ότι $|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Παρατήρηση: η κατανομή της βαθμολογίας είναι ενδεικτική.

ΑΝΑΛΥΣΗ 1

Τρίτη 18 Ιουνίου 2019

1. (1+0.5+0.5+0.5=2.5 μον.)

(α) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β.i) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(β.ii) Αν (a_n) φραγμένη και (b_n) συγκλίνουσα, τότε η $(a_n b_n)$ είναι συγκλίνουσα.

(β.iii) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση ώστε η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε και η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

2. (3 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log_2 k)^{3/2}}, \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k},$$

$$\text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\cos k)^8}, \quad \text{(v)} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{4k} - 1).$$

3. (2+1=3 μον.) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int (\sin x)^2 (\cos x)^3 \, dx, \quad \text{(ii)} \int x^2 \ln x \, dx, \quad \text{(iii)} \int x (\sin x)^2 \, dx,$$

$$\text{(iv)} \int \frac{2x^3 + 12x^2 + 16x + 14}{(x+3)^2 (x^2+1)} \, dx.$$

[*Υπόδειξη:* $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.]

4. (0.5+1+1+1=3.5 μον.)

(α) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in [a,b]$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in [0,1]$ υπάρχει $y \in [a,b]$ ώστε $f(y) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

(β) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) = 0$ για κάθε $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$.

(γ) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 1$ έχουμε $\int_0^1 f(t) g(t)\, dt = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(δ) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν $\mathcal{P} = \{0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}$ είναι διαμέριση του $[0,1]$, δείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le \int_0^1 |f'(t)|\, dt$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
15 Ιουνίου 2018

1. (1+0.5+0.5+0.5=2.5 μον.)

(α) Δώστε τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β.i) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(β.ii) Αν η $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε είναι φραγμένη.

(β.iii) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε και η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

2. (3 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k^{2/3}}$, (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$, (iii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log_2(k)}$, (iv) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{4k}-1)$, (v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)^2}{k^3}$.

3. (2+1=3 μον.) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα

(i) $\int \sin(x)^3\cos(x)^2dx$, (ii) $\int \sin(\ln x)dx$, (iii) $\int x\cos(x)^2dx$, (iv) $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$.

[*Υπόδειξη:* $\cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.]

. (1+0.5+1.5=3 μον.)

α) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(q) = 0$ για κάθε $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in [a,b]$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in [0,1]$ υπάρχει $y \in [a,b]$ ώστε $f(y) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(y_2)$.

Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0) = 0$. Δείξ ότι $|f(x)| \leq \int_0^1 |f'(t)|^2\,dt$ για κάθε $x \in [0,1]$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΑΝΑΛΥΣΗ 1

Σεπτέμβριος 2018

1. (1+0.5+0.5+0.5=2.5 μον.)

(α) Δώστε τον ορισμό της συνεχής συνάρτησης.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(β.i) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(β.ii) Αν η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη και η (b_n) είναι συκλίνουσα, τότε η ακολουθία $(a_n b_n)$ είναι συγκλίνουσα.

(β.iii) Αν η συνάρτηση $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και θετική, τότε είναι άνω φραγμένη.

2. (3 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log_2 k)^{2/3}}, \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k^5+1} - \sqrt{k^5}), \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!},$$

$$\text{(iv)} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k, \quad \text{(v)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\cos k)^2}.$$

3. (2+1=3 μον.) Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\text{(i)} \int (\cos x)^3\,dx, \quad \text{(ii)} \int e^x \cos x\,dx, \quad \text{(iii)} \int x(\sin x)^2\,dx, \quad \text{(iv)} \int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx.$$

[*Υπόδειξη:* $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.]

4. (1+0.75+1.25=3 μον.)

(α) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν $\mathcal{P} = \{0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}$ είναι διαμέριση του $[0,1]$, δείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_0^1 |f'(t)|^2\,dt$.

(β) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(0) = g(1) = 1$ έχουμε $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = 0$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(γ) Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι σειρές: (γ.i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, (γ.ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$, και (γ.iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$, συγκλίνουν.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!