第五节　事件的独立性

- 一、事件的相互独立性
- 二、独立试验序列概型

一、事件的相互独立性

1. 问题的提出

由条件概率，知

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

一般地， $P(B|A)\neq P(B)$

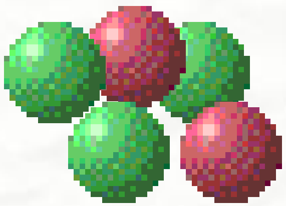
这意味着：事件A 的发生对事件B发生的概率有影响.

问：在任何情形下，式子$P(B|A)\neq P(B)$都成立吗？

引例 盒中有5个球(3绿2红)，每次取出一个，有放回地取两次，记

$A =$ 第一次抽取，取到绿球，

$B =$ 第二次抽取，取到绿球，



则有 $P(B|A) = \dfrac{3}{5} = P(B).$

它表示 A 的发生并不影响 B 发生的可能性大小.

这说明，在有些情形下，事件A 的发生对事件B 发生的概率并没有影响.

又，若 $P(A) > 0$，则

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow \boxed{P(AB) = P(A)P(B)}$$

2. 两个事件的独立

(1) 定义1.9

设 A, B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB) = P(A)\,P(B),$$

则称事件 A, B 相互独立，简称 A, B 独立.

注 1° 若 $P(A) > 0$, 则

$$P(B|A) = P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B).$$

说明

事件 A 与 B 相互独立，是指事件 A 的发生与事件 B 发生的概率无关.

2º 独立与互斥的关系

这是两个不同的概念.

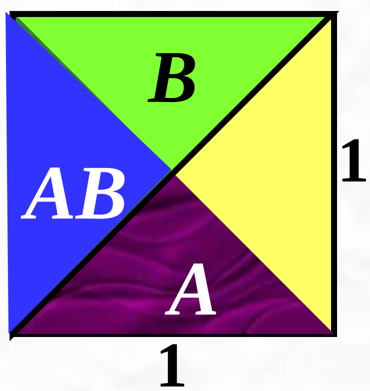
互斥是事件间本身的关系

两事件相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

两事件互斥 $AB=\varnothing$

二者之间没有必然联系

例如



若 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{2},$

则 $P(AB)=P(A)P(B).$

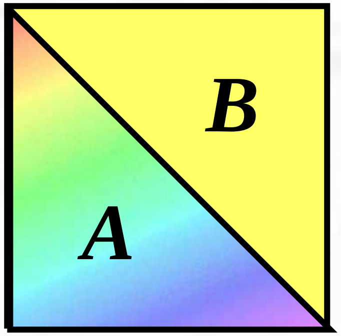
两事件相互独立 $\not\Rightarrow$ 两事件互斥.

两事件互斥 $\not\Rightarrow$ 两事件相互独立.

目 上 下 回 停 续

又如:

若 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(B)=\dfrac{1}{2}$ (如图)



则 $P(AB)=0,$

$P(A)P(B)=\dfrac{1}{4},$

故 $P(AB)\neq P(A)P(B).$

由此可见两事件互斥但不独立.

两事件互斥 $\not\longrightarrow$ 两事件相互独立.

可以证明： 特殊地，

当 $P(A)>0, P(B)>0$时，有

A与B 独立 $\Rightarrow$ A与B 相容(不互斥),

或 A与B 互斥 $\Rightarrow$ A与B 不独立.

证 若A与B 独立, 则 $P(AB)=P(A)P(B)$.

$\because$ $P(A)>0,\ P(B)>0,$

$\therefore$ $P(AB)=P(A)P(B)>0,$

故 $AB\neq\varnothing,$

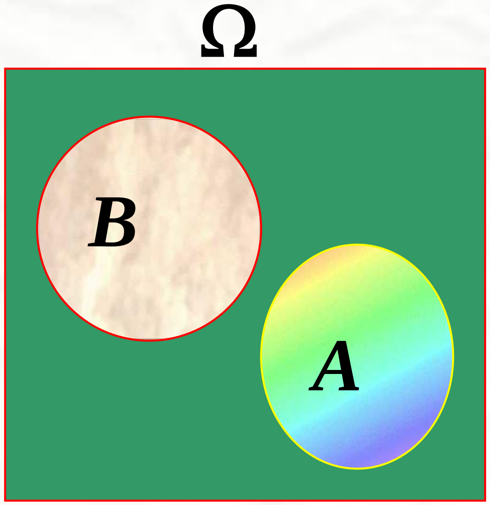
即 A与B 不互斥(相容).

逆否命题的理解:

若A与B互斥，则 $AB=\varnothing$,

B发生时，A一定不发生.

$$P(A|B)=0$$



这表明: B的发生会影响 A发生的可能性(造成A不发生), 即B的发生造成 A发生的概率为零.

所以A与B不独立.

(2) 性质1.5

1) Ω 及$\varnothing$与任何事件A相互独立.

证 $\because\ \Omega A=A,\ P(\Omega)=1,$

$\therefore\ P(\Omega A) = P(A)=1\cdot P(A)= P(\Omega)\, P(A).$

即 Ω与A独立.

$\because\ \varnothing A=\varnothing,\ P(\varnothing)=0,$

$\therefore\ P(\varnothing A) = P(\varnothing)=0= P(\varnothing)\, P(A).$

即 $\varnothing$与A独立.

2) 若事件A与B相互独立，则以下三对事件也相互独立.

① A 与 $\overline{B}$;

② $\overline{A}$ 与 B;

③ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$.

注 称此为二事件的独立性关于逆运算封闭.

证 ① $\because A = A\Omega = A(B+\overline{B}) = AB + A\overline{B},$

$\therefore P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}),$

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB).$$

目 上 下 回 停 续

又$\because$ A与B相互独立,

$$\therefore \quad P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$$

$$= P(A) - P(A)P(B)$$

$$= P(A)[1 - P(B)]$$

$$= P(A)P(\overline{B}).$$

② 类似于 ①。

目 上 下 回 停 续

③ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$.

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A)P(B)]$$

$$= [1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)]$$

$$= [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)]$$

$$= P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

例1-1甲, 乙两人同时向敌人炮击,已知甲击中敌机的概率为0.6, 乙击中敌机的概率为0.5, (1)求 敌机不被击中的概率.(2) 现已知敌机被击中，则它是甲击中的概率.

解 (1) 设 A={ 甲击中敌机 }, B={ 乙击中敌机 },

C={敌机不被击中 },

则 $C = \bar{A}\bar{B}.$

由于 甲，乙同时射击，甲击中敌机并不影响乙击中敌机的可能性，所以 A与B独立,

因而 $\bar{A}$与$\bar{B}$ 也独立.

目 上 下 例 停 续

依题设， $P(A)=0.6,\quad P(B)=0.5$

$$P(C)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$$

$$=(1-0.6)(1-0.5)$$

$$=0.4\times 0.5=0.2.$$

$$(2)\,P(A\mid\bar{C})=P(A\mid A\cup B)=\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0.6}{0.8}=\frac{3}{4}.$$

例1-2 设A,B相互独立，且两个事件仅A发生的概率或仅B发生的概率都是1/4，求$P(A)$与$P(B)$.

解 由A,B独立，知$A,\bar{B}$独立，$\bar{A},B$独立.

$$\therefore\quad P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=1/4,$$

$$P(\bar{A}B)=P(B)P(\bar{A})=1/4,$$

$$P(A)=P(A)P(\bar{B})+P(A)P(B),$$

$$P(B)=P(B)P(\bar{A})+P(B)P(A)$$

$$\Rightarrow P(A)=P(B),$$

由$P(A)-P(A)P(B)=P(A)-(P(A))^2=1/4$

$$\Rightarrow P(A)=P(B)=1/2.$$

目 上 下 回 停 续

例1-3 假设$P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$,在以下情况下求$P(B)$:

(1) A,B不相容; (2) A,B相互独立; (3) $A\subset B$.

解 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & =P(A\cup B)-P(A)=0.7-0.4=0.3. \\ (2) & =P(A\cup B)-P(A)+P(A)P(B) \\ & =0.7-0.4+0.4\times P(B), \\ & \text{得}P(B)=0.5. \\ (3) & =P(A\cup B)-P(A)+P(A) \\ & =P(A\cup B)=0.7. \end{array}\right.$$

3. 多个事件的独立性

(1) 三事件两两相互独立的概念

定义 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 两两相互独立.

目 上 下 回 停 续

(2) 三事件相互独立的概念

定义1.10 设 A,B,C 是三个事件,如果满足等式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B), \\ P(BC)=P(B)P(C), \\ P(AC)=P(A)P(C), \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C), \end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.

伯恩斯坦反例

例2 一个均匀的正四面体, 其第一面染成红色, 第二面染成白色 , 第三面染成黑色, 而第四面同时染上红、白、黑三种颜色.现以 A , B, C 分别记投一次四面体出现红, 白, 黑颜色朝下的事件, 问 A, B, C是否相互独立?

解 由于在四面体中红, 白, 黑分别出现两面,

因此 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$

又由题意知 $P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},$

故有
$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{4}, \\ P(BC)=P(B)P(C)=\dfrac{1}{4}, \\ P(AC)=P(A)P(C)=\dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

则三事件 A, B, C 两两独立.

由于 $$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C),$$

因此 A、B、C 不相互独立.

(3) n 个事件的独立性

注 $A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $A_1, A_2, \cdots, A_n$两两相互独立.

定义 若事件 A_1，A_2，…，A_n 中任意两个事件相互独立，即对于一切 $1 \le i < j \le n$, 有

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

则称A_1，$A_2, \cdots, A_n$两两相互独立.

共$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n$
$= (1+1)^n - C_n^0 - C_n^1$
$= 2^n - 1 - n$个式子.

定义 1.11 设 A_1，A_2，…，A_n为n 个事件，

若对于任意$k(2 \le k \le n)$, 及 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$

有 $$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}).$$

则称A_1，$A_2, \cdots, A_n$相互独立.

（4）两个结论

1. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \geq 2)$ 相互独立，则其中任意 k $(2 \leq k \leq n)$个事件也是相互独立.

2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件,所得的 n 个事件仍相互独立 . (独立性关于逆运算封闭)

结论的应用 n 个独立事件和的概率公式:

设事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n)$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n).$$

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots, \bar{A}_n$ 也相互独立

即 n个独立事件至少有一个发生的概率等于1减去各自对立事件概率的乘积.

例3-1若每个人血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%，假设每个人血清中是否含有肝炎病毒相互独立，混合100个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率.

解 记 $A_i = \{$第i个人的血清含有肝炎病毒$\}$,

$$i = 1, 2, \cdots, 100.$$

$B = \{$100个人的混合血清中含有肝炎病毒$\}$,

则 $P(A_i) = 0.004.$

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100},$$

依题设，$A_1, A_2, \cdots, A_{100}$相互独立

$$\therefore P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100})$$

$$= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_{100})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) \cdots P(\overline{A}_{100})$$

$$= 1 - [1 - P(A_1)]^{100}$$

$$= 1 - (1 - 0.004)^{100} = 1 - (0.996)^{100} \approx 0.33.$$

例3-3 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击, 三人击中的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7, 飞机被一人击中而被击落的概率为0.2 ,被两人击中而被击落的概率为 0.6 , 若三人都击中飞机必定被击落, 求飞机被击落的概率.

解 设 A_i 表示有 i 个人击中敌机,

A, B, C 分别表示甲、乙、丙击中敌机 ,

D表示飞机被击落,

则 $P(A)=0.4,\ P(B)=0.5,\ P(C)=0.7,$

由于 $A_1 = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C,$

故得

$$P(A_1)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7$$

$$=0.36.$$

因为 $A_2=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC,$

得 $P(A_2)=P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)$

$$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)$$

$$=0.41.$$

由 $A_3 = ABC$，　得 $P(A_3) = P(ABC)$

$$= P(A)P(B)P(C)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14.$$

因而,由全概率公式得飞机被击落的概率为

$$P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2) + P(A_3)P(D \mid A_3)$$

$$= 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14$$

$$= 0.458.$$

事件的独立性在可靠性理论中的应用：

一个元件的可靠性： 该元件正常工作的概率.

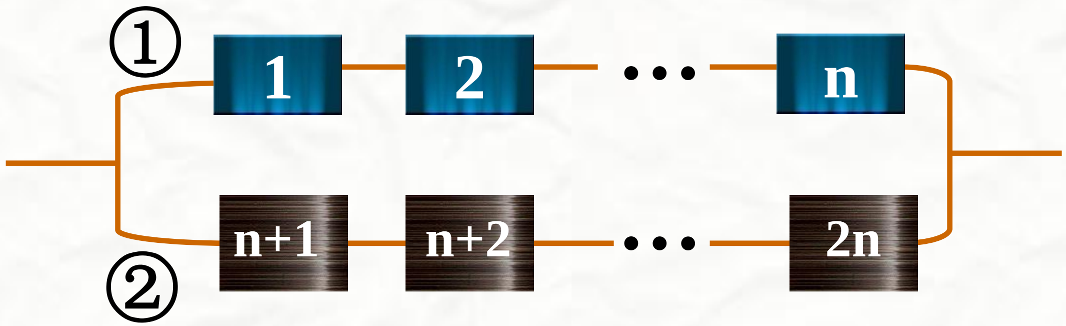
一个系统的可靠性： 由元件组成的系统正常工作的概率.

例4-1 设一个元件的可靠性为r. 如果一个系统由$2n$个元件组成，每个元件能否正常工作是相互独立的.

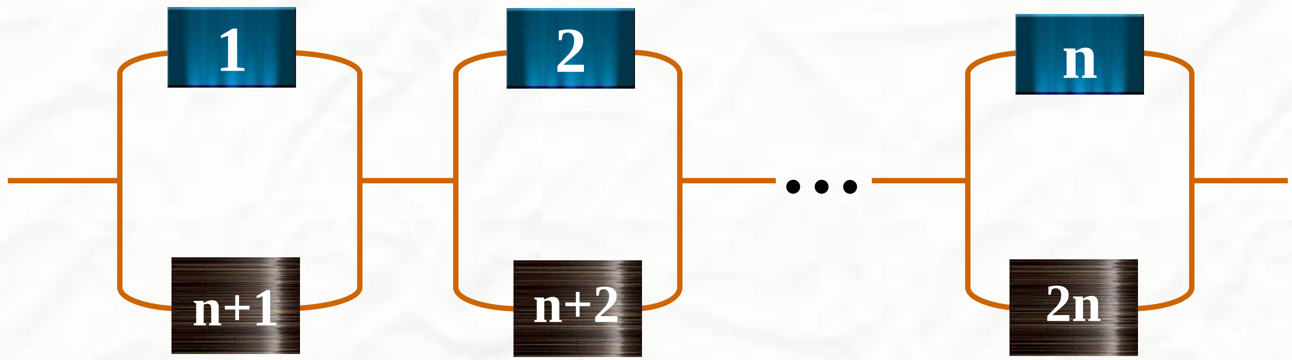
(1) 求下列两个系统I和II的可靠性；

(2) 问：哪个系统的可靠性更大？

系统I.



系统II.



解 设$A_i=\{$第i个元件正常工作$\}$ 则 $P(A_i)=r,$

$i=1,2,\cdots,2n.$

设 B_1={ 系统I正常工作},

B_2={ 系统II正常工作}

考察系统I:

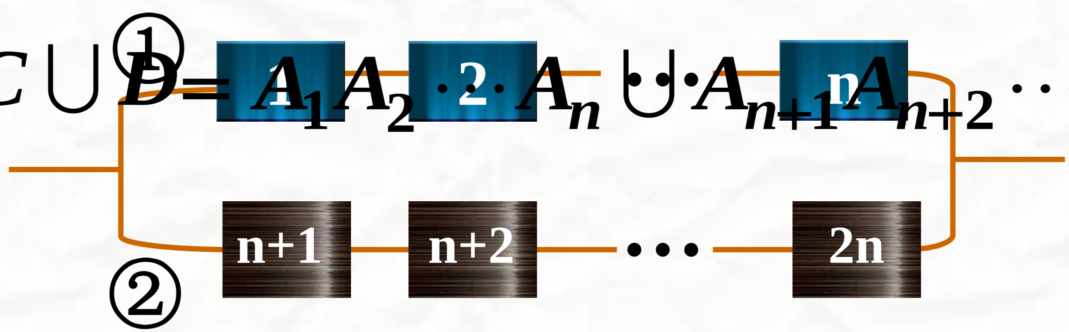
设 C ={ 通路①正常工作 }, D={ 通路②正常工作 }

∵ 每条通路正常工作 ⇔ 通路上各元件都正常工作,

而 系统I正常工作 ⇔ 两条通路中**至少**有一条正常工作.

$$\therefore B_1 = C \cup D = A_1 A_2 \cdots A_n \cup A_{n+1} A_{n+2} \cdots A_{2n}$$

系统I.



$$\because \quad P(C)=P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=r^n,$$
$$P(D)=P(A_{n+1}A_{n+2}\cdots A_{2n})$$
$$=P(A_{n+1})P(A_{n+2})\cdots P(A_{2n})=r^n.$$

$\therefore$ 系统Ⅰ正常工作的概率:

$$P(B_1)=P(C\cup D)$$
$$=P(C)+P(D)-P(CD)$$
$$=P(C)+P(D)-P(C)P(D)$$
$$=r^n+r^n-r^n\cdot r^n$$
$$=r^n(2-r^n).$$

考察系统II:

系统II正常工作 $\Leftrightarrow$ 通路上的每对并联元件正常工作.

B_2= { 系统II正常工作}

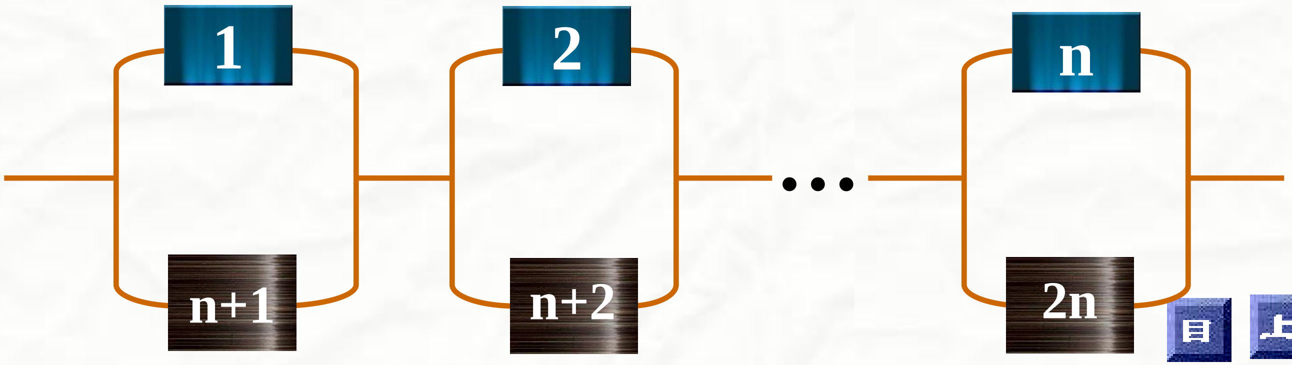
$$=(A_1\cup A_{n+1})(A_2\cup A_{n+2})\cdots(A_n\cup A_{2n})$$

$$\because P(A_i\cup A_{n+i})=P(A_i)+P(A_{n+i})-P(A_iA_{n+i})$$

$$=P(A_i)+P(A_{n+i})-P(A_i)P(A_{n+i})$$

$$=r+r-r\cdot r$$

$$=r(2-r).\quad (i=1,2,\cdots,n.)$$



目 上 下 回 停 续

所以，系统II正常工作的概率：

$$P(B_2)=P(A_1\cup A_{n+1})P(A_2\cup A_{n+2})\cdots P(A_n\cup A_{2n})$$

$$=[r(2-r)]^n=r^n(2-r)^n.$$

(2) 问：哪个系统的可靠性更大？

$\because \quad 0<r<1,$

$(2-r)^n>2-r^n,$

$\therefore \quad P(B_2)>P(B_1).$

令 $f(x)=x^n \quad (n\geq 2)$，则

$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0 \quad (x>0)$

故曲线$y=f(x)$是凹的，从而

$$\frac{f(2-r)+f(r)}{2}>f\left(\frac{(2-r)+r}{2}\right)=f(1)=1$$

即 $\dfrac{(2-r)^n+r^n}{2}>1,$亦即$(2-r)^n>2-r^n$

即系统II的可靠性比系统I的大.

二、独立试验序列概型

1. 定义1.12 (独立试验序列)

设$\{E_i\}(i=1,2,\ldots)$是一列随机试验,E_i的样本空间为Ω_i,设A_k 是E_k中的任一事件,$A_k\subset\Omega_k$, 若A_k发生的概率都不依赖于其它各次试验E_i $(i\neq k)$的结果,则称$\{E_i\}$是**相互独立**的随机试验序列,简称**独立试验**序列.

例5-1 从1, 2, ..., 10个数字中任取一个，取后还原，连取k次，独立进行试验，试求此k个数字中最大者是$m(m\leq 10)$这一事件B_m的概率.

解 令A_m表示此k个数字中最大者不大于m这一事件，则

$$P(A_m)=\left(\frac{m}{10}\right)^k.$$

显然，$A_m \supset A_{m-1}$，令 $B_m = A_m - A_{m-1}$，则

$$P(B_m)=P(A_m)-P(A_{m-1})$$

$$=\left(\frac{m}{10}\right)^k-\left(\frac{m-1}{10}\right)^k.$$

例5-2 在一批N个产品中有M个次品，每次任取一件，观察后放回，求：

(1) n次都取得正品的概率；

(2) n次中至少有一次取得正品的概率.

解 因为是放回抽样，可以认为各次抽取相互独立，

记A_i记第i次取得正品事件，

则$P(A_i)=1-\dfrac{M}{N}$.

$$(1)P_1=P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$=(1-\frac{M}{N})^n.$$

$$(2)P_2=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

$$=1-(\frac{M}{N})^n.$$

例5-3 设4次独立试验中事件A发生的概率相等，若已知A至少发生一次的概率为0.59，则A在一次试验中发生的概率为多少?

解 令 $A_n = \{$第n次试验中A发生$\}$, $n = 1, 2, 3, 4$,

$$P(A) = p,$$

则 $P_2 = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4)$$

$$= 1 - (1 - p)^4 = 0.59,$$

解之得

$$P(A) = 0.1998.$$

2. n 重伯努利(Bernoulli)试验

若n 次重复试验具有下列特点：

1) 每次试验的可能结果只有两个A 或 $\overline{A}$,

且 $P(A)=p, P(\overline{A})=1-p,$

(在各次试验中p是常数，保持不变）

2) 各次试验的结果相互独立,

则称这n次重复试验为n重伯努利试验.

目 上 下 回 停 续

实例1 抛一枚硬币观察得到正面或反面. 若将硬币抛 n 次,就是n重伯努利试验.

实例2 抛一颗骰子n次,观察是否 “出现 1 点”, 就是 n重伯努利试验.

实例3 (球在盒中的分配问题)

设有n 个球，N个盒子.

试验E：观察一个球是否投进某一指定的盒中.

A={该球进入指定的盒中},

B={ 某指定的盒中恰有m个球 }, 求 $P(B)$.

解 易知，$P(A)=\dfrac{1}{N}, P(\bar{A})=1-\dfrac{1}{N}.$

设E_n：观察n个球是否投进某一指定的盒中，

则E_n是将E重复了n次，是伯努利试验.

$$\therefore \quad P(B)=C_n^m[P(A)]^m[P(\bar{A})]^{n-m}$$

$$=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-m}.$$

$$(=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}=C_n^m p^m q^{n-m})$$

一般地，对于伯努利试验，有如下公式：

3. 二项概率公式

定理 如果在伯努利试验中，事件A发生的概率为p $(0 < p < 1)$, 则在n次试验中，A恰好发生 k 次的概率为：

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n; q = 1 - p.)$$

且 $$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

目 上 下 回 停 续

推导如下:

若 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数,则 X 所有可能取的值为

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \cdots,\quad n.$$

当 $X=k\ (0\le k\le n)$时,

即 A 在 n 次试验中发生了 k 次.

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{k\text{次}}\ \underbrace{\bar{A}\,\bar{A}\cdots\bar{A}}_{n-k\text{ 次}},$$

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{k-1\text{ 次}}\ \bar{A}\ \ A\ \underbrace{\bar{A}\,\bar{A}\cdots\bar{A}}_{n-k-1\text{ 次}}\quad \cdots\cdots$$

得 A 在 n 次试验中发生 k 次的方式共有 C_n^k 种，

且两两互不相容.

因此 A在 n 次试验中发生 k 次的概率为

$$C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} \xrightarrow{\text{记}\, q=1-p} C_n^k\, p^k q^{n-k}$$

称上式为二项概率公式. 记为 $X \sim B(n,p)$.

例6-1 设某考卷上有10道选择题，每道选择题有4个可供选择的答案，其中一个为正确答案，今有一考生仅会做6道题，有4道题不会做. 于是随意填写，试问能碰对$m(m = 0, 1, 2, 3, 4)$道题的概率.

解 设B_m表示4道题中碰对m道题这一事实,则

$$P(B_m)=C_4^m\left(\frac{1}{4}\right)^m\left(\frac{3}{4}\right)^{4-m},\quad (m=0,1,2,3,4)$$

经计算得 $P(B_0)=C_4^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{4-0}=0.316.$

同理 $P(B_1)=0.422,\quad P(B_2)=0.211,$

$$P(B_3)=0.048,\ P(B_4)=0.004.$$

例6-2(保险问题)

若一年中某类保险者里面每个人死亡的概率等于0.005，现有10000个这类人参加投保，试求在未来一年中在这些保险者里面：

(1)有40个人死亡的概率；

(2)死亡人数不超过70个人的概率.

解 (1)设A表示40个人死亡, 则

$$P(A)=C_{10000}^{40}(0.005)^{40}(0.995)^{9960}\approx 0.0212,$$

(2)设B表示死亡人数不超过70, 则

$$P(B)=\sum_{k=0}^{70}C_{10000}^{k}(0.005)^{k}(0.995)^{10000-k}\approx 0.997.$$

单选题 1分

设置

一批产品有20%的次品，进行重复抽样检查，共取5件样品，计算这5件样品中恰好有3件次品的概率。

A $C_5^3(0.8)^3(0.2)^2$

B $C_5^3(0.2)^5$

C $C_5^3(0.2)^3(0.8)^2$

D $C_5^3(0.8)^2$

提交

4.几何公式

若 X 表示伯努利试验中事件 A 首次发生的次数,

则X的可能取值为$1,2,\cdots$

当$X=k$,即事件A首次在第k次出现.

则试验总共进行了k次,前$k-1$次均是$\overline{A}$发生,第k次A发生.

若以B_k记这一事件,以$A_i(i=1,2,\cdots,k)$记事件A在第i次试验中发生,则

几何公式

$$B_k=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k,$$

$$P(B_k)=P(\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k)=(1-p)^{k-1}p,$$

例7-1一个人开门，他共有n把钥匙，其中仅有一把能打开这个门，他随机地选取一把钥匙开门，即每次以$1/n$的概率被选中，求该人在第k次打开门的概率.

解 令B_k表示第k次打开门,则

$$P(B_k)=(1-\frac{1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}. \qquad k=1,2,\cdots$$

目 上 下 例 停 续

例7-2 一袋中装有N-1只黑球及一只白球，每次从袋中随机的摸出一球，并换入一只黑球，这样继续下去，问第k次摸球时，摸到黑球的概率是多少？

解 设A表示第k次摸到黑球这一事件，则$\overline{A}$表示第k次摸到白球，现在计算$P(\overline{A})$.

因为袋中只有一只白球，而每次摸出白球总是换入黑球，故为了第k次摸到白球，则前面的$k-1$次一定不能摸到白球，因此$\overline{A}$等价于下列事实：

在前$k-1$次摸球时都摸出黑球第k次摸出白球，这一事件的概率为

$$P(\bar{A})=\frac{(N-1)^{k-1}\times 1}{N^k}=(1-\frac{1}{N})^{k-1}\frac{1}{N},$$

所以

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-(1-\frac{1}{N})^{k-1}\frac{1}{N}.$$

内容小结

1. A, B 两事件独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)\,P(B)$.

A,B,C 三个事件相互独立

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B), \\ P(BC) = P(B)P(C), \\ P(AC) = P(A)P(C), \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \end{cases}$$

2. 重要结论

A, B 相互独立 $\Leftrightarrow \overline{A}$ 与 B, A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$相互独立.

3. 设事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n})$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$$

4. 二项分布 $C_n^k p^k q^{n-k}$

5. 几何分布 $(1-p)^{k-1} p$

再见

例2-1设一个口袋里装有四张形状相同的卡片.在这四张卡片上依次标有下列各组数字：110，101，011，000. 从袋中任取一张卡片，记

A_i = {取到的卡片第i位上的数字为1},

$$i = 1, 2, 3.$$

证明 (1) A_1, A_2, A_3两两相互独立;

(2) A_1, A_2, A_3不相互独立.

证 (1) $P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=P(A_2)=P(A_3)$

$$\because \quad P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}=P(A_2)P(A_3)$$

$\therefore \quad A_1, A_2, A_3$两两相互独立;

(2) $\because P(A_1A_2A_3)=\frac{0}{4}=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8}$,

$\therefore \quad A_1, A_2, A_3$不相互独立.

110，101，
011，000

目 上 下 回 停 续

例6-3 甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为p, $p\geq 1/2$,问对甲而言，采用三局二胜制有利，还是采用五局三胜制有利.设各局胜负相互独立.

解 设 $A=\{$甲胜$\}$,

E：观察1局比赛甲是否获胜,

E_n：可看成将 E 重复了n次, 这是一个n重贝努里试验.

设在n次试验中，A恰好出现 k 次的概率为：

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

(1) 采用三局二胜制,甲最终获胜, 至少需比赛 2 局,

且最后一局必需是甲胜,而前面甲需胜1 局.

胜局情况可能是：

"甲甲", "乙甲甲", "甲乙甲";

∴ 采用三局二胜制,甲最终获胜的概率:

$$p_1 = P_2(2) + P_2(1) \cdot p$$

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$= C_2^2 p^2 + C_2^1 p(1-p).p$$

$$= p^2 + 2p^2(1-p).$$

(2) 采用五局三胜制,甲最终获胜,至少需比赛 3 局,

且最后一局必需是甲胜,而前面甲需胜二 局.

如：比赛3局，甲的胜局情况是：

"甲甲甲"；

比赛4局，甲的胜局情况可能是：

"甲乙甲甲","乙甲甲甲","甲甲乙甲"……

∴ 在五局三胜制下,甲最终获胜的概率为:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p_2 = P_3(3) + P_3(2)\cdot p + P_4(2)\cdot p$$

$$= p^3 + C_3^2 p^3 (1-p) + C_4^2 p^3 (1-p)^2$$

$$= p^3[1 + 3(1-p) + 6(1-p)^2].$$

由于 $p_2 - p_1 = p^2(6p^3 - 15p^2 + 12p - 3)$

$$= 3p^2(p-1)^2(2p-1).$$

当 $p > \frac{1}{2}$ 时, $p_2 > p_1$; 当 $p = \frac{1}{2}$ 时 $p_2 = p_1 = \frac{1}{2}$.

故当 $p > \frac{1}{2}$ 时,对甲来说采用五局三胜制为有利.

当 $p = \frac{1}{2}$ 时,两种赛制甲、乙最终获胜的概率是相同的,都是 50%.

目 上 下 回 停 续

伯努利简介

Jacob Bernoulli
1654-1705

瑞士数学家

概率论的奠基人

伯努利 (Jacob Bernoulli)简介

伯努利家属祖孙三代出过十多位数学家. 这在世界数学史上绝无仅有.

伯努利幼年遵从父亲意见学神学, 当读了 笛卡尔的书后,顿受启发,兴趣转向数学.

1694年,首次给出直角坐标和极坐标下的曲率半径公式,同年关于双纽线性质的论文,使伯努利双纽线应此得名.

1695年提出著名的伯努利方程

$$\frac{dx}{dy} = p(x)y + q(x)y^n$$

此外对对数螺线深有研究，发现对数螺线经过各种变换后，结果还是对数螺线, 在惊叹此曲线的奇妙之余, 遗言把对数螺线刻在自己的墓碑上，并附以颂词:

纵使变化,依然故我

1713年出版的巨著《猜度术》, 是组合数学及概率史的一件大事. 书中给出的伯努利数、伯努利方程、伯努利分布等, 有很多应用, 还有伯努利定理, 这是大数定律的最早形式.