# 推理小结



- 推理过程中要使用推理规则；
- 推理规则包括逻辑等价式、蕴涵重言式、P、T、CP等；
- 结论是$P\rightarrow Q$形式的，用CP规则；
- 前提条件不好推导，尝试用间接证明法（反证法）

# 例

- 民警侦查一起盗窃案,掌握了下述事实:

(1)甲或乙偷了一台计算机

(2)若甲偷了这台计算机,则作案时间不可能发生在午夜之前.

(3)若乙说的是真话,则午夜时屋里的灯是亮着的.

(4)若乙说的是谎话，则作案时间在午夜之前.

(5)午夜时屋里的灯灭了.

问:是谁偷了这台计算机?

符号化：P：甲偷了计算机；Q:乙偷了计算机；

R:作案时间发生在午夜之前；S:乙说的是真话；

T：午夜时屋里的灯是亮的

$P \vee Q$，$P \rightarrow \neg R$，$S \rightarrow T$，$\neg S \rightarrow R$， $\neg T$

# 10.6 范　式

- 析取与合取范式
- 主析取与主合取范式

# 基本概念



(1) 文字——命题变元及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

$p$, $\neg q$, $p\vee\neg q$, $p\vee q\vee r$, …

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

$p$, $\neg q$, $p\wedge\neg q$, $p\wedge q\wedge r$, …

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$p$, $\neg p\wedge q$, $p\vee\neg q$, $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$p$, $p\vee\neg q$, $\neg p\wedge q$, $(p\vee q\wedge\neg \mathrm{p})\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

# 性质

**定理10.1 (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变元和它的否定式.**
**(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变元和它的否定式.**

**定理10.2 (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式.**
**(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.**

# 范式存在定理：



**定理10.3**（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式

**求公式$A$的范式的步骤：**

**(1)** 消去$A$中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$（若存在）

$$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$$

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

**(2)** 否定联结词$\neg$深入命题变元前或消去

$$\neg\neg A\Leftrightarrow A$$

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$$

$$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$$

**(3)** 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$　　求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$　　求析取范式

# 例1



$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （德摩根律） 析取范式

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律） 合取范式

# 例2：



- 求$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$的合取范式与析取范式

解：$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\rightarrow(P\wedge Q))\wedge((P\wedge Q)\rightarrow\neg(P\vee Q))$

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\vee(P\wedge Q))\wedge(\neg(P\wedge Q)\vee\neg(P\vee Q))$

$\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$ （消去律）（合取范式）

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg P))\vee((P\wedge\neg Q)\vee(Q\vee\neg Q))$

（分配律）（析取范式）

$\Leftrightarrow(Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)$ （析取范式）

公式范式的不足——不唯一

# 主析取范式



**定义** 在含有$n$个命题变元的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变元和它的否定式恰好出现一个且仅出现一次，称这样的简单合取式（简单析取式）为**极小项(极大项)**.

几点说明:

- $n$个命题变元有$2^n$个最小项和$2^n$个最大项
- $2^n$个最小项（最大项）均互不等价
- 每个最小项（最大项）都有且只有一个成真（成假）赋值
- 用$m_i$表示第$i$个最小项，其中$i$是该最小项成真赋值的十进制表示. 用$M_i$表示第$i$个最大项，其中$i$是该最大项成假赋值的十进制表示. $m_i$（$M_i$）称为最小项（最大项）的名称.

# 二元变元的极小项的真值表



| P | Q | ┐P∧┐Q | ┐P∧Q | P∧┐Q | P∧Q |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

# 三个变元的极小项



- $m_0 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ ——0 0 0——0
- $m_1 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R$ ——0 0 1——1
- $m_2 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R$ ——0 1 0——2
- $m_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R$ ——0 1 1——3
- $m_4 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ ——1 0 0——4
- $m_5 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$ ——1 0 1——5
- $m_6 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R$ ——1 1 0——6
- $m_7 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$ ——1 1 1——7

# 主析取范式

定义 一个由极小项由最小项构成的析取范式, 如果与给定的命题公式A等价, 则称它是A的主析取范式。

注：任何一个命题公式都可求得它的主析取范式, 这是因为任何一个命题公式都可求得它的析取范式, 而析取范式可化为主析取范式。

求法

- 等价替换（利用基本等价公式）
- 真值表法

# 等价替换法



**步骤：**

- 先求得析取范式
- 将简单合取式中没有出现的变元P所在的位置合取上 $(P \vee \neg P)$，再用分配律展开
- 最后将求得的极小项按下标从小到大的顺序排列

# 例



- 求$\neg P \wedge (Q \rightarrow R)$的主析取范式

解：$\neg P \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg P \wedge (\neg Q \vee R)$（合取范式）

$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge R$（析取范式）

$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \vee R) \vee \neg P \wedge R \wedge (\neg Q \vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$

# 真值表法



- 定理10.4 一公式的真值表中，使其为T的指派所对应的最小项组成的析取式即为此公式的主析取范式。
- 极小项 指派

$P\wedge\neg Q\wedge R$ 1 , 0 , 1

当且仅当将对应的指派代入该极小项, 该极小项的值才为 1。

# 续： 求$\neg P\wedge(Q\rightarrow R)$的主析取范式

| P | Q | R | $\neg P\wedge(Q\rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

$\neg P\wedge(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3$

# 例



- **求 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$ 的主析取范式**

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_7$

| P | Q | R | $P \rightarrow Q$ | $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 二元变元的极大项



| P | Q | $P \vee Q$ | $P \vee \neg Q$ | $\neg P \vee Q$ | $\neg P \vee \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# 说明

- 将命题变元对应于 0, 命题变元的否定对应于 1,
- 3 个变元的极大项是

| 极大项 | 足标 | 指派 |
| --- | --- | --- |
| $P\vee\neg Q\vee R$—— | 0 1 0 —— | 0 1 0 |

- 其目的是当且仅当将极大项的对应指派代入该极大项, 才使该极大项的真值为 0, 使今后许多运算得到方便。

# 比较图



表 2.11

| 极小项 | | | 极大项 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 公式 | 成真赋值 | 名称 | 公式 | 成假赋值 | 名称 |
| $\neg p \wedge \neg q$ | 0 0 | $m_0$ | $p \vee q$ | 0 0 | $M_0$ |
| $\neg p \wedge q$ | 0 1 | $m_1$ | $p \vee \neg q$ | 0 1 | $M_1$ |
| $p \wedge \neg q$ | 1 0 | $m_2$ | $\neg p \vee q$ | 1 0 | $M_2$ |
| $p \wedge q$ | 1 1 | $m_3$ | $\neg p \vee \neg q$ | 1 1 | $M_3$ |

表 2.12

| 极小项 | | | 极大项 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 公式 | 成真赋值 | 名称 | 公式 | 成假赋值 | 名称 |
| $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$ | 0 0 0 | $m_0$ | $p \vee q \vee r$ | 0 0 0 | $M_0$ |
| $\neg p \wedge \neg q \wedge r$ | 0 0 1 | $m_1$ | $p \vee q \vee \neg r$ | 0 0 1 | $M_1$ |
| $\neg p \wedge q \wedge \neg r$ | 0 1 0 | $m_2$ | $p \vee \neg q \vee r$ | 0 1 0 | $M_2$ |
| $\neg p \wedge q \wedge r$ | 0 1 1 | $m_3$ | $p \vee \neg q \vee \neg r$ | 0 1 1 | $M_3$ |
| $p \wedge \neg q \wedge \neg r$ | 1 0 0 | $m_4$ | $\neg p \vee q \vee r$ | 1 0 0 | $M_4$ |
| $p \wedge \neg q \wedge r$ | 1 0 1 | $m_5$ | $\neg p \vee q \vee \neg r$ | 1 0 1 | $M_5$ |
| $p \wedge q \wedge \neg r$ | 1 1 0 | $m_6$ | $\neg p \vee \neg q \vee r$ | 1 1 0 | $M_6$ |
| $p \wedge q \wedge r$ | 1 1 1 | $m_7$ | $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ | 1 1 1 | $M_7$ |

# 主合取范式求法



- 等价替换（利用基本等价公式）
- 真值表法

等价替换法步骤：

1、先求得合取范式

2、将简单析取项中没有出现的变元P所在的位置析取上 $(P \wedge \neg P)$，再用分配律展开

3、最后将求得的极大项按下标从小到大的顺序排列

# 续前例



- 求$\neg P \land (Q \rightarrow R)$的主合取范式

解：$\neg P \land (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow \neg P \land (\neg Q \lor R)$ （合取范式）

$\Leftrightarrow (\neg P \lor (\neg Q \land Q) \lor (\neg R \land R)) \land ((\neg P \land P) \lor R \lor \neg Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \lor Q \lor R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor R) \land (P \lor \neg Q \lor R)$

$(\neg P \lor Q \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor \neg R)$

$\Leftrightarrow M_2 \land M_4 \land M_5 \land M_6 \land M_7$

# 真值表法



- 定理10.5 一公式的真值表中，使其为F的指派所对应的最大项组成的合取式即为此公式的主合取范式。

# 真值表法



$(P \to Q) \leftrightarrow R$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

| P | Q | R | $P \to Q$ | $(P \to Q) \leftrightarrow R$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 练习

- 求 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$ 的主合取范式
- $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \land (R \rightarrow (P \rightarrow Q))$

$\Leftrightarrow ((\neg P \lor Q) \rightarrow R) \land (\neg R \lor \neg P \lor Q)$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg P \lor Q) \lor R) \land (\neg R \lor \neg P \lor Q)$

$\Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor R) \land (\neg R \lor \neg P \lor Q)$

$\Leftrightarrow (P \lor R) \land (\neg Q \lor R) \land (\neg R \lor \neg P \lor Q)$ (合取范式）

$\Leftrightarrow (P \lor R \lor (Q \land \neg Q)) \land ((P \land \neg P) \lor \neg Q \lor R) \land (\neg R \lor \neg P \lor Q)$

$\Leftrightarrow (P \lor R \lor Q) \land (P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor \neg R)$

$\Leftrightarrow$ **M0∧M2 ∧M6 ∧M5 (主合取范式）**

**主析取范式为 m1 ∨ m3 ∨ m4 ∨ m7**

# 主范式的应用



## 1. 求公式的成真成假赋值

设公式$A$含$n$个命题变元, $A$的主析取范式有$s$个最小项, 则$A$有$s$个成真赋值, 它们是最小项下标的二进制表示, 其余$2^n$-$s$个赋值都是成假赋值

例如　$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$
成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,
成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

# 主范式的应用



## 2. 判断公式的类型

设$A$含$n$个命题变元.

$A$为重言式 $\Leftrightarrow$ $A$的主析取范式含全部$2^n$个最小项

$\Leftrightarrow$ $A$的主合取范式不含任何最大项, 记为1.

$A$为矛盾式 $\Leftrightarrow$ $A$的主合析取范式含全部$2^n$个最大项

$\Leftrightarrow$ $A$的主析取范式不含任何最小项, 记为0.

$A$为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ $A$的主析取范式中至少含一个、但不是全部最小项

$\Leftrightarrow$ $A$的主合取范式中至少含一个、但不是全部最大项.

# 主范式的应用

## 3. 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判以下每一组公式是否等价

（1） $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

（2） $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等价，而(2)的不等价.

# 主范式的应用

## 4.解决实际问题

某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察,选派要同时满足以下条件：

（1）若A去，则C同去；

（2）若B去，则C不能去；

（3）若C不去，则A或B可以去。

问所里要如何选派他们?

**设： P: A去；Q: B去； R: C去；**

则三个条件符号化为

$P \to R$；$Q \to \neg R$；$\neg R \to P \vee Q$；

故得到下面公式

$(P \to R) \wedge (Q \to \neg R) \wedge (\neg R \to P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow m_1 \vee m_2 \vee m_5$

# 10.7联结词的扩充与归约



## 命题联结词的扩充

(1) 异或联结词: $A \oplus B = \neg(A \leftrightarrow B)$

(2) 谢佛联结词: $A \uparrow B = \neg(A \wedge B)$

(3) 魏泊联结词: $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$

(4) 蕴涵否定联结词: $A \nrightarrow B = \neg(A \rightarrow B)$

- 与之前学习的五种联结词一起，穷尽了一切命题间的联结词
- 9 个联结词是否都必要?

  三个联结词$\wedge$ ， $\vee$ ，$\neg$ 就足以把一切命题公式等价地表示。

# 联结词的归约



设$S$是一个联结词集合，如果任何公式都可以由仅含$S$中的联结词表示，则称$S$是联结词完备集

定理 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集
证明 由范式存在定理可证

# 定理：



{↑}和{↓}都是联结词完备集。

证明：$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p)$

$\Leftrightarrow p \uparrow p$

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$

$\Leftrightarrow \neg(p \uparrow q)$

$\Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

# 判定全功能方法



- 选一个全功能集合，一般选{∧，┐}或{∨，┐}；
- 若集合中的联结词可以表示全功能集合的每一个联结词；
- 此集合即为全功能的。

# 练习



- 用 $\uparrow$ 表示 $P \rightarrow Q$ ;
- 用 $\downarrow$ 表示 $P \uparrow Q$;

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow \neg (P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P \uparrow \neg Q$$

$$\Leftrightarrow P \uparrow \neg (Q \wedge Q) \Leftrightarrow P \uparrow (Q \uparrow Q)$$

# 作业

3. 求下列各式的主析取范式和主合取范式：

(1) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \neg Q)$

(2) $P \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee (\neg Q \rightarrow R)))$

(3) $(P \rightarrow Q \wedge R) \wedge (\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge \neg R))$

(4) $P \wedge \neg Q \wedge S \vee \neg P \wedge Q \wedge R$

**用↓表示 $P \uparrow Q$;**