

Sistemas Operacionais

Bruno Feitosa

Universidade de São Paulo

feitosa.bruno@usp.com

24/06/2019

1 Cálculo do π

- Método Gauss-Legendre
- Método Bailey-Borwein-Plouffe
- Método Monte Carlo
- Comparação dos Métodos

2 Precificação de Opções

- Método de Black Scholes

- Gauss-Legendre
- BBP
- Monte Carlo

Cálculo do π : Gauss-Legendre

- Aplicação da regra de quadratura Gauss-Legendre
- Rápida Convergência, porém, Alto Custo

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} & a_0 &= 1 \\b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n} & b_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}t_{n+1} &= t_n - p_n(a_n - a_{n+1})^2 & t_0 &= \frac{1}{4} \\p_{n+1} &= 2p_n & p_0 &= 1\end{aligned}$$

$$\pi \approx \frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{4 \cdot t_{n+1}}\tag{2}$$

Cálculo do π : Gauss-Legendre

n	a_n	b_n	t_n	p_n	$(a_n - b_n)$
0	1.000000e+00	7.071068e-01	2.500000e-01	1.000000e+00	2.928932e-01
1	8.535534e-01	8.408964e-01	2.285534e-01	2.000000e+00	1.265698e-02
2	8.472249e-01	8.472013e-01	2.284733e-01	4.000000e+00	2.363618e-05
3	8.472131e-01	8.472131e-01	2.284733e-01	8.000000e+00	8.242744e-11
4	8.472131e-01	8.472131e-01	2.284733e-01	1.600000e+01	1.002446e-21
5	8.472131e-01	8.472131e-01	2.284733e-01	3.200000e+01	1.482652e-43
6	8.472131e-01	8.472131e-01	2.284733e-01	6.400000e+01	3.243366e-87
7	8.472131e-01	8.472131e-01	2.284733e-01	1.280000e+02	1.552063e-174
8	8.472131e-01	8.472131e-01	2.284733e-01	2.560000e+02	3.554152e-349
9	8.472131e-01	8.472131e-01	2.284733e-01	5.120000e+02	1.863758e-698
10	8.472131e-01	8.472131e-01	2.284733e-01	1.024000e+03	5.125029e-1397

Cálculo do π : Gauss-Legendre

n	π
0	2.91421356237309504880168872420969807856967187537695
1	3.14057925052216824831133126897582331177344023751295
2	3.14159264621354228214934443198269577431443722334560
3	3.14159265358979323827951277480186397438122550483545
4	3.14159265358979323846264338327950288419711467828365
5	3.14159265358979323846264338327950288419716939937511
6	3.14159265358979323846264338327950288419716939937511
7	3.14159265358979323846264338327950288419716939937511
8	3.14159265358979323846264338327950288419716939937511
9	3.14159265358979323846264338327950288419716939937511
10	3.14159265358979323846264338327950288419716939937511
ref	3.14159265358979323846264338327950288419716939937511

Cálculo do π : Bailey-Borwein-Plouffe

- Otimizado para Cálculo Computacional (múltiplos de 8 / byte)

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{16^k} \right) \cdot \left(\frac{4}{8.k + 1} - \frac{2}{8.k + 4} - \frac{1}{8.k + 5} - \frac{1}{8.k + 6} \right) \quad (3)$$

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (p_k^1 + p_k^2 + p_k^3 + p_k^4) \quad (4)$$

Cálculo do π : Bailey-Borwein-Plouffe

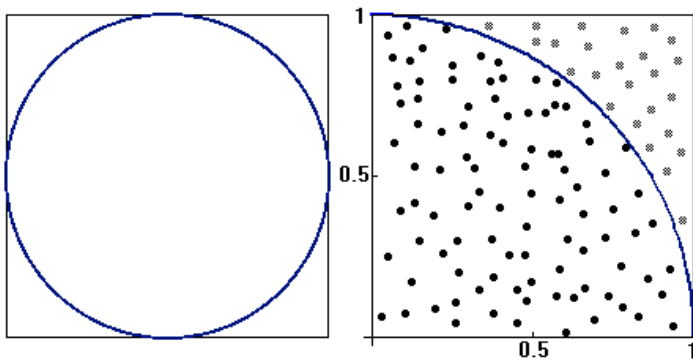
k	a_k	p_k^1	p_k^2	p_k^3	p_k^4
0	1.000000e+00	4.000000e+00	-5.000000e-01	-2.000000e-01	-1.666667e-01
1	6.250000e-02	4.444444e-01	-1.666667e-01	-7.692308e-02	-7.142857e-02
2	3.906250e-03	2.352941e-01	-1.000000e-01	-4.761905e-02	-4.545455e-02
3	2.441406e-04	1.600000e-01	-7.142857e-02	-3.448276e-02	-3.333333e-02
4	1.525879e-05	1.212121e-01	-5.555556e-02	-2.702703e-02	-2.631579e-02
5	9.536743e-07	9.756098e-02	-4.545455e-02	-2.222222e-02	-2.173913e-02
6	5.960464e-08	8.163265e-02	-3.846154e-02	-1.886792e-02	-1.851852e-02
7	3.725290e-09	7.017544e-02	-3.333333e-02	-1.639344e-02	-1.612903e-02
8	2.328306e-10	6.153846e-02	-2.941176e-02	-1.449275e-02	-1.428571e-02
9	1.455192e-11	5.479452e-02	-2.631579e-02	-1.298701e-02	-1.282051e-02

Cálculo do π : Bailey-Borwein-Plouffe

[illegible]

Cálculo do π : Monte Carlo

- Método Estocástico com Convergência Lenta
- Cada ponto tem $\pi/4$ chance de cair dentro do círculo



Comparação dos Métodos

- Gauss-Legendre (GL), Bailey-Borwein-Plouffe (BBP), Monte Carlo (MC)
- $15 \cdot 10^3$ iterações para GL e BBP, $1 \cdot 10^9$ para MC
- 1KB de Precisão para todas variáveis de todos algoritmos

Método		Não Paralelizado	Paralelizado
GL	real	0,229s - 0,235s	0,682s - 0,720s
	user	0,229s - 0,235s	0,407s - 0,486s
	system	0,000s	0,300s - 0,371s
BBP	real	0,473s - 0,483s	1,771s - 1,871s
	user	0,473s - 0,479s	1,467s - 1,648s
	system	0,004s - 0,005s	2,142s - 2,388s
MC	real	7m7,959s	-
	user	7m7,940s	-
	system	0m0,012s	-

Precificação de Opções

- Opções: Contratos de Compra/Venda com preço fixo
- Quem compra o contrato tem o direito de executá-lo
- Contrato de Compra: *Call* — Contrato de Venda: *Put*
- Preços Envolvidos na Transação:
 - Preço da Ação: $P_{ação}$
 - Preço de Execução: $P_{execução}$
 - Preço do Contrato: $P_{opção}$
- Custo para quem Compra uma *Call* (simplificado sem juros)
 - Em caso de Execução: $Custo = P_{opção} + P_{execução}$
 - Caso Contrário: $Custo = P_{opção}$
- Para *Calls*, em geral
 - Se $P_{execução} < P_{ação}$, $P_{opção}$ é “alto”
 - Se $P_{execução} > P_{ação}$, $P_{opção}$ é “baixo”

Precificação de Opções: Método de Black Scholes

- Assume que o Preço da Ação assume uma distribuição normal
 - Volatilidade dita o quanto o preço da ação varia
- Juros ajustam os preços/custos
- O Preço da Opção tenta manter a transação justa (*hedging*)
- Variáveis:
 - E : Preço de Execução
 - S : Preço da Ação
 - r : Juros Livre de Risco
 - v : Volatilidade
 - T : Tempo até a Execução

$$t = S \cdot e^{(r - \frac{v^2}{2}) \cdot T} \cdot e^{(v \cdot \sqrt{T}) \cdot \text{randomNumber}()} \quad (5)$$
$$\text{trial}[i] = e^{-r \cdot T} \cdot \max(t - E; 0)$$

Precificação de Opções: Método de Black Scholes

$$\begin{aligned}t &= S.e^{(r-\frac{v^2}{2}).T}.e^{(v.\sqrt{T}).randomNumber()} \\aux1 &= S.e^{(r-\frac{v^2}{2}).T} \\aux2 &= (v.\sqrt{T}) \\trial[i] &= e^{-r.T}.max(t - E; 0) \\aux3 &= e^{-r.T}\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}t > E \quad \dots \quad &randomNumber() < \frac{\ln(E/aux1)}{aux2} \\ \dots \quad &randomNumber() < \frac{\ln(E/S) - (r - \frac{v^2}{2}).T}{(v.\sqrt{T})}\end{aligned}\tag{7}$$

Fim