概率论与数理统计

第三节　随机变量的函数及其分布

(单个随机变量的函数的分布)

离散型r.v.的函数的分布*

连续型r.v.的函数的分布***

（两个随机变量的函数的分布）

离散型r.v.的函数的分布**

连续型r.v.的函数的分布****

*代表难度系数

第三节　随机变量的函数及其分布(1)

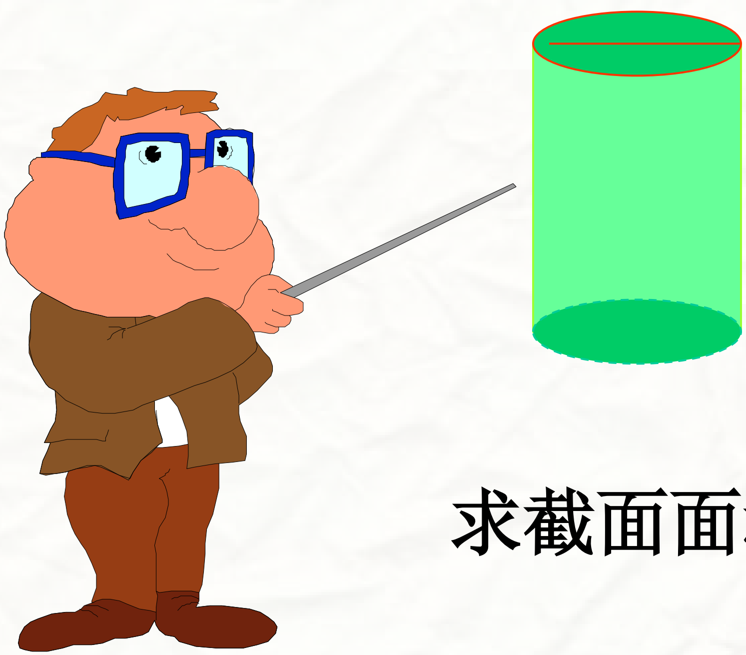
(单个随机变量的函数的分布)

- 一、问题的提出
- 二、离散型随机变量的函数的分布
- 三、连续型随机变量的函数的分布

一、问题的提出

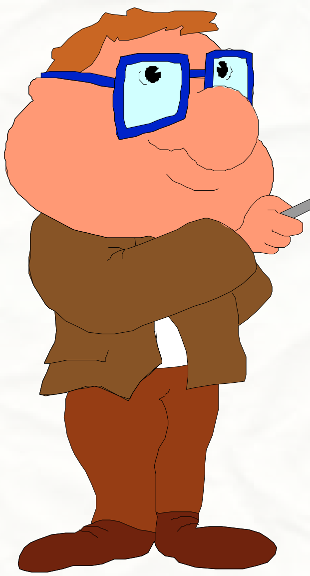
在实际中，人们常常对随机变量的函数更感兴趣.

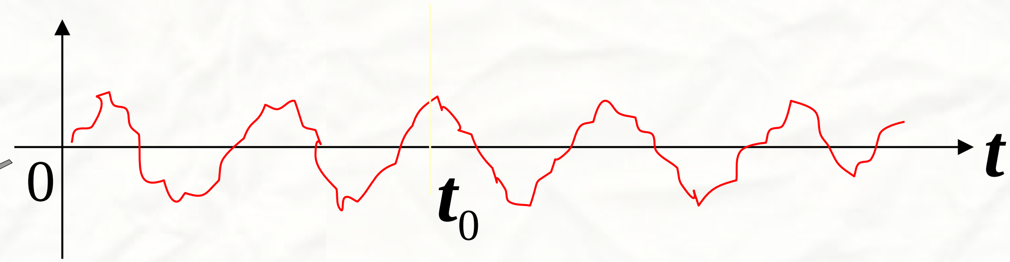
例如，已知圆柱截面直径 d 的分布



求截面面积$A=\dfrac{\pi d^2}{4}$的分布.

已知 $t = t_0$ 时刻噪声电压 V 的分布





求功率 $W=V^2/R$ （R为电阻）的分布等.

设随机变量X 的分布已知，$Y=g\,(X)$ (g是连续函数），如何由 X 的分布求出 Y 的分布？

下面我们分离散型和连续型两种情况进行讨论.

二、离散型随机变量的函数的分布

设 $f(x)$是定义在随机变量X 的一切可能值 x 的集合上的函数，若随机变量Y随着X取x的值而取$y=f(x)$，则称随机变量Y为随机变量X的函数，记为$Y=f(X)$.

? 由已知的随机变量 X 的分布律

➡ 随机变量$Y=f(X)$的分布律?

目 上 下 回 停 续

例1 设离散型随机变量 X 的分布律

X	-3	0	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

求$Y=X-1$的分布律.

解 Y 的可能取值为$-4,-1,2$.

$$P\{Y=-4\}=P\{X=-3\}=\frac{1}{6}$$

$$P\{Y=-1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=2\}=P\{X=3\}=\frac{1}{2}$$

故 Y 的分布律为

Y	-4	-1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

由此归纳出离散型随机变量函数的分布的求法.

如果X是离散型随机变量，其函数$Y=f(X)$也是离散型随机变量，若X的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则$Y=f(X)$的分布律为

$Y=f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $f(x_k)$中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

例2 设

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求$Y = X^2 - 5$的分布律.

解 Y 的分布律为

Y	-4	-1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

三、连续型随机变量的函数的分布

设 X是连续型随机变量，$Y = f(X)$

下面给出两种方法来求Y的概率密度函数

1. 分布函数法

先求：$F_Y(y)$ 再求：$p_Y(y) = F'_Y(y)$.

例3 设随机变量X的概率密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求随机变量$Y = 2X + 8$的概率密度.

解法1 1° 先求$Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\}$$

分布函数的定义

$$= P\{2X + 8 \le y\}$$

代换

$$= P\{X \le \frac{y-8}{2}\}$$

反解(必须保证不等式有意义才能反解)

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

积分

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}0, & \dfrac{y-8}{2}<0,\\ \displaystyle\int_0^{\frac{y-8}{2}}\frac{x}{8}\,\mathrm{d}x & 0\le\dfrac{y-8}{2}<4,\\ 1, & \dfrac{y-8}{2}\ge 4,\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & \dfrac{y-8}{2}<0, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{y-8}{2}} \frac{x}{8}\,\mathrm{d}\,x, & 0\le \dfrac{y-8}{2}<4, \\ 1, & \dfrac{y-8}{2}\ge 4, \end{cases}$$

2° 由分布函数求概率密度.

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} 0, & y<8, \\ \left[\displaystyle\int_0^{\frac{y-8}{2}} \frac{x}{8}\,\mathrm{d}\,x\right]', & 8\le y<16, \\ 0, & y\ge 16, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \left[\displaystyle\int_0^{\frac{y-8}{2}} \frac{x}{8}\,\mathrm{d}\,x\right]', & 8\le y<16, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$\therefore\quad p_Y(y)=\begin{cases}\left[\int_0^{\frac{y-8}{2}}\frac{x}{8}\mathrm{d}\,x\right]', & 8\le y<16,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{8}\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}, & 8\le y<16,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{y-8}{32}, & 8<y<16,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

变限的定积分的求导公式

如果 $F(x)=\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(t)dt,$

则 $F'(x)=f[\phi(x)]\phi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x).$

解法2 **1°** 先求$Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

分布函数的定义

$$=P\{2X+8\le y\}$$

代换

$$=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}$$

反解(必须保证不等式有意义才能反解)

$$=F_X\left(\frac{y-8}{2}\right)$$

分布函数定义

2° 由分布函数求概率密度.

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-8}{2}\right)$$

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\left(\frac{y-8}{2}\right)'$$

复合函数求导

$$= \begin{cases} 0, & \frac{y-8}{2} < 0, \\ \frac{\frac{y-8}{2}}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{y-8}{32}, & 0 \le \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0 & \frac{y-8}{2} \ge 4, \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 8, \\ \dfrac{y-8}{32} & 8 \le y < 16, \\ 0, & y \ge 16, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

例4 设随机变量X具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解法1第1步 求Y 的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

$$=\begin{cases}0, & y<0,\\ P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}, & y\ge 0,\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0,\\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx, & y\ge 0,\end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx, & y \ge 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{x+1}{2} dx, & 0 \le y < 1, \\ \int_{-1}^{1} f_X(x)dx = 1, & y \ge 1. \end{cases}$$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\begin{cases}0, & y<0,\\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{x+1}{2}dx, & 0\le y<1,\\ \int_{-1}^{1}f_X(x)dx=1, & y\ge 1.\end{cases}$$

第2步 求 Y的概率密度 $f_Y(y)$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

$$=\begin{cases}\frac{\sqrt{y}+1}{2}(\sqrt{y})'-\frac{-\sqrt{y}+1}{2}(-\sqrt{y})', & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{\sqrt{y}+1}{2}+\frac{-\sqrt{y}+1}{2}\right], & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

所以得

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left[\dfrac{\sqrt{y}+1}{2}+\dfrac{-\sqrt{y}+1}{2}\right], & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解法2 第一步 求Y的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

$$=\begin{cases}0, & y<0,\\ P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}, & y\ge 0,\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0,\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}) & y\ge 0,\end{cases}$$

第二步 求Y的密度函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}) & y\geq 0,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)$$

$$=\begin{cases}f_X(\sqrt{y})\cdot(\sqrt{y})'-f_X(-\sqrt{y})\cdot(-\sqrt{y})', & y\geq 0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$\boxed{f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & -1\leq x\leq 1\\ 0, & 其他,\end{cases}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}+1}{2}(\sqrt{y})'-\dfrac{-\sqrt{y}+1}{2}(-\sqrt{y})', & 0\leq y<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}+1}{2}(\sqrt{y})' - \dfrac{-\sqrt{y}+1}{2}(-\sqrt{y})', & 0 \le y < 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}[\dfrac{\sqrt{y}+1}{2} + \dfrac{-\sqrt{y}+1}{2}], & 0 \le y < 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y \le 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

2. 公式法

定理 (例2.18) 设随机变量X具有概率密度$p_X(x)$，其中$p_X(x)$在(a,b)上具有非零表达式，又设函数$f(x)$在（a,b）上可导，且恒有$f'(x)>0$(或恒有$f'(x)<0$)，则$Y=f(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$p_Y(y)=\begin{cases} p_X[f^{-1}(y)]\cdot\left|[f^{-1}(y)]'\right|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $f^{-1}(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，(α,β)是$f^{-1}(y)$的定义域，

$$\left|[f^{-1}(y)]'\right|=\begin{cases} [f^{-1}(y)]', & \text{当 } f'(x)>0\text{时}, \\ -[f^{-1}(y)]', & \text{当 } f'(x)<0\text{时}. \end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

证 若 $f'(x) > 0$,

则 $y = f(x)$单调增加，且其反函数

$x = f^{-1}(y)$在(α, β)上单调增加.

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{f(X) \le y\} = P\{X \le f^{-1}(y)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} 0, & f^{-1}(y) \le a, \\ \int_a^{f^{-1}(y)} p_X(x)\,\mathrm{d}x, & a \le f^{-1}(y) < b, \\ 1, & f^{-1}(y) \ge b \end{cases}$$

$$\therefore \quad p_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}$$

$$= \begin{cases} 0, & f^{-1}(y) \le a, \\ [\int_a^{f^{-1}(y)} p_X(x)\,\mathrm{d}x]', & a \le f^{-1}(y) < b, \\ 0, & f^{-1}(y) \ge b \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\int_a^{f^{-1}(y)} p_X(x)\,\mathrm{d}x]', & f(a) \le y < f(b), \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p_X[f^{-1}(y)] \cdot [f^{-1}(y)]' & f(a) \le y < f(b), \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

对于 $f'(x) < 0$ 的情形可作类似的证明.

公式法步骤

1. 判断$Y=f(X)$是否是严格单调函数，

2. 反解 由$y=f(x)$得$x=f^{-1}(y)$，

3. 求导 $[f^{-1}(y)]'$

4. 代公式

$$p_Y(y)=\begin{cases} p_X[f^{-1}(y)]\cdot\left|[f^{-1}(y)]'\right|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

其中$\alpha=\min\{f(a),f(b)\}$, $\beta=\max\{f(a),f(b)\}$.

例5 设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$,试证明X的线性函数 $Y = aX + b(a \neq 0)$也服从正态分布.

证 X 的概率密度为

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty.$$

设 $y = f(x) = ax + b,$

得 $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a}$, 知 $[f^{-1}(y)]' = \dfrac{1}{a} \neq 0.$

目 上 下 回 停 续

由公式 $p_Y(y) = p_X[f^{-1}(y)] \cdot \left|[f^{-1}(y)]'\right|$

得 $Y = aX + b$ 的概率密度为

$$p_Y(y) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right), \quad -\infty < \frac{y-b}{a} < +\infty.$$

$$= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

得 $Y = aX + b$

$\sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

例6 设 $X \sim U(0,1)$, 求 $Y = \mathrm{e}^X$ 的密度函数.

解 $\because X \sim U(0,1)$

$\therefore X$的密度函数为

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

方法1 (公式法)

$\because y = \mathrm{e}^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上可导，单调增加

$$x = f^{-1}(y) = \ln y, \quad [f^{-1}(y)]' = \frac{1}{y}$$

$$\therefore \quad p_Y(y)=\begin{cases} p_X[f^{-1}(y)]\cdot[f^{-1}(y)]', & 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1\cdot[f^{-1}(y)]', & 0<f^{-1}(y)<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1\cdot\dfrac{1}{y}, & 0<\ln y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

方法2 (分布函数法)

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\mathrm{e}^X\le y\}$$

$$=\begin{cases}P(\varnothing), & y\le 0,\\ P\{X\le \ln y\}, & y>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \int_{-\infty}^{\ln y} p_X(x)\,\mathrm{d}x, & y>0.\end{cases}$$

当 $y>0$ 时,

$$\int_{-\infty}^{\ln y} p_X(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \ln y\le 0,\\ \int_0^{\ln y} p_X(x)\,\mathrm{d}x, & 0<\ln y<1,\\ \int_0^1 p_X(x)\,\mathrm{d}x, & \ln y\ge 1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & \ln y \le 0, \\ \int_0^{\ln y} p_X(x)\,\mathrm{d}x, & 0 < \ln y < 1, \\ \int_0^1 p_X(x)\,\mathrm{d}x, & \ln y \ge 1. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & \ln y \le 0, \\ \int_0^{\ln y} 1\,\mathrm{d}x, & 0 < \ln y < 1, \\ \int_0^1 1\,\mathrm{d}x, & \ln y \ge 1. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & y \le 1, \\ \ln y, & 1 < y < \mathrm{e}, \\ 1, & y \ge \mathrm{e}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ 0, & 0<y\le 1,\\ \ln y, & 1<y<\mathrm{e},\\ 1, & y\ge \mathrm{e}.\end{cases}$$

从而 $$p_Y(y)=\frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例7 设随机变量 X分布函数$F(x)$是严格单调的连续函数，试 证明：$Y=F(X)$在$[0,1]$上服从均匀分布.

证 $\because$ $F(x)$是分布函数

$\therefore$ $0 \le F(x) \le 1$, 且$F(x)$单调不减

依题意，又知 $F(x)$严格单调增加

故 $\forall\ y \in \mathrm{R}$,

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\}$$

目 上 下 回 停 续

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\}$$

$$= \begin{cases} P(\varnothing), & y < 0, \\ P\{F(X) \le y\}, & 0 \le y \le 1, \\ P(\Omega), & y > 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ P\{X \le F^{-1}(y)\}, & 0 \le y \le 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ F[F^{-1}(y)], & 0 \le y \le 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \le y \le 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

$$\therefore \quad p_Y(y) = [F_Y(y)]'$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

即$Y = F(X)$服从[0,1]上的均匀分布.

？能否用公式法解？如何解？

内容小结

1. 离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量,其函数 $Y=f(X)$ 也是离散型随机变量.若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=f(X)$的分布律为

$Y=f(X)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $f(x_k)$中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

2. 连续型随机变量的函数的分布

方法1 $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{f(X) \le y\}$

$$= \int_{f(x)\le y} p_X(x)\mathrm{d}x \qquad (-\infty < x < \infty)$$

再对$F_Y(y)$求导得到Y的密度函数.

方法2

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X[f^{-1}(y)]\left|[f^{-1}(y)]'\right|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

注意条件.

思考题

设$f(x)$是连续函数，若X是离散型随机变量则$Y=f(X)$也是离散型随机变量吗？若X是连续型的又怎样？

答： 若X是离散型随机变量，它的取值是有限个或可列无限多个，因此Y的取值也是有限个或可列无限多个，因此Y是离散型随机变量，若X是连续型随机变量，那么Y不一定是连续型随机变量.

例如 设X在(0,2)上服从均匀分布，概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又设连续函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 2.\end{cases}$

则 $Y=f(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 可以计算出来：

目 上 下 回 停 续

由于 Y 的取值为 $[0,1]$，所以

当$y<0$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0;$

当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1;$

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{f(X)\le y\}$

$$=\int_{-\infty}^{y}p(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{y}{2}.$$

目 上 下 回 停 续

故Y的分布函数为$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{y}{2}, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$

因为$F_Y(y)$在$y=1$处间断，故$Y=f(X)$不是连续型随机变量，又因为$F_Y(y)$不是阶梯函数，故$Y=f(X)$也不是离散型随机变量.


再见

备用题

例2-1 测量一类圆形物体的半径X为随机变量其分分布列为

X	10	11	12	13
P_k	0.1	0.4	0.3	0.2

求圆周长 Y_1和圆面积 Y_2的分布列.

解 $Y_1 = 2\pi X$和$Y_2 = \pi X^2$都是X的函数， Y_1和Y_2各自的值均不相等,不需合并.

所以 Y_1的分布列分

Y_1	20π	22π	24π	26π
P_k	0.1	0.4	0.3	0.2

Y_2 的分布列为

Y_2	100π	121π	144π	169π
P_k	0.1	0.4	0.3	0.2

例2-2 设某工程队完成某项工程所需时间X(天)近似服从 $N(100,5^2)$工程队规定:若工程在100天内完工可获奖金10万元;在100~115天内完工可获奖金3万元;超过115天完工,罚款5万元,求该工程队在完成此项工程时，所获奖金的分布列.

解 $X \sim N(100,5^2)$,Y是X的函数,可取值10,3,–5.故

$$P\{Y=-5\}=P\{115<X<+\infty\}=1-\Phi\left(\frac{115-100}{5}\right)$$

$$=1-\Phi(3)=0.0013,$$

$$P\{Y=3\}=P\{100<X\le 115\}$$

目 上 下 回 停 续

$$= \Phi\left(\frac{115-100}{5}\right) - \Phi\left(\frac{100-100}{5}\right)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(0) = 0.4987,$$

$$P\{Y = 10\} = P\{X \le 100\} = \Phi\left(\frac{100-100}{5}\right)$$

$$= \Phi(0) = 0.5000$$

所以所获奖金Y的分布列为

Y	-5	3	10
P_k	0.0013	0.4987	0.5000

故从本例得知,连续型随机变量的函数也可以是离散型的.

例2-3 已知随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^{x}+e^{-x}},\qquad -\infty<x<+\infty$$

试求随机变量 $Y=g(X)$ 的概率密度，其中

$$g(x)=\begin{cases}-1, & 当x<0,\\ 1, & 当x\geq 0.\end{cases}$$

解 因为 $p(x)$ 为偶函数,所以

$P(X<0)=P(X>0)=0.5$ 由此可得

$P(Y=-1)=P(X<0)=P(X\geq 0)=P(Y=1)=0.5$

所以Y的分布列为

Y	-1	1
P	0.5	0.5

目 上 下 回 停 续

例4-2 设随机变量X的概率密度为

$$p_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x^3 e^{-x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

求随机变量$Y=X^2$和$Y=2X+3$的概率密度.

解 先求随机变量$Y=X^2$分布函数,

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2\leq y\} \quad (\text{当 } y>0 \text{ 时})$$

$$=P\{-\sqrt{y}\leq X\leq \sqrt{y}\}$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}} p_X(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} p_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$p_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3\mathrm{e}^{-x^2}, & x\ge 0.\end{cases}$$

再由分布函数求概率密度.

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=p_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})'-p_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot(\sqrt{y})^3\cdot\mathrm{e}^{-(\sqrt{y})^2}+0\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{y\mathrm{e}^{-y}}{2}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

当 $Y=2X+3$ 时,有

$$y=2x+3 \Rightarrow x=\frac{y-3}{2},$$

$$p_Y(y)=F_y'(y)=\left[\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} p_X(x)\,\mathrm{d}x\right]'$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{y-3}{2}\right)^3 \mathrm{e}^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}, & y\geq 3,\\ 0, & y<3.\end{cases}$$

例5-1 设圆的直径服从区间(0,1)上的均匀分布

求圆的面积的密度函数.

解 设圆的直径为X，则圆的面积$Y=\pi X^2/4$,而X的

密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因为$y=g(x)=\pi x^2/4$在区间（0,1）上为严增函数其

反函数为$x=h(y)=\sqrt{4y/\pi}, h'(y)=1/\sqrt{\pi y}$,所以圆面

积$Y=\pi X^2/4$的密度函数为

目 上 下 回 停 续

$$p_Y(y)=\begin{cases} p_X(\sqrt{4y/\pi})\,|1/\sqrt{\pi y}|, & 0<y<\pi/4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}, & 0<y<\pi/4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

目 上 下 回 停 续