连续时间系统的时域分析方法 –卷积

柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

卷积计算步骤

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 信号的时域分解
  - 阶跃响应和冲激响应
  - 卷积定理
    - 叠加积分
    - 计算步骤
    - 卷积性质

一、定义

卷积积分：

$$r(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

则 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$ 称为$f(t)$与$h(t)$的卷积积分。

t 参变量(观察响应时刻)

τ 积分变量（激励作用时刻）

简记 $f(t)*h(t)$

卷积和：

$$x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

卷积计算步骤

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 信号的时域分解
  - 阶跃响应和冲激响应
  - 卷积定理
    - 叠加积分
    - 计算步骤
    - 卷积性质

计算步骤

2. 卷积步骤：

$$e(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

1) 改变自变量由t变为 τ

2）翻转

$$h(\tau)\xrightarrow{\text{翻转}}h(-\tau)$$

3）平移

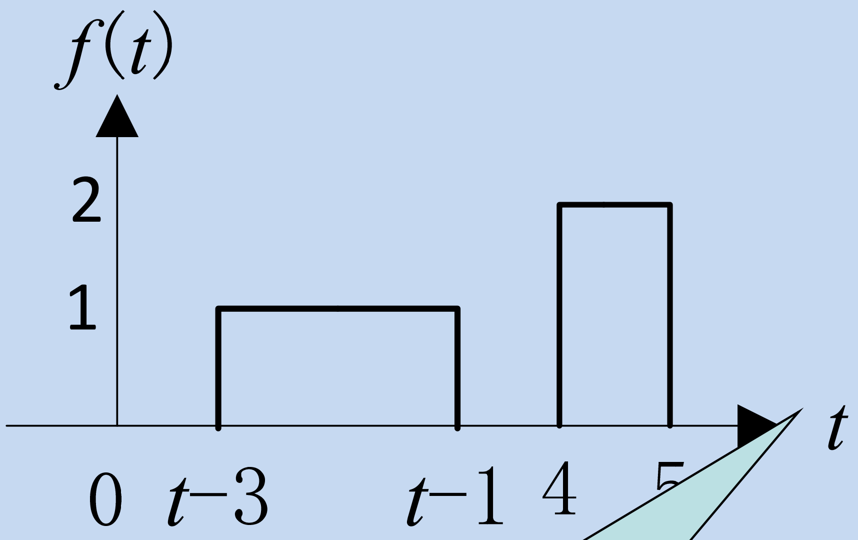
$$h(-\tau)\rightarrow h(t-\tau)$$

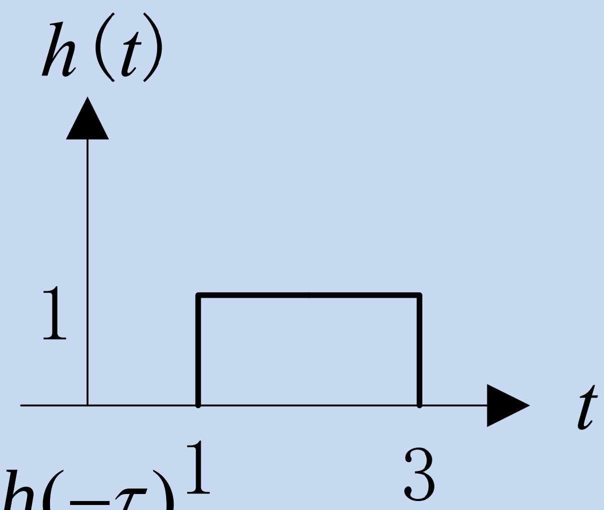
(t>0,右移，t<0左移）

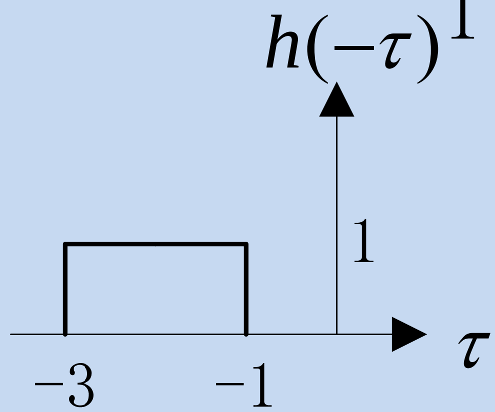
4）相乘积分

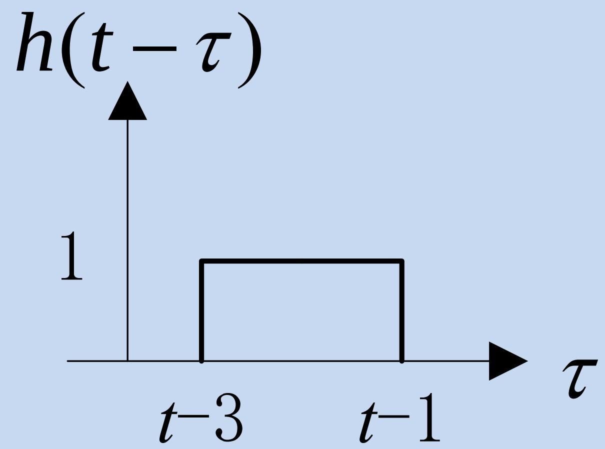
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

计算步骤









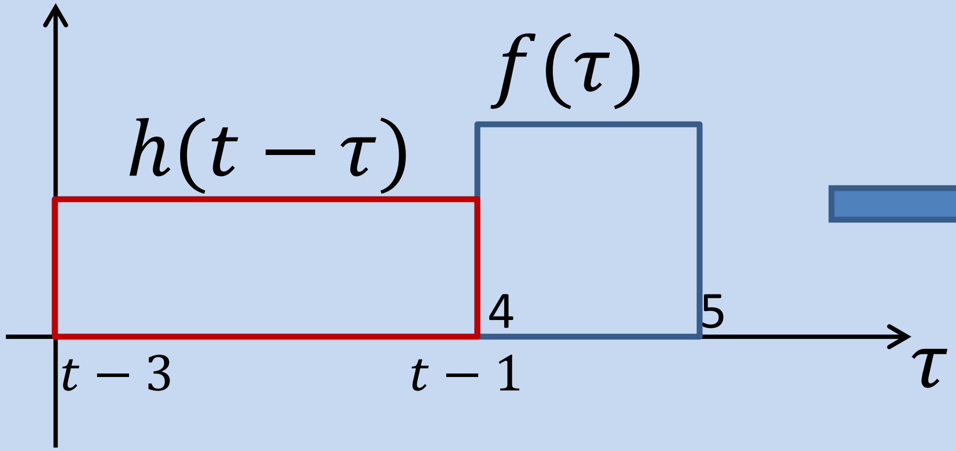
$$h(\tau) \xrightarrow{\text{翻转}} h(-\tau)$$

$$h(-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

计算步骤

头部未进入，无重叠

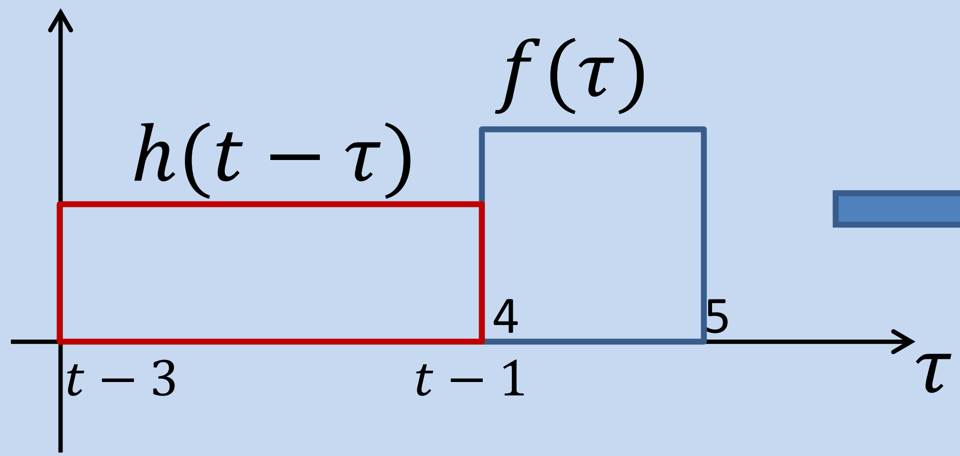


t-1<4,

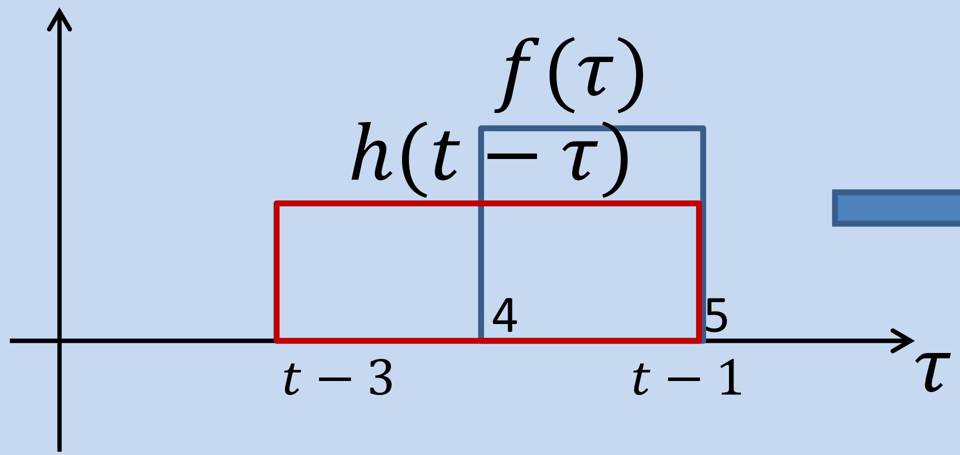
$$\boxed{\mathrm{t} < 5, f(t) * h(t) = 0}$$

计算步骤

头部开始进入并且部分重叠



t-1>=4,



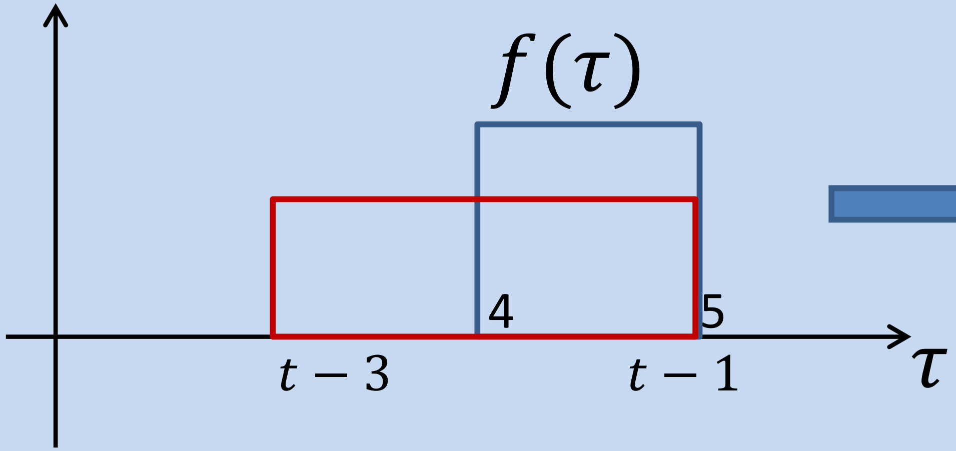
t-1<5

积分下限为**4**，上限为**t-1**

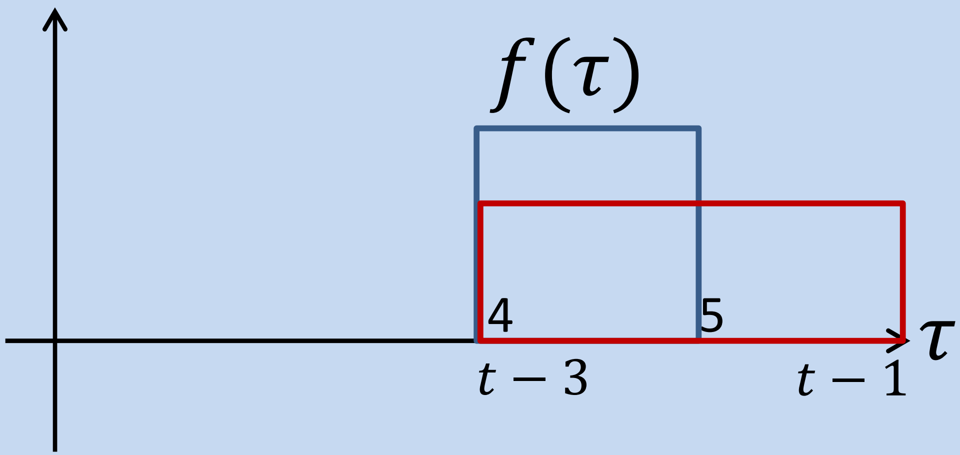
$$\boxed{5 \le \mathrm{t} < 6, f(t) * h(t) = 2t-6}$$

计算步骤

头部开始离开并且完全重叠



t-1>=5



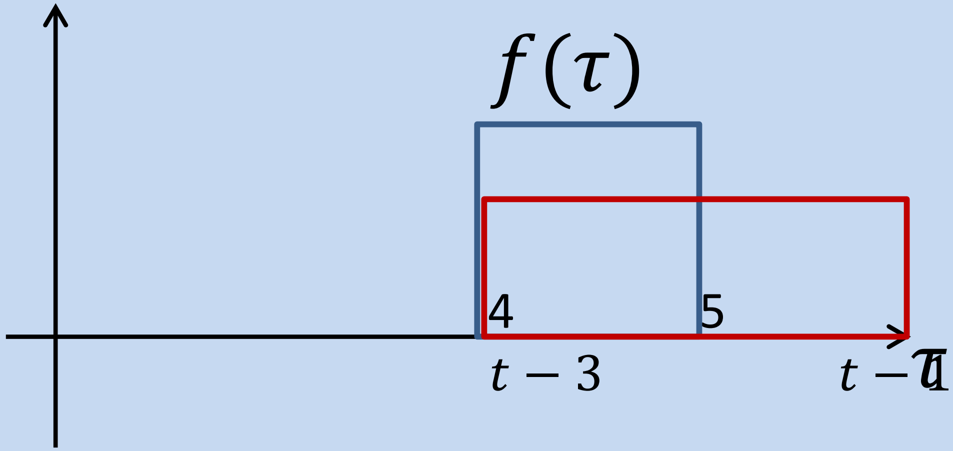
t-3<4

积分下限为**4**，上限为**5**

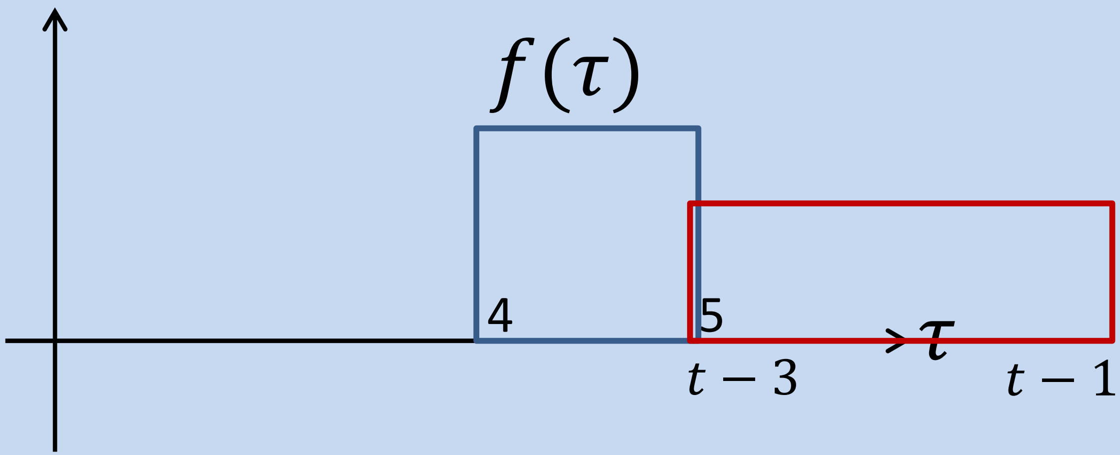
$$\boxed{6 \le \mathrm{t} < 7, f(t) * h(t) = 2}$$

计算步骤

尾部完全进入，并且部分重叠



t-3>=4



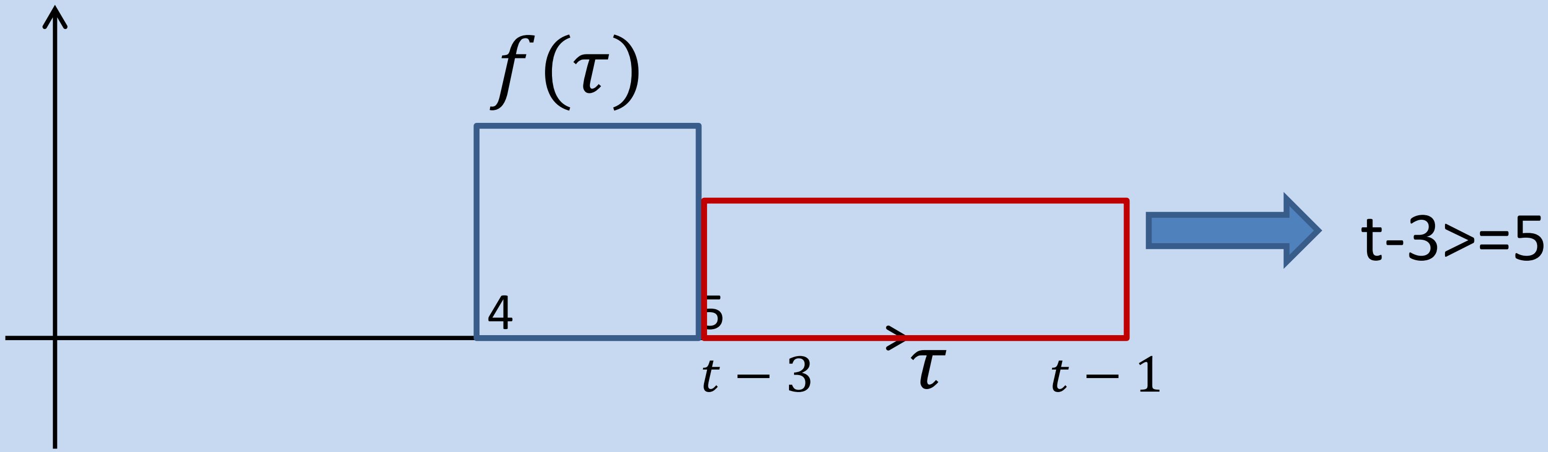
t-3<5

积分下限为**t-3**，上限为**5**

$$\boxed{7 \leq \mathrm{t} < 8, f(t) * h(t) = 16 - 2t}$$

计算步骤

尾部完全离开，无重叠



$$\boxed{\mathrm{t} \geq 8, f(t) * h(t) = 0}$$

计算步骤

1、参数t不同时，卷积结果不同；

$$f(t)*h(t)=\begin{cases}0 & t<5\\ 2t-10 & 5\le t<6\\ 2 & 6\le t<7\\ 16-2t & 7\le t<8\\ 0 & t>8\end{cases}$$

2、如果两个信号具有有限长度，长度分别是T_1、T_2，则卷积信号的长度为T_1+T_2；

3、正确计算卷积的关键在于：

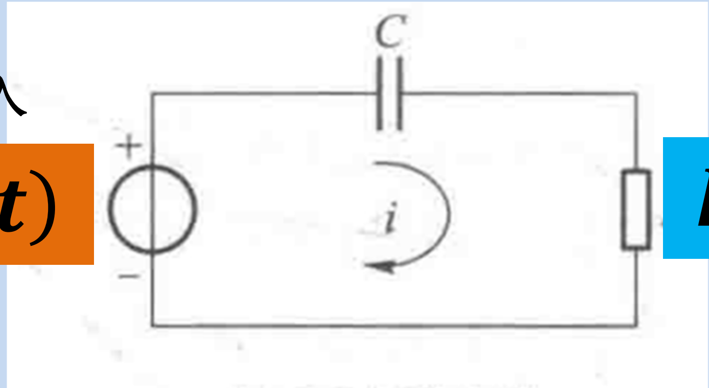
- 确定卷积结果的分段时限
- 确定每段积分的上下限

卷积的理解与应用

1、RC电路

输入

$\delta(t)$

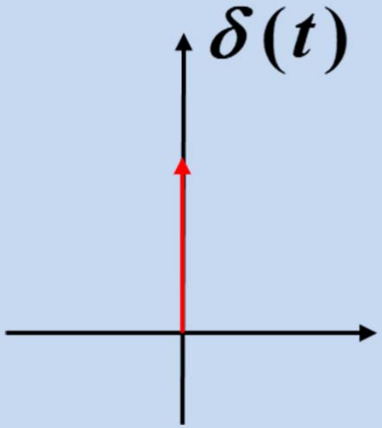


(b) *RC*串联电路

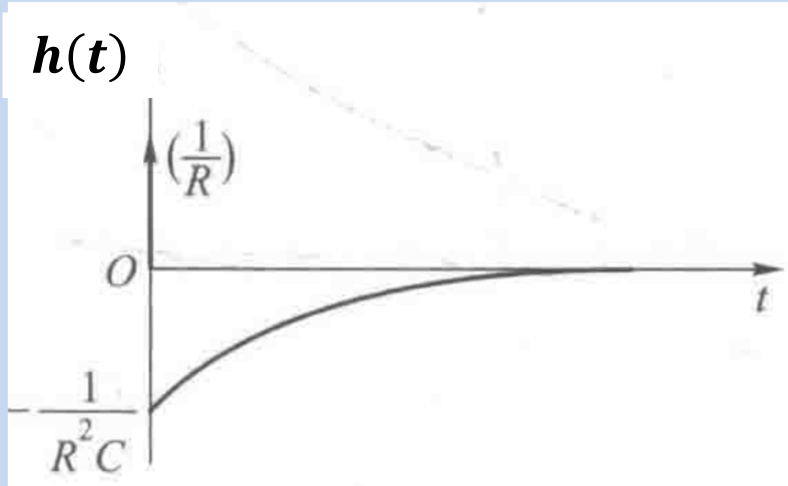
输出

$h(t)$

$$2\delta(t)-2e^{-t}\varepsilon(t)$$



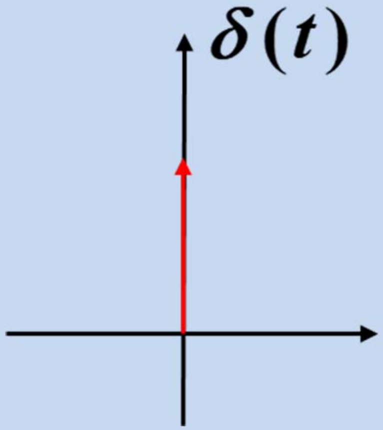
系统



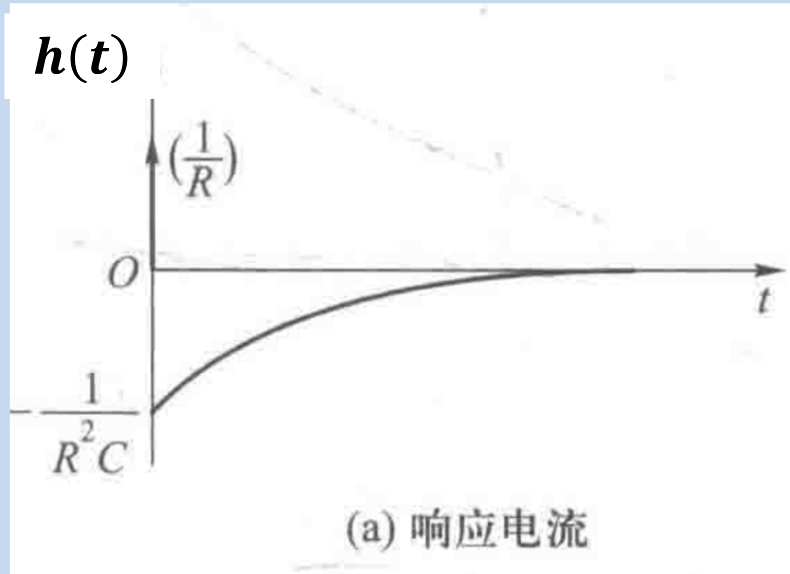
(a) 响应电流

$$r(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

1、RC电路



系统



$$r(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

因果系统，因果信号！！

$$r(n)=\sum_{k=0}^{n} e(k)h(n-k)$$

设n=2，举例说明r(n)的成分

2、回声系统

播放视频！！

$$h(t) = a_1\delta(t - t_1) + a_2\delta(t - t_2)$$

卷积的理解与应用

3. 无线通信信道系统

$$h(t) = a_1\delta(t - t_1) + a_2\delta(t - t_2)$$

信号处理算法执行时间要小于信道相干时间

计算步骤

$$[e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)]*[e^{\lambda_2 t}\varepsilon(t)]=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}]\varepsilon(t)$$

解： $[e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)]*[e^{\lambda_2 t}\varepsilon(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[e^{\lambda_1\tau}\varepsilon(\tau)]\cdot[e^{\lambda_2(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)]d\tau$$

$$=\int_0^t[e^{\lambda_1\tau}]\cdot[e^{\lambda_2(t-\tau)}]d\tau\quad\cdot\varepsilon(t-0)$$

$$=e^{\lambda_2 t}\int_0^t e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}d\tau\ \cdot\varepsilon(t)=e^{\lambda_2 t}\left.\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)\tau}}{\lambda_1-\lambda_2}\right|_0^t\cdot\varepsilon(t)$$

$$=e^{\lambda_2 t}\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}-1}{\lambda_1-\lambda_2}\varepsilon(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}]\varepsilon(t)$$

卷积性质

（1）卷积代数

- 交换律

$$f(t)*h(t)=h(t)*f(t)$$

推导

$$x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$$

- 分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

$$x_1(n)*[x_2(n)+x_3(n)]=x_1(n)*x_2(n)+x_1(n)*x_3(n)$$

- 结合律

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$$

$$[x_1(n)*x_2(n)]*x_3(n)=x_1(n)*[x_2(n)*x_3(n)]$$

（2）卷积的时不变性

- $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$ 称$\delta(t-t_0)$ 是t_0秒的延时器

$x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$ 称$\delta(n-n_0)$是n_0秒的延时器

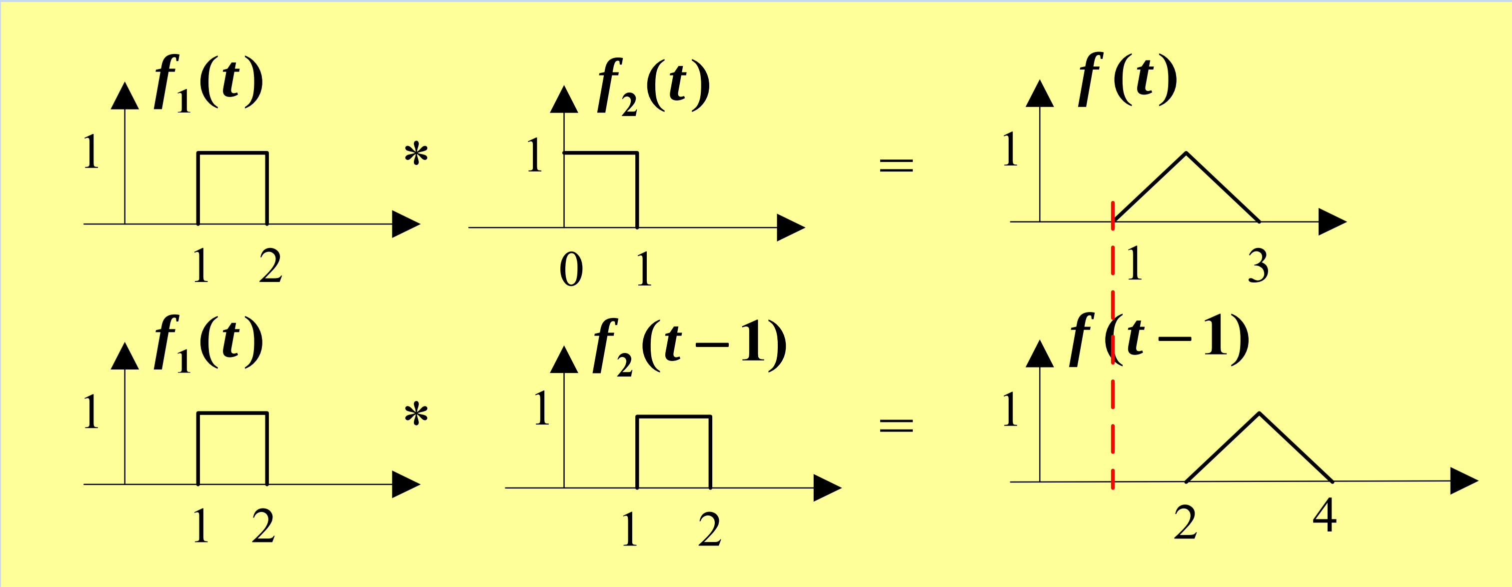
- $\delta(t)*f(t)=f(t)$ 称$\delta(t)$ 是卷积的单位元

$\delta(n)*x(n)=x(n)$ 称$\delta(n)$是卷积的单位元

（2）卷积的时不变性

- 如果 $f_1(t)*f_2(t)=f(t)$ 则 $f_1(t)*f_2(t-t_0)=f(t-t_0)$

如果 $x_1(n)*x_2(n)=x(n)$ 则 $x_1(n)*x_2(n-n_0)=x(n-n_0)$



$$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=?$$

（3）卷积的微分及差分特性

$$\frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)]$$

* $\nabla \delta(n) * x(n) = \nabla x(n)$

* $\nabla x_1(n) * x_2(n) = x_1(n) * \nabla x_2(n) = \nabla [x_1(n) * x_2(n)]$

$\delta'(t) * f(t) = f'(t)$ 称 $\delta'(t)$是微分器

推广：

$$\delta^{(n)}(t) * f(t) = f^{(n)}(t)$$

（4）卷积的积分及求和特性

$$f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

称$\varepsilon(t)$是模拟积分器

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)=x(n)*\varepsilon(n)$$

称$\varepsilon(n)$是数字积分器

（4）卷积的积分及求和特性

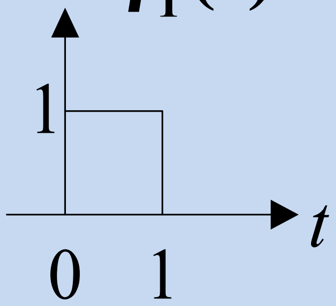
$$\left[\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)d\tau\right] * f_2(t) = f_1(t) * \left[\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{t} [f_1(\tau) * f_2(\tau)]d\tau$$

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{n} x_1(k)\right] * x_2(n) = x_1(n) * \left[\sum_{k=-\infty}^{n} x_2(k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{n} [x_1(k) * x_2(k)]$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)d\tau * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau$$

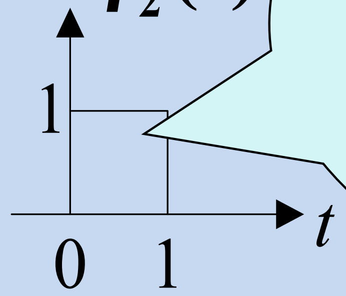
利用性质计算卷积积分

$f_1(t)$



$*$

$f_2(t)$

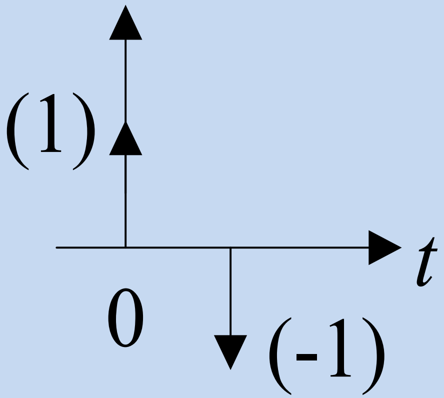


$$f'(t)*g^{(-1)}(t)=f(t)*g(t)$$

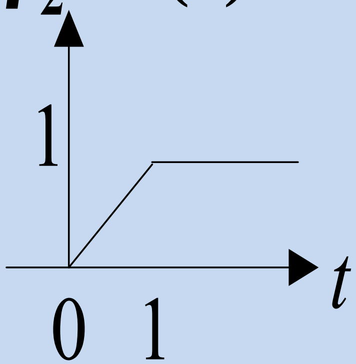
$$\delta(t)*f(t)=f(t)$$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

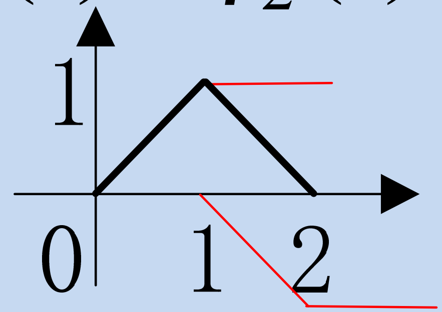
解: $f_1'(t)$



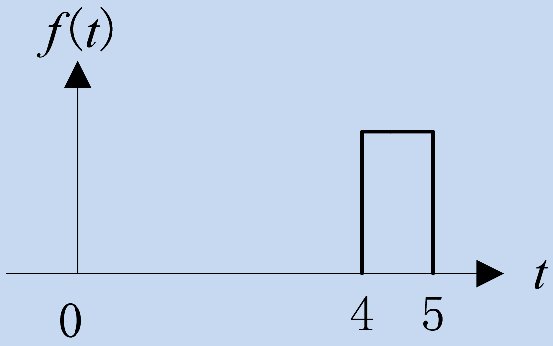
$f_2^{(-1)}(t)$

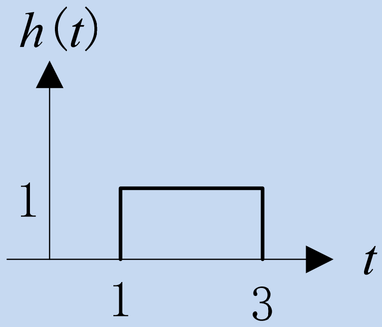


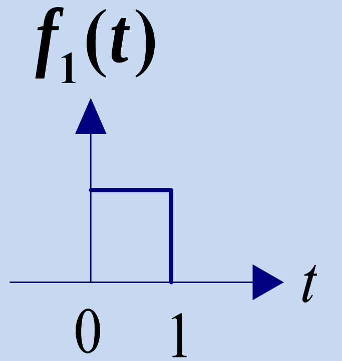
$\Rightarrow$ $f_1(t)*f_2(t)$



卷积性质







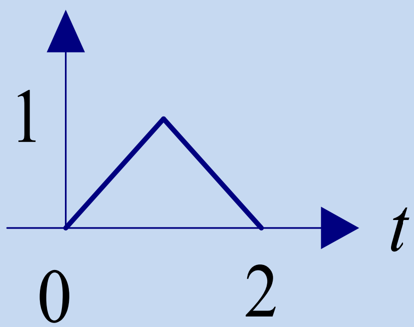
$$f(t) = 2f_1(t-4)$$

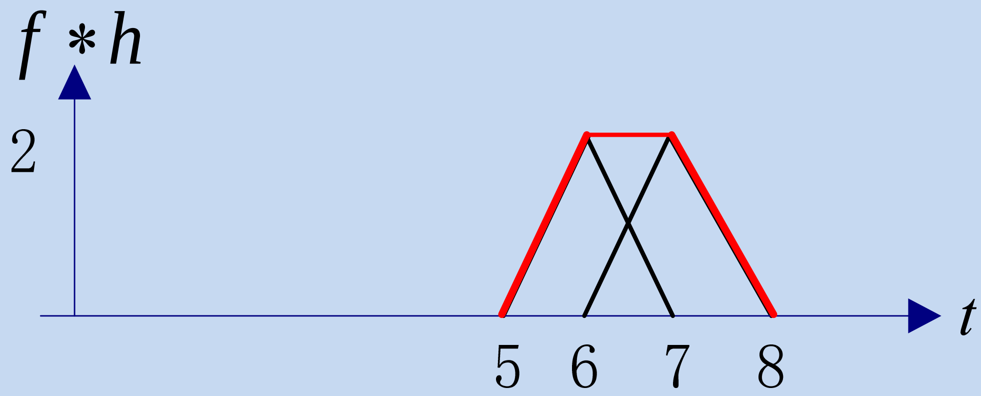
$$h(t) = f_1(t-1) + f_1(t-2)$$

$$f(t) * h(t) = [2f_1(t-4)] * [f_1(t-1) + f_1(t-2)]$$

$$= 2f_1(t) * f_1(t) * [\delta(t-5) + \delta(t-6)]$$

$f_1(t) * f_1(t)$





卷积小结1

卷积积分：$f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$

卷积和：$x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$

$\delta(t-t_0)$ $/\delta(n-n_0)$ 是$t_0/\ n_0$秒的延时器

$\delta(t)$ $\delta(n)$

$\delta'(t)$是微分器

$\varepsilon(t)$是模拟积分器

$\varepsilon(n)$是数字积分器

求解卷积方法有：

1、定义

2、性质

3、图解法

卷积小结2

- 卷积代数：交换律、结合律、分配律
- 卷积时不变性：时延可以移动
- 卷积微分：微分符号可以移动
- 卷积积分：积分符号可以移动
- 微分与积分相互抵消

课堂练习：卷积积分

1、计算 $[e^{-2t}\varepsilon(t)]*\varepsilon(t-2)$