第3章 刚体力学基础

本章将研究具有一定形状和大小的物体——刚体的机械运动的规律。

1. 刚体运动学

2. 力矩　刚体绕定轴转动定律

3. 刚体绕定轴转动的功能关系

4. 刚体的角动量和角动量守恒定律

§3.1　刚体运动学

1. 刚体模型

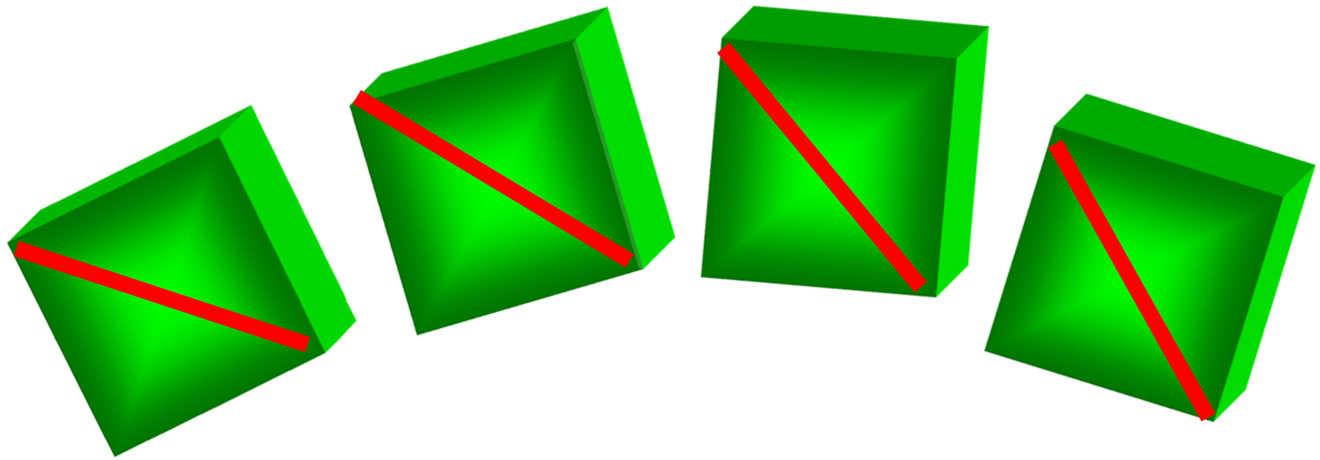
2. 刚体的运动形式

3. 刚体定轴转动的运动学问题

3.1.1 刚体模型

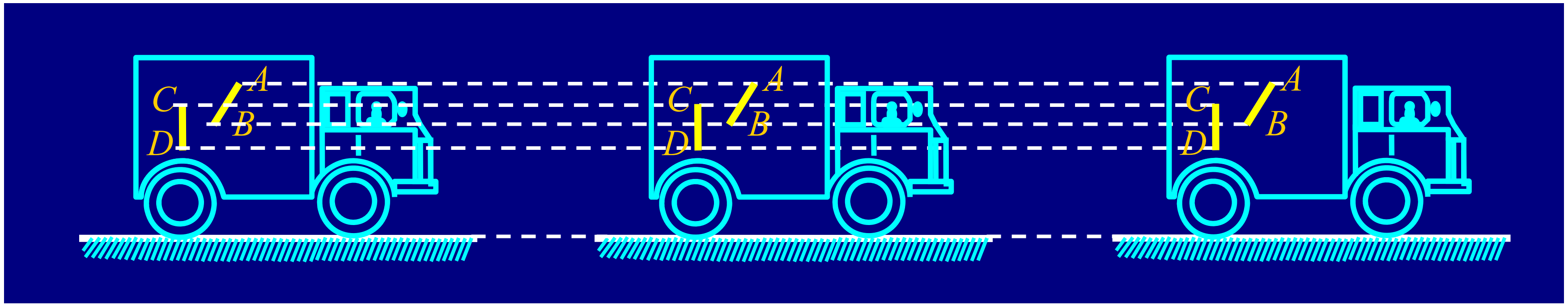
物理模型：在力的作用下，大小和形状都始终保持不变的物体。

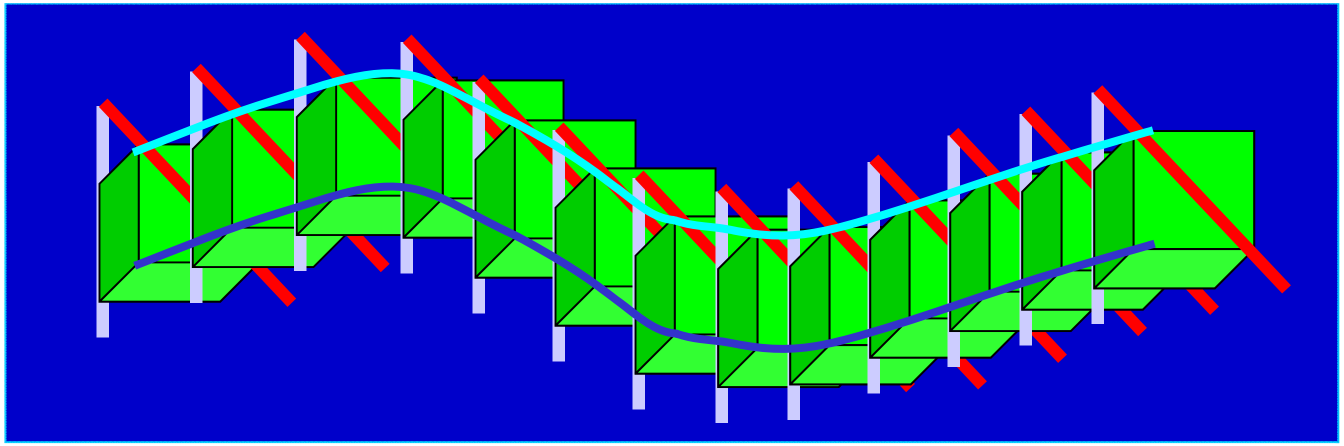
推论： 刚体内任意两点的距离不变。



3.1.2. 刚体的运动形式

1. 平动：刚体运动时，若在其内部所作的任何一条直线，在运动中都始终保持与自身平行的运动形式。





说明：

- 刚体作平动时，刚体上各点的轨迹可以是直线，也可以是曲线；
- 刚体上所有质点都可以代表刚体的平动。具有相同的位移、速度和加速度和运动轨迹，
- 刚体平动的运动规律完全符合质点运动规律；

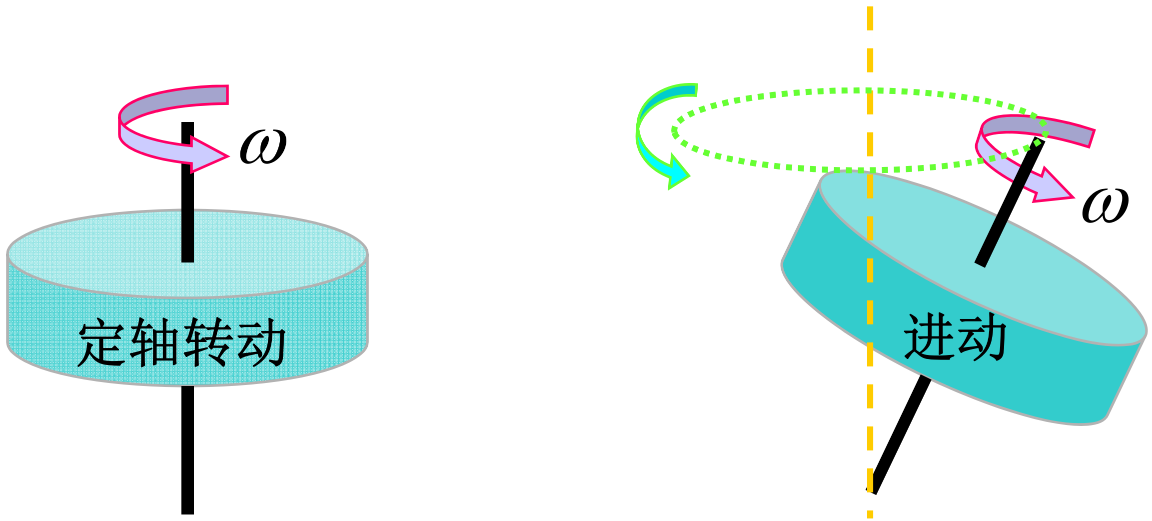
2. 刚体的转动

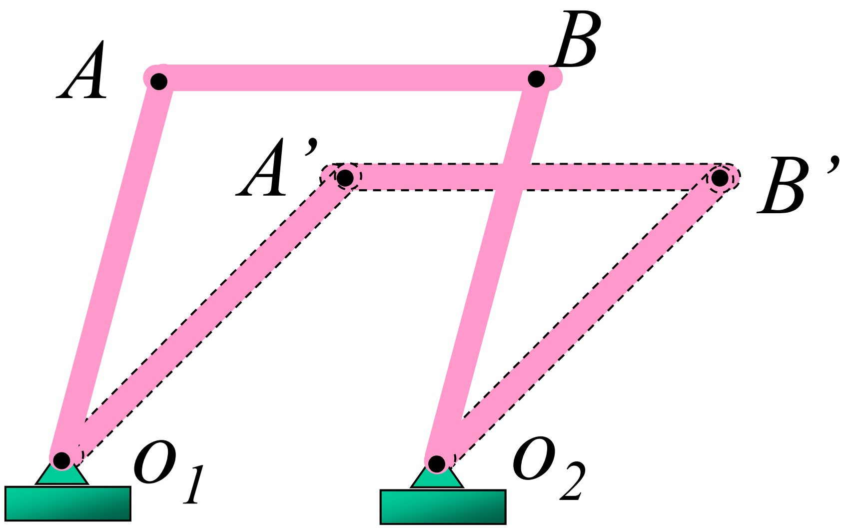
刚体上的各质点都绕同一直线作圆周运动的运动形式。

定轴转动: 转轴在所选参考系中固定不动的转动。

非定轴转动: 转轴位置随时间变化的转动。

定点转动: 在运动过程中，刚体上某一点始终保持不动的运动形式。 ------ 进动



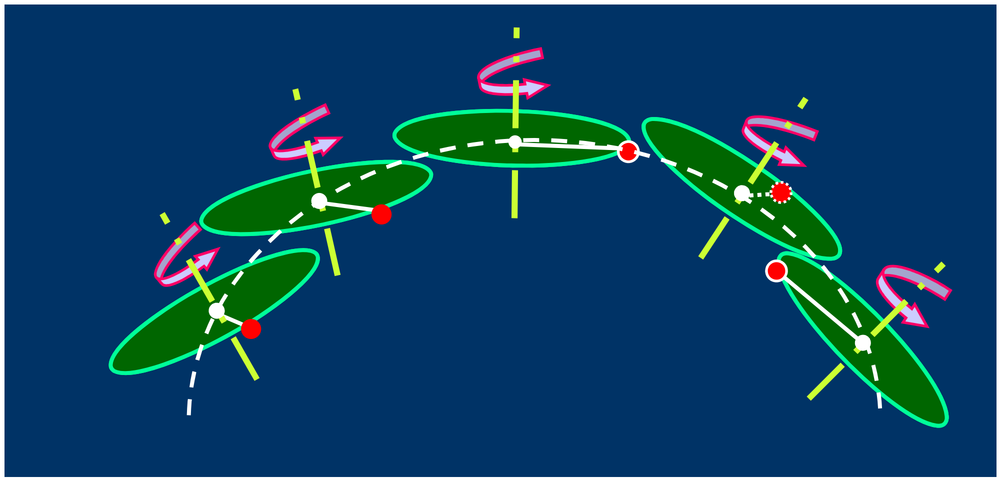


3. 平面平行运动：在运动过程中，刚体上任一点和某一固定平面的距离保持不变的运动形式。

4. 一般运动：

除上述几种运动形式外，刚体其它更为复杂的运动形式。

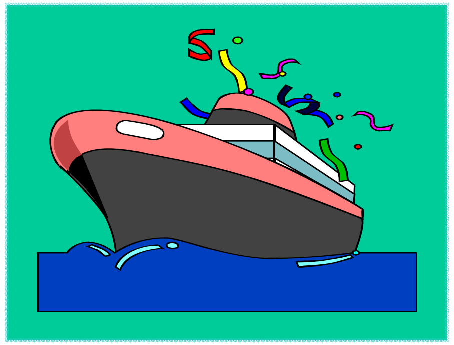
铁饼在空中的运动



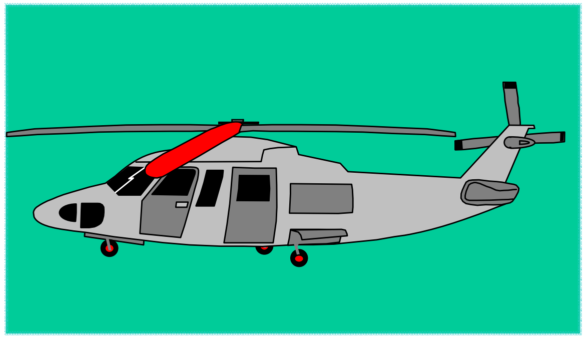
5. 刚体的自由度

自由度：确定一个物体空间位置所需要的独立坐标数目。

火车：自由度为1



轮船：自由度为2



飞机：自由度为3

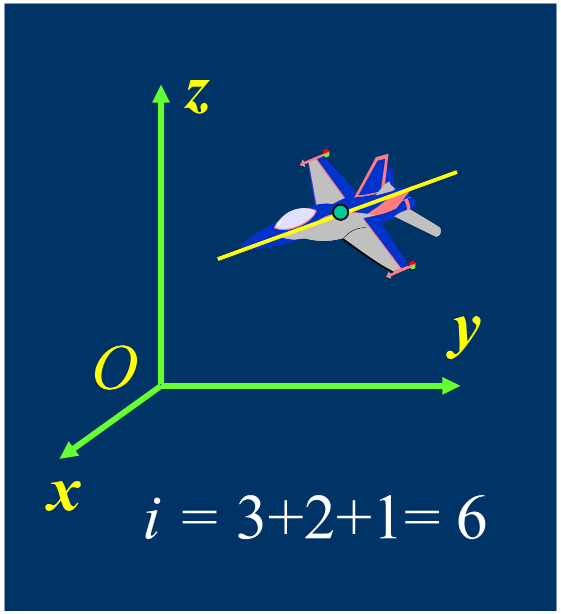
刚体自由度：

确定质心位置:3个平动自由度（x、y、z）

3个方位角 (α、β、γ)，其中两个是独立的

确定刚体绕瞬时轴转过的角度φ 。

当刚体受到某些限制——自由度减少。



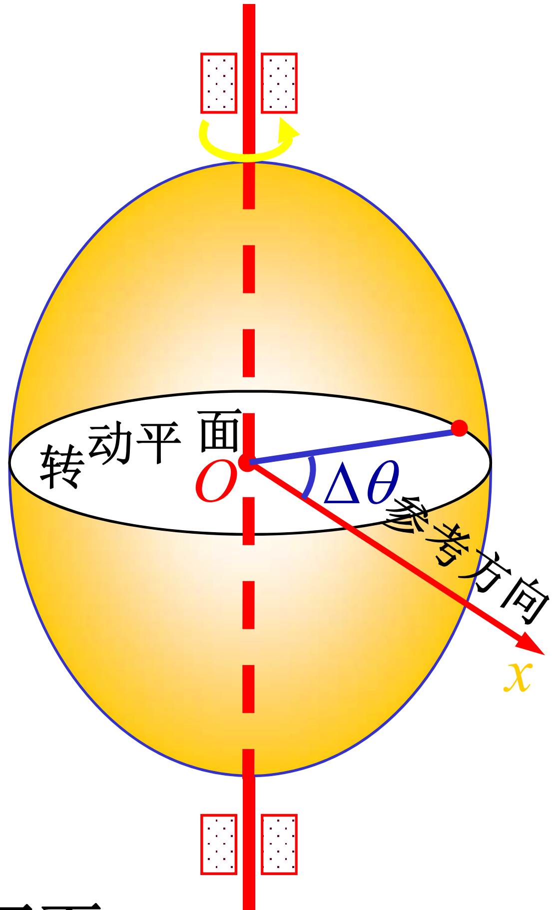
3.1.3 刚体绕定轴转动的运动学问题

1 .描述刚体定轴转动的物理量

描述刚体定轴转动的物理量是角量

角坐标、角位移
角速度、角加速度

运动学中讲过的角坐标、角位移、角速度、角加速度等概念，以及有关公式都可适用于刚体的定轴转动。



转动平面：刚体上垂直于固定轴的任意平面。

◆ 角坐标θ

任选刚体上的任意点P点为参考点

刚体定轴转动的运动方程

$$\theta = \theta(t)$$

◆ 角位移$\Delta\theta$

若P在t和Δt后的角坐标为θ_1和θ_2，则

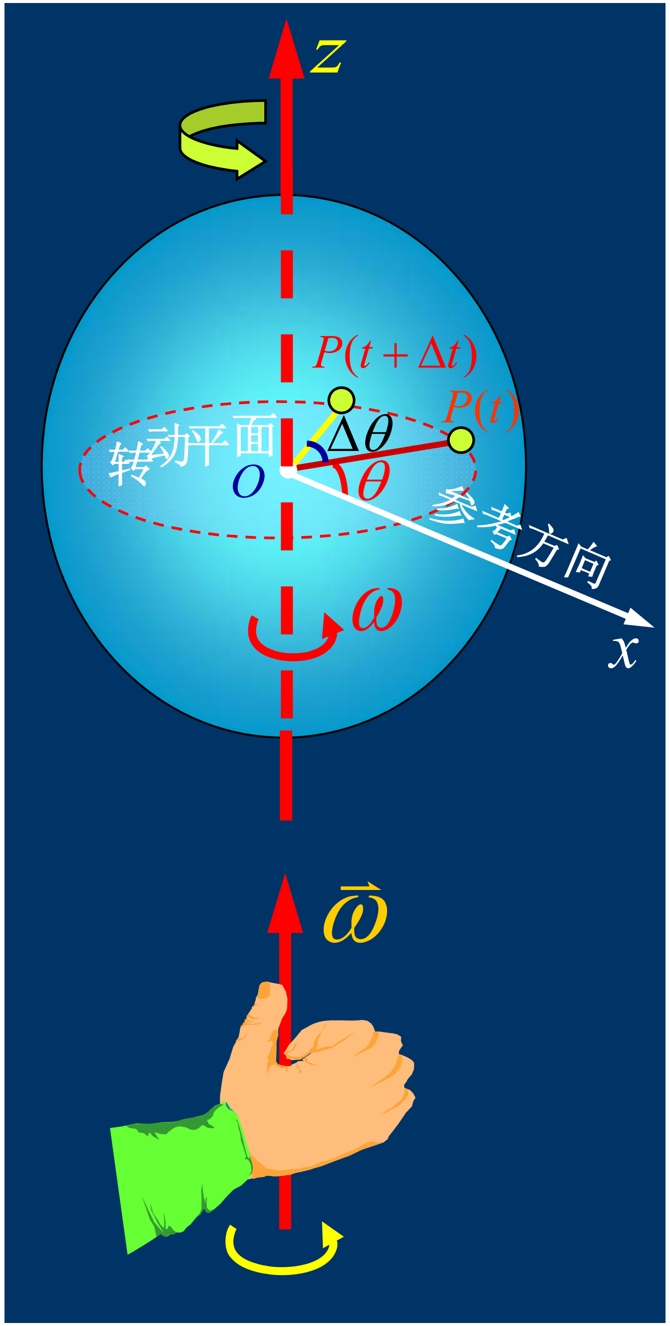
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

◆ 角速度

平均角速度 $$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

瞬时角速度 $$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

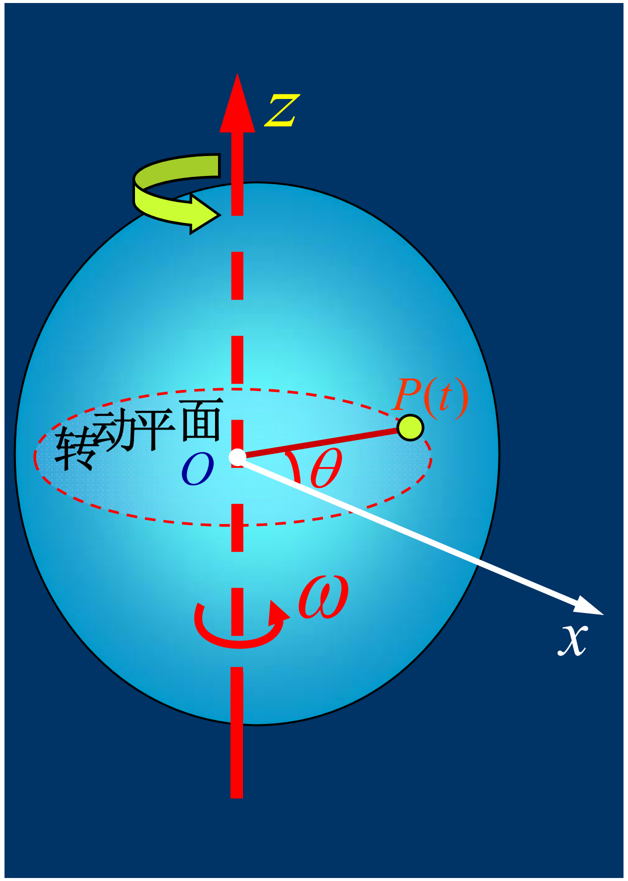
- 刚体转动的角速度矢量 $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$



角加速度

（瞬时）角加速度

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

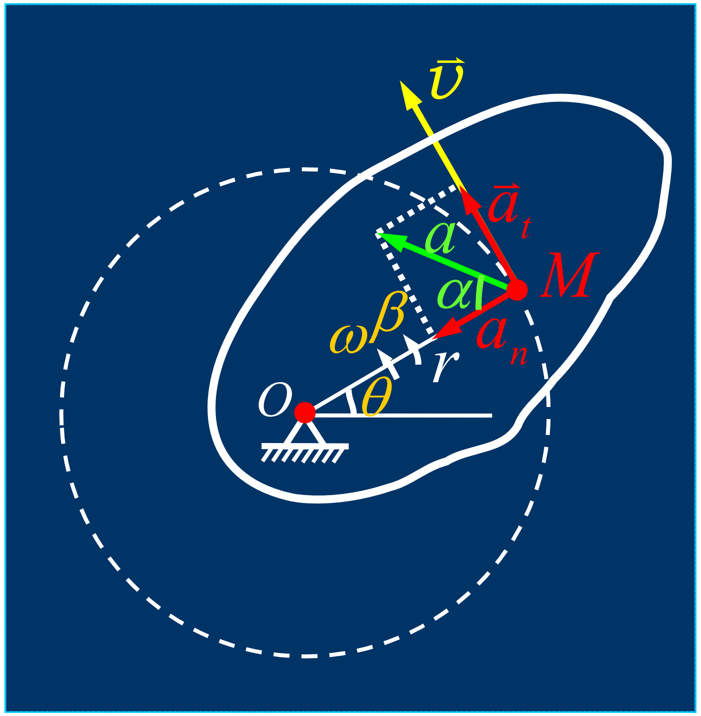


- 刚体定轴转动时，角加速度可看成是只有正、负的代数量。
- $\boldsymbol{\beta} > 0$，角加速度方向与角坐标正方向相同； $\boldsymbol{\beta} < 0$，角加速度方向与角坐标正方向相反。 --- β的正负与$\Delta\omega$相同
- 刚体转动的角加速度矢量 $\vec{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

在一般刚体运动中，角加速度矢量和角速度矢量一般不沿同一方向。

2 .定轴转动刚体上一点的速度和加速度与角量的关系

刚体内各质点具有相同的角位移、角速度、角加速度，但是刚体内各个质点的位移、速度、加速度 （线量）各不相同



$$\upsilon = \omega r$$

$$a_t = r\beta$$

$$a_n = \omega^2 r = \omega \upsilon$$

- ***M***点的线速度、切向加速度沿圆轨迹的切线，指向由ω、β的正负确定。
- 刚体转动时，如果ω和β同号，刚体转动是加速的；如果ω和β异号，刚体转动是减速的。

3 刚体定轴转动运动学的两类问题

- 第一类问题 ------ 微分问题

已知刚体转动运动方程$\theta = \theta(t)$，求角速度ω、角加速度β

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

- 第二类问题 ------ 积分问题

已知角速度或角加速度及初始条件，求转动运动方程$\theta = \theta(t)$

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \beta \mathrm{d}t \qquad \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega \mathrm{d}t$$

- 对于刚体绕定轴匀变速转动，角加速度$\beta =$ 常量，有

$$\omega = \omega_0 + \beta t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \qquad \omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$$

例 一飞轮绕定轴转动，其转过的角度与时间的关系为$\theta=10\pi t^2$，式中θ的单位为rad，t的单位为s 。

求 (1)飞轮的角速度和角加速度；

(2)距转轴r处的质点的切向加速度和法向加速度。

解 根据定义，飞轮的角速度为

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=20\pi t$$

飞轮的角加速度为 $$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=20\pi$$

距转轴r处质点的切向加速度 $$a_{\mathrm{t}}=r\beta=20\pi r$$

法向加速度 $$a_n=r\omega^2=400\pi^2 rt^2$$

例 电动机转子作定轴转动，开始时它的角速度$\omega_0 = 0$，经150s其转速达到12000r/min，已知转子的角加速度β与时间t的平方成正比。

求 在这段时间内，转子转过的圈数。

解 根据题意，设 $\beta = kt^2$（k为比例常量）

由角加速度的定义，有 $$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = kt^2$$

分离变量并积分，有 $$\int_0^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^{t} kt^2 dt$$

t 时刻转子的角速度为 $$\omega = \frac{1}{3}kt^3$$

当t =150s，转子的角速度为 $$\omega = \frac{2\pi \times 12000}{60} = 400\pi \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

则有 $$k = \frac{3\omega}{t^3} = \frac{3 \times 400\pi}{150^3} = 10^{-3} \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-4}$$

$$k=\frac{3\omega}{t^3}=\frac{3\times 400\pi}{150^3}=10^{-3}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-4}$$

由此得 $\omega=\frac{1}{3}\times 10^{-3}\cdot t^3$

由角速度的定义 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ，得转子在**150s**内转过的角度为

$$\theta=\int_0^{150}\frac{1}{3}\times 10^{-3}\cdot t^3\mathrm{d}t=1687.5\times 10^2\,\mathrm{rad}$$

因而转子在这一段时间内转过的圈数为

$$N=\frac{\theta}{2\pi}=\frac{1687.5\times 10^2}{2\pi}=268\times 10^2\,\mathrm{r}$$

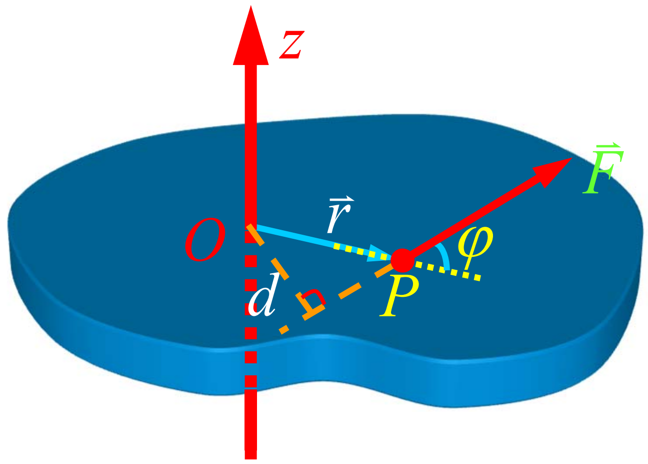
§3.2　刚体绕定轴转动定律

1. 力矩
2. 刚体绕定轴转动定律
3. 转动惯量
4. 定轴转动定律的应用

3.2.1 力矩

力对固定转轴的力矩:

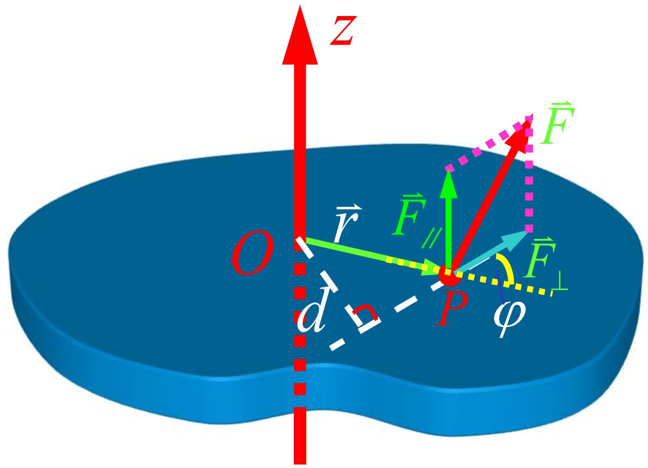
力 $\vec{F}$ 的大小与力臂$\boldsymbol{d}$的乘积。



◆ 若刚体所受力在转动平面内

$$M_z = \pm Fd = \pm Fr\sin\varphi$$

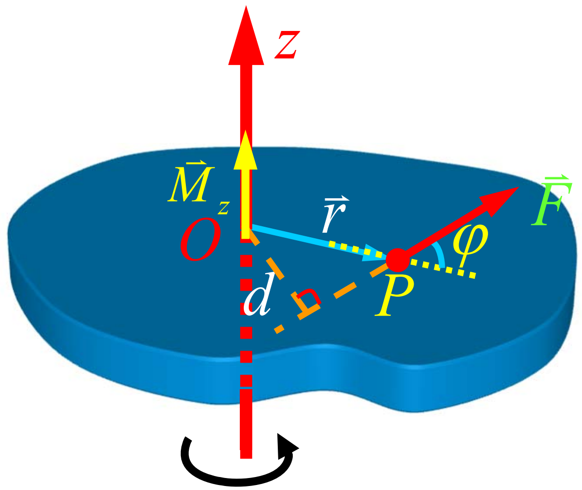
◆ 若刚体所受力不在转动平面内



$$M_z = \pm F_{\perp} d = \pm F_{\perp} r\sin\varphi$$

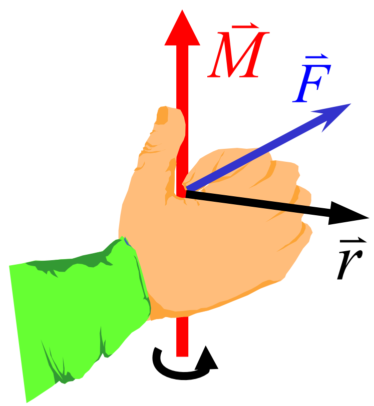
说明

- 对于刚体的定轴转动，力矩M_z可看成是代数量。力矩的正负由右手螺旋法则确定。



- 几个作用力同时作用在一个绕固定轴转动的刚体上时，合力矩等于这几个力各自的力矩的代数和。

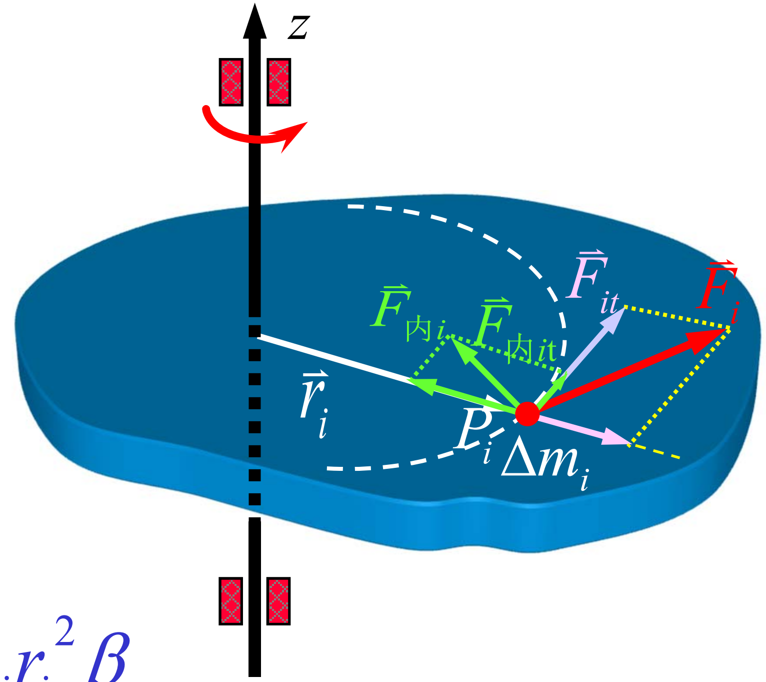
- 对于刚体的定轴转动，力矩M_z也可认为是矢量。即



$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

方向：满足右手螺旋法则。

3.2.2 刚体绕定轴转动定律



对$\boldsymbol{P_i}$： $\vec{F}_i + \vec{F}_{内i} = \Delta m_i \vec{a}_i$

切向： $F_{it} + F_{内it} = \Delta m_i a_{it}$

$$= \Delta m_i r_i \beta$$

两边同乘以 $\boldsymbol{r_i}$： $F_{it} r_i + F_{内it} r_i = \Delta m_i r_i^2 \beta$

对刚体中所有质点求和 $\sum_i F_{it} r_i + \sum_i F_{内it} r_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \beta$

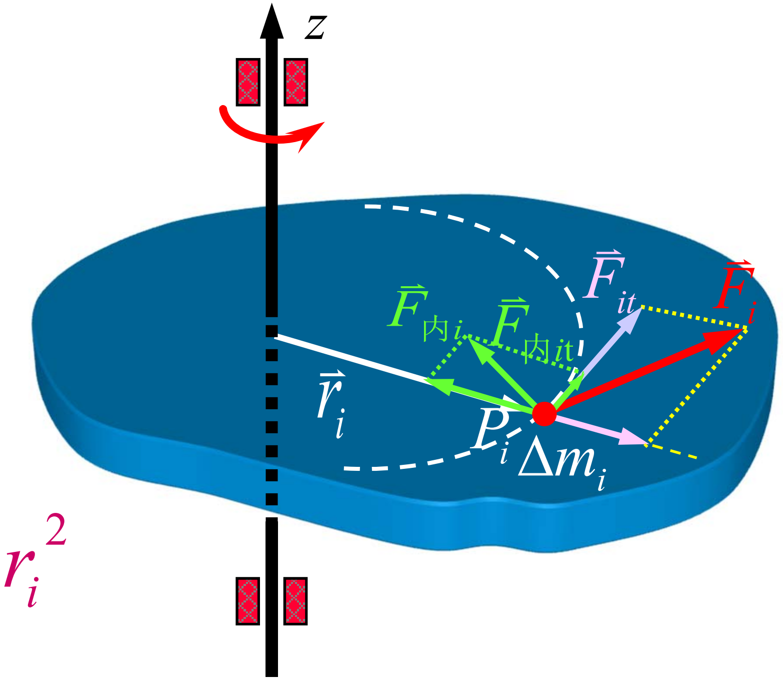
所以 $\sum_i F_{it} r_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \beta$

合外力矩

$$M = \sum_i F_{it} r_i$$

$$= (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$$

刚体的转动惯量 $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$



$$\boxed{M = J\beta}$$ （刚体定轴转动定律）

作用在刚体上的合外力矩等于刚体对转轴的转动惯量与所获得的角加速度的乘积。

$$M = J\beta$$

➢ 讨论

- $\boldsymbol{M}$是作用在刚体上的合外力矩；
- 力矩的瞬时作用规律，也可以写成矢量关系式，即

$$\vec{M} = J\vec{\beta}$$

- $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{J}$和$\boldsymbol{\beta}$三个物理量都是相对于同一转轴而言的；
- 刚体定轴转动定律是刚体定轴转动动力学的基本方程，如同质点力学中的 $\vec{F} = m\vec{a}$ ；

力矩是使刚体改变转动状态的原因，是使刚体转动产生角加速度的原因。

- 刚体定轴转动定律仅适用于惯性系。

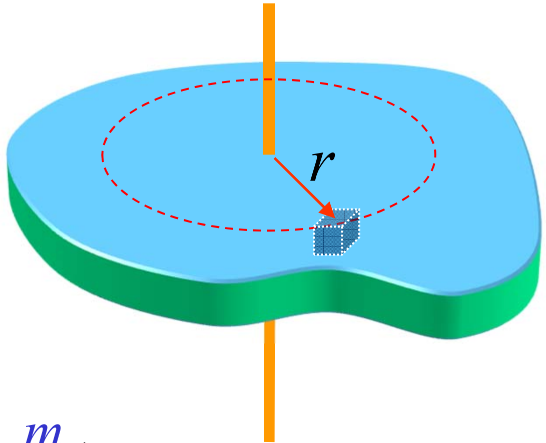
3.2.3 转动惯量

◆ 转动惯量的定义

刚体对某转轴的转动惯量 J 等于刚体内每个质点的质量与这个质点到该转轴垂直距离平方乘积之和。

◆ 计算转动惯量的基本公式

对质量离散分布的质点系 $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$



对质量连续分布的刚体 $J = \int r^2 \mathrm{d}m$

$$J = \begin{cases} \int_L r^2 \lambda \mathrm{d}l & \text{质量线分布，}\lambda\text{为线密度}\left(\lambda = \dfrac{m}{L}\right) \\ \int_S r^2 \sigma \mathrm{d}S & \text{质量面分布，}\sigma\text{为面密度}\left(\sigma = \dfrac{m}{S}\right) \\ \int_V r^2 \rho \mathrm{d}V & \text{质量体分布，}\rho\text{为体密度}\left(\rho = \dfrac{m}{V}\right) \end{cases}$$

- 讨论

- 转动惯量J的物理意义：表示刚体在转动中惯性的大小的量度。 ------ 转动惯量J越大，转动状态越不容易改变。

- 影响转动惯量J大小的三个因素

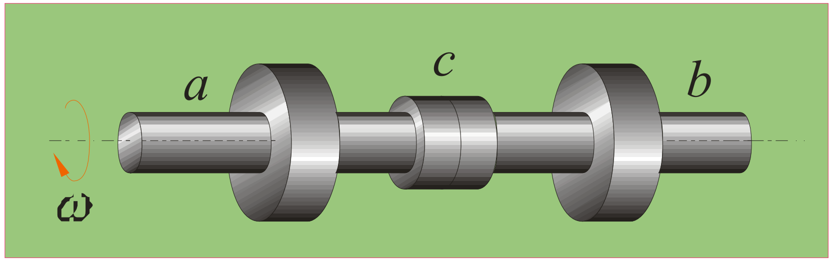
(1) 刚体的总质量： J与其自身的总质量成正比；

(2) 刚体的转轴位置：同一刚体依不同的转轴而有不同的J；

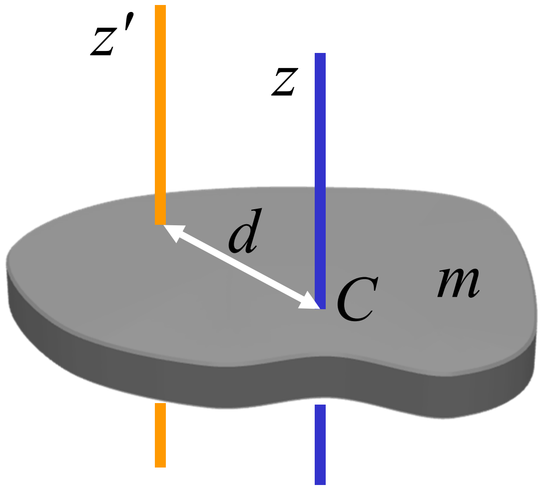
(3) 质量相对转轴的分布：与其形状、大小和密度分布有关。

两个定理：

- 转动惯量叠加定理 $J = J_a + J_b + J_c + \cdots$



- 平行轴定理 $J = J_C + md^2$

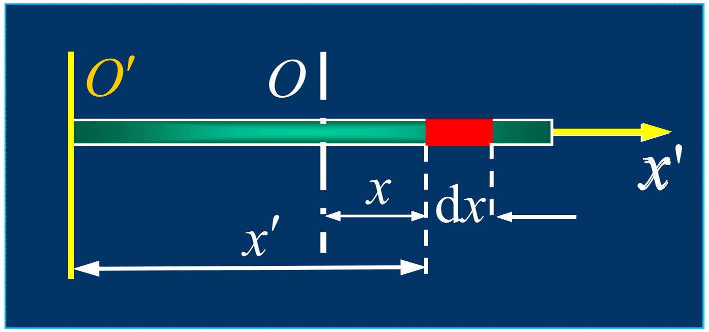


例 试求质量为m，长为l 的均质细杆对如下给定轴的转动惯量。

(1) 转轴垂直于杆并通过杆的中点；

(2) 转轴垂直于杆并通过杆的一端。

解 (1) 取如图所示的坐标,在细杆上 x 处取线元dx线元的质量为



$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}x = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

细杆对过中点的垂直转轴的转动惯量为

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \lambda \mathrm{d}x = \frac{1}{12} ml^2$$

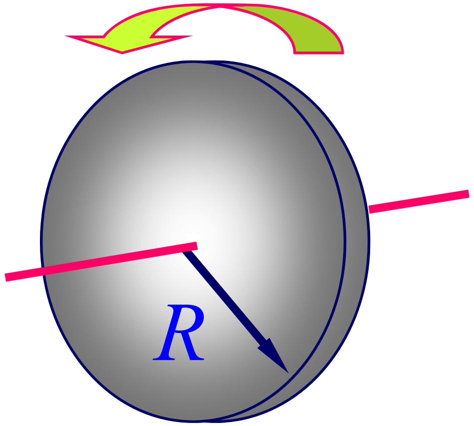
(2) 以细杆的一端O'为坐标原点，取如图所示的坐标

则此时的转动惯量为：$J = \int_0^l x'^2 \lambda \mathrm{d}x' = \lambda \dfrac{l^3}{3} = \dfrac{1}{3} ml^2$

或 利用平行轴定理 $J = J_c + md^2 = \dfrac{1}{12} ml^2 + m(\dfrac{l}{2})^2 = \dfrac{1}{3} ml^2$

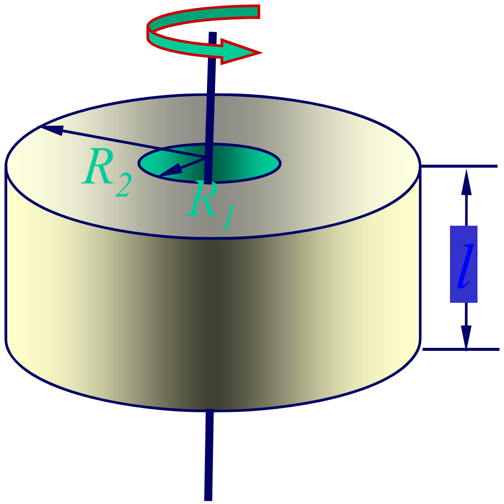
常见刚体的转动惯量

薄圆盘



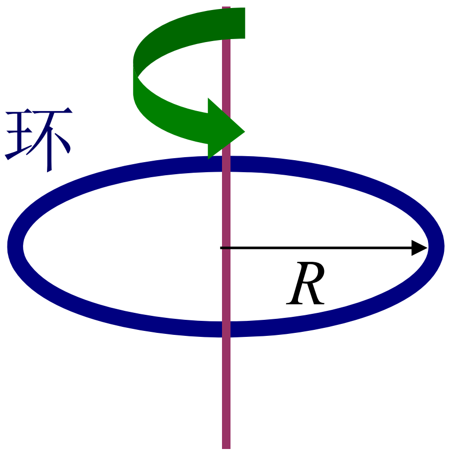
$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

圆柱



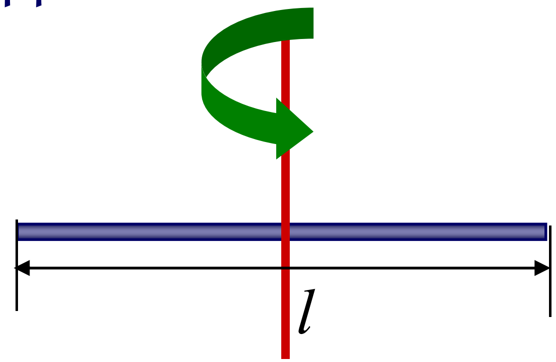
$$J = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

薄圆环



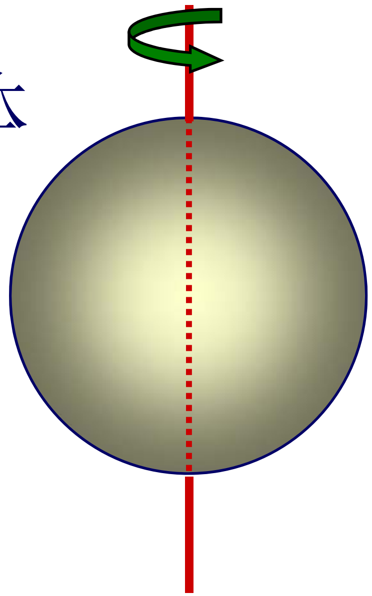
$$J = mR^2$$

细棒

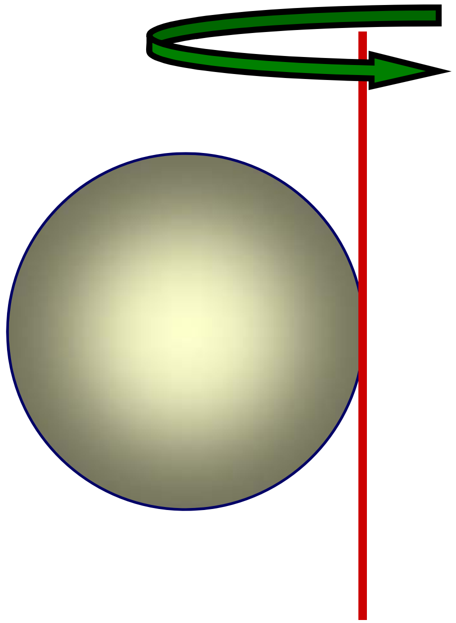


$$J = \frac{1}{12} ml^2$$

球体



$$I = \frac{2}{5}mR^2$$



$$I = \frac{7}{5}mR^2$$

3.2.4 刚体定轴转动定律的应用

◆ 刚体动力学的两类问题

- 已知转动运动方程$\theta=\theta(t)$，求刚体所受合外力矩M；
- 已知刚体所受合外力矩 M 及初始条件，求刚体的角加速度 β、角速度ω和转动运动方程。

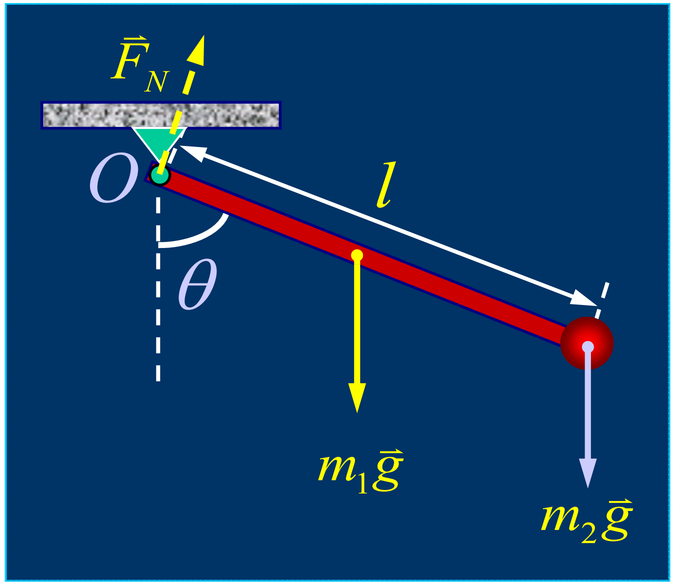
◆ 应用定轴转动定律求解刚体动力学的一般思路

- 要注意正确选取角速度、角加速度和力矩的正负：
- 除了受力分析，还要进行力矩分析。在进行受力、力矩分析时，对刚体要找准力的作用点，以便求力矩
- 对平动的刚体列出牛顿第二定律方程，对定轴转动的刚体列出定轴转动定律方程；
- 注意利用角量与线量的关系。

例 如图，一钟摆由长度为l，质量为m_1的均质细杆和固定在其一端的质量为m_2的摆球（可以看作质点）构成。钟摆可绕过杆另一端的固定轴无摩擦地摆动，开始时把它放置于水平位置，并处于静止状态，然后让它自由下落。

求 放手后钟摆摆到θ角位置时的角加速度β和角速度ω。

解 受力分析如图



钟摆所受的合外力矩（重力的力矩）

$$M = M_1 + M_2$$

$$= -m_1 g \frac{l}{2} \sin\theta - m_2 g l \sin\theta$$

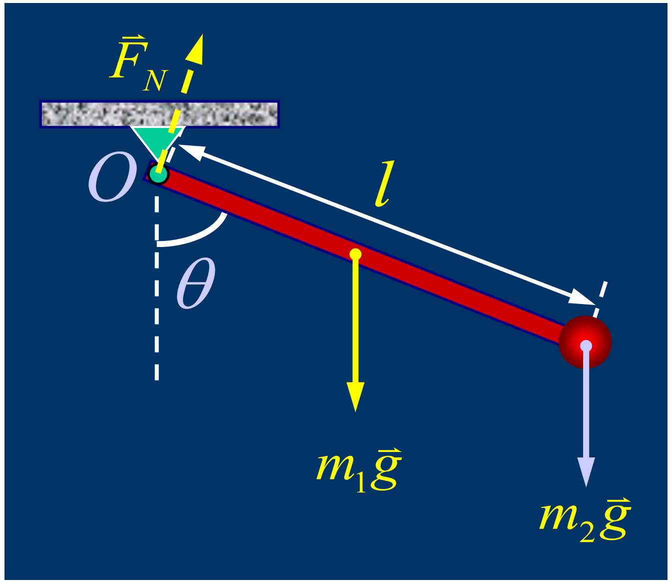
钟摆系统的总转动惯量

$$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{3} m_1 l^2 + m_2 l^2$$

由刚体定轴转动定律，有

$$-m_1 g\frac{l}{2}\sin\theta - m_2 g l\sin\theta = (\frac{1}{3}m_1 l^2 + m_2 l^2)\beta$$

$$\beta = -\frac{3(m_1+2m_2)g\sin\theta}{2(m_1+3m_2)l}$$



而 $$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

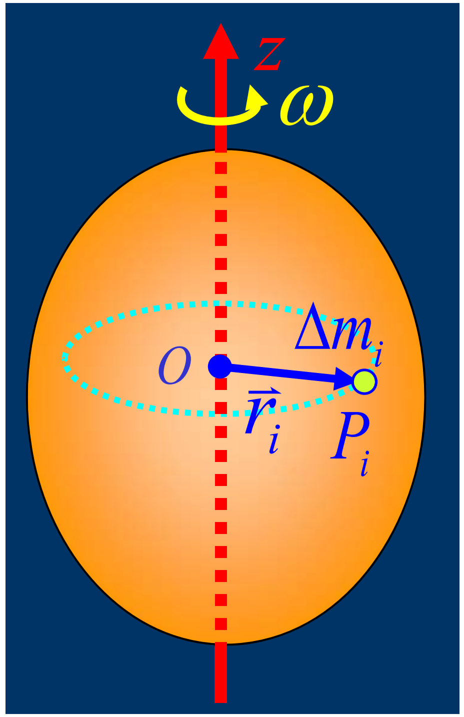
$$\beta = -\frac{3(m_1+2m_2)g\sin\theta}{2(m_1+3m_2)l}$$

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{3(m_1+2m_2)g\sin\theta}{2(m_1+3m_2)l}\mathrm{d}\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{3(m_1+2m_2)g\cos\theta}{(m_1+3m_2)l}}$$

§3.3　刚体绕定轴转动的功能关系

1. 刚体绕定轴转动的转动动能
2. 力矩的功
3. 刚体绕定轴转动的动能定理
4. 刚体的重力势能
5. 含有刚体的力学系统的机械能守恒定律

3.3.1 刚体绕定轴转动的转动动能



任一质点P_i的动能为

$$E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$$

对刚体上所有质点的动能求和

$$E_k=\sum_i \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2=\frac{\omega^2}{2}\sum_i \Delta m_i r_i^2$$

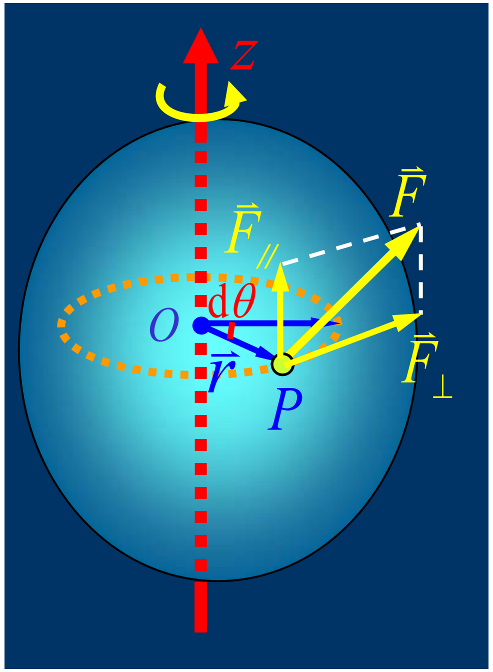
$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$$（刚体绕定轴转动的转动动能）

➢ 讨论

- 刚体绕定轴转动的动能就是组成刚体所有质点的动能之和；
- 与质点的动能相比较，也可看出转动惯量J的地位对应于质点的质量m，也说明J是刚体绕定轴转动惯性大小的量度。

3.3.2 力矩的功

刚体在合外力作用下绕定轴转动而发生角位移时，则力矩对刚体作了功。

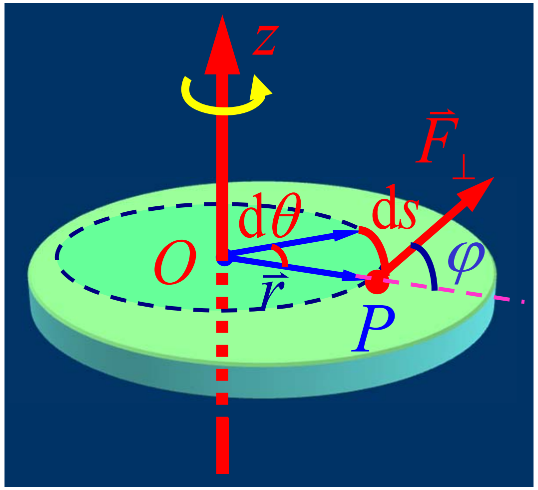


$$\mathrm{d}A = \vec{F}_{\perp} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_{\perp}\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)\mathrm{d}s$$

$$= F_{\perp} r \sin\varphi \, \mathrm{d}\theta \Longleftarrow M = F_{\perp} r \sin\varphi$$

$$\boxed{\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta}$$

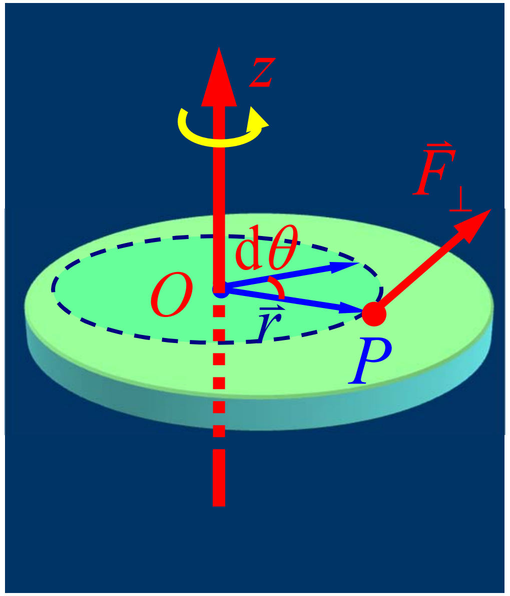
- 力矩的元功： 力矩和元角位移的乘积



- 刚体从θ_1转到θ_2的过程中，力矩对刚体所作的功

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$$

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$$



➢ 讨论

- 力矩所作的功实质上就是力所作的功在刚体转动情况下的表现形式。
- **M**为作用在刚体上各外力的合外力矩
- 力矩的功的正负

当力矩与角速度同号(或同方向)时，力矩的功为正值；当力矩与角速度异号(或反方向)时，力矩的功为负值。

- 力矩的功率

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{M\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=M\omega$$

3.3.3 刚体绕定轴转动的动能定理

转动定律 $M = J\beta$

$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = J\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

设在合外力矩***M***的作用下

$$\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta = J\omega\,\mathrm{d}\omega$$

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$$ （刚体绕定轴转动动能定理的微分形式）

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$$

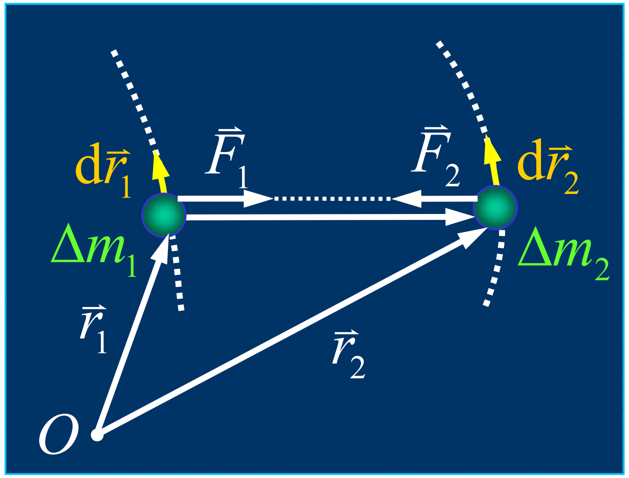
$$A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$ （刚体绕定轴转动的动能定理）

合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体始、末两个状态转动动能的增量。

➢ 讨论

- 刚体中一对内力所作功的代数和为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_{内} &= \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \\
&= -\vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \\
&= \vec{F}_2 \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1) \\
&= \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\
&= \vec{F}_2 \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$



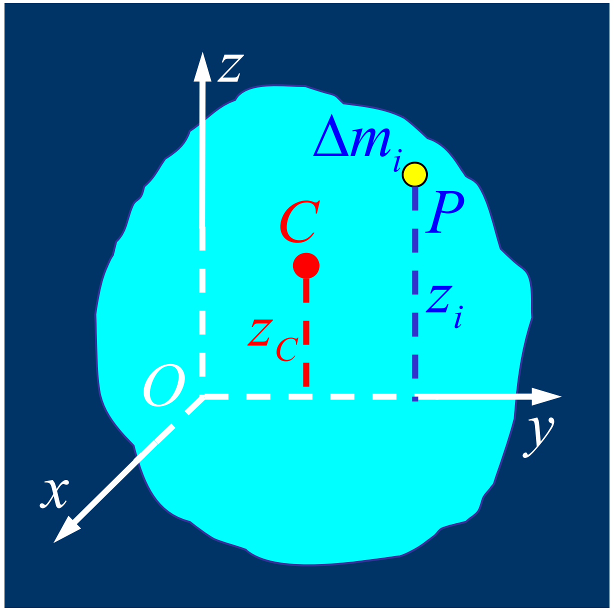
内力的功不影响刚体的转动动能。

- 刚体绕定轴转动的动能定理只适用于刚体的定轴转动。

3.3.4 刚体的重力势能

以 xOy 平面为重力势能零参考面

$$E_{pi} = \Delta m_i g z_i$$



对刚体中所有质点的势能求和

$$E_p = \sum \Delta m_i g z_i = g \sum \Delta m_i z_i$$

$$= (mg)\frac{\sum \Delta m_i z_i}{m}$$

$$= mgz_C$$

若以 h_C 表示质心到零势能面的高度，则刚体的重力势能为

$$E_p = mgh_C$$

- **结论：** 刚体重力势能与其质量全部集中在质心上的质点具有的重力势能相同。

3.3.5 含有刚体的力学系统的机械能

当 $A_{外}+A_{非保内}=0$ 时，有

$$E=E_k+E_p=恒量$$ （系统的机械能守恒定律）

对含有刚体的力学系统，若在运动过程中，只有保守内力作功，而外力和非保守内力都不作功，或作功的总和始终为零，则该系统的机械能守恒。

力学系统的机械能应包括

- 质点的动能、重力势能，弹性势能；
- 平动刚体的平动动能、重力势能；
- 定轴转动刚体的转动动能、重力势能，即

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2+mgh_C$$

§3.4　刚体的角动量定理与角动量守恒定律

1. 刚体绕定轴转动的角动量定理

2. 角动量守恒定律

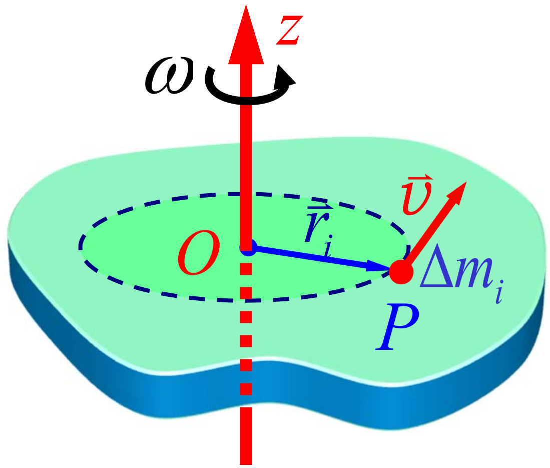
3. 角动量守恒定律在工程技术上的应用

4*. 进动现象

3.4.1 刚体绕定轴转动的角动量定理

◆ 刚体绕定轴转动的角动量

刚体上任一质点**P**对*z*轴的角动量



$$L_i = \Delta m_i v_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L = \sum_i L_i = \sum_i \Delta m_i v_i r_i$$

$$= (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega$$

$$L = J\omega$$ （刚体绕定轴转动的角动量）

- 刚体的角动量是描述刚体绕定轴转动状态的物理量；
- 角动量 **L=Jω**与质点动量 ***p=mv*** 相对应。

◆ 刚体绕定轴转动的角动量定理

将刚体的角动量对时间求导

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega)$$

刚体对确定轴的转动惯量不变，则

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\beta$$

$$M=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega)$$ （刚体定轴转动的角动量定理）

作用在绕定轴转动刚体上的合外力矩等于刚体对该轴的角动量对时间的导数

➢ 说明：可以证明，此式也适用于在物体转动过程中，J发生变化的过程，而$M=J\beta$ 仅适用于转动惯量不变的过程。

积分形式的角动量定理

$$M = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow M\mathrm{d}t = \mathrm{d}(J\omega) \quad (M\mathrm{d}t\text{为元冲量矩})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = \int_{J\omega_1}^{J\omega_2} \mathrm{d}(J\omega) = J\omega_2 - J\omega_1 \quad (\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t\ \text{为冲量矩})$$

（定轴转动角动量定理的积分形式）

定轴转动刚体在某段时间内所受合外力矩的冲量矩等于刚体在同一时间内角动量的增量。

- 说明：可以证明，对转动惯量J可变化的质点系或非刚体，在定轴转动时，角动量定理仍成立，即有

$$\int_{t_1}^{t_2} M\mathrm{d}t = J_2\omega_2 - J_1\omega_1$$

3.4.2 角动量守恒定律

当 $M=0$ 时，有 $J\omega=$ 常量 （角动量守恒定律）

当作用在定轴转动物体上的合外力矩为零时，物体在运动过程中的角动量保持不变。

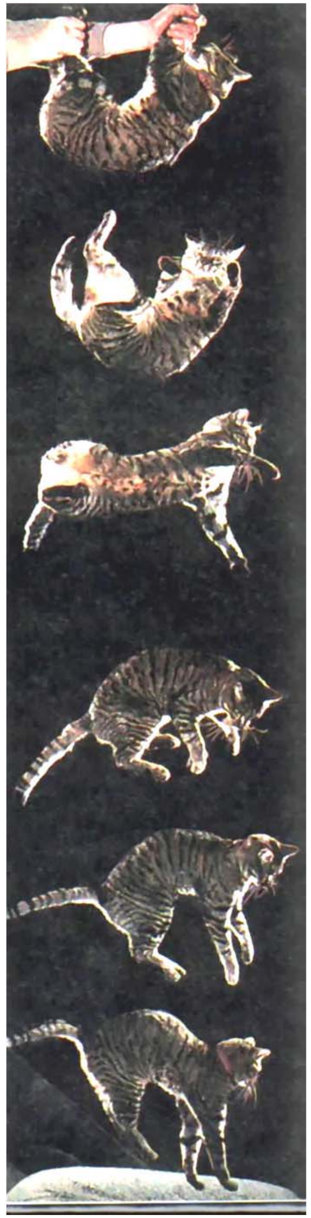
➢ 讨论

- 角动量守恒不仅适用于刚体，也同样适用于非刚体。

(1) 对于刚体角动量守恒时，转动惯量和角速度均保持不变，刚体绕定轴作匀角速转动；

(2)对非刚体，角动量守恒时，转动惯量和角速度同时改变，但两者乘积不变：当J变大时，角速度变小；当J变小时，角速度变大。



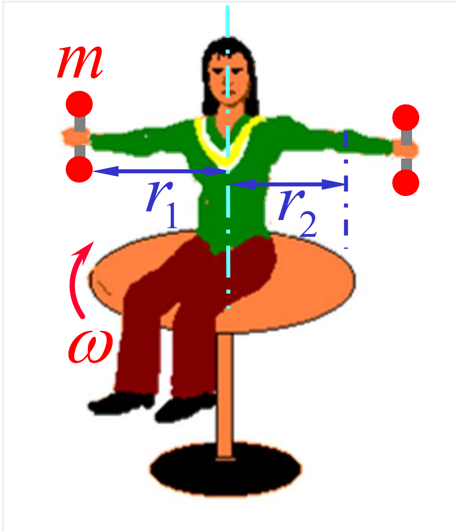


花样滑冰运动员通过改变身体姿态（转动惯量）来改变转速

- 在非定轴转动的情况下，只要作用在物体的外力对过质心轴的合外力矩为零，则它对过质心的同一轴的角动量也保持不变。
- 角动量守恒不仅适用于宏观物体，也同样适用于天体运动和微观粒子的运动。

- 分析人和转盘组成的系统当双臂由$\boldsymbol{r_1}$变为$\boldsymbol{r_2}$后，系统转动惯量、转动角速度和机械能的变化情况。

由角动量守恒，有



$$(J_0+2mr_1^2)\omega_1=(J_0+2mr_2^2)\omega_2$$

得 $$\omega_2=\frac{(J_0+2mr_1^2)}{(J_0+2mr_2^2)}\omega_1$$

系统机械能的变化

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}(J_0+2mr_2^2)\omega_2^2-\frac{1}{2}(J_0+2mr_1^2)\omega_1^2$$

$$=\frac{1}{2}(J_0+2mr_1^2)\omega_1^2\left(\frac{J_0+2mr_1^2}{J_0+2mr_2^2}-1\right)$$

非保守内力作正功，机械能增加。

例 一质量为m，长度为l的均质细杆可绕一水平轴自由转动。开始时杆子处于铅垂状态。现有一质量为m_0的橡皮泥以速度v_0与细杆在其$3l/4$处发生完全非弹性碰撞且和杆子粘在一起。

求 (1) 碰撞后系统的角速度ω;

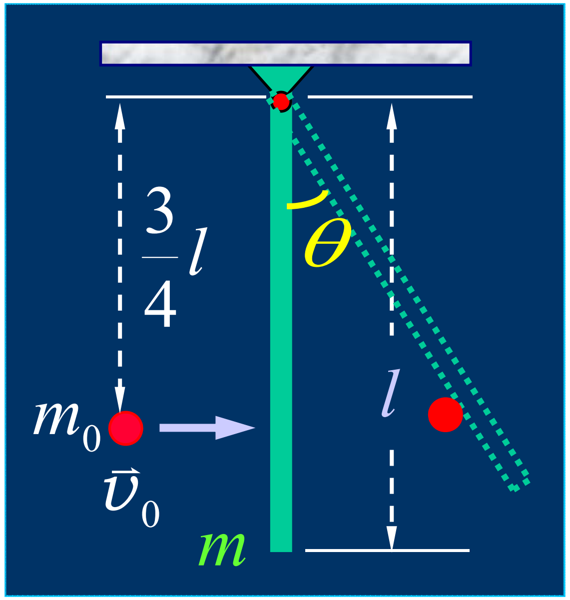
(2) 碰撞后细杆能上摆的最大角度θ_0。

解 (1) 碰撞过程系统的合外力矩为零，系统的角动量守恒

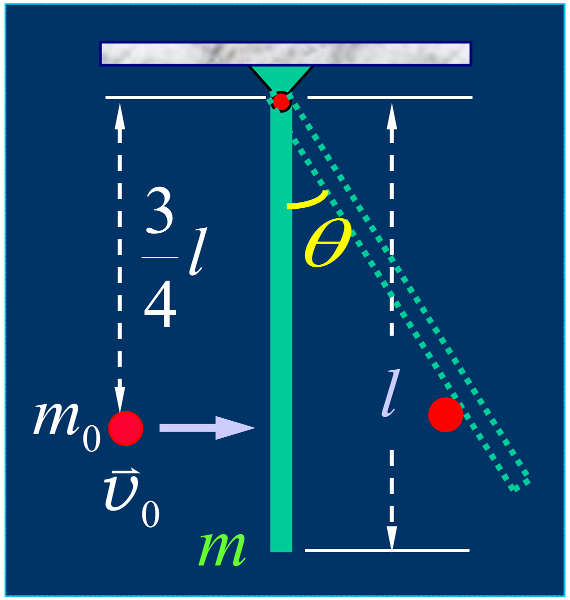
则有 $$J_{泥}\omega_0 = (J_{杆} + J_{泥})\omega$$

而 $$J_{泥} = m_0(\frac{3}{4}l)^2, \qquad J_{杆} = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\omega = \frac{\frac{3}{4}m_0 v_0}{\frac{9}{16}m_0 l + \frac{1}{3}ml}$$



(2) 上摆过程机械能守恒，取细杆下端水平面为重力势能零点，则有



$$\frac{1}{2}(J_{\text{杆}}+J_{\text{泥}})\omega^2+\frac{1}{4}lm_0g+\frac{1}{2}lmg$$

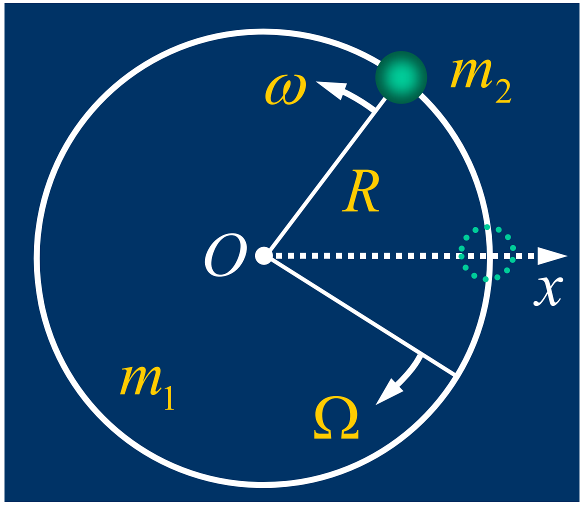
$$=m_0g(l-\frac{3}{4}l\cos\theta_0)+mg(l-\frac{1}{2}l\cos\theta_0)$$

$$\cos\theta_0=\frac{(\frac{3}{4}m_0+\frac{1}{2}m)(\frac{9}{16}m_0+\frac{1}{3}m)gl-\frac{9}{16}m_0^2v_0^2}{(\frac{3}{4}m_0+\frac{1}{2}m)gl}$$

例 如图，一个质量为m_1，半径为R的圆形水平转台可绕通过其中心的光滑竖直轴转动。质量为m_2的人站在转台的边缘，开始时，人和转台都相对于地面静止。

求 当人沿转台边缘走完一周时，转台对地面转过的角度。

解 取人和转台作为系统。系统所受合外力矩为零，系统角动量守恒。



人和转台对轴的转动惯量为

$$J_{人} = m_2 R^2$$

$$J_{台} = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

设人和转台对地的角速度分别为ω和Ω，则

$$J_{人}\omega + J_{台}\Omega = 0$$

以θ和Θ分别表示人和转台对地的角坐标，则

$$m_2R^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}m_1R^2\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} \Rightarrow m_2\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2}m_1\mathrm{d}\Theta$$

两边积分，有

$$\int_0^\theta m_2\mathrm{d}\theta=-\int_0^\Theta\frac{1}{2}m_1\mathrm{d}\Theta \Rightarrow m_2\theta=-\frac{1}{2}m_1\Theta$$

当人在转台上走动一周时，人对转台走过2π，对地走过

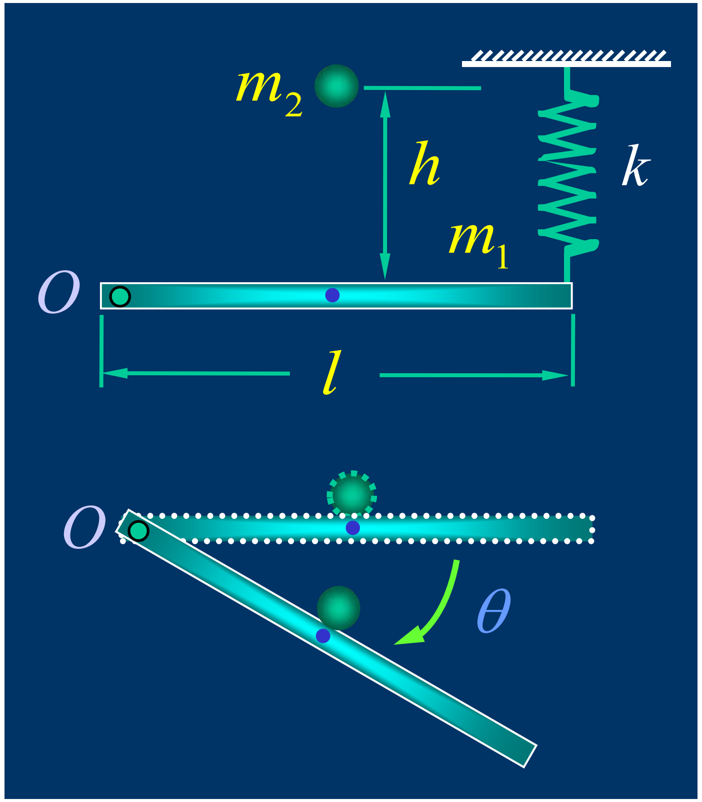
$$\theta=2\pi+\Theta$$

则得

$$\Theta=-\frac{4\pi m_2}{m_1+2m_2}$$

例 如图，一根长为l，质量为m_1的均质细杆,可绕其一端的水平轴O作无摩擦转动。现将另一端悬挂于一劲度系数为k的轻弹簧下端，开始时细杆静止并处于水平状态。有一质量为m_2的小球（$m_2 << m_1$）从距杆h高处落到杆的中点，并粘于杆上和它一起运动。设杆旋转微小角度$\Delta\theta$后，角速度就减小到零。

求 此时弹簧的伸长量。



解 小球未落下时，细杆受重力和弹性力处于平衡状态，所受合力矩为零，设此时弹簧的伸长量为x_0，则有

$$m_1 g \frac{l}{2} = k x_0 l \Longrightarrow x_0 = \frac{m_1 g}{2k} \quad \textbf{(1)}$$

下面分三个物理过程进行计算

(1) 小球自高h处自由下落，到与杆接触的前一瞬间，具有速率为υ，则有

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon^2 = m_2 gh \Longrightarrow \upsilon = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

(2) 小球和细杆发生完全非弹性碰撞过程，由于系统（小球和细杆）受到的合外力矩为零，则系统角动量守恒。设系统绕轴转动的角速度为ω，则有

$$m_2\upsilon\frac{l}{2} = (J_{球} + J_{杆})\omega \qquad (3) \Longleftarrow \begin{cases} J_{球} = m_2\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \\ J_{杆} = \dfrac{1}{3}m_1 l^2 \end{cases}$$

(3) 杆与球碰撞后系统的下降过程，共同以角速度ω转动，具有的转动动能为

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}(J_{球} + J_{杆})\omega^2$$

当转动微小角度$\Delta\boldsymbol{\theta}$ 时，弹簧又伸长了$\Delta\boldsymbol{x}$，且

$$\Delta x = l\Delta\theta \tag{4}$$

根据机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = 0 + \frac{1}{2}k\left(x_0 + \Delta x\right)^2 - \left(m_2 + m_1\right)g\frac{\Delta x}{2} \tag{5}$$

由式(1)、(2)、(3)、(4)、(5)可解得

$$\Delta x = \frac{m_2 g\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{24kh}{(4m_1 + 3m_2)g}}\right)}{2k}$$

总伸长量为 $x_0 + \Delta x = \dfrac{g}{2k}\left[\left(m_1 + m_2\right) + m_2\sqrt{1 + \dfrac{24kh}{(4m_1 + 3m_2)g}}\right]$

应用角动量守恒定律求解刚体力学综合问题的一般思路

- 需要先分清过程再写方程；
- 质点与刚体的碰撞过程满足角动量守恒定律，而不是动量守恒定律；
- 角动量定理和角动量守恒定律只适用于惯性系。

质点的运动规律与刚体的定轴转动规律的比较

质点的运动		刚体的定轴转动	
速度	$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度	$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度	$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角加速度	$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
质量	m	转动惯量	$J=\int r^2\mathrm{d}m$
力	$\vec{F}$	力矩	M
运动规律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$M=J\beta$
动量	$\vec{p}=m\vec{v}$	动量	$\vec{p}=\sum\Delta m_i\vec{v}_i$
角动量	$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$	角动量	$L=J\omega$
动量定理	$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$	角动量定理	$M=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$

质点的运动规律与刚体的定轴转动规律的比较（续）

质点的运动		刚体的定轴转动	
动量守恒	$\sum F_i = 0$时 $\sum m_i\upsilon_i =$ 恒量	角动量守恒	$M = 0$时 $\sum J\omega =$ 恒量
力的功	$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功	$A_{ab} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$
动能	$E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2$	转动动能	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
动能定理	$A = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2$	动能定理	$A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$
重力势能	$E_p = mgh$	重力势能	$E_p = mgh_C$
机械能守恒	$A_{外} + A_{非保内} = 0$时 $E_k + E_p =$ 恒量	机械能守恒	$A_{外} + A_{非保内} = 0$时 $E_k + E_p =$ 恒量

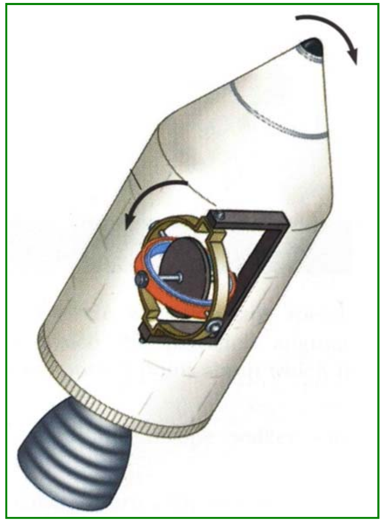
3.4.3 角动量守恒定律在工程技术上的应用

◆ 陀螺仪与导航

- 陀螺仪：能够绕其对称轴高速旋转的厚重的对称刚体。

- 陀螺仪的特点：具有轴对称性和绕对称轴有较大的转动惯量。

- 陀螺仪的定向特性：由于不受外力矩作用，陀螺角动量的大小和方向都保持不变；无论怎样改变框架的方向，都不能使陀螺仪转轴在空间的取向发生变化。



◆ 直升机螺旋桨的设置

- 尾桨的设置：直升机发动后机身要在旋翼旋转相反方向旋转，产生一个向下的角动量。为了不让机身作这样的反向旋转，在机身尾部安装一个尾桨，尾桨的旋转在水平面内产生了一个推力，以平衡单旋翼所产生的机身扭转作用。

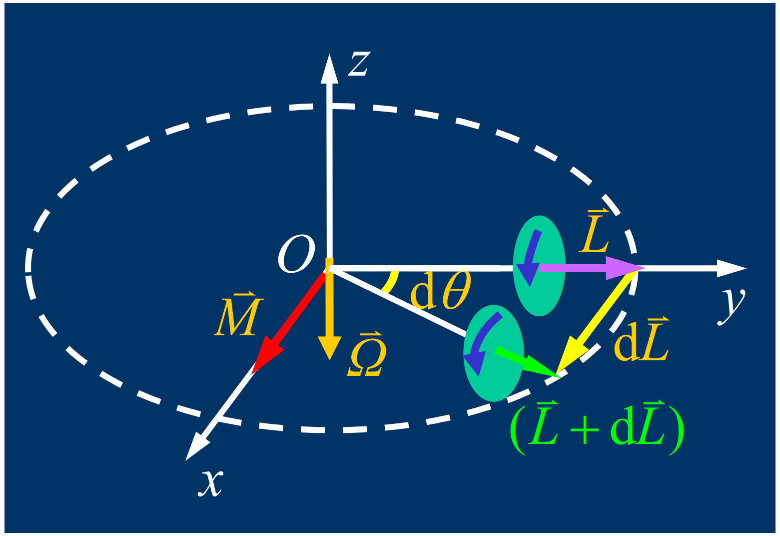
- 对转螺旋桨的设置：双旋翼直升机则无需尾桨，它在直立轴上安装了一对对转螺旋桨，即在同轴心的内外两轴上安装了一对转向相反的螺旋桨。工作时它们转向相反，保持系统的总角动量仍然为零。

3.4.4进动现象

- 陀螺仪受到净力矩的作用时，其在绕其对称轴高速转动的同时，横杆也会在水平面内绕竖直轴缓慢地转动。
- 进动：高速转动物体的自转轴绕另一轴线的旋转运动形式。

◆ 进动效应的理论分析

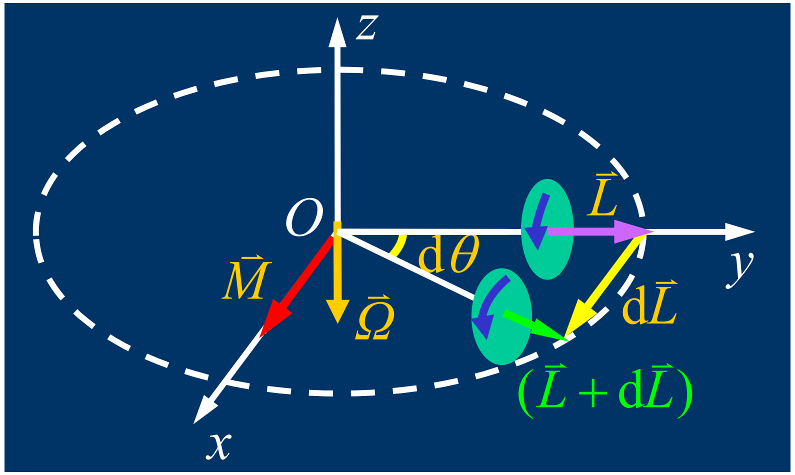
- 陀螺仪所受外力矩***M***与总角动量***L***（近似等于自转角动量）垂直，即 $\vec{M} \perp \vec{L}$ ，其角动量的增量d***L***的方向与***M***方向相同，也即 $d\vec{L} \perp \vec{L}$，则***L***的大小保持不变，只是其方向发生变化。



- 进动规律的定量描述

由角动量定理，有

$$\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$$



角动量增量的大小为

$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = M\mathrm{d}t \qquad \textbf{(1)}$$

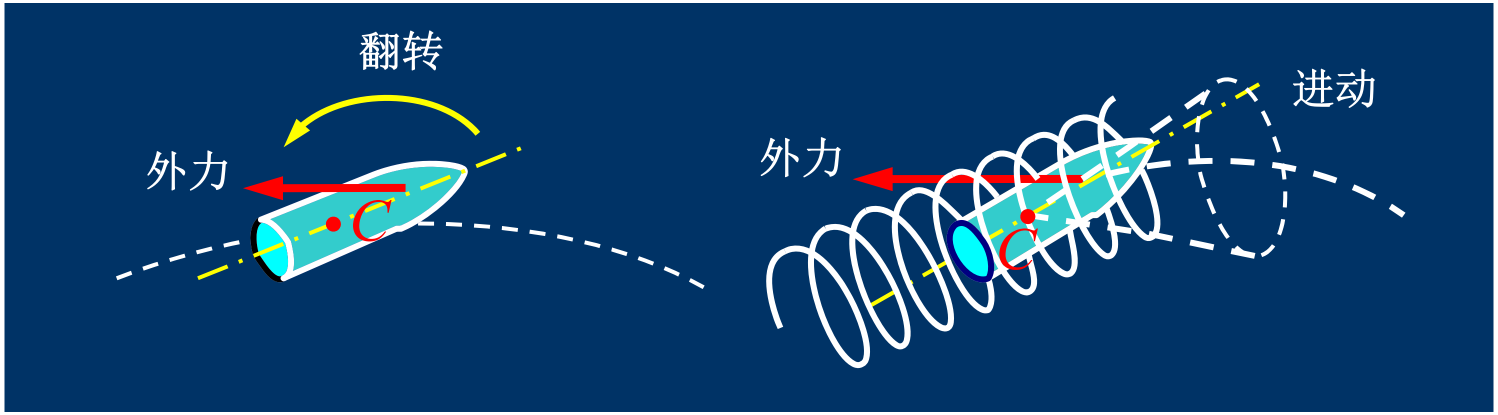
设d*t*时间内与该自转轴相应的角位移为d$\boldsymbol{\theta}$

则 $$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = L\mathrm{d}\theta \qquad \textbf{(2)}$$

比较式(1)和式(2)，得 $$L\mathrm{d}\theta = M\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L}$$

而进动角速度 $$\Omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{M}{L}}$$

◆ 进动特性的技术应用



- 炮弹飞行姿态的控制：炮弹在飞行时，空气阻力对炮弹质心的力矩会使炮弹在空中翻转；若在炮筒内壁上刻出了螺旋线（称之为来复线），当炮弹由于发射药的爆炸所产生的强大推力推出炮筒时，炮弹还同时绕自己的对称轴高速旋转。由于这种自转作用，它在飞行过程中受到的空气阻力将不能使它翻转，而只能使它绕着质心前进的方向进动。

- 进动效应的有害作用：高速旋转的物体，其自转轴方向的变化与进动效应是相伴随的。

- 原子中电子的进动：电子同时参与绕核的运动和它本身的自旋。

刚体力学基础--小结

1. 刚体绕定轴转动运动学描述

(1) 角坐标 θ $\qquad \theta=\theta(t)$

(2) 角速度 ω $\qquad \omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

(3) 角加速度 β $\qquad \beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

(4) 线量和角量的关系

$$s=r\Delta\theta \qquad \upsilon=r\omega \qquad a_\mathrm{t}=r\beta \qquad a_\mathrm{n}=r\omega^2$$

(5) 匀变速定轴转动

$$\omega=\omega_0+\beta t \qquad \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2 \qquad \omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)$$

2. 刚体绕定轴转动的转动惯量------刚体转动惯性的量度

(1) 转动惯量 $J=\sum_i m_i r_i^2$ 或 $J=\int r^2 \mathrm{d}m$

(2) 平行轴定理 $J=J_C+md^2$

3. 刚体绕定轴转动的转动定律 $M=J\beta$

4. 刚体绕定轴转动的功和能

(1) 刚体转动动能 $E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}J\omega^2$

(2) 力矩的功 $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$

(3) 刚体绕定轴转动的动能定理 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$

(4) 刚体的重力势能 $E_p = mgh_C$

(5) 机械能守恒定律

当 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 时， $E = E_k + E_p =$ 常量

5. 刚体绕定轴转动的角动量

(1) 刚体的角动量 $L = J\omega$

(2) 刚体的角动量定理 $M = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega)$

(3) 角动量守恒定律

当 $M = 0$ 时， $J\omega =$ 常量

(4) 刚体进动的角速度公式 $\Omega = \frac{M}{L}$