计算方法

交作业地点：教西D204（放入欧阳洁作业柜）
答疑时间：　第3-10周 周二、周四
16:00-17:40
答疑地点：　教西D204
作业集售价：每套（A、B册）10元
购买时间：　第3周 周二、周三 全天
购买地点：　理学院 A座215房间

QQ群号：826848520

平时成绩 20分

6次作业：每次按时交且认真得2分；
按时交但不认真得1分；不按时交得0分。

16次出勤：每次两节课自始至终到课得0.5分；
任意时段缺席得0分。

◆教材

聂玉峰、王振海等

<u>《数值方法简明教程》</u>，高等教育出版社，2011

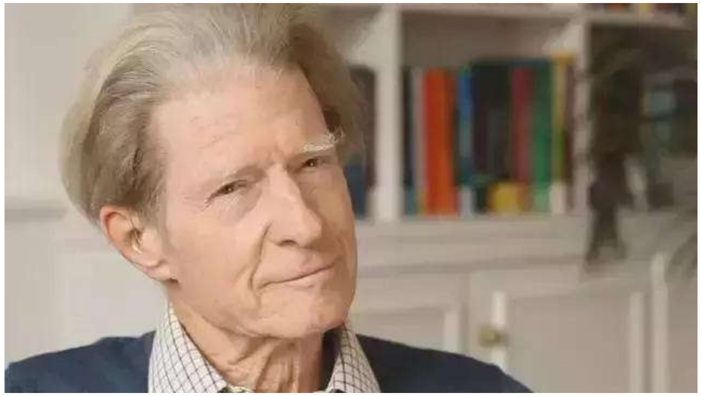
◆作业

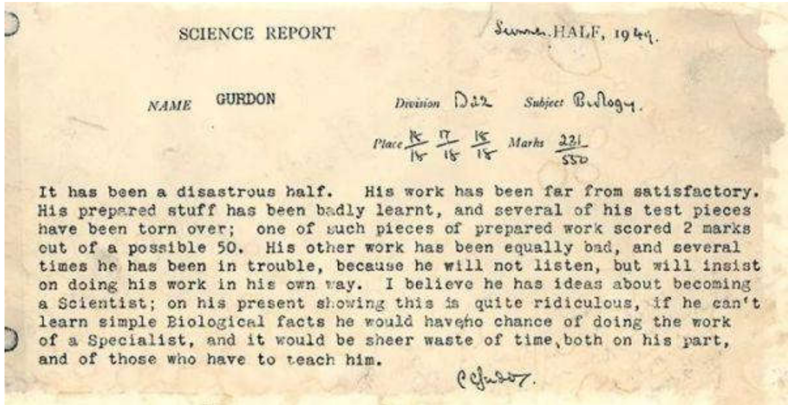
<u>计算方法作业集</u>（A、B）

◆参考书

- 封建湖，车刚明
  <u>计算方法典型题分析解集</u>（第三版）
  西北工业大学出版社，2001
- 封建湖，聂玉峰，王振海
  <u>数值分析导教导学导考</u>（第二版）
  西北工业大学出版社，2006
- 车刚明，聂玉峰，封建湖，欧阳洁
  <u>数值分析典型题解析及自测试题</u>（第二版）
  西北工业大学出版社，2003

2012年诺贝尔委员会将生理学医学奖颁给了格登。格登接受记者采访时，爱让人关注他办公室里唯一装裱起来的东西：一张成绩单。





SCIENCE REPORT Summer HALF, 1949.

NAME GURDON Division D22 Subject Biology.

Place 15/15 17/18 15/18 Marks 221/550

It has been a disastrous half. His work has been far from satisfactory. His prepared stuff has been badly learnt, and several of his test pieces have been torn over; one of such pieces of prepared work scored 2 marks out of a possible 50. His other work has been equally bad, and several times he has been in trouble, because he will not listen, but will insist on doing his work in his own way. I believe he has ideas about becoming a Scientist; on his present showing this is quite ridiculous, if he can't learn simple Biological facts he would have no chance of doing the work of a Specialist, and it would be sheer waste of time, both on his part, and of those who have to teach him.

C Gaddum.

授课老师评价格登“非常愚蠢”，“让你学习生物简直是浪费时间”。

通过青蛙、蟾蜍的研究，首次证实了已分化的细胞可通过细胞核移植技术，重新转化为具有多功能的干细胞。

对理想的无止境追求与对未知世界的探索精神，是学习的动力。

第一章 绪论

§1 引言

§2 误差的度量与传播

§3 选用算法时应遵循的原则

§1 引 言

科学与工程领域中运用计算机求解问题的一般过程：

1 实际问题的提出

2 建立数学模型

3 设计可靠、高效的数值方法

4 程序设计

5 上机实践计算结果

6 数据处理及结果分析

学习算法的意义

科学计算（数值模拟）已经被公认为与理论分析、实验分析并列的科学研究三大基本手段之一。

计算方法课程的研究对象具有广泛的适用性，著名流行软件如Maple、Matlab、Mathematica等已将其绝大多数内容设计成函数，简单调用之后便可以得到运行结果。

但由于实际问题的具体特征、复杂性, 以及算法自身的适用范围决定了应用中必须选择、设计适合于自己特定问题的算法，因而掌握数值方法的思想和内容至关重要。

鉴于实际问题的复杂性，通常将其具体地分解为一系列子问题进行研究，本课程主要涉及如下几个方面问题的求解算法：

- 非线性方程求根
- 线性代数方程组求解
- 函数插值
- 曲线拟合
- 数值积分与数值微分
- 常微分方程初值问题的数值解法
- 矩阵特征值与特征向量计算

§2 误差的度量与传播

一 误差的来源与分类

模型误差：数学模型与实际问题的误差

观测误差：观测结果与实际问题的误差

截断误差：数学模型的理论解与数值计算问题的精确解之间的误差

舍入误差：对超过某有限位数的数据进行舍入所产生的误差

例如

模型 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$ 数学模型的理论解

算法 $e_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ 数值算法的精确解

e_n-e 为截断误差（方法误差）

利用计算机计算e的近似值e_n时，实际上得不到e_n的精确值，只能得到e_n的近似值e^*；这样e^*作为e的近似值包含有舍入误差和截断误差两部分：

$$e^*-e=(e_n-e)+(e^*-e_n)$$

二 绝对误差、相对误差、有效数字

1. 绝对误差与绝对误差限

定义 设x^*是准确值x的一个近似，称 $e(x^*)=x^*-x$ 为x^*近似x的绝对误差，简称为误差。

如：取π=3.1415926……的近似值π^*=3.142，有

$$e(\pi^*)=\pi^*-\pi=0.000407346\cdots$$

如果存在正数$\varepsilon=\varepsilon(x^*)$，使得$\left|e(x^*)\right|=\left|x^*-x\right|\le\varepsilon$ 则称ε为x^*近似x的一个绝对误差限，简称误差限。

实际计算中所要求的绝对误差限，是指一个尽可能小的绝对误差限。

绝对误差限一般表示为 $\frac{1}{2}\times10^{-k}$，这里k为整数。

$$\left|e(\pi^*)\right|=\left|\pi^*-\pi\right|=\left|0.000407\cdots\right|<0.0005=\frac{1}{2}\times10^{-3}=\varepsilon(\pi^*)$$

2. 相对误差与相对误差限

真空中的光速为2.99792458×10⁸米/秒≈ 3×10⁸米/秒，男子110米跨栏速度约为13秒(刘翔纪录12.87秒)，若光速测量的绝对误差限为10米/秒，跨栏速度测量的绝对误差限为1米/秒，跨栏速度的测量精度是否更高？

$$\left|\frac{e(\text{光速}^*)}{\text{光速}^*}\right| \le \frac{10}{3\times10^8} \text{ 比 } \left|\frac{e(\text{跨栏速度}^*)}{\text{跨栏速度}^*}\right| \le \frac{1}{(110/13)} = \frac{13}{110}\text{小得多}$$

绝对误差限不能刻画对**不同真值**近似程度的好坏。

定义 设x^*是准确值 $x\ (\neq 0)$ 的一个近似值，称

$$e_r(x^*) = \frac{e(x^*)}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

为x^*近似x的相对误差。

称数值 $\left|e_r(x^*)\right|$ 的上界为**相对误差限**，记为 ε_r，

当要求计算相对误差限，是指估计一个尽可能小的相对误差限。

由 $\left|e_r(x^*)\right| = \left|\dfrac{e(x^*)}{x^*}\right| \le \dfrac{\varepsilon}{\left|x^*\right|}$ 得**相对误差限** $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\left|x^*\right|}$

相对误差限一般表示为

$$0.x_1x_2\cdots x_k$$

或

$$x_1x_2\cdots x_k.x_{k+1}\cdots x_m\%$$

相对误差及相对误差限是无量纲的，但绝对误差以及绝对误差限是有量纲的。

3. 有效数字与有效数

规定近似数的表示法，使得用它表示的近似数可直接指示误差界大小。

定义 设x的近似值x^*有如下标准形式

$$x^* = \pm 10^m \times 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots a_p$$

其中m为整数，$\{a_i\} \subset \{0,1,2,\cdots,9\}$ 且 $a_1 \neq 0$, $p \geq n$

如果n是满足 $\left|x^* - x\right| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$ 的最大正整数,

则称x^*为x的具有n位有效数字的近似数。

当$n=p$时，则称x^*为有效数（x^*准确到末位）。

有效数字增加，绝对误差限减少。

例：$x=\pi$, $x_1^*=3.141$, $x_2^*=3.142$，求其有效数字。

解：$x_1^*=10^1\times 0.3141, x_2^*=10^1\times 0.3142$, 显然均有$m=1$。

$$\left|x_1^*-x\right|=0.00059\cdots<0.005=\frac{1}{2}\times 10^{1-3}$$

x_1^*有3位有效数字(非有效数)。

$$\left|x_2^*-x\right|=0.00040\cdots<0.0005=\frac{1}{2}\times 10^{1-4}$$

x_2^*有4位有效数字(有效数)。

对真值进行四舍五入得到的是有效数。

对某有效数，末位数位的半个单位是其绝对误差限。

可见有效数本身就体现了误差界。

例：设 $x_1^* = 45800$ $x_2^* = 458 \times 10^2$ 是按四舍五入原则得到，求其有效数字。

解：$x_1^* = 10^5 \times 0.45800, x_2^* = 10^5 \times 0.458$，显然均有$m$=5。

$x_1 = 45800.k_1 \cdots, k_1 \le 4$ 或 $x_1 = 45799.k_2 \cdots, k_2 \ge 5$

故 $\left|x_1^* - x_1\right| \le 0.5 = \frac{1}{2} \times 10^0 = \frac{1}{2} \times 10^{5-5}$

即 x_1^*有5位有效数字（有效数）。

$x_2 = 458.k_1 \cdots \times 10^2, k_1 \le 4$ 或 $x_2 = 457.k_2 \cdots \times 10^2, k_2 \ge 5$

故$\left|x_2^* - x_2\right| \le 0.5 \times 10^2 = \frac{1}{2} \times 10^2 = \frac{1}{2} \times 10^{5-3}$

即 x_2^*有3位有效数字（有效数）。

同样得到前面的结论。

约定：凡没有标明误差界的近似数都是（对真值进行四舍五入得到的）有效数。

4.有效数字与相对误差的关系*(课本习题)

定理 设x的近似数x^*具有标准形式

$$x^* = \pm 10^m \times 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots a_p$$

① 若x^*具有n位有效数字，则$\left|e_r^*\right| \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$

② 若$\left|e_r^*\right| \le \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{1-n}$，则$x^*$至少具有$n$位有效数字。

证明：注意 $a_1 \times 10^{m-1} \le \left|x^*\right| \le (a_1+1) \times 10^{m-1}$

① 若x^*具有n位有效数字，则$\left|e^*\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$，故

$$\left|e_r^*\right| = \left|\frac{e^*}{x^*}\right| \le \frac{1}{2\left|x^*\right|} \times 10^{m-n} \le \frac{1}{2a_1 \times 10^{m-1}} \times 10^{m-n}$$

$$= \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

② 若相对误差 $\left|e_r^*\right| \le \dfrac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{1-n}$

$$\left|e^*\right| = \left|e_r^*\right| \cdot \left|x^*\right|$$

$$\le \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{1-n}(a_1+1) \times 10^{m-1} = \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

知x^*至少具有n位有效数字。

有效数字增加，相对误差限减少。

$$a_1 \times 10^{m-1} \le \left|x^*\right| \le (a_1+1) \times 10^{m-1}$$

三 误差的传播

初始误差导致后续计算结果产生误差，我们称其为**初值误差传播**。

1. 函数运算的误差估计

对一元可微函数$y=f(x)$，则$y^*=f(x^*)$。利用Taylor公式

$$f(x)=f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x^*)^2$$

得 $y^*-y\approx f'(x^*)(x^*-x)$ 即 $\boxed{e(y^*)\approx f'(x^*)e(x^*)}$

当$f(x^*)\neq 0$、$x^*\neq 0$时，

$$\boxed{e_r(y^*)=\frac{y^*-y}{y^*}}\approx\frac{f'(x^*)e(x^*)}{f(x^*)}=\frac{x^*f'(x^*)}{f(x^*)}e_r(x^*)$$

对多元可微函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，设函数值 y 的近似值为 $y^*=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$。

当 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ 很好地近似相应的真值时，运用多元函数的一阶Taylor公式可得 y^* 的绝对误差为：

$$\boxed{e(y^*)}=y^*-y=f(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\boxed{\approx\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}(x_1^*-x_1)+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}(x_n^*-x_n)}$$

$$\boxed{e_r(y^*)=\frac{e(y^*)}{y^*}}\approx\frac{1}{y^*}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}e(x_1^*)+\cdots+\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}e(x_n^*)\right)$$

$$\boxed{\approx\frac{1}{y^*}\left(x_1^*\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}e_r(x_1^*)+\cdots+x_n^*\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)}e_r(x_n^*)\right)}$$

$$e(y^*)=y^*-y\approx f'(x^*)(x^*-x)=f'(x^*)e(x^*)$$ 0

2. 算术运算的误差估计

作为多元函数绝对误差限估计式的特例，两个近似数加、减、乘、除运算后的绝对误差为

① $$e(x_1^* \pm x_2^*) \approx e(x_1^*) \pm e(x_2^*)$$

② $$e(x_1^* x_2^*) \approx x_2^* e(x_1^*) + x_1^* e(x_2^*)$$

③ $$e(\frac{x_1^*}{x_2^*}) \approx \frac{1}{x_2^*} e(x_1^*) - \frac{x_1^*}{(x_2^*)^2} e(x_2^*)$$

$$e(y^*) \approx \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^*, x_2^*)} (x_1^* - x_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(x_1^*, x_2^*)} (x_2^* - x_2)$$

作为多元函数相对误差限估计式的特例，两个近似数加、减、乘、除运算后的相对误差为

$$①\ e_r(x_1^*+x_2^*)\approx\frac{e(x_1^*)+e(x_2^*)}{x_1^*+x_2^*}=\frac{x_1^*e_r(x_1^*)+x_2^*e_r(x_2^*)}{x_1^*+x_2^*}$$

$$②\ e_r(x_1^*x_2^*)\approx\frac{x_2^*e(x_1^*)+x_1^*e(x_2^*)}{x_1^*x_2^*}=e_r(x_1^*)+e_r(x_2^*)$$

$$③\ e_r\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)\approx\left[\frac{1}{x_2^*}e(x_1^*)-\frac{x_1^*}{(x_2^*)^2}e(x_2^*)\right]\Big/\frac{x_1^*}{x_2^*}=e_r(x_1^*)-e_r(x_2^*)$$

绝对误差、相对误差的上述关系式可用来估计绝对误差限及相对误差限。

$$e(x_1^*+x_2^*)\approx e(x_1^*)+e(x_2^*)$$

$$e(x_1^*x_2^*)\approx x_2^*e(x_1^*)+x_1^*e(x_2^*)$$

$$e\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)\approx\frac{1}{x_2^*}e(x_1^*)-\frac{x_1^*}{(x_2^*)^2}e(x_2^*)$$

例：设 $x^* = 2.4538$ 是x的具有5位有效数字的近似值，试估计用近似值 x^* 计算函数值 $f(x) = x^2$ 的相对误差限。

解： $$e_r((x^*)^2) = \frac{e((x^*)^2)}{(x^*)^2} \approx \frac{2x^* e(x^*)}{(x^*)^2} = \frac{2e(x^*)}{x^*}$$

根据： 对有效数，末位数位的半个单位是其绝对误差限，**或** $m=1, n=5, m-n = -4$。

知 $$\left|e(x^*)\right| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$\left|e_r((x^*)^2)\right| \approx \left|\frac{2e(x^*)}{x^*}\right| \le 2\frac{\frac{1}{2}\times 10^{-4}}{x^*} = \frac{10^{-4}}{2.4538}$$

$$\approx 0.4075 \times 10^{-4} \approx 0.0041\%$$

例（课本习题）：证明当近似值x^*是x的较好近似时，计算相对误差的计算公式$\dfrac{x^*-x}{x}$和$\dfrac{x^*-x}{x^*}$相差一个与$\left(\dfrac{x^*-x}{x}\right)^2$同阶的无穷小量。

证明：

$$\left|\frac{x^*-x}{x}-\frac{x^*-x}{x^*}\right|=\left|\frac{x^*(x^*-x)-x(x^*-x)}{xx^*}\right|=\left|\frac{(x^*-x)^2}{xx^*}\right|$$

$$=\left|\frac{x}{x^*}\frac{(x^*-x)^2}{x^2}\right|=O\left(\frac{x^*-x}{x}\right)^2 \quad （由于\frac{x}{x^*}\approx 1\ ）$$

或 $$=\left|\frac{1}{1-1+\frac{x^*}{x}}\left(\frac{x-x^*}{x}\right)^2\right|=\left|\frac{1}{\left(1-\frac{x-x^*}{x}\right)}\left(\frac{x-x^*}{x}\right)^2\right|$$

$$=O\left(\frac{x^*-x}{x}\right)^2 \quad （由于 1-\frac{x-x^*}{x}\approx 1\ ）$$

说明：$\dfrac{x^*-x}{x}$和$\dfrac{x^*-x}{x^*}$均可以用来计算相对误差。

§3 算法设计应遵循的原则

1 尽量避免两个相近的数字相减

设 $x^* - a$ 为$x-a$的近似值，则

$$e_r(x^*-a) = \frac{(x^*-a)-(x-a)}{x^*-a} = \frac{x^*-x}{x^*-a}$$

当x接近于a时，相对误差的绝对值可能较大。

例：用四位计算机计算$1-\cos 2^\circ$（真值为$0.493439\cdots\times10^{-3}$）。

$$x_1^* = 1-\cos 2^\circ \approx 1-0.9995 = 0.0005 \qquad m=-3$$

$$x_2^* = 1-\cos 2^\circ = 2\sin^2 1^\circ \approx 2\times(0.0157)^2 = 2\times(0.1570)^2\times10^{-2}$$

$$= 2\times(0.0246)\times10^{-2} = 0.4920\times10^{-3} \qquad m=-3$$

$$\left|x_1^*-x\right| = \left|0.5\times10^{-3}-0.493439\cdots\times10^{-3}\right| < 0.5\times10^{-4} \qquad m-n=-4$$

$$\left|x_2^*-x\right| = \left|0.4920\times10^{-3}-0.493439\cdots\times10^{-3}\right| \le 0.5\times10^{-5} \qquad m-n=-5$$

x_1^*有一位有效数字，x_2^*有两位有效数字。

经常采用恒等变形避免两相近数相减。

如：当正数x充分大时，可按如下方法变换算式

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)},\qquad \ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})。$$

$$\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x},\qquad \sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}},$$

如：当$x\approx 0$时，可按如下方法变换算式

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\qquad 1-\cos x=1-(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots)\approx\frac{x^2}{2!}$$

2 防止大数"吃掉"小数

如：$A\approx 10^{21}, B\approx 10, C\approx -10^{21}$

在四位计算机上计算 $A+B+C$ 时，有

$$\begin{aligned}A+B+C &\approx 10^{22}(0.1000)+10^{2}(0.1000)-10^{22}(0.1000)\\ &=10^{22}(0.1000)+10^{22}(0.0000)-10^{22}(0.1000)=0\end{aligned}$$

故应变形，计算$(A+C)+B$。

3 避免用绝对值很小的数做除数

设 $z=\dfrac{y}{x}, x\neq 0$，则 $e(z^*)\approx -\dfrac{y^*}{(x^*)^2}e(x^*)+\dfrac{1}{x^*}e(y^*)\ (x^*\neq 0)$

用绝对值很小的数做分母，所得结果的绝对（相对）误差的绝对值可能很大。

4 简化计算步骤以减少运算次数

如： 秦九韶算法

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(((\underline{a_4x+a_3})x+a_2)x+a_1)x+a_0$$

5 使用数值稳定性好的公式

算法中的舍入误差能够得到控制，则称该**算法（数值）稳定**，否则称其为**（数值）不稳定**。

例： 在四位计算机上求解 $\begin{cases} 0.00001x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$

精确解 $x_1 = 0.250001875\cdots \quad x_2 = 0.499998749\cdots$

消元 $\begin{cases} 10^{-4} \times 0.1000x_1 + 10^1 \times 0.2000x_2 = 10^1 \times 0.1000 \\ \qquad\qquad -10^6 \times 0.4000x_2 = -10^6 \times 0.2000 \end{cases}$

近似解为 $x_2^* = 0.5; \quad x_1^* = 0$

将 $0.00001x_1^* + 2x_2^* \approx 1, \quad 0.00001x_1 + 2x_2 = 1$

相减，有 $10^{-5}(x_1^* - x_1) + 2(x_2^* - x_2) \approx 0$

即 $10^{-5}e(x_1^*) \approx -2e(x_2^*)$

得 $$|e(x_1^*)| \approx 2 \times 10^5 |e(x_2^*)|$$

即 x_2^* 解出后回代到第一个方程后，使得 x_1^* 的绝对误差（绝对值）近似放大 2×10^5 倍。

$$\begin{cases} 10^{-4} \times 0.1000x_1 + 10^1 \times 0.2000x_2 = 10^1 \times 0.1000 \\ \qquad (10^1 \times 0.3000 - (2/(10^{-4} \times 0.1000)) \times 10^1 \times 0.2000)x_2 = (10^1 \times 0.2000 - (2/(10^{-4} \times 0.1000)) \times 10^1 \times 0.1000) \end{cases}$$

若变形 $\begin{cases} 10^1\times 0.2000x_1+10^1\times 0.3000x_2=10^1\times 0.2000 \\ 10^{-4}\times 0.1000x_1+10^1\times 0.2000x_2=10^1\times 0.1000 \end{cases}$

并消元，有 $\begin{cases} 10^1\times 0.2000x_1+10^1\times 0.3000x_2=10^1\times 0.2000 \\ \qquad\qquad 10^1\times 0.2000x_2=10^1\times 0.1000 \end{cases}$

近似解为 $x_2^*=0.5;\ \ x_1^*=0.25$

设 $x_1-x_1^*=e(x_1^*),\ x_2^*-x_2=e(x_2^*)$, 将

$$2x_1+3x_2=2,\quad 2x_1^*+3x_2^*\approx 2$$

相减，则有 $|e(x_1^*)|\approx 1.5|e(x_2^*)|$

即 x_2^* 解出后回代到变形后的第一个方程，仅使得 x_1^* 的绝对误差（绝对值）放大1.5倍。

应尽可能设计数值稳定的算法。

$$\begin{cases} 10^1\times 0.2000x_1+10^1\times 0.3000x_2 \qquad =10^1\times 0.2000 \\ \qquad (10^1\times 0.2000-(10^{-4}\times 0.1000/10^1\times 0.2000)\times 10^1\times 0.3000)x_2=10^1\times 0.1000-(10^{-4}\times 0.1000/10^1\times 0.2000)\times 10^1\times 0.2000) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10^1\times 0.2000x_1+10^1\times 0.3000x_2 \qquad =10^1\times 0.2000 \\ \qquad (10^1\times 0.2000-10^{-4}\times 0.1500)x_2=10^1\times 0.1000-10^{-4}\times 0.1000 \end{cases}$$

例：序列$\{y_n\}$满足递推关系式 $y_n = 0.1 y_{n-1} \quad n = 1,2,\cdots$

若 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（三位有效数字），计算到 y_{10}^* 时绝对误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解：设 $y_0 = \sqrt{2} \quad y_0^* = 1.41 \quad y_0^* - y_0 = -0.004213562\cdots = \delta$

由 $y_n = 0.1 y_{n-1}, \quad y_n^* = 0.1 y_{n-1}^*$

得
$$e(y_1^*) = y_1^* - y_1 = 10^{-1}(y_0^* - y_0) = 10^{-1}\delta$$
$$e(y_2^*) = y_2^* - y_2 = 10^{-1}(y_1^* - y_1) = 10^{-2}\delta$$
$$\vdots$$
$$e(y_{10}^*) = y_{10}^* - y_{10} = 10^{-1}(y_9^* - y_9) = 10^{-10}\delta$$

若初值具有误差，算法稳定性与初值具体数值无关。

当 y_0^*有初始误差δ时，y_{10}^*绝对误差将减小10^{-10}倍。

同时 $$e_r(y_{10}^*) = \frac{y_{10}^* - y_{10}}{y_{10}^*} = \frac{10^{-10}(y_0^* - y_0)}{10^{-10} y_0^*} = e_r(y_0^*)$$

绝对误差、相对误差绝对值均可控制，计算过程稳定。

注：绝对误差、相对误差绝对值之一增加，计算不稳定

总结

1. 数值运算的误差估计
2. 绝对误差、相对误差与有效数字
3. 数值运算中应遵循的若干原则