第12章　真空中的静电场

　　2003年4月22日，三峡工程左岸电厂2号机组定子顺利完成整体吊装。该机组发电机定子的外径21.45米，重655.9顿，该机组当年9月发电。三峡水电站70万千瓦机组26台，总装机1820万千瓦，是当今世界最大的电站。

§ 12.1 电荷 库仑定律

主要内容：

1. 电荷及其属性

2. 点电荷(系)

3. 库仑定律

4. 静电力叠加原理

5. 计算带电体间的静电力

12.1.1 电荷

1. 正负性　自然界中只存在两类电荷:正电荷和负电荷。

2. 量子性

$$\mathrm{e} = (1.602\,176\,462 \pm 0.000\,000\,063) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

任何物体所带的电荷量都是 **e** 的整数倍:

$$q = \pm N\mathrm{e}$$

3. 守恒性

在一个孤立系统中, 系统所具有的正负电荷的代数和保持不变, 这一规律称为电荷守恒定律。

4. 相对论不变性

电荷的电量与它的运动速度和加速度无关。

12.1.2 库仑定律

1. 点电荷

(1) 无大小和形状的几何点

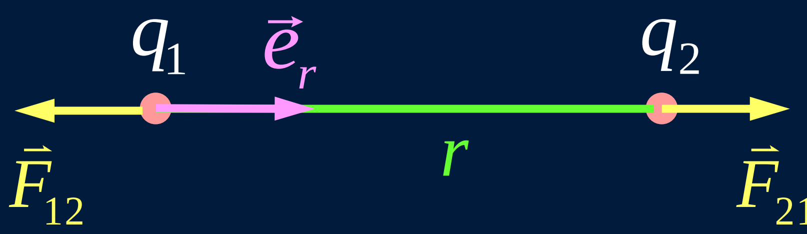
(2) 具有电量 (Q)

- 理想模型
- 对实际带电物体有条件的合理抽象

2. 库仑定律

在真空中，两个静止的点电荷 q_1 和 q_2 之间的静电相互作用力(静电力或库仑力) 与这两个点电荷所带电荷量的乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，作用力的方向沿着两个点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

电荷q_1对q_2的作用力F_{21}



$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

电荷q_2对q_1的作用力F_{12}

$$\vec{F}_{12} = -k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$$

实验测得比例系数 k 为

$$k = 8.987\,55\times 10^{-12}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$$

令 $k = 1/4\pi\varepsilon_0$，则 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi k} = 8.854\,187\,82\times 10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}$

—— 真空中的电容率(介电常数)

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r}$$

—— 真空中库仑定律

➢ 讨论

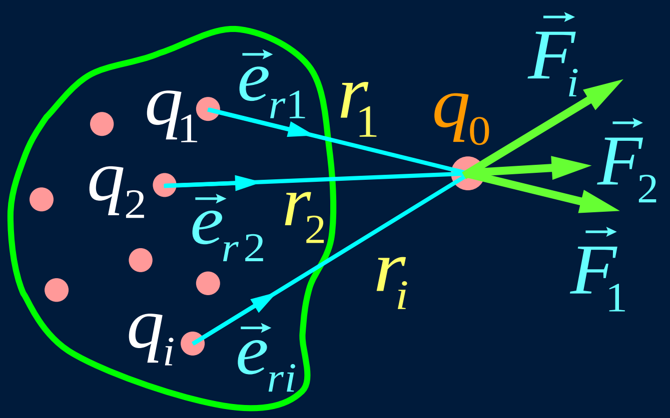
(1) 库仑定律是物理学中著名的平方反比定律之一；

(2) 库仑定律适用于真空中的点电荷；

(3) 库仑力满足牛顿第三定律。

12.1.3 静电力叠原理

由n 个点电荷$q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$组成的点电荷系对点电荷$q_0$ 的静电力



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_n$$

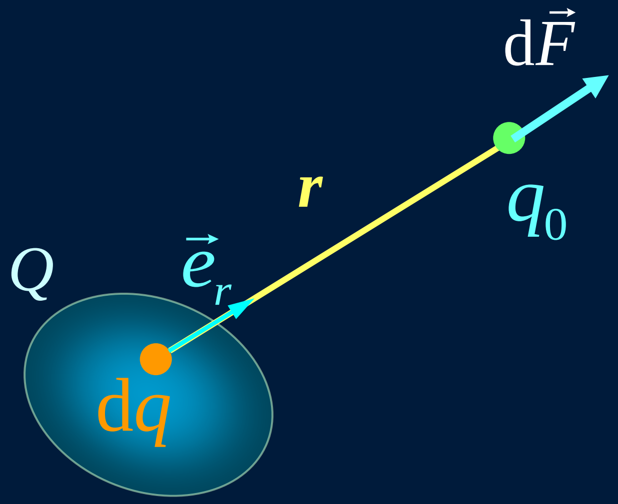
$$= \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

某点电荷受到来自其它点电荷的总静电力等于所有其它点电荷单独存在时的静电力的矢量和。这称为静电力叠加原理。

对电荷连续分布的带电体

$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{q_0 \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$\vec{F} = \int_Q \frac{q_0 \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

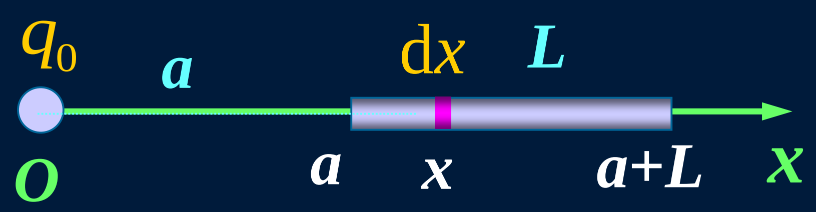


例 如图所示，已知点电荷带电量为q_0，细杆均匀带电，电量为q，长度为L，点电荷与细杆近端相距a

求 点电荷与带电直杆之间的静电力。

解 设细杆的电荷线密度为λ

$$\lambda = q / L \qquad \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x$$



$$\mathrm{d}F = \frac{q_0 \lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$$F = \int_a^{a+L} \frac{q_0 \lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = -\frac{q_0\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \frac{q_0 \lambda L}{4\pi\varepsilon_0 a(a+L)} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 a(a+L)}$$

◆ 若$L << a$，$F =$?

§ 12.2 真空中的静电场　电场强度

主要内容：

1.静电场

2.电场强度

3.电场强度叠加原理

4.电场强度的计算

12.2.1 静电场

- 历史上曾有过两种对立的学说

早期“超距作用”学说；　　后来法拉第提出场的概念.

电荷 ⟺ 电场 ⟺ 电荷

- 电场的特点

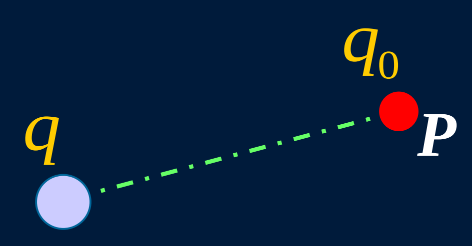
(1) 对位于其中的带电体有力的作用.

(2) 带电体在电场中运动,电场力对其作功.

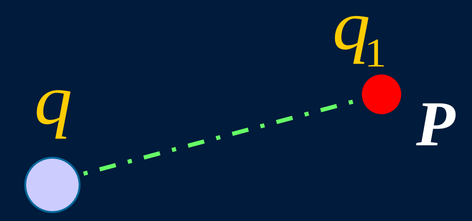
12.2.2 电场强度

场源电荷q —— 产生电场的电荷

检验电荷q_0 $\begin{cases}\text{带电量足够小}\\ \text{点电荷}\end{cases}$



在电场中任一位置处：



$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \vec{E}$$

定义：电场中某点的电场强度的大小等于单位电荷在该点受力的大小，其方向为正电荷在该点受力的方向。

$$\boxed{\vec{E} = \vec{F} / q_0}$$

12.2.3 电场强度的计算

1. 点电荷的电场强度

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\vec{e}_r \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

2. 电场强度叠加原理

点电荷系

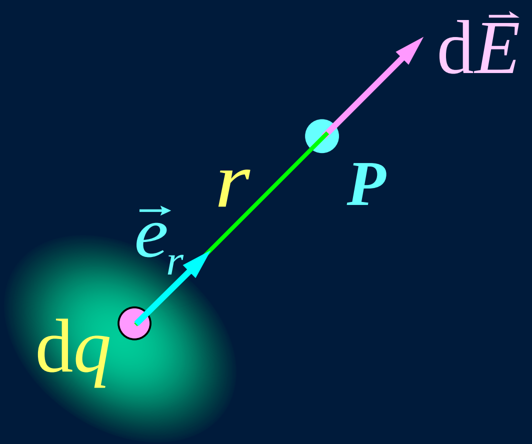
$$\vec{E}=\frac{\sum_i \vec{F}_i}{q_0}=\sum_i \vec{E}_i=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{e}_{ri}$$

在点电荷系所激发的电场中，某点的电场强度等于各个点电荷单独存在时在该点产生的电场强度的矢量和。这称为**电场强度叠加原理**。

3. 连续分布电荷的电场强度

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{E}=\int\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$



$$\mathrm{d}q=\begin{cases}\lambda\mathrm{d}l & \text{（线分布）}\\ \sigma\mathrm{d}S & \text{（面分布）}\\ \rho\mathrm{d}V & \text{（体分布）}\end{cases}$$

λ: 线密度

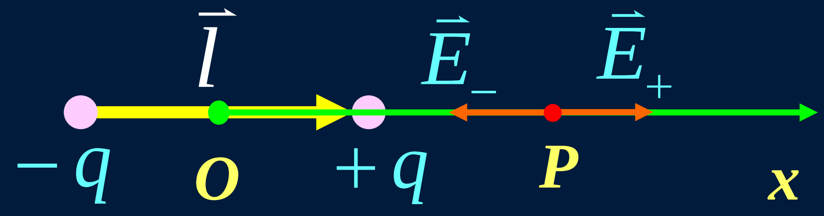
σ: 面密度

ρ: 体密度

例 求电偶极子在延长线上和中垂线上一点产生的电场强度

解 电偶极矩： $\vec{p} = q\vec{l}$

对于延长线上任一点



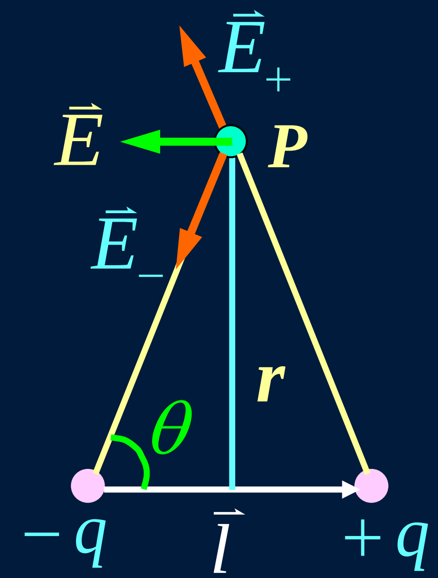
$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x - l/2)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}_- = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (x + l/2)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q \cdot 2xl}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 - l^2/4)^2}\vec{i} = \frac{2x\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 - l^2/4)^2}$$

◆ 若$l << x$，则 $\vec{E} = \dfrac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$

对于中垂线上任一点



$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + l^2/4)}$$

$$\begin{cases} E = 2E_+\cos\theta \\ \cos\theta = \dfrac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + l^2/4)^{3/2}}$$

◆ 若$l \ll r$，则 $\vec{E} = -\dfrac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

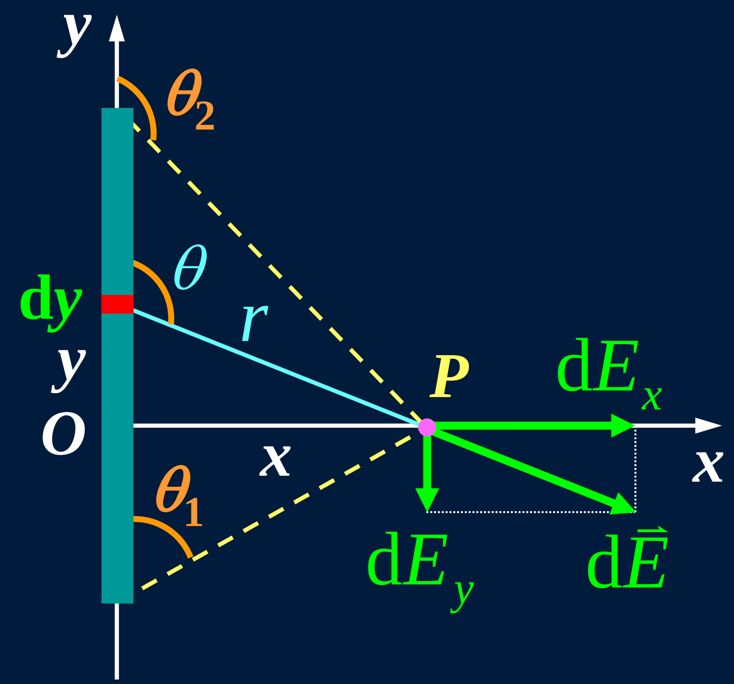
◆ 若 $r = 0$，则 $\vec{E} = -\dfrac{2\vec{p}}{\pi\varepsilon_0 l^3}$

例 长为L，带电量为q 的均匀带电直杆

求 带电直杆在空间任一点P 处产生的电场强度

解 设带电直杆的电荷线密度为λ，

则 $\lambda = q / L$



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}y}{r^2}$$

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\sin\theta \qquad \mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta$$

由图上的几何关系

$$\begin{cases} r^2 = y^2 + x^2 = x^2/\sin^2\theta \\ y = -x\cot\theta \qquad \mathrm{d}y = x\sin^{-2}\theta \mathrm{d}\theta \end{cases} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{r^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{x}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\sin\theta \mathrm{d}\theta \qquad \mathrm{d}E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\cos\theta \mathrm{d}\theta$$

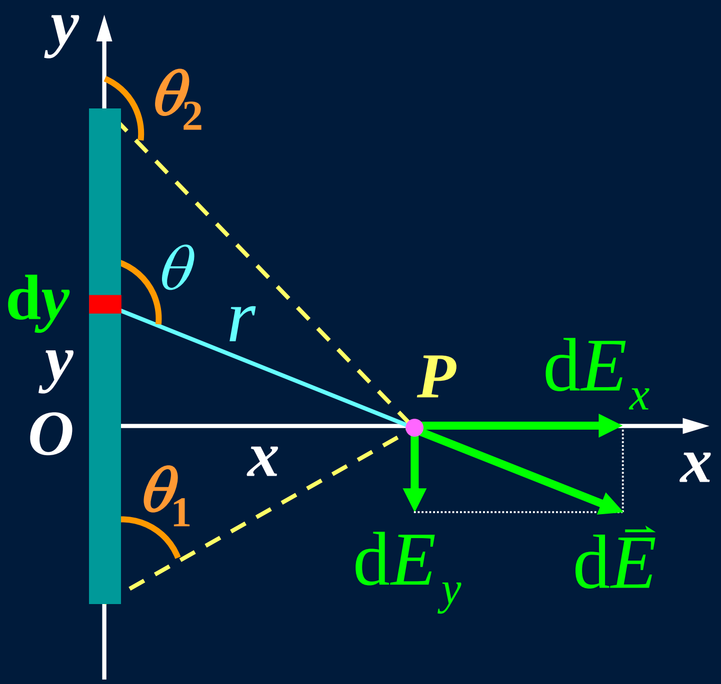
$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \sin\theta \mathrm{d}\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

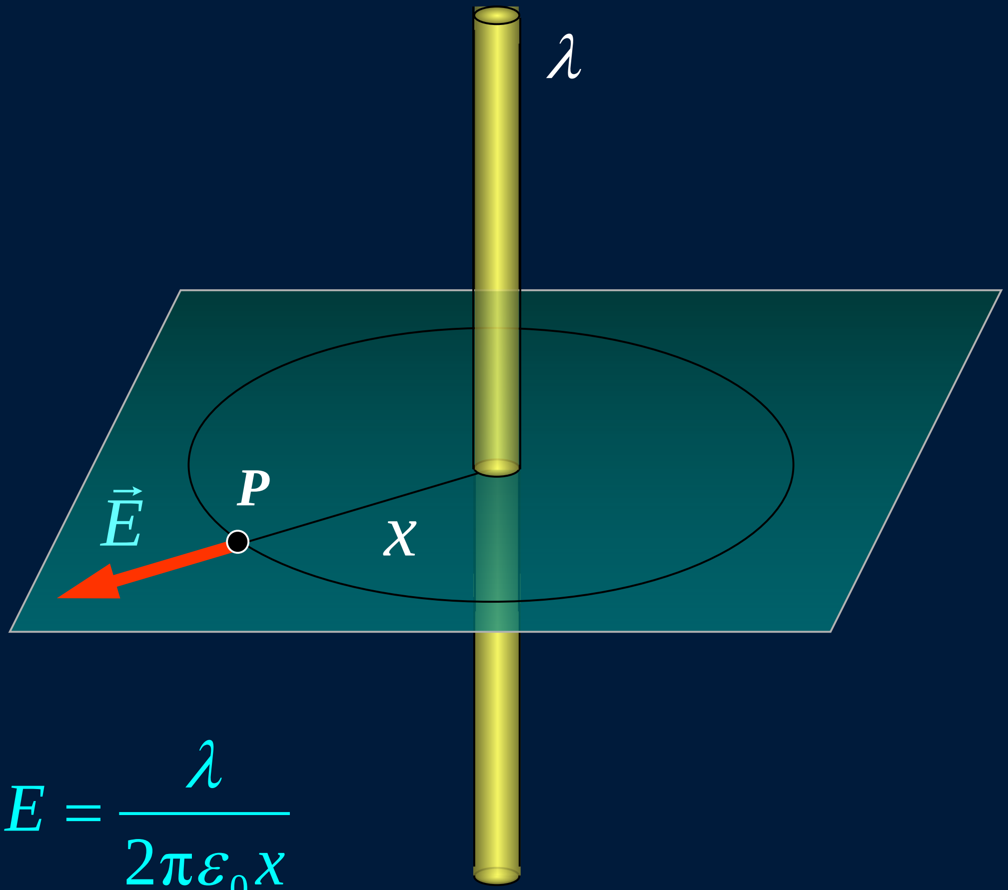
- 讨论

无限长直导线

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}E_x = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \\ E_y = 0\end{array}\right.$$



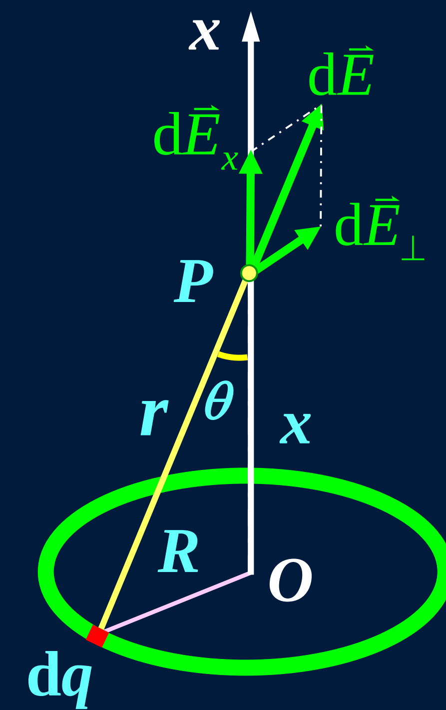
“无限长” 均匀带电直线



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

例 半径为R 的均匀带电细圆环，带电量为q 。

求 圆环轴线上任一点P 的电场强度。



解 $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l \qquad \mathrm{d}E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{r^2}$

$$\mathrm{d}E_\perp = \mathrm{d}E\sin\theta \qquad \mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\theta$$

圆环上电荷分布关于x 轴对称 $E_\perp = 0$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\theta$$

由图上的几何关系 $\cos\theta = \dfrac{x}{r} \qquad r = (R^2 + x^2)^{1/2}$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}}$$

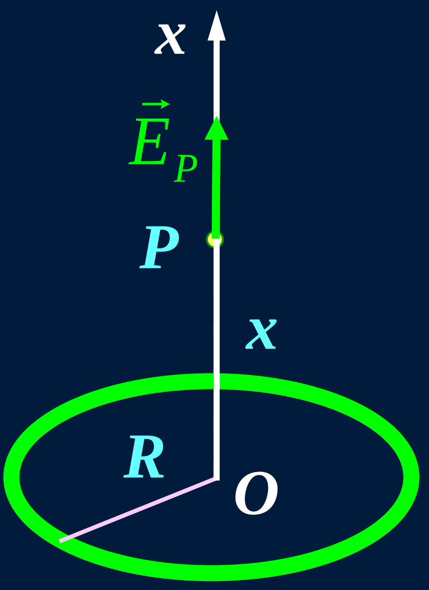
➢ 讨论

(1) 当 $x = 0$（即P点在圆环中心处）时，

$$E = 0$$

(2) 当 $x >> R$ 时 $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2}$$

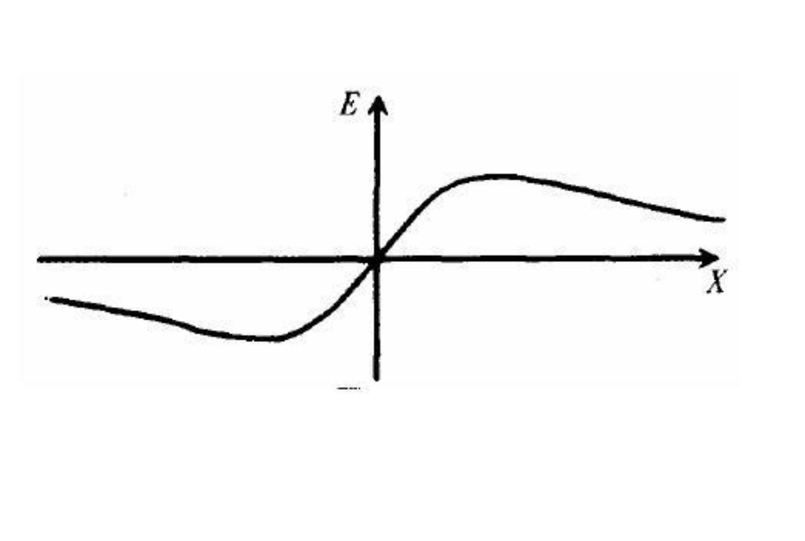
可以把带电圆环视为一个点电荷。



(3) 令 **d*E*/d*x*=0**，则得***E*** 的极值条件

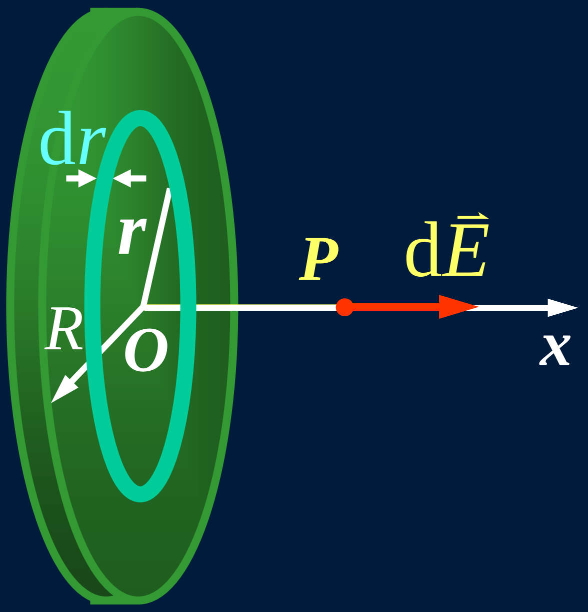
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(R^2-2x^2)}{(R^2+x^2)^{5/2}}=0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2=R^2 \qquad x=\pm\sqrt{2}R/2$$



例 面密度为σ，半径为R 的均匀带电圆板在轴线上任一点的电场强度。

解 $\mathrm{d}q = 2\pi r \mathrm{d}r \sigma$



$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x\mathrm{d}q}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E = \int \mathrm{d}E = \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

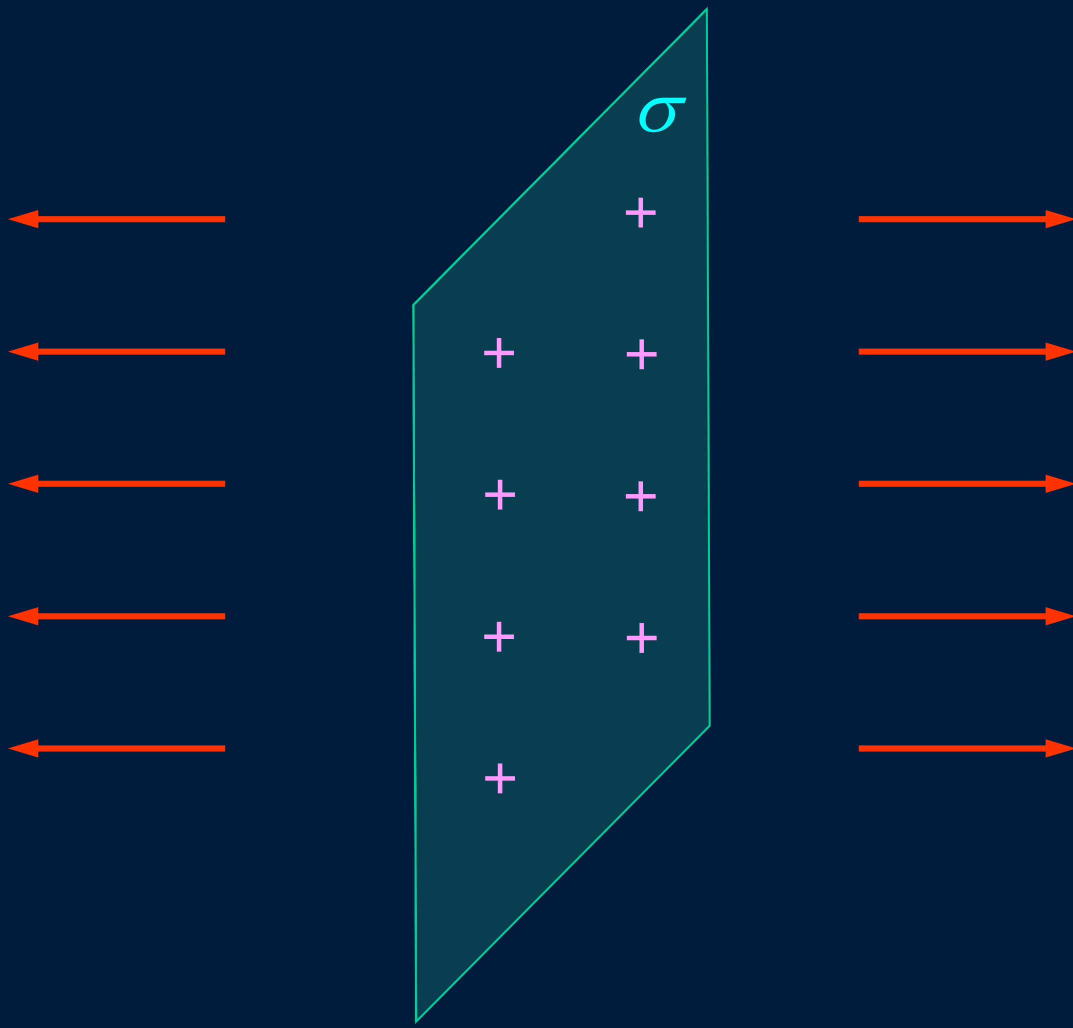
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}]$$

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}}]\vec{i}$$

- 讨论

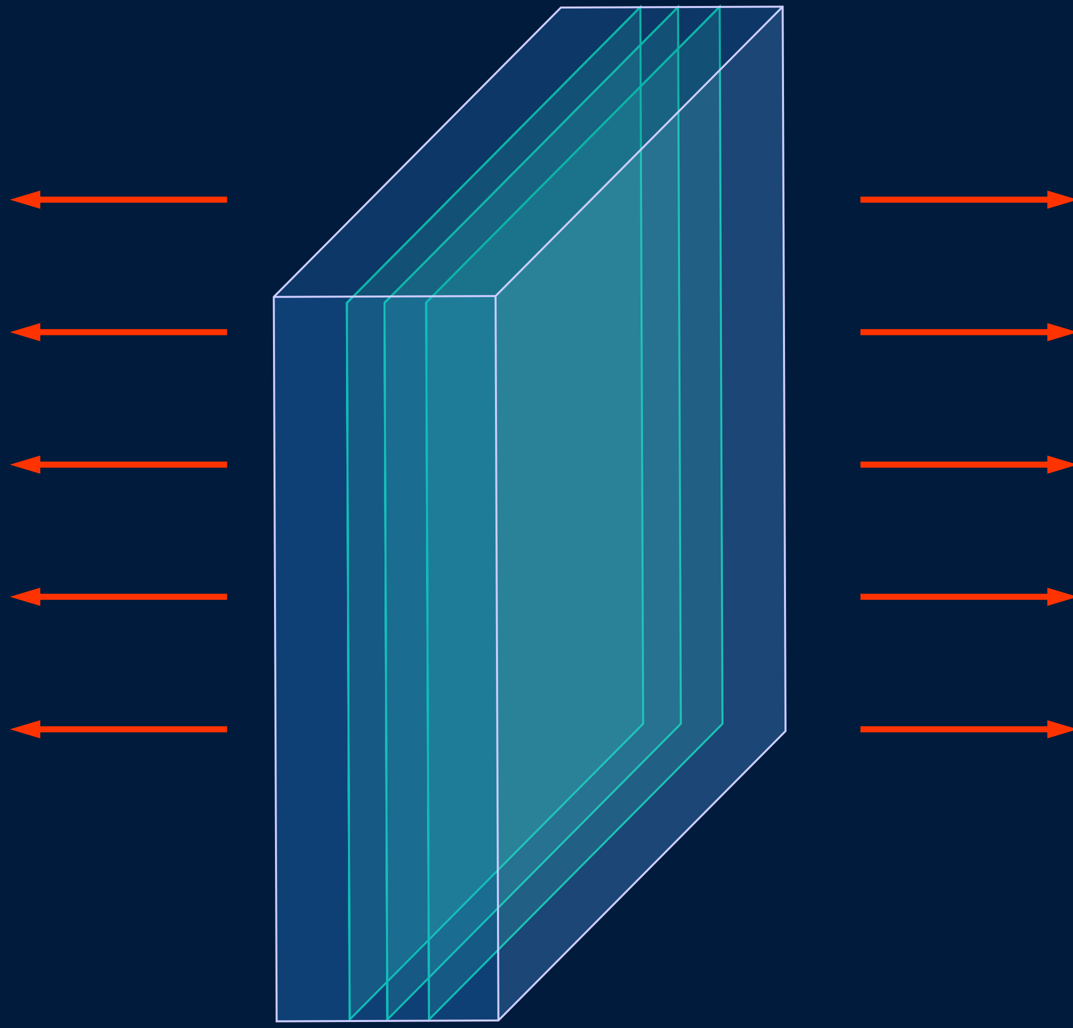
(1) 当 $R >> x$ ，圆板可视为无限大薄板

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



电场强度垂直带电平面

- “无限大” 均匀带电平板



电场强度垂直带电平板

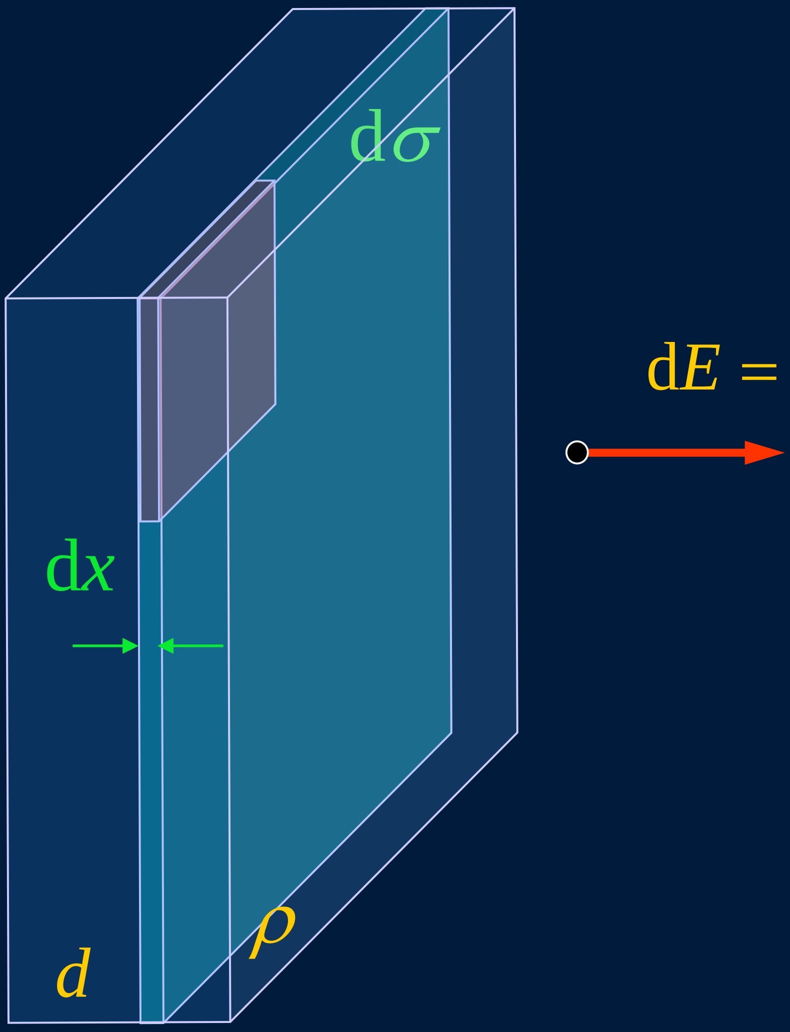
- “无限大”均匀带电平板

薄板电荷面密度为 $\mathrm{d}\sigma$

单位面积薄板

体积 $\mathrm{d}V = 1\cdot \mathrm{d}x$

带电量 $\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}x$



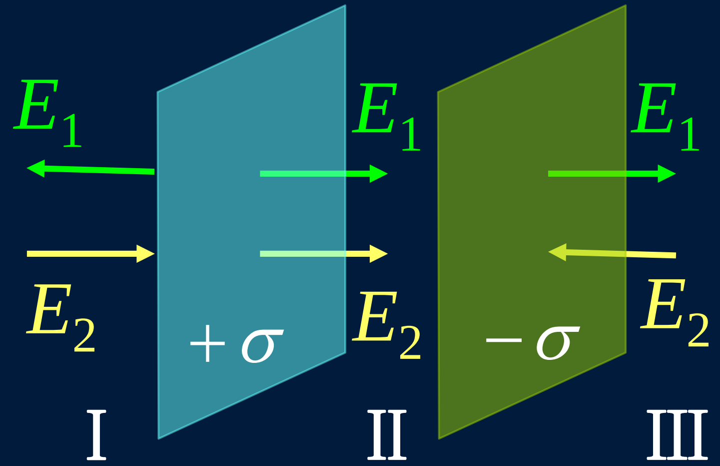
$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \int \mathrm{d}E = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{2\varepsilon_0} = \int \frac{\rho \mathrm{d}x}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$$

(2) $E_{\mathrm{I}} = E_1 - E_2 = 0$

$$E_{\mathrm{II}} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

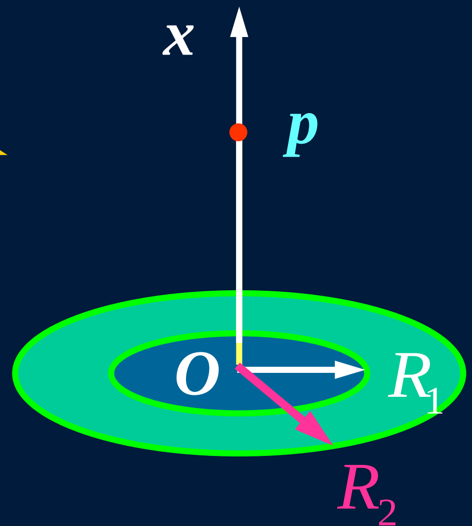
$$E_{\mathrm{III}} = E_1 - E_2 = 0$$



(3) 补偿法

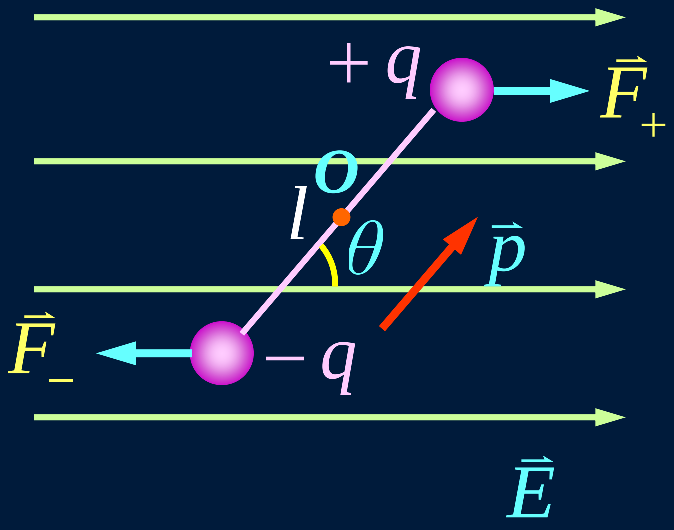
$$\vec{E} = \vec{E}_{R2} + \vec{E}_{R1}$$

$$= \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R_1^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_2^2 + x^2)^{1/2}}\right]\vec{i}$$



例 求电偶极子在均匀电场中受到的力矩。

解 $\vec{F}_{+} = q\vec{E}$ $\qquad\qquad$ $\vec{F}_{-} = -q\vec{E}$



相对于o点的力矩

$$M = F_{+}\cdot\frac{1}{2}l\sin\theta + F_{-}\cdot\frac{1}{2}l\sin\theta$$

$$= qlE\sin\theta$$

$$\vec{M} = q\vec{l}\times\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E}$$

➢ **讨论**

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 力矩最大

(2) $\theta = 0$ 力矩为零 (电偶极子处于稳定平衡)

(3) $\theta = \pi$ 力矩为零 (电偶极子处于非稳定平衡)

解题思路

对于电荷连续分布的带电体，应用叠加原理求电场强度的方法和步骤是：

(1) 根据给定的电荷分布，选定便于计算的坐标系，确定电荷元 **d*q* (*λ*d*l*, *σ*d*s*, *ρ*d*V*)**

(2) 将**d*q*** 作为点电荷，列出场点处 $\mathrm{d}\vec{E}$ 的大小，并图示 $\mathrm{d}\vec{E}$ 的方向：

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

写出 $\mathrm{d}\vec{E}$ 的分量式 $\mathrm{d}E_x$，$\mathrm{d}E_y$，$\mathrm{d}E_z$

(3) 统一变量，计算积分

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x \quad E_y = \int \mathrm{d}E_y \quad E_z = \int \mathrm{d}E_z$$

§ 12.3 电场强度通量　高斯定理

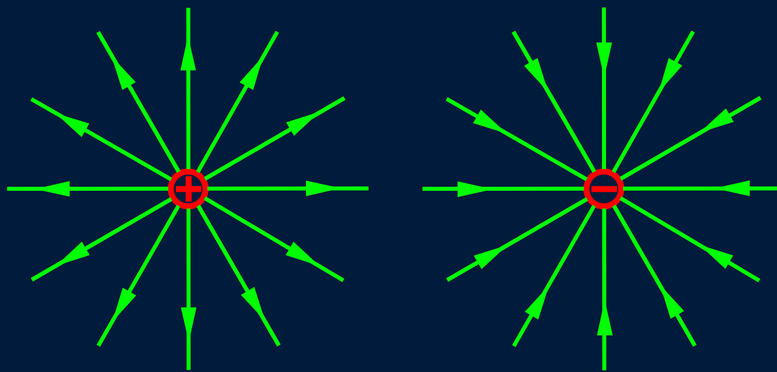
主要内容：

1. 电场线
2. 电场强度通量
3. 高斯定理
4. 库仑定律的实验证明
5. 高斯定理的应用

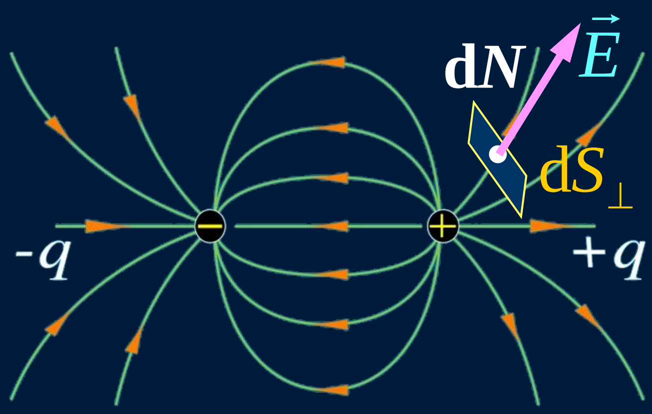
12.3.1 电场线

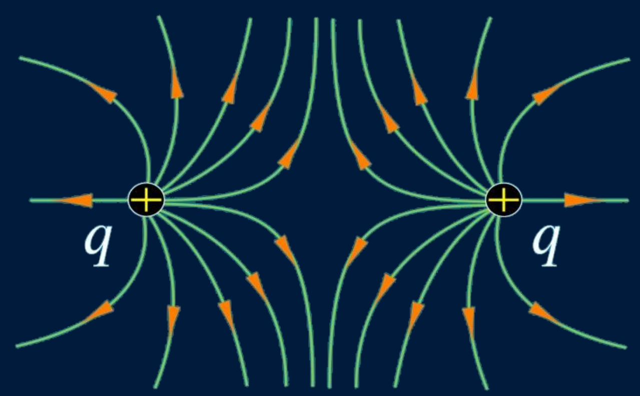
- 起始于正电荷(或无穷远处)，终止于负电荷(或无穷远处)。
- 场强方向沿电力线切线方向，
  场强大小决定电力线的疏密。

$$E = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$



- 电场线是非闭合曲线，不相交。





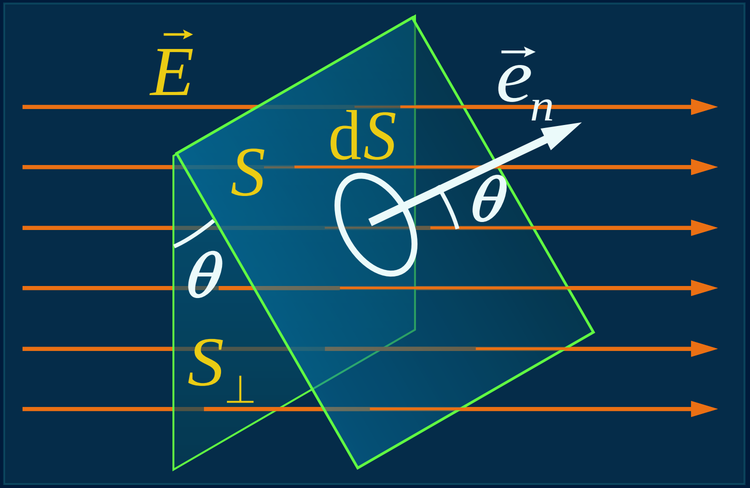
12.3.2 电场强度通量

在电场中穿过任意曲面 **S** 的电场线条数

—— (穿过该面的) 电通量(Φ_e)

1. 均匀场中

$$\Phi_e = ES_{\perp} = ES\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{S}$$

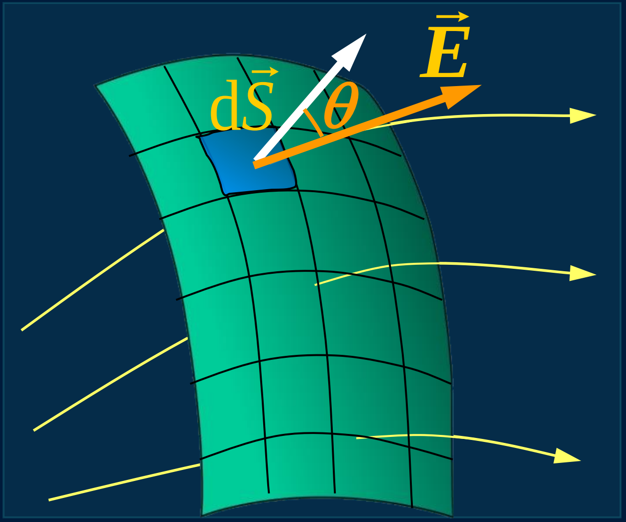


定义 $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_n$

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

2. 非均匀场中

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \quad \boxed{\Phi_e = \int_S \mathrm{d}\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$



对闭合曲面 $\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$

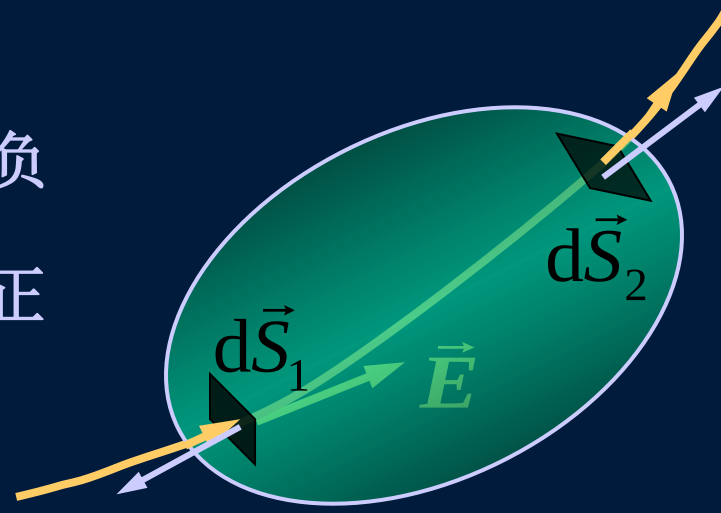
➢ 讨论

(1) $\vec{S}$ 方向的规定：$\begin{cases} \text{非闭合曲面} & \text{—— 凸为正，凹为负} \\ \text{闭合曲面} & \text{—— 向外为正，向内为负} \end{cases}$

(2) 电通量是代数量 $\begin{cases} 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} & \text{——} \ \mathrm{d}\Phi_e \ \text{为正} \\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi & \text{——} \ \mathrm{d}\Phi_e \ \text{为负} \end{cases}$

$\mathrm{d}\Phi_{e1} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 < 0$ 穿入为负

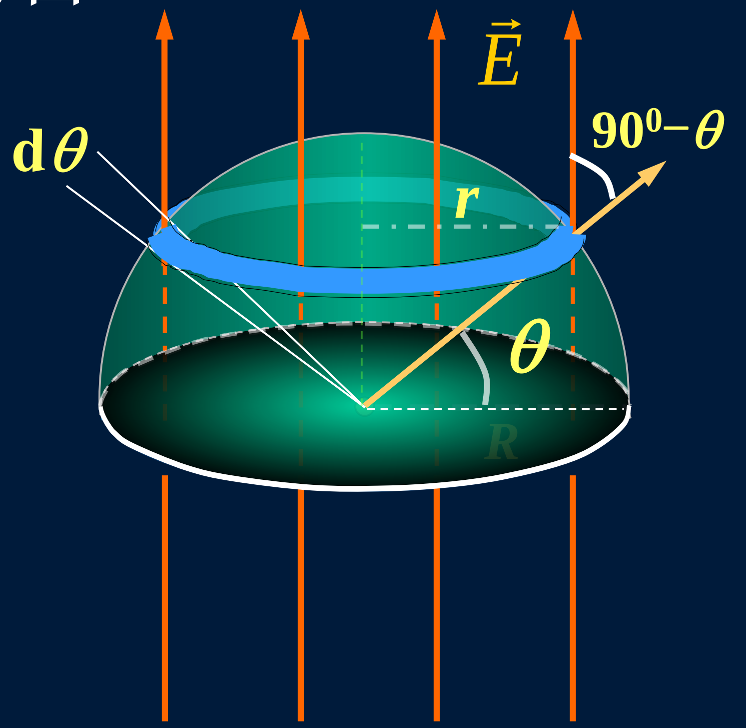
$\mathrm{d}\Phi_{e2} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 > 0$ 穿出为正



例 均匀电场中有一个半径为 R 的半球面

求 通过此半球面的电通量

解 方法1：通过 $\mathrm{d}S$ 面元的电通量



$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = E\cos(90^0-\theta)\mathrm{d}S$$

$$r = R\cos\theta \qquad \mathrm{d}S = 2\pi r\cdot R\mathrm{d}\theta$$

$$\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_0^{\frac{\pi}{2}} E\pi R^2 \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \pi R^2 E$$

方法2：构成一闭合面，通过闭合面的电通量

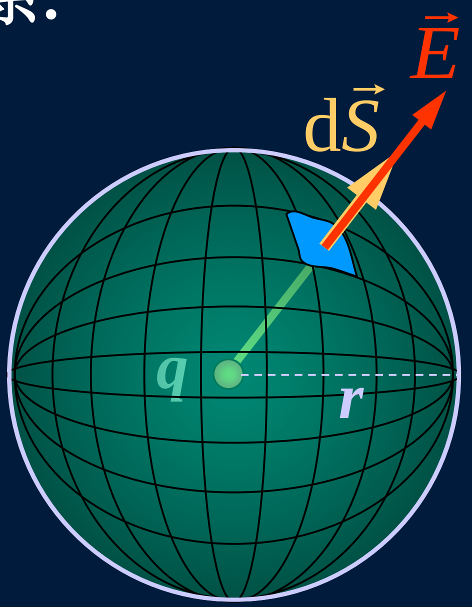
$$\int_{\text{半球面}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_{\text{底面}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{\text{半球面}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\int_{\text{底面}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \pi R^2 E$$

12.3.3 高斯定理

以点电荷(系)为例建立 Φ_e —— q 的关系:

◆ 点电荷

● q 在球心处，球面电通量为



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\mathrm{d}S = E\oint_S \mathrm{d}S$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

穿过球面的电场线条数为 q/ε_0

● q 在任意闭合面内，电通量为

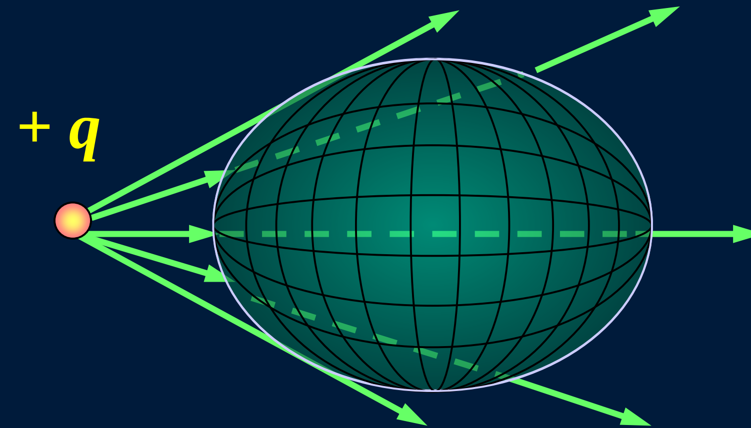
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

穿过闭合面的电场线条数仍为 q/ε_0

Φ_e 只与闭合曲面包围的电荷电量 q 有关。

● q 在闭合面外 $\Phi_e = 0$

穿出、穿入的电场线条数相等。



◆ 点电荷系

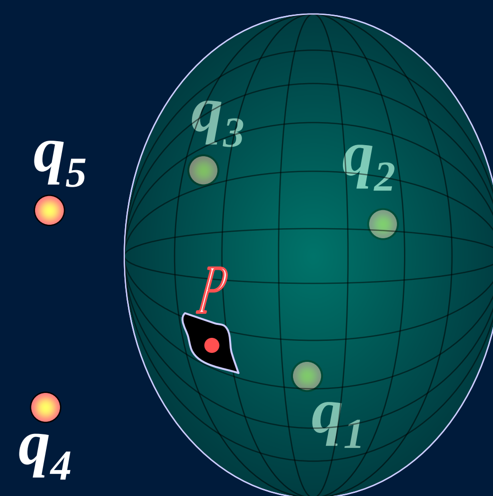
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_5$$

任意闭合面电通量为

$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_5) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \oint \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \ldots + \oint \vec{E}_5 \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \frac{q_3}{\varepsilon_0} + 0 + 0$$



$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}}$$

$\vec{E}$ 是所有电荷产生的;

Φ_e 只与内部电荷有关。

静电场高斯定理

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{内}$$

真空中的任何静电场中，穿过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的电荷电量的代数和乘以$1/\varepsilon_0$

对于连续分布的源电荷

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d}V$$

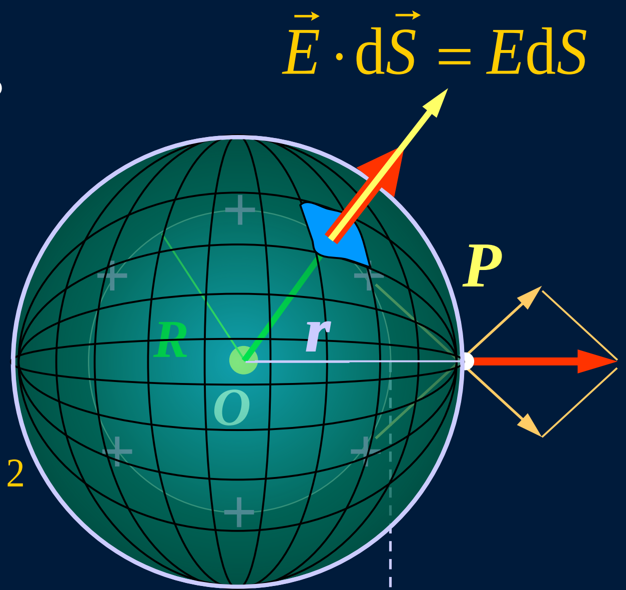
意义：反映静电场的性质 —— **有源场**

12.3.4 高斯定理的应用

例 均匀带电球面，电量Q，半径R 。

求 电场强度分布

解 $\vec{E}$沿球面法线方向。取过P点的同心球面为高斯面，电通量为



$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint E\mathrm{d}S = E\oint \mathrm{d}S = E4\pi r^2$$

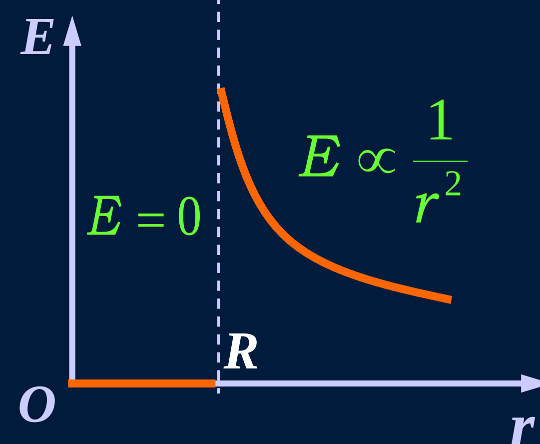
由高斯定理 $E4\pi r^2 = \dfrac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$

- 球外 ($r > R$)

$$\sum q_{内} = Q \Longrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- 球内 ($r < R$)

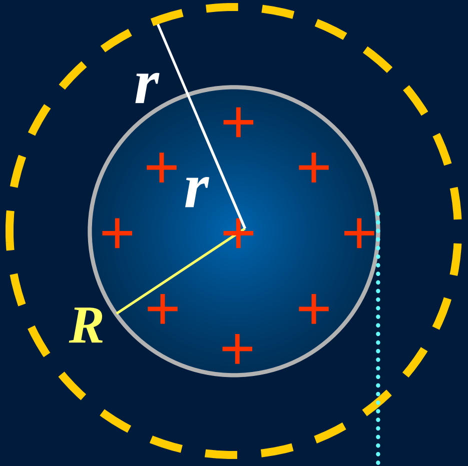
$$\sum q_{内} = 0 \Longrightarrow E = 0$$



例 均匀带电球体，半径为R，电荷体密度为ρ

求 电场强度分布

解 $\vec{E}$沿球面法线方向。取同心球面为高斯面，电通量为



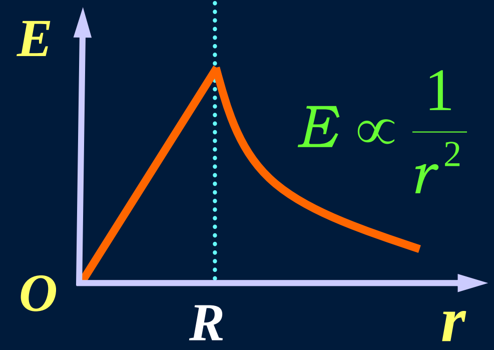
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E4\pi r^2 = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

- 球外$(r > R)$

$$\sum q_{内} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

- 球内$(r < R)$

$$\sum q_{内} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho \Rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

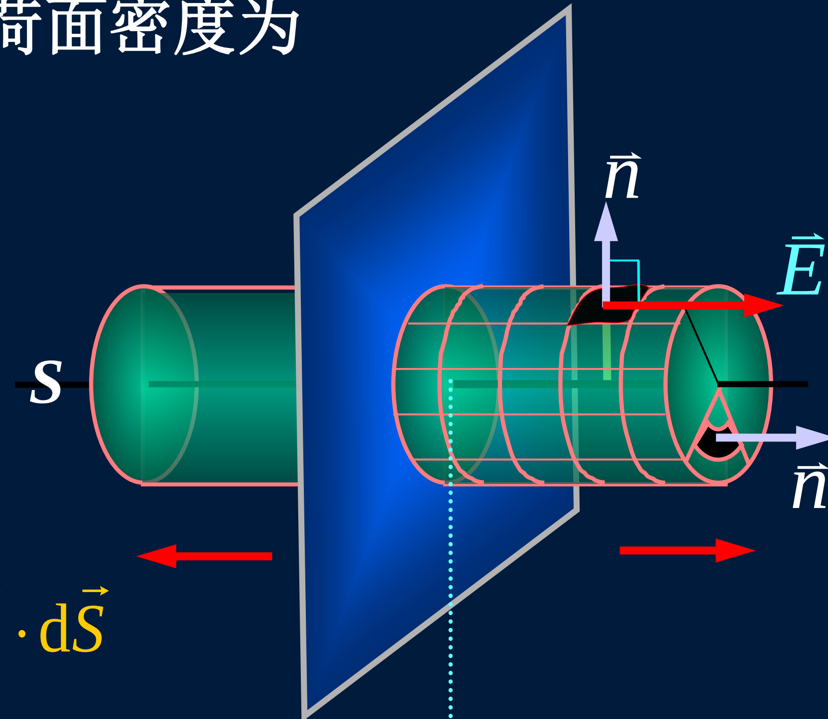


电场分布曲线

例 “无限大”均匀带电平面，电荷面密度为 σ

求 电场强度分布

解 电场强度垂直带电平面, 选取垂直带电面的圆柱形高斯面



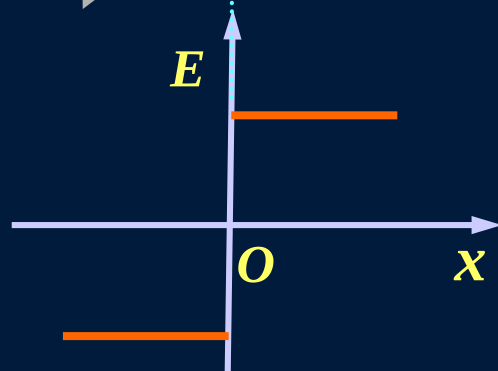
$$\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{左底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{右底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= 0 + \int_{左底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{右底} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= 0 + E_1 S + E_2 S$$ (两个底面对称)

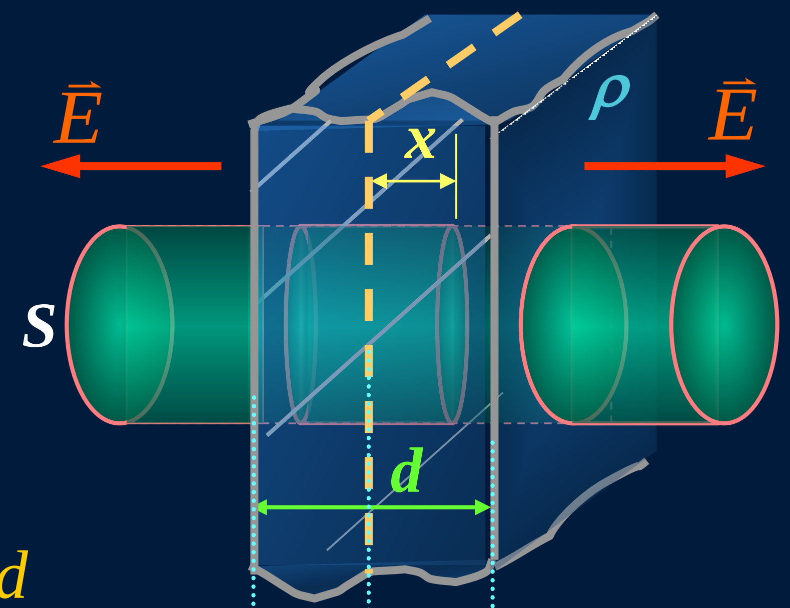
$$= 2ES$$



根据高斯定理 $2ES = \sigma S / \varepsilon_0$ ⇒ $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

➢ 讨论

"无限大" 均匀带电平板（电荷体密度为ρ，厚度为d）

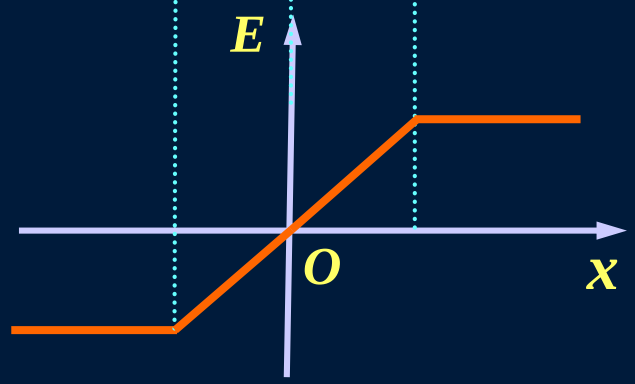


取关于平板对称的圆柱面为高斯面。

$$\Phi_e = 2ES$$

板外：$\sum q = \rho S d \Longrightarrow E = \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}$

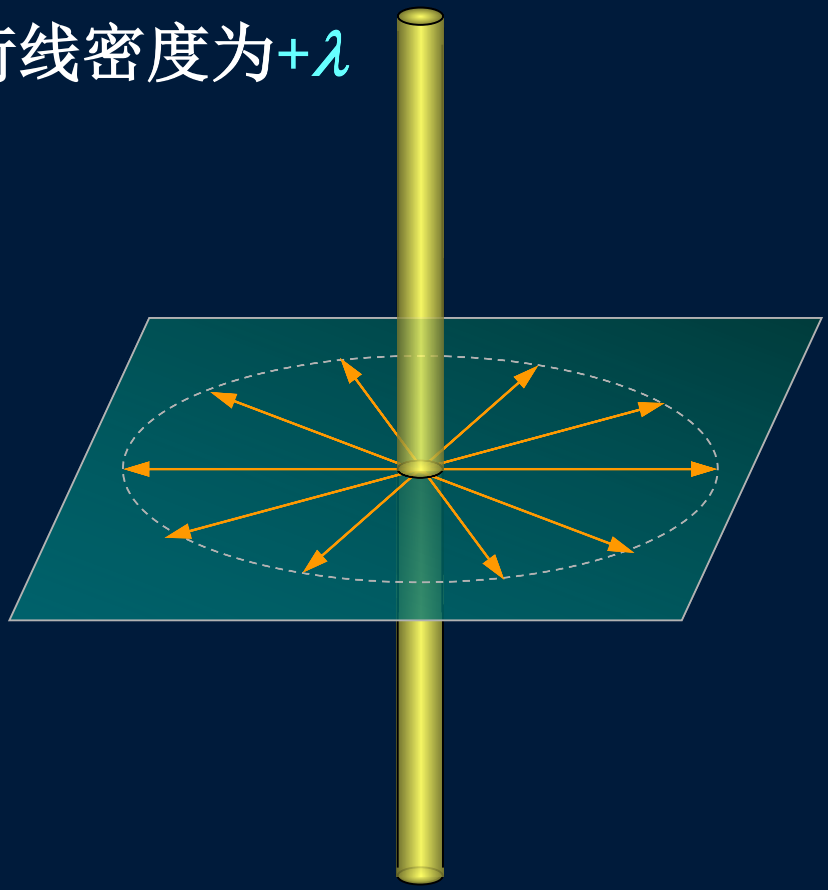
板内：$\sum q = \rho S \cdot 2x \Longrightarrow E = \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}$



例 "无限长" 均匀带电直线，电荷线密度为$+\lambda$

求 电场强度分布

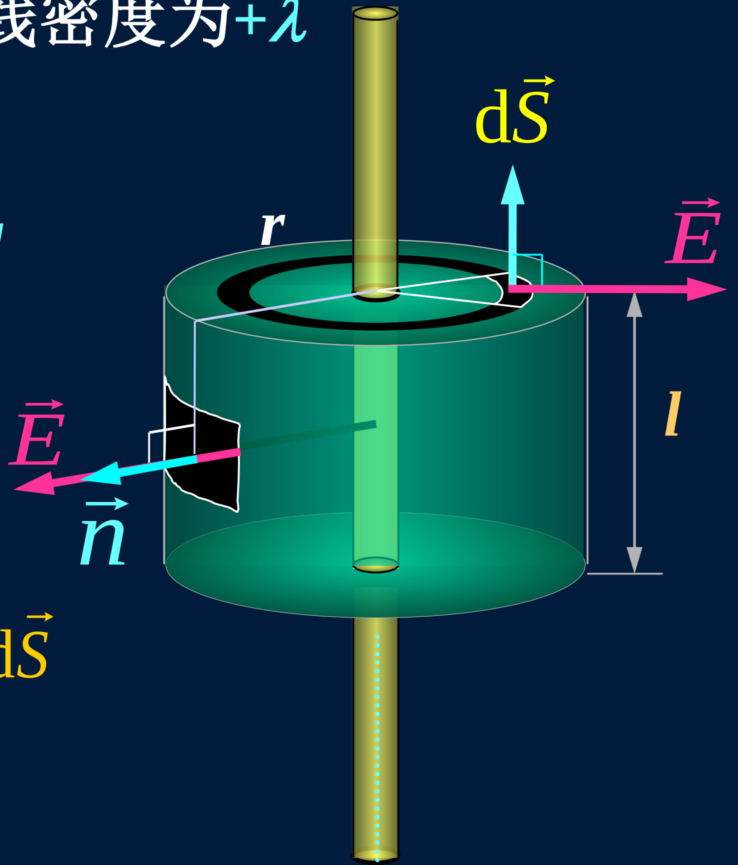
解 电场分布具有轴对称性



例 “无限长” 均匀带电直线，电荷线密度为$+\lambda$

求 电场强度分布

解 电场分布具有轴对称性，以高为l的同轴圆柱面为高斯面，电通量



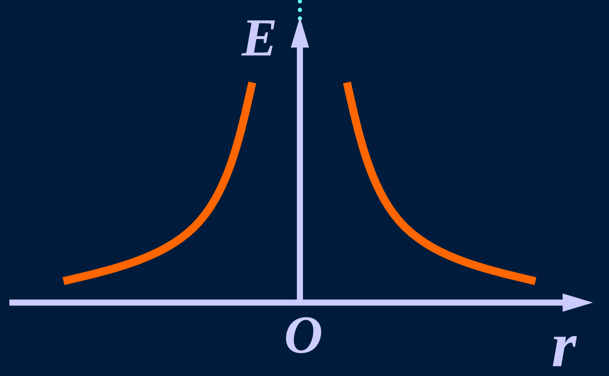
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{上底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{下底} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_{侧} E\mathrm{d}S = E\cdot 2\pi r l$$

根据高斯定理 $E\cdot 2\pi r l = \lambda l / \varepsilon_0$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$



解题思路：

用高斯定理求电场强度的步骤：

(1) 由电荷分布的对称性，分析电场强度分布的对称性。

(2) 根据对称性选取适当的高斯面。

- 高斯面必须是闭合曲面
- 高斯面必须通过所求的点
- 高斯面的选取使通过该面的电通量易于计算

(3) 计算通过高斯面的电通量及其内包围的电荷量。

(4) 根据高斯定理求电场强度。