10.2命题变元和命题公式

- 简单命题/命题常元：确指的或具体的命题。
- 命题变元：以“真”“假”为其变域的变元, 称为命题变元。
- T 和 F 称为命题常元。
- 原子公式：单个命题变元和命题常元。

命题公式的定义

（1） 单个原子公式是命题公式。

（2） 如果A和B是命题公式， 则 $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$是命题公式。

（3） 只有有限步应用条款(1)和(2)生成的公式才是命题公式。

这种定义叫归纳定义， 也叫递归定义。由这种定义产生的公式叫合式公式。

例

- 构造真值表 $(P\vee Q)\rightarrow\neg R$

P Q R	$P\vee Q$	$\neg R$	$(P\vee Q)\rightarrow\neg R$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

公式赋值

定义 设$P_1, P_2, \ldots, P_n$是出现在公式A中的全部命题变元, 给$P_1, P_2, \ldots, P_n$各指定一个真值, 称为对A的一个赋值或指派. 若使A为1, 则称这组值为A的成真赋值; 若使A为0, 则称这组值为A的成假赋值.

例：含n个命题变元的公式有几个赋值？

如 000, 010, 101, 110是$\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow R$的成真赋值

001, 011, 100, 111是成假赋值.

公式类型

设$A(P_1, P_2, \ldots P_n)$为任一命题公式，

（1）若A在其各种赋值下的取值均为真，则称A是重言式或永真式

（2）若A在其各种赋值下的取值均为假，则称A是矛盾式或永假式

（3）若A不是永真式，也不是永假式，则称A为偶然式

（4）若A至少存在一组赋值是成真赋值，则称A为可满足式

重言式

定义1

如果$A \leftrightarrow B$是重言式, A与B对任何指派都有相同的真值。记为A□ B, 叫做**逻辑恒等式（等价重言式）或记为A=B**

定义2

蕴涵式$P \rightarrow Q$ 若为永真，则称为**蕴涵重言式**，记为：$P \Rightarrow Q$ (永真蕴含）

例

- $P \leftrightarrow Q$ 与 $P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1

蕴涵（蕴含）重言式

- （1）真值表法
- （2）推理法

(a) 假定前件是真, 若能推出后件是真, 则此蕴含式是真。肯定前件法

(b) 假定后件是假, 若能推出前件是假, 则此蕴含式是真。 否定后件法

例（方法一）

证：$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ □ $\neg P$

证 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P$ 永真

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$	$\neg P$	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1

例（方法二）

证明：$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ □ $\neg P$

法 1: 设$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$是真, 则$\neg Q$, $P \rightarrow Q$是真。所以, Q是假, P是假。因而$\neg P$是真。故

$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ □ $\neg P$

法 2: 设$\neg P$是假, 则P是真。以下分情况讨论。

(i) 若Q为真, 则$\neg Q$是假, 所以$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$是假。

(ii) 若Q是假, 则$P \rightarrow Q$是假, 所以$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$是假。

故$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ □ $\neg P$。

命题逻辑的基本等式

交换律 $A\vee B=B\vee A$, $A\wedge B=B\wedge A$,

$A\leftrightarrow B=B\leftrightarrow A$

结合律 $(A\vee B)\vee C=A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C=A\wedge(B\wedge C)$

分配律 $A\vee(B\wedge C)=(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

$\vee$对$\wedge$的分配律

$A\wedge(B\vee C)=(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

$\wedge$对$\vee$的分配律

等式

双重否定律 $\neg\neg A=A$ (否定深入)

德摩根律

$\neg(A\vee B)=\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)=\neg A\vee\neg B$

幂等律$A\vee A=A$, $A\wedge A=A$

排中律$A\vee\neg A=1$

矛盾律$A\wedge\neg A=0$

等式

零律

$A \vee 1 = 1$，$A \wedge 0 = 0$

同一律

$A \vee 0 = A$，$A \wedge 1 = A$

吸收律

$A \vee (A \wedge B) = A$

$A \wedge (A \vee B) = A$

蕴涵等价式

$A \rightarrow B = \neg(A \wedge \neg B)$

$= \neg A \vee B$

等值等价式

$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$= (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$= (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

等式

假言易位 $A\rightarrow B=\neg B\rightarrow\neg A$

等价否定等值式 $A\leftrightarrow B=\neg A\leftrightarrow\neg B$

归谬律 $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)=\neg A$

特别提示：必须牢记这些等值式，这是继续学习的基础。借助于这些公式，进行等式推理和蕴含推理。

规则（针对重言式）

(1) 代入规则

将等式中的命题变元A, B, C等替换成任意命题公式，得到的具体等式称为基本等式的*代入实例*，代入实例的等式关系不变

(2) 替(置)换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换$\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式. 若 $B=A$，则 $\Phi(B)=\Phi(A)$

例如：已知重言式 $P\leftrightarrow\neg\neg P$，用$P\wedge Q$代换$P$，得到

$P\wedge Q \leftrightarrow\neg\neg(P\wedge Q)$

已知等式$A\rightarrow B=\neg A\vee B$，设有公式$(A\rightarrow B)\rightarrow C$，

则必有$(A\rightarrow B)\rightarrow C = \neg A\vee B\rightarrow C$

例

证明 $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$

证　$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$

$=\neg P\vee(\neg Q\vee R)$（蕴涵等值式，替换规则）

$=(\neg P\vee\neg Q)\vee R$　（结合律，替换规则）

$=\neg(P\wedge Q)\vee R$　（德摩根律，替换规则）

$=(P\wedge Q)\rightarrow R$　（蕴涵等值式）

例

$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$

证明：

$(P \to Q) \to (Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)$ 蕴涵等值式和替换

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee R)$ 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$ 德摩根和替换规则

$\Leftrightarrow P \wedge \neg Q \vee Q \vee R$ 结合律

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R \wedge \neg Q \vee Q \vee R$ 零律 替换

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$ 分配律和替换规则

例（续）

- $P \leftrightarrow Q$ 与 $P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$
- $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

$= \neg P \wedge (P \vee \neg Q) \vee Q \wedge (P \vee \neg Q)$

$= (\neg P \wedge P \vee \neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P \vee Q \wedge \neg Q)$

$= P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$

例

- 试将语句“情况并非如此: 如果他不来, 那么我也不去。”化简。

解 设 **P**: 他来, **Q**: 我去，则有

$\neg(\neg P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg\neg \mathbf{P} \vee \neg \mathbf{Q}) \Leftrightarrow \neg\neg\neg \mathbf{P} \wedge \neg\neg \mathbf{Q} \Leftrightarrow \neg \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}$

总结

- 需要掌握：

理解重言式、逻辑等价的定义；

记忆公式；

真值表；

形式化推理；

作业

- 完成下列题（划红√）

4. 证明下列等价关系：

(1) $P\to(Q\to P)\Leftrightarrow\neg P\to(P\to\neg Q)$

(2) $(P\to Q)\wedge(R\to Q)\Leftrightarrow(P\vee R\to Q)$

(3) $\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

(4) $\neg(P\to Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$

6. 求出下列公式的最简等价式：

(1) $((P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P))\wedge R$

(2) $P\vee\neg P\vee(Q\wedge\neg Q)$

(3) $(P\wedge(Q\wedge S))\vee(\neg P\wedge(Q\wedge S))$

7. 证明下列蕴含式：

(1) $P\wedge Q\Rightarrow(P\to Q)$

(2) $P\Rightarrow(Q\to P)$

(3) $(P\to(Q\to R))\Rightarrow(P\to Q)\to(P\to R)$