第13章　静电场中的导体和电介质

性能优良的合成绝缘子

§ 13.1 静电场中的导体

主要内容：

1. 导体的静电平衡条件

2. 静电平衡时导体上的电荷分布

3. 静电感应与静电屏蔽

13.1.1 导体的静电平衡条件

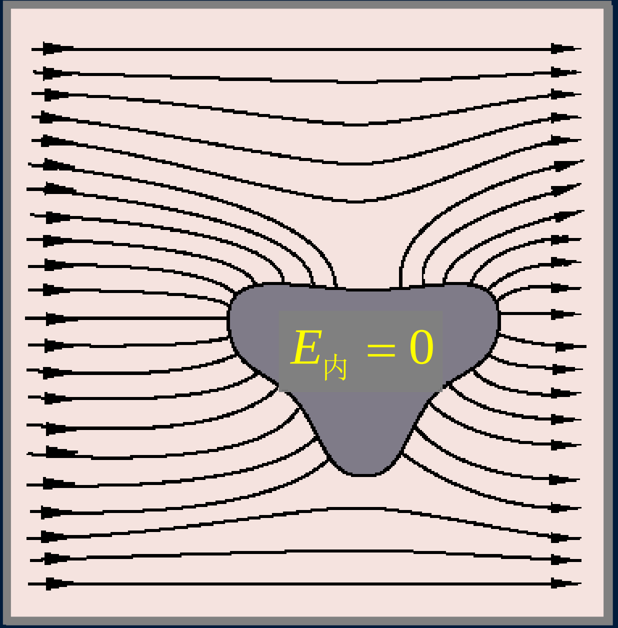
- 静电平衡

导体内部和表面上任何一部分都没有电荷的宏观定向运动，我们称这时导体处于静电平衡状态。

- 导体静电平衡的条件

导体内部任意一点的电场强度都为零；

$$E_{内}=0$$



- 推论

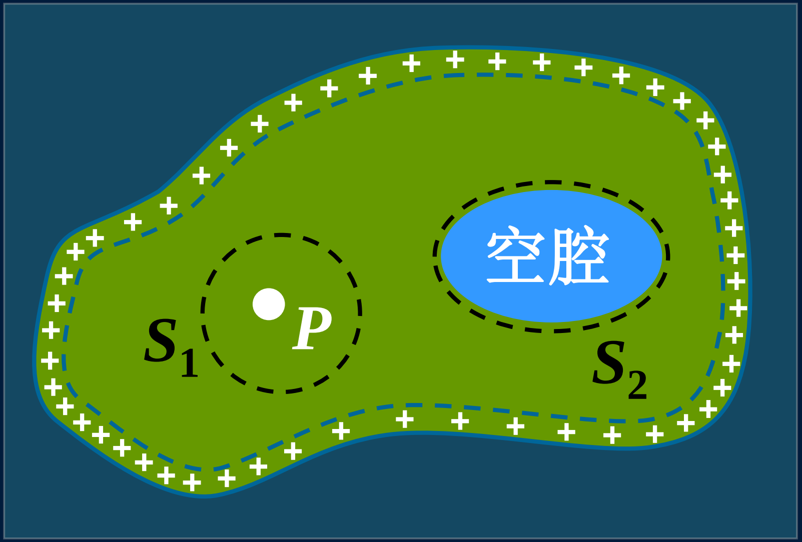
(1)导体静电平衡时是一个等势体，
导体的表面是一个等势面。

(2)导体表面上任意一点的电场强度方向垂直于该处导体表面。

$$\vec{E}_{表面}\perp 导体表面$$

13.1.2 静电平衡时导体上的电荷分布

1. 当带电导体处于静电平衡状态时，导体内部处处没有净电荷存在，电荷只能分布在导体表面上。



$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum q_i = 0$$

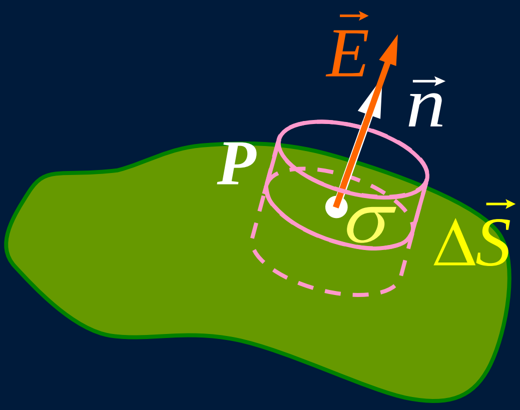
由于P点是任意的，所取的闭合曲面也可以任意地小，所以导体内部处处没有净电荷。

- 如果导体内部有空腔存在，且空腔内部没有其它带电体

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum q_{i内} = 0$$

空腔表面上也不存在净电荷，电荷只能分布在外表面！

2. 处于静电平衡的导体，导体表面附近一点的电场强度与该点处导体表面电荷的面密度成正比。



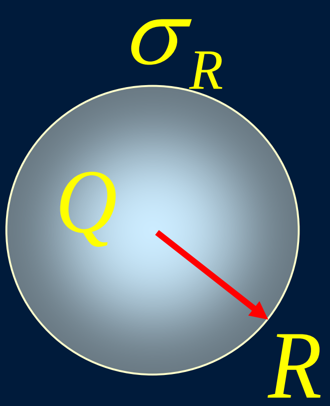
在导体表面取一微小面积元 ΔS ，包围点P，该处电荷面密度为σ.

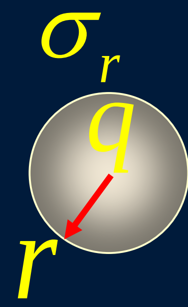
由高斯定理，有

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\cdot\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

3. 处于静电平衡的孤立导体，其表面上电荷的面密度的大小与该处导体表面的曲率有关。

导体表面凸出的地方，曲率是正值且较大，电荷面密度较大；较为平坦的地方，曲率较小，电荷面密度较小；表面凹进的地方，电荷面密度更小。

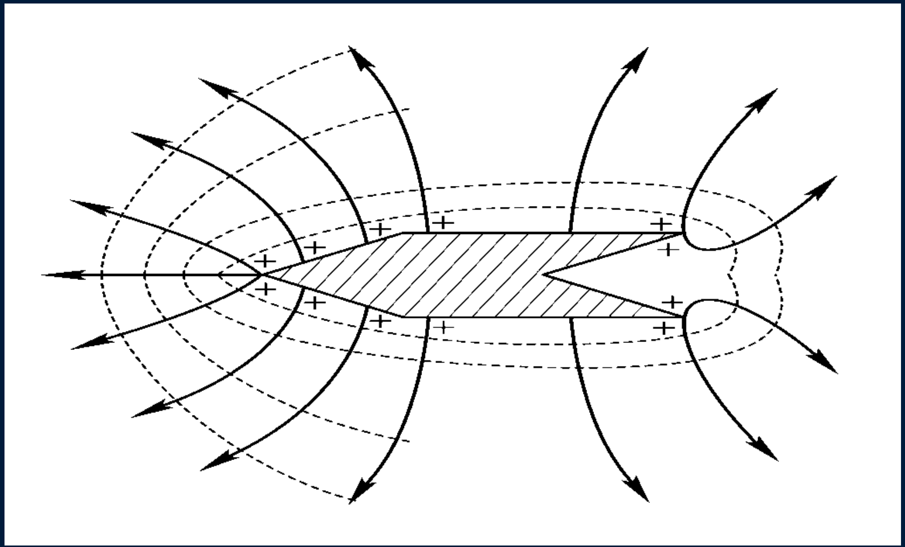


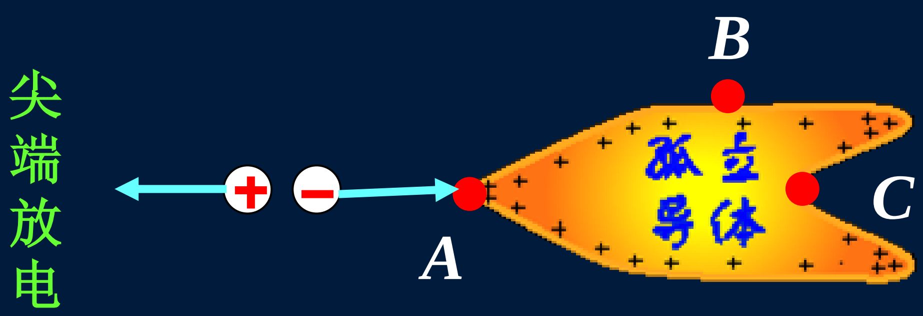


$$U_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{4\pi R^2\sigma_R}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{R\sigma_R}{\varepsilon_0}$$

$$U_R = U_r$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R} = \frac{1/R}{1/r}$$

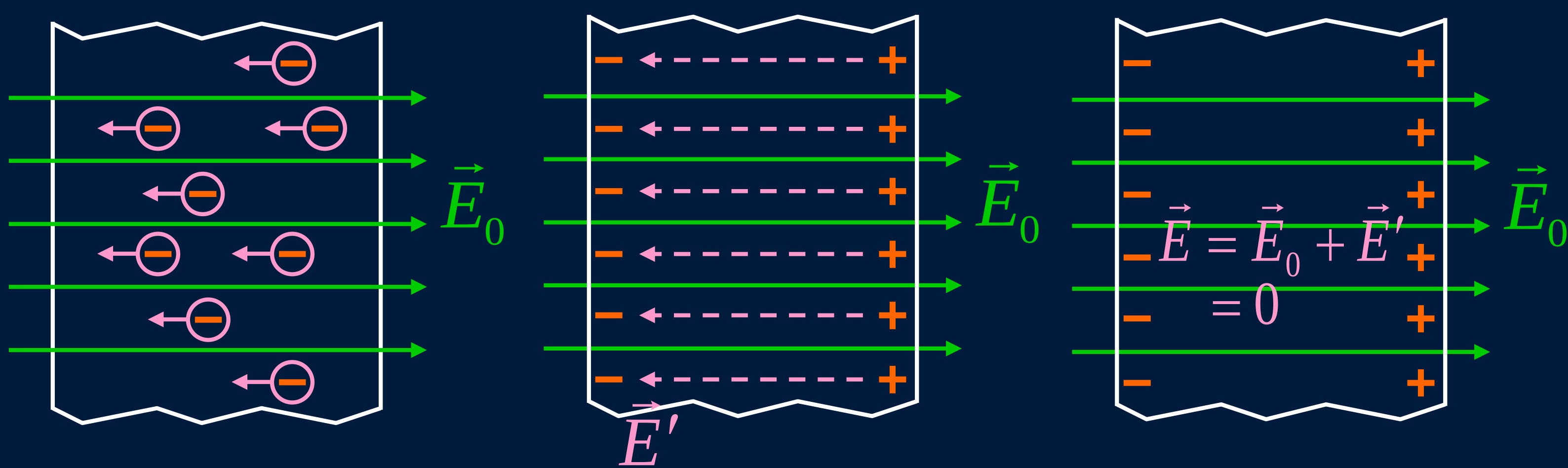




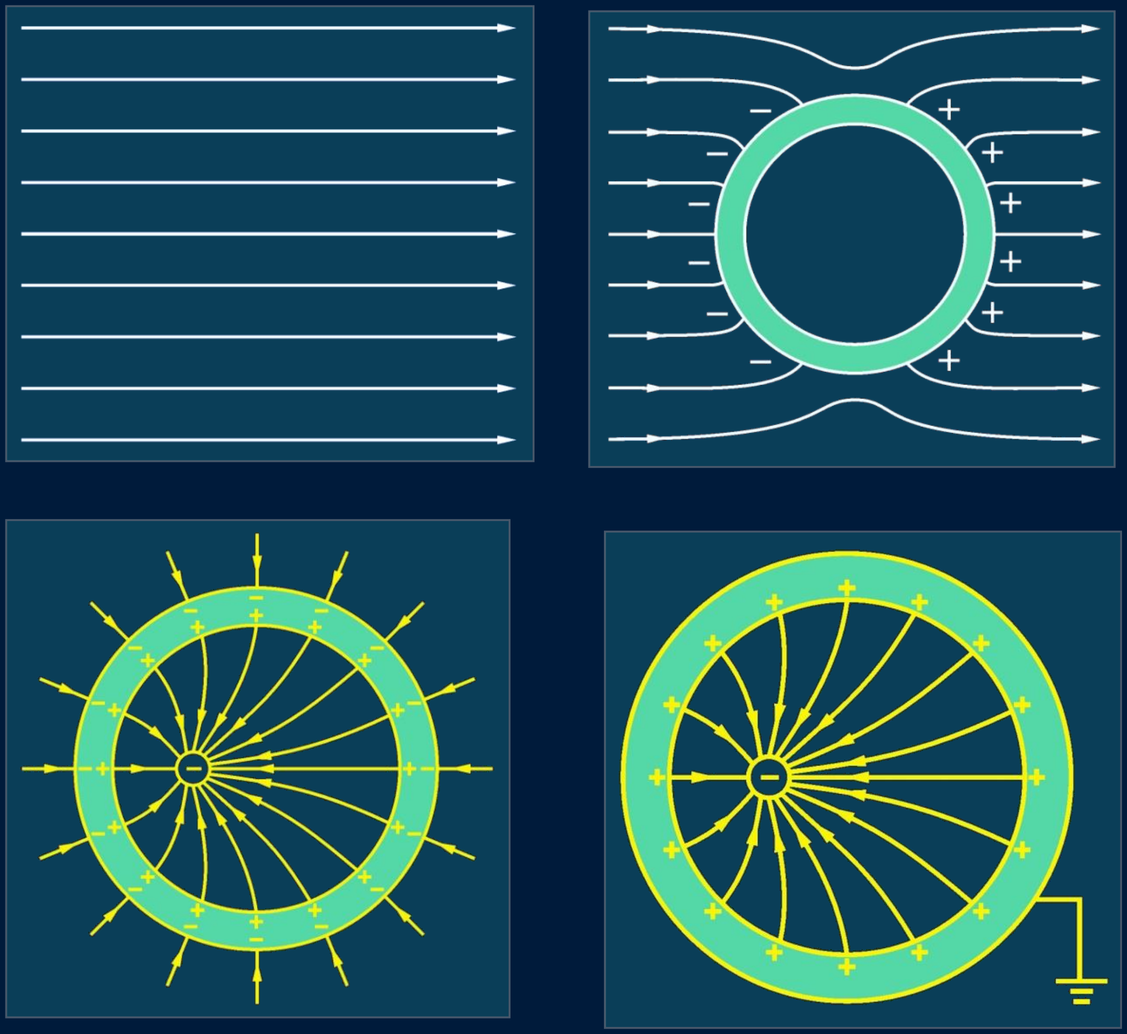
$$\sigma_A > \sigma_B > \sigma_C$$

13.1.3 静电感应与静电屏蔽

- 静电感应



• 静电屏蔽 （腔内、腔外的场互不影响）



在外电场的作用下，导体中出现电荷重新分布。

空腔导体腔内有带电体

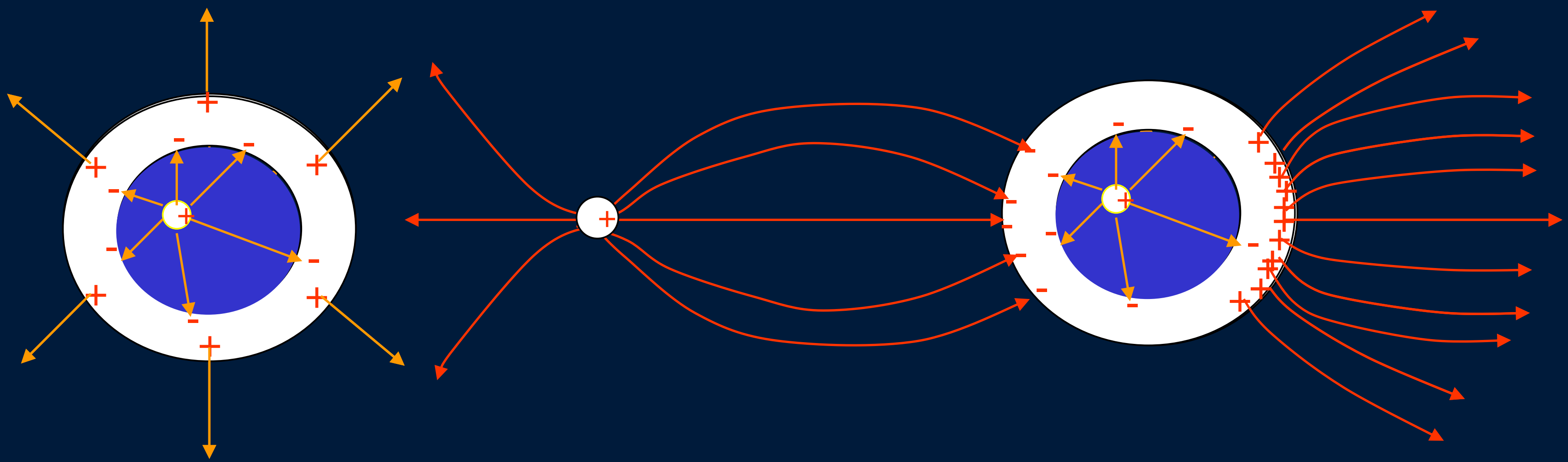
无论空腔导体是否带电，是否处于电场中：

①导体内表面感应等量异号电荷。

②整个导体的带电量应遵守电荷守恒定律。

③外表面的电荷分布与腔内带电体及其位置无关，只与外电场和外表面的形状有关；

④空腔导体接地，外表面的电荷分布除了满足静电平衡条件，还必须使导体为0电势体。

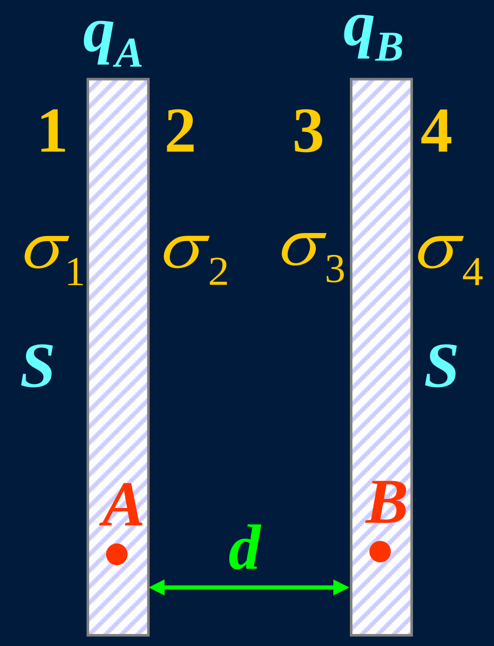


例 两块等面积的金属平板，分别带电荷q_A和q_B，平板面积均为S，两板间距为d，且满足面积的线度远大于d。

求 静电平衡时两金属板各表面上的电荷面密度。

解 如图示，设4个表面的电荷面密度分别为q_1、q_2、 q_3和q_4，由电荷守恒，得

$$\sigma_1 S+\sigma_2 S=q_A,\quad \sigma_3 S+\sigma_4 S=q_B \quad ①$$



在两板内分别取任意两点A和B，则

$$\left.\begin{aligned} E_A&=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0\\ E_B&=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4=0\\ \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4=0\end{cases}$$

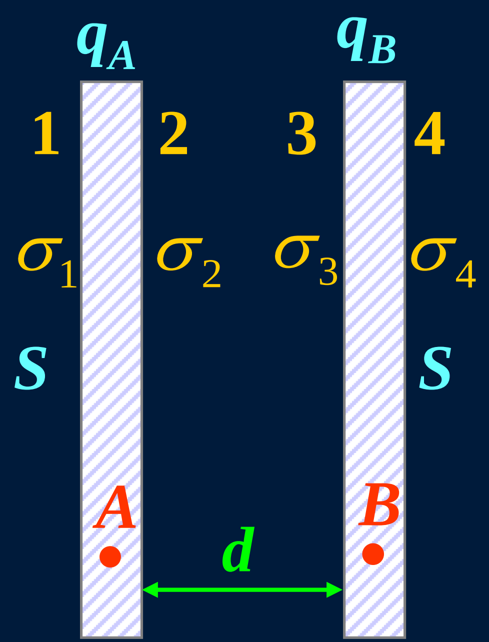
$\sigma_1 = \sigma_4, \quad \sigma_2 = -\sigma_3$

代入①，得

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_A + q_B}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_A - q_B}{2S}$$

可见，*A*、*B*两板的内侧面带等量异号电荷；两板的外侧面带等量同号电荷。

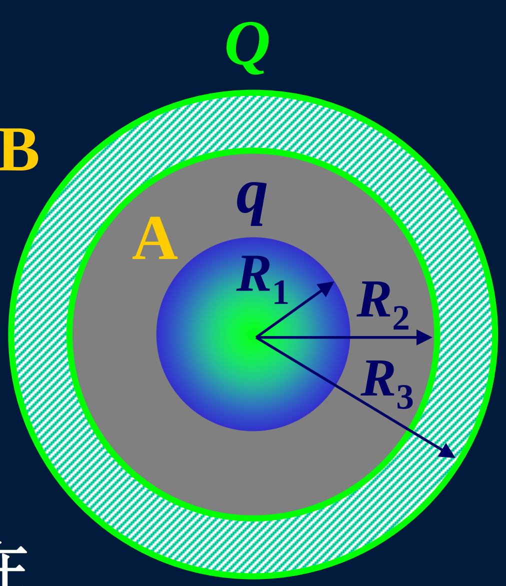


◆ 特别地，若$q_A = -q_B = q$，则

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = q/S$$

电荷只分布在两板的内侧面，外侧面不带电。

例 半径为R_1的金属球A带电为q (>0)，在它外面有一同心放置的金属球壳B，其内外半径分别为R_2和 R_3，带电为 Q (>0)。如图所示，当此系统达到静电平衡时，



求 (1) 各表面上的电荷分布；

(2) 电场强度分布；

(3) 电势分布及球A与球壳B的电势差。

解 (1) 电量分布

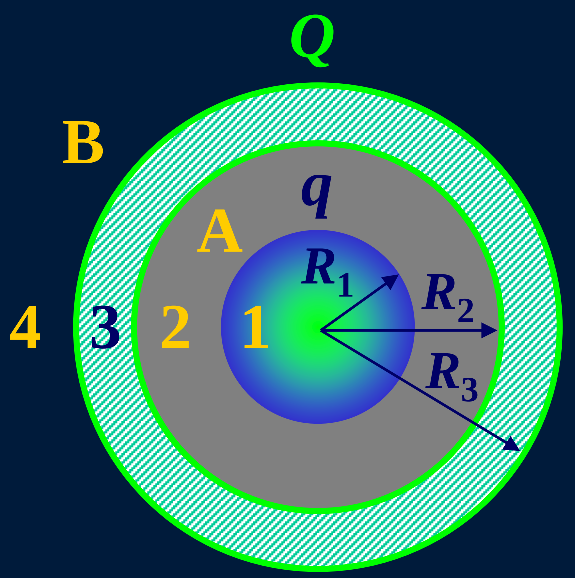
球 A： 根据对称性，电量均匀分布在球 A 的表面上，电量为q。

球壳 B： 由于静电感应，球壳B内表面的电量为：$-q$；外表面的电量为: $Q+q$ 。

◆ 整个系统相当于在真空中的三个均匀带电的球面。

(2) 电场强度分布

由高斯定理及静电平衡条件，得



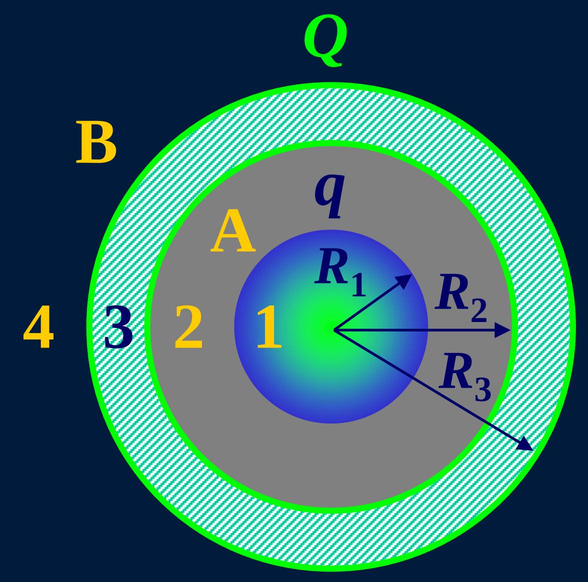
$$
\begin{cases}
E_1 = 0 & (r < R_1) \\
E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1 < r < R_2) \\
E_3 = 0 & (R_2 < r < R_3) \\
E_4 = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_3 < r)
\end{cases}
$$

(3) 电势分布

取无穷远为电势零点，半径为***R***，电量为***q*** 的均匀带电球壳的电势分布为

$$V_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad V_{内} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由(1)知，此系统相当于半径分别为 R_1, R_2 和 R_3， 带电量分别为 q , $-q$ 和 $q+Q$ 的三个均匀带电球面。利用叠加原理，得



$$
\begin{cases}
V_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{R_1} - \dfrac{q}{R_2} + \dfrac{q+Q}{R_3}\right) & (r < R_1) \\[2ex]
V_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q}{r} - \dfrac{q}{R_2} + \dfrac{q+Q}{R_3}\right) & (R_1 < r < R_2) \\[2ex]
V_3 = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & (R_2 < r < R_3) \\[2ex]
V_4 = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (R_3 < r)
\end{cases}
$$

球A与球壳B的电势差为 $U_{AB} = V_1 - V_3 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$

§ 13.2 静电场中的电介质

主要内容:

1. 静电场中的电介质

2. 电介质极化

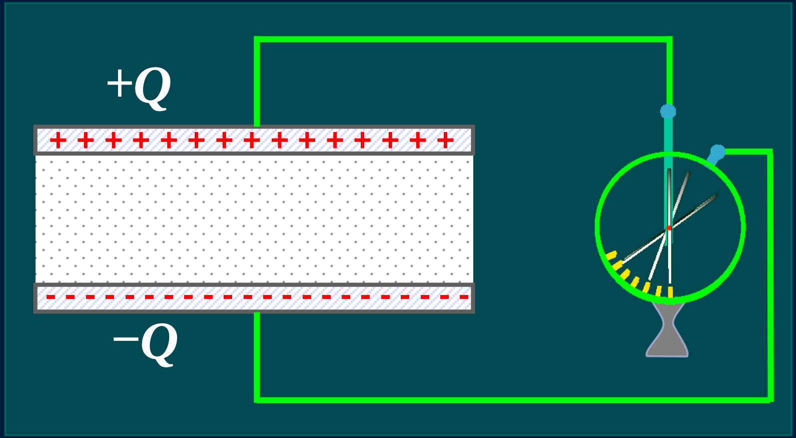
3. 极化电荷面密度

13.2.1 静电场中的电介质

- 电介质：绝缘体 (电阻率超过$10^{8}\ \Omega\ m$)

(置于电场中的)电介质 ⟷ 电场

- 实验结论



$$U=\frac{U_0}{\varepsilon_r} \Rightarrow E=\frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

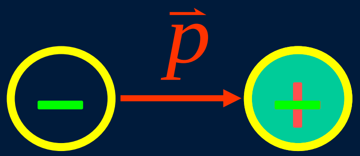
介质中电场减弱。

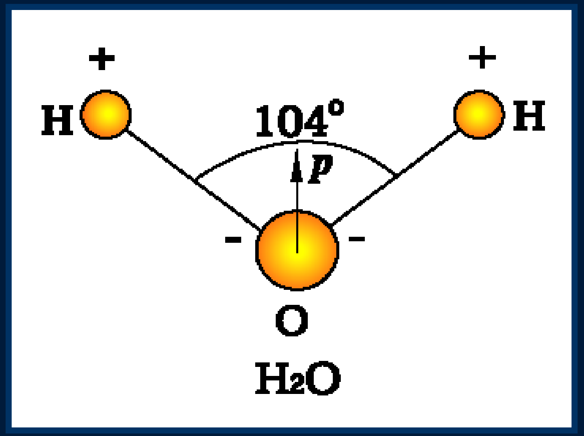
电介质的相对电容率

名　称	ε_r	名　称	ε_r
干燥空气	1.000 59	聚丙烯	3.3
乙醇	26	蒸馏水	81
石英玻璃	4.2	变压器油	2.4
云母	6	钛酸钡	$10^3 - 10^4$

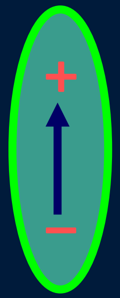
13.2.2 电介质极化

- 电介质分子电结构

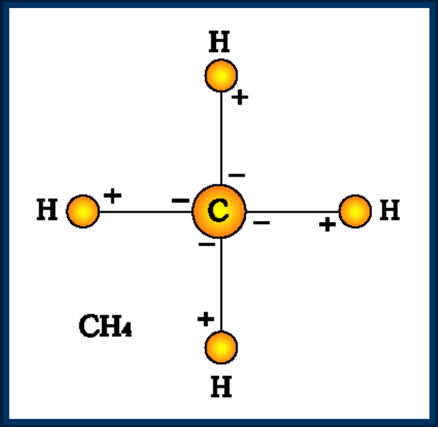




有极分子



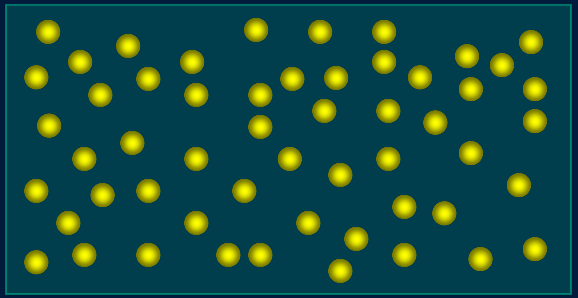
$\vec{p} = q\vec{l}$



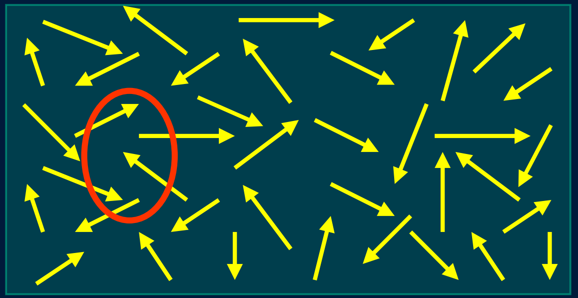
无极分子

- 无外电场时（由于热运动）

无极分子

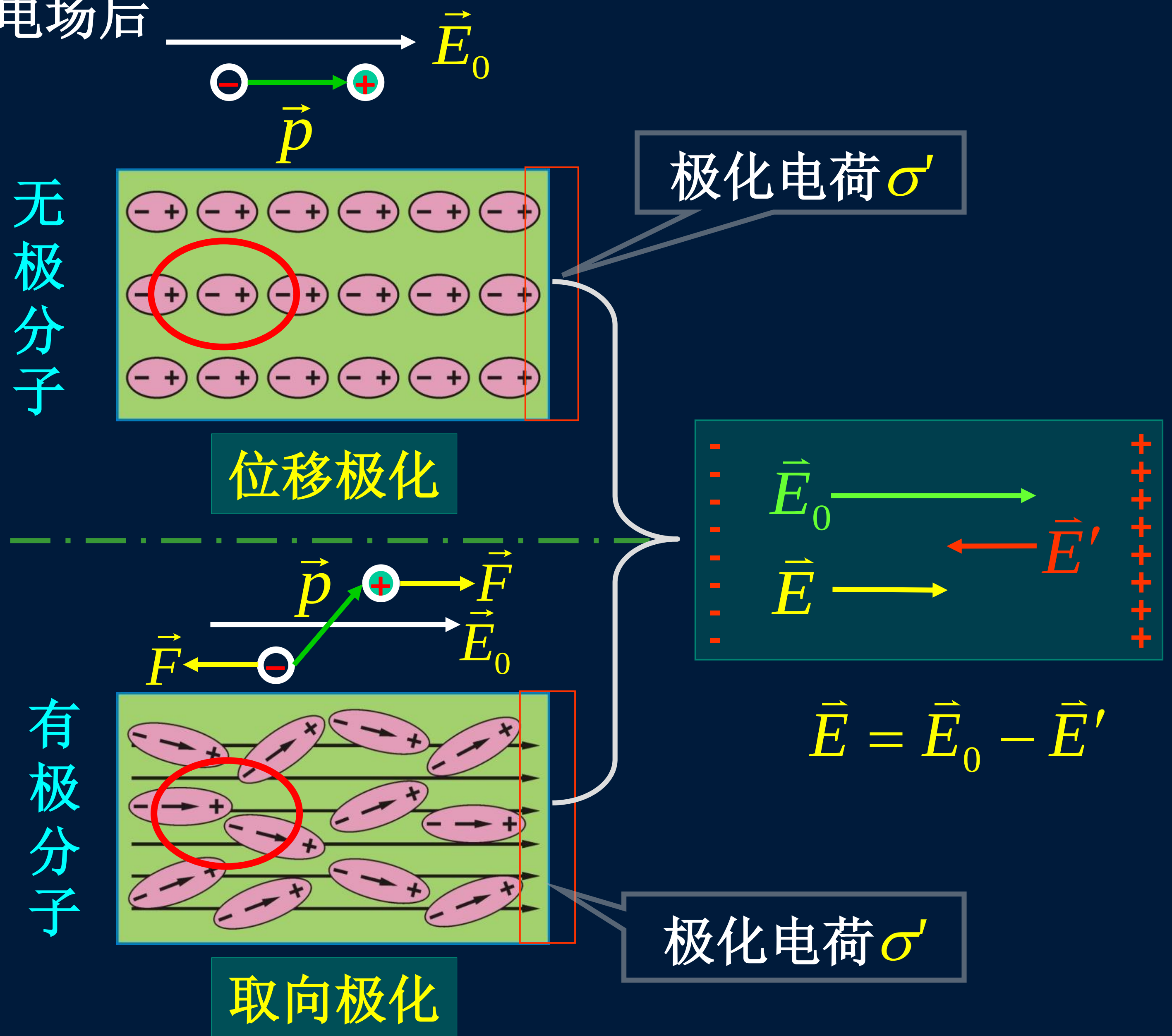


有极分子



整体对外不显电性。

- 加外电场后



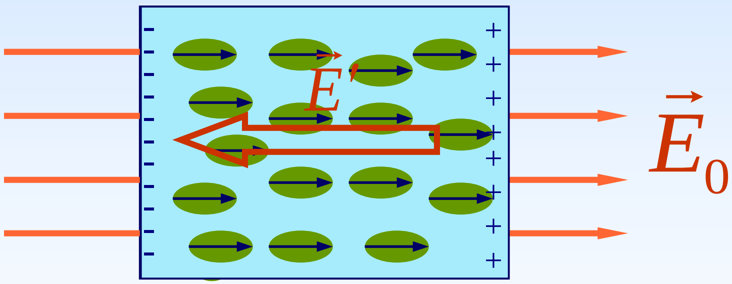
$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}'$$

极化的宏观效果与描述

①在介质的某些部位出现束缚电荷q'， 对于各向同性的均匀介质均匀极化时，束缚电荷只出现在表面。

②在介质内存在电场。在静电平衡条件下，电介质内部长期存在电场，这是电介质和导体的基本区别。

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

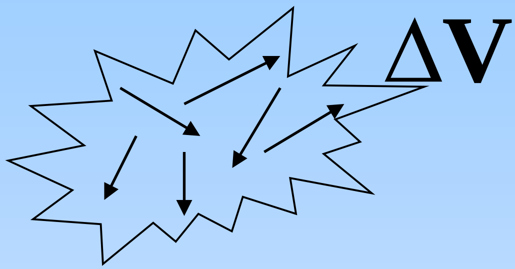


$\vec{E}$:介质中的电场强度

$\vec{E}_0$: 外场的电场强度

$\vec{E}'$: 束缚电荷产生的退极化电场强度

③在介质内，未被抵消的电偶极矩用极化强度矢量来表征：



$$\vec{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \vec{P}_{分子}}{\Delta V}$$

单位：$\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$

极化强度矢量：等于单位体积内电偶极矩的矢量和，它是电介质在外场作用下极化程度的度量。

极化强度矢量与束缚电荷的关系：

$$\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{s}=-\sum q'$$

在电介质中，通过任一闭合曲面S的极化强度矢量的通量等于该曲面所包围的束缚电荷的代数和的负值。

极化强度矢量和电场强度的关系

一般极化规律非常复杂，对于各向同性的介质，实验表明：

$$\boxed{\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}}$$

χ : 是和介质相关的常数，称为介质的极化率。

电介质中的高斯定理

电介质存在时空间各点的极化强度如何计算？

介质存在时，其中的场强：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$\vec{E}$:介质中的电场强度；

$\vec{E}_0$：外场的电场强度，由自由电荷产生；

$\vec{E}'$：束缚电荷产生的退极化电场强度，由束缚电荷产生。

由高斯定理有：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

$$\sum_i q_i = \sum_i q_{0i} + \sum_i q_i'$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_0 + \sum q'\right)$$

在具体应用时，束缚电荷很难直接求出。如何避开束缚电荷求电场强度？

由极化强度矢量与束缚电荷的关系有：

$$\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{s} = -\sum q'$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} + \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_0$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} + \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_0$$

$$\oint_S (\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\cdot d\vec{s} = \sum q_0$$

若令：

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$$

称为电位移矢量。

则有：

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \sum q_0}$$

电介质中的高斯定理：电位移矢量的通量等于闭合曲面所包围的自由电荷的代数和。

对于各向同性的电介质有极化规律：

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

则有：

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

$$= \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

若令：

$\varepsilon_r = (1+\chi)$;称为介质的相对介电常数。

$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi) = \varepsilon_0\varepsilon_r$；称为介质的介电常数。

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}$$

$$\boxed{\text{高斯定理} \xrightarrow{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \sum q_0} \vec{D} \xrightarrow{\vec{D}=\varepsilon\vec{E}} \vec{E}}$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_f$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

讨论

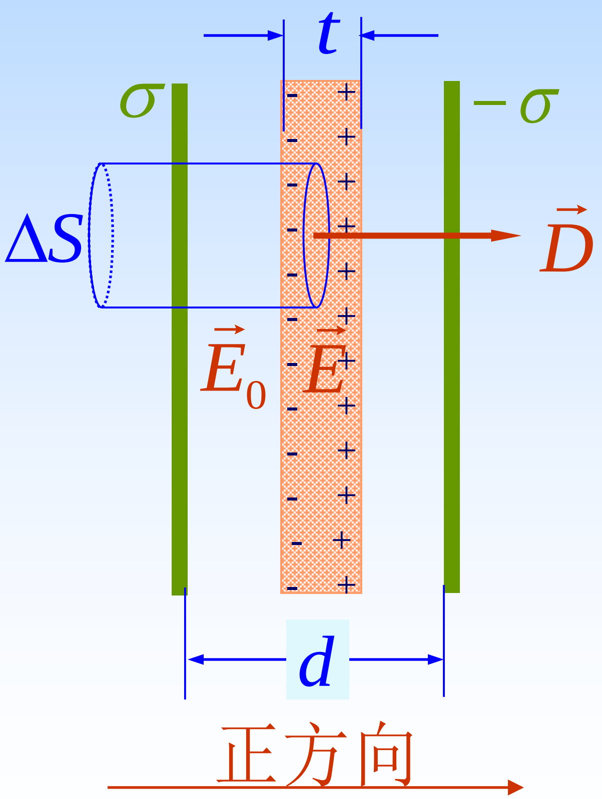
①电位移通量只与自由电荷有关,而与束缚电荷无关.

②介质中的高斯定理是高斯定理的普遍形式(对真空 $\varepsilon_r = 1$　$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$)

③ $\vec{E}$----基本量;　$\vec{D}$----辅助量

例.一平板电容器，极板面积为A两极板的距离d，现将一厚度为t（$t < d$）相对电介常数为ε_r的介质放入此电容器中，求其场强分布和板间电势差。

解：取圆柱形高斯面，利用介质中的高斯定理有：



$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \sum q_0$$

$$D\Delta S = \Delta q_0$$

$$D = \varepsilon E$$

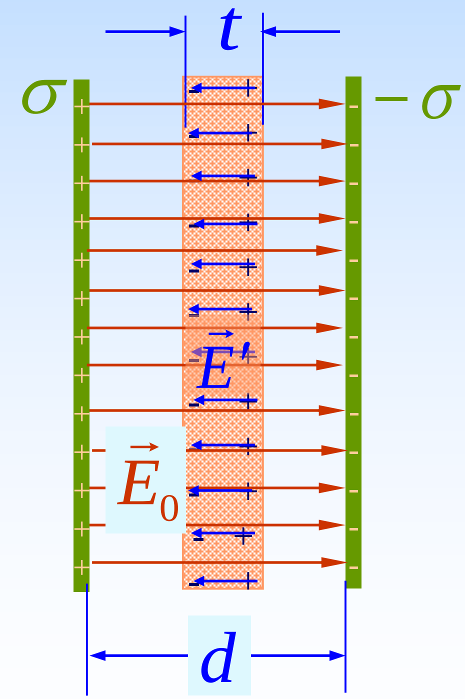
$$E = \frac{\Delta q_0}{\varepsilon \Delta S} = \frac{q}{\varepsilon S}$$

没有介质的部分： $\varepsilon = \varepsilon_0$ $$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

有介质的部分： $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ $$E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

极板的电势差：

$$U = E_0 (d - t) + Et = \frac{q}{\varepsilon_0 S}\left[(d - t) + \frac{t}{\varepsilon_r}\right]$$



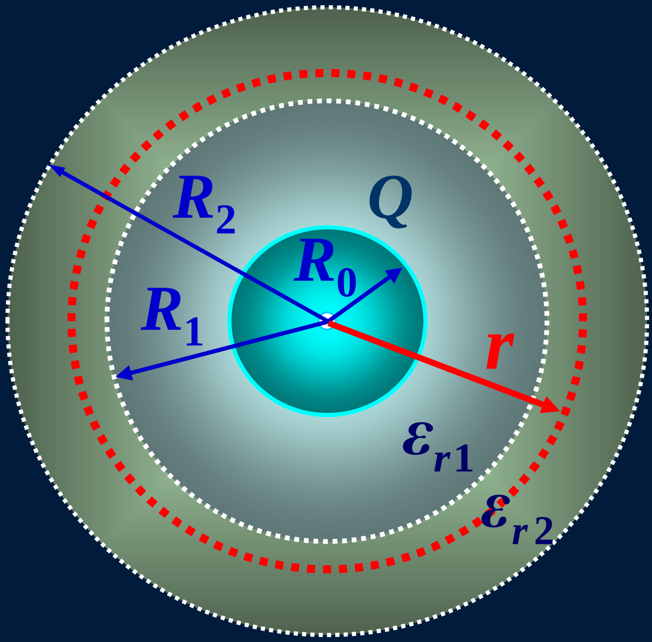
电容：

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{(d - t) + \dfrac{t}{\varepsilon_r}}$$

介质充满极板：

$t = d$ $$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

例 半径为R_0，带电量为Q 的导体球置于各向同性的均匀电介质中，如图所示，两电介质的相对电容率分别为ε_{r1}和ε_{r2}，外层半径分别为R_1和R_2 。



求 (1) 电场的分布；

(2) 紧贴导体球表面处的极化电荷；

(3) 两电介质交界面处的极化电荷。

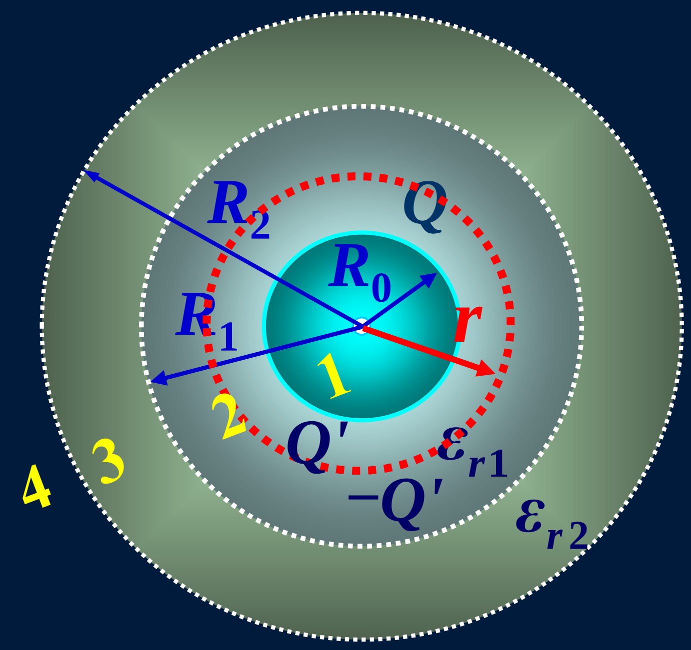
解 (1)电场的分布

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

$$\Rightarrow 4\pi r^2 D = \begin{cases} Q & (R_0 < r) \\ 0 & (r < R_0) \end{cases} \quad \Rightarrow D = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi r^2} & (R_0 < r) \\ 0 & (r < R_0) \end{cases}$$

由$E=D/\varepsilon$，得

$$\begin{cases} E_1 = 0 & (r < R_0) \\ E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2} & (R_0 < r < R_1) \\ E_3 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ E_4 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_2 < r) \end{cases}$$



(2) 紧贴导体球表面处的极化电荷

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q+Q')$$

$$4\pi r^2 E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q+Q') \xrightarrow{\text{将}E_2\text{代入}} Q' = -(1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}})Q$$

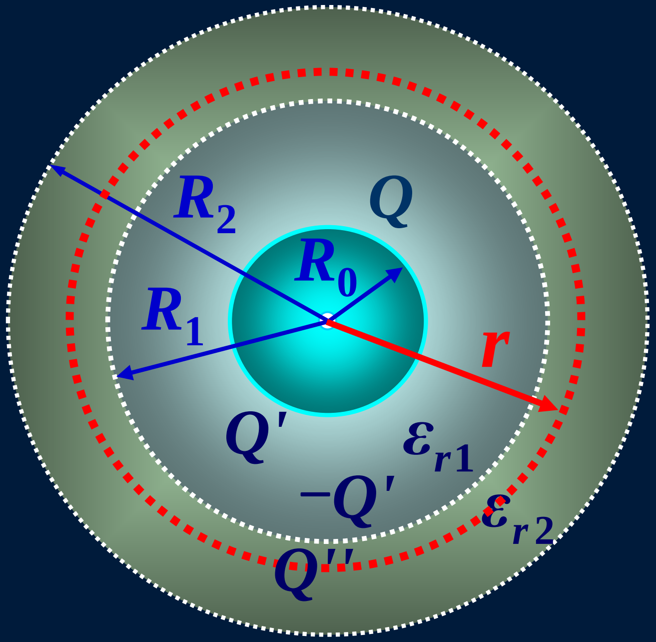
(3) 两电介质交界面处的极化电荷 $(Q''-Q')$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q - Q' + Q' + Q'')$$

$$4\pi r^2 E_3 = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q + Q'')$$

将E_3代入

$$Q'' = -(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}})Q$$



所以，两电介质交界面处的极化电荷为

$$Q'' - Q' = (\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}})Q$$

§ 13.4 电容器的电容

主要内容：

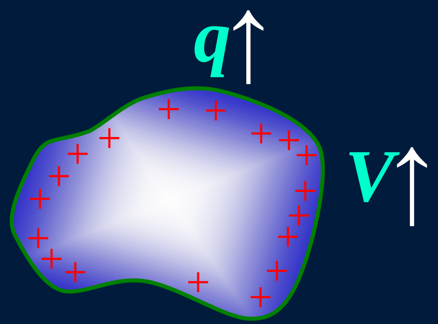
1. 孤立导体的电容

2. 电容器的电容

- 平行板电容器的电容
- 球形电容器的电容
- 柱形电容器的电容

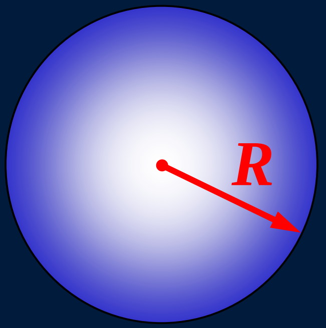
13.4.1 孤立导体的电容

实验表明



孤立导体的电势：$V \propto q$

定义：孤立导体的电容 $\boxed{C = \dfrac{q}{V}}$



单位：法拉 (F)

- 半径为*R* 孤立导体球的电容

电势为 $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 电容为 $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

若 $R = 1m$ ，则 $C = 1.11\times10^{-10}$ F

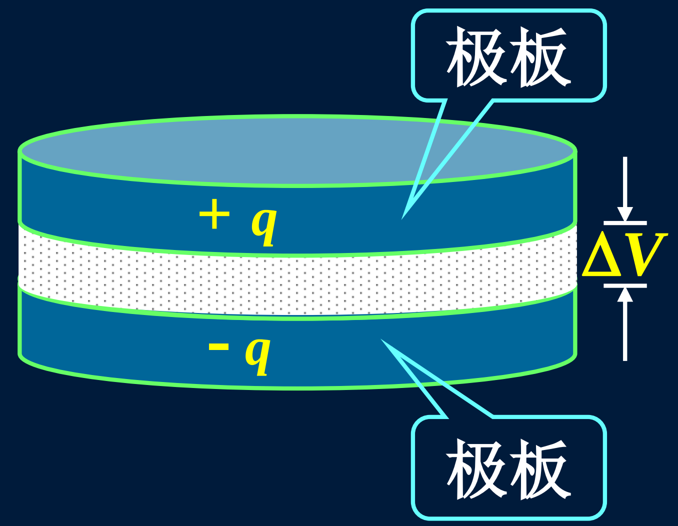
电容只与导体的几何因素和介质有关，与导体是否带电无关。

13.4.2 电容器的电容

通常，由彼此绝缘相距很近的两导体构成电容器。

使两导体极板带电量 $\pm q$

其电势差 $\Delta V\ (V_1 - V_2)$



$$\Delta V \propto q$$

定义：电容器的电容

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

电容器电容的大小取决于其极板的形状、大小、相对位置以及极板间介质等因素有关。

- 电容器的分类

电容器可按其形状、用途、所填充的电介质等的不同进行分类。如

形状：平行板、球形、柱形电容器等。

介质：空气、陶瓷、涤纶、云母、电解电容器等。

- 电容器的应用

在电力系统中，电容器可用来储存电荷或电能，也是提高功率因数的重要元件；在电子电路中，电容器则是获得振荡、滤波、相移、旁路、耦合等作用的重要元件。

- 电容器电容的计算

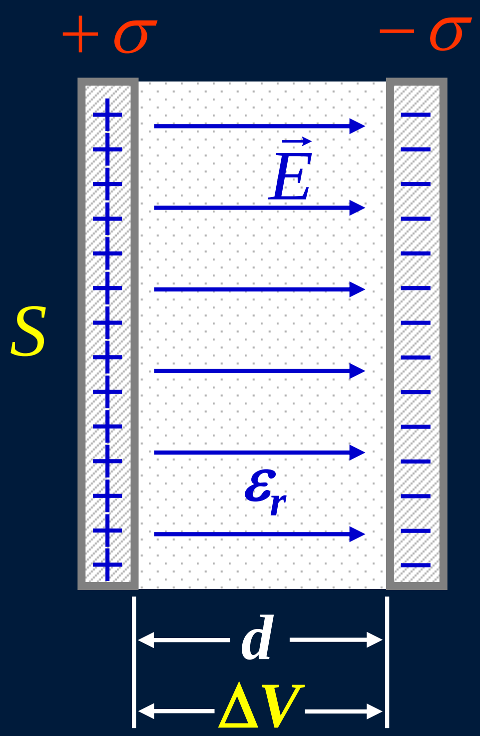
$$\boldsymbol{q} \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow (V_1 - V_2) \Rightarrow C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

1. 平行板电容器

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$V_1-V_2=Ed=\frac{\sigma d}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$C=\frac{q}{V_1-V_2}=\frac{\sigma S}{\sigma d/\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$



真空

$$\Longrightarrow\quad C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

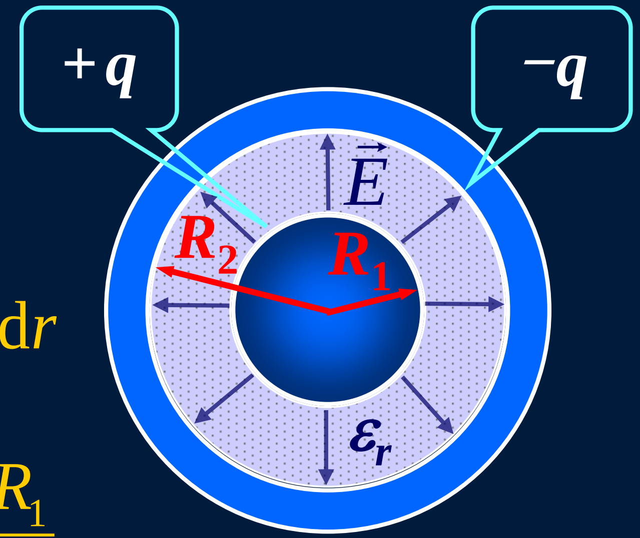
➢ **讨论**

(1) 电容与电介质的相对介电常数 ε_r 成正比；

(2) 电容与极板面积 S 成正比，与极板间的距离 d 成反比。

2. 球形电容器

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\quad (R_1<r<R_2)$$



$$V_1-V_2=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

$$C=\frac{q}{V_1-V_2}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1R_2}{R_2-R_1}\xrightarrow{\text{真空}}C=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2}{R_2-R_1}$$

➢ 讨论

(1) 若 $R_1 >> R_2-R_1$，则 $C=\varepsilon_0\varepsilon_r S/d$

(2) 若 $R_2 >> R_1$，则 $C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1$

3. 柱形电容器(同轴电缆)

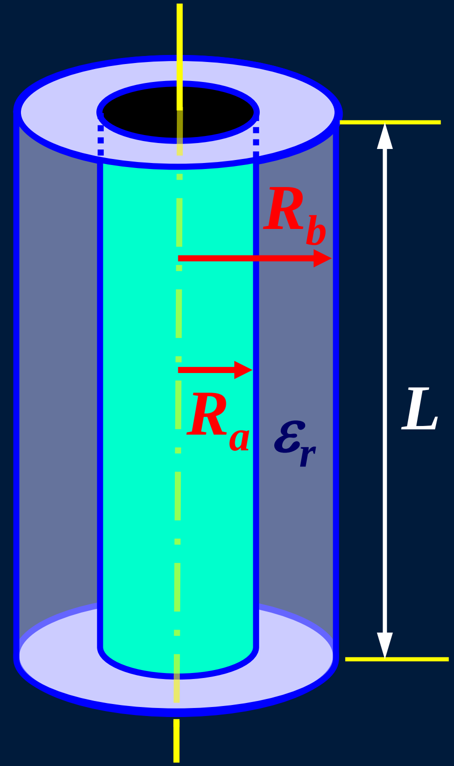
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\quad (R_a<r<R_b)$$

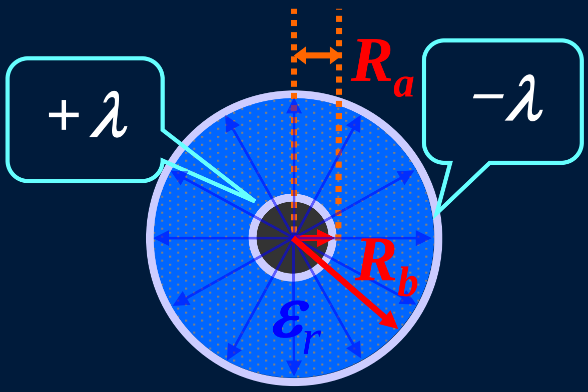
$$V_1-V_2=\int_{R_a}^{R_b}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{R_a}^{R_b}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_b}{R_a}$$

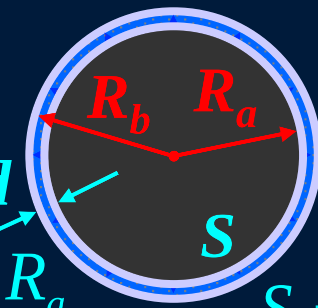
$$C=\frac{q}{V_1-V_2}=\frac{\lambda L}{V_1-V_2}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\frac{R_b}{R_a}}$$





真空

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\dfrac{R_b}{R_a}}$$



$d=R_b-R_a$

$S=2\pi R_a L$

- 讨论

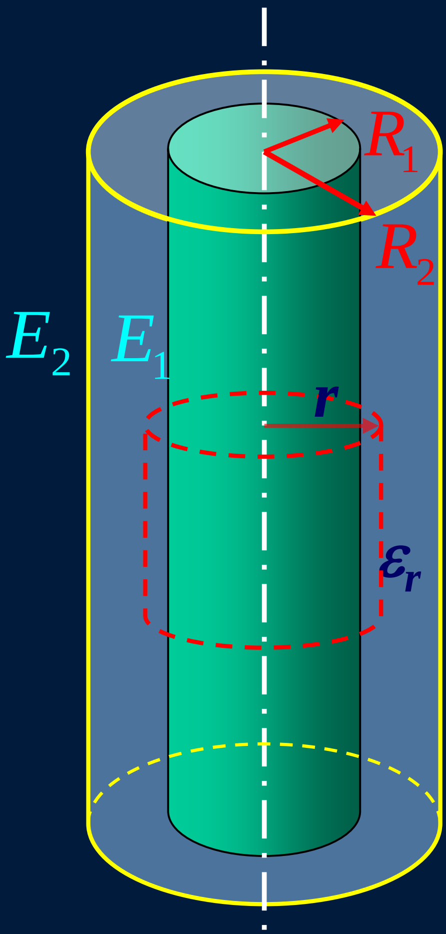
(1) 若 $R_a \gg R_b-R_a$，则 $C=\varepsilon_0\varepsilon_r S/d$

$$\ln\frac{R_b}{R_a}=\ln\left(\frac{R_b-R_a}{R_a}+1\right)\approx\frac{R_b-R_a}{R_a}$$

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln R_b/R_a}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot 2\pi R_a L}{R_b-R_a}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}$$

(2) 已知电介质的击穿场强 (E_m)，求电容器的耐压。

例 一单芯同轴电缆的中心是一半径为R_1的金属导线，外层是一金属层，如图所示。其间充有相对电容率为ε_r的固体介质，当给电缆加一电压后，已知介质内外层的电场强度满足关系$E_1 = 2.5E_2$。若介质最大安全电势梯度为E_m，



求 电缆能承受的最大电压。

解 取图示柱形高斯面，设金属导线和金属层单位长度上的带电量分别为$\pm\lambda$，则用含介质的高斯定理，得

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

所以 $E_1 = \lambda / 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 \quad E_2 = \lambda / 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2 \Rightarrow R_2 = 2.5R_1$

而

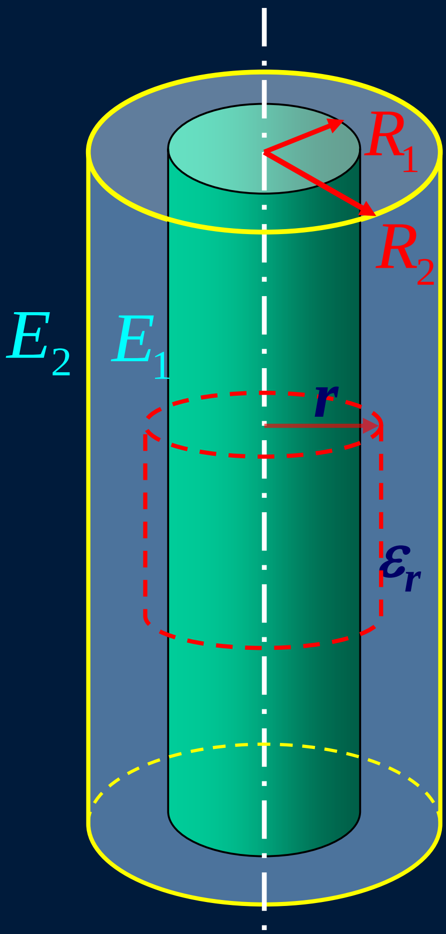
$$E_m = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1} \Rightarrow E = \frac{R_1 E_m}{r}$$

由电场强度和电势的积分关系，电缆能承受的最大电压为

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{R_1 E_m}{r} \mathrm{d}r$$

$$= R_1 E_m \ln \frac{R_2}{R_1}$$

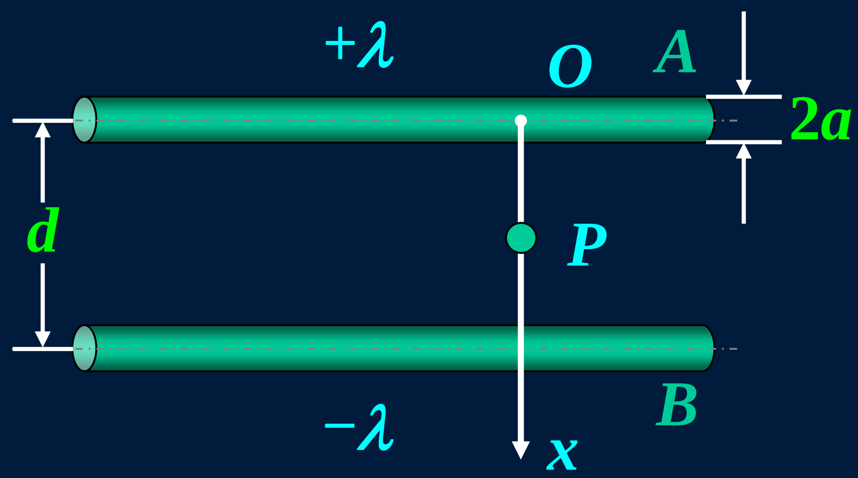
$$= R_1 E_m \ln 2$$



例 设有两根半径均为a 的平行长直导线，它们轴线之间的距离为d，且$d >> a$，

求 单位长度平行直导线间的电容。

解 设两根导线单位长度上的带电量分别为$\pm\lambda$，由高斯定理，两导线间任一点 P 的电场强度为



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}$$

两导线间的电势差为

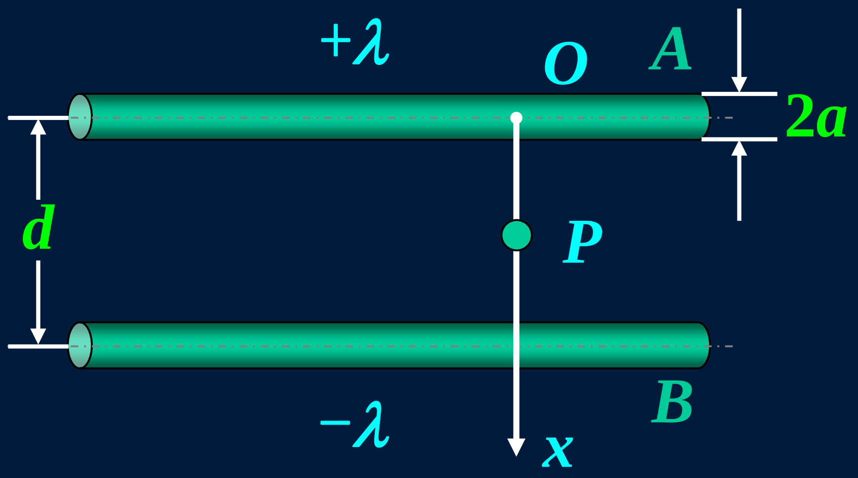
$$\Delta V = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^{d-a} E dr = \int_a^{d-a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) dr$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-a}{a} \approx \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$$

单位长度导线间的电容为

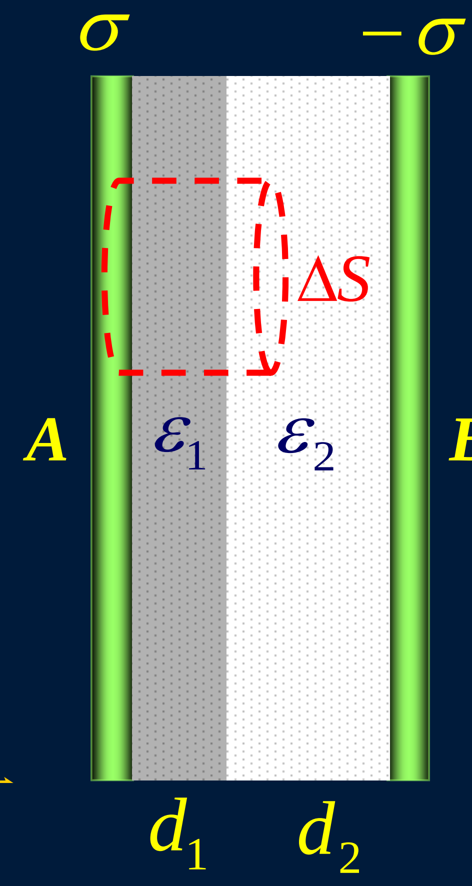
$$C=\frac{\lambda}{\Delta V}=\frac{\lambda}{\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d}{a}}$$

$$=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d}{a}}$$



例 平行板电容器，极板面积为S，板间间距为d，现充有两种电容率分别为ε_1和ε_2，厚度分别为d_1和d_2的均匀电介质，如图所示。

求 求此平行板电容器的电容。



解 设两极板带电荷面密度分别为$+\sigma$和$-\sigma$，

取圆柱形高斯面，由高斯定理，得

$$D\Delta S = \sigma\Delta S \qquad D = \sigma$$

$$\Rightarrow E_1 = \sigma/\varepsilon_1 \qquad E_2 = \sigma/\varepsilon_2$$

两板间的电势差

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{d_1} \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_o\varepsilon_{r1}} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_o\varepsilon_{r2}} d_2$$

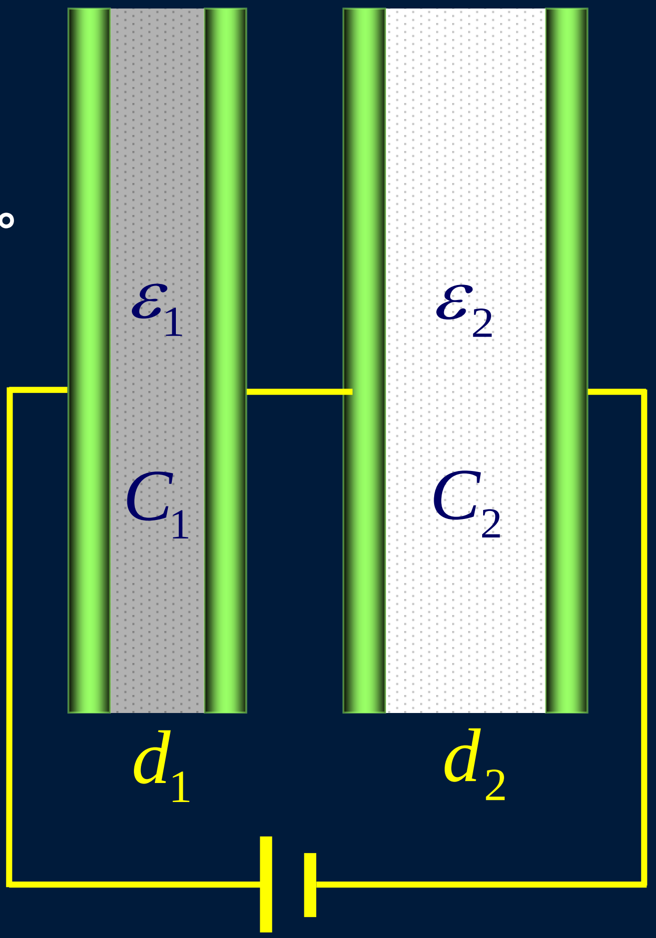
电容为

$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{\sigma S}{\sigma d_1/\varepsilon_1+\sigma d_2/\varepsilon_2}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}$$

- 各层电介质中的电场强度不同；
- 此电容器相当于两个电容器的串联。

$$C_1=\frac{\varepsilon_1 S}{d_1}\qquad C_2=\frac{\varepsilon_2 S}{d_2}$$

$$C=\frac{1}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1 S}+\dfrac{d_2}{\varepsilon_2 S}}=\frac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}}$$



➢ 推广

平板电容器中充介质的另一种情况

$$\sigma S = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 \quad ①$$

$$D_1 = \sigma_1 \quad D_2 = \sigma_2$$

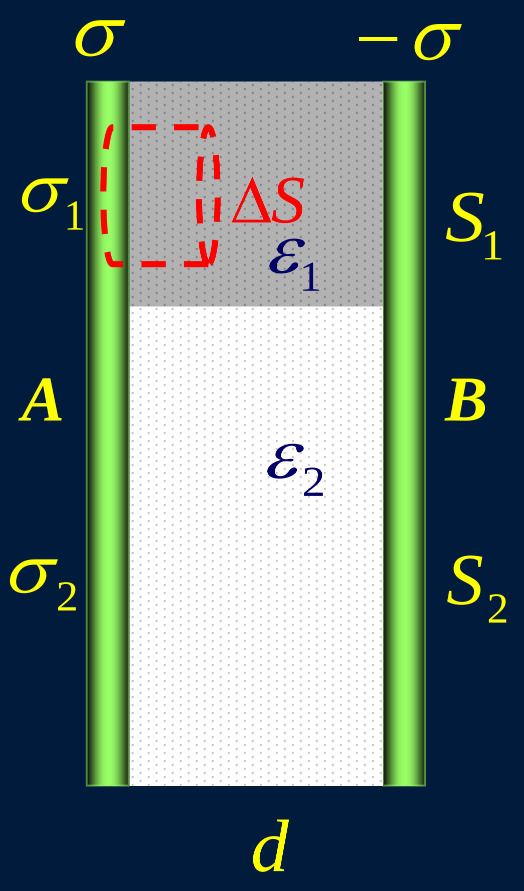
由于极板内为等势体 $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow E_1 = \frac{\Delta V_1}{d} = E_2$$

$$D = \varepsilon E \Rightarrow \sigma_1 / \varepsilon_1 = \sigma_2 / \varepsilon_2 \quad ②$$

由①和②得 $\sigma_1 = \dfrac{\varepsilon_1 S}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}\sigma$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{S}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}\sigma$$



两板间的电势差

$$\Delta V = E_1 d = \frac{Sd}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}\sigma$$

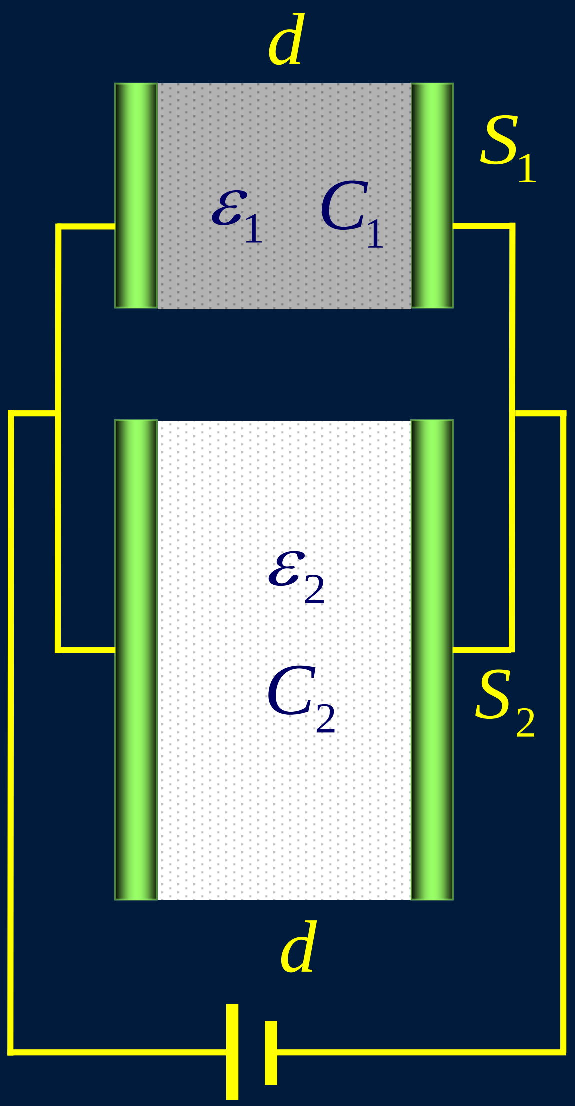
电容为

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{\dfrac{Sd}{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}\sigma} = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d}$$

- 各层电介质中的电场强度相同；
- 此电容器相当于两个电容器的并联。

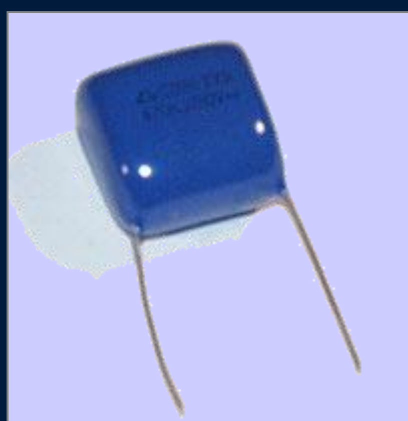
$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 S_1}{d} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2 S_2}{d}$$

$$C = \frac{\varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 S_2}{d} = C_1 + C_2$$



高压电容器(20kV, 5~21μF)
(提高功率因数)

聚丙烯电容器
(单相电机起动和连续运转)



涤纶电容
(250V 0.47μF)

陶瓷电容器
(20000V 1000pF)

电解电容器
(160V 470 μ F)

§ 13.5 电场能量

主要内容：

1. 电容器中的储能

2. 电场能量

以平行板电容器充电过程为例，来计算电场能量。

设$0 \to t$ 时间内，从B 板向A 板迁移的电荷量为 $q = q(t)$，

则，两极板间的电势差为

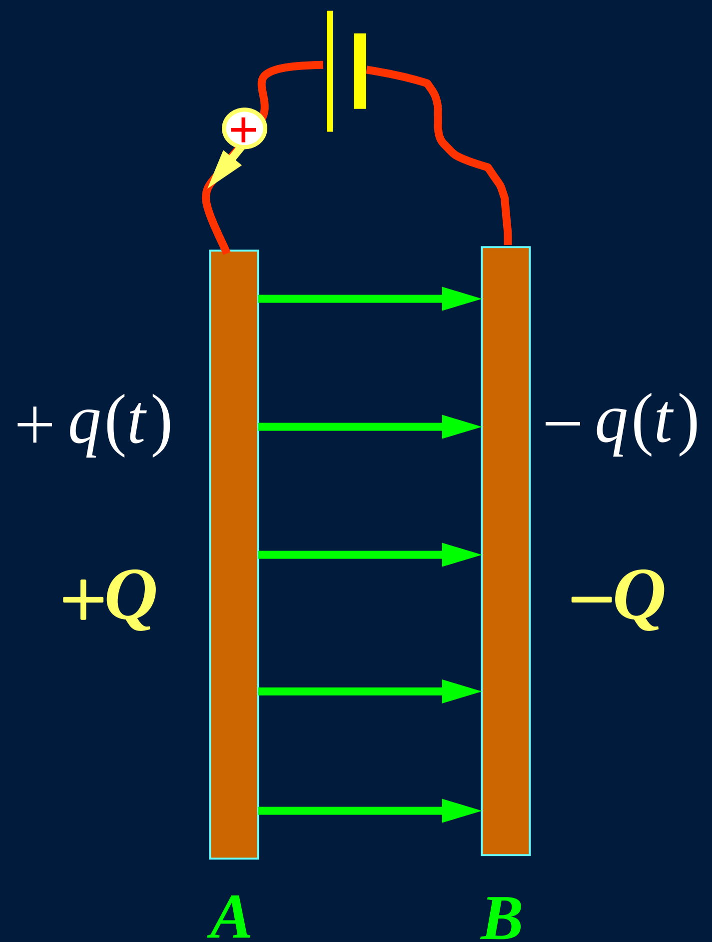
$$u = \frac{q}{C}$$

将 $\mathrm{d}q$的电荷由 B 板移到 A板，电源需作的功为

$$\mathrm{d}A = u\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

极板上电量从$0 \to Q$ 时，电源所作的总功为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^Q \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$



电容器中电场储存的能量W_e的数值就等于A，即

$$W_e = A = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

对于平行板电容器

$$\left.\begin{array}{l} U = Ed \\ C = \dfrac{\varepsilon S}{d} \end{array}\right\} \Longrightarrow W_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V$$

能量密度

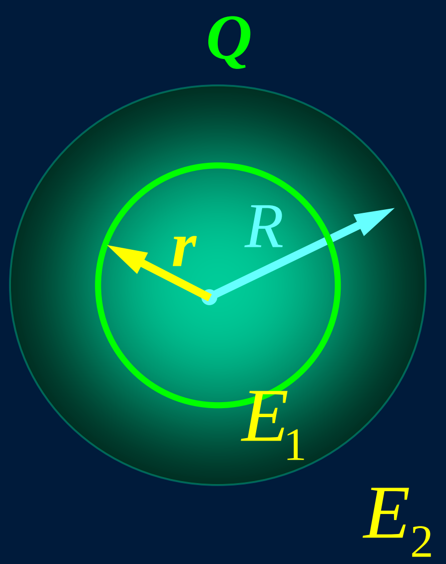
$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$$

对于非均匀电场

$$\boxed{W_e = \int_V \mathrm{d}W_e = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \mathrm{d}V}$$

例 已知均匀带电的球体，半径为R，带电量为Q

求 从球心到无穷远处的电场能量



解 由高斯定理，得球体内外的电场强度为

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

取半径为r，厚度为$\mathrm{d}r$ 的微分元$\mathrm{d}V$

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

总电场能量

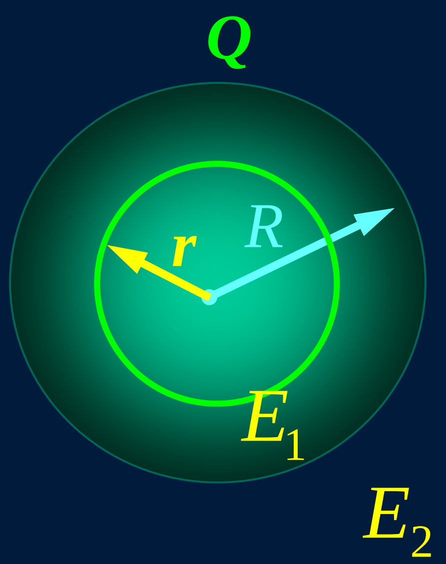
$$W_e = \int_V \mathrm{d}W_e = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2 \mathrm{d}V + \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2 \mathrm{d}V$$

$$= \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r^4}{R^6}\mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$= \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$



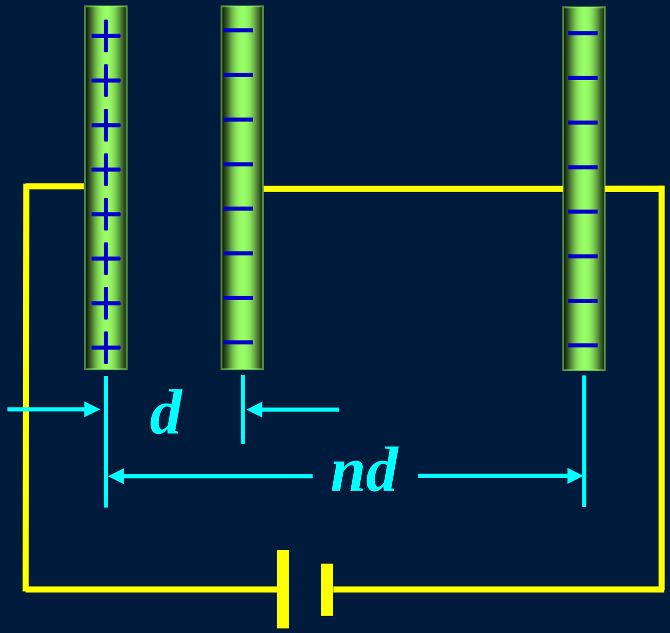
◆ 若为金属球，则 $W_e = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

又半径为**R** 孤立导体球的电容为

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \Rightarrow W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

例 一空气平行板电容器，电容为C，与电压为U 的电源相连接，如图所示。若保持电容器与电源连接， 把两极板间距增大至 n 倍。

求 外力所作的功。



解 拉开两极板的过程，电容器电容的变化为

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \Rightarrow C'=\frac{\varepsilon_0 S}{nd}=\frac{C}{n}$$

电场能量的变化为

$$W=\frac{1}{2}CU^2 \Rightarrow W'=\frac{1}{2}C'U^2=\frac{1}{2n}CU^2$$

电场能量增加 $\Delta W=W'-W=\frac{1}{2}CU^2(\frac{1}{n}-1)<0$

拉开两极板的过程，电容器极板上电量的变化为

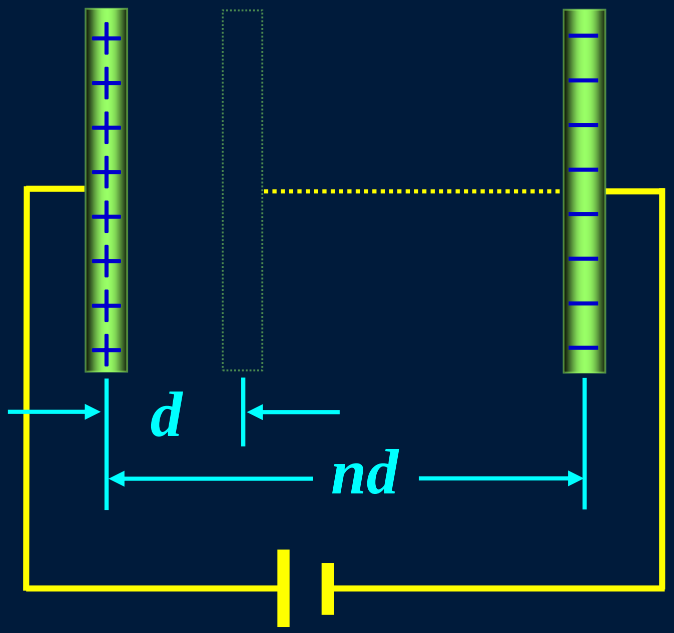
$$q = CU \quad \Rightarrow \quad q' = C'U = q/n$$

电源所作的功为

$$A_1 = (q' - q)U = CU^2(\frac{1}{n} - 1) < 0$$

外力所作的功为

$$A = \Delta W - A_1 = \frac{1}{2}CU^2(1 - \frac{1}{n})$$



本章小结

1. 导体的静电平衡条件及导体上的电荷分布

(1) 导体静电平衡的条件

$$E_{内} = 0 \qquad \vec{E}_{表面} \perp 导体表面$$

用电势描述：导体静电平衡时是一个等势体。

(2) 导体静电平衡时的电荷分布

导体内部处处没有净电荷存在，电荷只能分布在导体表面上。导体表面附近一点的电场强度与该点处导体表面电荷的面密度之间的关系为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

2. 静电场中的电介质

(1) 电介质中的高斯定理

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i q_{0i}}$$

通过高斯面的电位移通量等于高斯面所包围的自由电荷的代数和。

(2) 对各向同性的均匀电介质

电位移矢量： $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

3. 电容器的电容

定义： $C = \dfrac{q}{V_1 - V_2}$

- 电容器电容的计算

$$q \Rightarrow \vec{E} \Rightarrow (V_1 - V_2) \Rightarrow C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

(1) 平行板电容器 $$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

(2) 球形电容器 $$C=\frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2-R_1}$$

(3) 柱形电容器 $$C=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\frac{R_b}{R_a}}$$

4. 电场能量

能量密度 $$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

电场总能量 $$W_e=\int_V \mathrm{d}W_e=\int_V\frac{1}{2}\varepsilon E^2\mathrm{d}V$$

电容器中电场储存的能量

$$W_e=A=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

静电现象

场源电荷

两种电荷
量子带电
电荷守恒

点电荷
点电荷系
分布电荷

静电场

实验基础：
库仑定律
电荷守恒定律
场叠加原理

物质属性：
力的作用、具有能量——真空中的静电场
物质作用：导体 $\to$ 感应带电；电介质 $\to$ 极化——电介质

场的分布特性与规律

施加电荷作用力

移动电荷做功

$$\vec{E}=-\nabla U$$

$$U=\int_0^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

电场强度$\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{q}$

电势$U=\int_P^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}$

场的几何描述：电力线

等势面

已知电荷分布求$\vec{E}(x,y,z)$

$$\begin{cases}\text{点电荷}\vec{E}_i=\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\\ \text{分布电荷}\vec{E}=\sum\limits_i\vec{E}_i\ ;\ \vec{E}=\displaystyle\int\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}\end{cases}$$

已知电荷分布求$U(x,y,z)$

$$\begin{cases}\text{点电荷}U_i=\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r}\\ \text{分布电荷}U=\sum\limits_i U_i\ ;U=\displaystyle\int\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}\end{cases}$$

分布规律:高斯定理$\oint_s\vec{E}\cdot d\vec{s}=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

环路定理$\oint_l\vec{E}\cdot d\vec{r}=0$

世界上首次得到具有压电效应的半导体纳米环结构

（本章由徐忠锋编写制作）