第一章　集　合

1. 集合及元素 集合间的关系
2. 集合运算
3. 幂集

内容

- 集合
  - 基本概念及其性质
  - 关系
  - 函数
  - 有限集和无限集

集合论

- 十九世纪数学最伟大成就之一
- 集合论体系
  - –朴素(naive)集合论
  - –公理(axiomatic)集合论
- 创始人康托(Cantor)

1845 ~ 1918, 德国数学家
22岁博士毕业
34岁任教授
39岁精神分裂

- **1902年英国哲学家罗素提出了罗素悖论**
- **1908年，德国数学家策梅罗(E.Zermelo)提出了一套公理，用来消除以上悖论，形成了公理化集合论**
- **本章内容会在合适定义的论述域内讨论集合，不会导致矛盾，所得结论都是有效的。**

集合的概念

- 具有共同性质的事物汇集到一起形成的集体称为集合（set）
  - 用大写英文字母A,B,C,...表示集合
- 组成集合的单个事物称为该集合的元素（element）或称为成员（member）
  - 用小写英文字母a,b,c,...表示元素

集合有时又称为类、族、搜集。

属于

- **$a \in A$: 表示a是A的元素，读作“a属于A”**
- **$a \notin A$: 表示a不是A的元素，读作“a不属于A”**

集合的表示

- 列举法
- 描述法
- 归纳定义法

二进制序列 {0,1}

符号串 {a，b}

列举法

- 列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来。
- 例如

A={a,b,c,d,…,x,y,z} B={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

描述法

- 用谓词P(x)表示x具有性质P，用{x|P(x)}表示具有性质P的集合。
- 例如

P_1 (x):x是英文字母

A={x|P_1 (x)}={x| x是英文字母}

={a,b,c,d,…,x,y,z}

P_2 (x):x是十进制数字

B={x|P_2(x)}= {x|x是十进制数字}

={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

集合中元素具有的性质

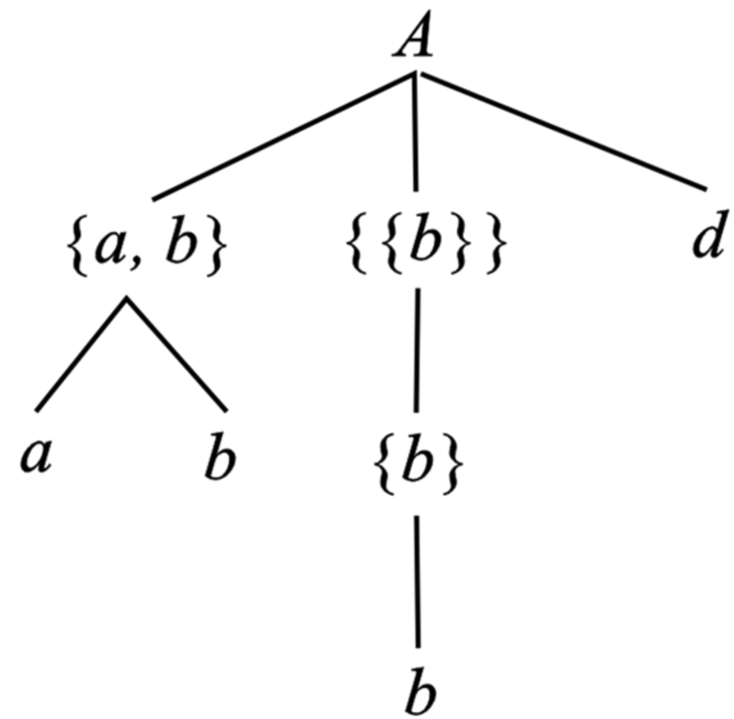
无序性： 元素列出的顺序无关

相异性： 集合的每个元素只计数一次

确定性： 对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素

任意性： 集合的元素也可以是集合

集合的树型层次结构



$d \in A$, $a \notin A$

集合相等

- 外延公理

两个集合*A*和*B*相等, 即*A*=*B*, 当且仅当它们有相同的成员(也就是,*A* 的每一元素是*B*的一个元素而*B*的每一元素也是*A* 的一个元素)。

- 用逻辑符号表达是:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

集合之间的关系

定义:

包含：设A和B是集合, 若A的每一元素是B的一个元素, 则A是B的子集合, 记为$A\subseteq B$, 读做“B包含A”或“A包含于B中。

用逻辑符表示为:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$\star$ $\mathbf{A} \nsubseteq \mathbf{B} \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$

$$\mathbf{A} \nsubseteq \mathbf{B} \Leftrightarrow \neg(A \subseteq B)$$

$$\Leftrightarrow \neg\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg(\neg x \in A \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \neg x \in B)$$

真包含

- 如果A⊆B且A≠B, 那么称A是B的真子集,记作A⊂B 读作“B真包含A”。
- 用逻辑符表示为:

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

⋆ $A \neq B \Leftrightarrow \neg(A = B)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B) \vee \exists x \neg(x \in B \rightarrow x \in A))$

$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee \exists x(x \in B \wedge x \notin A))$

⋆ $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg x \in A \vee x \in B)$

$\Leftrightarrow \forall x \neg(x \in A \wedge \neg x \in B)$

$\Leftrightarrow \neg \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$

定理

- 对任意集合A有 A⊆U。
- 设A、B、C是集合, 若A⊆B且B⊆C, 则A⊆C。
- 设A和B是集合, A=B当且仅当A⊆B和B⊆A。
- 对任意集合A有φ⊆A。
- 空集是唯一的。

幂集合

- 幂集: **A**的全体子集组成的集合,称为**A**的幂集,记作**P(A)**

$$P(A) = \{x|x \subseteq A\}$$

- 注意: $x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$

- 例子: $A=\{a,b\}$, $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. #

例

- 集合{p,q}有4个不同子集: {p,q}、{p}、{q}和φ, 注意{p}⊂{p,q}但p∈{p,q}，再者φ⊆{p,q}
- 集合{{q}}是单元素集合, 它的唯一元素是集合{q}。每一单元素集合恰有两个子集, {{q}}的子集是{{q}}和 φ。

结论：一般地, n个元素的集合有2^n个不同的子集合.

罗素悖论

- 通常遇到的集合，集合本身不能成为它自己的元素。如：$\{a\}\notin\{a\}$

$$S = \{ x \mid x \notin x \}$$

$$S \in S\ ?$$

$$S \in S \Rightarrow S \notin S$$

$$S \notin S \Rightarrow S \in S$$

S是不以自身为元素的全体集合的集合，

问“S是不是它自己的元素?”

练习1

✶ 找出子集合

$\{\Phi\}$

$\{\Phi, \{\Phi\}\}$

$\{a, \{\Phi, a\}\}$

$\{\{a, b\}, \{a, a, b\}, \{b, a, b\}\}$

练习2

- 找出每一集合的元素和全部子集

$\{\Phi\}$　　$\{\{\Phi\}\}$

$\{a,b,c\}$

$\{a,\{b,c\}\}$

$\{\{a,\{b,c\}\}\}$

作业

1.3 设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$，其中 E 为全集，试求下列集合：

(1) $A\cap\sim B$；

(2) $\sim A\cup\sim B$；

(3) $(A\cap B)\cup\sim C$；

(4) $\sim(A\cap B)$；

(5) $A\cup\sim B\cup C$.

1.4 求下列集合的幂集：

(1) $\{a,\{a\}\}$；

(2) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$；

(3) $\{1,2,3,4\}$.

1.5 证明下列等式：

(1) $(A\cup B)\cap(\sim A\cup C)=(A\cap C)\cup(\sim A\cap B)$；

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$.

1.6 设有集合 A,B，

(1) 若 $A-B=B$，则 A 与 B 有什么关系？

徐15页1.3、1.4

脸？为什么这是

7. 列出下列集合的全部子集合：

(1) $\{\varnothing\}$

(2) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(3) $\{\{\varnothing,a\},\{a\}\}$

(4) $\{\{a,b\},\{a,a,b\},\{b,a,b\}\}$

8. 证明推论 2.1－2。

9. 设 A、B 和 C 是集合，如果 $A\in B$ 和 $B\in C$，$A\in C$ 可能吗？$A\in C$ 常真吗？试明之。

10. 设 A、B 和 C 是集合，证明或否定以下断言：

(1) $[A\notin B\wedge B\notin C]\Rightarrow A\notin C$

(2) $[A\in B\wedge B\notin C]\Rightarrow A\notin C$

(3) $[A\subset B\wedge B\notin C]\Rightarrow A\notin C$

11. 指出下列各组集合中的集合有何不同，列出每一集合的元素和全部子集。

(1) $\{\varnothing\}$，$\{\{\varnothing\}\}$。

(2) $\{a,b,c\}$，$\{a,\{b,c\}\}$，$\{\{a,\{b,c\}\}\}$。

12. $A\subset B$ 且 $A\in B$，这可能吗？证明你的断言。

13. 确定下列各命题的真和假：

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$

(2) $\varnothing\in\varnothing$

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

(5) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

(6) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

(8) $\{a,b\}\in\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

方60页9、11、12、13