概率论与数理统计

西北工業大學
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

下 回 停

第一节　一维随机变量及其分布(3)

- 五、连续型随机变量
- 六、典型的连续型随机变量及其分布

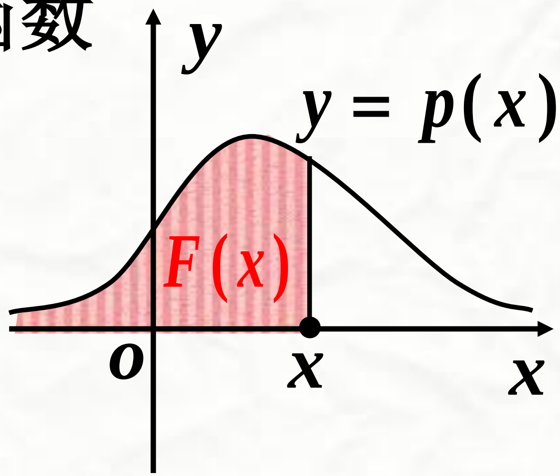
五、连续型随机变量

1.连续型随机变量及其密度函数

定义 对于随机变量X，若存在非负可积函数

$p(x)$ ($x\in\mathrm{R}$), 使得X 的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)\mathrm{d}y$$



则称X为连续型随机变量,且称

$p(x)$ 为密度函数,或概率密度.

注 此定义中涉及三个名词: 连续型随机变量,

密度函数,分布函数.

2. 密度函数的性质

设X为连续型随机变量, $p(x)$ 为X的密度函数, $F(x)$为X的分布函数 ,则

(1) (非负性) $p(x) \geq 0, \quad x \in R;$

(2) (规范性) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \mathrm{d}x = 1;$

(3) $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) \mathrm{d}x;$

(4) $P\{X = c\} = 0.$

(5) 分布函数$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续;

(6) 若 $p(x)$在点x处连续, 则 $F'(x) = p(x).$

证 下面只给出性质4的证明

$$\because \quad \{X = c\} \subseteq \{c - \varepsilon < X \leq c\},\ \varepsilon > 0$$

而 $$0 \leq P\{X = c\} \leq P\{c - \varepsilon < X \leq c\}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} P\{c - \varepsilon < X \leq c\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c-\varepsilon}^{c} p(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

$$\therefore \quad P\{X = c\} = 0.$$

注

1° 性质4说明对于任意可能值c ,连续型随机变量取 c 的概率等于零.

2° 若X为连续型随机变量，则

$$
\begin{aligned}
P\{a < X \le b\} &= P\{a < X < b\} \\
&= P\{a \le X < b\} \\
&= P\{a \le X \le b\}
\end{aligned}
$$

目 上 下 回 停 续

3° $P(A)=0 \;\overset{\not\Longrightarrow}{\Longleftarrow}\; A=\varnothing$

$P(A)=1 \;\overset{\not\Longrightarrow}{\Longleftarrow}\; A=\Omega$

4° 对连续性随机变量,$F(x)$ 一定是连续的，但是 $p(x)$未必连续，在 $p(x)$ 的连续点处，有

$$F'(x)=p(x)$$

? 改变连续型随机变量X的概率密度 $p(x)$ 在个别点 $x = x_0$ 的值是否影响随机变量的概率分布？

答：不影响。因为随机变量的概率分布完全由分布函数来刻画。对于连续型随机变量X, 分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\mathrm{d}y$$

改变 $p(x)$ 在个别点 $x = x_0$ 的值不影响随分布函数 $F(x)$的取值。

目 上 下 回 停 续

例如，若X，Y的概率密度分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a< x< b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

可以认为它们具有相同的概率分布.

即$X\sim U(a,b)$.

目 上 下 回 停 续

例1

设随机变量 X 具有概率密度

$$p(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k;

(2) 求 X 的分布函数;

(3) 求 $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x=1$,

得 $$\int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{3} kx\,\mathrm{d}x+\int_{3}^{4}\left(2-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{4}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x=1,$$

解之得 $k=\dfrac{1}{6}$.

由 $k=\dfrac{1}{6}$ 知 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{6}, & 0 \le x < 3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3 \le x \le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

(2) 由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,\mathrm{d}x$ 得

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{6}, & 0 \le x < 3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3 \le x \le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \int_{0}^{x} \dfrac{x}{6}\,\mathrm{d}x, & 0 \le x < 3, \\ \int_{0}^{3} \dfrac{x}{6}\,\mathrm{d}x+\int_{3}^{x}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x, & 3 \le x < 4, \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$$

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

(3) $$P\{1<X\le \frac{7}{2}\}=F(\frac{7}{2})-F(1)=\frac{41}{48}.$$

$$=\int_1^{\frac{7}{2}}p(x)dx=\int_1^3\frac{x}{6}dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(2-\frac{x}{2})dx$$

六、典型的连续型随机变量的分布

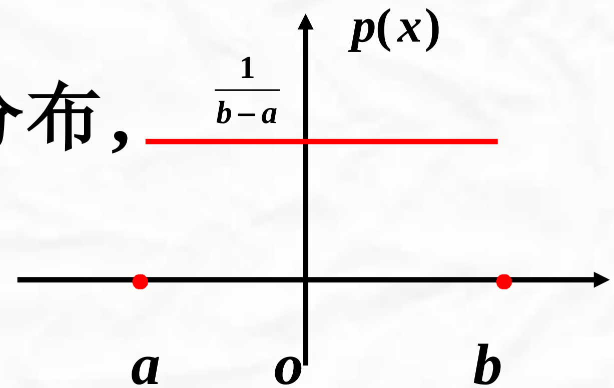
1.* 均匀分布（规则分布 ）Uniform distribution

(1) 定义 设连续型随机变量 X 具有概率密度:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称 X在区间$[a,b]$上服从均匀分布,

记为 $X\sim U[a,b]$.

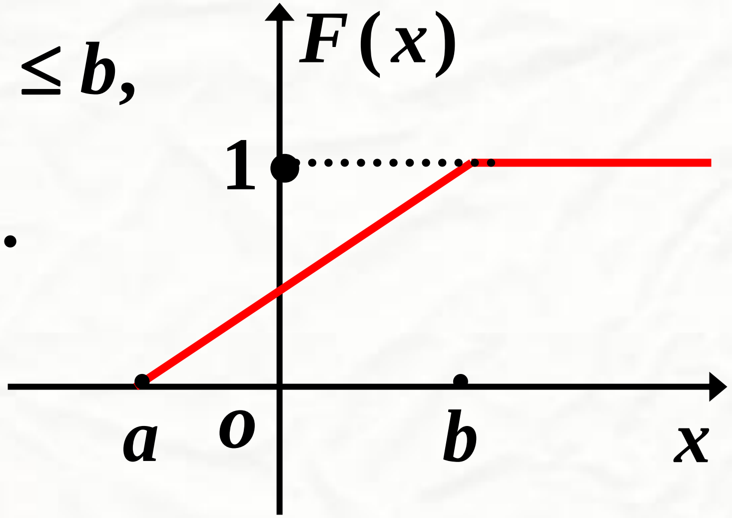


概率密度

函数图形

分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$



(2) 均匀分布的性质

如果$X\sim U[a,b]$,则

1° $P\{X<a\}=P\{X>b\}=0;$

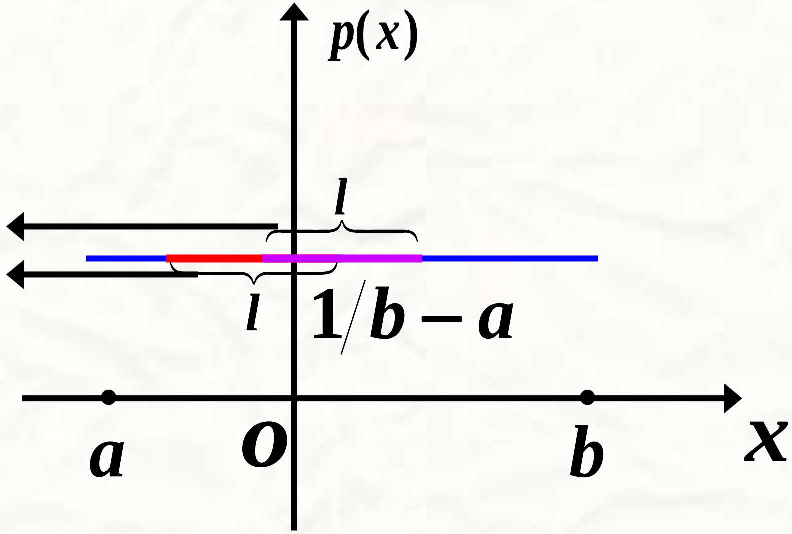
2° 当$a\le c<d\le b$时，有$P\{c\le X<d\}=\dfrac{d-c}{b-a}.$

(3) 均匀分布的意义

背景：几何概型

在区间$[a,b]$上服从均匀分布的随机变量X，落在区间$[a,b]$中任意等长度的子区间内的可能性是相同的.

$$p=\frac{l}{b-a}$$



目 上 下 回 停 续

例2 设随机变量 X 在 $[2, 5]$上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测 ,试求至少有两次观测值大于3 的概率.

解 X 的分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\le x\le 5,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

设 A 表示 "对 X 的观测值大于 3", 即 $A=\{X>3\}$.

$$P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

目 上 下 例 停 续

由于 $P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5 \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,

设Y表示对 X进行3次独立观测中, 观测值大于3的次数,

则 $Y \sim B(3, \frac{2}{3})$.

因而有

$$P\{Y \geq 2\} = C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right) + C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{20}{27}.$$

2. *指数分布 Exponential distribution

定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为常数,则称 X 服从参数为 λ 的指数分布,记作 $X\sim Exp(\lambda)$.

相应的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

指数分布也是常用分布之一,常用它来描述各种“寿命”问题,如电子元器件的寿命,生物的寿命.

指数分布应用广泛，在日本的工业标准和美国军用标准中，半导体器件的抽验方案都是采用指数分布。此外，指数分布还用来描述大型复杂系统（如计算机）的平均故障间隔时间MTBF的失效分布。

目 上 下 回 停 续

指数分布具有“无记忆 性”的特点.即对于任意的$s>0,t>0$,若$X\sim Exp(\lambda)$,则

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>s+t\}/P\{X>s\}$$

$$=\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}/\mathrm{e}^{-\lambda s}=\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

因此

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$$

正是由于指数分布具有缺乏“记忆”的特性．因而限制了它在机械可靠性研究中的应用，所谓缺乏“记忆”，是指某种产品或零件经过一段时间t_0的工作后，仍然如同新的产品一样，不影响以后的工作寿命值，或者说，经过一段时间t_0的工作之后，该产品的寿命分布与原来还未工作时的寿命分布相同，显然，指数分布的这种特性，与机械零件的疲劳、磨损、腐蚀、蠕变等损伤过程的实际情况是完全矛盾的，它违背了产品损伤累积和老化这一过程。所以，指数分布不能作为机械零件功能参数的分布形式。

例6 设某类日光灯管的使用寿命 X 服从参数为 $\lambda=1/2000$的指数分布(单位:小时)

(1)任取一只这种灯管, 求能正常使用1000小时以上的概率.

(2)有一只这种灯管已经正常使用了1000 小时以上,求还能使用1000小时以上的概率.

解 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2000}x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

目 上 下 例 停 续

$$(1)\ P\{X > 1000\} = 1 - P\{X \le 1000\}$$

$$= 1 - F(1000)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2000}x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$(2)\ P\{X > 2000 \mid X > 1000\} = \frac{P\{X > 2000, X > 1000\}}{P\{X > 1000\}}$$

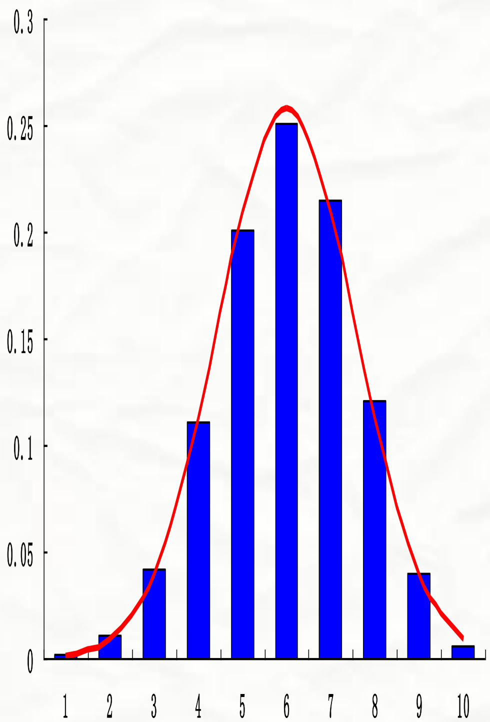
$$= \frac{P\{X > 2000\}}{P\{X > 1000\}} = \frac{1 - P\{X \le 2000\}}{1 - P\{X \le 1000\}}$$

$$= \frac{1 - F(2000)}{1 - F(1000)} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

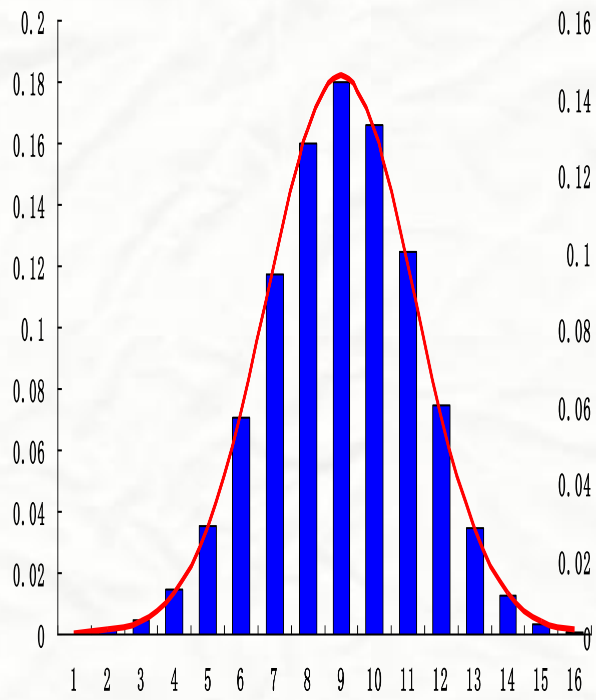
3.*****正态分布(高斯分布) Normal distribution

(0) 问题的引入

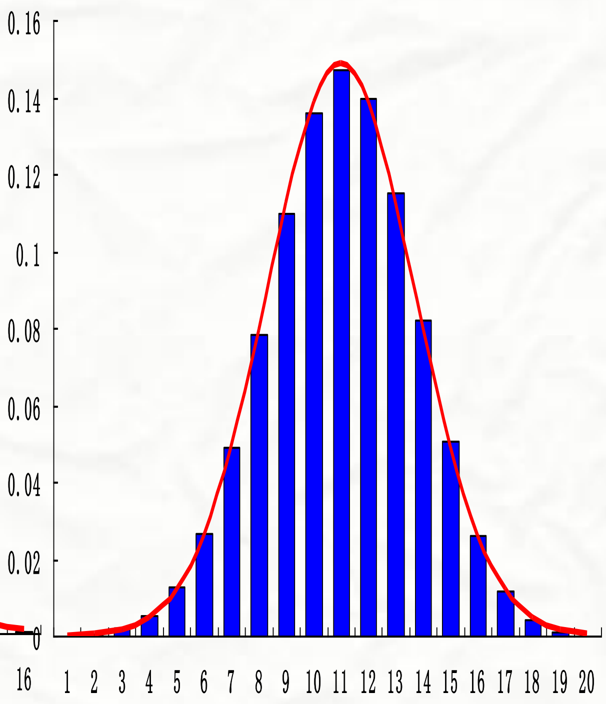
二项分布 $P = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,\cdots,n.$



n=10, *p*=0.6



n=20, *p*=0.6



n=30, *p*=0.6

随着*n*的增加，近似程度越来越高。而且这条曲线具有中间高两边低的特点

（1）正态分布的历史

1733年，德国数学家和天文学家棣莫佛(De Moivre)在推导二项分布的极限分布时首次提出正态分布。后来拉普拉斯（Laplace）将这个结论进一步完善，得到著名的**棣莫佛–拉普拉斯中心极限定理。**

棣莫佛(De Moivre)　　拉普拉斯（Laplace）

参看http://songshuhui.net/archives/76501

(1) 正态分布的历史

1809 年， 德国数学家高斯（Gauss）率先将正态分布应用于天文学研究。高斯这项工作对后世的影响极大，所以正态分布也被称为高斯分布。


Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

参看http://songshuhui.net/archives/76501

(2)正态分布(高斯分布)(Normal distribution)定义

若r.v X的概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

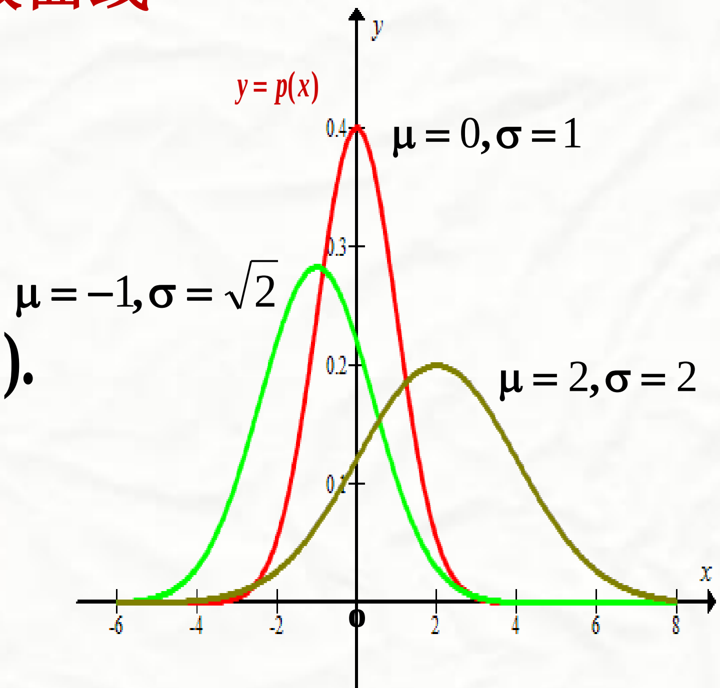
则称X服从正态分布，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

其中μ与$\sigma(\sigma>0)$为常数,

μ是正态分布的均值,

σ是其标准差，σ^2是其方差.

3种不同的正态概率密度函数曲线



曲线呈钟形！参数不同，曲线的位置和形状就不同！

(3) 正态分布的性质

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

1) 曲线关于 $x=\mu$ 对称;

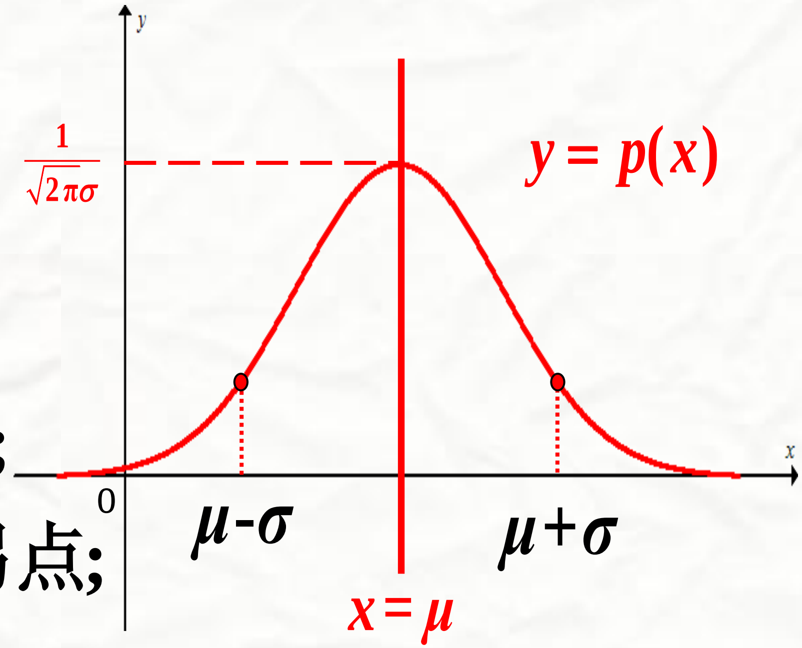
2) 当$x=\mu$时, $p(x)$取得

最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$;

3) 当 $x\to\pm\infty$ 时, $p(x)\to 0$,

即曲线以 x 轴为渐近线;

4) 曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点;



目 上 下 回 停 续

（3）正态分布的性质

5) 当固定 σ，改变 μ 的大小时，$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$，

$p(x)$ 的图形形状不变,只是沿着 x 轴作平移，

μ 称为位置参数；

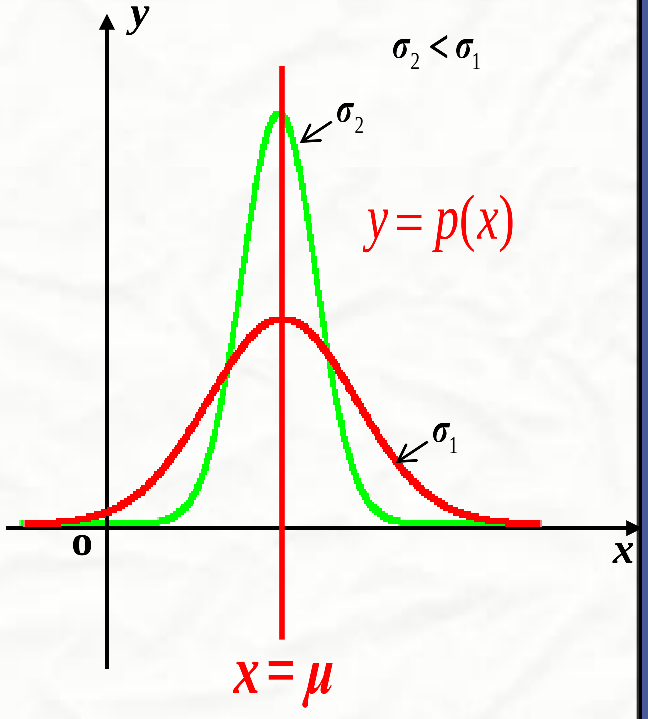
6) 当固定 μ，改变 σ 的大小时，

$p(x)$的图形对称轴不变，而形状在改变.

σ 越大，峰值越小，图形越平缓，

σ 越小，峰值越大，图形越陡峭，

σ 称为形状参数.



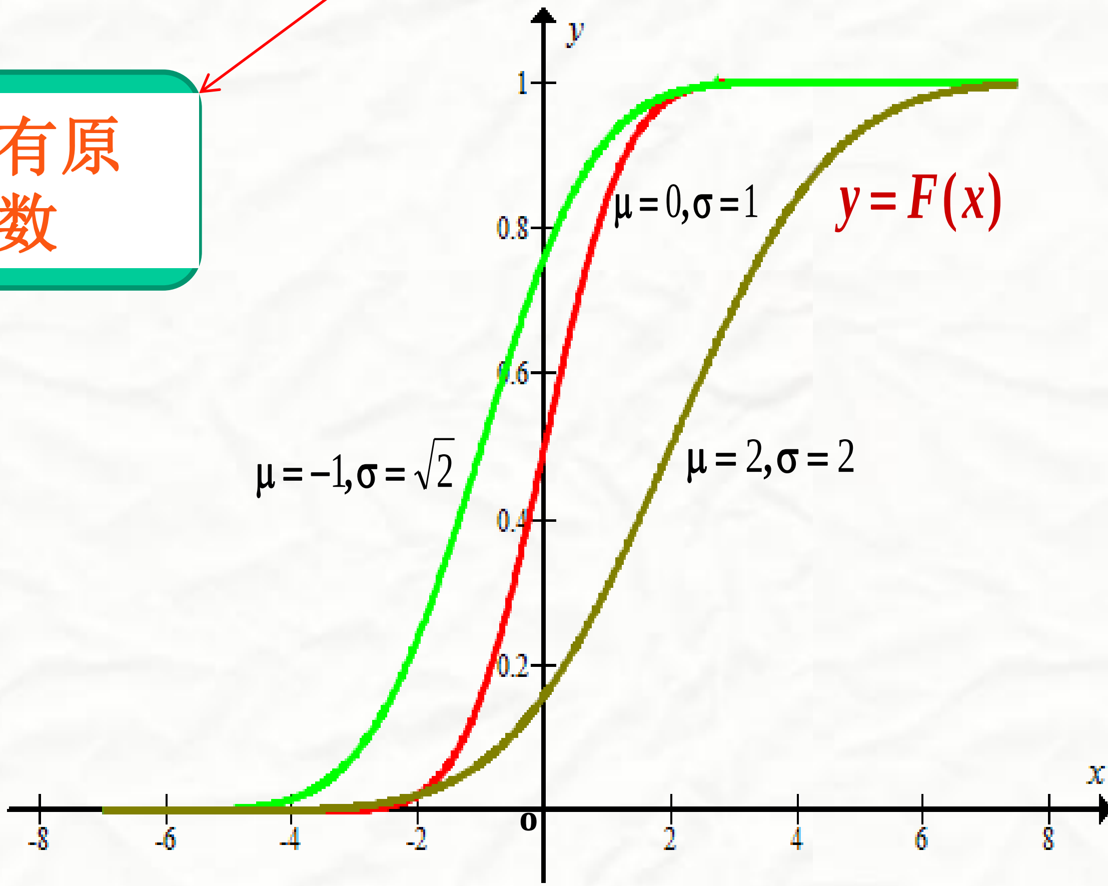
目 上 下 回 停 续

(4) 正态分布的分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<+\infty$$

? 分布函数有无解析表达式

没有原函数



分布函数没有解析表达式，这是唯一的小遗憾！

(5)标准正态分布（standard normal distribution）

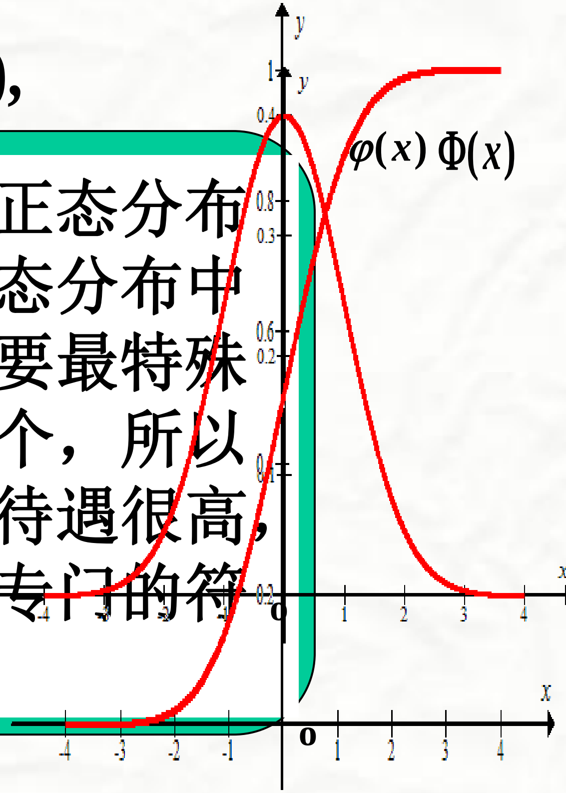
当正态分布$N(\mu,\sigma^2)$中$\mu=0$，$\sigma=1$时，称X服从标准正态分布，

记为$X \sim N(0,1)$,相应的密度函数记为 $\varphi(x)$,

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty$$

相应的分布函数记为 $\Phi(x)$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<\infty$$



标准正态分布是正态分布中最重要最特殊的一个，所以它的待遇很高，配有专门的符号！

标准正态分布函数也无解析表达式。

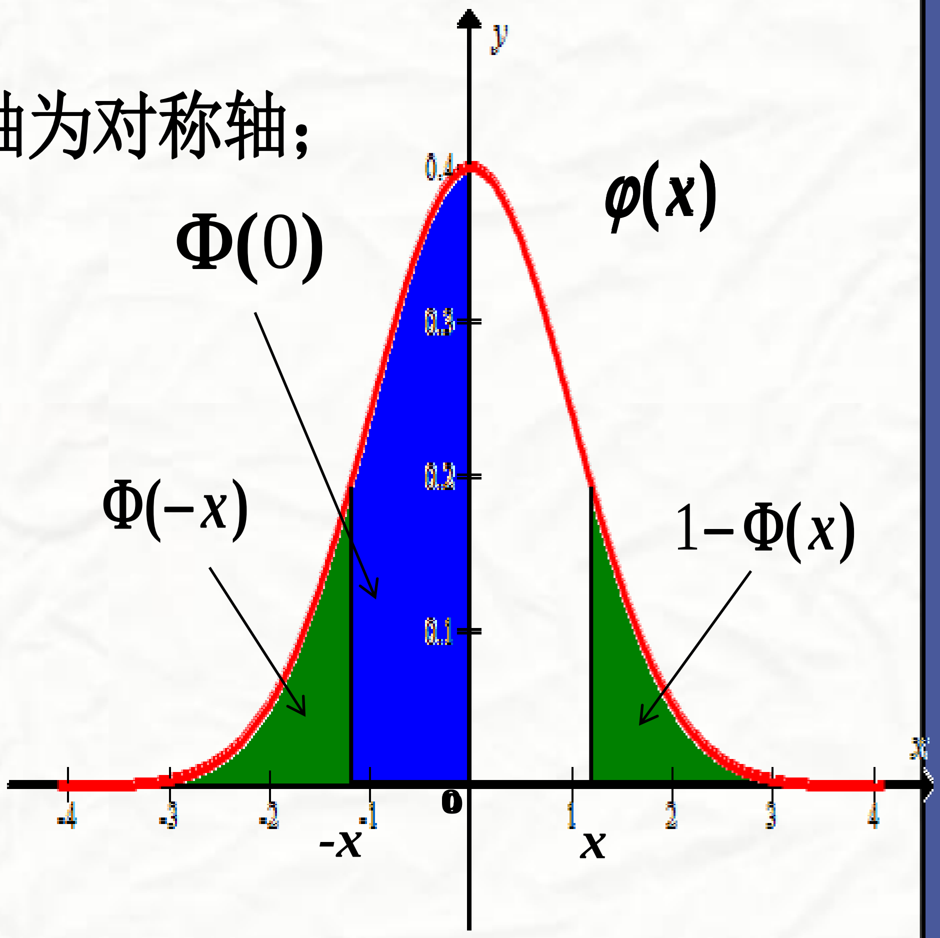
目 上 下 回 停 续

标准正态分布的特有性质:

1) $\varphi(x)$为偶函数, 也即以纵轴为对称轴;

2) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$,

$\Phi(0)=0.5$.



目 上 下 回 停 续

3) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=1$

可得 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}.$

目 上 下 回 停 续

(6) 标准正态随机变量落在某个区间的概率计算

由于标准正态分布函数没有解析表达式，如何计算标准正态随机变量落在某个区间的概率

例1 若 $X \sim N(0,1)$，求 $P\{1 < X \le 2\}$？

解

$$P\{1 < X \le 2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= \Phi(2) - \Phi(1)$$

经查标准正态分布表，

知 $\Phi(2) \approx 0.9773$，$\Phi(1) \approx 0.8413$，则

$$P\{1 < X \le 2\} \approx 0.9773 - 0.8413 = 0.136.$$

只能借助计算机近似得到！为此，前人利用计算机事先已经制定好标准正态随机变量分布表，我们用时只需查表即得。

进一步，如何计算一般正态随机变量落在某个区间的概率

例2 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则

$$P\{a < X \leq b\} = ?$$

一般正态分布与标准正态分布的关系

重要结论 如果 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，令 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$，那么 $Y \sim N(0,1)$.

证明：先求 Y 的分布函数，$\forall y \in R$,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\}$$

$$= P\{X \le \sigma y + \mu\} = \int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = t \quad \Downarrow \quad x = \mu + \sigma t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

正是标准正态分布函数

所以 $Y \sim N(0,1)$.

对于任何一般正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，都可通过一个简单线性变换转化成标准正态分布 $N(0, 1)$。此变换称为标准变换！

目 上 下 回 停 续

例2 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$P\{a < X \le b\} = ?$

解 由$Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$可得

$$P\{a < X \le b\} = P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{a-\mu}{\sigma} < Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

本例说明随机变量X服从一般正态分布时，如果要计算关于它的概率问题，则可先转化为标准正态分布再进行计算。

例3 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,求$P\{\mu-3\sigma < X \le \mu+3\sigma\}$.

解 由$Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$可得

$$P\{\mu-3\sigma < X \le \mu+3\sigma\} = P\{-3 < \frac{X-\mu}{\sigma} \le 3\}$$

$$= P\{-3 < Y \le 3\} = \Phi(3)-\Phi(-3)$$

$\Phi(3)=0.99865$,则

$$P\{\mu-3\sigma < X \le \mu+3\sigma\} = 2\Phi(3)-1$$

$$= 2\times 0.99865 - 1 = 0.9973$$

由本例可以看出，如果$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则X的值落在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$之外的概率为0.0027，这就是质量管理上所谓的 6σ原理.

(7) 正态分布的重要性

正态分布是概率统计中最重要的一种概率分布。3个主要原因:

- **应用的广泛性** 统计中的许多统计学方法, 如χ^2检验，t检验，方差分析， 线性回归等, 都会对数据的正态性有要求;
- **完美性** 正态分布的密度函数图形为光滑钟形曲线, 再加上具有对称性， 使得其很适合当作不少总体的机率模式。当然也有很多其它钟形且对称的分布， 但都不像正态分布，在分析上如此容易驾驭;
- **奇妙性** 中心极限定理是概率统计中最重要的定理（没有之一）。由于中心极限定理，使得在很多时候, 正态分布可当做不少大样本的近似分布。

参看http://health.sohu.com/20160128/n436266142.shtml

(8) 正态分布的重要性和应用

现今德国10马克的钞票上印有高斯(Gauss)头像和正态分布概率密度曲线。这也传达一种观点：在高斯的一切科学贡献中，其对人类文明影响最大者，就是这一项。

参看
http://songshuhui.net/archives/76501

第一节的知识框架

随机变量*r.v.* → 分布函数F(*x*)

⇔ 分布律　　离散型*r.v.*

⇔ 分布密度函数　　连续型*r.v.*

掌握F(x)的4条性质

在不考虑密度函数的不连续点时

掌握密度函数的6条性质

内容小结

1. 连续型随机变量 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t$

$F(x)$为分布函数，$p(x)$为概率密度函数.

2. 常见连续型随机变量的分布

$$\begin{cases}\text{均匀分布}\\ \text{正态分布(高斯分布)}\\ \text{指数分布}\end{cases}$$


再见

备用题

例1-1 设连续型随机变量X的分布函数为:

$$F(x) = A + B\arctan x \quad -\infty < x < \infty$$

求(1)常系数A及B;

(2)随机变量X落在$(-1,1)$内的概率;

(3)随机变量X的分布密度.

解 (1)$\because F(+\infty) = A + \frac{\pi}{2}B = 1$

$$F(-\infty) = A - \frac{\pi}{2}B = 0$$

解之得 $A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi}$

$$(2)\ P\{-1 < X < 1\} = F(1-0) - F(-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$(3)\ p(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+x^2}$$

例1-2 设

$$p_1(x)=\begin{cases}\frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\quad (a>0)$$

$$p_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos x, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$p_3(x)=\begin{cases}\cos x, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)上面 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$是否为随机变量X的密度函数.

(2) 若是X的密度函数,求出X的分布函数.

(3)求$P\{0 \le X \le 1\}$.

解 (1)因为在$x \in (-\infty,+\infty)$时, $p_1(x) \ge 0$,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{a}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

所以 $p_1(x)$为X的密度函数.

因为当$x \in (\frac{\pi}{2},\pi]$时, $p_2(x) = \frac{1}{2}\cos x < 0$,所以 $p_2(x)$不

是X的密度函数.又

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_3(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0\mathrm{d}x$$

$$= \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 > 1$$

所以 $p_3(x)$不是X的密度函数.

(2)由(1)知 $p_1(x)$为X的分布密度,其分布函数为

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p_1(t)\mathrm{d}t$,因为

$x < 0$时, $p_1(x) = 0$,所以$F(x) = 0$

$x \geq 0$时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\frac{t}{a}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\Big|_{0}^{x}=1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$$

综上所述

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}, & x\geq 0.\end{cases}$$

(3)求$P\{0\leq X\leq 1\}$时,可以使用分布函数$F(x)$,也可以使用密度函数$p_1(x)$.则

$$P\{0\leq X\leq 1\}=F(1)-F(0)=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}}-0=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}}$$

或

$$P\{0\leq X\leq 1\}=\int_{0}^{1}\frac{x}{a}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}\Big|_{0}^{1}=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2a}}$$

例1-3 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

试确定常数 k,并求 $P\{X>0.1\}$.

解 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x = 1$

所以 $k=3$.

$$P\{X>0.1\}=\int_{0.1}^{+\infty} 3\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x = 0.7408$$

目 上 下 例 停 续

例 2-1 设 k 在(0,5)上服从均匀分布，求方程

$$4x^2 + 4kx + k + 2 = 0$$

有实根的概率.

解 当 $16k^2 - 16(k+2) \geq 0$ 时,

即 $k^2 - (k+2) = (k-2)(k+1) \geq 0$ 时,

亦即 $k \geq 2$ 或 $k \leq -1$ 时,有实根,

则有实根的概率为

$$p = \int_2^5 \frac{1}{5} \mathrm{d}x = \frac{3}{5}.$$

例 5-1 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩(百分制), 服从正态分布，平均成绩为 72分，96分以上占考生总数的2.3%, 试求考生的外语成绩在 60分至 84分之间的概率.

解 依题意，考生外语成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

其中 $\mu = 72$, 且

$$P\{X > 96\} = 0.023$$

于是 $P\{X \le 96\} = 1 - P\{X > 96\}$

$$= 1 - 0.023 = 0.977$$

又 $\because \quad P\{X \le 96\} = \Phi(\frac{96-\mu}{\sigma})$

$$= \Phi(\frac{96-72}{\sigma}) = \Phi(\frac{24}{\sigma})$$

$\therefore \quad \Phi(\frac{24}{\sigma}) = 0.977$

查表，知 $\Phi(2) = 0.977$

由 $\Phi(x)$ 的单调增加性，得 $\frac{24}{\sigma} = 2$

$\therefore \quad \sigma = 12$

因而 $\quad X \sim N(72, 12^2)$

故 $P\{60 \le X \le 84\}$

$$= \Phi\left(\frac{84-72}{12}\right) - \Phi\left(\frac{60-72}{12}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \quad = 2\Phi(1) - 1$$

查表，得

$$\Phi(1) = 0.841$$

$$\therefore \quad P\{60 \le X \le 84\} = 2 \times 0.841 - 1 = 0.682$$

例5-2 设X的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\mathrm{e}^{-(x^2+4x-4)/6},\quad -\infty<x<+\infty.$$

求:(1)$P\{1<x<3\}$;

(2)使$\int_C^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{C}p(x)\mathrm{d}x$的$C$.

解 因为$\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\mathrm{e}^{(-x^2+4x-4)/6}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-(x-2)^2/(2\times 3)}$,

所以，$X\sim N(2,3)$.从而

$$P\{1<X<3\}=\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{3}}\right)-\Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{3}}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-1$$

目 上 下 回 停 续

$= 2\Phi(0.5773) - 1 = 0.438$(查表).

（2）要使$\int_C^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{C} p(x)\mathrm{d}x$,则$C$为概率分布的对称点.由正态分布的性态知$C = \mu = 2$为所求.

例5-3 公共汽车车门的高度是按成年男子与门楣碰头的概率不大于0.01设计的,设成年男子身高(单位：厘米）$X \sim N(170, 6^2)$,试确定车门应设计的最低高度h.

解 设车门高度为h，则应有$P\{X > h\} \le 0.01.$

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \le h\} = 1 - \Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) \le 0.01,$$

即$\Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) \ge 0.99$,查表知$\frac{h-170}{6} \ge 2.33$,于是

$$h = 170 + 2.33 \times 6 \approx 184.$$

所以,车门最低高度应为184厘米.

例5-4　从甲地飞往乙地的航班,每天上午10:10起飞,飞行时间X服从均值是4h,标准差是20min的正态分布.

(1) 该机在下午2:30以后到达乙地的概率是多少?

(2) 该机在下午2:20以前到达乙地的概率是多少?

(3) 该机在下午1:50至2:30之间到达乙地的概率是多少?

解　设时间单位为min,则$X \sim N(240, 20^2)$.

(1) 所求概率为

$$P(X \geq 260) = 1 - \Phi((260-240)/20) = 1 - \Phi(1)$$

$$= 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

(2) 所求概率为

$$P(X \leq 250) = \Phi((250-240)/20) = \Phi(0.5) = 0.6915.$$

(3) 所求概率为

$$P(220 \leq X \leq 260) = 2\Phi(1) - 1$$

$$= 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826.$$

例6-1 某仪器装有3支独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位:h)都服从同一指数分布,密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求在仪器使用的最初200h内,至少有一个电子元件损坏的概率α.

解 设$X_i(i=1,2,3)$表示第i支元件的使用寿命.

$A_i(i=1,2,3)$表示事件:{在仪器使用最初200h内第i支电子元件损坏}

目 上 下 回 停 续

$\overline{A_i}\,(i=1,2,3)$表示事件:{在仪器使用最初200$h$内第$i$支电子元件未损坏}

$$P(A_i)=P\{X_i\le 200\}=\int_0^{200}\frac{1}{600}\mathrm{e}^{-\frac{1}{600}}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$$

$$\alpha=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-[1-(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}})]^3=1-\mathrm{e}^{-1}$$