Γραμμική Άλγεβρα, Περίληψη Μαθήματος

Ισοδυναμίες 1. Τα παρακάτω αναπαριστούν το ίδιο ακριβώς σύνολο.

- Σύνολο λύσεων συστήματος με m εξισώσεις και n μεταβλητές.
- Σύνολο λύσεων του $Ax = b$ με $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
- Τομή m υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$.
- Σύνολο λύσεων διανυσματική εξίσωσης $x_1 \cdot a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b$ όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$

Ισοδυναμίες 2. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- $a_1, a_2, \ldots, a_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα
- κάποιο a_i γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων
- το μηδενικό διάνυσμα γράφεται με πάνω από έναν τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός των a_i
- Η εξίσωση $Ax = 0$ όπου A έχει ως στήλες τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$, έχει πάνω από μία λύσεις (άρα άπειρες).

Ισοδυναμίες 3. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Τα παρακάτω είνα ισοδύναμα.

- Το γινόμενο Ax είναι ένα διάνυσμα του οποίου η i-οστή εγγραφή ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής του A με το x.
- Το γινόμενο Ax είναι *γραμμικός συνδυασμός* των στηλών του A, δηλαδή $Ax = x_1 a_2 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n 2$.

Ισοδυναμίες 4. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- Ο A έχει r βασικές μεταβλητές (βαθμό ίσο με r).
- Ο A έχει $n - r$ βασικές μεταβλητές.
- Το σύνολο $\{x : Ax = 0\}$ (μηδενοχώρος του A) ισούται με τη γραμμική θήκη $n - r$ γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων (έχει διάσταση $n - r$).

Λύση γραμμικών συστημάτων. Το σύνολο $\{x : Ax = b\}$ ισούται με

$$\text{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_f\} + b',$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_f$ γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα, τόσα όσα και οι ελεύθερες μεταβλητές του A, και b' ένα σταθερό διάνυσμα. Με άλλα λόγια, κάθε λύση του συστήματος προκύπτει παίρνοντας έναν πιο οποιοδήποτε συνδυασμό των $a_1, a_2, \ldots, a_f$ και προσθέτοντας το διάνυσμα b'. Το b' είναι το διάνυσμα των σταθερών όρων όταν φέρω τον επαυξημένο πίνακα $[A|b]$ σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Όταν $b = 0$ τότε και $b' = 0$.

Ισοδυναμίες 5. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- Ο A είναι αντιστρέψιμος.
- $det(A) \neq 0$.
- Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση το $x = 0$ (ο μηδενοχώρος του A είναι το $\{0\}$).

Γραμμικές Απεικονίσεις. Κάθε απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ η οποία ικανοποιεί για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$ τη σχέση $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$ λέγεται *γραμμική*.
Για κάθε γραμμική απεικόνιση υπάρχει μοναδικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ώστε $T(x) = Ax$. Η i-οστή στήλη του A ισούται με $T(e_i)$.

Διανυσματικοί χώροι. Ένα σύνολο αντικειμένων ('διανυσμάτων ') V πάνω σε ένα σώμα K λέγεται διανυσματικός χώρος όταν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, ως προς τον πολλαπλασιασμό με $\lambda \in K$, περιέχει το μηδενικό διάνυσμα και, επιπρόσθετα, για κάθε $u \in V$ περιέχει το $-u$.
Ένα σύνολο λέγεται υποχώρος του V αν είναι διανυσματικός χώρος και υποσύνολο του V. Σε ένα διανυσματικό χώρο K^n (για παράδειγμα στον $\mathbb{R}^n$) όλοι οι γραμμικοί υποχώροι είναι τα σύνολα της μορφής $\{x : Ax = 0\}$ για κάποιο $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ και μόνο αυτά.