离散答案 A 卷

一、简答题（每小题 5 分，共 20 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	**A**	**B**	**D**	**D**	**B**	**B**	**B**	**B**	**B**

二、简答题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 参考答案：

理由：证明由前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 能够得到结论 $C\to B$ 相当于证明 $(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\to(C\to B)$为重言式；证明由前提 $A_1, A_2, \ldots, A_k, C$ 能够得到结论 B 相当于证明$(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge C)\to B$ 为重言式。因此，本题只需证明：$(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\to(C\to B) \Leftrightarrow (A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge C)\to B$ 即可。

$$
\begin{aligned}
& (A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\to(C\to B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\vee(\neg C\vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\wedge\neg(\neg C\vee B)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k)\wedge(C\wedge\neg B)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg((A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge C)\wedge\neg B) \Leftrightarrow \neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge C)\vee B \\
\Leftrightarrow\ & (A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\wedge C)\to B
\end{aligned}
$$

得证。

2. 参考答案：

（1）G_t 的顶点集与 G 的顶点集相同. 在 G_t 中添加 G 的所有边，除此之外通过下述方法添加新的边：考察 G 的每个顶点 x_i, 找 x_i 可达的所有顶点 x_j (允许 $i=j$), 如果没有从 x_i 到 x_j 的边, 就加上这条边, 得到图 G_t。

（2）答案不唯一，这里给出一个例子。

例如某偏序集的哈斯图如图所示,

其极小元：a, b, c, g；

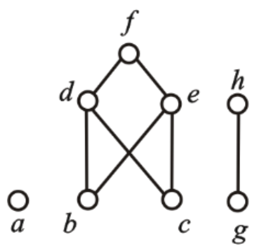
极大元：a, f, h；

没有最小元与最大元。

设集合 $B=\{ b,c \}$，则：

B 的下界和下确界（最大下界）均不存在；

B 的上界为 d, e, f，但上确界（最小上界）不存在。



3. 参考答案：

（1）若存在函数 f:$G\to H$，使得$\forall x_1, x_2\in G$ 都有 $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \circ f(x_2)$, 则称代数系统$<G,*>$和$<H, \circ>$同态。$f$ 是 V_1 到 V_2 的同态，因为$\forall x_1, x_2\in\mathbf{R}$，有

$$f(x_1+ x_2)= e^{(x_1+x_2)}= e^{x_1} \bullet e^{x_2} = f(x_1)\bullet f(x_2)。$$

（2）设 G 是有限群，H 是 G 的子群，则 $|G| = |H|\,[G:H]$ ，其中$[G:H]$ 是 H 在 G 中的不同右陪集(或左陪集) 数量，称为 H 在 G 中的指数。

4. 参考答案：

设该矩阵为 B，求矩阵 $C=B+B^T$，再求矩阵 C 的每一行的行和。如果矩阵 C

的每一行的行和都是偶数，则说明该图每个点的度都是偶数。
求 $D=C+C^2+C^3+\ldots+C^n$，如果矩阵 D 除对角线元素外，其余元素都大于 0，则说明该图连通。如果该图连通且每个点的度都是偶数，则该图含有欧拉回路。

三、数理逻辑部分（共 18 分）

1. 判断题（3 分）参考答案：

第 4 步应用全称推广规则有问题，不满足它的条件，在步骤 2 中使用 US 而引入的变元 z 是自由的，在后继的步骤 3 中用 ES 引入的变元 c 在公式中自由出现了，所以不能用 UG。

2. 演算题（5 分）参考答案：

P(x):x 喜欢步行， Q(x)：x 喜欢乘汽车 R(x):x 喜欢骑自行车

$\forall x(P(x)\to\neg Q(x)),\forall x(Q(x)\vee R(x)),\exists x\neg R(x)\Rightarrow\exists x\neg P(x)$

3. 证明题（10 分）参考答案：

证明：

根据 CP 规则，原式等价于

$$\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge\forall x(R(x)\to\neg Q(x))\Longrightarrow R(x)\to\neg P(x)$$

而

$$\begin{aligned}&\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge\forall x(R(x)\to\neg Q(x))\\&\Longleftrightarrow\forall x((P(x)\to Q(x))\wedge(R(x)\to\neg Q(x)))\\&\Longleftrightarrow\forall x((\neg Q(x)\to\neg P(x))\wedge(R(x)\to\neg Q(x)))\\&\Longleftrightarrow\forall x((R(x)\to\neg Q(x))\wedge(\neg Q(x)\to\neg P(x)))\\&\Longrightarrow(R(x)\to\neg Q(x))\wedge(\neg Q(x)\to\neg P(x))\\&\Longrightarrow R(x)\to\neg P(x)\end{aligned}$$

所以

$$\forall x(P(x)\to Q(x))\Longrightarrow\forall x(R(x)\to\neg Q(x))\to(R(x)\to\neg P(x))$$

四、集合论部分（共 12 分）

1. 计算题（3 小题，每题 2 分，共 6 分）参考答案：

（1）$S\circ R=\{<1,2>,<1,4>,<3,3>,<3,2>\}$

（2）令 A 为 1 到 1000 能被 5 整除的集合，B 为 1 到 1000 能被 6 整除的集合，C 为为 1 到 1000 能被 8 整除的集合

则 $|A|=200$ $|B|=166$ $|C|=125$

$|A\cap B|=33$ $|A\cap C|=25$ $|B\cap C|=41$

$|A\cap B\cap C|=8$

所以 1 到 1000 之间，既不能被 5 和 6 整除，也不能被 8 整除的数的个数为：

$1000-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|=600$

评分标准： 答对 2 分，数字不对但知道用容斥定理计算得 1 分

（3）解：

$$f\circ g(n)=g(f(n))=g(n+1)=2(n+1)$$

$$g\circ h(n)=h(g(n))=h(2n)=0$$

评分标准： 答对得 1 分，全对 2 分

2. 证明题（6 分）参考答案：

证：1)首先证 aRb $\Rightarrow$ [a]=[b]

因为 <a, b>∈R, 且 R 是 A 上的等价关系

所以由等价类定义可知，[a]=[b];

2)其次，[a]=[b] $\Rightarrow$ aRb

因为 R 是 A 上等价关系，如果以 a 为代表元的等价类和以 b 为代表元的等价类相等，那么可知 b∈ [a] 且 a ∈ [b]，由等价类定义可知，<a,b>∈R，即 aRb 成立。

综上所述，题目成立。

评分标准：知道用等价类定义证明，逻辑自洽，无明显错误，即可给 6 分。证明中采用集合相等的证明方式，说明[a]=[b]，也是正确的。有明显错误的，按错误点个数（同类型错误算一个），每错误点酌情扣 1 分。

五、代数系统部分（共 18 分）

（1）（10 分）参考答案：

根据群的定义证明封闭性、结合律成立，并且证明存在单位元，G 中任何一个元素存在逆元即可。

$\forall f, g \in G$, $f \circ g \in G$，所以封闭性成立。

$\forall f, g, h \in G$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$，所以结合律成立。

$\forall f \in G$，$f \circ I_R = I_R \circ f = f$ ，所以恒等变换 I_R 是单位元。

$\forall f \in G$，$f^{-1}(x) = a \mid (x-b)$ ，所以 G 中每个元素都有逆元。

因此，$<G, \circ>$是群。

（2）（8 分）参考答案：

S_1 和 S_2 都是 G 的子集。

方法一：因为 S_1 和 S_2 都是 G 的子集，所以根据群的定义分别证明$< S_1, \circ>$和$< S_2, \circ>$都是群即可，证明方法同（1）。

方法二：用子群的判断定理一证明。

因为$\forall f, g \in S_1$, $f \circ g \in S_1$

$\forall f \in S_1$，$f^{-1}(x) = x-b$，

所以由子群判断定理一知道，$< S_1, \circ>$是$<G, \circ>$的子群。

类似地，可以证明$< S_2, \circ>$是$<G, \circ>$的子群。

方法三：用子群的判断定理二证明。

$\forall f, g \in S_1$ 可证 $f \circ g^{-1} \in S_1$，从而$<S_1, \circ>$是$<G, \circ>$的子群。

类似地，可以证明$< S_2, \circ>$是$<G, \circ>$的子群。

六、图论部分（共 12 分）

（1）（6 分）参考答案：

为保证任意两个城市间运输物资畅通，此图必须是连通图。又因为看守士兵的连数要求最少，所以该问题转换为找此图的生成树。原图共有 6 个顶点，根据树的性质知，原图的生成树有 6-1=5 条边。

故，最少需要 5 连士兵看守，他们驻扎的方式不唯一，如 5 连士兵驻扎于边 DE，EF，CF，BF，AB 就是一种方式。

（2）（6 分）参考答案：

为了更便于看守，希望总的看守线路的长度最短。此题转换为求原图的一个最小权生成树。由 Kruskal 克鲁斯卡尔算法可以得到一个如下图所示的最小权生成树（注意最小权生成树并不唯一），该看守线路总的长度为 1+1+2+2+3=9。