9.3 根树及其应用

定义9.5 T是有向树（基图为无向树）

(1) T 为外向树(根树)——T 中一个顶点入度为0，其余的入度均为1.

(2) 树根——入度为0的顶点

(3) 树叶——入度为1，出度为0的顶点

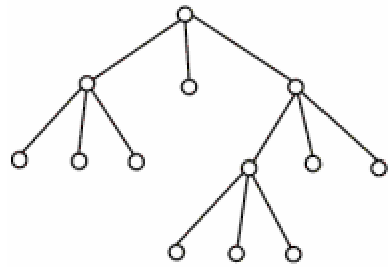
(4) 内点——入度为1，出度不为0的顶点

(5) 分支点——树根与内点的总称

(6) 顶点v的层数(级数)——从树根到v的通路长度

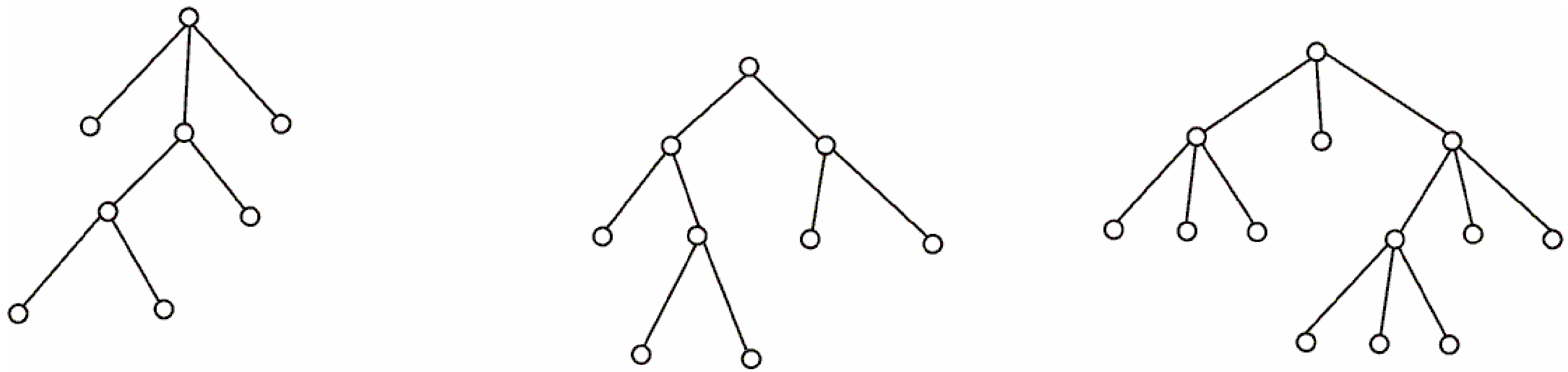
(7) 树高——T 中层数最大顶点的层数

(8) 平凡根树——平凡图



根树实例

根树的画法——树根放上方，可以省去所有有向边上的箭头(当然, 也可以画上)



家族树与根子树

定义9.6 T 为非平凡根树

(1) 祖先与后代：从a到b可达，称a是b的祖先，b是a的后代。

(2) 父亲与儿子：若<a,b>是有向边，则a是b的父亲，b是a的儿子。

(3) 兄弟：两结点是同一个结点的儿子，这两个结点就是兄弟。

定义9.7 设v为根树T中任意一顶点，称v及其后代的导出子图为以v为根的**根子树**.

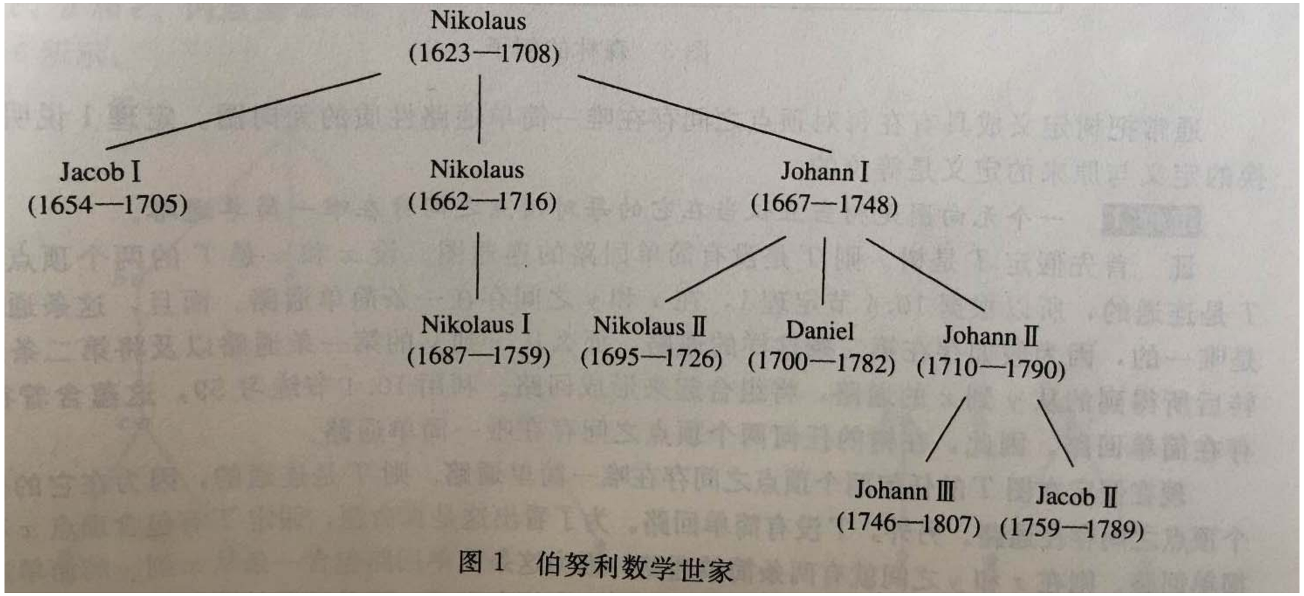


图 1 伯努利数学世家

根树的分类

5. (1) T 为有序根树——同层上顶点标定次序的根树

(2) 分类

① r 元树——每个分支点至多有 r 个儿子

② r 元有序树——r 树是有序的

③ r元正则树——每个分支点恰有r 个儿子

④ r 元正则有序树

最优二元树

定义9.9 设2元树T有t片树叶$v_1, v_2, \ldots, v_t$，权分别为$w_1, w_2, \ldots, w_t$，称 $W(t)=\sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为T的权，其中$l(v_i)$是v_i的层数. 在所有有t片树叶，带权$w_1, w_2, \ldots, w_t$的2叉树中，权最小的2元树称为**最优2元树**.

求最优树的算法—— **Huffman算法**

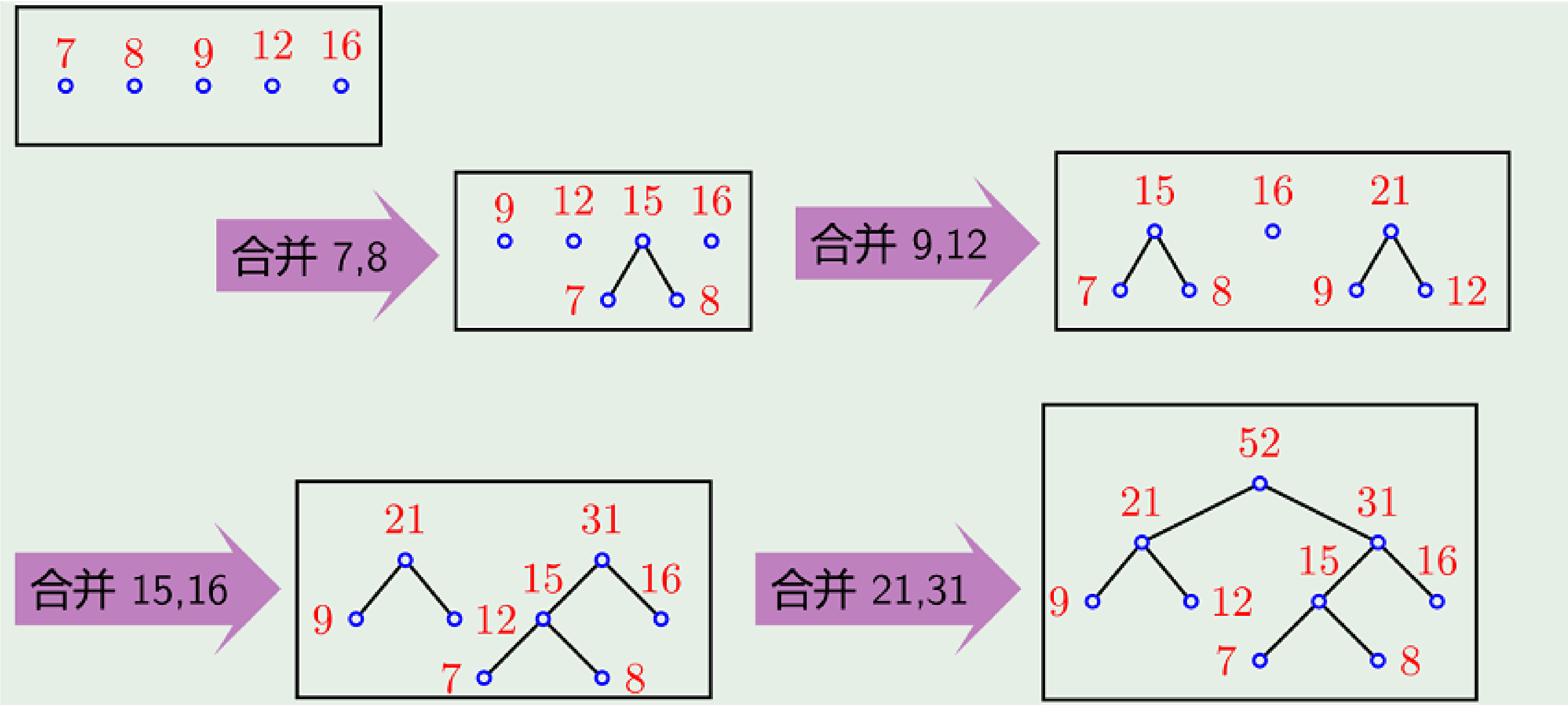
给定实数$w_1, w_2, \ldots, w_t$，且$w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_t$.

(1) 连接权为w_1, w_2的两片树叶，得一个分支点，其权为w_1+w_2.

(2) 在$w_1+w_2, w_3, \ldots, w_t$中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点(不一定是树叶)，得新分支点及所带的权.

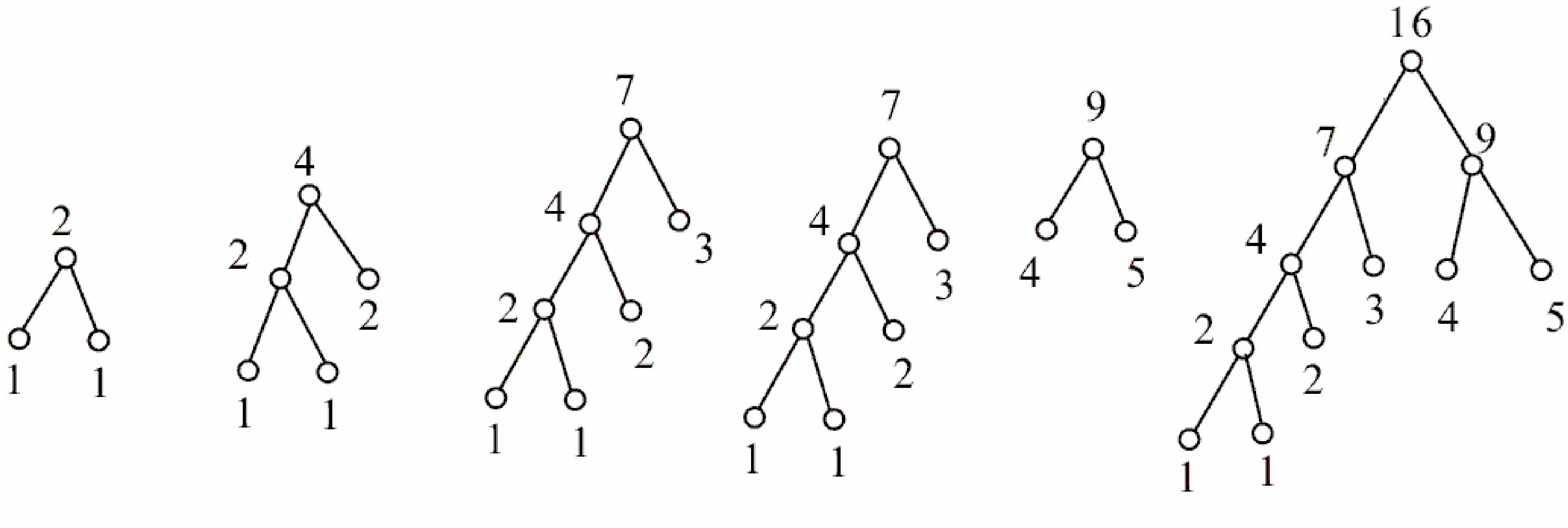
(3) 重复(2)，直到形成t–1个分支点，t片树叶为止.

例 5　求带权为7, 8, 9, 12, 16的最优树.



例 6 求带权为1, 1, 2, 3, 4, 5的最优树.

解题过程由下图给出，$W(T)$=38



应用一

将百分制转换成5 级分制

此程序(伪程序)只要利用条件语句便可完

```
IF a< 60
  THEN 不及格
  ELSE IF a< 70
      THEN 及格
      ELSE IF a< 80
        THEN 中等
        ELSE IF a< 90
          THEN 良好
          ELSE 优秀
```

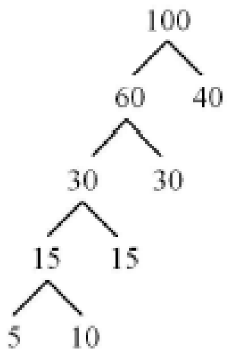


图 2　霍夫曼树

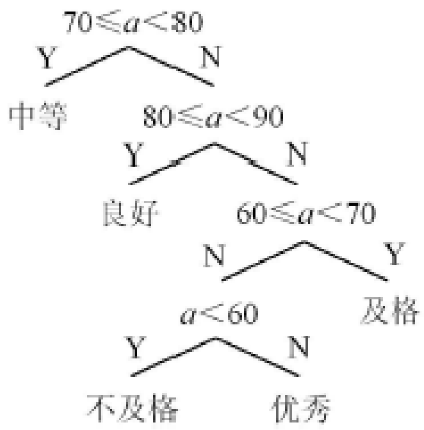


图 3　判定期过程

假设成绩分布规律如表 1 所示:

表 1　成绩分布规律

分数	0 ~ 59	60 ~ 69	70 ~ 79	80 ~ 89	90 ~ 100
比例数	0.05	0.15	0.40	0.30	0.10

根据这个霍夫曼树就可以得到优化的伪程序。

```
IF a< 80
   THEN IF a< 70
     THEN IF a< 60
       THEN 不及格
       ELSE 及格
     ELSE 中等
   ELSE IF a< 90
     THEN 良好
     ELSE 优秀
```

应用二（前缀码）

通信中的非等长编码问题

定义9.10 设$\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\alpha_{n-1}\alpha_n$是长度为 n 的符号串

(1) 前缀——以上符号串的子串$\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$

(2) 前缀码——$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$为符号串的集合,若其中任何两个符号串互不为前缀

(3) 二元前缀码——$\beta_i\ (i=1, 2, \ldots, m)$ 中只出现两个符号，如0与1.

- 如：{1,00,011,0101,01001,01000}为前缀码
- {1,00,011,0101,0100,01001,01000}呢？
- 如何产生二元前缀码？

00表示e　01表示t，0001表示q，0001是et还是q？

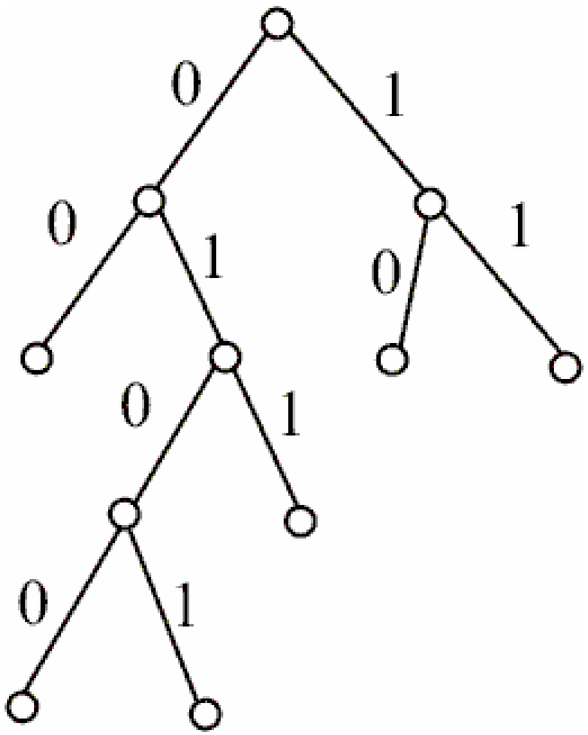
前缀码

定理9.5 在二元树中按左子树标0，右子树标1；若只有一个子树，则可以标0，也可以标1。这样，从树根到叶子的通路上所有标号按通路上的顺序组成的符号串的集合，构成二元前缀码（包含叶子数个码串）。

推论 一棵正则2叉树产生惟一的前缀码。

图所示二叉树产生的前缀码为

{ 00, 10, 11, 011, 0100, 0101 }



前缀码的数量与对应二元树的叶子树相等

最佳前缀码

(1) 前缀码可以代表通信中传输的符号

(2) 当需要传输的文本仅由这些符号构成，则每个符号出现的频率不同，传输这个文本所用的二进制位数是不同的

(3) 设共有t个符号，用树叶v_i对应的前缀码二进制串表示的符号出现的频率为c_i，v_i对应的前缀码的长度等于v_i的层数$l(v_i)$, 因此传输m个符号使用的二进制位数为$m \sum c_i\, l(v_i)$

(4) 用以各符号出现的频率为权的最优二叉树产生的前缀码所用的二进制位数最少！

称这个由最优二叉树产生的前缀码为最佳前缀码

用Huffman算法产生最佳前缀码

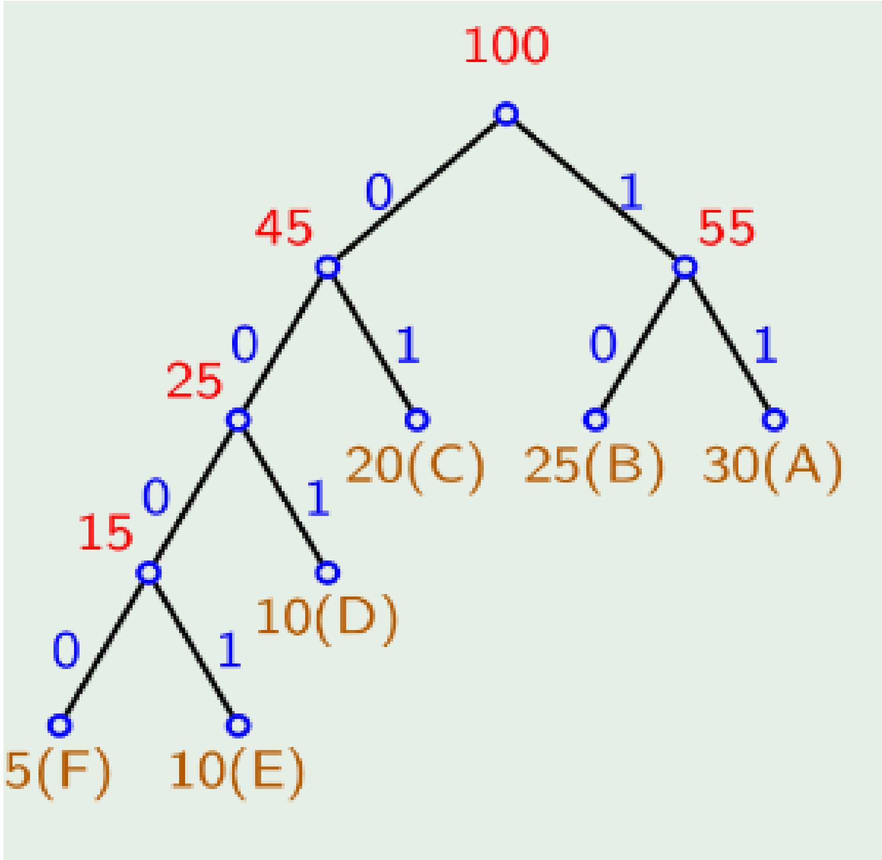
例6 在通信中，字母A、B、C、D、E、F出现的频率如下：

A：30%　　B：25%

C：20%　　D：10%

E：10%　　F：5%

构造这些字母的前缀码，使得传输的二进制位最少。



应用实例

例 9.4 可用二元树表示算术表达式，如表达式

$$(v_1-v_2)/v_3+v_4(v_5-v_6/v_7)$$

可用图 9.10 所表示的有序二元树来表示.

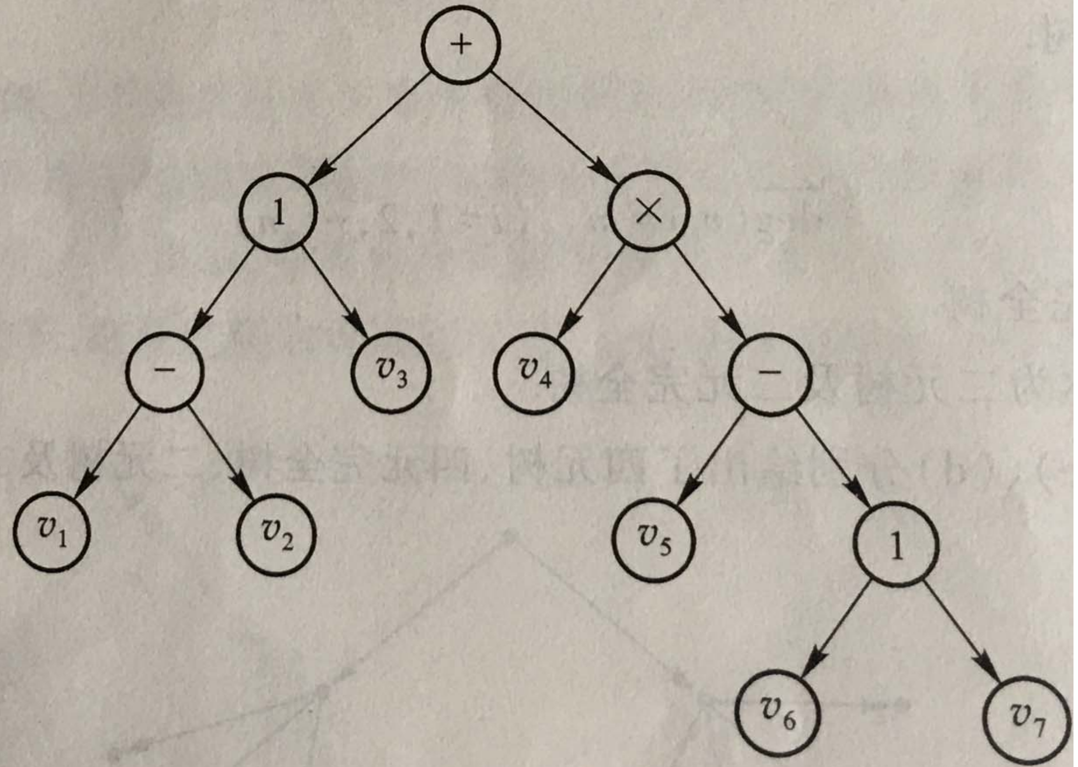


图 9.10 用有序二元树表示算术表达式

离散建模

- 数字逻辑电路 ——布尔代数（开关代数）
- 电话线路故障分析 ——图论（连通性）
- 关系数据库的关系数据模型 ——关系、代数系统
- 知识库的关系演算模型 ——谓词逻辑
- 操作系统中的死锁检测 ——图论（回路）