ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ερωτήσεις κατανόησης.

1. Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)=1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ισχύει $f(x) > 4/5$.

Σωστό ή Λάθος?

Απάντηση

Ορισμός συνέχειας: 4.1.1 σελ. 75. Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Λέμε ότι η f συνεχής στο x_0, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν $x \in A$ και $|x-x_0| < \delta$, τότε $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon = 1/5$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ να ισχύει $|f(x)-f(x_0)| < 1/5$ (1). Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $f(x_0)=1$ (2)

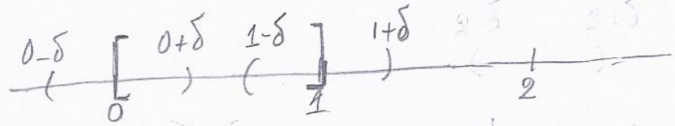
Από (1) λόγω της (2) έχουμε: $|f(x)-1| < 1/5 \Leftrightarrow -1/5 < f(x)-1 < 1/5 \Leftrightarrow 1-1/5 < f(x) < 1+1/5 \Leftrightarrow \frac{4}{5} < f(x) < \frac{6}{5}$. Άρα, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ισχύει ότι $f(x) > 4/5$. Επομένως $\boxed{\text{ΣΩΣΤΟ}}$

Ορισμός 4.3.1: Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$

Λέμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, αν για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $x \in A$ τέτοιο ώστε $0 < |x - x_0| < \delta$

Δηλαδή, ο x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A αν οσοδήποτε κοντά στον x_0 μπορούμε να βρούμε στοιχεία του A διαφορετικά από τον x_0.

Παράδειγμα



1. Αν $A = [0,1] \cup \{2\}$ έχουμε ότι

α) τα $0, 1$ είναι σημεία συσσώρευσης γιατί κοντά τους μπορούμε να βρούμε στοιχεία του A διαφορετικά από αυτά

β) το 2 δεν είναι σημείο συσσώρευσης γιατί κοντά του ΔΕΝ μπορούμε να βρούμε στοιχεία του A διαφορετικά από αυτό

Άρα, το 2 είναι μεμονωμένο σημείο

2. Το $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης

Ορισμός 4.3.3: Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι ο x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, δηλαδή αν υπάρχει περιοχή του x_0 η οποία δεν περιέχει άλλα σημεία του A, εκτός από το x_0. (Ισοδύναμα, αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$)

Άσκηση:

Η $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$ είναι συνεχής.
Σωστό ή λάθος?

Απάντηση:

Όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f, είναι μεμονωμένα σημεία του, άρα η f είναι συνεχής σε αυτά.
Το επιχείρημα είναι το εξής:

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$
Αν $n \in \mathbb{N}$ και $|n-m| < 1/2$ τότε αναγκαστικά $n = m$

Συνεπώς από τον ορισμό της συνέχειας θα έχουμε:

$$|f(n) - f(m)| = |f(m) - f(m)| = 0 < \varepsilon$$

Άρα, $\boxed{\text{ΣΩΣΤΟ}}$

Αρχή της μεταφοράς (σελ. 77-78)

Θεώρημα 4.1.5 (αρχή της μεταφοράς): Η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.

Παρατήρηση 4.1.6

Η αρχή της μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους:

(i) Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να δείξουμε ότι

«$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$»

(ii) Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να βρούμε μια ακολουθία $x_n \to x_0$ (στο A) ώστε $\lim_n f(x_n) \neq f(x_0)$.

Πολύ συχνά εξασφαλίζουμε την ασυνέχεια της f στο x_0 βρίσκοντας δύο ακολουθίες $x_n \to x_0$ και $y_n \to x_0$ (στο A) ώστε $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(y_n)$. Αν η f ήταν συνεχής στο x_0, θα έπρεπε τα δύο όρια να είναι ίσα με $f(x_0)$ άρα και μεταξύ τους ίσα

Άσκηση

Αν $f(1/n)=(-1)^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

$\boxed{\text{Σωστό}}$ ή Λάθος?

Απάντηση

Έστω $x_n=\frac{1}{2n}$, $n\in\mathbb{N}$. Ισχύει ότι $\frac{1}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

Έστω $y_n=\frac{1}{2n-1}$, $n\in\mathbb{N}$ Ισχύει ότι $\frac{1}{2n-1}\xrightarrow{n\to\infty}0$

Όμως από την υπόθεσή μας έχουμε ότι:

$$f(x_n)=f\left(\frac{1}{2n}\right)=(-1)^{2n}=1\xrightarrow{n\to\infty}1 \qquad (1)$$

και $f(y_n)=f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=(-1)^{2n-1}=-1\xrightarrow{n\to\infty}-1 \quad (2)$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.1.6 (ii) από την αρχή της μεταφοράς έχουμε ότι αφού $x_n\to 0$ και $y_n\to 0$, αλλά

$$\lim_n f(x_n)=1\neq -1=\lim_n f(y_n) \quad (\text{λόγω των } (1),(2))$$

Θα ισχύει ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0=0$.

Θεωρημα 4.2.3 (Bolzano)

Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθετουμε ότι $f(a)<0$ και $f(b)>0$. Τοτε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=0$

Θεωρημα 4.2.4 (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής)

Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a)<f(b)$ και $f(a)<\rho<f(b)$, τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=\rho$. Όμοια, αν $f(b)<f(a)$ και $f(b)<\rho<f(a)$, τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=\rho$.

Ασκηση

Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ειναι συνεχής και $f(0) = -f(1)$, τότε υπαρχει $x_0 \in [0,1]$ ωστε $f(x_0) = 0$

Σωστό ή Λαθος?

Απάντηση

Αν $f(0) = 0$ τότε παίρνουμε $x_0 = 0$ ή 1 γιατί θα ειναι και η $f(1) = 0$ αφού $f(0) = -f(1)$

Η f ειναι συνεχής στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$ συνεχής στο $[0,1]$ και αφού $f(0) = -f(1)$ θα ισχυει ότι

$$\left.\begin{array}{l} \text{ειτε } f(0) > 0 \text{ και } f(1) < 0 \\ \text{ειτε } f(0) < 0 \text{ και } f(1) > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Θ. Bolzano}} \text{υπαρχει } x_0 \in [0,1] : f(x_0) = 0$$

Αρα $\boxed{\text{ΣΩΣΤΟ}}$

Θεώρημα 4.22 (Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχουν $y_1, y_2 \in [a,b]$ ώστε

$f(y_1)\leq f(x) \leq f(y_2)$, για κάθε $x\in[a,b]$

Άσκηση

Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (a,b)

Σωστό ή Λάθος?

Απάντηση

Έστω ότι η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$

Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$, όμως δεν παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή καθώς θα έπρεπε να είχα η είστο διάστημα $[0,1]$.

Άρα, $\boxed{\text{ΛΑΘΟΣ}}$

Θεώρημα 4.2.1: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, Υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in [a,b]$

$$m \le f(x) \le M$$

Δηλαδή, η f είναι άνω και κάτω φραγμένη.

Άσκηση

Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$

Σωστό ή Λάθος?

Απάντηση

$\boxed{\text{Σωστό}}$, λόγω Θεωρήματος 4.2.1

Θεώρημα 4.1.5 (Αρχή Μεταφοράς)

Η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$

Άσκηση

Αν $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ (1), τότε $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$

Σωστό ή Λάθος?

Απάντηση

Έστω $x_n \neq 0$ και $x_n \to 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Από την (1) έχουμε ότι $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$, άρα και $\lim\limits_{x_n \to 0} g(x_n) = 0$ (1)

λόγω της αρχής μεταφοράς

Η $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη συνάρτηση (2)

Οπότε έχουμε μηδενική * φραγμένη συνάρτηση λόγω των (1), (2)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} g(x) \sin\frac{1}{x_n} = 0$

Άρα, $\boxed{\text{ΣΩΣΤΟ}}$

ΟΜΑΔΑ Α'

Άσκηση

Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in X$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) \neq 0$, να δείξετε ότι:

(α) Αν $f(x_0) > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \delta$ και $x \in X$, τότε

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

(β) Αν $f(x_0) < 0$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \delta$ και $x \in X$, τότε

$$f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0$$

Λύση

(α) Έστω ότι $f(x) > 0$. $^{(1)}$ Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, αν θεωρήσουμε $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ $^{(1')}$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν $x \in X$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}. \quad (2)$$

Από την αριστερή ανισότητα της (2) έχουμε ότι

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) \Rightarrow f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \Rightarrow \frac{f(x_0)}{2} < f(x) \quad (3)$$

Από (1), (3) $\overset{(1')}{\Longrightarrow}$ $0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x)$.

$\rightarrow$

β) Έστω ότι $f(x)<0$ (3)

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, αν θεωρήσουμε την

$\varepsilon = -\dfrac{f(x_0)}{2} \overset{(3')}{>} 0$. υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε:

Αν $x \in X$ και $|x-x_0|<\delta$, τότε

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<-\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)<-\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x)<\frac{f(x_0)}{2} \quad (4)$$

Οπότε από την (4) $\overset{(3)(3')}{\Longrightarrow}$ $f(x)<\dfrac{f(x_0)}{2}<0$.

Άσκηση 13

Έστω $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0)=f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x\in[0,1]$ με $f(x+1)=f(x)$.

Λύση

Έστω $h(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in[0,1]$

Η h είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$.

Παρατηρούμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=f(1)-f(0) \\ h(1)=f(2)-f(1) \overset{\text{Υποθ}}{=} f(0)-f(1)=-(f(1)-f(0)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(0)\cdot h(1) = -(f(1)-f(0))^2 < 0$$

Επομένως, από το Θεώρημα Bolzano, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x+1)=f(x)$

Αν $f(1)=f(0)=0$, τότε για $x=0$ ή $x=1$ έχουμε $h(x)=0$

δηλ. σε κάθε περίπτωση θα υπάρχει $x\in[0,1]$ ώστε

$$h(x)=0 \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x+1)=f(x).$$

Άσκηση

Έστω f συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)=f(1)$. (*)
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [0, 1-1/n]$ ώστε $f(x)=f(x+1/n)$

Λύση

Θεωρούμε την $h(x)=f(x)-f(x+1/n)$ (1), $x \in [0, 1-1/n]$

Αφού $x \in [0, 1-1/n]$ θα ισχύει ότι $0 \le x \le 1-1/n \Leftrightarrow x+1/n < 1$.

Από την (1) για $x=0$ έχουμε: $h(0)=f(0)-f(0+1/n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(0)=f(0)-f(1/n) \quad (2)$$

Από την (1) για $x=1-1/n$ έχουμε: $h(1-1/n)=f(1-1/n)-f(1-1/n+1/n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(1-1/n)=f(1-1/n)-f(1)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} h(1-1/n)=f(1-1/n)-f(0) \quad (3)$$

Αν $n=2$, τότε $f(1/2)-f(0)$ και $f(0)-f(1/2)$ είναι ετερόσημοι, δηλ. λόγω των (2),(3) έχουμε $h(0)\cdot h(1/2)<0$, οπότε από Θεώρημα Bolzano έχουμε ότι $\exists x \in [0,1/2] : h(x)=0 \Leftrightarrow f(x+1/2)=f(x)$.

Στη γενική περίπτωση αν $h(0)$ και $h(1-1/n)$ είναι ετερόσημοι θα ισχύει από Θ. Bolzano ότι $\exists x \in [0, 1-1/n] : h(x)=0$.

Θεώρημα 4.2.4 (Ενδιάμεσης Τιμής) (Θ.Ε.Τ.)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a)<f(b)$ και $f(a)<\rho<f(b)$, τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=\rho$. Όμοια, αν $f(b)<f(a)$ και $f(b)<\rho<f(a)$, τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $f(\xi)=\rho$

Άσκηση

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$

Να δείξετε ότι υπάρχει $y\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$f(y)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$$

Λύση

Η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[a,b]$

Επομένως για κάθε $i=1,\dots,n$ έχουμε ότι

$$m\le f(x_i)\le M$$ δηλ έχουμε

$$\left.\begin{aligned} m&\le f(x_1)\le M\\ m&\le f(x_2)\le M\\ &\vdots\\ m&\le f(x_n)\le M \end{aligned}\right\}(+)$$

$n\cdot m\le f(x_1)+\dots+f(x_n)\le n\cdot M \Rightarrow m\le \dfrac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}\le M\Rightarrow$

$\Rightarrow m\le \rho\le M$ όπου $m=f(y_1)$, $M=f(y_2)$. Άρα από Θ.Ε.Τ στο $[y_1,y_2]$

[illegible] $f(y_1)<f(y_2)$ και $f(y_1)<\rho<f(y_2)$ τότε υπάρχει $y\in[y_1,y_2]$: $f(y)=\rho$

Άσκηση

Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν)

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$g(x) = \alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν). Η g είναι συνεχής στο $[\lambda, \mu]$ και στο $[\mu, \nu]$

Παρατηρούμε ότι:

$$g(\lambda) = \alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu) > 0$$
$$g(\mu) = \beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu) < 0$$
$$g(\nu) = \gamma(\nu-\lambda)(\nu-\mu) > 0$$

Από Θ.Ε.Τ υπάρχει $\xi_1 \in (\lambda, \mu)$ ώστε $g(\xi_1) = 0$ και υπάρχει $\xi_2 \in (\mu, \nu)$: $g(\xi_2) = 0$.

Πρόταση 3.3.2 σελ. 68

Αν $0<x<\pi/2$, τότε $\sin x < x < \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Έπεται ότι για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ισχύουν οι ανισότητες

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$$

και ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η

$$|\sin x| \leq |x|$$

Άσκηση

Εξετάστε αν είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις

(α) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$

(β) $f:[-1,0]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x^k\cdot \sin\dfrac{1}{x}, & \text{αν } x\neq 0 \quad (k=0,1,2,\dots) \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$

(γ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x^2}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$

Λύση

$\longrightarrow$

α) Από την Πρόταση 3.3.2 γνωρίζουμε ότι αν

$0<x<\pi/2$ τότε $\sin x \le x \le \tan x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x < x \le \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1, \quad \forall x \in (0, \pi/2)$

Αν (x_n) είναι μία ακολουθία θετικών αριθμών με $x_n \to 0$

τότε $\cos x_n \to \cos 0 = 1$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι

$f(x_n) = \frac{\sin x_n}{x_n} \to 1 \ne f(0)$

Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \ne 0$.

Θεώρημα 2.2.4 (κριτήριο παρεμβολής ή κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών) σελ. 40

Θεωρούμε τρεις ακολουθίες a_n, b_n, γ_n που ικανοποιούν τα εξής

(α) $a_n \le b_n \le \gamma_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(β) $\lim a_n = \lim \gamma_n = \ell$

Έτσι, η (b_n) συγκλίνει και $\lim b_n = \ell$

β) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: $k=0$, $f(x)=\begin{cases}\sin 1/x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Ισχύει από την Πρόταση 4.4.14 (σελ 96) ότι:

Τα όρια $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ και $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχουν

Επομένως, το όριο της $\sin\frac{1}{x}$ όταν $x\to 0$ δεν υπαρχει; αρα δεν είναι συνεχής στο 0.

2η περίπτωση: $k\geq 1$, $f(x)=\begin{cases}x^k\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $k=0,1,2,\dots$

Παρατηρουμε ότι $|f(x)|=|x^k\sin\frac{1}{x}|\leq|x^k|=|x|^k\leq|x|$, $\forall x\in[-1,0]$

άρα $-x<f(x)<x$

και επειδή $x\xrightarrow{x=0}0$ από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$. Αρα, η f ειναι συνεχης

γ) Παρατήρηση 4.1.6 (Αρχή Μεταφοράς)

Η αρχή της μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί με 2 διαφορετικούς τρόπους

(i) για να δείξουμε ότι η f ειναι συνεχής στο x_0 αρκεί να δείξουμε ότι « $x_n\to x_0 \Longrightarrow f(x_n)\to f(x_0)$ »

$\longrightarrow$

(ii) Για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να βρούμε μια ακολουθία $x_n \to x_0$ (στο A) ώστε $\lim_n f(x_n) \neq f(x_0)$

Πολύ συχνά, εξασφαλίζουμε την ασυνέχεια της f στο x_0 βρίσκοντας δύο ακολουθίες $x_n \to x_0$ και $y_n \to x_0$ (στο A) ώστε $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(y_n)$. Αν η f ήταν συνεχής στο x_0 θα έπρεπε τα δύο όρια να είναι ίσα με $f(x_0)$, άρα και μεταξύ τους ίσα.

Επομένως για το γ. ερώτημα της άσκησης έχουμε:

Έστω $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}} \to 0$, τότε $f(x_n) = \dfrac{1}{x_n} \cdot \sin \dfrac{1}{x_n^2} =$

Παρ. 4.1.6

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}} \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$= \sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \cdot 1 = \sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \longrightarrow +\infty$, δηλ. η f δεν είναι συνεχής στο σημείο 0.

Άρα, η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \neq 0$.