概率论与数理统计

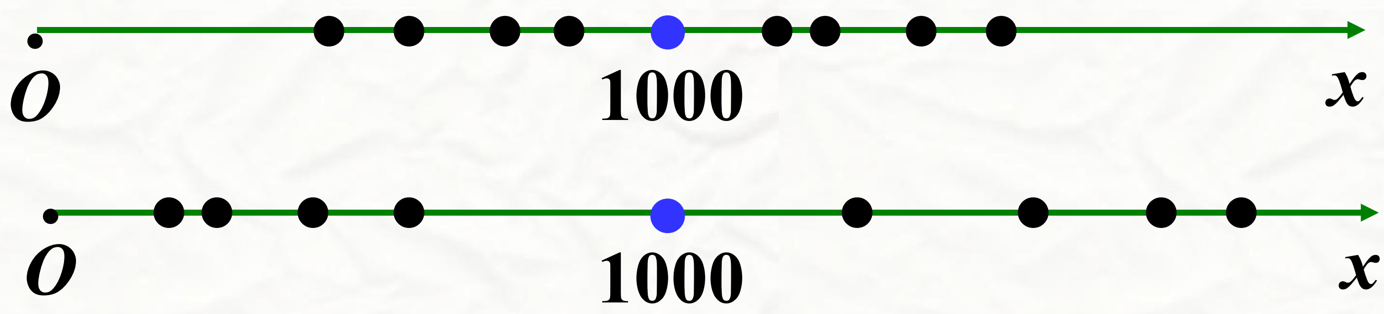
§3.2 随机变量的方差和矩

- 一、方差的概念
- 二、方差的性质
- 三、矩的概念
- 四、应用实例

一、方差的概念

1. 问题的提出

引例1 有两批灯泡, 其平均寿命都是 $E(X)=1000$ 小时.



哪一批灯泡寿命更为稳定?

引例2　比较两射手的技术

甲射手

击中环数	8	9	10
概　　率	0.1	0.8	0.1

乙射手

击中环数	8	9	10
概　　率	0.4	0.2	0.4

显然二者的平均水平为9环, 也就是两射手的水平相当, 但乙射手的波动性较大, 射击不够稳定.
如何描述这种差异呢?

设射手打中的环数为随机变量X, 其分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots$$

其平均水平为$E(X)$, 则其每次射击的波动为

$$|x_i-E(X)|$$

为了数学处理上的方便，以 $[x_i-E(X)]^2$ 替代 $|x_i-E(X)|$, 则该射手的平均射击波动为

$$\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 p_i = E[X-E(X)]^2$$

由此可以引入**方差**的定义如下:

目 上 下 回 停 续

2. 方差的定义

通过上述2个引例, 我们可以给出如下定义

定义3.3 设X是一个随机变量, 若

$$E[X-E(X)]^2$$

存在, 则称 $E[X-E(X)]^2$ 为X的**方差**, 记为 $D(X)$或$\sigma^2(X)$, 即

$$D(X)=\sigma^2(X)=E[X-E(X)]^2.$$

称$\sqrt{D(X)}$为标准差或均方差, 记为$\sigma(X)$.

注1° 由定义知, $D(X) = E[X - E(X)]^2 \geq 0.$

2° 方差$D(X)$是一个非负实数, 常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量, 它反映了X偏离其数学期望的程度.

3° 如果$D(X)$值大, 表示X 取值越分散, 以
(小) (集中)
$E(X)$作为随机变量的代表性差;
(好).

3、随机变量方差的计算

(1) 利用定义计算

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 p(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中$p(x)$为X的概率密度.

例1 (正态分布) 若$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，求$D(X)$.

解 因为X的概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \sigma > 0, -\infty < x < +\infty.$$

且$E(X) = \mu$,

所以 $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 p(x) \mathrm{d}x$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } \frac{x-\mu}{\sigma}=t} \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right\}$$

$$= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}$$

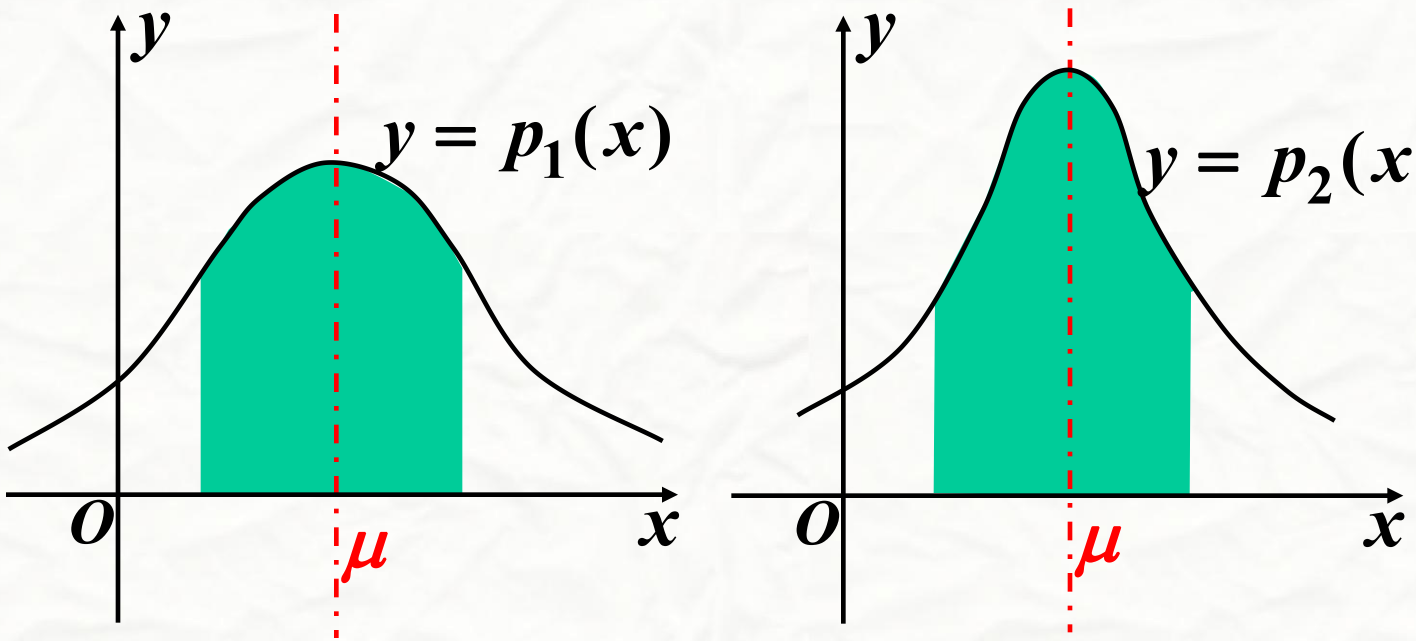
$$= \sigma^2.$$

因而正态分布的方差为 σ^2.

正态分布方差的直观图示:

正态分布 $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, $\mu = E\left(X\right), \sigma^2 = D\left(X\right)$.

$\sigma_1 > \sigma_2$



$X \sim N(\mu,\sigma_1^2)$　　$X \sim N(\mu,\sigma_2^2)$

(2) 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证 $D(X)=E[X-E(X)]^2$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

例2 设随机变量X具有概率密度

$$p(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<0\\ 1-x, & 0\le x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}，求D(X).$$

解

$$E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x(1-x)\mathrm{d}x=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^2(1-x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}.$$

例3 设随机变量X服从参数为λ的指数分布，试求$P\left\{X > \sqrt{D(X)}\right\}$. (考研试题)

解 因为$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$, 因而

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2$$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}\lambda x-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$=\frac{\Gamma(3)}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

$$P\left\{X > \sqrt{D(X)}\right\} = P\left\{X > \frac{1}{\lambda}\right\} = \int_{1/\lambda}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_{1/\lambda}^{+\infty} = \mathrm{e}^{-1}$$

其中 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x.$

目 上 下 回 停 续

二、方差的性质

1. 方差的性质

性质3.5 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0.$

证 $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0.$

性质3.6 设 X 是一个随机变量, k是常数, 则有

$$D(kX)=k^2D(X).$$

证 $D(kX)=E[kX-E(kX)]^2$

$$=k^2E[X-E(X)]^2=k^2D(X).$$

性质3.7 设随机变量 X, Y 相互独立, 且$D(X), D(Y)$ 存在, 则 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

证
$$D(X \pm Y) = E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2$$
$$= E\{[X - E(X)] \pm [Y - E(Y)]\}^2$$
$$= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2$$
$$\pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$
$$= D(X) + D(Y).$$

推广 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,则有
$$D(a_1X_1 \pm a_2X_2 \pm \cdots \pm a_nX_n)$$
$$= a_1^2D(X_1) + a_2^2D(X_2) + \cdots + a_n^2D(X_n).$$

例4 设随机变量X与Y相互独立，$X \sim N(0,1)$，$Y \sim N\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$，若$Z = X - 2Y$，$E(|Z|)$及$D(|Z|)$.

解 $\because\ E(Z) = E(X - 2Y) = E(X) - 2E(Y) = 0.$

$$D(Z) = D(X - 2Y) = D(X) + 4D(Y) = 1 + 4 \cdot \frac{3}{4} = 4.$$

$$\therefore Z \sim N(0,4), \quad U = \frac{Z}{2} \sim N(0,1).$$

$$E(|Z|) = 2E(|U|) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} |u| \cdot \varphi(u) \mathrm{d}u$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} |u| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\left[-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\because\ D(|Z|)=E(|Z|)^2-[E(|Z|)]^2$$

$$\text{而 } E(|Z|^2)=E(Z^2)=D(Z)+[E(Z)]^2=4+0=4.$$

$$\therefore\ D(|Z|)=4-\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\right)^2=4\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right).$$

性质3.8 (切比谢夫不等式)

切比谢夫

设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$,

方差$D(X)=\sigma^2$,则对于任意正整数 ε,

不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立.

切比谢夫不等式

证 仅选择连续型随机变量的情况来证明.

设X的概率密度为$p(x)$, 则有

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}p(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad \boxed{\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}\geq 1}$$

$$\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}p(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2p(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^2.$$

得 $P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ $\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$

注1° 切比谢夫不等式的意义:

给出了在X的分布未知的情形下, 估计概率

$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$的方法;

注2° 说明了$D(X)$的确刻划了X对$E(X)$的偏离程度,

由$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$,可知: $D(X)$ 越小

(X偏离$E(X)$程度越小), $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$越大.

这表明: X取值越集中在$E(X)$附近.

注3° 它是大数定理的理论基础.

例5 已知正常男性成人血液中，每一毫升所含白细胞数的平均数是7300，均方差是700，试利用切比谢夫不等式估计每毫升含白细胞数在5200~9400之间的概率p.

解 设X为每毫升血液中含白细胞数.

依题意，有

$$E(X)=7300,\quad D(X)=\sigma^2=700^2.$$

$$\therefore\quad P\{5200<X<9400\}$$

$$=P\{5200-7300<X-E(X)<9400-7300\}$$

目 上 下 例 停 续

$$= P\{5200 - 7300 < X - E(X) < 9400 - 7300\}$$

$$= P\{-2100 < X - E(X) < 2100\}$$

$$= P\{|X - E(X)| < 2100\}$$

$$\geq 1 - \frac{D(X)}{2100^2}$$

$$= 1 - \frac{700^2}{2100^2} = \frac{8}{9} \approx 0.8889.$$

即 $P\{5200 < X < 9400\} \approx 0.8889.$

性质3.9 随机变量X的方差$D(X)=0$的充要条件是

$P\{X=C\}=1$, C为常数.

证 必要性: 由于

$$0 \le P\left\{\left|X-E(X)\right| \ge \varepsilon\right\} \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}=0,$$

而由ε的任意性可知：

$$P\{X=E(X)\}=1.$$

而充分性可由**性质3.5**直接得到.

性质 3.10 对任意 $C \in R$, 若 $C \neq E(X)$, 则

$$D(X) < E(X-C)^2.$$

证 $D(X) = E[X-E(X)]^2$

$$= E\{(X-C)+[C-E(X)]\}^2$$

$$= E(X-C)^2 + 2[C-E(X)]\cdot E(X-C)$$

$$+[C-E(X)]^2$$

$$= E(X-C)^2 - [C-E(X)]^2$$

$$< E(X-C)^2 (\text{当} C \neq E(X) \text{时}).$$

例6 设X是随机变量, $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$ (μ与σ均为常数),则对任意的常数c,有(D)

$(A)\quad E(X-c)^2=E(X^2)-c^2$

$(B)\quad E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$

$(C)\quad E(X-c)^2<E(X-\mu)^2$

$(D)\quad E(X-c)^2\geq E(X-\mu)^2$

显然答案为D.

2. 常见概率分布相应的方差

例7 (二项分布) 设随机变量 $X \sim B(n,p)$, 求 $D(X)$.

解 设随机变量 X 服从参数为 n,p 二项分布, 其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\cdots,n)$$

$$0<p<1.$$

则有 $E(X)=np.$

又因为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\cdots,n)$$

目 上 下 回 停 续

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]$$

$$=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)C_n^k p^k(1-p)^{n-k}+np$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+ np$$

$$= n(n-1)p^2[p+(1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2-n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (n^2-n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$

例8 (泊松分布) 设随机变量 $X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.

解 设$X \sim P(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, k = 0,1,2,\cdots,\lambda > 0.$$

则有 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. 又因为$E(X) = \lambda$,

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X] = E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$$=\lambda^2+\lambda-\lambda^2$$

$$=\lambda.$$

因而, 泊松分布的数学期望与方差都等于参数λ.

例9 (几何分布) 设随机变量X服从几何分布，求$D(X)$.

解 设随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p, q=1-p; k=1,2,\cdots, 0<p<1$$

则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

又因为 $E(X)=\frac{1}{p}$,

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot q^{k-1}p.$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2-k\right)\cdot q^{k-1}p+\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(k-1\right)\cdot q^{k-1}p+E\left(X\right)$$

$$=pq\sum_{k=1}^{\infty}k\left(k-1\right)\cdot q^{k-2}+E\left(X\right)$$

$$=pq\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)''+E\left(X\right)=pq\left(\frac{q^2}{1-q}\right)''+\frac{1}{p}=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

所以 $D\left(X\right)=\dfrac{2q}{p^2}+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{q}{p^2}.$

目 上 下 回 停 续

例10 (均匀分布) 设随机变量X服从均匀分布,求$D(X)$.

解 设$X \sim U(a,b)$,其分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\dfrac{1}{2}(a+b)$,

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}\,x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(a-b)^2}{12}.$$

例11 (指数分布) 设随机变量$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$,求$D(X)$.

解 设随机变量$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, 则

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

常见离散型分布对应的数学期望与方差

分布	分布律	$E(X)$	$D(X)$
0-1分布 $X \sim B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布 $X \sim B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\dots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\dots$	λ	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

三、矩的概念

1. 矩的概念

定义3.4 设X是一随机变量,若$E\left(X^k\right)(k=1,\cdots n)$存在,则称它为$X$的$k$ 阶原点矩 a_k, 即

$$a_k = E(X^k) \quad (k=1,2,\cdots n)$$

特例: $a_1 = E(X)$是X的数学期望.

定义3.5 设X是一随机变量, 且 $a_1 = E(X)$,

若$E\left[X-E\left(X\right)\right]^k\left(k=1,2,\cdots n\right)$存在, 则称它为$X$的$k$阶中心矩, 记为 μ_k, $\mu_k = E\left[X-E\left(X\right)\right]^k$.

特例: $\mu_2 = E\left[X-E\left(X\right)\right]^2$是$X$的方差.

2. 原点矩与中心矩的关系

二者之间可以相互唯一表达, 关系如下:

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i E(X^i)[-E(X)]^{k-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i a_i (-a_1)^{k-i}$$

$$a_k = E(X)^k = E[(X - a_1) + a_1]^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i a_1{}^i E(X - a_1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a_1{}^i \mu_{k-i}$$

注1° 以上数值特征都是随机变量函数的数学期望; k阶原点矩和k阶中心矩可以互相唯一表示.

2° 随机变量X的数学期望$E(X)$是X的一阶原点矩, 方差为二阶中心矩; 三阶中心矩$E[X-E(X)]^3$, 主要用来衡量随机变量的分布是否有偏.

3° 在实际中, 高于四阶的矩很少使用. 四阶中心矩$E[X-E(X)]^4$, 主要用来衡量随机变量的分布在均值附近的陡峭程度如何.

例12 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,求 $\mu_k = E[X-E(X)]^k$.

解 对于任意 $k \geq 1$, 有

$$\mu_k = E[X-E(X)]^k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^k \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x \xlongequal{u=\frac{x-\mu}{\sigma}}$$

$$= \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u^k \mathrm{e}^{\frac{-u^2}{2}}\mathrm{d}u$$

$$= \begin{cases} \sigma^k (k-1)(k-3)\cdots 3\cdot 1, & k\text{为偶数} \\ 0, & k\text{为奇数} \end{cases}$$

四、应用实例

例13 在每次实验中, 事件A发生的概率为0.5, 要使得事件出现的频率在0.35~0.65之间的概率不小于0.95, 至少需要做多少次重复实验?

解 设X为n次试验中事件A发生的次数, 则

$$X \sim B(n,0.5), P\left\{0.35 < \frac{X}{n} < 0.65\right\} =$$

$$P\{0.35n - 0.5n < X - 0.5n < 0.65n - 0.5n\}$$

$$P\{|X - 0.5n| < 0.15n\} \geq 1 - \frac{0.25}{(0.15n)^2} \geq 0.95$$

因此, $n \geq 222.2$, 所以至少需要223次独立实验.

例14 现代证券组合理论(Markowitz均值–方差模型)

在证券投资中,为了分散风险,采取证券组合投资的方式,如何衡量哪一种组合投资更有效呢?

一般采用提高平均收益,降低投资风险的方法.

设投资组合收益为

$$X=\sum_{i=1}^{n}\omega_i X_i,\ E(X)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i E(X_i)$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\rho_{ij}\sqrt{D(X_i)}\sqrt{D(X_j)}$$

证券组合投资问题就转化为,寻找n种证券的投资比例$\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n$使得平均收益最大,而组合投资的方差越小.

内容小结

1. 方差是一个常用来体现随机变量X取值分散程度的量. 如果$D(X)$值大, 表示X取值分散程度大, $E(X)$的代表性差; 而如果$D(X)$值小, 则表示X的取值比较集中, 以$E(X)$作为随机变量的代表性好.

2. 方差的计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2,$$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 p(x)\mathrm{d}x$$

3. 方差的性质

$$\begin{cases} 1^0 \ D(C)=0; \\ 2^0 \ D(CX)=C^2D(X); \\ 3^0 \ D(X\pm Y)=D(X)+D(Y). \end{cases}$$

4. 切比谢夫不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

5. 矩是随机变量的数字特征.

随机变量X的数学期望$E(X)$是X的一阶原点矩;

方差为二阶中心矩.


再见

备用题

例1-1 设随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)^2},\ -\infty<x<\infty,$$

求X的数学期望$E(X)$与方差$D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{2}{\pi(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=0,$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{2}{\pi(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=1,$$

由方差公式得 $D(X)=E\left[X-E\left(X\right)\right]^2=E(X^2)=1.$

例2-1 设随机变量X的概率密度为

$$p(x)=\begin{cases} a+2(1-a)x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $0\le a\le 2$, 求$E(X)$与$D(X)$的最大值与最小值.

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x[a+2(1-a)x]\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{a}{6}.$$

已知 $0\le a\le 2$, 于是当$a=0$时, 数学期望$E(X)$取最大值 2/3. 当 $a=2$ 时, 数学期望取最小值1/3 .

目 上 下 回 停 续

因为 $E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 x^2[a+2(1-a)x]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{a}{6}.$$

由方差公式得

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}+\frac{a}{18}-\frac{a^2}{36}$$

$$=-\frac{1}{36}(a-1)^2+\frac{1}{12}.$$

从而可知, 当 $a=1$ 时, 方差取最大值1/12;

当 $a=0$ 或 $a=2$时, 方差取最小值1/18 .

例4-1 设随机变量X_1, X_2, X_3, X_4相互独立,

且有 $E(X_i)=i, D(X_i)=5-i, i=1,2,3,4.$

设$Y=2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4$, 求$E(Y), D(Y)$.

解
$$E(Y)=E(2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4)$$

$$=2E(X_1)-E(X_2)+3E(X_3)-\frac{1}{2}E(X_4)$$

$$=2\times1-2+3\times3-\frac{1}{2}\times4=7.$$

因为X_1, X_2, X_3, X_4相互独立，则有

$$D(Y) = D(2X_1 - X_2 + 3X_3 - \frac{1}{2}X_4)$$

$$= 4D(X_1) + D(X_2) + 9D(X_3) + \frac{1}{4}D(X_4)$$

$$= 4 \times 4 + 3 + 9 \times 2 + \frac{1}{4} = 37.25.$$

例4-2 设X, Y相互独立, 且 $X \sim N(720, 30^2)$, $Y \sim N(640, 25^2)$, 求$Z_1 = 2X + Y, Z_2 = X - Y$的分布, 并求概率$P\{X > Y\}, P\{X + Y > 1400\}$.

解 由X, Y相互独立, 且 $X \sim N(720, 30^2)$, $Y \sim N(640, 25^2)$, 则$Z_1 = 2X + Y, Z_2 = X - Y$服从正态分布. 并且

$$E(Z_1) = E(2X + Y) = 2E(X) + E(Y)$$

$$= 2 \times 720 + 640 = 2080,$$

$$D(Z_1) = D(2X + Y) = 4D(X) + D(Y)$$

$$= 4 \times 30^2 + 25^2 = 4225,$$

目 上 下 回 停 续

$$E(Z_2)=E(X-Y)=E(X)-E(Y)=720-640=80,$$

$$D(Z_2)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)$$

$$=30^2+25^2=1525.$$

故有

$$Z_1\sim N(2080,4225), Z_2\sim N(80,1525).$$

而 $P\{X>Y\}=P\{X-Y>0\}=P\{Z_2>0\}$

$$=1-P\{Z_2\le 0\}=1-\Phi(\frac{0-80}{\sqrt{1525}})$$

$$=\Phi(2.0486)=0.9798,$$

又因为 $X+Y \sim N(E(X)+E(Y), D(X)+D(Y))$,

即 $X+Y \sim N(1360, 1525)$. 故有

$$P\{X+Y>1400\}=1-P\{X+Y\le 1400\}$$

$$=1-\Phi\left(\frac{1400-1360}{\sqrt{1525}}\right)=1-\Phi(1.02)$$

$$=1-0.8461=0.1539.$$

例5-1 设每次试验中, 事件A发生的概率为0.5. 共进行了1000次试验, 用切比谢夫不等式估计: A发生次数在400到600之间的概率.

解 设事件A发生的次数为随机变量X, 则

$$X \sim B(n,\ p),\ n = 1000, p = 0.5,$$

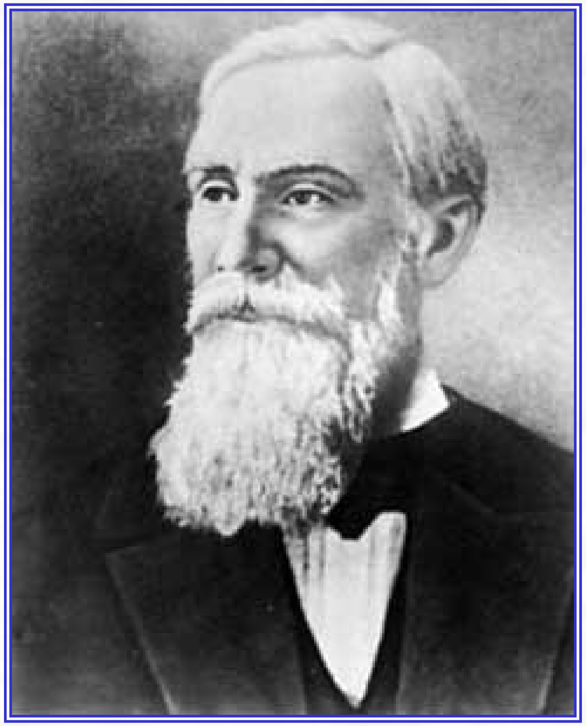
并且 $E(X) = np = 500, D(X) = np(1-p) = 250.$

由切比谢夫不等式得

$$P\{400 < X < 600\} = P\{|X - E(X)| < 100\}$$

$$\geq 1 - \frac{250}{100^2} = 0.975.$$

切比谢夫(Pafnuty Chebyshev)



1821-1894

俄国数学家、机械学家. 对数论、积分理论、概率论和力学都有很大贡献.

证明了贝尔特兰公式, 关于自然数列中素数分布的定理, 大数定律的一般公式以及中心极限定理. 创立了切比谢夫多项式.