Κεφ 5 Παράγωγοι

§1 Βασικές έννοιες

- <u>Ορ</u>: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν υπάρχει το όριο $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

$$\left[\ f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ \right].$$

- Αν το $I\subset\mathbb{R}$ είναι διάστημα και το $x_0\in I$ είναι αριστερό ή δεξιό άκρο του I, τότε ορίζουμε $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (αντ. $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) αν υπάρχει

- Αν η $f:I\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in I$ (διάστημα), τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I.

- <u>Παραδείγματα</u>: 1) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $c\in\mathbb{R}$ τ.ω. $f(x)=c$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0.$$

2) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$. Τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, διότι $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1$

ενώ $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$

3) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

4) Έστω $f(x) = \sin x$. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{h} = \cos x_0$$

$\left[\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$ καθώς $\lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$

Ομοίως βρίσκουμε ότι $(\cos x)' = -\sin x$.

- <u>Θεώρημα</u>: Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0.

[Το αντίστροφο δεν ισχύει. π.χ. η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0]

§2 <u>Κανόνες παραγώγισης</u>

- Έστω $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Τότε έχουμε $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Συνέπειες: i) Αν $P(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, τότε η P είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $P'(x) = n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + \dots + \alpha_1$

ii) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

• Κανόνας αλυσίδας: Έστω $f:(a,b) \to (c,d)$ και $g:(c,d) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και η g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$. Τότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

• Παράγωγος αντίστροφης: Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, 1-1, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ με $f'(x_0) \neq 0$. Τότε η f^{-1} παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ με $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

§3 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

• Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a,b)$. Τότε ορίζεται η συνάρτηση $f':(a,b) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto f'(x)$. Αν η f' είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε ορίζεται η παράγωγος της f' που καλείται δεύτερη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f''.

• Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, έχει οριστεί η n-οστή παράγωγος $f^{(n)} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ της f και είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο $(n+1)$-τάξης $f^{(n+1)}$ της f, να είναι η παράγωγος της $f^{(n)}$.

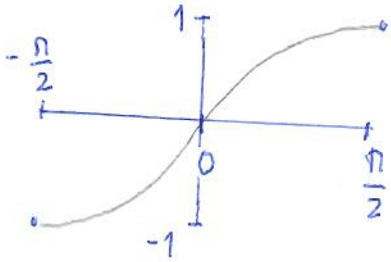
• Έστω $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει η παράγωγος n-οστής τάξης του P. Μάλιστα $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$, $\forall k = 0, 1, \dots, m$

• <u>Κάποιες σημαντικές παράγωγοι:</u>

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

§4 <u>Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις</u>

α) <u>Τόξο ημιτόνου</u>: Η $\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$



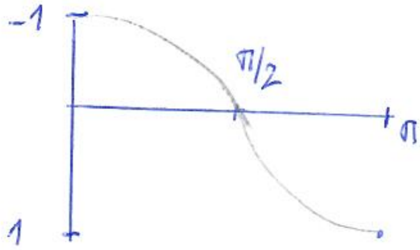
είναι 1-1, συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Ορίζουμε $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ως $\arcsin = \left(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$

Άρα $\forall y \in [-1, 1]$ θέτουμε $\arcsin y = x$ ΑΝΝ $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και $\sin x = y$.

Η arcsin είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

β) <u>Τόξο συνημιτόνου</u>: Η $\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ είναι 1-1, συνεχής και γνησίως φθίνουσα.



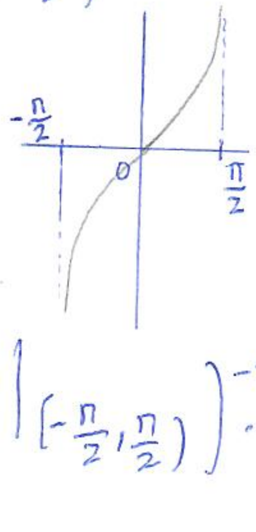
Ορίζουμε

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \text{ ως } \arccos = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

Άρα $\forall y \in [-1,1]$, θέτουμε $\arccos y = x$ ΑΝΝ $x \in [0,\pi]$ και $\cos x = y$.

Η arccos είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

γ) <u>Τόξο εφαπτομένης</u>: Η $\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, συνεχής και γνησίως αύξουσα.



Ορίζουμε

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ ως } \arctan = \left(\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}.$$

Άρα $\forall y \in \mathbb{R}$, θέτουμε $\arctan y = x$ ΑΝΝ $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $\tan x = y$.

Η arctan είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\forall y \in \mathbb{R}$

§5 Παράγωγοι, μονοτονία και κρίσιμα σημεία

- Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

  Αν f αύξουσα, τότε $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$,

  Αν f φθίνουσα, τότε $f'(x)\leq 0$, ———— .

Προσοχή: Αν η f γνησίως αύξουσα, τότε δεν συνεπάγεται ότι $f'(x)>0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$. Π.χ. $f(x)=x^3$ είναι γν αύξουσα και $f'(0)=0$.

- Ορ: Έστω $I\subseteq\mathbb{R}$ διάστημα και $x_0\in I$.

i) Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0, αν υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.
$$f(x_0)\geq f(x),\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I.$$

ii) Λέμε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0, αν υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.
$$f(x_0)\leq f(x),\quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap I.$$

iii) Λέμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 αν είτε έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 ή τοπικό ελάχιστο.

- Θεώρημα: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$ τοπικό ακρότατο της f. Υποθέτουμε ότι η f παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε $f'(x_0)=0$.

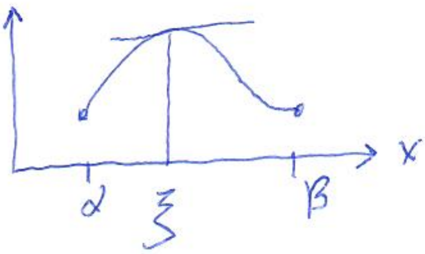
• <u>Παρατήρηση</u>: Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in I$.

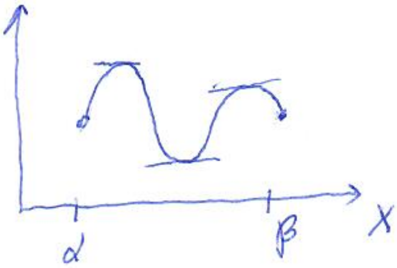
Τότε είτε το x_0 είναι άκρο του I

ή το x_0 εσωτερικό σημείο του I και $f'(x_0) = 0$.

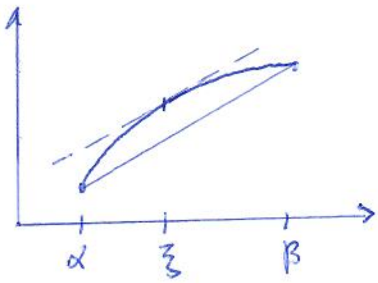
• <u>Ορ</u>: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό σημείο του I λέγεται κρίσιμο αν $f'(x_0) = 0$.

• <u>Θεώρημα</u> (Rolle): Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f'(\xi) = 0$.





• <u>Θεώρημα Μέσης Τιμής</u> (ΘΜΤ): Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Τότε $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ τ.ω. $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$



ΑΣΚ: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

Δ.ο. η f είναι συνεχής στο x_0

Λύση: Για $x\neq x_0$ γράφουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$

και έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)$

$$= f'(x_0)\cdot 0 = 0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0.

ΑΣΚ: Έστω $f,g:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$.

Δ.ο. η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Λύση: Γράφουμε για $h\neq 0$ κοντά στο 0:

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=f(x_0+h)\,\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+g(x_0)\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=g'(x_0)$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, άρα συνεχής στο x_0 και

έχουμε $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$

Συνεπώς η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,g'(x_0)$.

ΑΣΚ: Ν.δ.ο. (i) $\sin' x = \cos x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

(ii) $\ln' y = \frac{1}{y} \quad , \forall y > 0$

(iii) $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad , \forall y \in (-1,1)$

(iv) $\arctan' y = \frac{1}{1+y^2} \quad , \forall y \in \mathbb{R}$

Λύση (i) Έχουμε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \text{ με } \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$$

ενώ $\lim_{h\to 0} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \cos x_0$ επειδή η συνάρτηση cos είναι συνεχής.

Άρα $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0$ και $\sin' x = \cos x$.

(ii) Έστω $y > 0$ με $y = e^x$. Τότε έχουμε

$$\ln' y = \frac{1}{\exp' x} = \frac{1}{\exp x} = \frac{1}{y}.$$

(iii) Η arcsin είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και για κάθε $y \in (-1,1)$ με $y = \sin x$ και $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$ επειδή $\cos x > 0$.

(iv) Η arctan είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ με $y = \tan x$ και $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

ΑΣΚ: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f είναι αύξουσα στο (α,β), δείξτε ότι $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$.

Λύση: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x\in(\alpha,\beta)$, έχουμε $f'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ με $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$ για $h>0$ αρκετά μικρό (επειδή η f είναι αύξουσα). Άρα $f'(x)\geq 0$.

ΑΣΚ: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και $x_0\in(\alpha,\beta)$ τοπικό ακρότατο της f. Δείξτε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

Λύση: Χ.β.τ.γ. υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Υπάρχει λοιπόν $\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$ και $f(x_0+h)\leq f(x_0)$, $\forall h\in(-\delta,\delta)$.

Αν $0<h<\delta$, τότε $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0$

Αν $-\delta<h<0$, τότε $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$

Επειδή $f'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x_0)=0$.

ΑΣΚ: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $f(\alpha)=f(\beta)$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $f'(\xi)=0$.

Λύση: Αν η f είναι σταθερή στο $[\alpha,\beta]$, τότε $f'(x)=0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$.
Διαφορετικά, υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(x)\neq f(\alpha)$ και Χ.β.τ.γ μπορούμε