8.3 图的矩阵表示

图的图形表示法简单明了, 但不易于表达复杂图, 不易于计算

有向图的邻接矩阵

定义8.13 设有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$为$D$的**邻接矩阵**，记作$A(D)$，或简记为$A$.

性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i=1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ---- D中长度为1的通路数

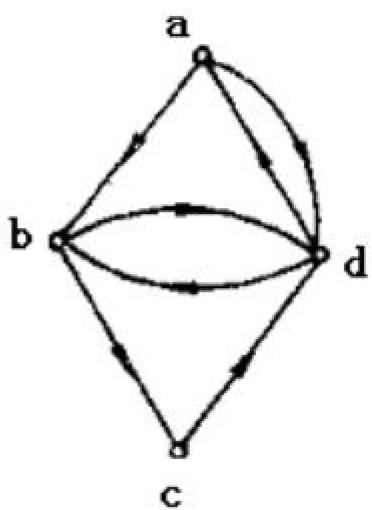
(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ---- D中长度为1的回路数

(5) 若A的元素全为0, 则是零图

(6) 若A的元素除对角线元素全为0外, 其他全为1, 则是完全图(环）

(7) 对角线不为0的元素, 代表此处的顶点有环

实例



$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

我们经常会遇到如下问题：

- 有多少种方式从西安到北京？
- 报文有多少种方式可以从计算机A到达计算机B？

这些就是求图中两结点间多少长度为m的通路的问题。

邻接矩阵的应用

定理 设 A 为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq 1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数， $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设 $B_l=A+A^2+\ldots+A^l$（$l\geq 1$），则 B_l 中元素 $b_{ij}^{(l)}$ 表示 v_i 到 v_j 长度为1至 l 的通路数目之和, 且有:

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数目之和.

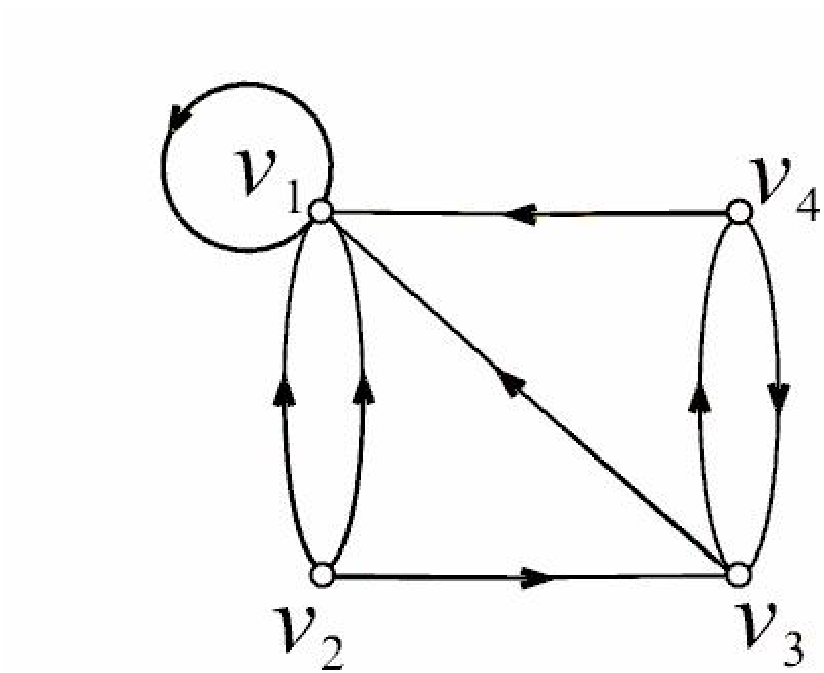
$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数目之和.

实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A_2, A_3, A_4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

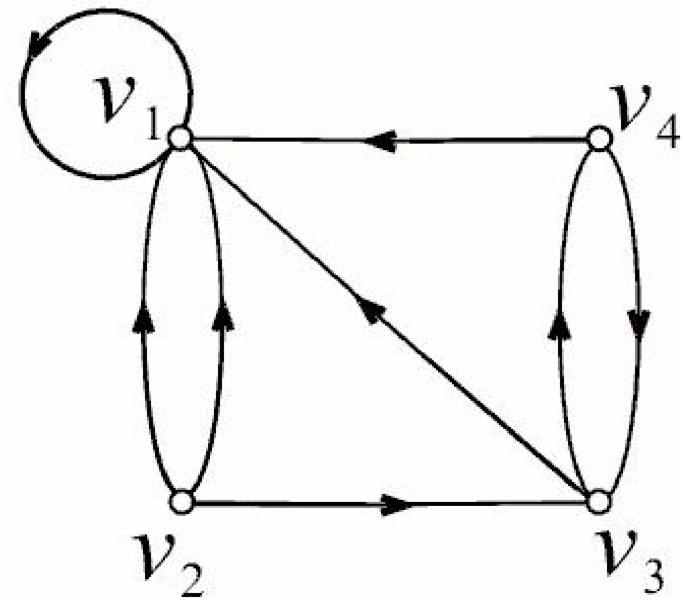
(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



实例求解

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$



(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条.

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

有向图的可达矩阵

定义8.14 设$D=<V,E>$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & b_{ij}^{(n)}\neq 0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由定义不难看出, D 强连通当且仅当 $P(D)$除对角线外，为全1矩阵.

Note:

这里也可以利用$P_l=B+B^2+\ldots+B^l$进行布尔加，布尔乘运算。

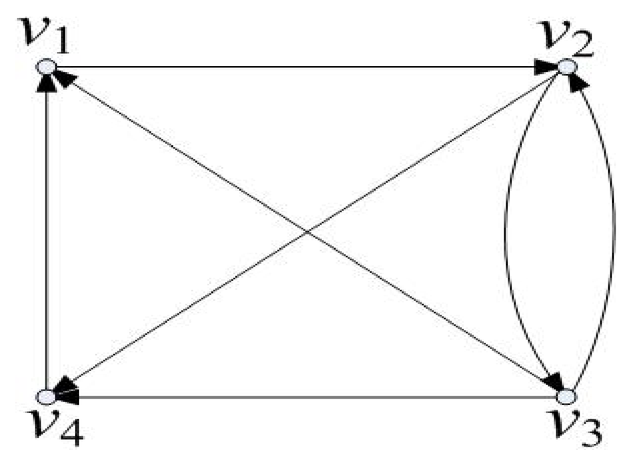
将无向图中的边用两条方向相反的有向边替代, 转换成有向图, 这样有向图的邻接矩阵、可达矩阵等均可适用于无向图。

实例

例6 有向图D如图所示，求其可达矩阵.（布尔加，布尔乘）

解 图D的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$



$$A^3=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&2&2&3\\3&3&2&3\\2&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$B_4=\begin{bmatrix}3&4&2&3\\5&5&4&6\\7&7&4&7\\3&2&1&2\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

所以:任意两个顶点间均可达;每个顶点均有回路通过.

矩阵与图的连通性

- 一无向图为连通图的充要条件是此图的可达矩阵除对角线元素外所有元素均为1;
- 一有向图为强连通图的充要条件是此图的可达矩阵除对角线元素外所有元素均为1;
- 一有向图为单向连通图的充要条件是矩阵$P'=P\ (+)\ P^T$除对角线元素外所有元素均为1，其中P为可达性矩阵.
- 一有向图为弱连通图的充要条件是矩阵$A'=A\ (+)\ A^T$的可达矩阵除对角线元素外所有元素均为1, 其中A为邻接矩阵.

欧拉图定义（教材9.5）

定义8.13

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

几点说明:

规定平凡图为欧拉图.

欧拉通路是生成的简单通路，欧拉回路是生成的简单回路.

环不影响图的欧拉性.

无向欧拉图的判别法

定理8.7 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.

证 若G 为平凡图无问题. 下设G为 n 阶 m 条边的无向图.

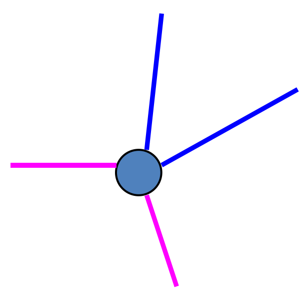
必要性　设C 为G 中一条欧拉回路.

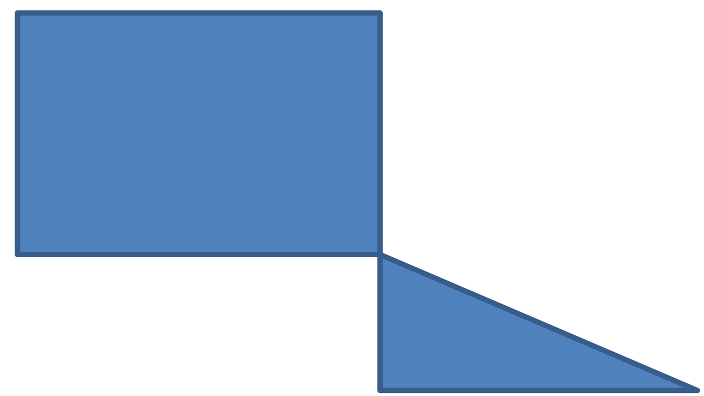
(1) G 连通显然.

(2) $\forall v_i \in V(G)$，v_i在C上每出现一次获2度，所以v_i为偶度顶点.

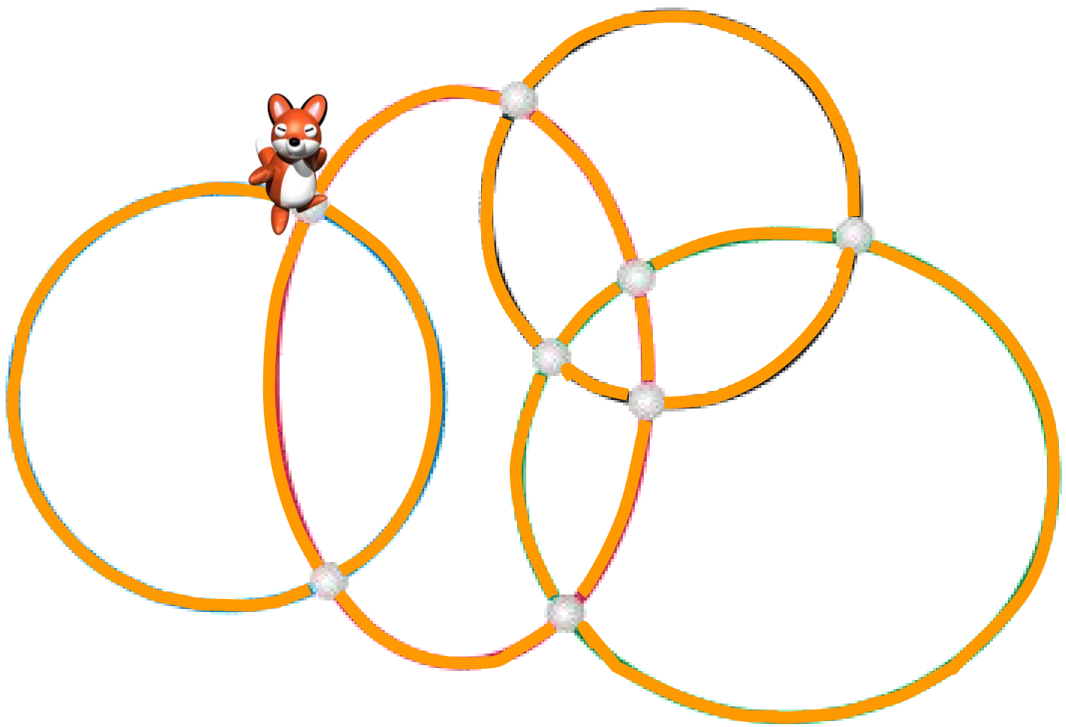
由v_i 的任意性，结论为真.

充分性





不难看出：欧拉图是若干个边不重的圈之并



PLAY

欧拉图的判别法

定理8.8 无向图G是半欧拉图当且仅当G 连通且恰有两个奇度顶点.

证 必要性简单.
充分性（利用定理8.7）
设u,v为G 中的两个奇度顶点，令

$$G' = G \cup (u,v)$$

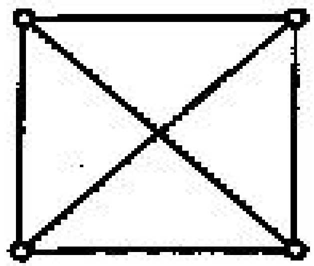
则G' 连通且无奇度顶点，由定理8.7知G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C，令

$$\Gamma = C - (u,v)$$

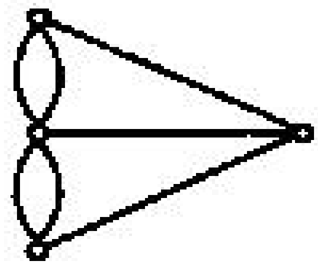
则Γ为 G 中欧拉通路.

可以推广到有向图

实例



(1)



(2)

$C:(v_1,v_5,v_{11},v_7,v_{12},v_8,v_{10},v_6,v_9,v_{11},v_{12},v_{10},v_9,v_5,$ …

例 9.12 洒水车从 A 点出发执行洒水任务，城市街道图可见图 9.19，试问是否存在一条洒水路线，使洒水车从 A 点出发通过所有街道且不重复而最后回到车库 B.

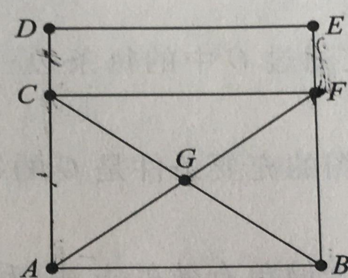


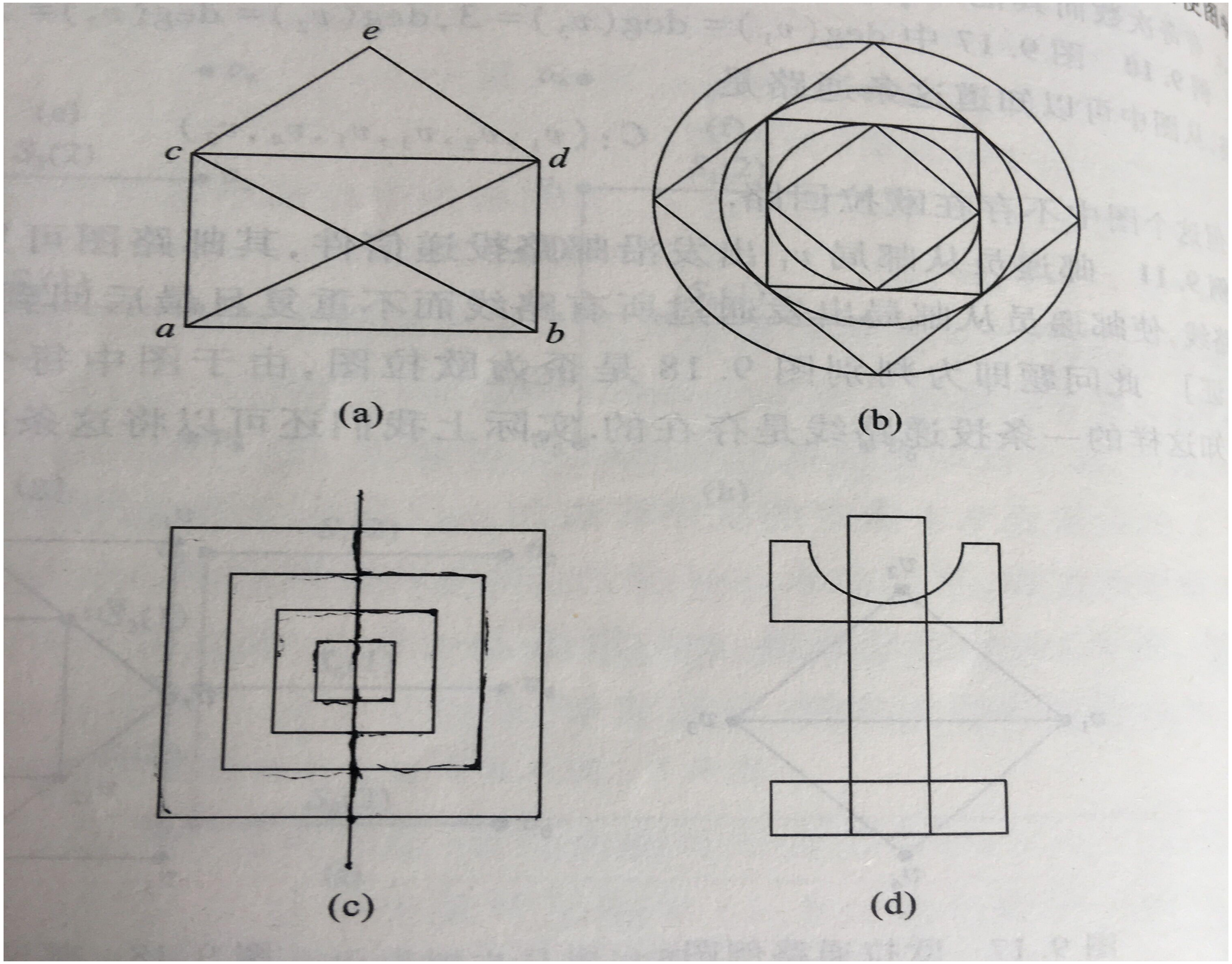
图 9.19　城市街道图

［证］　此问题即为判别图 9.19 是否存在 A 到 B 的欧拉通路. 由于图中每个结点除 A,B 有奇次数外其余均有偶次数，故由定理 9.5 可知这样的一条洒水路线是存在的. 实际上还可以将这条路线找出来，它可以是

$$P:(A,C,D,E,F,B,G,C,F,G,A,B)$$

图论、数据结构、算法

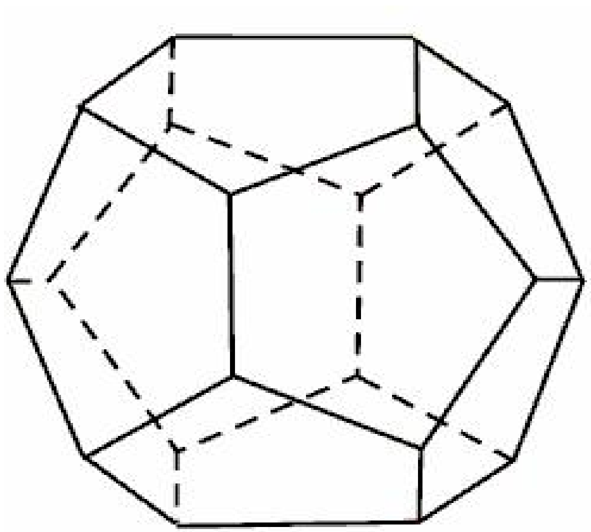
一笔画

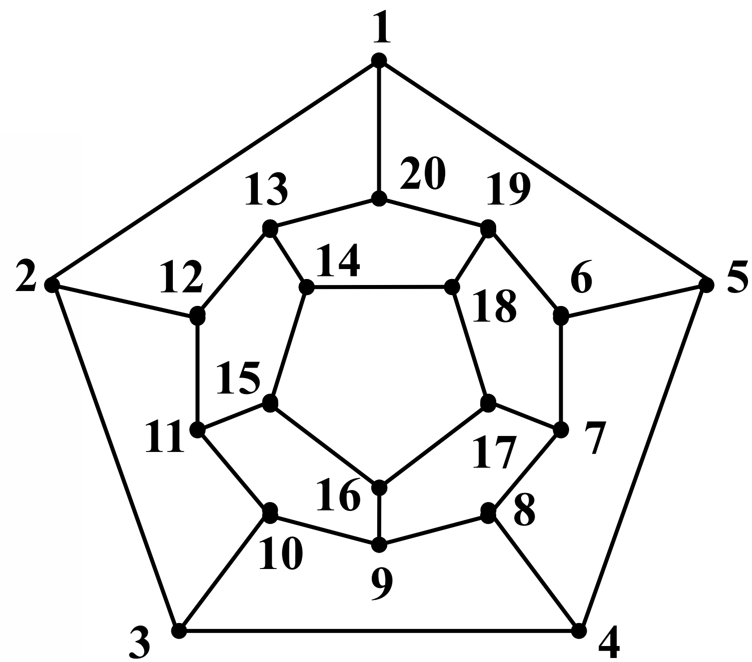


(a) (b) (c) (d)

哈密顿图*

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图





哈密顿图与半哈密顿图

定义8.14

(1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.
(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.
(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.
(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明:
平凡图是哈密顿图.
哈密顿通路是基本通路，哈密顿回路是基本回路.
环与平行边不影响哈密顿性.
哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上

无向哈密顿图的一个必要条件

定理8.9 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

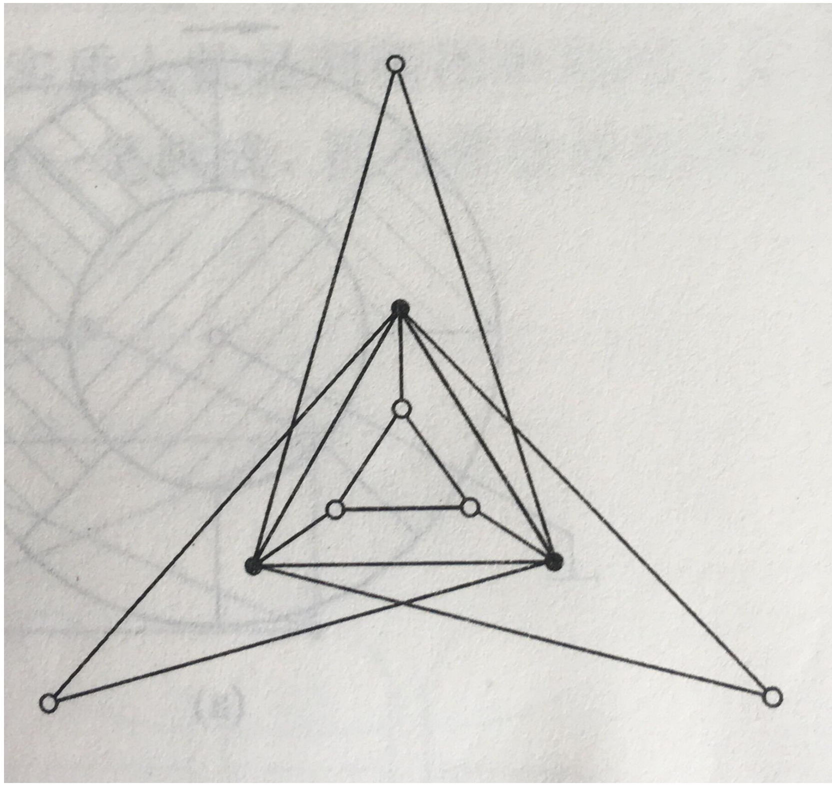
其中$p(G-V_1)$ 是从G中删除V_1后所得到的图的连通分支数.

推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|+1$$

- 定理8.9中的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件
- 常利用定理8.9判断某些图不是哈密顿图.

实例



不是哈密顿图

无向哈密顿图的一个充分条件

定理8.10 设G为n ($n\geq 3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (*)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

证明 略.

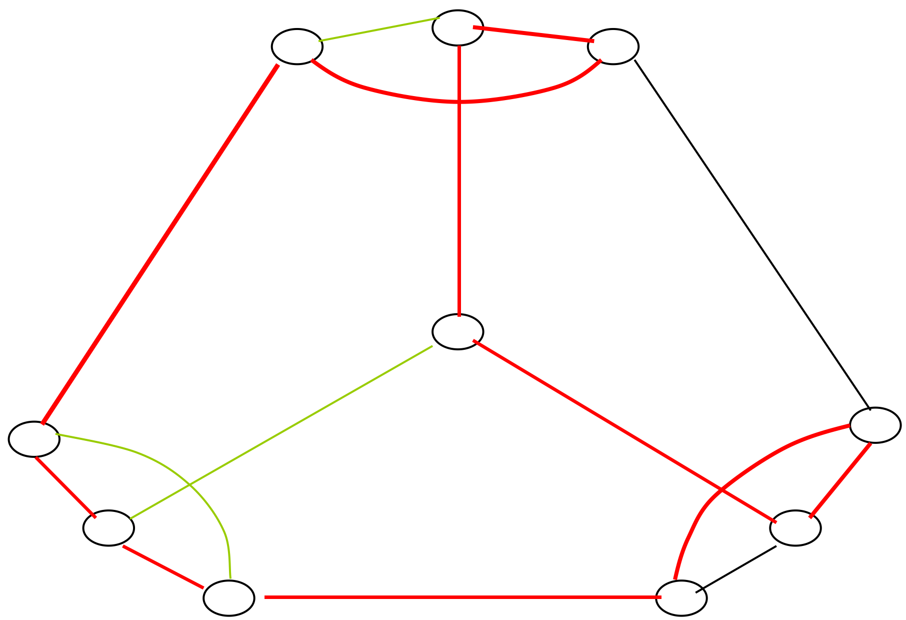
n（$n\geq 2$）阶竞赛图中存在哈密顿通路

定理8.11 若D为n（$n\geq 2$）阶竞赛图，则D中具有哈密顿通路

证明 略.

实例

G is Hamilton graph , d(v) = 3 < 10/2



作业

p134　8.4（A2不做）　8.5　8.6

p148　9.9