作业

A={a,b,c,d,e}　A上的偏序关系R的哈斯图为3.11

(a) 下列关系式哪个是真？

aRb，　dRa，　cRe，

bRe，　aRa，　bRc，　dRe

(b) 把哈斯图改为有向图。

(c) 求出 A 的最小元素和最大元素，如果不存在，则指出不存在。

(d) 求出 A 的极大元素和极小元素。

(e) 求出子集 $\{b, c, d\}$、$\{c, d, e\}$ 和 $\{a, b, c\}$ 的上界和下界，并指出这些子集的 lub 和 glb，如果它们存在的话。

解　(a) dRa，aRa 是真，其余是假。

(b) 关系 R 对应的有向图如 3.12 所示。

(c) A 的最小元素不存在，A 的最大元素是 a。

(d) A 的极大元素是 a，极小元素是 d 和 e。

(e) $\{b, c, d\}$ 的上界为 a，下界为 d，且其 $\text{lub}=a$，$\text{glb}=d$。

$\{c, d, e\}$ 的上界为 c 和 a，下界不存在，且其 $\text{lub}=c$。

$\{a, b, c\}$ 的上界为 a，下界为 d，且其 $\text{lub}=a$，$\text{glb}=d$。

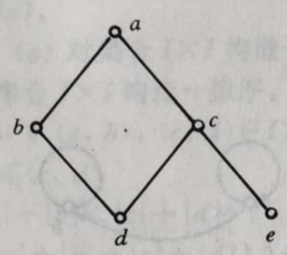


图　3.11

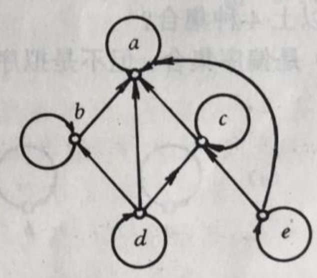


图　3.12

2.8 等价关系

- 定义 （解决分类问题）
- 等价类
- 划分
- 划分与等价类互相确定

渔民按品种对捕捞的鱼进行分类
一个班里按姓氏、年龄相等、老乡、小组讨论分类等

等价关系

定义 设R为集合A上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若$<x,y>\in R$, 称 x等价于y, 记做$x\sim y$.

- 同姓关系、等于关系是等价关系
- 朋友关系、 包含关系不是等价关系
- 所有英文单词建立的关系R，aRb当且仅当a和b的长度相同，则关系R是等价关系

实例

空集合φ中的二元关系*R*是等价关系,因为

(1) $\forall x(x\in\varphi\rightarrow xRx)$

(2) $\forall x\forall y[x\in\varphi\wedge y\in\varphi\wedge xRy\rightarrow yRx]$

(3) $\forall x\forall y\forall z$

$[x\in\varphi\wedge y\in\varphi\wedge z\in\varphi\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz]$

实例

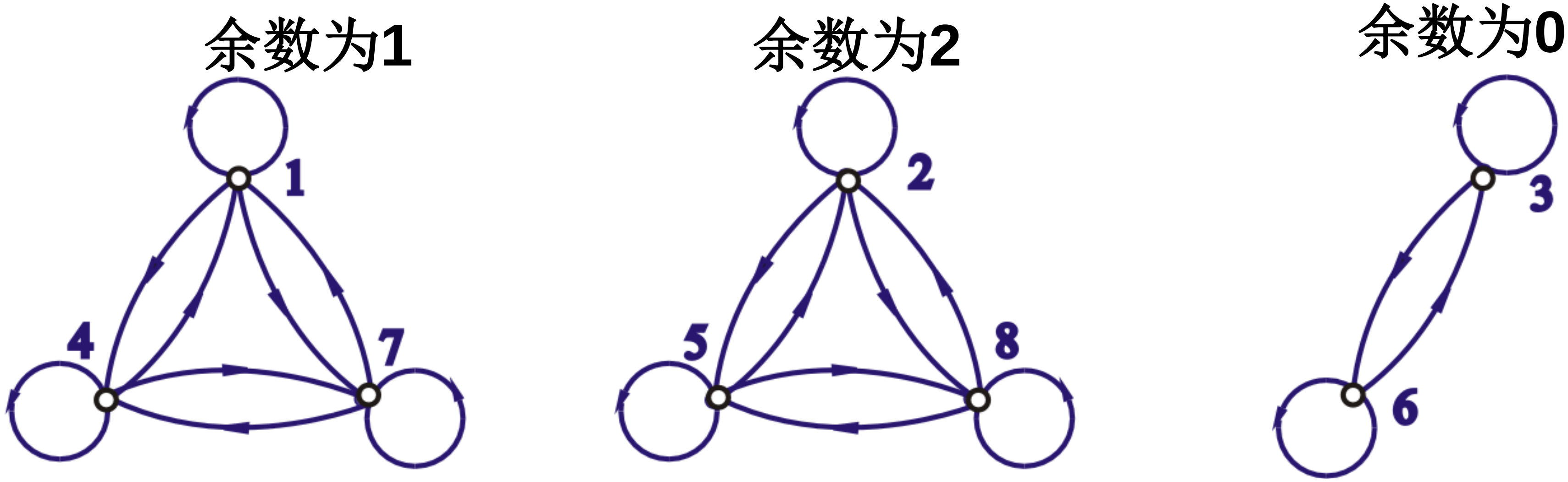
设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\equiv y \pmod 3\}=\{\langle x,y\rangle \mid 3\mid(x-y)\}$$

其中$x\equiv y \pmod 3$叫做 x与 y 模3相等(或以3为模的同余关系), 即x除以3的余数与y除以3的余数相等.

$R=\{\langle 1,4\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 1,7\rangle,\langle 7,1\rangle,\langle 4,7\rangle,\langle 7,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 5,2\rangle$
$\langle 2,8\rangle,\langle 8,2\rangle,\langle 5,8\rangle,\langle 8,5\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 6,3\rangle\}\cup I$

实例



模 3 等价关系的关系图

- 关系图被分成3个互不连通的部分，每部分中的数两两都有关系，不同部分中的数则没有关系，每部分中的所有的顶点构成一个等价类。
- {1, 4, 7} {3, 6} {2, 5, 8}

定理

- 模k的同余关系是任何集合$A\subseteq I$上的等价关系。

证明：如果A=φ, 是等价关系

如果$A\neq\varphi$,则

(1)自反的. $a-a=0\cdot k$

(2)对称的. $a-b=m\cdot k$,可得$b-a=-m\cdot k$

(3)传递的. $a-b=m_1 k$和$b-c=m_2\cdot k$,

可得$a-c=(m_1+m_2)\cdot k$

同余的应用

1.伪随机数的产生

线性同余法 $x_{n+1}=(ax_n+c)\bmod m$

2.信息加密

stop 移位函数 （p+11）mod26

数字串 18 19 14 15 3 4 25 0 deza

3.校验码

零售产品的UPC标识，最后一位是校验码，由同余关系决定。

等价类

定义 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x\in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y\in A \wedge xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称为x的等价类, 简记为$[x]$

实例 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模3等价关系的等价类：

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

结论： $x\in[x]$

若$y\in[x]$，则必有$[y]= [x]$

若$y\notin[x]$，则$[x]$与$[y]$分离

等价类的性质

定理 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是 A 的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy, 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

证 (1) 由定义, $\forall x \in A$ 有 $[x] \subseteq A$. 又 $x \in [x]$, 即 $[x]$ 非空.

(2) 任取 z, 则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R \Rightarrow \langle z,x\rangle \in R \qquad \text{对称性}$$

因此有

$$\langle z,x\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle z,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,z\rangle \in R \qquad \text{传递性}$$

从而证明了 $z \in [y]$. 综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$. 同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 这就得到了 $[x] = [y]$.

证明

(3) 假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$, 则存在 $z\in[x]\cap[y]$, 从而$z\in[x]\wedge z\in[y]$,

即$\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R$成立. 根据$R$的对称性和传递性必

有$\langle x,y\rangle\in R$, 与 $x \not R y$矛盾

(4) 先证$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$. 任取$y$,

$$y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}\Rightarrow\exists x(x\in A\wedge y\in[x])$$

$$\Rightarrow y\in[x]\wedge[x]\subseteq A\Rightarrow y\in A$$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

再证$A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$. 任取$y$,

$$y\in A\Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A\Rightarrow y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$成立.

综上所述得$\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

商集与划分

定义 设 R 为非空集合A上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的**商集**, 记做A/R,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$，A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{8\}\}，\quad A/E_A = \{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

划分

- 在等价关系中我们发现，同一等价类中的元素具有相同的属性，因而可将集合中的元素分成不同的类别，对应于集合的划分。

定义 设A为非空集合，若A的子集族$\pi(\pi \subseteq P(A))$满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个**划分**，称π中的元素为A的**划分块**.

划分实例

设 $A=\{a, b, c, d\}$, 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$如下:

$\pi_1=\{\{a, b, c\},\{d\}\}$

$\pi_2=\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

$\pi_3=\{\{a\}, \{a, b, c, d\}\}$

$\pi_4=\{\{a, b\}, \{c\}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{a, b\}, \{c, d\}\}$

$\pi_6=\{\{a, \{a\}\}, \{b, c, d\}\}$

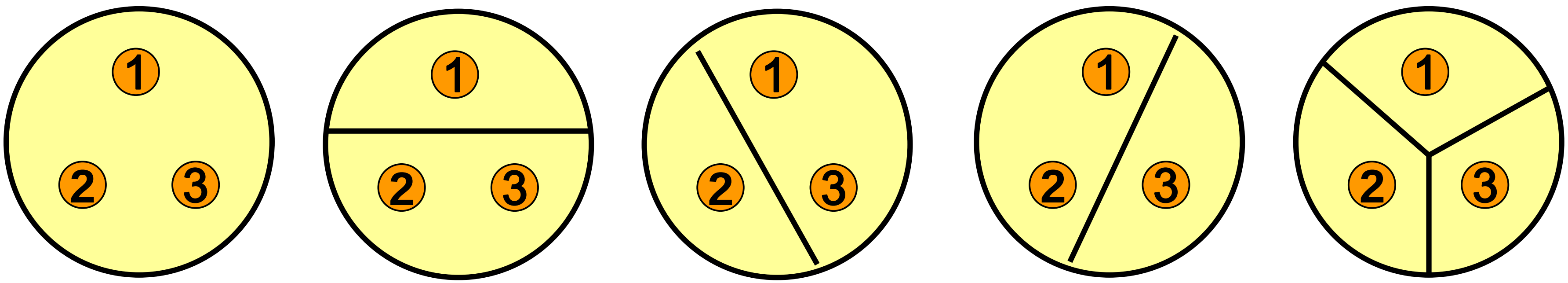
哪些是A的划分，哪些不是?

π_1和 π_2是A的划分, 其它都不是A的划分.

实例

给出 A＝{1,2,3}上所有的等价关系。（2^9里面找，不方便）

解　先做出A的所有划分, 从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1　　π_2　　π_3　　π_4　　π_5

π_1对应 E_A, π_5 对应 I_A,　π_2, π_3 和 π_4分别对应 R_2, R_3和 R_4.

$$R_2=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$$

$$R_3=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$$

$$R_4=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

划分　等价类　等价关系

定理

定理 任意集合A上的划分C可产生一个等价关系。

证明：设 $C=\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$中$C_i(i=1,2,\ldots,m)$为$C$的块，由$C$可建立一个关系

$$R = (C_1\times C_1)\cup(C_2\times C_2)\cup\ldots\cup(C_m\times C_m)$$

这个关系是等价关系。

因为$C_i\times C_i$构成了等价类。

反过来，等价关系可以确定集合的一个划分（即商集）

实例

设$A=\{a,b,c,d,e\}$,

$R=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,a>,<b,c>,<c,c>,<c,a>,$
$<c,b>,<d,d>,<d,e>,<e,e>,<e,d>\}$,

则R诱导的划分$\pi=\{\{a,b,c\},\{d,e\}\}$.

反之,若A的划分$\pi=\{\{a,b,c\},\{d,e\}\}$,

则π所诱导的等价关系

$R=\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}\cup\{d,e\}\times\{d,e\}$

$=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,a>,<b,c>,<c,c>,<c,a>,<c,b>,<d,d>,<d,e>,<e,e>,<e,d>\}$

作业

徐 P38 2.14 2.15 2.17

补充题：

设A={a,b,c,d}, A上的等价关系R={<a, b>, <b, a>，<c,d>, <d, c>}∪I, 则对应于R的A的划分是( )