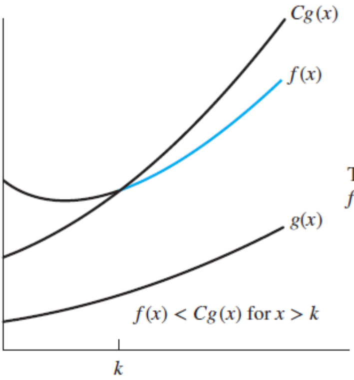
Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός



The part of the graph of $f(x)$ that satisfies $f(x) < Cg(x)$ is shown in color.

The function $f(x)$ is $O(g(x))$.

Άσκηση 1

Δώστε μια εκτίμηση για το μεγάλο-Ο των ακόλουθων συναρτήσεων.

a. $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$
b. $n^{2^n} + n^{n^2}$

- a. $f(n) = n\log(n^2+1) + n^2\log n$

  Παρατηρούμε ότι: $n\log(n^2+1) \leq n\log(2n^2)$, εφόσον $2n^2 > n^2+1$ για $n > 1$

  Συνεπώς: $f(n) \leq n\log(2n^2) + n^2\log n = n\log 2 + 2n\log n + n^2\log n$

  Ο τρίτος όρος αυξάνεται πιο γρήγορα και συνεπώς $f(n) = O(n^2\log n)$.

- (b) $f(n) = n^{2^n} + n^{n^2} \leq n^{2^n} + n^{2^n} = 2n^{2^n}$ για $n > 5$

  καθώς παρατηρούμε ότι $n^2 < 2^n$ για $n > 5$.

  Συνεπώς $f(n) = O(n^{2^n})$.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι η $f(n) = 2^n + 17$ είναι $O(3^n)$

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι η $f(n) = 2^n + 17$ είναι $O(3^n)$

Για $n > 5$, $2^n + 17 \leq 2^n + 2^n = 2 * 2^n \leq 2 * 3^n$

Αυτό δείχνει ότι η $f(n)$ είναι $O(3^n)$, (μάρτυρες $k = 5$ και $C = 2$).

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι α) η $x \log x$ είναι $O(x^2)$, αλλά β) η x^2 δεν είναι $O(x \log x)$

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι α) η $x \log x$ είναι $O(x^2)$, αλλά β) η x^2 δεν είναι $O(x \log x)$

α) Γνωρίζουμε ότι $x < 2^x \Leftrightarrow \log x < x$, για $x > 0$.

Άρα, $x \log x < x^2$ και συνεπώς $O(x^2)$ με μάρτυρες $C = 1, k = 0$.

β) Έστω ότι x^2 είναι $O(x \log x)$. Τότε υπάρχει C, k έτσι ώστε για κάθε $x > k$, $x^2 \leq Cx \log x$. Επιλέγουμε $n = \max(C, k)^2$.

Προφανώς ισχύει $n^2 \leq Cn \log n$ και $C \leq \sqrt{n}$.

Συνεπώς, $n^2 \leq \sqrt{n} \cdot n \cdot \log n \Leftrightarrow \dfrac{n}{\sqrt{n}} \leq \log n$

Καταλήξαμε στο αποτέλεσμα $\sqrt{n} \leq \log n$, το οποίο είναι άτοπο.

Άσκηση 4

Έστω k θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι η $f(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ είναι $O(n^{k+1})$

Άσκηση 4

Έστω k θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι η $f(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ είναι $O(n^{k+1})$

$1^k + 2^k + \cdots + n^k \leq n^k + n^k + \cdots + n^k = n * n^k = n^{k+1}$.

Συνεπώς ισχύει ότι η $f(n)$ είναι $O(n^{k+1})$ με μάρτυρες $C = 1, \lambda = 1$

Άσκηση 5

1. Έστω $f(x) = O(g(x))$ όπου f και g αύξουσες και μη φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι $\log(f(x)) = O(\log(g(x)))$
2. Έστω $f(x) = O(g(x))$. Προκύπτει ότι $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$;

Άσκηση 5

1. Έστω $f(x) = O(g(x))$ όπου f και g αύξουσες και μη φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι $\log(f(x)) = O(\log(g(x)))$

1. Εφόσον f και g αύξουσες και μη φραγμένες, από την υπόθεση προκύπτει ότι υπάρχουν k και C τέτοια ώστε $f(x) \leq Cg(x)$ για $x > k$. Συνεπώς $\log(f(x)) \leq \log C + \log(g(x)) \leq \log(g(x)) + \log(g(x)) = 2\log(g(x))$, εφόσον η g δεν είναι φραγμένη, για κάποιο x_0 και $x > x_0, g(x) > C$. Συνεπώς $\log(f(x)) = O(\log(g(x)))$

Άσκηση 5

2. Έστω $f(x) = O(g(x))$. Προκύπτει ότι $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$;

2. Όχι. Αρκεί ένα αντιπαράδειγμα $f(x) = 2x$ και $g(x) = x$. Προφανώς ισχύει $f(x) = O(g(x))$.

   Ωστόσο, $2^{f(x)} = 2^{2x} = 4^x$ και $2^{g(x)} = 2^x$.

   Παρατηρούμε ότι για κάθε C, $f(x) > Cg(x)$,

   δηλαδή $4^x > C * 2^x \Leftrightarrow 2^x > C$, για $x > \log_2 C$.

   Συνεπώς, $2^{f(x)} \neq O(2^{g(x)})$

Άσκηση 6

Δείξτε ότι $n! \neq O(2^n)$.

Άσκηση 6

Δείξτε ότι $n! \neq O(2^n)$.

Απόδειξη με αντίφαση.

Έστω ότι υπάρχει C και k έτσι ώστε για κάθε $n > k$ να ισχύει
$n! \leq C \cdot 2^n \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2^n} \leq C$.

Ωστόσο, $\dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{n}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{4}$

Τότε $\dfrac{n}{4} \leq \dfrac{n!}{2^n} \leq C$ που είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει αριθμός C για τον οποίο:
$\dfrac{n}{4} \leq C, \forall n > k$, π.χ. $n = 5 \cdot C$

Άσκηση 7

Να τοποθετήσετε σε σειρά τις συναρτήσεις:

$$\sqrt{n}, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, n^2/1.000.000,$$

ώστε κάθε συνάρτηση να είναι μεγάλο-O της επόμενης.

Άσκηση 7

Να τοποθετήσετε σε σειρά τις συναρτήσεις:

$$\sqrt{n}, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, n^2/1000000,$$

ώστε κάθε συνάρτηση να είναι μεγάλο-O της επόμενης.

$1000\log n, \sqrt{n}, n\log n, n^2/1.000.000, 2^n, 3^n, 2n!$

Η σειρά των 6 πρώτων συναρτήσεων είναι γνωστή από τη θεωρία. Θα αποδείξουμε ότι $m^n = O(2n!)$ για κάθε σταθερό $m > 0$.

$m^n = m^m * m^{n-m} < m^m * (m+1) * (m+2) \cdots * (m+n-m) =$
$m^m * (m+1) * (m+2) * \cdots * n$

$m^n < m^m * \dfrac{n!}{m!} = \dfrac{m^m}{m!} * n!$

Συνεπώς για κάθε m μπορούμε να επιλέξουμε μάρτυρες $C = \dfrac{m^m}{2m!}$ και $k = 1$ σύμφωνα με τον ορισμό του Μεγάλου-O ώστε για $n > k$, $m^n < \dfrac{m^m}{2m!} * 2n!$

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η συνάρτηση n^n δεν είναι $O(n!)$.

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η συνάρτηση n^n δεν είναι $O(n!)$.

Έστω ότι η συνάρτηση είναι $O(n!)$.

Τότε θα υπήρχαν k και C ώστε $n^n \leq C * n!$ για κάθε $n > k$

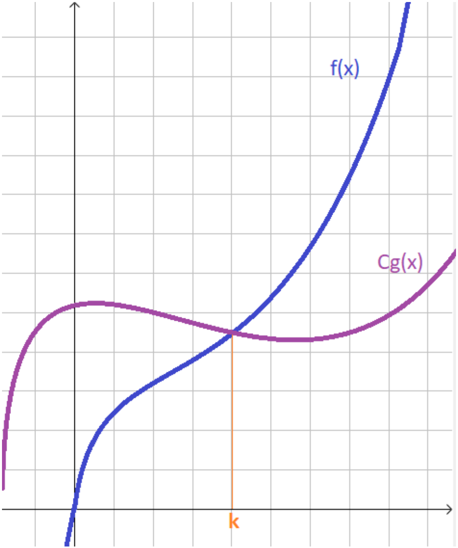
Ισοδύναμα, $\frac{n^n}{n!} \leq C$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{1}$.

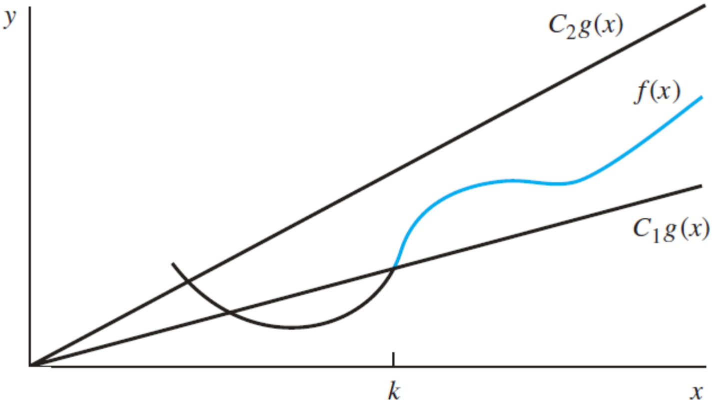
Αυτό είναι ένα γινόμενο του οποίου όλοι οι όροι πλην του τελευταίου είναι σίγουρα μεγαλύτεροι της μονάδας και ο τελευταίος όρος n.

Συνεπώς, $\frac{n^n}{n!} > n$. Τότε όμως ισχύει $n < \frac{n^n}{n!} \leq C$ για κάθε $n > k$, που είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει αριθμός C για τον οποίο $n < C$ για κάθε $n > k$.

(Προφανώς αν $k > C$. Αν $k \leq C$ μπορούμε να επιλέξουμε $n > k = C + 1$).



$$f(x) = \Omega(g(x))$$



$$f(x) = \Theta(g(x))$$

Άσκηση

Να αποδείξετε: α) ότι $f + g = \Theta(\max(f, g))$ και β) αν $f1 = \Theta(g1)$ και $f1 = \Theta(g2)$ τότε $f1 + f2 = \Theta(\max(g1, g2))$

α) Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{2}(f + g) \leq \max(f, g) \leq (f + g)$

Συνεπώς $\max(f, g) \leq (f + g) \leq 2\max(f, g)$, Όπερ έδει δείξαι.

β) Αναλόγως, αν $f1 = \Theta(g1)$ και $f1 = \Theta(g2)$ τότε $f1 + f2 = \Theta(\max(g1, g2))$

$c_1 g_1(x) \leq f_1(x) \leq C_1 g_1(x)$ και $c_2 g_2(x) \leq f_2(x) \leq C_2 g_2(x)$

Συνεπώς, $f_1(x) + f_2(x) \leq C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $\max(g1, g2) = g1$.

Έπεται $f_1(x) + f_2(x) \leq C_1 g_1(x) + C_2 g_1(x) = (C_1 + C_2)\max(g1(x), g2(x))$ και $f1 + f2 = O(\max(g1, g2))$.

Επίσης, $f_1(x) + f_2(x) \geq c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \geq c_1 g_1(x) = c_1 \max(g1, g2)$

Συνεπώς $f1 + f2 = \Omega(\max(g1, g2))$ και $f1 + f2 = \Theta(\max(g1, g2))$

Άσκηση 9

Να τοποθετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε σειρά κατά τάξη:

$f_1(n) = n^2 + (\log(n))^2$, $f_2(n) = n^2 + n$, $f_3(n) = n^2 + \log(2^n) + 1$,
$f_4(n) = (n+1)^3 - (n-1)^3$, $f_5(n) = (n + \log(n))^2$, $f_6(n) = n^2 + 2^n$,
$f_7(n) = n^2 + 2^{100}$ $f_8(n) = n^2 + 2^{2n}$, $f_9(n) = n^2 + n!$
$f_{10}(n) = n^2 + 3^n$ $f_{11}(n) = \left(n^2 + 1\right)^2$

Άσκηση 9

Να τοποθετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις σε σειρά κατά τάξη:

$f_1(n) = n^2 + (\log(n))^2$, $f_2(n) = n^2 + n$, $f_3(n) = n^2 + \log(2^n) + 1$,
$f_4(n) = (n+1)^3 - (n-1)^3$, $f_5(n) = (n + \log(n))^2$, $f_6(n) = n^2 + 2^n$,
$f_7(n) = n^2 + 2^{100}$ $f_8(n) = n^2 + 2^{2n}$, $f_9(n) = n^2 + n!$
$f_{10}(n) = n^2 + 3^n$ $f_{11}(n) = \left(n^2 + 1\right)^2$

Από την μικρότερη στην μεγαλύτερη τάξη έχουμε τις εξής:

- $\Theta\left(n^2\right)$ για τις συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_7$.
- $\Theta\left(n^4\right)$ για την συνάρτηση f_{11}.
- $\Theta\left(2^n\right)$ για την συνάρτηση f_6.
- $\Theta\left(3^n\right)$ για την συνάρτηση f_{10}.
- $\Theta\left(4^n\right)$ για την συνάρτηση f_8.
- $\Theta\left(n!\right)$ για την συνάρτηση f_9.

Άσκηση 10

Για κάθε μία από τις επόμενες παραστάσεις και κάθε ένα από τα σύμβολα O, Ω, Θ να εξετάσετε αν το σύμβολο μπορεί να αντικαταστήσει το $\square$ ώστε η πρόταση που προκύπτει να είναι αληθής.

	O	Ω	Θ
1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k} = \square(n^3)$			
2. $n^{\log n} = \square(2^{n \log n})$			
3. $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = \square(3^n)$			
4. $n \log^2 n = \square(n^2)$			
5. $n^n = \square(n!)$			
6. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \square(3^n)$			

1. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k} = n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{3} + \ldots + \frac{n^2}{n} \leq n^2 + n^2 + \ldots + n^2 = n * n^2 = n^3$.
   Συνεπώς $O(n^3)$.

   Επιπλέον, δεν είναι $f(n) = \Omega(n^3)$ το οποίο ισχύει ανν $n^3 = O(f(n))$.

   Απόδειξη με αντίφαση: $\exists c \exists n_0$ ώστε $n^3 \leq c \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k} = cn^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ για $n > n_0$. Ισχύει (ιδιότητες αρμονικών σειρών) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \log n$.
   Συνεπώς: $n^3 < cn^2(1 + \log n)$.

   Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε $\log n > 1$.

   Τότε, $n^3 < 2cn^2 \log n$ ή $n < c \log n$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί γνωρίζουμε ότι $n \neq O(\log n)$. Προφανώς, $f(n) \neq \Theta(n^3)$.

2. $2^{n \log n} = n^n > n^{\log n}$. Συνεπώς $n^{\log n} = O(2^{n \log n})$ (μάρτυρες $c = 1, n_0 = 2$).

   Προφανώς, $n^{\log n} \neq \Omega(2^{n \log n}) = \Omega(n^n)$ (και συνεπώς ούτε και μεγάλο-Θ), διότι $log(n) \neq \Omega(n)$.

3. Θα βασιστούμε στην ταυτότητα $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.
   Προφανώς, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n$.
   Συνεπώς, $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - \binom{n}{0} 3^0 = 4^n - 1$ και $\Omega(3^n)$.
   Προφανώς δεν ισχύει $O(3^n)$ και $\Theta(3^n)$

4. Από τη θεωρία ισχύει ότι $\log^2 n = O(n)$ και συνεπώς $n \log^2 n = O(n^2)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει επομένως δεν είναι $\Omega(n^2)$ και συνεπώς ούτε και μεγάλο-Θ.

5. $n^n \geq n * (n-1) * (n-2) * \ldots * 1 = n!$. Συνεπώς, $n^n = \Omega(n!)$. Δεν ισχύει $n^n = O(n!)$. Λογαριθμίζουμε τις 2 πλευρές της ανισότητας $n^n \leq c * n!$:
   $\log n^n \leq \log(c * n!) \Leftrightarrow n \log n \leq \log c + \log n + \log(n-1) + \ldots + \log 1$.
   Εφόσον $\log 1 = 0$, έχουμε n λογαριθμικούς όρους από κάθε πλευρά. Για κάθε c αν λάβουμε $n > c$, τότε προφανώς $\log n^n > \log(c * n!)$, που είναι η άρνηση της πρότασης.

6. Βάσει της ταυτότητας του 3. προκύπτει $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$. Προφανώς είναι $O(3^n), \Omega(3^n), \Theta(3^n)$.

Άσκηση 11

Έστω f, g θετικές συναρτήσεις. Αποφασίστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1. $4n^2 + 5n - 9 = \Omega(10n^2)$
2. $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
3. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(g(n), f(n)))$

1. Αληθής. Για $c = \frac{1}{5}$, $n_0 = 2$, έχουμε $4n^2 + 5n - 9 \geq c(10n^2) = 2n^2, \forall n > n_0$
2. Αληθής. $n! \leq n^n \Leftrightarrow \log(n!) \leq n * \log n$. Συνεπώς, $\log(n!) = O(n \log n)$ (1).
   Για το Ω: $\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log i \geq \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} \log i \geq \sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} \log \frac{n}{2} \geq$
   $\frac{n}{2} \log \frac{n}{2} \geq \frac{n}{2} \log \sqrt{n} = \frac{1}{4} n \log n$ (αν $n > 4, n/2 > \sqrt{n}$).
   Συνεπώς, $\log(n!) = \Omega(n \log n)$ και από (1) $\log(n!) = \Theta(n \log n)$
3. Ψευδής. Υπάρχει προφανές αντιπαράδειγμα. Π.χ. $f(n) = n^2$ και $g(n) = n$. Τότε $f(n) + g(n) = \Theta(n^2)$ και $\Theta(\min(g(n), f(n))) = \Theta(n)$

Άσκηση 12

Δώστε ένα παράδειγμα 2 συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{Z}^+$ $f(n)$ και $g(n)$ για τις οποίες δεν ισχύει ούτε $f(n) = O(g(n))$ ούτε $g(n) = O(f(n))$.

Άσκηση 12

Δώστε ένα παράδειγμα 2 συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{Z}^+$ $f(n)$ και $g(n)$ για τις οποίες δεν ισχύει ούτε $f(n) = O(g(n))$ ούτε $g(n) = O(f(n))$.

Έστω $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

$f(n) = 0$, αν n περιττός

$f(n) = n^n$, αν n άρτιος

$g(n) = n$

Προφανώς δεν υπάρχουν k και C τέτοια ώστε για $n > k$ να ισχύει

$f(n) \leq Cg(n)$, αφού $\forall C \forall k$ υπάρχει άρτιος $n > k$ ώστε

$f(n) = n^n \geq C \cdot n \Leftrightarrow n^{n-1} \geq C$. (μη φραγμένη συνάρτηση)

Αντιστοίχως, δεν υπάρχουν k και C τέτοια ώστε για $n > k$ να ισχύει

$g(n) \leq Cf(n)$, αφού $\forall C \forall k$ υπάρχει περιττός $n > k$ ώστε $g(n) = n \geq C \cdot 0 = 0$.

Άσκηση 13

Δώστε ένα παράδειγμα 2 **αυξουσών** συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbb{Z}^+$ $f(n)$ και $g(n)$ για τις οποίες δεν ισχύει ούτε $f(n) = O(g(n))$ ούτε $g(n) = O(f(n))$.

Έστω $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

$f(n) = (2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)!$ και $g(n) = (2\lceil \frac{n}{2} \rceil)!$

Αν $n = 2m + 1$ **περιττός:**

$f(n) = (2\lfloor m + \frac{1}{2} \rfloor + 1)! = (2m + 1)!$

$g(n) = (2\lceil m + \frac{1}{2} \rceil)! = (2(m + 1))! = (2m + 2)!$

Αν $n = 2m$ **άρτιος:**

$f(n) = (2m + 1)!$, $g(n) = (2m)!$

Προφανώς δεν υπάρχουν k και C τέτοια ώστε για $n > k$ να ισχύει $f(n) \leq Cg(n)$, αφού $\forall C \forall k$ υπάρχει άρτιος $n = 2m > k$ ώστε $f(n) = (2m + 1)! \geq C \cdot (2m)! \Leftrightarrow \frac{(2m+1)!}{(2m)!} \geq C \Leftrightarrow (2m + 1) \geq C \Leftrightarrow n \geq C - 1$.

Αντιστοίχως, δεν υπάρχουν k και C τέτοια ώστε για $n > k$ να ισχύει $g(n) \leq Cf(n)$, αφού $\forall C \forall k$ υπάρχει περιττός $n = 2m + 1 > k$ ώστε $g(n) = (2m + 2)! \geq C \cdot (2m + 1)! \Leftrightarrow \frac{(2m+2)!}{(2m+1)!} \geq C \Leftrightarrow (2m + 2) \geq C \Leftrightarrow n \geq C - 1$.

Μαθηματική Επαγωγή - Ισχυρή Επαγωγή

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί ότι αν $h > -1$ τότε $1 + nh \leq (1 + h)^n$, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n. Αυτή είναι η λεγόμενη **ανισότητα Bernoulli**.

Έστω $P(n)$ η πρόταση $1 + nh \leq (1 + h)^n, \forall h > -1$.

Βήμα βάσης: $P(0)$ είναι αληθής καθώς $\forall h$ έχουμε $(1 + h)^0 = 1$, άρα η ανισότητα γίνεται $1 \leq 1$.

Επαγώγικο βήμα: Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή $1 + kh \leq (1 + h)^k$. Τότε αφού $1 + h > 0$ έχουμε $(1 + h)^{k+1} = (1 + h)(1 + h)^k \geq (1 + h)(1 + kh)$ βάσει επαγωγικής υπόθεσης. Το δεύτερο μέρος της ανισότητας αναπτύσσεται ως $1 + kh + h + kh^2 = 1 + (k + 1)h + kh^2 \geq 1 + (k + 1)h$, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $n^2 - 1$ διαιρείται από το 8, οποτεδήποτε ο n είναι περιττός θετικός αριθμός.

Έστω $P(n)$ η πρόταση ο αριθμός $n^2 - 1$ διαιρείται από το 8, αν n θετικός περιττός. Θέτουμε $n = 2k - 1$ και θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για κάθε k.

Βήμα βάσης: Αν $k = 1$, τότε $n^2 - 1 = 0$ και προφανώς διαιρείται από το 8, δείχνοντας ότι η $P(1)$ ισχύει.

Επαγώγικο βήμα: Έστω ότι $P(k)$ αληθής, δηλαδή $(2k - 1)^2 - 1$ διαιρείται από το 8. Τότε $(2k - 1)^2 - 1 = 8m$ για κάποιον m θετικό ακέραιο. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι $(2(k + 1) - 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 - 4k + 1 - 1 + 8k = (2k - 1)^2 - 1 + 8k = 8m + 8k$, αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό.

Άσκηση 3

α. Βρείτε έναν τύπο για το άθροισμα

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

εξετάζοντας τις τιμές έκφρασης για μικρές τιμές του n.

β. Να αποδείξετε τη σχέση που βρήκατε στο ερώτημα (α) .

α. Συμβολίζουμε το άθροισμα με $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$. Παρατηρούμε ότι $S(1) = \frac{1}{2}, S(2) = \frac{3}{4}, S(3) = \frac{7}{8} \ldots$ Άρα υποθέτουμε ότι $S(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

β. Έστω $P(n)$ η πρόταση $S(n) = \frac{2^n - 1}{2^n}$. Θα αποδείξουμε την πρόταση για κάθε $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: $S(1) = \frac{1}{2}$, οπότε η $P(1)$ ισχύει.

Επαγώγικο βήμα: Έστω ότι $P(k)$ αληθής, δηλαδή $S(k) = \frac{2^k - 1}{2^k}$.
Έχουμε $S(k+1) = S(k) + \frac{1}{2^{k+1}}$, από τον ορισμό του αθροίσματος. Άρα $S(k+1) = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$ από επαγωγική υπόθεση. Δηλαδή $S(k+1) = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$, αποδεικνύοντας ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Άσκηση 4

Σε μια τράπεζα το ATM έχει χαρτονομίσματα των 20 και 50 €. Ποια χρηματικά ποσά μπορεί να δίνει αν θεωρήσουμε ότι έχει απεριόριστη ποσότητα αυτών των χαρτονομισμάτων? Η απάντηση να αποδειχτεί με χρήση μαθηματικής επαγωγής.

Μπορεί να δώσει όλα τα χρηματικά ποσά που είναι πολλαπλάσια των 10€ που είναι μεγαλύτερα ή ίσα από 40€, καθώς και το ποσό των 20€. Έστω $P(n)$ η πρόταση $\Pi(n) = 10n$.

Βήμα βάσης: Για $n = 4$ μπορεί να δοθεί το ποσό των 40€ $\Pi(n) = 40 = 20n_{20}$, $P(4)$ αληθής και $n_{20} = 2$ (δύο εισοσάευρα)

Επαγώγικο βήμα: Έστω $P(k)$ αληθής για $k > 4$. Τότε η επαγωγική υπόθεση είναι: $\Pi(k) = 10k = 50n_{50} + 20n_{20}$, όπου n_{50}, n_{20} μη αρνητικοί ακέραιοι (πενηντάευρα και εικοσάευρα). Αν $n_{50} > 0$, τότε ένα πενηντάευρο μπορεί να αντικατασταθεί από τρια εικοσάευρα και πράγματι ισχύει $10(k+1) = 50(n_{50} - 1) + 20(n_{20} + 3)$. Συνεπώς $P(k+1)$ αληθής. Από την άλλη, αν $n_{50} = 0$, τότε δύο εικοσάευρα μπορούν να αντικατασταθούν από ένα πενηντάευρο και πράγματι ισχύει $10(k+1) = 50(n_{50} + 1) + 20(n_{20} - 2)$ (αφού το ποσό είναι μεγαλύτερο των 40€ και άρα $n_{20} \geq 2$), συνεπώς $P(k+1)$ αληθής, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 5

Έστω f_n ο n-οστός αριθμός Fibonacci .

α. Να αποδείξετε ότι $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$, για κάθε n θετικό ακέραιο.

β. Να αποδείξετε ότι $f_0 - f_1 + f_2 - \cdots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$, για κάθε n θετικό ακέραιο.

Έστω f_n ο n-οστός αριθμός Fibonacci .

α. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι η πρόταση $P(n)$: $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ ισχύει για κάθε $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: Για $n = 1$ έχουμε $f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι η πρόταση $P(k)$ ισχύει. Τότε βάσει ορισμού της ακολουθίας Fibonacci $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$, άρα $f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 = (f_k + f_{k+1})f_k - f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k - f_{k+1}) + f_k^2$. Όμως πάλι βάσει ορισμού της ακολουθίας $f_k - f_{k+1} = -f_{k-1}$, δίνοντας τελικά ότι $f_{k+2}f_k - f_{k+1}^2 = -f_{k-1}f_{k+1} + f_k^2 = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$, βάσει της επαγωγικής υπόθεσης, δείχνοντας ότι η $P(k+1)$ είναι αληθής.

Έστω f_n ο n-οστός αριθμός Fibonacci .

β. Έστω το άθροισμα $F(n) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \cdot f_i$. Θα δείξουμε με επαγωγή ότι η πρόταση $P(n)$: $F(n) = f_{2n-1} - 1$ ισχύει για κάθε ακέραιο.

Βήμα βάσης: Για $n = 1$ έχουμε $f_0 - f_1 + f_2 = 0 = f_1 - 1$, οπότε ισχύει η πρόταση $P(1)$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η πρόταση $P(k)$. Τότε $F(k+1) = F(k) - f_{2k+1} + f_{2k+2}$. Από τον ορισμό της ακολουθίας Fibonacci $f_{2k+2} = f_{2k+1} + f_{2k}$ και από την επαγωγική υπόθεση $F(k) = f_{2k-1} - 1$. Συνολικά $F(k+1) = f_{2k-1} - 1 + f_{2k} = f_{2k+1} - 1$, αποδεικνύοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 6

Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή για να δείξετε ότι $\sum_{j=0}^{n}(j+1) = (n+1)(n+2)/2$ όταν ο n είναι μη αρνητικός ακέραιος.

Έστω $P(n)$ η πρόταση $\sum_{j=0}^{n}(j+1) = (n+1)(n+2)/2, \forall n \geq 0$.

Βήμα βάσης: $P(0)$ είναι αληθής καθώς $\sum_{j=0}^{0}(j+1) = 0+1 = (0+1)(0+2)/2$.

Επαγώγικο βήμα:
Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή $\sum_{j=0}^{k}(j+1) = (k+1)(k+2)/2$.

Τότε $\sum_{j=0}^{k+1}(j+1) = \sum_{j=0}^{k}(j+1) + [(k+1)+1] = (k+1)(k+2)/2 + (k+2)$

$= (k+2)[(k+1)/2+1] = (k+2)(k+3)/2 = [(k+1)+1][(k+1)+2]/2$,

ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 7

Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή για να δείξετε ότι n διαφορετικές ευθείες στο επίπεδο που διέρχονται από το ίδιο σημείο, χωρίζουν το επίπεδο σε $2n$ διακριτά μέρη. Προφανώς $n \geq 1$.

Βήμα βάσης: $P(1)$ είναι αληθής καθώς μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα.

Επαγώγικο βήμα:
Έστω $P(k)$ αληθής, δηλαδή k ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο χωρίζουν το επίπεδο σε $2k$ διακριτά μέρη. Η προσθήκη της $(k+1)$ ευθείας χωρίζει ακριβώς δύο από αυτά τα διακριτά μέρη σε δύο κομμάτια. Συνεπώς οι $k+1$ ευθείες διαχωρίζουν το επίπεδο σε $2k+2 = 2(k+1)$ διακριτά μέρη, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη.

Άσκηση 8

α. Να προσδιοριστεί ποια ποσά ταχυδρομικών τελών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα αξίας 3 και 10 λεπτών.

β. Να αποδείξετε την απάντηση που δώσατε για το ερώτημα (α) με μαθηματική επαγωγή. Να βεβαιωθείτε ότι διατυπώνετε ρητά την επαγωγική υπόθεση και το επαγωγικό βήμα.

γ. Να αποδείξετε την απάντηση που δώσατε για το ερώτημα (α) με ισχυρή επαγωγή. Με ποιον τρόπο διαφέρει αυτή η απόδειξη από την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή?

α. $3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16$ και όλα τα ποσά από 18 λεπτά και πάνω.

β. Θεωρούμε $P(n)$ την πρόταση «μπορούμε να σχηματίσουμε ταχυδρομικό τέλος n λεπτών μόνο με γραμματόσημα των 3 και 10 λεπτών». Θα δείξουμε με επαγωγή ότι αυτή η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n \geq 18$.
Βήμα βάσης: $18 = 3 \cdot 6$, άρα η $P(18)$ ισχύει.
Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η $P(k)$. Τότε $k = 3 \cdot i + 10 \cdot j$, για κάποιους i, j ακέραιους. Αν $i \geq 3$, τότε μπορούμε να γράψουμε την ισότητα $k + 1 = 3 \cdot (i - 3) + 10 \cdot (j + 1)$. Αν $i < 3$, τότε το j πρέπει να είναι σίγουρα μεγαλύτερο ή ίσο του 2, αφού το βήμα βάσης είναι το 18. Άρα μπορούμα να αντικαταστήσουμε 2 γραμματόσημα των 10 λεπτών με 7 των 3 λεπτών, έχοντας πράγματι $k + 1 = 3 \cdot (i + 7) + 10 \cdot (j - 2)$.

γ. **Βήμα βάσης:** Θα δείξουμε ότι τα τέλη $18, 19$ και 20 λεπτών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα των 3 και 10 λεπτών (προφανώς το τέλος των 21 λεπτών φτιάχνεται εφόσον κάποιος χρησιμοποιήσει επιπλέον ένα γραμματόσημο των 3 λεπτών στο τέλος των 18 λεπτών). Πράγματι $19 = 3 \cdot 3 + 10 \cdot 1, 20 = 2 \cdot 10$, ενώ την περίπτωση της $P(18)$ την δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Επαγωγικό βήμα: Έστω η ισχυρή επαγωγή ότι η πρόταση P είναι αληθής για κάθε j τέτοιο ώστε $18 \leq j \leq k$. Τότε, $k - 2 \geq 18$ (για τα υπόλοιπα επιληφθήκαμε στο βήμα βάσης) και βάσει ισχυρής επαγωγικής υπόθεσης η πρόταση $P(k-2)$ είναι αληθής, οπότε $k - 2 = 3 \cdot i + 10 \cdot j$. Οπότε προσθέτοντας ένα ακόμα γραμματόσημο των 3 λεπτών έχουμε ότι $k + 1 = 3 \cdot (i + 1) + 10 \cdot j$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Σε σχέση με το προηγούμενο ερώτημα, χρησιμοποιώντας την ισχυρή επαγωγή έπρεπε να επεκτείνουμε το βήμα βάσης, αλλά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $P(j)$ είναι αληθής για κάθε $18 \leq j \leq k$ δεν χρειάστηκε να πάρουμε περιπτώσεις για την ολοκλήρωση της απόδειξης.

Άσκηση 9

Να βρείτε το σφάλμα στην παρακάτω "απόδειξη" ότι κάθε ταχυδρομικό τέλος αξίας 3 ή περισσότερων λεπτών μπορεί να σχηματιστεί χρησιμοποιώντας γραμματόσημα αξίας 3 και 4 λεπτών.

Βήμα βάσης: Μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τέλος αξίας 3 λεπτών με ένα γραμματόσημο αξίας 3 λεπτών και ένα τέλος αξίας 4 λεπτών με ένα γραμματόσημο αξίας 4 λεπτών.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τέλος αξίας j λεπτών για κάθε μη αρνητικό ακέραιο j με $j \leq k$, χρησιμοποιώντας μόνο γραμματόσημα αξίας 3 και 4 λεπτών. Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τέλος αξίας $k+1$ λεπτών είτε αντικαθιστώντας ένα γραμματόσημο 3 λεπτών με ένα γραμματόσημο 4 λεπτών είτε αντικαθιστώντας 2 γραμματόσημα 4 λεπτών με 3 γραμματόσημα 3 λεπτών.

Το λάθος βρίσκεται στο ότι για την απόδειξη του επαγωγικού βήματος χρησιμοποιείται υπόθεση που δεν δικαιολογείται από το βήμα βάσης. Για να αντικαταστήσουμε 1 γραμματόσημο των 3 λεπτών πρέπει το ελάχιστο τέλος να είναι 3 λεπτά, ενώ για να αντικαταστήσουμε 2 γραμματόσημα των 4 λεπτών πρέπει το ελάχιστο τέλος να είναι 8 λεπτά. Οι ενδιάμεσες τιμές δεν ελέγχθηκαν στο βήμα βάσης. Πράγματι, ενώ υπάρχει η δυνατότητα να σχηματιστούν τέλη των $4, 6$ και 7 λεπτών, κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό για το τέλος των 5 λεπτών.

Για να επαναδιατυπωθεί σε σωστή βάση η πρόταση πρέπει να αλλάξει τόσο η πρόταση προς απόδειξη: "*Κάθε ταχυδρομικό τέλος αξίας 6 ή περισσότερων λεπτών μπορεί να σχηματιστεί χρησιμοποιώντας γραμματόσημα αξίας 3 και 4 λεπτών*" όσο και τα βήματα της επαγωγής

Βήμα βάσης: Θα δείξουμε ότι τα τέλη $6, 7$ και 8 λεπτών μπορούν να σχηματιστούν με γραμματόσημα των 3 και 4 λεπτών. Πράγματι $6 = 3 \cdot 2, 7 = 3 + 4, 8 = 4 \cdot 2$. $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$ αληθείς.

Επαγωγικό βήμα: Έστω η ισχυρή επαγωγή ότι η πρόταση P είναι αληθής για κάθε j τέτοιο ώστε $6 \leq j \leq k$. Τότε, $k - 2 \geq 6$ (για τα υπόλοιπα επιληφθήκαμε στο βήμα βάσης) και βάσει ισχυρής επαγωγικής υπόθεσης η πρόταση $P(k-2)$ είναι αληθής, οπότε $k - 2 = 3 \cdot i + 4 \cdot j$. Οπότε προσθέτοντας ένα ακόμα γραμματόσημο των 3 λεπτών έχουμε ότι $k + 1 = 3 \cdot (i+1) + 4 \cdot j$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

Άσκηση 10

Έστω ότι S είναι το υποσύνολο του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών ακεραίων που ορίζονται αναδρομικά από τα βήματα:

Βήμα βάσης: $(0,0) \in S$

Αναδρομικό βήμα: Αν $(a,b) \in S$ τότε το $(a,b+1) \in S$, $(a+1,b+1) \in S$ και $(a+2,b+1) \in S$.

α. Να παραθέσετε τα στοιχεία του S που παράγονται από τις 4 πρώτες εφαρμογές του αναδρομικού ορισμού.

β. Να χρησιμοποιήσετε την ισχυρή επαγωγή ως προς το πλήθος των εφαρμογών του αναδρομικού βήματος του ορισμού για να δείξετε ότι, $a \leq 2b$, οποτεδήποτε $(a,b) \in S$.

γ. Να χρησιμοποιήσετε τη δομική επαγωγή για να δείξετε ότι, $a \leq 2b$, οποτεδήποτε $(a,b) \in S$.

α. Εφαρμόζουμε τον τύπο 4 φορές:

Βάση	1η	2η	3η	4η
				$(0,4)$
			$(0,3)$	$(1,4)$
		$(0,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$
	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$
$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,2)$	$(3,3)$	$(4,4)$
	$(2,1)$	$(3,2)$	$(4,3)$	$(5,4)$
		$(4,2)$	$(5,3)$	$(6,4)$
			$(6,3)$	$(7,4)$
				$(8,4)$

β. Θα δείξουμε με ισχυρή επαγωγή την πρόταση $P(n)$ "$a \leq 2b, \forall (a,b) \in S$ στην n-οστή εφαρμογή του αναδρομικού τύπου".

Βήμα βάσης: Η πρόταση $P(0)$ προφανώς ισχύει καθώς μόνο το $(0,0)$ είναι μέρος του συνόλου σε αυτήν την περίπτωση.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει $a \leq 2b$ για κάθε $(a,b) \in S$, εφόσον το S φτιάχτηκε με k ή λιγότερα αναδρομικά βήματα. Θεωρούμε ένα στοιχείο (a', b') που φτιάχτηκε με $k+1$ εφαρμογές του αναδρομκού βήματος. Επειδή η τελική εφαρμογή πρέπει να γίνει σε ένα στοιχείο (a,b) που κατασκευάστηκε με λιγότερες εφαρμογές του αναδρομικού τύπου, έχουμε για αυτό το στοιχείο $a \leq 2b$. Οπότε εφαρμόζοντας μια τελευταία φορά τον αναδρομικό τύπο έχουμε ότι $b' = b+1$ και $a' = a, a+1$ ή $a+2$. Σε κάθε περίπτωση $a' \leq 2b'$.

γ. Η υπόθεση ισχύει για το βήμα βάσης, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα. Αν ισχύει αυτό για το στοιχείο $(a, b) \in S$ τότε ισχύει επίσης και για κάθε στοιχείο που λαμβάνεται από το (a, b) με μια εφαρμογή του αναδρομικού τύπου, καθώς
$a \leq 2b \Rightarrow (a \leq 2(b+1)) \wedge (a+1 \leq 2(b+1)) \wedge (a+2 \leq 2(b+1))$.

Άσκηση 11

Θεωρούμε ότι μια πλάκα σοκολάτας αποτελείται από n τετραγωνάκια που είναι διατεταγμένα σε ορθογώνια διάταξη.

Η πλάκα ή μικρότερο ορθογώνιο κομμάτι της πλάκας μπορεί να σπάσει κατα μήκος της κατακόρυφης ή οριζόντιας γραμμής που χωρίζει τα τετραγωνάκια.

Αν θεωρήσουμε ότι κάθε φορά μπορεί να σπάζει ένα κομμάτι, να προσδιοριστεί πόσα σπασίματα πρέπει να κάνουμε διαδοχικά για να σπάσουμε την πλάκα σε n ξεχωριστά τετραγωνάκια.

Η απάντηση να αποδειχτεί με ισχυρή επαγωγή.

Ισχυριζόμαστε ότι χρειάζονται ακριβώς $n-1$ σπασίματα για να σπάσει η πλάκα σε n τετραγωνάκια.

Βήμα βάσης: Αρχικά για $n=1$ είναι εμφανές ότι χρειάζονται $n-1=0$ σπασίματα.

Επαγωγικό βήμα: Θα προχωρήσουμε με υπόθεση ισχυρής επαγωγης για k κομμάτια ή λιγότερα. Θα αποδείξουμε ότι μια πλάκα με $k+1$ τετράγωνα χρειάζεται ακριβώς k σπασίματα.

Ξεκινάμε με ένα σπάσιμο που θα αφήσει 2 κομμάτια, εκ των οποίων το ένα θα έχει $i+1$ τετράγωνα, ενώ το άλλο θα έχει $k-i$ κομμάτια, ενώ ισχύει ότι $0 \leq i \leq k-1$. (Δηλαδή κάθε κομμάτι έχει τουλάχιστον 1 και μέχρι k κομμάτια). Από την υπόθεση ισχυρής επαγωγής θα έχουμε ότι το πρώτο κομμάτι θα χρειαστεί i σπασίματα για να γίνει $i+1$ κομμάτια, ενώ το δεύτερο κομμάτι θα χρειαστεί $k-i-1$ σπασίματα για να γίνει $k-i$ κομμάτια.

Συνολικά, προσθέτοντας το πρώτο σπάσιμο θα έχουμε $1+i+k-i-1=k$ σπασίματα ακριβώς, ολοκληρώνοντας το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 12

Ένα παζλ σχηματίζεται μέσω της διαδοχικής συνένωσης κομματιών που συγκροτούν μπλοκ. Μια κίνηση γίνεται κάθε φορά που ένα κομμάτι προστίθεται σε ένα μπλοκ ή όταν συνενώνονται δύο μπλοκ. Με τη χρήση της ισχυρής επαγωγής να αποδειχτεί ότι ανεξάρτητα από τον τρόπο εκτέλεσης των κινήσεων, χρειάζονται μόνο $n-1$ κινήσεις για τη συναρμολόγηση παζλ με n κομμάτια.

Έστω $P(n)$ η πρόταση ότι χρειάζονται μόνο $n-1$ κινήσεις για τη συναρμολόγηση παζλ με n κομμάτια.

Βήμα βάσης: Προφανώς, η $P(1)$ είναι αληθής.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει η $P(j)$ για κάθε $1 < j \leq k$. Η τελευταία κίνηση σχηματισμού ενός παζλ με $k+1$ κομμάτια πρέπει να είναι η συνένωση 2 μπλοκ μεγέθους m και $k+1-m$ κομμάτια αντίστοιχα, όπου $1 \leq m \leq k$. Από την επαγωγική υπόθεση, το μπλοκ με m κομμάτια απαιτεί για τον σχηματισμό του $m-1$ κινήσεις και το μπλοκ με $k+1-m$ κομμάτια, απαιτεί $k-m$ κινήσεις. Συνεπώς, για το σχηματισμό του παζλ με $k+1$ κομμάτια απαιτούνται $1+m-1+k-m=k$ κινήσεις, και το επαγωγικό βήμα ολοκληρώνεται.

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Λογική: Προτάσεις και Προτασιακές Ισοδυναμίες

Προτάσεις και Προτασιακές Ισοδυναμίες

Πρόταση είναι μια δηλωτική φράση (δηλαδή μια φράση που δηλώνει ένα γεγονός), η οποία είναι είτε αληθής είτε ψευδής, **αλλά όχι και τα δυο.**

- Σήμερα είναι το πρώτο μας μάθημα.
- 7 + 2= 12.
- Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.
- Απάντησε σε αυτήν την ερώτηση.
- Τι ώρα γίνεται το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών;
- x+ 8= 10.

Ποια είναι η άρνηση καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις;

- Το μάθημα των διακριτών παρακολουθούν τουλάχιστον 50 δευτεροετείς φοιτητές.
- Όλοι οι φοιτητές αγαπούν το μάθημα των Διακριτών Μαθηματικών.
- Κάποιος φοιτητής πήρε 10 στην τελική εξέταση των Διακριτών Μαθηματικών.
- Αν ο n διαιρείται με το 6, τότε ο n διαιρείται με το 2 και με το 3.
- Αν ο n διαιρείται με το 6, τότε ο n διαιρείται με το 2 ή με το 3.

Τρεις φοιτητές κάθονται σε ένα εστιατόριο. Ο σερβιτόρος τους ρωτάει: «Θα πιείτε όλοι καφέ;»

⋆ Ο πρώτος λέει: «Δεν ξέρω».
⋆ Ο δεύτερος λέει «Δεν ξέρω».
⋆ Ο τρίτος λέει: «Όχι».

Σε ποιους θα φέρει καφέ;

Άσκηση 1

Έστω p, q, r οι προτάσεις:
p: Παίρνεις 10 στο διαγώνισμα, q: Λύνεις κάθε άσκηση του βιβλίου, r: Παίρνεις 10 στο μάθημα.

Να γράψετε τις παρακάτω προτάσεις χρησιμοποιώντας τις p, q, r, τους λογικούς τελεστές και τις αρνήσεις:

a. Παίρνεις 10 στο μάθημα αλλά δεν λύνεις κάθε άσκηση του βιβλίου.
b. Παίρνεις 10 στο διαγώνισμα, λύνεις κάθε άσκηση του βιβλίου και παίρνεις 10 στο μάθημα.
c. Για να πάρεις 10 στο μάθημα είναι αναγκαίο να πάρεις 10 στο διαγώνισμα
d. Παίρνεις 10 στο διαγώνισμα αλλά δεν λύνεις κάθε άσκηση του βιβλίου. Ωστόσο παίρνεις 10 στο μάθημα.
e. Το να πάρεις 10 στο διαγώνισμα και να λύσεις κάθε άσκηση του βιβλίου αρκεί για να πάρεις 10 στο μάθημα.
f. Θα πάρεις 10 στο μάθημα, αν και μόνον αν είτε λύσεις κάθε άσκηση του βιβλίου είτε πάρεις 10 στο διαγώνισμα.

a. $r \land \neg q$
b. $p \land q \land r$
c. $r \to p$
d. $p \land \neg q \land r$
e. $p \land q \to r$
f. $r \leftrightarrow p \lor q$

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις υπό διπλή συνθήκη (ισοδυναμία) είναι αληθείς ή ψευδείς:

a. $2+2=4$, αν και μόνον αν $1+1=2$
b. $1+1=2$, αν και μόνον αν $2+3=4$
c. $1+1=3$, αν και μόνον αν οι πίθηκοι μπορούν να πετάξουν.
d. $0>1$, αν και μόνον αν $2>1$

a. Α $(A \leftrightarrow A)$
b. Ψ $(A \leftrightarrow \Psi)$
c. Α $(\Psi \leftrightarrow \Psi)$
d. Ψ $(\Psi \leftrightarrow A)$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις υπό συνθήκη (συνεπαγωγή) είναι αληθείς οι ψευδείς:

a. Αν $1+1=3$, τότε υπάρχουν μονόκεροι.
b. Αν $1+1=3$, τότε τα σκυλιά μπορούν να πετάξουν.
c. Αν $1+1=2$, τότε τα σκυλιά μπορούν να πετάξουν.
d. Αν $2+2=4$, τότε $1+2=3$

a. Α $(\Psi \rightarrow \Psi)$
b. Α $(\Psi \rightarrow \Psi)$
c. Ψ $(A \rightarrow \Psi)$
d. Α $(A \rightarrow A)$

Άσκηση 4

Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να προσδιορίσετε αν υπονοείται διαζευκτικό ή αποκλειστικό 'Η. Να εξηγήσετε την απάντησή σας

a. Απαιτείται εμπειρία στη C++ ή τη Java.
b. Το μεσημεριανό περιλαμβάνει σούπα ή σαλάτα.
c. Για να μπεις στη χώρα απαιτείται διαβατήριο ή ταυτότητα.

a. Διαζευκτικό διότι το ένα γεγονός δεν αναιρεί το άλλο.
b. Αποκλειστικό διότι τα δύο γεγονότα δεν μπορούν να είναι ταυτοχρόνως αληθή. Είτε θα σερβιριστεί σούπα, είτε σαλάτα όχι και τα δύο.
c. Διαζευκτικό.

Άσκηση 5

Να κατασκευάσετε τον πίνακα αλήθειας της πρότασης $((p \to q) \to r) \to s$.

Homework

Το κυνήγι του θησαυρού

Σε μία σπηλιά, υπάρχουν τρία σεντούκια, ένα κόκκινο ένα πράσινο και ένα μαύρο, καθένα από τα οποία έχει τις εξής επιγραφές:
-Κόκκινο σεντούκι: Ο θησαυρός είναι εδώ.
-Μαύρο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι εδώ.
-Πράσινο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι στο κόκκινο σεντούκι.

Γνωρίζοντας ότι μόνο ένα σεντούκι έχει το θησαυρό και πως το πολύ μία επιγραφή είναι αληθής, μπορείτε να βρείτε που βρίσκεται ο θησαυρός;

Το κυνήγι του θησαυρού

-Κόκκινο σεντούκι: Ο θησαυρός είναι εδώ.
-Μαύρο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι εδώ.
-Πράσινο σεντούκι: Ο θησαυρός δεν είναι στο κόκκινο σεντούκι.
Μόνο ένα σεντούκι έχει το θησαυρό και το πολύ μία επιγραφή είναι αληθής

p: «ο θησαυρός είναι στο κόκκινο σεντούκι»
q: «ο θησαυρός είναι στο μαύρο σεντούκι»
r: «ο θησαυρός είναι στο πράσινο σεντούκι»

p	q	r	$\mathrm{K}:p$	$\mathrm{M}:\neg q$	$\Pi:\neg p$
F	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F
T	T	T	T	F	F

Είναι η φράση "Αυτή η πρόταση είναι ψευδής" πρόταση;

Είναι η φράση "Αυτή η πρόταση είναι ψευδής" πρόταση;

Η εν λόγω φράση δεν αποτελεί πρόταση γιατί δεν έχει τιμή αλήθειας, είναι ταυτόχρονα αληθής και ψευδής. Έστω ότι ήταν αληθής, τότε θα ήταν αληθές ότι είναι ψευδής, συνεπώς θα ήταν ταυτόχρονα αληθής και ψευδής, το οποίο αποτελεί αντίφαση. Αν ήταν ψευδής τότε ο ισχυρισμός "δεν ισχύει ότι η πρόταση είναι ψευδής" σημαίνει ότι η πρόταση είναι αληθής, οπότε πάλι καταλήξαμε σε αντίφαση.

Σωστό ή Λάθος;

- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Σωστό ή Λάθος;

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ Σωστό

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	F	F				
F	F	T				
F	T	T				
F	T	F				

Σωστό ή Λάθος;

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ Σωστό

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	F

Σωστό ή Λάθος;

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$ Σωστό.

p	q	p ↔ q	p → q	q → p	(p → q) ∧ (q → p)
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

Σωστό ή Λάθος;

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ Σωστό.

p	q	p ↔ q	p → q	q → p	(p → q) ∧ (q → p)
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*
F	*T*	*F*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*

Άσκηση 6

Να βρεθεί σύνθετη πρόταση με τις προτασιακές μεταβλητές p, q, r και s που είναι αληθής μόνο όταν τρεις από αυτές τις προτασιακές μεταβλητές είναι αληθείς και ψευδής διαφορετικά.

Homework

Άσκηση 7

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

Άσκηση 7

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

p	q	¬p	¬q	(¬p ↔ ¬q)	p ↔ q	(¬p ↔ ¬q) ↔ (p ↔ q)
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

Άσκηση 7

Να κατασκευαστεί πίνακας αλήθειας για την σύνθετη πρόταση.

$$(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$$

p	q	¬p	¬q	(¬p ↔ ¬q)	p ↔ q	(¬p ↔ ¬q) ↔ (p ↔ q)
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

Άσκηση 8

Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$

Άσκηση 8

Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$

Τρόπος 1

Πίνακας αλήθειας για την πρόταση $P \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$:

p	q	r	$\neg p$	$(p \vee q)$	$\neg p \vee r$	$q \vee r$	P
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	F	F					
F	F	T					
F	T	T					
F	T	F					

Άσκηση 8

Να δειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ταυτολογία:
$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$

Τρόπος 2

Έστω ότι η πρόταση δεν είναι ταυτολογία. Τότε θα υπάρχουν τιμές αλήθειας των p, q, r για τις οποίες θα είναι ψευδής. Μια συνεπαγωγή είναι ψευδής μόνο όταν το αριστερό μέρος είναι αληθές και το δεξί ψευδές. Εφόσον το αριστερό μέρος είναι αληθές πρέπει να είναι αληθής τόσο η πρόταση $p \vee q$ όσο και η πρόταση $\neg p \vee r$. Εφόσον το δεξί μέρος είναι ψευδές πρέπει να είναι ψευδής τόσο η q όσο και η r. Ως εκ τούτου, πρέπει να είναι αληθής τόσο η p όσο και η $\neg p$. Καταλήξαμε σε αντίφαση (σε άτοπο). Άρα η πρόταση είναι ταυτολογία.

Άσκηση 9

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

α) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ **β)** (homework) $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

Άσκηση 9

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:

α) $(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$ **β)** $((p \lor q) \land \neg p) \to q$

α) $(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$

Τρόπος 1

$(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p \equiv \neg(\neg q \land (p \to q)) \lor \neg p \equiv (q \lor \neg(p \to q)) \lor \neg p \equiv$
$(\neg p \lor q) \lor \neg(p \to q) \equiv (p \to q) \lor \neg(p \to q) \equiv T$

Άσκηση 9

Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογίες:
α) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ **β)** $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

α) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$

Τρόπος 2

Εάν το αριστερό μέρος της πρότασης, $\neg q \wedge (p \rightarrow q)$, είναι ψευδές, τότε η πρόταση είναι αληθής. Εάν είναι αληθές πρέπει τόσο το $\neg q$ να είναι αληθές, όσο και το $p \rightarrow q$, άρα το p είναι ψευδές. Το τελευταίο δείχνει ότι και το δεξί μέρος $\neg p$ είναι αληθές και ως εκ τούτου η πρόταση είναι ταυτολογία.

Ο κληρονόμος

Έχετε έναν πολύ πλούσιο θείο. Στην κατοχή του έχει ένα αυτοκίνητο πολυτελείας, μια βίλα και ένα νησί. Σας λέει ότι αν κάνετε μια αληθή δήλωση θα σας χαρίσει ένα από τα τρία, όποιο θέλει αυτός, ενώ αν κάνετε μια ψευδή δεν θα πάρετε τίποτα. Εσείς θέλετε το νησί. Με ποιά δήλωση θα καταφέρετε να το πάρετε;

Ο κληρονόμος

Έχετε έναν πολύ πλούσιο θείο. Στην κατοχή του έχει ένα αυτοκίνητο πολυτελείας, μια βίλα και ένα νησί. Σας λέει ότι αν κάνετε μια αληθή δήλωση θα σας χαρίσει ένα από τα τρία, όποιο θέλει αυτός, ενώ αν κάνετε μια ψευδή δεν θα πάρετε τίποτα. Εσείς θέλετε το νησί. Με ποιά δήλωση θα καταφέρετε να το πάρετε;

Μία δήλωση που επιτυγχάνει το ζητούμενο είναι η:
«Δεν θα μου δώσεις ούτε το αυτοκίνητο ούτε τη βίλα».

Φήμες ή πραγματικότητα;

«Ο θείος Κώστας είναι πολύ πλούσιος» είπε ο ξάδερφος σας. «Έχει τουλάχιστον 10 συλλεκτικά αυτοκίνητα». «Αποκλείεται», είπε η ξαδέρφη σας.«Είμαι σίγουρη ότι έχει λιγότερα από 10». «Απ΄όσο ξέρω εγώ, έχει τουλάχιστον ένα», πρόσθεσε ο πατέρας σας. Αν μόνο ένας έχει δίκιο, τότε πόσα αυτοκίνητα έχει ο θείος Κώστας;

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Λογική: Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

Κατηγορήματα και Ποσοδείκτες

Άσκηση 1

Ποιες από τα παρακάτω προτάσεις με ποσοδείκτες είναι αληθείς και ποιες ψευδείς αν το πεδίο είναι οι πραγματικοί αριθμοί:

a. $\forall x(x^2 > x)$
b. $\exists x(x^2 - 2 = 1)$
c. $\exists x(x^2 + 2 = 1)$
d. $\forall x \exists y(x^2 + y = 4)$
e. $\exists y \forall x(x^2 + y = 4)$

Άσκηση 1

Ποιες από τα παρακάτω προτάσεις με ποσοδείκτες είναι αληθείς και ποιες ψευδείς αν το πεδίο είναι οι πραγματικοί αριθμοί:

a. $\forall x(x^2 > x)$, Ψευδές εφόσον για κάποιο $x < 1$, π.χ. $x = 0.5$, $x^2 = 0.25 < x$
b. $\exists x(x^2 - 2 = 1)$, Αληθές, $x = \sqrt{3}$
c. $\exists x(x^2 + 2 = 1)$, Ψευδές. Για κάθε x, $x^2 > 0 \neq -1$
d. $\forall x \exists y(x^2 + y = 4)$, Αληθές. Αν επιλέξουμε $y = 4 - x^2$ για οποιαδήποτε τιμή του x ισχύει.
e. $\exists y \forall x(x^2 + y = 4)$, Ψευδές. Π.χ. για $x = 0$, το μοναδικό y για το οποίο ισχύει είναι το 4 ενώ όταν $x = 1$, το μοναδικό $y = 3$.

Άσκηση 2

Προσδιορίστε την τιμή αλήθειας της πρότασης $\exists x \forall y (x \leq y^2)$ αν το πεδίο ορισμού και για τις δύο μεταβλητές είναι:

a. οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί
b. οι ακέραιοι
c. οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί

Άσκηση 2

a. Ψευδές, γιατί όσο μικρό και αν επιλέξω το x (≥ 0), υπάρχει $y = \sqrt{x/2}$, για το οποίο $x = 2y^2 \geq y^2$
b. Αληθές, π.χ. $x = -1$
c. Αληθές, π.χ. $x = -1$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το $\mathbb{R}$:

1. $\forall x \exists y \left(x^2 = y\right)$
2. $\forall x \exists y \left(x = y^2\right)$
3. $\exists x \forall y \,(xy = 0)$
4. $\exists x \exists y \,(x + y \neq y + x)$
5. $\forall x \,(x \neq 0 \rightarrow \exists y \,(xy = 1))$
6. $\exists x \forall y \,(y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$
7. $\forall x \exists y \,(x + y = 0)$
8. $\exists x \exists y \,(x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$
9. $\forall x \exists y \,(x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$
10. $\forall x \forall y \exists z \,(z = (x + y)/2)$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε την τιμή αλήθειας για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο είναι το $\mathbb{R}$:

1.$\forall x \exists y \left(x^2 = y\right)$	T, για οποιοδήποτε c στο $\mathbb{R}$, υπάρχει $y = c^2$, οπότε βάσει καθολικής γενίκευσης
2.$\forall x \exists y \left(x = y^2\right)$	F, $y^2 \geq 0$ άρα για $x < 0$ δεν ισχύει
3.$\exists x \forall y \left(xy = 0\right)$	T, εφόσον αν $x = 0$, $xy = 0$ για κάθε y
4.$\exists x \exists y \left(x + y \neq y + x\right)$	F, εφόσον ισχύει ο προσεταιριστικός νόμος
5.$\forall x \left(x \neq 0 \rightarrow \exists y \left(xy = 1\right)\right)$	T, εφόσον αν $x \neq 0, y = 1/x$
6.$\exists x \forall y \left(y \neq 0 \rightarrow xy = 1\right)$	F, καθώς για οποιοδήποτε $x = c$ αν $y \neq 1/c, xy \neq 1$
7.$\forall x \exists y \left(x + y = 0\right)$	T, εφόσον $\forall x, y = -x$
8.$\exists x \exists y \left(x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5\right)$	F, Το σύστημα είναι αδύνατο
9.$\forall x \exists y \left(x + y = 2 \wedge 2x - y = 1\right)$	F, Μοναδική λύση $x = 1, y = 1$
10.$\forall x \forall y \exists z \left(z = (x + y)/2\right)$	T , προφανώς

Άσκηση 4

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

1. $\neg\forall x \exists y \forall z T(x, y, z)$
2. $\neg(\exists x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$
3. $\neg\exists x \exists y (Q(x, y) \leftrightarrow Q(y, x))$
4. $\neg\forall y \exists x \exists z (T(x, y, z) \vee Q(x, y))$

Άσκηση 4

Να ξαναγράψετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις έτσι ώστε όλα τα σύμβολα άρνησης να προηγούνται των κατηγορημάτων:

1. $\neg\forall x\exists y\forall z T(x,y,z)$
2. $\neg(\exists x\exists y P(x,y) \wedge \forall x\forall y Q(x,y))$
3. $\neg\exists x\exists y(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$
4. $\neg\forall y\exists x\exists z(T(x,y,z) \vee Q(x,y))$

Η πρόταση 1 είναι λογικά ισοδύναμη με
$\exists x\neg\exists y\forall T(x,y,z) \equiv \exists x\forall y\neg\forall z T(x,y,z) \equiv \exists x\forall y\exists z\neg T(x,y,z)$

Η πρόταση 2 είναι λογικά ισοδύναμη με $\neg\exists x\exists y P(x,y) \vee \neg\forall x\forall y Q(x,y) \equiv$
$\forall x\neg\exists y P(x,y) \vee \exists x\neg\forall y Q(x,y) \equiv \forall x\forall y\neg P(x,y) \vee \exists x\exists y\neg Q(x,y)$

Η πρόταση $\neg(p \leftrightarrow q)$ είναι αληθής όταν η p και η q έχουν διαφορετικές τιμές αλήθειας. Επομένως, είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $\neg p \leftrightarrow q$
Συνεπώς η πρόταση 3, $\forall x\forall y\neg(Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x)) \equiv$
$\forall x\forall y(\neg Q(x,y) \leftrightarrow Q(y,x))$

Η πρόταση 4 είναι λογικά ισοδύναμη με $\exists y\forall x\forall z\neg(T(x,y,z) \vee Q(x,y)) \equiv$
$\exists y\forall x\forall z(\neg T(x,y,z) \wedge \neg Q(x,y))$

Άσκηση 5

Έστω $P(x)$ το κατηγόρημα «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ το κατηγόρημα «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό.

β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής.

γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό.

δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό.

ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό.

Άσκηση 5

Έστω $P(x)$ το κατηγόρημα «Ο μαθητής x γνωρίζει λογισμό» και $Q(y)$ το κατηγόρημα «Η τάξη y έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό». Να εκφράσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως ποσοτικοποιήσεις των $P(x)$ και $Q(y)$.

α. Κάποιοι μαθητές γνωρίζουν λογισμό. $\exists x P(x)$

β. Δεν γνωρίζει λογισμό κάθε μαθητής. $\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$

γ. Κάθε τάξη έχει έναν μαθητή που γνωρίζει λογισμό. $\forall y Q(y)$

δ. Κάθε μαθητής σε κάθε τάξη γνωρίζει λογισμό. $\forall x P(x)$

ε. Υπάρχει τουλάχιστον μία τάξη που δεν έχει μαθητές που γνωρίζουν λογισμό.
$\exists y \neg Q(y)$

Άσκηση 6

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y((x \neq y) \to \forall z((z = x) \lor (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Άσκηση 6

Να βρείτε ένα κοινό πεδίο για τις μεταβλητές x, y, z για το οποίο η πρόταση $\forall x \forall y((x \neq y) \to \forall z((z = x) \vee (z = y)))$ είναι αληθής και ένα άλλο πεδίο για αυτές τις μεταβλητές, για το οποίο είναι ψευδής.

Οποιοδήποτε πεδίο έχει δύο ακριβώς στοιχεία a και b, αν $x \neq y$ για κάθε x και για κάθε y, τότε είτε $x = a$ και $y = b$ είτε $x = b$ και $y = a$. Άρα για κάθε z εκ των a, b $(z = x) \vee (z = y)$.

Έστω πεδίο με τρία τουλάχιστον διαφορετικά στοιχεία a, b, c. Αν $x = a$ και $y = b$ τότε υπάρχει $z = c$ για το οποίο δεν είναι αληθής η πρόταση $(z = x) \vee (z = y)$.

Άσκηση 7

Έστω $P(m, n)$ το κατηγόρημα «ο m διαιρεί τον n», όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

α) $P(4, 5)$	**δ)** $\exists m \forall n P(m, n)$
β) $P(2, 4)$	**ε)** $\exists n \forall m P(m, n)$
γ) $\forall m \forall n P(m, n)$	**στ)** $\forall n P(1, n)$

Άσκηση 7

Έστω $P(m,n)$ το κατηγόρημα «ο m διαιρεί τον n», όπου το πεδίο των δύο αριθμών είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων [δηλαδή $n = km$ για κάποιον ακέραιο k]. Να προσδιορίσετε τις τιμές αλήθειας των παρακάτω προτάσεων:

α) $P(4,5)$
β) $P(2,4)$
γ) $\forall m \forall n P(m,n)$
δ) $\exists m \forall n P(m,n)$
ε) $\exists n \forall m P(m,n)$
στ) $\forall n P(1,n)$

α. Ψευδής

β. Αληθής

γ. Ψευδής, π.χ. αντιπαράδειγμα α.

δ. Αληθής, m = 1.

ε. Ψευδής, για κάθε n στο πεδίο αν επιλέξω $m = n+1$ δεν τον διαιρεί. Άρα είναι αληθής η άρνηση της πρότασης $\forall n \exists m \neg P(m,n)$.

στ. Αληθής

Άσκηση 8

Είναι οι παρακάτω προτάσεις ψευδείς; Δώστε ένα αντιπαράδειγμα, αν είναι δυνατό. Το πεδίο είναι οι ακέραιοι αριθμοί.

a. $\forall x \exists y (x = 1/y)$
b. $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$
c. $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$

Άσκηση 8

Είναι οι παρακάτω προτάσεις ψευδείς; Δώστε ένα αντιπαράδειγμα, αν είναι δυνατό. Το πεδίο είναι οι ακέραιοι αριθμοί.

a. $\forall x \exists y (x = 1/y)$. Ψευδής. Π.χ. για $x = 2$, $y = 1/2 \notin \mathbb{Z}$
b. $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$ Ψευδής. Π.χ. για $x = -200$, $y^2 < -100$ που είναι αδύνατο.
c. $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$ Ψευδής. Π.χ. $x = 0$, $y = 0$.

Άσκηση 9

Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ και $\forall x \forall y\,(P(x) \lor Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Άσκηση 9

Να δειχθεί ότι οι προτάσεις $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ και $\forall x \forall y\, (P(x) \lor Q(y))$ όπου όλοι οι ποσοτικοί δείκτες έχουν το ίδιο μη κενό πεδίο είναι λογικά ισοδύναμες.

Για να αποδειχτεί η λογική ισοδυναμία πρέπει να αποδειχτεί ότι η πρόταση $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x) \leftrightarrow \forall x \forall y\, (P(x) \lor Q(y))$ είναι ταυτολογία.

1. Αν $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x \forall y\, (P(x) \lor Q(y))$ αληθής.
Έστω $\forall x P(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x \forall y\, (P(x) \lor Q(y))$ αληθής.
Έστω $\forall x Q(x)$ αληθής τότε προφανώς $\forall x \forall y\, (P(x) \lor Q(y))$ αληθής.

2. Αν $\forall x \forall y\, (P(x) \lor Q(y))$ αληθής πρέπει να δείξουμε ότι $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ αληθής.
Αν $\forall x P(x)$ αληθής, $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ αληθής. Διαφορετικά $\exists x0$ έτσι ώστε $P(x0)$ ψευδής. Τότε όμως $\forall y\, (P(x0) \lor Q(y))$ αληθής και άρα $\forall y Q(y)$ αληθής. Συνεπώς, $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ αληθής.

Άσκηση

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ το κατηγόρημα «Ο x είναι κοντότερος του y». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Άσκηση

Τι λάθος υπάρχει στο επιχείρημα: Έστω $S(x, y)$ το κατηγόρημα «ο x είναι κοντότερος του y». Δοθείσης της υπόθεσης $\exists s S(s, Max)$, συμπεραίνουμε ότι $S(Max, Max)$. Άρα λόγω της υπαρξιακής γενίκευσης συνεπάγεται ότι $\exists x S(x, x)$, δηλαδή ότι κάποιος είναι πιο κοντός από τον εαυτό του.

Από την υπόθεση $\exists s S(s, Max)$ δεν προκύπτει το συμπέρασμα $S(Max, Max)$

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Επιχειρήματα και Κανόνες συμπερασμού

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

1. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 1$, τότε $n^2 > 1$. Έστω ότι $n^2 > 1$. Τότε, $n > 1$.
2. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 3$, τότε $n^2 > 9$. Έστω ότι $n^2 \leq 9$. Τότε, $n \leq 3$.
3. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 2$, τότε $n^2 > 4$. Έστω ότι $n \leq 1$. Τότε, $n^2 \leq 4$.

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

1. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 1$, τότε $n^2 > 1$. Έστω ότι $n^2 > 1$. Τότε, $n > 1$.

Το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο καθώς η μορφή του δεν είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 1$" και q για την πρόταση "$n^2 > 1$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \wedge q) \to p$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Αυτή όμως δεν είναι έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((p \to q) \wedge q) \to p$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "επιβεβαίωσης του συμπεράσματος".

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

2. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 3$, τότε $n^2 > 9$. Έστω ότι $n^2 \leq 9$. Τότε, $n \leq 3$.

Το επιχείρημα είναι έγκυρο καθώς η μορφή του είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 3$" και q για την πρόταση "$n^2 > 9$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \neg q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

Αυτός όμως είναι ο κανόνας modus tollens.

Άσκηση 1

Να προσδιορίσετε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που ακολουθούν. Αν το επιχείρημα είναι έγκυρο ποιος κανόνας συμπερασμού χρησιμοποιείται; Αν όχι ποιο είναι το λογικό σφάλμα;

3. Αν n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 2$, τότε $n^2 > 4$. Έστω ότι $n \leq 2$. Τότε, $n^2 \leq 4$.

Το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο καθώς η μορφή του δεν είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "n είναι πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $n > 2$" και q για την πρόταση "$n^2 > 4$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & \neg q \end{array}$$

Αυτή όμως δεν είναι έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "άρνησης της υπόθεσης".

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω είναι έγκυρα επιχειρήματα:

1. Αν ο x είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ο x^2 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Άρα, αν ο a^2 είναι θετικός, όπου ο a είναι πραγματικός, τότε ο a είναι θετικός πραγματικός αριθμός.
2. Αν $x^2 \neq 0$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $x \neq 0$. Έστω a ένας πραγματικός αριθμός με $a^2 \neq 0$. Τότε, $a \neq 0$.

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω είναι έγκυρα επιχειρήματα:

1. Αν ο x είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ο x^2 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Άρα, αν ο a^2 είναι θετικός, όπου ο a είναι πραγματικός, τότε ο a είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Το επιχείρημα δεν είναι έγκυρο καθώς η μορφή του δεν είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλήτές p για την πρόταση "x είναι θετικός πραγματικός αριθμός" και q για την πρόταση "ο x^2 είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \wedge q) \to p$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Αυτή όμως δεν είναι έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((p \to q) \wedge q) \to p$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "επιβεβαίωσης του συμπεράσματος". Δεν έχει σημασία ότι χρησιμοποιείται το σύμβολο a αντί του x καθώς εκφράζεται σε κάθε περίπτωση η ίδια πρόταση.

Άσκηση 2

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω είναι έγκυρα επιχειρήματα:

2. Αν $x^2 \neq 0$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $x \neq 0$. Έστω a ένας πραγματικός αριθμός με $a^2 \neq 0$. Τότε, $a \neq 0$.

Το επιχείρημα είναι έγκυρο καθώς η μορφή του είναι έγκυρη. Θα εκφράσουμε το επιχείρημα με τις προτασιακές μεταβλητές p για την πρόταση "$x^2 \neq 0$, όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός" και q για την πρόταση "$x \neq 0$".

Τότε η μορφή του επιχειρήματος είναι η εξής: $((p \to q) \land p) \to q$ ή

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Αυτός όμως είναι ο κανόνας modus ponens. Δεν έχει σημασία ότι χρησιμοποιείται το σύμβολο a αντί του x καθώς εκφράζεται σε κάθε περίπτωση η ίδια πρόταση.

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

1. Όλοι οι φοιτητές σε αυτήν την τάξη καταλαβαίνουν λογική. Ο Πέτρος είναι μαθητής της τάξης. Άρα ο Πέτρος καταλαβαίνει λογική.
2. Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Άρα η Νατάσα είναι φοιτήτρια πληροφορικής.
3. Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα. Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος. Άρα το πουλί μου δεν αγαπά τα φρούτα.
4. Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής. Η Λίντα δεν είναι υγιής. Άρα η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα.

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

1. Όλοι οι φοιτητές σε αυτήν την τάξη καταλαβαίνουν λογική. Ο Πέτρος είναι μαθητής της τάξης. Άρα ο Πέτρος καταλαβαίνει λογική.

Αν x είναι ένα άτομο τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x είναι φοιτητής της τάξης" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x καταλαβαίνει λογική". Συνεπώς, η πρόταση "Όλοι οι φοιτητές σε αυτήν την τάξη καταλαβαίνουν λογική" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Ο Πέτρος είναι μαθητής της τάξης" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $P(\alpha)$, όπου α είναι ο Πέτρος. Από εδώ προκύπτει άμεσα ότι το επιχείρημα είναι σωστό καθώς πρόκειται για τον κανόνα "καθολικό modus ponens"

$$
\begin{array}{rl}
 & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\
 & P(\alpha) \\
\hline
\therefore & Q(\alpha)
\end{array}
$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

2. Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Άρα η Νατάσα είναι φοιτήτρια πληροφορικής.

Αν x είναι ένα άτομο τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x είναι φοιτητής πληροφορικής" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών". Συνεπώς, η πρόταση "Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $Q(\alpha)$, όπου α είναι η Νατάσα. Θα εφαρμοσούμε αρχικά καθολική εξατομίκευση, από την οποία προκύπτει ότι:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \to Q(\alpha)) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

2. Κάθε φοιτητής πληροφορικής παίρνει ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Η Νατάσα πήρε ένα μάθημα διακριτών μαθηματικών. Άρα η Νατάσα είναι φοιτήτρια πληροφορικής.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:
Είναι προφανές ότι καταλήξαμε σε μια μη έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)) \wedge Q(\alpha)) \rightarrow P(\alpha)$ δεν είναι ταυτολογία. Πρόκειται για τη λογική πλάνη της "επιβεβαίωσης του συμπεράσματος".

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

3. Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα. Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος. Άρα το πουλί μου δεν αγαπά τα φρούτα.

Αν x είναι ένα πουλί τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το πουλί x είναι παπαγάλος" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το πουλί x αγαπά τα φρούτα". Συνεπώς, η πρόταση "Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $\neg P(\alpha)$, όπου α είναι το κατοικίδιο πουλί μου. Θα εφαρμόσουμε αρχικά καθολική εξατομίκευση:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \to Q(\alpha)) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

3. Όλοι οι παπαγάλοι αγαπούν τα φρούτα. Το κατοικίδιο πουλί μου δεν είναι παπαγάλος. Άρα το πουλί μου δεν αγαπά τα φρούτα.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:
Είναι προφανές ότι καταλήξαμε σε μια μη έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((P(\alpha) \to Q(\alpha)) \land \neg P(\alpha)) \to \neg Q(\alpha)$ δεν είναι ταυτολογία. Από εδώ προκύπτει ότι το επιχείρημα είναι λάθος καθώς πρόκειται για την πλάνη της "άρνησης της υπόθεσης".

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

4. Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής. Η Λίντα δεν είναι υγιής. Άρα η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα.

Αν x είναι ένα άτομο τότε μπορούν να δημιουργηθούν οι προτασιακές συναρτήσεις $P(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x τρώει γκρανόλα κάθε μέρα" και $Q(x)$ που αναπαριστά την έκφραση "το άτομο x είναι υγιές". Συνεπώς, η πρόταση "Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής" μπορεί να παρασταθεί ως $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Η πρόταση "Η Λίντα δεν είναι υγιής" μπορεί να εκφραστεί βάσει της προτασιακής συνάρτησης ως $\neg Q(\alpha)$, όπου α είναι η Λίντα. Αντίστοιχα, η πρόταση "η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα" αναπαρίσταται ως $\neg P(\alpha)$ Θα εφαρμόσουμε αρχικά καθολική εξατομίκευση:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \to Q(\alpha)) \end{array}$$

Άσκηση 3

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω επιχειρήματα είναι σωστά ή λάθος και να εξηγήσετε τον λόγο.

4. Καθένας που τρώει γκρανόλα κάθε μέρα είναι υγιής. Η Λίντα δεν είναι υγιής. Άρα η Λίντα δεν τρώει γκρανόλα κάθε μέρα.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:
Είναι προφανές ότι καταλήξαμε σε μια έγκυρη μορφή επιχειρήματος καθόσον η $((P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)) \wedge \neg Q(\alpha)) \rightarrow \neg P(\alpha)$ είναι ο κανόνας modus tollens.

$$\begin{array}{rl} & \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \hline \therefore & (P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)) \\ & \neg Q(\alpha) \\ \hline \therefore & \neg P(\alpha) \end{array}$$

Άσκηση 4

Βάσει των ακόλουθων υποθέσεων:

a. Η λογική είναι δύσκολη ή η λογική δεν αρέσει σε πολλούς φοιτητές
b. Αν τα μαθηματικά είναι εύκολα, τότε η λογική δεν είναι δύσκολη

να προσδιοριστεί ποια από τα παρακάτω είναι έγκυρα συμπεράσματα:

1. Τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα αν σε πολλούς φοιτητές αρέσει η λογική.
2. Η λογική δεν αρέσει σε πολλούς φοιτητές, αν μαθηματικά δεν είναι εύκολα.
3. Τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα ή η λογική είναι δύσκολη.
4. Η λογική δεν είναι δύσκολη ή τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα.
5. Αν η λογική δεν αρέσει σε πολλούς φοιτητές, τότε είτε τα μαθηματικά δεν είναι εύκολα, είτε η λογική δεν είναι δύσκολη.

Αν p η πρόταση "η λογική είναι δύσκολη", q η πρόταση "η λογική αρέσει σε πολλούς φοιτητές", r η πρόταση "τα μαθηματικά είναι εύκολα", οι υποθέσεις a και b μπορούν να παρασταθούν μέσω λογικών τελεστών ως εξής:

a. $p \vee \neg q$. Παρατηρούμε ότι είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση $q \rightarrow p$
b. $r \rightarrow \neg p$. Παρατηρούμε ότι είναι λογικά ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφη $p \rightarrow \neg r$

Από τις υποθέσεις προκύπτουν τα εξής:

1. $q \rightarrow \neg r$. 'Εγκυρο συμπέρασμα βάσει του υποθετικού συλλογισμού.
2. $\neg r \rightarrow \neg q$ ή ισοδύναμα $q \rightarrow r$. Δεν προκύπτει από τις υποθέσεις. Το συμπέρασμα είναι ψευδές αν q είναι αληθές και r ψευδές. Αν θεωρήσουμε ότι το p είναι αληθές, τότε προκύπτει ότι και οι δύο υποθέσεις είναι αληθείς αλλά το συμπέρασμα ψευδές. Συνεπώς πρόκειται για μη έγκυρο συμπέρασμα.
3. $p \vee \neg r$ ή ισοδύναμα $r \rightarrow p$. Δεν προκύπτει από τις υποθέσεις. Αν λάβουμε r αληθές, p ψευδές και q ψευδές, οι δύο υποθέσεις είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.
4. $\neg p \vee \neg r$ ή ισοδύναμα $p \rightarrow \neg r$. Που είναι η δεύτερη υπόθεση συνεπώς είναι έγκυρο μέσω απλοποίησης.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ από την προηγούμενη σελίδα:

5. $\neg q \rightarrow (\neg p \vee \neg r)$. Η μόνη περίπτωση να είναι αυτό ψευδές είναι να είναι η q ψευδής, η p αληθής και η r αληθής. Τότε όμως παραβιάζεται η υπόθεση $r \rightarrow \neg p$. Συνεπώς, σε όλες τις περίπτώσεις που ισχύουν οι υποθέσεις, ισχύει και το συμπέρασμα, που είναι τουτέστιν έγκυρο.

Άσκηση 5

Να χρησιμοποιήσετε κανόνες συμπερασμού για να δείξετε ότι αν τα κατηγορήματα $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$ και $\neg R(\alpha)$, όπου α είναι στοιχείο του πεδίου είναι αληθή, τότε το συμπέρασμα $\neg P(\alpha)$ είναι αληθές.

Άσκηση 5

Να χρησιμοποιήσετε κανόνες συμπερασμού για να δείξετε ότι αν οι υποθέσεις (ή προκείμενες) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$ και $\neg R(\alpha)$, όπου α είναι στοιχείο του πεδίου είναι αληθείς, τότε το συμπέρασμα $\neg P(\alpha)$ είναι αληθές.

Εφαρμόζοντας καθολική εξατομίκευση στη δεύτερη υπόθεση ισχύει ότι $Q(\alpha) \rightarrow R(\alpha)$. Συνεπώς βάσει του κανόνα modus tollens ισχύει $\neg Q(\alpha)$. Αντιστοίχως, με καθολική εξατομίκευση στην πρώτη υπόθεση ισχύει ότι $P(\alpha) \rightarrow Q(\alpha)$. Δεδομένου ότι ισχύει $\neg Q(\alpha)$ βάσει του κανόνα modus tollens προκύπτει ότι το συμπέρασμα $\neg P(\alpha)$ είναι αληθές.

Αποδείξεις: Μέθοδοι αποδείξεων και στρατηγική

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ο n είναι άρτιος, αν και μόνο αν ο αριθμός $7n+4$ είναι άρτιος.

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ο n είναι άρτιος, **αν και μόνο αν** ο αριθμός 7n+4 είναι άρτιος.

$\Rightarrow$

Θα δείξουμε ότι αν ο n είναι άρτιος, τότε ο 7n+4 είναι άρτιος.

Έστω ότι ο n είναι άρτιος. Τότε n =2k για κάποιο ακέραιο k. Άρα, είναι 7n+4=2(7k+2), που σημαίνει οτι ο 7n+4 είναι άρτιος αριθμός.

$\Leftarrow$

Θα δείξουμε ότι αν ο 7n+4 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος.

Έστω ότι ο n δεν είναι άρτιος, δηλαδή έστω n περιττός. Τότε n =2k+1 για κάποιο ακέραιο k. Άρα, είναι 7n+4=2(7k+5)+ 1, που σημαίνει οτι ο 7n+4 είναι περιττός αριθμός, κάτι που αντιβαίνει την υπόθεση μας.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 5y^2 = 14$.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι, δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 5y^2 = 14$.

Μπορούμε γρήγορα να περιορίσουμε την απόδειξη στον έλεγχο ορισμένων απλών περιπτώσεων, αφού αν $|y| \geq 2$ τότε $2x^2 + 5y^2 \geq 20 > 14$. Άρα αρκεί να εξετάσουμε μόνο τις περιπτώσεις όπου το y είναι ίσο με -1,0 ή 1.

- Αν y=0 τότε έχουμε $x^2 = 7$, που προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.
- Αν $|y| = 1$ τότε έχουμε $2x^2 = 9$, που προφανώς δεν έχει ακέραιες λύσεις.

'Αρα, δεν είναι δυνατόν η εξίσωση $2x^2 + 5y^2 = 14$ να έχει ακέραιες λύσεις.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα το πολύ δυο τετραγώνων και ενός κύβου μη αρνητικών ακέραιων.
- Υπάρχει θετικός ακέραιος, ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τετραγώνων 2 θετικών ακεραίων με 2 τρόπους.
- Ανάμεσα σε κάθε ρητό και κάθε άρρητο αριθμό βρίσκεται ένας άρρητος αριθμός.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα το πολύ δυο τετραγώνων και ενός κύβου μη αρνητικών ακέραιων.

Λάθος. Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.
Αν εξετάσουμε τον αριθμό 7 έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Κανένα τετράγωνο: ο αριθμός 7 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Ένα τετράγωνο:
$1^2 + 6 = 7$ Το 6 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.
$2^2 + 3 = 7$ Το 3 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Δύο τετράγωνα:
$1^2 + 1^2 + 5 = 7$ Το 5 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.
$2^2 + 1^2 + 2 = 7$ Το 2 δεν είναι κύβος μη αρνητικού ακεραίου.

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Υπάρχει θετικός ακέραιος, ο οποίος μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα τετραγώνων 2 θετικών ακεραίων με 2 τρόπους.

Σωστό. $5^2 + 5^2 = 50$ και $1^2 + 7^2 = 50$

Ασκηση 3

Σωστό ή Λάθος;

- Ανάμεσα σε κάθε ρητό και κάθε άρρητο αριθμό βρίσκεται ένας άρρητος αριθμός.

Καταρχάς θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου αριθμού είναι άρρητος αριθμος με απαγωγή σε άτοπο (με αντίφαση).

Έστω ότι το άθροισμα s ενός ρητού αριθμού r και ενός άρρητου αριθμού i είναι ρητός αριθμός. Τότε και το άθροισμα των ρητών αριθμών s και -r θα είναι ρητό. Όμως $s + (-r) = i$ και καταλήξαμε σε άτοπο.

Ο μέσος όρος των αριθμών r και i είναι $\frac{(r+i)}{2}$, που βάσει του προηγούμενου αποτελέσματος είναι άρρητος.

Άσκηση 4

Σε μία αίθουσα με 49 άτομα να αποδείξετε ότι υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Άσκηση 4

Σε μία αίθουσα με 49 άτομα να αποδείξετε ότι υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα.

Αποδεικνύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό με απαγωγή σε άτοπο (απόδειξη με αντίφαση). Έστω μία αίθουσα με 49 άτομα στην οποία δεν υπάρχουν 5 άτομα που έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα. Άρα για κάθε έναν από τους 12 μήνες, το πολύ 4 άτομα στην αίθουσα έχουν γενέθλια αυτόν τον μήνα. Συνεπώς η αίθουσα έχει το πολύ 48 άτομα, καταλήγοντας σε αντίφαση στην υπόθεση ότι η αίθουσα έχει 49 άτομα.

Άσκηση 5

Έστω ότι πέντε μονάδες και τέσσερα μηδενικά τοποθετούνται σε ένα κύκλο. Ανάμεσα σε κάθε δύο ίσα bits, εισάγουμε ένα μηδενικό και ανάμεσα σε άνισα bits εισάγουμε τη μονάδα, για να παραγουμε 9 νέα bits. Έπειτα, σβήνουμε τα 9 αρχικά bits. Να δείξετε ότι, όταν επαναλαμβάνετε τη διαδικασία, δεν μπορείτε ποτέ να λάβετε 9 μηδενικά.

Άσκηση 5

Έστω ότι πέντε μονάδες και τέσσερα μηδενικά τοποθετούνται σε ένα κύκλο. Ανάμεσα σε κάθε δύο ίσα bits, εισάγουμε ένα μηδενικό και ανάμεσα σε άνισα bits εισάγουμε τη μονάδα, για να παραγουμε 9 νέα bits. Έπειτα, σβήνουμε τα 9 αρχικά bits. Να δείξετε ότι, όταν επαναλάβετε τη διαδικασία, δεν μπορείτε ποτέ να λάβετε 9 μηδενικά.

Έστω ότι καταλήγουμε σε 9 μηδενικά. Αυτό σημαίνει ότι στο προηγούμενο βήμα είχαμε 9 ίσα bits (είτε 0 είτε 1).

-Για να έχουμε 9 μηδενικά θα πρέπει στο προηγούμενο βήμα να είχαμε ίσα bits.

- Εφόσον ξεκινάμε με κάτι διαφορετικό από 9 μηδενικά και καταλήγουμε σε 9 μηδενικά θα πρέπει σε κάποιο βήμα να είχαμε 9 μονάδες.

-Για να έχουμε 9 μονάδες θα πρέπει στο προηγούμενο βήμα να εναλλάσονται τα bits (0101...). Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι ξεκινάμε με περιττό πλήθος bits εφόσον αναγκαία δύο μονάδες θα ήταν συνεχόμενες στον κύκλο (101010101).

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι, το γινόμενο δύο εκ των αριθμών $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$, $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$ και $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$ είναι μη αρνητικό.

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι, το γινόμενο δύο εκ των αριθμών $65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}$, $79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}$ και $24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}$ είναι μη αρνητικό.

Αν κάποιος από αυτούς τους αριθμούς είναι μηδέν τότε προκύπτει το ζητούμενο.

Αν έχουν όλοι το ίδιο πρόσημο, προφανώς το γινόμενο δύο από αυτούς είναι θετικό.

Αν δεν έχουν όλοι το ίδιο πρόσημο, επειδή τα πρόσημα είναι δύο, δύο από τους αριθμούς θα έχουν διαφορετικά πρόσημα και ο τρίτος θα έχει αναγκαία το ίδιο πρόσημο με έναν από τους δύο πρώτους. Το γινόμενο των δύο αριθμών που έχουν το ίδιο πρόσημο είναι θετικό.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι αν ο r είναι άρρητος, τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος n τέτοιος ώστε η απόσταση ανάμεσα στον r και τον n να είναι μικρότερη από $1/2$.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι αν ο r είναι άρρητος, τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος n τέτοιος ώστε η απόσταση ανάμεσα στον r και τον n να είναι μικρότερη από $1/2$.

Έστω a το κάτω ακέραιο μέρος του r, δηλαδή ο μεγαλύτερος δυνατός ακέραιος που είναι μικρότερος από r, και b το άνω ακέραιο μέρος του r, δηλαδή ο μικρότερος δυνατός ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από r.

Προφανώς, όλοι οι ακέραιοι που είναι μικρότεροι από a και μεγαλύτεροι από b έχουν απόσταση από το r μεγαλύτερη από 1 οπότε αποκλειόνται.

Επίσης, ο r δεν μπορεί να είναι ακριβώς η μέση τιμή των a και b, οπότε και η απόστασή του από αυτούς θα ηταν $1/2$, γιατί τότε θα ήταν ρητός.

Επομένως είτε θα απέχει λιγότερο από $1/2$ από τον a είτε θα απέχει λιγότερο από $1/2$ από τον b και δεν μπορεί να ισχύουν και τα δύο ταυτόχρονα.

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Εισαγωγή στα Σύνολα - Πράξεις Συνόλων

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

1. $A = \{5n : n \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{5n : n \in \mathbb{Z}\}$
3. $C = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } k \in \mathbb{Z}\}$
4. $D = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } n \in \mathbb{Z}\}$
5. $E = \{-5, 0, 5, 10\}$

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

1. $A = \{5n : n \in \mathbb{R}\}$

Προφανώς τα σύνολα δεν είναι ίσα γιατί το σύνολο A περιέχει πραγματικούς αριθμούς.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

2. $B = \{5n : n \in \mathbb{Z}\}$

Τα σύνολα είναι ίσα, εφόσον η παραπάνω σημειογραφία εκφράζει ακριβώς το σύνολο των ακεραίων που περιγράφει η εκφώνηση.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

3. $C = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } k \in \mathbb{Z}\}$

Τα σύνολα είναι ίσα, εφόσον η παραπάνω σημειογραφία εκφράζει κι αυτή ακριβώς το σύνολο των ακεραίων που περιγράφει η εκφώνηση.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

4. $D = \{n \in \mathbb{Z} : n = 5k \text{ και } n \in \mathbb{Z}\}$

Τα σύνολα δεν είναι ίσα. Στον παραπάνω ορισμό του συνόλου D δεν προσδιορίζεται το σύνολο στο οποίο ανήκει ο αριθμός k. Αν υποθέσουμε ότι ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μπορούμε να επιλέξουμε ότι $k = 1/5$, συνεπώς $n = 1$ που **δεν** είναι πολλαπλάσιο του 5. Έτσι βρήκαμε ένα αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 1

Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακέραιων που είναι πολλαπλάσια του 5:

5. $E = \{-5, 0, 5, 10\}$

Προφανώς, τα σύνολα δεν είναι ίσα εφόσον το σύνολο E δεν περιέχει λ.χ. τον ακέραιο αριθμό 15 που ανήκει στα πολλαπλάσια του 5.

Άσκηση 2

Έστω $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1. Πόσα στοιχεία έχει το σύνολο A και ποια είναι αυτά;
2. Ποια είναι τα υποσύνολα του συνόλου A;

Άσκηση 2

Έστω $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

1. Πόσα στοιχεία περιέχει το σύνολο A και ποια είναι αυτά;

Έχει δύο στοιχεία: $\emptyset$ και $\{\emptyset\}$. Δηλαδή το κενό σύνολο και ένα σύνολο που έχει ως μοναδικό στοιχείο το κενό σύνολο.

Άσκηση 2

Έστω $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

2. Ποια είναι τα υποσύνολα του συνόλου A;

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Άσκηση 3

Έστω $S = \{2, 3, \{2\}, \{4\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $2 \in S$
2. $\{2\} \in S$
3. $\{2\} \subset S$
4. $\{\{2\}\} \subset S$
5. $3 \in S$
6. $\{3\} \in S$
7. $\{3\} \subset S$
8. $\{\{3\}\} \subset S$
9. $4 \in S$
10. $\{4\} \in S$
11. $\{4\} \subset S$
12. $\{\{4\}\} \subset S$

Άσκηση 3

Έστω $S = \{2, 3, \{2\}, \{4\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $2 \in S$ Σ
2. $\{2\} \in S$ Σ
3. $\{2\} \subset S$ Σ
4. $\{\{2\}\} \subset S$ Σ
5. $3 \in S$ Σ
6. $\{3\} \in S$ Λ
7. $\{3\} \subset S$ Σ
8. $\{\{3\}\} \subset S$ Λ
9. $4 \in S$ Λ
10. $\{4\} \in S$ Σ
11. $\{4\} \subset S$ Λ
12. $\{\{4\}\} \subset S$ Σ

Άσκηση 4

Έστω $A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $\{1\} \in A$
2. $\{1\} \subseteq A$
3. $\{\{1\}\} \in A$
4. $\{\{1\}\} \subseteq A$
5. $2 \in A$
6. $2 \subseteq A$
7. $\{2\} \in A$
8. $\{2\} \subseteq A$

Άσκηση 4

Έστω $A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Απαντήστε αν οι παρακάτω εκφράσεις είναι σωστές ή λάθος.

1. $\{1\} \in A$ Σ
2. $\{1\} \subseteq A$ Σ
3. $\{\{1\}\} \in A$ Λ
4. $\{\{1\}\} \subseteq A$ Σ
5. $2 \in A$ Σ
6. $2 \subseteq A$ Λ
7. $\{2\} \in A$ Λ
8. $\{2\} \subseteq A$ Σ

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

1. $\{2, 4, \ldots, 12\}$
2. $\{1, 3, \ldots, 31\}$
3. $\{2, 5, \ldots, 32\}$

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

1. $\{2, 4, \ldots, 12\}$

$\{n \in \mathbb{N} : n = 2k \text{ και } 1 \leq k \leq 6, k \in \mathbb{N}\}$
$\{n + 1 : n \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}\}$

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

2. $\{1, 3, \ldots, 31\}$

$\{n \in \mathbb{N} : n = 2k + 1 \text{ και } 0 \leq k \leq 15, k \in \mathbb{N}\}$

$\{2n + 1 : n \in \{0, 1, 2, \ldots, 15\}\}$

Άσκηση 5

Βρείτε τουλάχιστον δύο εναλλακτικούς τρόπους αναπαράστασης των παρακάτω συνόλων:

3. $\{2, 5, \ldots, 32\}$

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αριθμών μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$2 + 3 * 0, 2 + 3 * 1, 2 + 3 * 2, \ldots, 2 + 3 * 10$

$\{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } 0 \leq k \leq 10, k \in \mathbb{N}\}$

$\{3n + 2 : n \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}\}$

Άσκηση 6

Πόσα στοιχεία περιέχουν τα παρακάτω σύνολα:

1. $A = \emptyset$
2. $B = \{\emptyset\}$
3. $C = \{\{0,1\},\{1,2\}\}$
4. $D = \{0,1,2,\{0,1\},\{1,2\},\{0,1,2\},A\}$
5. $E = \{0,\{\{1,\{3,5\},\{4,5,7\},8\}\}\}$

Άσκηση 6

Πόσα στοιχεία περιέχουν τα παρακάτω σύνολα:

1. $A = \emptyset$ 0
2. $B = \{\emptyset\}$ 1
3. $C = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$ 2
4. $D = \{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, A\}$ 7
5. $E = \{0, \{\{1, \{3, 5\}, \{4, 5, 7\}, 8\}\}\}$ 2

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

1. $\{0, 1, 2\}$ και $\{0, 0, 1, 2, 2, 1\}$
2. $\{0, 1, 3, \{1, 2\}\}$ και $\{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$
3. $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 1, 3\}\}$ και $\{\{3, 5, 1\}, \{6, 2, 2, 4, 6\}, \{2, 4, 2, 6\}\}$
4. $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ και $\{\{3, 5, 1\}, \{2, 4, 6\}, \{4, 6\}\}$
5. $\emptyset$ και $\{x \in \mathbb{N} : x > 1$ και $x^2 = x\}$
6. $\emptyset$ και $\{\emptyset\}$

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

1. $\{0, 1, 2\}$ και $\{0, 0, 1, 2, 2, 1\}$

Το δεύτερο σύνολο περιέχει στοιχεία που επαναλαμβάνονται περισσότερες από μία φορές. Το δεύτερο σύνολο θα μπορούσε να αναπαρασταθεί και ως $\{0, 1, 2\}$ και συνεπώς είναι ίσο με το πρώτο, εφόσον περιέχουν τα ίδια στοιχεία.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

2. $\{0, 1, 3, \{1, 2\}\}$ και $\{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$

Τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα. Λ.χ. το στοιχείο 3 περιέχεται μόνο στο πρώτο σύνολο.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

3. $\{\{1,3,5\},\{2,4,6\},\{5,1,3\}\}$ και $\{\{3,5,1\},\{6,2,2,4,6\},\{2,4,2,6\}\}$

Και σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν διπλότυπα. Στο πρώτο σύνολο το στοιχείο $\{1,3,5\}$ είναι ίδιο με το στοιχείο $\{5,1,3\}$ εφόσον η σειρά των στοιχείων δεν παίζει ρόλο. Συνεπώς το πρώτο σύνολο περιέχει δύο στοιχεία. Αντιστοίχως, στο δεύτερο σύνολο τα στοιχεία $\{6,2,2,4,6\},\{2,4,2,6\}$ αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο $\{2,4,6\}$. Συνεπώς και το δεύτερο σύνολο περιέχει 2 στοιχεία, τα $\{1,3,5\}$ και $\{2,4,6\}$. Επομένως, τα σύνολα είναι ίσα.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

4. $\{\{1,3,5\},\{2,4,6\}\}$ και $\{\{3,5,1\},\{2,4,6\},\{4,6\}\}$

Τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα καθώς το δεύτερο περιέχει το στοιχείο $\{4,6\}$ που δεν περιέχεται στο πρώτο.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

5. $\emptyset$ και $\{x \in \mathbb{N} : x > 1 \text{ και } x^2 = x\}$

Για να βρούμε τα στοιχεία που περιέχονται στο δεύτερο σύνολο θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $x^2 = x$. Η εξίσωση αυτή έχει τις προφανείς λύσεις $x = 0$ ή $x = 1$. Ωστόσο, εφόσον $x > 1$, η εξίσωση που προσδιορίζει τα στοιχεία του συνόλου δεν έχει καμία λύση και συνεπώς το σύνολο δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Άρα, είναι το κενό σύνολο.

Άσκηση 7

Σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη συνόλων, τα σύνολα είναι μεταξύ τους ίσα; Για κάθε ζεύγος όπου τα σύνολα δεν είναι ίσα, υποδείξτε ένα στοιχείο που ανήκει στο ένα αλλά δεν ανήκει στο άλλο.

6. $\emptyset$ και $\{\emptyset\}$

Τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα. Το 2ο έχει ένα στοιχείο, το κενό σύνολο, που δεν περιέχεται στο πρώτο.

Άσκηση 8

Έστω τα σύνολα:
$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 5k - 1 \text{ και } k \geq 5, k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

Είναι οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των συνόλων σωστές και γιατί;

1. $C \subseteq A$
2. $A \neq B$
3. $B \neq C$
4. $A \neq C$
5. $C \subset A$

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

1. $C \subseteq A$ Σωστό

Έστω τυχαίο στοιχείο m του συνόλου C. Τότε από την περιγραφή του συνόλου προκύπτει ότι $m = 6k - 4$ για κάποιο $k \geq 1 \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να γράψουμε $m = 3(2k) - 6 + 2 = 3(2k - 2) + 2$. Έστω $\lambda = 2k - 2 = 2(k - 1)$. Εφόσον, $k \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{N}$. Άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{N}$ ώστε $m = 6k - 4 = 3\lambda + 2$. Άρα οποιοδήποτε στοιχείο m του C ανήκει και στο σύνολο A και το σύνολο C είναι υποσύνολο του A.

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 5k - 1 \text{ και } k \geq 5, k \in \mathbb{N}\}$

2. $A \neq B$ Σωστό

Από την περιγραφή προκύπτει ότι τα στοιχεία n του συνόλου B, $n \geq 24$. Το σύνολο A όμως περιέχει το στοιχείο 2 για $k = 0$, το οποίο προφανώς δεν περιέχεται στο σύνολο B και συνεπώς τα σύνολα δεν είναι ίσα.

Άσκηση 8

$B = \{n \in \mathbb{N} : n = 5k - 1 \text{ και } k \geq 5, k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

3. $B \neq C$ Σωστό

Από την περιγραφή προκύπτει ότι τα στοιχεία n του συνόλου B, $n \geq 24$. Το σύνολο C όμως περιέχει το στοιχείο 2 για $k = 1$, το οποίο προφανώς δεν περιέχεται στο σύνολο B και συνεπώς τα σύνολα δεν είναι ίσα.

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

4. $A \neq C$ Σωστό

Από την περιγραφή προκύπτει ότι το σύνολο A περιέχει το στοιχείο 5 για $k = 1$. Το μικρότερο στοιχείο του C για $k = 1$ είναι το 2. Για τα υπόλοιπα στοιχεία ισχύει $n \geq 8$ και συνεπώς το στοιχείο 5 δεν περιέχεται στο στοιχείο C. Άρα τα δύο σύνολα δεν είναι ίσα.

Άσκηση 8

$A = \{n \in \mathbb{N} : n = 3k + 2 \text{ και } k \in \mathbb{N}\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} : n = 6k - 4 \text{ και } k \geq 1, k \in \mathbb{N}\}$

5. $C \subset A$ Σωστό

Στο ερώτημα 1 δείξαμε ότι $C \subseteq A$. Στο ερώτημα 4 δείξαμε ότι $C \neq A$. Συνεπώς, το σύνολο C είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου A.

Άσκηση 9

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A \cup C$
4. $A \cap C$
5. $A - B$
6. $|A \cup B|$
7. $|A \cap C|$

Άσκηση 9

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω:

1. $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$
2. $A \cap B = \{3, 5, 7\}$
3. $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
4. $A \cap C = \emptyset$
5. $A - B = \{1, 9, 11\}$
6. $|A \cup B| = 8$
7. $|A \cap C| = 0$

Άσκηση 10

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$

$B = \{1, \{2\}\}$

Απαντήστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

1. $2 \in A \cap B$
2. $2 \in A \cup B$
3. $2 \in A - B$
4. $\{2\} \in A \cap B$
5. $\{2\} \in A \cup B$
6. $\{2\} \in A - B$

Άσκηση 10

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$

$B = \{1, \{2\}\}$

Απαντήστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

1. $2 \in A \cap B$ Ψ
2. $2 \in A \cup B$ Α
3. $2 \in A - B$ Α
4. $\{2\} \in A \cap B$ Ψ
5. $\{2\} \in A \cup B$ Α
6. $\{2\} \in A - B$ Ψ

Άσκηση 11

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

$B = \{2, 3, 6, 8\}$

$C = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω σύνολα με απαρίθμηση των στοιχείων τους:

1. $B \cup C$
2. $B \cap C$
3. $B - C$
4. $A - B$
5. $A - C$

Άσκηση 11

Δίνονται τα παρακάτω σύνολα:

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

$B = \{2, 3, 6, 8\}$

$C = \{2, 3, 4, 5, 8\}$

Περιγράψτε τα παρακάτω σύνολα με απαρίθμηση των στοιχείων τους:

1. $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
2. $B \cap C = \{2, 3, 8\}$
3. $B - C = \{6\}$
4. $A - B = \{1, 4, 5, 7, 9, 10\}$
5. $A - C = \{1, 6, 7, 9, 10\}$

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

1. Βρείτε τα: $A \cup B, A \cap B, \overline{A}, \overline{(A \cap B)}$ και $(B \cup C) - A$
2. Απαντήστε αιτιολογημένα αν η ακόλουθη ισότητα είναι σωστή: $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$
3. Γιατί δεν έχει νόημα η έκφραση $\overline{\mathcal{P}(A)}$

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

1. Βρείτε τα: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{(A \cap B)}$ και $(B \cup C) - A$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = \{0, 2\}$

$\overline{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\overline{A \cap B} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$(B \cup C) - A = \{4, 6, 9\}$

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

2. Απαντήστε αιτιολογημένα αν η ακόλουθη ισότητα είναι αληθής: $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$

Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα. Έστω $E = \{0\}, F = \{1\}$.

Τότε $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}\}$ και $\mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

Συνεπώς $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$

Όμως $E \cup F = \{0, 1\}$ και επομένως $\mathcal{P}(E \cup F) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, \}, \{0, 1\}\}$. Ψευδές.

Παρατηρούμε ότι για τα εν λόγω σύνολα $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$. Θα το αποδείξουμε σε επόμενο φροντιστήριο.

Άσκηση 12

Έστω:

$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{0, 2, 4\}$

$C = \{0, 3, 6, 9\}$

3. Γιατί δεν έχει νόημα η έκφραση $\overline{\mathcal{P}(A)}$

Το σύνολο $\mathcal{P}(A)$ περιέχει στοιχεία όπως το $\{0\}$ που δεν περιλαμβάνονται στο καθολικό σύνολο. Συνεπώς δεν έχει νόημα η έννοια του συμπληρώματος σε αυτή την περίπτωση.

Άσκηση 13

Έστω: $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

1. Πόσα στοιχεία έχουν τα σύνολα $A, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$; Απαντήστε αν τα παρακάτω είναι αληθή:
2. $1 \in A$
3. $\{1, 2\} \in A$
4. $\{\{1, 2\}\} \in A$
5. $\emptyset \in A$
6. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
7. $1 \in \mathcal{P}(A)$
8. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$
9. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(A)$
10. $1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
11. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
12. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
13. $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

Άσκηση 13

Έστω: $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

1. Πόσα στοιχεία έχουν τα σύνολα $A, \mathcal{P}(A), \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$; Απαντήστε αν τα παρακάτω είναι αληθή:
2. $1 \in A$ Α
3. $\{1, 2\} \in A$ Α
4. $\{\{1, 2\}\} \in A$ Ψ
5. $\emptyset \in A$ Ψ
6. $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ Α
7. $1 \in \mathcal{P}(A)$ Ψ
8. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A)$ Α
9. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(A)$ Α
10. $1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Ψ
11. $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Ψ
12. $\{\{1, 2\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Α
13. $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ Α

Άσκηση 14

Να βρείτε τα σύνολα A και B αν: $A - B = \{1, 5, 7, 8\}, B - A = \{2, 10\}$ και $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Άσκηση 14

Να βρείτε τα σύνολα A και B αν: $A - B = \{1, 5, 7, 8\}, B - A = \{2, 10\}$ και $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Γνωρίζουμε από τον ορισμό της αφαίρεσης ότι $A = (A - B) \cup (A \cap B)$.

Συνεπώς $A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Αντίστοιχα, $B = (B - A) \cup (B \cap A) = (B - A) \cup (A \cap B) = \{2, 3, 6, 9, 10\}$

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι αν A και B σύνολα τότε $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι αν A και B σύνολα τότε $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0

Άσκηση 16

Να δείξετε ότι αν A, B και C σύνολα τότε $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \cap B \cap C$	$\overline{A \cap B \cap C}$	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

Άσκηση 16

Να δείξετε ότι αν A, B και C σύνολα τότε $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ με χρήση πίνακα ιδιότητας μέλους.

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \cap B \cap C$	$\overline{A \cap B \cap C}$	$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1

Άσκηση 17

Μπορείτε να συμπεράνετε ότι $A = B$ αν $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Άσκηση 17

Μπορείτε να συμπεράνετε ότι $A = B$ αν $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

Από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου προκύπτει ότι $\cup\mathcal{P}(A) = A$.

Αν $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, τότε $\cup\mathcal{P}(A) = \cup\mathcal{P}(B)$.

Συνεπώς, $A = B$.

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ εάν και μόνο εάν $A \subseteq B$.

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ **εάν και μόνο εάν** $A \subseteq B$.

$$\Rightarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, τότε $A \subseteq B$.

Έστω $a \in A$. Τότε $\{a\} \subseteq A$ οπότε $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ και από υπόθεση $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$. Δηλαδή $\{a\} \subseteq B$ και ως εκ τούτου $a \in B$.

$$\Leftarrow$$

Θα δείξουμε ότι αν $A \subseteq B$, τότε $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Έστω ότι $A \subseteq B$. Τότε λόγω μεταβατικής ιδιότητας για κάθε υποσύνολο C του A ισχύει ότι $C \subseteq B$. Άρα ισχύει πως $\forall C \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow C \in \mathcal{P}(B)$ αποδεικνύοντας πως $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Άσκηση 19

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $(A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D)$.
- $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A \times B = B \times A$

Άσκηση 20

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $(A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D)$

Ψευδής. Αρκεί να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα.

$A = \{a, b, c\}, B = \{a, c\}, C = \emptyset, D = \{a\}$.

Τότε, $(A - B) = \{b\}, (C - D) = \emptyset$, $(A - C) = \{a, b, c\}, (B - D) = \{c\}$.

Συνεπώς $(A - B) - (C - D) = \{b\}$ και $(A - C) - (B - D) = \{a, b\}$

Άσκηση 20

Έστω A, B, C, D σύνολα. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να απαντήσετε, αν είναι σωστή ή λάθος.

- $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Αληθής. $A \subseteq B$ ανν $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

Η αντιθετοαντίστροφη ισοδύναμη πρόταση είναι $\forall x(\neg(x \in B) \rightarrow \neg(x \in A)) \equiv$

$\forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A)$. Συνεπώς $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

-$A \times B = B \times A$

Ψευδής. Τα στοιχεία των καρτεσιανών γινομένων είναι διατεταγμένα ζεύγη. Έστω $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ και $\alpha \neq \beta$ τότε $(\alpha, \beta) \in A \times B$ αλλά $(\alpha, \beta) \notin B \times A$

Άσκηση 21

Η ομοιότητα Jaccard $J(A, B)$ των πεπερασμένων συνόλων A και B είναι $J(A, B) = |A \cap B|/|A \cup B|$, όπου $J(\emptyset, \emptyset) = 1$. Να βρείτε την ομοιότητα Jaccard για τα παρακάτω ζεύγη συνόλων.

i. $A = \{1, 3, 5\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$
ii. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6\}$
iii. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
iv. $A = \{1\}$ και $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Να αποδείξετε ότι οι ιδιότητες a έως d ισχύουν, όταν τα A και B είναι πεπερασμένα σύνολα.

a. $J(A, A) = 1$
b. $J(A, B) = J(B, A)$
c. $J(A, B) = 1$ ανν $A = B$
d. $0 \leq J(A, B) \leq 1$

Άσκηση 21

i) 0, ii) 1/3, iii) 1, iv) 1/6

a. $J(A, A) = |A \cap A|/|A \cup A| = |A|/|A| = 1$
b. $J(A, B) = |A \cap B|/|A \cup B| = |B \cap A|/|B \cup A| = J(B, A)$ (αντιμεταθετικός νόμος)
c. Αν $J(A, B) = 1$ τότε $|A \cap B|/|A \cup B| = 1$ και επομένως $|A \cap B| = |A \cup B|$. Όταν $x \in A$ και $x \notin B$ τότε $x \in (A \cup B)$ και $x \notin (A \cap B)$, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση καθώς η τομή των δύο συνόλων θα περιέχει σε αυτή την περίπτωση λιγότερα στοιχεία από την ένωση (εφόσον η ένωση περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία της τομής). Αντίστοιχα όταν $x \notin A$ και $x \in B$. Συνεπώς, $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ και $A = B$. Αν $A = B$ τότε $J(A, B) = 1$ (βλ. a.)
d. Ισχύει ότι $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$. Συνεπώς, $|A \cap B| \leq |A \cup B|$. Διαιρώντας με την ένωση $J(A, B) \leq 1$. Η πληθικότητα ενός συνόλου είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0 και συνεπώς $J(A, B) \geq 0$. Στην περίπτωση που $A = B = \emptyset, J(A, B) = 1$

Άσκηση 22

Να βρείτε τα $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ και $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ για κάθε θετικό ακέραιο i:

1. $A_i = \{i, i+1, i+2, ...\}$
2. $A_i = \{0, i\}$
3. $A_i = (0, i)$
4. $A_i = (i, \infty)$

Άσκηση 22

1. **Ένωση**: Εφόσον $1 \leq i$ είναι $A_i \subseteq A_1$ και επομένως $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_1 = A_1$. (νόμος αυτοδυναμίας). Προφανώς $A_1 \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Λαμβάνοντας το όριο όταν n τείνει στο άπειρο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = \mathbb{Z}^+$

Τομή: $\cap_{i=1}^{n} A_i = \cap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, ...\} = \{n, n+1, n+2, ...\} = A_n$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

2. **Ένωση**: $\cup_{i=1}^{n} A_i = \{0, 1\} \cup \{0, 2\} \cup ... \cup \{0, n\} = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$

Τομή: $\cap_{i=1}^{n} A_i = \{0, 1\} \cap \{0, 2\} \cap ... \cap \{0, n\} = \{0\}$. Συνεπώς $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$

3. **Ένωση**: Προφανώς $A_i \subset A_n$ εφόσον $A_i = (0, i)$. Συνεπώς, $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_n = A_n$. Επίσης, $A_n \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_n$. Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, \infty)$

Τομή: Προφανώς $A_1 \subset A_i$ και επομένως $\cap_{i=1}^{n} A_1 \subseteq \cap_{i=1}^{n} A_i$. Βάσει του νόμου αυτοδυναμίας $A_1 \subseteq \cap_{i=1}^{n} A_i$. Από τον ορισμό της τομής $\cap_{i=1}^{n} A_i \subseteq A_1$. Προκύπτει $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Συνεπώς $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (0, 1)$

Άσκηση 22

4. **Ένωση**: Εφόσον $1 \leq i$ προκύπτει $A_i \subseteq A_1$ (καθώς $(i, \infty) \subseteq (1, \infty)$) και επομένως $\cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_1 = A_1$. (νόμος αυτοδυναμίας). Προφανώς $A_1 \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$. Συνεπώς $\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1$. Λαμβάνοντας το όριο όταν n τείνει στο άπειρο προκύπτει $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (1, \infty)$

Τομή: Προφανώς $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_n$. Εφόσον $A_n = (n, \infty)$ $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Συναρτήσεις - Πληθικότητα Συνόλων - Ακολουθίες

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

α. Είναι η f ένα-προς-ένα? Είναι η g ένα-προς-ένα?

β. Είναι η f επί? Είναι η g επί?

γ. Έχει η f και η g αντίστροφη? Αν ναι να βρεθεί αυτή.

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

α. Είναι η f ένα-προς-ένα? Είναι η g ένα-προς-ένα?

α. Η f είναι ένα-προς-ένα (Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$), ενώ η g όχι ($g(a) = g(d)$).

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

β. Είναι η f επί? Είναι η g επί?

β. Η f είναι επί (κάθε στοιχείο του B αποτελεί εικόνα ενός στοιχείου του A), ενώ η g όχι ($\nexists x \in B : g(x) = 4$).

Ασκηση 1

Έστω ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c, d\}$ και οι συναρτήσεις $f : A \to B, g : B \to A$, έτσι ώστε $f(1) = d, f(2) = c, f(3) = a, f(4) = b$ και $g(a) = 2, g(b) = 1, g(c) = 3, g(d) = 2$.

γ. Έχει η f και η g αντίστροφη? Αν ναι να βρεθεί αυτή.

γ. Η f έχει αντίστροφη ως ένα-προς-ένα και επί. Αυτή είναι η $f^{-1} : B \to A$ με τιμές $f^{-1}(a) = 3, f^{-1}(b) = 4, f^{-1}(c) = 2, f^{-1}(d) = 1$. Η g δεν έχει αντίστροφη αφού δεν είναι ούτε ένα-προς-ένα ούτε επί.

Ασκηση 2

Σωστό ή Λάθος;

- Η σύνθεση δύο ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.
- Αν η f και η $f \circ g$ είναι ένα-προς-ένα, τότε και η g είναι ένα-προς-ένα.
- Αν η f και η $f \circ g$ είναι επί, τότε και η g είναι επί.

Ασκηση 2

- Η σύνθεση δύο ένα-προς-ένα συναρτήσεων είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

Λάθος, διότι δεν γνωρίζουμε αν είναι επί.

- Αν η f και η f∘g είναι ένα-προς-ένα, τότε και η g είναι ένα-προς-ένα.

Σωστό Άμεση απόδειξη: Έστω $f : B \to C$ και $g : A \to B$. Ας υποθέσουμε $g(a) = g(b)$. Ως εκ τούτου $f(g(a)) = f(g(b))$. Από τον ορισμό της σύνθεσης των συναρτήσεων προκύπτει $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(b)$. Επειδή η $f \circ g$ είναι 1-1, προκύπτει $a = b$. Άρα και η g είναι 1-1.

Ασκηση 2

- Αν η f και η f∘g είναι επί, τότε και η g είναι επί.

Λάθος. Απόδειξη με αντιπαράδειγμα.

Έστω $f : B \to C$ και $g : A \to B$ και $A = \{0\}, B = \{0, 1\}, C = \{0\}$. Επίσης $g(0) = 0, f(0) = 0, f(1) = 0$. Η f είναι επί γιατί για κάθε στοιχείο του πεδίου τιμών $y \in C$ (που είναι μοναδικό, y=0) υπάρχει $x \in B$ ώστε $f(x) = y$. Επίσης η $f \circ g$ είναι επί διότι για κάθε στοιχείο $y \in C$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $(f \circ g)(x) = y$. Πράγματι, $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$. Ωστόσο, η g δεν είναι επί γιατί δεν υπάρχει $a \in A$ ώστε $g(a) = 1$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι εάν ο n είναι ακέραιος τότε $n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι εάν ο n είναι ακέραιος τότε $n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

- Έστω n άρτιος. Τότε υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k$. Προφανώς $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k$. Άρα το άθροισμα αυτών των 2 ισούται με το n.

- Αν n περιττός, τότε υπάρχει ακέραιος k τέτοιος ώστε $n = 2k + 1$. Δηλαδή, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = k$ και $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = k + 1$, δίνοντας πάλι την ισότητα στο άθροισμα.

Άσκηση 4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:

-$\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor$?

-$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Άσκηση 4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:
-$\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor$?

Έστω $x = n + \varepsilon$ και $y = m + \delta$, όπου $n = \lfloor x \rfloor, m = \lfloor y \rfloor$ και $\varepsilon, \delta \in [0,1)$

Αν $\varepsilon = \delta = 0$, τότε και οι δύο πλευρές είναι ίσες με $n + m$.

Αν $\varepsilon = 0, \delta > 0$, τότε η αριστερή πλευρά είναι $n + m + 1$ και η δεξιά $n + m$.

Αν $\varepsilon > 0$, τότε η δεξιά πλευρά είναι $n + m + 1$. Η αριστερή πλευρά είναι $n + m + 1$ ανν $\varepsilon + \delta \leq 1$ διαφορετικά $\lceil x+y \rceil = n + m + 2$.

Συνεπώς, η ισότητα ισχύει ανν αμφότεροι οι x και y είναι ακέραιοι ή όταν ο x δεν είναι ακέραιος και το άθροισμά των κλασματικών μερών των δύο αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο με 1.

Άσκηση 4

Για ποιους πραγματικούς αριθμούς ισχύει η ισότητα:
-$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

Προφανώς ισχύει αν είτε ο x είτε ο y είναι ακέραιος. (Βλ. ταυτότητα 4a, Ενότητα 2.3)

Έστω $x = n + \varepsilon$ και $y = m + \delta$, όπου $n = \lfloor x \rfloor, m = \lfloor y \rfloor$ και $\varepsilon, \delta \in [0, 1)$

Δεδομένου ότι $x + y = m + n + \varepsilon + \delta$, η ισότητα ισχύει όταν $\varepsilon + \delta < 1$. Διαφορετικά, Αν $\varepsilon + \delta \geq 1$, τότε $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Συνεπώς, η ισότητα ισχύει ανν τουλάχιστον ένας εκ των x και y είναι ακέραιος ή αν το άθροισμά των κλασματικών μερών των δύο αριθμών είναι μικρότερο από 1.

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$
2. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$
3. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτηση για την οποία το υποσύνολο του ερωτήματος 2 είναι γνήσιο
4. Να δείξετε ότι αν η f είναι 1-1, η σχέση του ερωτήματος 2 είναι ισότητα

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$

Έστω $y \in f(S \cup T)$. Τότε υπάρχει $x \in S \cup T$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Από τον ορισμό της ένωσης ισχύει $x \in S$ ή $x \in T$. Επομένως ισχύει $f(x) \in f(S)$ ή $f(x) \in f(T)$. Εφόσον f(x)=y προκύπτει $y \in f(S)$ ή $y \in f(T)$. Συνεπώς $y \in f(S) \cup f(T)$. Δείχτηκε ότι $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$ (1)

Έστω $y \in f(S) \cup f(T)$. Τότε $y \in f(S)$ ή $y \in f(T)$. Επομένως, υπάρχει $x \in S$ ή $x \in T$ ώστε $f(x) = y$. Από το ορισμό της ένωσης προκύπτει $x \in S \cup T$ και $y = f(x) \in f(S \cup T)$. Συνεπώς, $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$ (2).

Από (1) και (2) προκύπτει $f(S) \cup f(T) = f(S \cup T)$

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

2. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

Έστω $y \in f(S \cap T)$. Τότε υπάρχει $x \in S \cap T$ έτσι ώστε $f(x) = y$. Από τον ορισμό της τομής ισχύει $x \in S$ και $x \in T$. Επομένως ισχύει $f(x) \in f(S)$ και $f(x) \in f(T)$. Εφόσον f(x)=y προκύπτει $y \in f(S)$ και $y \in f(T)$. Συνεπώς $y \in f(S) \cap f(T)$. Δείχτηκε ότι $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

3. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτηση για την οποία το υποσύνολο του ερωτήματος 2 είναι γνήσιο

Έστω $f : A \to B$ και $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$. Έστω ότι
$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2$. $S = \{1, 2\}, T = \{1, 3\}, S \cap T = \{1\}$
$f(S \cap T) = \{1\}, f(S) = \{1, 2\}, f(T) = \{1, 2\}$

Συνεπώς $f(S \cap T) \subset f(S) \cap f(T)$

Ασκηση 5

Έστω μια συνάρτηση $f : A \to B$. Έστω S και T υποσύνολα του A. Να αποδείξετε ότι:

4. Να δείξετε ότι αν η f είναι 1-1, η σχέση του ερωτήματος 2 είναι ισότητα

Στο ερώτημα 2 δίνεται το πρώτο σκέλος της απόδειξης. Στο δεύτερο σκέλος θα δειχτεί ότι $f(S) \cap f(T) \subseteq f(S \cap T)$ αν η f είναι 1-1.
Έστω $y \in f(S) \cap f(T)$. Από τον ορισμό της τομής προκύπτει $y \in f(S)$ και $y \in f(T)$. Συνεπώς υπάρχει ένα $x \in S$ και ένα $z \in T$ ώστε $f(x) = y$ και $f(z) = y$. Επειδή η f είναι 1-1 προκύπτει $x = z$. Συνεπώς, $x \in S$ και $x \in T$ και $x \in S \cap T$. Άρα $y = f(x) \in f(S \cap T)$. Το ζητούμενο αποδείχτηκε $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$

Άπειρα Σύνολα - Ακολουθίες

Ασκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.
2. Το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι αριθμήσιμο.
3. Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι μη-αριθμήσιμο.

Ασκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

1. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

1. Λάθος. Έχει αποδειχτεί μέσω της πρότασης διαγωνιοποίησης του Cantor.

Άσκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

2. Το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι αριθμήσιμο.

2. Σωστό. Αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z}^+ \to S$ που να είναι 1-1 και επί.

Πράγματι, η συνάρτηση $f : \mathbb{Z}^+ \to S$ με $f(n) = n$, αν n θετικός άρτιος και $f(n) = -(n-1)$, αν n θετικός περιττός όπου S το σύνολο των άρτιων αριθμών, είναι ένα-προς-ένα και επί.

1-1: Αν $f(x) = f(y)$ τότε είτε x άρτιος και y άρτιος, είτε x περιττός και y περιττός, γιατί η εξίσωση $x = -(y-1)$ ισοδύναμα $x + y = 1$ δεν έχει λύσεις, εφόσον $x + y \geq 2$.

Στην πρώτη περίπτωση $x = y$ και στη δεύτερη περίπτωση $-(x-1) = -(y-1)$, άρα $x = y$.

Άσκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

2. Το σύνολο των άρτιων αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Επί: Έστω m θετικός άρτιος. Τότε $m = 2k$ για $k > 0$. Υπάρχει θετικός αρτιος αριθμός $x = 2k$ ώστε $f(x) = 2k = m$

Έστω m αρνητικός άρτιος ή μηδέν. Τότε $m = -2k$ για $k \geq 0$. Υπάρχει θετικός περιττός αριθμός $x = 2k + 1$ ώστε $f(x) = -(2k + 1 - 1) = -2k = m$.

Άσκηση 1

Σωστό ή Λάθος;

3. Το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι μη-αριθμήσιμο.

Σωστό. Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο

Το σύνολο των άρρητων αριθμών $I = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών. Έστω ότι το I είναι αριθμήσιμο. Τότε το σύνολο $I \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο ως ένωση δύο αριθμήσιμων συνόλων. Γνωρίζουμε όμως ότι το $\mathbb{R}$ είναι μη-αριθμήσιμο. Ως εκ τούτου καταλήξαμε σε άτοπο.

Άσκηση 2

Σωστό ή Λάθος;

Το σύνολο όλων των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

Σωστό. Αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ που να είναι 1-1 και επί.
Πράγματι, η συνάρτηση $f : \mathbb{Z}^+ \to S$ με $f(n) = n/2$, αν n άρτιος και $f(n) = -(n-1)/2$, αν n περιττός όπου S το σύνολο των άρτιων αριθμών, είναι ένα-προς-ένα και επί.

1-1: Αν $f(x) = f(y)$ τότε είτε x άρτιος και y άρτιος, είτε x περιττός και y περιττός, γιατί η εξίσωση $x/2 = -(y-1)/2$ ισοδύναμα $x + y = 1$ δεν έχει λύσεις, εφόσον $x + y \geq 2$.

Στην πρώτη περίπτωση $x/2 = y/2$, άρα $x = y$
και στη δεύτερη περίπτωση $-(x-1)/2 = -(y-1)/2$, άρα $x = y$.

Άσκηση 2

Σωστό ή Λάθος;

Το σύνολο όλων των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.

Επί: Έστω m θετικός. Ο αριθμός μπορεί να γραφτεί και ως $m = 2m/2$. Δηλαδή υπάρχει θετικός αρτιος αριθμός $x = 2m$ ώστε $f(x) = 2m/2 = m$.

Έστω m αρνητικός ή μηδέν. Ο αριθμός μπορεί να γραφτεί και ως $m = -(2k + 1 - 1)/2$ για $k = -m \geq 0$. Δηλάδη υπάρχει θετικός περιττός αριθμός $x = 2k + 1$ ώστε $f(x) = -(2k + 1 - 1)/2 = -k = m$.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι αν τα A, B σύνολα, $A \subseteq B$ και το A μη αριθμήσιμο, τότε το B είναι μη αριθμήσιμο.

Άσκηση 3

Να δείξετε ότι αν τα A, B σύνολα, $A \subseteq B$ και το A μη αριθμήσιμο, τότε το B είναι μη αριθμήσιμο.

Έστω ότι το B είναι αριθμήσιμο. Τότε τα στοιχεία του B μπορούν να αντιστοιχηθούν με τους θετικούς ακεραίους σχηματίζοντας μια ακολουθία $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Εφόσον το A είναι υποσύνολο του B, θα μπορούσε να επιλεχθεί η υπακολουθία $\{b_n\}$ που περιέχει τα στοιχεία του A, την οποία θα μπορούσαμε να απαριθμήσουμε εκ νέου βάσει της σειράς των στοιχείων που περιέχει. Εφόσον όμως το A είναι μη αριθμήσιμο καταλήξαμε σε άτοπο (ή αλλιώς αντίφαση).

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι ένα υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου S είναι επίσης αριθμήσιμο.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι ένα υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου S είναι επίσης αριθμήσιμο.

Εφόσον το σύνολο S είναι αριθμήσιμο τα στοιχεία του μπορούν να αντιστοιχηθούν με τους θετικούς ακεραίους σχηματίζοντας μια ακολουθία $s_1, s_2, s_3, \ldots$. Κάθε υποσύνολο του S περιλαμβάνει κάποια (ή κανένα ή όλα) τα στοιχεία αυτής της ακολουθίας, τα οποία επίσης μπορούμε να απαριθμήσουμε βάσει της σειράς με την οποία εμφανίζονται. Έτσι λαμβάνουμε μια ακολουθία πεπερασμένου ή άπειρου μεγέθους που απαριθμεί όλα τα στοιχεία του υποσυνόλου $sub_1, sub_2, \ldots$. Συνεπώς, το υποσύνολο είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα ή μη αριθμήσιμα. Για τα σύνολα που είναι αριθμήσιμα άπειρα, να δείξετε μια συνάρτηση 1-1 και επί μεταξύ αυτών και του συνόλου των θετικών ακεραίων.

1. Οι ακέραιοι που δεν διαιρούνται με το 3.
2. Οι ακέραιοι που διαιρούνται με το 5 αλλά όχι με το 7.
3. Οι πραγματικοί με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από μονάδες.
4. Οι πραγματικοί με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από 1 ή 9.

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα ή μη αριθμήσιμα. Για τα σύνολα που είναι αριθμήσιμα άπειρα, να δείξετε μια συνάρτηση 1-1 και επί μεταξύ αυτών και του συνόλου των θετικών ακεραίων.

1. Οι ακέραιοι που δεν διαιρούνται με το 3.

Το σύνολο είναι αριθμήσιμο. Οι ακέραιοι που περιέχονται στο σύνολο είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 7$ κ.ο.κ. Μπορούμε να απαριθμήσουμε αυτούς τους αριθμούς με την εξής σειρά: $1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 7, -7, \ldots$ λαμβάνοντας κατά αυτόν τον τρόπο την επιθυμητή αντιστοίχηση 1-1 με τους θετικούς ακεραίους $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, \ldots$.

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα ή μη αριθμήσιμα. Για τα σύνολα που είναι αριθμήσιμα άπειρα, να δείξετε μια συνάρτηση 1-1 και επί μεταξύ αυτών και του συνόλου των θετικών ακεραίων.

2. Οι ακέραιοι που διαιρούνται με το 5 αλλά όχι με το 7.

Το σύνολο είναι αριθμήσιμο. Μπορούμε να το δείξουμε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα $\pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20, \pm 25, \pm 30, \pm 40, \pm 45$ κ.ο.κ.

Άσκηση 5

3. Οι πραγματικοί με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από μονάδες.

Εδώ τα πράγματα είναι λίγο πιο περίπλοκα. Η απάντησή είναι πώς είναι αριθμήσιμο. Για να το δείξουμε αυτό θα πρέπει να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς επί ενός δισδιάστατου πίνακα ως εξής:

$$\begin{array}{llllllll}
.\overline{1} & .1 & .11 & .111 & .1111 & .11111 & .111111 & \dots \\
1.\overline{1} & 1 & 1.1 & 1.11 & 1.111 & 1.1111 & 1.11111 & \dots \\
11.\overline{1} & 11 & 11.1 & 11.11 & 11.111 & 11.1111 & 11.11111 & \dots \\
111.\overline{1} & 111 & 111.1 & 111.11 & 111.111 & 111.1111 & 111.11111 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Ακολουθώντας μια διαδρομή ζιγκ-ζαγκ από το πάνω αριστερά κελί του πίνακα λαμβάνουμε την 1-1 αντιστοίχηση:

$a_1 = .\overline{1}$, $a_2 = 1.\overline{1}$, $a_3 = .1$, $a_4 = .11$, $a_5 = 1$, $a_6 = 11.\overline{1}$ κ.ο.κ.

Άσκηση 5

Να προσδιορίσετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι αριθμήσιμα ή μη αριθμήσιμα. Για τα σύνολα που είναι αριθμήσιμα άπειρα, να δείξετε μια συνάρτηση 1-1 και επί μεταξύ αυτών και του συνόλου των θετικών ακεραίων.

4. Οι πραγματικοί με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από 1 ή 9.

Το σύνολο δεν είναι αριθμήσιμο. Για την απόδειξη ακολουθούμε ακριβώς τη μέθοδο διαγωνιοποίησης του Cantor που χρησιμοποιήσαμε για ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η διαφορά είναι ότι θα κατασκευάσουμε έναν δεκαδικό αριθμό ως εξής: $r = 0.d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$ όπου $d_i = 1$ όταν $d_{ii} = 9$ και $d_i = 9$ όταν $d_{ii} = 1$ ή δεν υπάρχει δεκαδικό μέρος στον αριθμό. Έτσι εξασφαλίζουμε ότι υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός ο οποίος δεν βρίσκεται στη λίστα που απαριθμεί τους πραγματικούς με δεκαδικές αναπαραστάσεις αποτελούμενες μόνον από 1 ή 9, αφού το δεκαδικό ανάπτυγμά του διαφέρει από το δεκαδικό ανάπτυγμα του i-οστού αριθμού στη λίστα, στην i-οστη θέση δεξιά από την υποδιαστολή. Άτοπο.

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι αν το S είναι σύνολο, τότε δεν υπάρχει συνάρτηση επί $f : S \to P(S)$, το δυναμοσύνολο του S

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι αν το S είναι σύνολο, τότε δεν υπάρχει συνάρτηση **επί** $f : S \to P(S)$, όπου P(S) το δυναμοσύνολο του S

Θα χρησιμοποιήσουμε μέθοδο απόδειξης με αντίφαση (άτοπο).

Έστω επιμορφισμός $f : S \to P(S)$.

Έστω σύνολο $T = \{x \in S : x \notin f(x)\}$. Δεδομένου ότι το σύνολο T περιλαμβάνει μόνο στοιχεία του S, αποτελεί υποσύνολο του S και συνεπώς $T \in P(S)$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι επί, $\exists t \in S$ έτσι ώστε $f(t) = T$.

1. Αν $t \in T$, επειδή $t \in f(t)$, $t \notin T$. Αντίφαση.
2. Αν $t \notin T$, τότε $t \notin f(t)$ και συνεπώς εξ ορισμού του T, $t \in T$. Αντίφαση.

Συνεπώς, δεν υπάρχει συνάρτηση f από το S στο $P(S)$ που να είναι επί.

Άσκηση 7

Να δείξετε ότι αν το S είναι σύνολο, τότε $|S| < |P(S)|$, όπου $P(S)$ το δυναμοσύνολο του S.

Άσκηση 7

Στην προηγούμενη άσκηση αποδείξαμε ότι $|S| \neq |P(S)|$ καθώς δεν υπάρχει συνάρτηση επί από το S στο $P(S)$. Για να δείξουμε ότι $|S| < |P(S)|$ αρκεί να δείξουμε ότι $|S| \leq |P(S)|$, εφόσον έχουμε αποκλείσει την περίπτωση $|S| = |P(S)|$.

Η συνάρτηση $g : S \to P(S)$, $g(x) = \{x\}$ είναι 1-1, συνεπώς $|S| \leq |P(S)|$ και, εφόσον $|S| \neq |P(S)|$, $|S| < |P(S)|$.

(Υποθέτουμε ότι το S δεν είναι το το κενό σύνολο για το οποίο γνωρίζουμε ότι $|S| < |P(S)|$).

Απόδειξη: Έστω $g(x) = g(y)$, τότε $\{x\} = \{y\}$. Καθώς 2 πεπερασμένα σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια στοιχεία συνάγεται ότι $x = y$.

Άσκηση 8

1. Να δείξετε ότι η ένωση ενός αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.
2. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 8

1. Να δείξετε ότι η ένωση ενός αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Έστω $A_1, A_2, A_3, \ldots$ αριθμήσιμα σύνολα. Εφόσον το σύνολο A_i είναι αριθμήσιμο μπορούμε να παραθέσουμε τα στοιχεία του σε μια ακολουθία $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots$. Τα στοιχεία του συνόλου $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ μπορούν τότε να παρατεθούν σε μια ακολουθία ως εξής:

Πρώτα παρατίθενται τα a_{ij} για τα οποία ισχύει $i + j = 2$, στη συνέχεια τα στοιχεία με $i + j = 3$, στη συνέχεια τα στοιχεία με $i + j = 4$, κ.ο.κ.

Άσκηση 8

2. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ είναι αριθμήσιμο.

Τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ είναι τα $(i, n) : i \in \mathbb{Z}^+$ και $n \in \mathbb{Z}^+$.
Για κάθε $i \in \mathbb{Z}^+$ μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο $A_i = \{(i, n) : n \in \mathbb{Z}^+\}$.
Προφανώς, $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Συνεπώς, το σύνολο $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ αποτελεί ένωση ενός αριθμήσιμου πλήθους αριθμήσιμων συνόλων και βάσει του ερωτήματος 1 είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Άσκηση 9

Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Schröder-Bernstein για να δείξετε ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $[0,1]$ είναι ισομεγέθη. (Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό αν υπάρχουν συναρτήσεις 1-1 $f : A \to B$ και $g : B \to A$ υπάρχει 1-1 αντιστοίχιση ανάμεσα στα σύνολα A και B και, συνεπώς, τα σύνολα είναι ισομεγέθη).

Άσκηση 9

Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Schröder-Bernstein για να δείξετε ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $[0,1]$ είναι ισομεγέθη.

Έστω $f : (0,1) \to [0,1]$ και $f(x) = x$. Προφανώς η συνάρτηση f είναι 1-1.

Έστω $g : [0,1] \to (0,1)$ και $g(x) = (x+1)/3$. Το εύρος της g είναι το διάστημα $[1/3, 2/3]$ και συνεπώς δεν υπάρχει αντίφαση με τον ορισμό του διαστήματος $(0,1)$ ως πεδίου τιμών της. Επίσης, η g είναι προφανώς 1-1.

Βάσει του θεωρήματος προκύπτει ότι υπάρχει 1-1 αντιστοίχιση ανάμεσα στα σύνολα $(0,1)$ και $[0,1]$ και, συνεπώς, είναι ισομεγέθη.

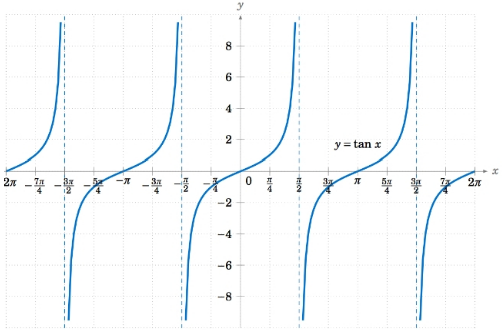
Άσκηση 10

Να δείξετε ότι τα σύνολα $(0, 1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder-Bernstein.

Άσκηση 10

Να δείξετε ότι τα σύνολα $(0, 1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder-Bernstein.

Αρκεί να βρούμε συναρτήσεις $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to (0, 1)$ που να είναι 1-1.
Προφανώς, αν $f(x) = x$, η συνάρτηση f είναι 1-1.
Για τη συνάρτηση g ανακαλούμε την τριγωνομετρική συνάρτηση της εφαπτομένης (tan). Όπως φαίνεται η συνάρτηση $h : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και επί.

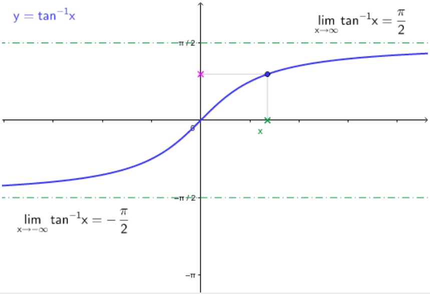


Άσκηση 10

Να δείξετε ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder-Bernstein.

Μπορώ να ορίσω συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to (0,1)$ όπου $g(x) = \frac{tan^{-1}(x)+3}{6}$. Προφανώς $0 < \frac{-\pi/2+3}{6} \leq g(x) \leq \frac{\pi/2+3}{6} < 1$, επομένως η εν λόγω συνάρτηση παίρνει τιμές εντός του καθορισμένου πεδίου τιμών και είναι 1-1.

Βάσει του θεωρήματος Schröder-Bernstein προκύπτει ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη.



Άσκηση 11

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ισομορφισμός από το σύνολο των θετικών ακεραίων στο δυναμοσύνολο του συνόλου των θετικών ακεραίων.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ισομορφισμός από το σύνολο των θετικών ακεραίων στο δυναμοσύνολο του συνόλου των θετικών ακεραίων.

Όπως έχουμε ξαναπεί κάθε σύνολο A που ανήκει στο δυναμοσύνολο του συνόλου $\mathbb{Z}^+$ μπορεί να αναπαρασταθεί από μια δυαδική συμβολοσειρά $a_1 a_2 a_3 \ldots$, όπου $a_i = 1$ αν το $i \in A$ και $a_i = 0$ αν $i \notin A$.

Έστω ότι υπάρχει ισομορφισμός $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$. Κατασκευάζουμε νέα συμβολοσειρά $s = s_1 s_2 s_3 \ldots$ θέτοντας το s_i ως το συμπλήρωμα του i-οστού bit του $f(i)$ (όπου 0 θέτουμε 1 και όπου 1 θέτουμε 0). Εφόσον, η συμβολοσειρά s διαφέρει από κάθε $f(i)$ στο i-οστό bit, δεν ανήκει στην εικόνα της f. Συνεπώς, η συνάρτηση f δεν είναι επί, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση (απαγωγή σε άτοπο).

Άσκηση 12

Να δείξετε ότι $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

Άσκηση 12

Να δείξετε ότι $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$

Στην άσκηση 13 δείξαμε ότι τα σύνολα $(0,1)$ και $\mathbb{R}$ είναι ισομεγέθη. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $|(0,1) \times (0,1)| = |(0,1)|$.

Θεώρημα Schröder-Bernstein: αρκεί να υπάρχουν συναρτήσεις $f : (0,1) \times (0,1) \to (0,1)$ και $g : (0,1) \to (0,1) \times (0,1)$ που να είναι 1-1.

Για την g μπορούμε απλούστατα να θέσουμε $g(x) = (x, 1/2)$ η οποία είναι προφανώς 1-1.

Για την f έστω ότι $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα x και y με τα δεκαδικά τους αναπτύγματα $x = 0.x1x2x3\ldots$ και $y = 0.y1y2y3\ldots$.Δεν επιλέγουμε ποτέ το δεκαδικό ανάπτυγμα αριθμών που τελειώνει με άπειρα 9αρια αλλά το αντίστοιχο πεπερασμένο δεκαδικό ανάπτυγμα.
Θέτουμε $f(x, y) = 0.x1y1x2y2x3y3\ldots$ που είναι προφανώς 1-1.

Άσκηση 13

Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ όπου $a_n = \dfrac{2n+1}{n+1}, n = 0, 1, 2, \ldots$. Απαντήστε αν η ακολουθία συγκλίνει και αν ναι ποιο είναι το όριό της.

Άσκηση 13

Έστω η ακολουθία $\{a_n\}$ όπου $a_n = \dfrac{2n+1}{n+1}, n = 0, 1, 2, \ldots$. Απαντήστε αν η ακολουθία συγκλίνει και αν ναι ποιο είναι το όριό της.

Διαισθητικά, έστω όριο $L = 2$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N_ε τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N_\varepsilon$, $|a_n - 2| < \varepsilon$.

Εφόσον $|a_n - 2| = |\dfrac{2n+1}{n+1} - 2| = |\dfrac{-1}{n+1}| = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N_\varepsilon}$, μπορούμε να επιλέξουμε $N_\varepsilon = 1/\varepsilon$ ώστε $|a_n - 2| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq N_\varepsilon$.

Αν δεν μπορούμε διαισθητικά να απαντήσουμε, μπορούμε να εργαστούμε αναλυτικά:

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{2+1/n}{1+1/n} \text{ και } \lim_{n\to\infty}(2+1/n) = 2, \lim_{n\to\infty}(1+1/n) = 1.$$

Συνεπώς, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$

Έστω $S_n = 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

$$2S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$2S_n = 2 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}$$

$$2S_n = 2 + S_n - \frac{1}{2^n}$$

$$S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{2^n}) = 2$$

Συνεπώς, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$

Άσκηση 15

Έστω $f : A \to B$. Να δείξετε ότι $|f(S)| \leq |S|$ για όλα τα υπόσυνολα S του A.

Άσκηση 15

Έστω $f : A \to B$. Να δείξετε ότι $|f(S)| \leq |S|$ για όλα τα υπόσυνολα S του A.

Μια συνάρτηση f απεικονίζει κάθε στοιχείο του συνόλου S σε ένα μόνο στοιχείο του συνόλου τιμών και συνεπώς και του $|f(S)|$. Ορίζουμε συνάρτηση $g : f(S) \to S$, έτσι ώστε $f(g(y)) = y$. Προφανώς η συνάρτηση είναι 1-1, εφόσον διαφορετικά η συνάρτηση f δεν θα ήταν καλά ορισμένη. Άρα, $|f(S)| \leq |S|$.

Άσκηση 16

Έστω $f : A \to B$. Να δείξετε ότι $|f(S)| = |S|$ για όλα τα υπόσυνολα S του A ανν η f είναι 1-1.

Άσκηση 16

Έστω $f : A \to B$. Να δείξετε ότι $|f(S)| = |S|$ για όλα τα υπόσυνολα S του A ανν η f είναι 1-1.

Αν η συνάρτηση f είναι 1-1, τότε προφανώς η συνάρτηση $f^{'} : S \to f(S)$ είναι 1-1 και επί και ως εκ τούτου $|f(S)| = |S|$.

Αν $|f(S)| = |S|$ έστω ότι η f δεν είναι 1-1, τότε υπάρχουν στοιχεία x, y του A και $x \neq y$, τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$. Τότε $|S| = 2$ και $|f(S)| = 1$ και καταλήξαμε σε αντίφαση.

Φροντιστήριο στα Διακριτά Μαθηματικά

Δρ. Ιωάννης Χαμόδρακας

Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

Απαρίθμηση

Άσκηση 1

1. Πόσες συναρτήσεις υπάρχουν από ένα σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$, όπου n θετικός ακέραιος, στο σύνολο $\{0, 1\}$?
2. Υπό τη συνθήκη ότι οι συναρτήσεις είναι 1-1.
3. Υπό τη συνθήκη ότι απεικονίζουν το 1 και το n στο 0.
4. Υπό τη συνθήκη ότι το 1 είναι η εικόνα ακριβώς ενός θετικού ακεραίου μικρότερου απο n.

1. Για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε 2 εικόνες, συνεπώς σύμφωνα με τον κανόνα γινομένου το πλήθος των συναρτήσεων είναι $2 * 2 * \ldots * 2 = 2^n$.
2. Αν $n > 2$, προφανώς δεν υπάρχουν συναρτήσεις 1-1. Αν $n = 2$, τότε υπάρχουν 2 συναρτήσεις και αν $n = 1$, επίσης υπάρχουν δύο συναρτήσεις. Το πλήθος των συναρτήσεων στις 2 τελευταίες περιπτώσεις προκύπτει άμεσα, αλλά επαληθεύεται και από τον κανόνα γινομένου.
3. Αν $n \geq 2$ δεδομένου ότι για 2 στοιχεία του πεδίου ορισμού υπάρχει μόνο ένας τρόπος, το πλήθος είναι είναι $1 * 2 * \ldots * 2 * 1 = 2^{n-2}$. Αν $n = 1$, υπάρχει μόνο μία συνάρτηση.
4. Αναγκαία $n > 1$. Για την απεικόνιση του n έχουμε 2 επιλογές. Για τους υπόλοιπους $n-1$ αριθμούς, υπάρχουν ακριβώς $n-1$ τρόποι να επιλεχθεί ποιος ακέραιος απεικονίζεται στο 1. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος των συναρτήσεων είναι $2(n-1)$

Άσκηση 2

1. Πόσα υποσύνολα ενός συνόλου 100 στοιχείων έχουν περισσότερα από ένα στοιχείο;
2. Μια δυαδική συμβολοσειρά της οποίας η αντιστροφή είναι όμοια με την ίδια ονομάζεται παλίνδρομη. Πόσες συμβολοσειρές μήκους n είναι παλίνδρομες;

1. $2^{100} - 101$
2. Μία παλίνδρομη συμβολοσειρά προσδιορίζεται επακριβώς από τα πρώτα $\lceil n/2 \rceil$ bits, εφόσον τα υπόλοιπα $\lfloor n/2 \rfloor$ bits πρέπει να είναι ταυτόσημα των αντίστοιχων πρώτων $\lfloor n/2 \rfloor$. Συνεπώς από τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν $2^{\lceil n/2 \rceil}$ τέτοιες συμβολοσειρές.

Άσκηση 3

Σε έναν γάμο, με πόσους τρόπους μπορεί ένας φωτογράφος να τακτοποιήσει 6 ανθρώπους σε μία σειρά συμπεριλαμβανομένου του γαμπρού και της νύφης, αν:

1. η νύφη πρέπει να βρίσκεται δίπλα στον γαμπρό.
2. η νύφη δεν βρίσκεται δίπλα στον γαμπρό.
3. η νύφη βρίσκεται κάπου αριστερά από τον γαμπρό.

1. Εφόσον η νύφη και ο γαμπρός πρέπει να στέκονται δίπλα-δίπλα ας τους αντιμετωπίσουμε ως ένα στοιχείο. Το ζητούμενο τώρα μετατρέπεται σε πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 στοιχεία σε μια σειρά. Από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι το πλήθος είναι $5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120$. Ωστόσο, πρέπει να συνυπολογίσουμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε τη νύφη και τον γαμπρό που είναι 2. Εφαρμόζοντας τον κανόνα γινομένου προκύπτει ότι έχουμε συνολικά 240 τρόπους.
2. Το 2ο ερώτημα μπορούμε να το απαντήσουμε βάσει του πρώτου. Υπολογίζουμε το συνολικό πλήθος των τρόπων να τοποθετήσουμε 6 ανθρώπους σε μια σειρά που είναι $6! = 720$ και αφαιρούμε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος. Συνεπώς έχουμε $720 - 240 = 480$ τρόπους.
3. Η νύφη μπορεί να βρίσκεται είτε αριστερά είτε δεξιά από τον γαμπρό. Λόγω συμμετρίας σε ακριβώς τις μισές περιπτώσεις από τους συνολικούς τρόπους τοποθέτησης θα βρίσκεται αριστερά του, συνεπώς με 360 τρόπους.

Άσκηση 4

Σε έναν γάμο, με πόσους τρόπους μπορεί ένας φωτογράφος να τακτοποιήσει 6 ανθρώπους σε μία σειρά μέσα από μια ομάδα 10 ανθρώπων, στην οποία ανήκει ο γαμπρός και η νύφη, αν:

1. η νύφη πρέπει να βρίσκεται στη φωτογραφία.
2. η νύφη και ο γαμπρός πρέπει να βρίσκονται στη φωτογραφία.
3. στη φωτογραφία βρίσκεται είτε η νύφη, είτε ο γαμπρός αλλά όχι και οι δύο.

1. Αρχικά τοποθετούμε τη νύφη σε οποιαδήποτε από τις 6 θέσεις. Στη συνέχεια μπορούμε να επιλέξουμε 5 από τους 9 ανθρώπους για τις υπόλοιπες θέσεις, κάτι που μπορεί να γίνει με $9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 15.120$ τρόπους. Από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει ότι υπάρχουν συνολικά $6 * 15.120 = 90.720$ τρόποι, πολλαπλασιάζοντας με τους τρόπους που μπορεί να τοποθετηθεί η νύφη.
2. Αντιστοίχως, τοποθετούμε τη νύφη σε οποιαδήποτε από τις 6 θέσεις και τον γαμπρό σε οποιαδήποτε από τις 5 υπολειπόμενες. Μπορούμε να επιλέξουμε 4 από τα 8 άτομα στις εναπομείνασες θέσεις με $8 * 7 * 6 * 5 = 1680$ τρόπους. Το συνολικό πλήθος, πολλαπλασιάζοντας με τους τρόπους τοποθέτησης της νύφης και του γαμπρού είναι $6 * 5 * 1680 = 50.400$ τρόποι.
3. Από τα πρώτα 2 ερωτήματα προκύπτει ότι υπάρχουν ακριβώς $90.720 - 50.400 = 40.320$ τρόποι για να είναι μόνο η νύφη στη φωτογραφία και αντίστοιχα $90.720 - 50.400 = 40.320$ τρόποι για να είναι μόνο ο γαμπρός στη φωτογραφία. Από τον κανόνα του αθροίσματος προκύπτει ότι υπάρχουν συνολικά $40.320 + 40.320 = 80.640$ τρόποι.

Άσκηση 5

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να καθίσουν 4 άνθρωποι από ένα σύνολο 10 ανθρώπων γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι, οπού δυο τοποθετήσεις θεωρούνται ίδιες εφόσον κάθε άνθρωπος έχει τον ίδιο γείτονα αμέσως δεξιά και αριστερά του?

Η απάντηση στηρίζεται στην εφαρμογή τόσο του κανόνα του γινομένου, όσο και του κανόνα της διαίρεσης. Αριθμούμε τις θέσεις από το 1 έως το 4. Για την πρώτη θέση υπάρχουν 10 διαφορετικές επιλογές ανθρώπων που μπορούν να καθίσουν. Για την δεύτερη υπάρχουν 9, ενώ για την τρίτη και την τέταρτη 8 και 7 επιλογές αντίστοιχα. Άρα βάση του κανόνα του γινομένου υπάρχουν $m = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$ πιθανές τοποθετήσεις.

Εφόσον υπάρχουν 4 τοποθετήσεις τέτοιες ώστε ο κάθε άνθρωπος να έχει τον ίδιο γείτονα αμέσως δεξιά και αριστερά, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της διαίρεσης βρίσκουμε ότι υπάρχουν συνολικά

$$n = \frac{5.040}{4} = 1.260$$

διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν οι 4 από τους 10 γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι.

Άσκηση 6

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος 10 είτε ξεκινούν από 3 μηδενικά είτε τελειώνουν με 2 μηδενικά·

Έστω τα σύνολα A και B που περιλαμβάνουν όλες τις συμβολοσειρές bit με μήκος 10 που ξεκινούν από 3 και τελειώνουν με 2 μηδενικά αντίστοιχα. Το πρώτο σύνολο αριθμεί βάσει του κανόνα του γινομένου $|A| = 2^{10-3} = 128$ στοιχεία, αφού ξεκινώντας με 3 μηδενικά μένει μια συμβολοσειρά bit με 7 στοιχεία. Ομοίως το δεύτερο σύνολο έχει $|B| = 2^{10-2} = 256$ στοιχεία. Η τομή τους αριθμεί $|A \cap B| = 2^{10-3-2} = 32$ στοιχεία. Συνολικά, βάσει της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού το ζητούμενο σύνολο αριθμεί $128 + 256 - 32 = 352$ στοιχεία.

Άσκηση 7

Πόσες συμβολοσειρές bit με μήκος 10 περιέχουν είτε 5 διαδοχικά μηδενικά είτε 5 διαδοχικές μονάδες;

Πρώτα μετράμε τον αριθμό των συμβολοσειρών μήκους 10 που περιέχουν 5 διαδοχικά μηδενικά. Τα μηδενικά μπορεί να ξεκινούν στο 1ο bit, οπότε τα επόμενα 5 bits μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα και συνεπώς υπάρχουν $2^5 = 32$ τέτοιες συμβολοσειρές. Αν ξεκινάνε στο 2ο bit, τότε το πρώτο bit πρέπει να είναι 1 και επιλέγονται τυχαία τα 4 τελευταία bits, συνεπώς υπάρχουν $2^4 = 16$ τέτοιες συμβολοσειρές. Αν ξεκινάνε στο 3ο bit, τότε το 2ο bit πρέπει να είναι μονάδα αλλά υπάρχει ελεύθερη επιλογή για το πρώτο και τα 3 τελευταία bits και συνεπώς υπάρχουν $2^4 = 16$ τέτοιες συμβολοσειρές. Ομοίως, υπάρχουν 16 συμβολοσειρές αν τα 5 διαδοχικά μηδενικά ξεκινάνε στο 4ο, 5ο ή 6ο bit. Το συνολικό πλήθος των συμβολοσειρών με 5 διαδοχικά μηδενικά είναι συνεπώς $32 + 5 * 16 = 112$. Κατ' αντιστοιχία το πλήθος των συμβολοσειρών με 5 διαδοχικές μονάδες είναι επίσης 112.

Αν δούμε ως σύνολα τις αντίστοιχες συμβολοσειρές βλέπουμε ότι βάσει της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού για να βρούμε το πλήθος των συμβολοσειρών που περιέρχουν είτε 5 διαδοχικά μηδενικά είτε 5 διαδοχικές μονάδες πρέπει να αφαιρέσουμε το πλήθος των συμβολοσειρών που ανήκουν και στα δύο σύνολα για να μην διπλομετρήσουμε. Υπάρχουν ακριβώς 2 τέτοιες συμβολοσειρές οι 0000011111 και 1111100000. Συνεπώς, το συνολικό πλήθος είναι $112 + 112 - 2 = 222$.

Άσκηση 8

Έστω ότι οι αριθμοί p και q είναι πρώτοι και ότι $n = pq$. Να χρησιμοποιήσετε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για να βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν υπερβαίνουν το n και είναι σχετικά πρώτοι με το n. Σχετικά πρώτοι είναι οι αριθμοί που δεν έχουν κανέναν κοινό διαιρέτη εκτός από τη μονάδα.

Έστω P το υποσύνολο των αριθμών $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ που διαιρούνται από το p, και αντίστοιχα Q το υποσύνολο των αριθμών που διαιρούνται από το q. Θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος των αριθμών που δεν διαιρούνται ούτε από το p ούτε το q και είναι μικρότεροι από n. Συνεπώς το πλήθος τους είναι: $n - |P \cup Q|$.

Σύμφωνα με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, $|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q|$. Κάθε πολλαπλάσιο του p διαιρείται από το p, άρα $|P| = \lfloor n/p \rfloor$. Αντίστοιχα, $|Q| = \lfloor n/q \rfloor$. Προφανώς ο n είναι ο μόνος θετικός ακέραιος που δεν ξεπερνά το n και διαιρείται τόσο από το p όσο και από το q q, άρα $|P \cap Q| = 1$.

Επομένως, το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν υπερβαίνουν το n και είναι σχετικά πρώτοι με το n είναι $n - (\lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/q \rfloor - 1) = n - q - p + 1$.

Άσκηση 9

Να χρησιμοποιήσετε την αρχή του εγκλεισμού-αποκλεισμού για να βρείτε το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι κάτω από 1.000.000 και δεν διαιρούνται από το 4 ή το 6.

Κάθε 4ος αριθμός διαιρείται με το 4 και κάθε 6ος αριθμός διαιρείται με το 6. Συνεπώς, $\lfloor 999.999/4 \rfloor = 249.999$ αριθμοί διαιρούνται με το 4 και $\lfloor 999.999/6 \rfloor = 166.666$ αριθμοί διαιρούνται με το 6. Ωστόσο, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι υπάρχουν και αριθμοί που διαιρούνται και με το 4 και με το 6. Οι αριθμοί αυτοί διαιρούνται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους και είναι στο πλήθος $\lfloor 999.999/12 \rfloor = 83.333$. Συνεπώς, το πλήθος είναι $999.999 - 249.999 - 166.666 + 83.333 = 666.667$

Άσκηση 10

Πόσες διαγώνιους έχει ένα πολύγωνο με n πλευρές.

Από κάθε κορυφή ξεκινούν $n-3$ διαγώνιοι αν αφαιρέσουμε την κορυφή και τις γειτονικές του κορυφές. Εφόσον υπάρχουν n κορυφές, από τον κανόνα γινομένου λαμβάνουμε $n*(n-3)$ διαγώνιους. Ωστόσο, εφόσον μία διαγώνιος ενώνει 2 κορυφές έχουμε μετρήσει 2 φορές κάθε διαγώνιο. Συνεπώς, προκύπτει ότι το συνολικό πλήθος των διαγώνιων πολυγώνου με n κορυφές είναι $n(n-3)/2$.

Άσκηση 11

Έστω ότι (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, ένα σύνολο 9 διαφορετικών σημείων με ακέραιες συντεταγμένες στο χώρο $\Re^3$. Να δείξετε ότι, το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τουλάχιστον ένα ζεύγος αυτών των σημείων έχει ακέραιες συντεταγμένες.

Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει 2 διακριτά σημεία (x_i, y_i, z_i) και (x_j, y_j, z_j), είναι το σημείο $((x_i + x_j)/2, (y_i + y_j)/2, (z_i + z_j)/2)$.

Προφανώς, οι συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος είναι ακέραιες αν και μόνον αν οι συντεταγμένες των άκρων του έχουν την ίδια ισοτιμία (η x_i με την x_j, κ.λπ.).

Από την αρχή του γινομένου προκύπτει ότι υπάρχουν $2^3 = 8$ τριπλέτες ισοτιμιών: (περιττή, περιττή, περιττή), (περιττή, περιττή, άρτια), ... , (άρτια, άρτια, άρτια).

Δεδομένου ότι έχουμε 9 σημεία, βάσει της αρχής του περιστερώνα θα υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία με τις ίδιες τριπλέτες ισοτιμιών. Το μέσο αυτών των δύο σημείων θα έχει συνεπώς ακέραιες συντεταγμένες.

Άσκηση 12

Πόσα πιθανά αποτελέσματα υπάρχουν σε έναν αγώνα ταχύτητας με 3 άλογα, αν είναι δυνατή η ισοπαλία? *[Παρατήρηση: Δύο ή τρία άλογα μπορεί να είναι ισόπαλα.]*

Αν δεν υπάρχουν ισοπαλίες υπάρχουν $3! = 6$ μεταθέσεις του συνόλου των τρίων αλόγων που αντιστοιχούν σε 6 πιθανά αποτελέσματα.

Αν δύο άλογα είναι ισόπαλα, υπάρχουν 3 διαφορετικοί τρόποι να επιλεγεί πιο άλογο δεν θα είναι ισόπαλο. Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους, υπάρχουν δύο τρόποι να επιλεγεί αν αυτό το άλογο θα είναι πρώτο ή δεύτερο. Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου έχουμε $3 \cdot 2 = 6$ τρόπους.

Τέλος υπάρχει η περίπτωση και τα τρία άλογα να είναι ισόπαλα. Συνεπώς τα πιθανά αποτελέσματα είναι σύμφωνα με τον κανόνα του αθροίσματος $6 + 6 + 1 = 13$.

Άσκηση 13

Μια ομάδα περιέχει n άνδρες και n γυναίκες. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να τοποθετήσουμε τα άτομα αυτά σε μια σειρά, όπου οι άνδρες και οι γυναίκες εναλλάσσονται;

Υπάρχουν $n!$ μεταθέσεις των ανδρών και $n!$ μεταθέσεις (διατεταγμένες τοποθετήσεις) των γυναικών.

Για κάθε τρόπο τοποθέτησης των ανδρών και των γυναικών, υπάρχουν δύο δυνατότητες: είτε κάθε γυναίκα θα έπεται του αντίστοιχου άνδρα MWMWMW....MW, είτε κάθε άνδρας θα έπεται της αντίστοιχης γυναίκας WMWMW....WM.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου και εφόσον η τοποθέτηση των ατόμων σε μια εναλλασσόμενη σειρά αναλύεται στις 3 παραπάνω διαδικασίες, υπάρχουν $2 * n! * n! = 2(n!)^2$ τρόποι.

Άσκηση 14

Πόσοι τρόποι υπάρχουν έτσι ώστε 8 άνδρες και 5 γυναίκες να σταθούν σε μία γραμμή χωρίς μία γυναίκα να στέκεται δίπλα σε μία άλλη;*[Υπόδειξη: Πρώτα τοποθετήστε τους άνδρες και μετά εξετάστε πιθανές θέσεις για τις γυναίκες]*

Καταρχάς υπάρχουν $P(8,8) = 8!$ μεταθέσεις, δηλαδή διατεταγμένες τοποθετήσεις των ανδρών. Όπως φαίνεται, υπάρχουν 9 θέσεις στις οποίες μπορούν να σταθούν οι γυναίκες χωρίς να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη: -M-M-M-M-M-M-M-M-.

Υπάρχουν $P(9,5) = 9!/4!$ τρόποι να τοποθετηθούν διατεταγμένα 5 γυναίκες σε αυτές τις 9 θέσεις.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά $8! \cdot 9!/4! = 609.638.400$ τρόποι.

Άσκηση 15

Πόσες συμβολοσειρές bit μήκους 10 περιέχουν

1. ακριβώς τέσσερις μονάδες;
2. το πολύ τέσσερις μονάδες;
3. το λιγότερο τέσσερις μονάδες;
4. ίσο αριθμό μηδενικών και μονάδων;

1. Για να προσδιορίζουμε μια συμβολοσειρά μήκους 10 με ακριβώς 4 μονάδες αρκεί να προσδιορίσουμε τις θέσεις όπου θα βρίσκονται οι μονάδες. Έχουμε λοιπόν να επιλέξουμε έναν συνδυασμό 4 θέσεων από τις 10 συνολικά θέσεις, εφόσον δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία θα τις επιλέξουμε. Συνεπώς υπάρχουν $C(10,4) = 210$ τρόποι επιλογής των θέσεων και ίσο πλήθος συμβολοσειρών.
2. Σε αυτή την περίπτωση η συμβολοσειρά περιέχει είτε 0, είτε 1, είτε 2, είτε 3, είτε 4 μονάδες. Από τον κανόνα αθροίσματος προκύπτει ότι υπάρχουν $C(10,4) + C(10,3) + C(10,2) + C(10,1) + C(10,0) =$ $210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386$ τέτοιες συμβολοσειρές.
3. Αντιστοίχως, σε αυτή την περίπτωση η συμβολοσειρά περιέχει 4,5,6,7,8,9 ή 10 μονάδες. Επομένως υπάρχουν $C(10,10) + \dots + C(10,4) = 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 = 848$ τέτοιες συμβολοσειρές. Ένας δεύτερος τρόπος θα ήταν να αφαιρέσουμε από το συνολικό πλήθος συμβολοσειρών, τις συμβολοσειρές που έχουν μέχρι 3 μονάδες.

4. Οι συμβολοσειρές έχουν σε αυτή την περίπτωση 5 ακριβώς μονάδες οπότε το πλήθος τους είναι $C(10,5) = 252$.

   Εδώ προκύπτει και ένας διαφορετικός τρόπος απάντησης του ερωτήματος *2*. Όταν δεν έχουμε ίσο πλήθος μηδενικών και μονάδων τότε έχουμε είτε το πολύ 4 είτε τουλάχιστον 6 μονάδες. Λόγω συμμετρίας των συνδυασμών έχουμε το πολύ 4 μονάδες στις μισές από αυτές τις περιπτώσεις. Επομένως, η απάντηση σε αυτή την περίπτωση είναι $(2^{10} - C(10,5))/2 = (1024 - 252)/2 = 386$.

Άσκηση 16

Να δείξετε ότι, αν f μια συνάρτηση από το S στο T, όπου S, T είναι μη κενά πεπερασμένα σύνολα και $m = \lceil |S|/|T| \rceil$, τότε υπάρχουν τουλάχιστον m στοιχεία του S, τα οποία αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή του T. Με άλλα λόγια να δείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία $s_1, s_2, \ldots, s_m$ του S, τέτοια ώστε $f(s_1) = f(s_2) = \cdots = f(s_m)$.

Η συνάρτηση f τοποθετεί όλα τα στοιχεία του συνόλου S στο σύνολο T. Θεωρούμε τα στοιχεία του T ως θέσεις, ωστέ να εφαρμόσουμε την γενικευμένη αρχή του περιστερώνα. Βάσει αυτής, η τοποθέτηση $|S|$ στοιχείων σε $|T|$ θέσεις συνεπάγεται ότι για τουλάχιστον μία θέση $t \in T$ θα υπάρχουν $m = \lceil |S|/|T| \rceil$ στοιχεία του S τέτοια ώστε να απεικονίζονται μέσω της f σε αυτό.

Άσκηση 17

Υπάρχουν 6 δρομείς σε έναν αγώνα 100 μέτρων. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να απονεμηθούν μετάλλια αν είναι δυνατή η ισοπαλία; (ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν ταχύτερα λαμβάνουν χρυσά μετάλλια, ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν πίσω ακριβώς από έναν δρομέα λαμβάνουν ασημένια μετάλλια και ο δρομέας ή οι δρομείς που τερματίζουν πίσω ακριβώς από δύο δρομείς, λαμβάνουν χάλκινα μετάλλια).

Η επίλυση αυτού του προβλήματος απαιτεί την ανάλυσή του σε περιπτώσεις:

1. Αν υπάρχουν μοναδικοί νικητές του χρυσού και του ασημένιου μετάλλιου, υπάρχουν $P(6,2) = 6 \cdot 5 = 30$ τρόποι επιλογής τους. Το χάλκινο μετάλλιο μπορεί να δοθεί σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο S των 4 δρομέων που απομένουν. Τα μη κενά υποσύνολα είναι στο πλήθος $2^{|S|} - 1 = 15$. Επομένως, υπάρχουν συνολικά $30 \cdot 15 = 450$ τρόποι σε αυτή την περίπτωση.

2. Αν υπάρχει μια ισοπαλία 2 ατόμων για την πρώτη θέση τότε προφανώς υπάρχουν $C(6,2) = 15$ τρόποι να επιλεγούν οι δρομείς που θα λάβουν το χρυσό. Το χάλκινο μετάλλιο (εφόσον σε αυτή την περίπτωση δεν απονέμεται ασημένιο) μπορεί να δοθεί σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο των υπόλοιπων 4 δρομέων, που είναι στο πλήθος 15. Συνεπώς υπάρχουν $15 \cdot 15 = 225$ τρόποι απονομής των μεταλλίων σε αυτή την περίπτωση.

3. Αν k δρομείς τερματίσουν πρώτοι με $k \geq 3$, τότε υπάρχουν $C(6, k)$ τρόποι απονομής του χρυσού μετάλλιου. Σε αυτή την περίπτωση δεν δίνονται άλλα μετάλλια συνεπώς σύμφωνα με τον κανόνα αθροίσματος υπάρχουν $C(6,3) + C(6,4) + C(6,5) + C(6,6) = 20 + 15 + 6 + 1 = 42$ τρόποι απονομής του χρυσού.

4. Η μόνη άλλη περίπτωση είναι να υπάρχει μοναδικός νικητής του χρυσού και k δρομείς να τερματίσουν δεύτεροι, όπου $k \geq 2$. Σε αυτή την περίπτωση δεν απονέμονται χάλκινα μετάλλια. Ο νικητής μπορεί να επιλεγεί με 6 τρόπους ενώ στη δεύτερη θέση μπορεί να βρίσκονται οι δρομείς σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο των υπόλοιπων 5 δρομέων εκτός από τα υποσύνολα που έχουν μόνο ένα στοιχείο, καθώς $k \geq 2$. Το πλήθος αυτών των υποσυνόλων είναι $2^5 - 5 - 1 = 26$. Συνεπώς υπάρχουν συνολικά $6 * 26 = 156$ τρόποι απονομής μεταλλίων σε αυτή την περίπτωση.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αθροίσματος, υπάρχουν συνολικά $450 + 225 + 42 + 156 = 873$ τρόποι απονομής μεταλλίων.

Άσκηση 18

Να δείξετε ότι, αν επιλέξουμε 5 σημεία στην εσωτερική περιοχή ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς ίσο με 2, τότε τουλάχιστον δύο από αυτά τα σημεία δεν απέχουν περισσότερο από $\sqrt{2}$.

Το τετράγωνο μπορεί να χωριστεί σε 4 μικρότερα τετράγωνα με μήκος πλευράς ίσο με 1. Από την αρχή του περιστερώνα προκύπτει ότι 2 τουλάχιστον σημεία από τα 5 θα βρίσκονται στο ίδιο εσωτερικό τετράγωνο. Η μέγιστη απόσταση δύο σημείων σε ένα τετράγωνο είναι ίση με το μήκος της διαγωνίου του που στην προκειμένη περίπτωση είναι $\sqrt{2}$.

Συνεπώς υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία τα οποία δεν απέχουν περισσότερο από $\sqrt{2}$.

Άσκηση 19

Πόσοι τρόποι υπάρχουν έτσι ώστε 20 άνδρες και 4 γυναίκες να σταθούν σε μία γραμμή χωρίς μία γυναίκα να στέκεται δίπλα σε μία άλλη και το πλήθος των ανδρων σε διαδοχικές θέσεις να είναι άρτιο;

Καταρχάς υπάρχουν $P(20, 20) = 20!$ μεταθέσεις, δηλαδή διατεταγμένες τοποθετήσεις των ανδρών. Όπως φαίνεται, υπάρχουν 11 θέσεις στις οποίες μπορούν να σταθούν οι γυναίκες χωρίς να βρίσκονται η μία δίπλα στην άλλη και το πλήθος των ανδρών σε διαδοχικές θέσεις να είναι άρτιο:
-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-MM-.

Υπάρχουν $P(11, 4) = 11!/(11 - 4)! = 11!/7!$ τρόποι να τοποθετηθούν διατεταγμένα 4 γυναίκες σε αυτές τις 11 θέσεις.

Συνεπώς, σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου υπάρχουν συνολικά $20! \cdot 11!/7!$ τρόποι (πολύ μεγάλος αριθμός).

Άσκηση 20

Αποδείξτε ότι σε ένα πάρτι όπου υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα, υπάρχουν δύο άτομα που γνωρίζουν τον ίδιο αριθμό από άλλα άτομα εκεί.

Έστω $K(x)$ ο αριθμός άλλων ανθρώπων στο πάρτι που γνωρίζει το άτομο x. Οι πιθανές τιμές για το $K(x)$ είναι $0, 1, \ldots, n-1$, αν $n \geq 2$ είναι το πλήθος των ανθρώπων στο πάρτι. Ωστόσο είναι αδύνατο τόσο το 0 όσο και το n-1 να ανήκουν στην εικόνα της K καθώς αν ένας άνθρωπος γνωρίζει όλους τους υπόλοιπους, δεν είναι δυνατό να υπάρχει κάποιος που να μην γνωρίζει κανέναν άλλο. Συνεπώς η εικόνα της συνάρτησης K έχει το πολύ $n-1$ στοιχεία, ενώ το πεδίο ορισμού έχει n στοιχεία, οπότε υπάρχουν δύο τουλάχιστον άτομα για τα οποία η τιμή της K είναι ίδια, δηλαδή γνωρίζουν το ίδιο πλήθος ατόμων (αρχή του περιστερώνα).

Άσκηση 21

Αποδείξτε ότι $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$ συνδυαστικά και αλγεβρικά.

Συνδυαστικά

Μπορούμε να σκεφτούμε τον συνδυασμό $2n$ ατόμων ανά 2 ως εξής: έστω ότι έχουμε ένα σύνολο με n άνδρες και n γυναίκες και θέλουμε να επιλέξουμε 2 άτομα από αυτό. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε είτε 2 άτομα από το σύνολο των ανδρών, είτε 2 άτομα από το σύνολα των γυναικών είτε 1 άνδρα και 1 γυναίκα. Από τον κανόνα του αθροίσματος προκύπτει ότι το συνολικό πλήθος είναι $\binom{n}{2} + \binom{n}{2} + n \times n$ (στην περίπτωση που επιλέξουμε 1 άνδρα με n τρόπους και 1 γυναίκα με άλλους n τρόπους). ΟΕΔ.

Αλγεβρικά

$$\binom{2n}{2} + n^2 = 2\frac{n!}{2!(n-2)!} + n^2 = n(n-1) + n^2 = n(2n-1) = \frac{2n(2n-1)}{2} = \binom{2n}{2}$$