例 将下列二次型用矩阵形式表示:

1) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+4z^2+2xy+6yz+zx$

$$=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=4x_1x_3+x_4^{\ 2}$

$$=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

3) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2-x_2x_3+2x_2x_4-3x_3x_4$

$$=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

4) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=5x_1{}^2+6x_2{}^2-x_4{}^2$

$$=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

注　标准形式的二次型的矩阵是对角矩阵。

5） $f(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$$=x^2+3y^2+2xy=(x,y)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

一般地，如果已知二次型

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

其中$\boldsymbol{A}$ 不是对称矩阵，则有

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$$

$$=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$$

即二次型 的矩阵为 $\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$

例 用正交变换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$$

为标准形，并求所用的正交变换。又问 $f=1$ 表示何种二次曲面？

解 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$。

可求得 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

所以$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-7$

上页 下页 返回

对应$\lambda_1=\lambda_2=2$的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$$

正交化得

$$\alpha_1=\boldsymbol{p}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=\boldsymbol{p}_2-\frac{[\boldsymbol{p}_2,\alpha_1]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1=(\tfrac{2}{5},\tfrac{4}{5},1)^{\mathrm{T}}$$

再单位化 $$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=(-\tfrac{2}{\sqrt{5}},\tfrac{1}{\sqrt{5}},0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=(\tfrac{2}{3\sqrt{5}},\tfrac{4}{3\sqrt{5}},\tfrac{5}{3\sqrt{5}})^{\mathrm{T}}$$

对应$\lambda_3=-7$的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(-1,-2,2)^{\mathrm{T}}$

单位化得 $$\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{p}_3\|}\boldsymbol{p}_3=(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{2}{3})^{\mathrm{T}}$$

故正交变换
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

化二次型为
$$f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$$

f=1 表示单叶双曲面。

例 试用直角坐标变换化简下列二次曲面方程：

$$6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz+12x+6y+18z=0$$

并写出所用的直角坐标变换。

解 先考虑二次型部分

$$f=6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz$$

二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{pmatrix}$

可求得 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=(3-\lambda)(6-\lambda)(9-\lambda)$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=6,\lambda_3=9$

相应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

故正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$

化二次曲面方程为

$$3x'^2+6y'^2+9z'^2+6x'+12y'+18z'=0$$

配方得 $3(x'+1)^2+6(y'+1)^2+9(z'+1)^2=18$

再令 $\begin{cases} x''=x'+1 \\ y''=y'+1, \\ z''=z'+1 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x'=x''-1 \\ y'=y''-1, \\ z'=z''-1 \end{cases}$

故直角坐标变换 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}(2x''-y''+2z'')-1 \\ y=\dfrac{1}{3}(2x''+2y''-z'')-1 \\ z=\dfrac{1}{3}(-x''+2y''+2z'')-1 \end{cases}$

化二次曲面方程为 $3x''^2+6y''^2+9z''^2=18$

或 $\dfrac{x''^2}{6}+\dfrac{y''^2}{3}+\dfrac{z''^2}{2}=1$ 这是椭球面。

例 已知二次曲面方程

$$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$$

可以经过正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ 化为椭圆柱面方程

$y'^2+4z'^2=4$，求a，b的值和正交矩阵$\boldsymbol{Q}$。

解 二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$正交相似于对角矩阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}。$$

上页 下页 返回

注意 Λ 的对角元是A的特征值，利用特征值的性质得

$$\begin{cases} 0+1+4=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=1+a+1 \\ 0\cdot 1\cdot 4=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det \boldsymbol{A}=-(b-1)^2 \end{cases}$$

解得 $a=3$，$b=1$。

于是$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。可求得对应特征值 $\lambda_1=0$，

$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$ 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{2}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

故正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

例 化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$$

为标准形，并求出所用的可逆线性变换。

解 因为 f 中含有x_1的平方项及交叉项， 将其集中起来进行配方

$$\begin{aligned}f&=[x_1^2-2x_1(x_2-x_3)]-3x_2^2-6x_2x_3\\&=[x_1-(x_2-x_3)]^2-(x_2-x_3)^2-3x_2^2-6x_2x_3\\&=(x_1-x_2+x_3)^2-4x_2^2-4x_2x_3-x_3^2\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\y_2=\qquad\quad x_2\\y_3=\qquad\qquad\quad x_3\end{cases}$， 即 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2-y_3\\x_2=\qquad\quad y_2\\x_3=\qquad\qquad\quad y_3\end{cases}$， 得

上页 下页 返回

$$f = y_1^2 - 4y_2^2 - 4y_2y_3 - y_3^2 = y_1^2 - 4[y_2^2 + y_2y_3] - y_3^2$$

$$= y_1^2 - 4(y_2 + \frac{1}{2}y_3)^2$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \quad y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ z_3 = \quad\quad y_3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = \quad z_2 - \frac{1}{2}z_3 \\ y_3 = \quad\quad z_3 \end{cases}$，得

$$f = z_1^2 - 4z_2^2$$

所用的可逆线性变换为 $\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - \frac{2}{3}z_3 \\ x_2 = \quad z_2 - \frac{1}{2}z_3 \\ x_3 = \quad\quad z_3 \end{cases}$

注 （1） 如果再令

$$\begin{cases} u_1 = z_1 \\ u_2 = 2z_2 \\ u_3 = z_3 \end{cases}，\quad 即 \begin{cases} z_1 = u_1 \\ z_2 = \frac{1}{2}u_2 \\ z_3 = u_3 \end{cases}，得$$

$$f = u_1^2 - u_2^2 \qquad （规范形）$$

所用的可逆线性变换为
$$\begin{cases} x_1 = u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{3}{2}u_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 \\ x_3 = u_3 \end{cases}$$

这说明，用可逆线性变换化简二次型时，得到的标准形不是唯一的。

(2) 如果再令

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \quad \mathrm{i}u_2 \\ v_3 = \quad\quad u_3 \end{cases}，\quad 即 \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = \quad -\mathrm{i}v_2 \\ u_3 = \quad\quad v_3 \end{cases}，\quad 得$$

$$f = v_1^2 + v_2^2$$

所用的可逆线性变换为 $\begin{cases} x_1 = v_1 - \frac{\mathrm{i}}{2}v_2 - \frac{3}{2}v_3 \\ x_2 = \quad -\frac{\mathrm{i}}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 \\ x_3 = \quad\quad v_3 \end{cases}$

但所作的是复可逆线性变换。

(3) 已知实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & -3 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

求可逆矩阵C使得$C^{\mathrm{T}}AC$为对角矩阵。

法1　利用A构造二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$$

①用配方法求得可逆线性变换

$$\begin{cases}x_1=z_1+z_2-\frac{2}{3}z_3\\ x_2=\qquad\quad z_2-\frac{1}{2}z_3\\ x_3=\qquad\qquad\quad z_3\end{cases}$$ 化二次型为 $f=z_1^2-4z_2^2$

故可逆矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

②用配方法求得可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{3}{2}u_3 \\ x_2 = \qquad \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 \\ x_3 = \qquad\qquad u_3 \end{cases}$$ 化二次型为 $f=u_1^2-u_2^2$

故可逆矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（3）已知实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

求可逆矩阵C使得$C^{-1}AC$为对角矩阵。

法2　求正交矩阵C, 使得

$$C^{\mathrm{T}}AC=C^{-1}AC=\begin{pmatrix} -1+\sqrt{15} & 0 & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-3x_2x_3$$

为标准形,并求出所用的可逆线性变换。

解 这个二次型不含平方项，不能直接配方。

可利用平方差公式作可逆线性变换使其出现平方项。

因为二次型中含有交叉项x_1x_2，令

$$\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=\qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

得 $f=(y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1+y_2)y_3-3(y_1-y_2)y_3$

$$=y_1^2-y_2^2-2y_1y_3+4y_2y_3$$

$$=[y_1^2-2y_1y_3]-y_2^2+4y_2y_3$$

$$=(y_1-y_3)^2-y_2^2+4y_2y_3-y_3^2$$

令 $\begin{cases} z_1=y_1 \quad -y_3 \\ z_2= \quad y_2 \\ z_3= \quad\quad y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1=z_1 \quad +z_3 \\ y_2= \quad z_2 \\ y_3= \quad\quad z_3 \end{cases}$，得

$$f=z_1^2-z_2^2+4z_2z_3-z_3^2=z_1^2-(z_2-2z_3)^2+3z_3^2$$

再令 $\begin{cases} u_1=z_1 \\ u_2= \quad z_2-2z_3 \\ u_3= \quad\quad z_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z_1=u_1 \\ z_2= \quad u_2+2u_3 \\ z_3= \quad\quad u_3 \end{cases}$，得

$$f=u_1^2-u_2^2+3u_3^2$$

所用的可逆线性变换为$\begin{cases} x_1 = u_1 + u_2 + 3u_3 \\ x_2 = u_1 - u_2 - u_3 \\ x_3 = \qquad\qquad u_3 \end{cases}$。

若令$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = \qquad v_3 \\ u_3 = \quad v_2 \end{cases}$，则线性变换$\begin{cases} x_1 = v_1 + 3v_2 + v_3 \\ x_1 = v_1 - v_2 - v_3 \\ x_3 = \qquad v_2 \end{cases}$，

使得 $$f = v_1^2 + 3v_2^2 - v_3^2$$

再令$\begin{cases} w_1 = v_1 \\ w_2 = \sqrt{3}v_2 \\ w_3 = \qquad v_3 \end{cases}$，则线性变换$\begin{cases} x_1 = w_1 + \sqrt{3}w_2 + w_3 \\ x_1 = w_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}w_2 - w_3 \\ x_3 = \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}w_2 \end{cases}$，

使得 $$f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$$ （规范形）

例 已知$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，k为实数，问$k\boldsymbol{A}$是否正定矩阵？

解 因为 $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}$，所以$k\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，又对 $\forall \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\begin{cases}>0, & k>0\\=0, & k=0\\<0, & k<0\end{cases}$$

故

$$k\boldsymbol{A}\begin{cases}\text{正定}, & k>0\\=\boldsymbol{O}, & k=0\\\text{负定}, & k<0\end{cases}$$

例 已知$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$n$阶正定矩阵，问$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{AB}$是否正定矩阵？

解 因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$是实对称矩阵。又对 $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$$

故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$是正定矩阵。由于

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{AB}$$

故$\boldsymbol{AB}$一般不是正定矩阵。(但当$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$时，$\boldsymbol{AB}$是正定矩阵)。

例　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实对称矩阵，证明：

1）若$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，则 $a_{ii}>0\ (i=1,2,\cdots,n)$；

2）若$\boldsymbol{A}$是负定矩阵，则 $a_{ii}<0\ (i=1,2,\cdots,n)$。

证　1）因为$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，所以对 $\forall \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

取 $\boldsymbol{x}=\varepsilon_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，则

$$a_{ii}=\varepsilon_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\varepsilon_i>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

2）当$\boldsymbol{A}$是负定矩阵时，取 $\boldsymbol{x}=\varepsilon_i$，则有

$$a_{ii}=\varepsilon_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\varepsilon_i<0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

例 判断下列二次型是否正定：

(1) $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$；

(2) $f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$。

解（1） **法1**

$$
\begin{aligned}
f &= 5[x_1^2+\frac{4}{5}x_1(x_2-2x_3)]+x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3 \\
&= 5[x_1+\frac{2}{5}(x_2-2x_3)]^2-\frac{4}{5}(x_2-2x_3)^2 \\
&\qquad +x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3 \\
&= 5y_1^2+\frac{1}{5}y_2^2-\frac{4}{5}y_2y_3+\frac{9}{5}y_3^2 \\
&= 5y_1^2+\frac{1}{5}(y_2-2y_3)^2+y_3^2=5z_1^2+\frac{1}{5}z_2^2+z_3^2
\end{aligned}
$$

正惯性指数为3，故 f 是正定二次型。

上页 下页 返回

例 判断下列二次型是否正定：

（1） $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$；

（2） $f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$。

解（1） **法2** 二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

可求得 $\det(A-\lambda E)=(1-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+1)$

A的特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=5+2\sqrt{6}, \lambda_3=5-2\sqrt{6}$ 全为正，

故A是正定矩阵， 从而f是正定二次型。

例 判断下列二次型是否正定：

(1) $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$；

(2) $f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$。

解（1） **法3** 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{pmatrix}$$

因为$\boldsymbol{A}$的顺序主子式

$$\Delta_1=5>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1>0,\quad \det\boldsymbol{A}=1>0$$

故$\boldsymbol{A}$是正定矩阵， 从而f是正定二次型。

例 判断下列二次型是否正定：

（1） $f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$；

（2） $f=3x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$。

解（2） 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

因为$\boldsymbol{A}$的顺序主子式

$$\Delta_1=3>0, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1<0$$

故$\boldsymbol{A}$不是正定矩阵，从而f不是正定二次型。

例 已知A是n阶正定矩阵，问 A^{-1}, A^k, A^* 是否为正定矩阵？为什么？

解 均为正定矩阵。因为

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}, \quad (A^k)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^k=A^k,$$

$$(A^*)^{\mathrm{T}}=[(\det A)A^{-1}]^{\mathrm{T}}=(\det A)A^{-1}=A^*$$

所以它们均为实对称矩阵。

又设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值，则由$A$正定知

$$\lambda_i>0 \ (i=1,2,\cdots,n)$$

A^{-1}的特征值 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$ 全大于0，故 A^{-1}正定；

A^k 的特征值 $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k$全大于0，故 A^k 正定；

A^*的特征值 $\dfrac{\det \boldsymbol{A}}{\lambda_1}, \dfrac{\det \boldsymbol{A}}{\lambda_2}, \cdots, \dfrac{\det \boldsymbol{A}}{\lambda_n}$ 全大于0，故 $\boldsymbol{A}^*$正定

例 已知实对称矩阵$\boldsymbol{A}$满足 $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，证明$\boldsymbol{A}$是正定矩阵。

证 设 λ 是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{x}$是对应 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$，则

$$\boldsymbol{0} = (\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{Ax} + 2\boldsymbol{x}$$
$$= \lambda^2\boldsymbol{x} - 3\lambda\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\boldsymbol{x}$$

由 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 知 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$，解得 $\lambda = 1$或2，即$\boldsymbol{A}$的一切可能的特征值均大于0，故$\boldsymbol{A}$是正定矩阵。

例　已知A是n阶正定矩阵，C是n阶可逆矩阵，问$C^{\mathrm{T}}AC$是否为正定矩阵？为什么？

证　因为 $(C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}C=C^{\mathrm{T}}AC$，所以$C^{\mathrm{T}}AC$是实对称矩阵。对任意 $x\neq 0$，由C可逆知 $Cx\neq 0$（否则，若 $Cx=0$，左乘C^{-1}得$x=0$，与$x\neq 0$矛盾。）

从而

$$x^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)x=(Cx)^{\mathrm{T}}A(Cx)>0$$

故$C^{\mathrm{T}}AC$是正定矩阵。

例 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

问（1）t 满足什么条件时，二次型 f 是正定的？

（2）t 满足什么条件时，二次型 f 是负定的？

解 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

可求得 $\Delta_1=t$， $\Delta_2=\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t^2-1,$

$$\Delta_3 = \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 0 & t+1 & -t-1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} = (t+1)\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$$= (t+1)^2(t-2)$$

（1） 由 $t > 0$, $t^2 - 1 > 0$, $(t+1)^2(t-2) > 0$ 解得 $t > 2$，

故 $t > 2$ 时二次型 f 是正定的；

（2） 由 $t < 0$, $t^2 - 1 > 0$, $(t+1)^2(t-2) < 0$ 解得 $t < -1$，

故 $t < -1$ 时二次型 f 是负定的。

例 设A是n阶正定矩阵，证明 $\det(A+E)>1$。

证 **法1** 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征值，由$A$正定知

$$\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$$

又$A+E$的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$，故

$$\det(A+E)=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$$

法2 由于A是实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵Q，

使
$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=\Lambda$$

由A正定知 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，因此

$$\det(A+E)=\det(Q\Lambda Q^{-1}+QQ^{-1})=\det[Q(\Lambda+E)Q^{-1}]$$

$$=\det(\Lambda+E)=\begin{vmatrix}\lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$$

例　证明n阶实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是存在n阶可逆矩阵B，使得 $A=B^{\mathrm{T}}B$。

证　**必要性**　**法1**　因为A正定，所以$C^{\mathrm{T}}AC=E$，故 $A=(C^{\mathrm{T}})^{-1}C^{-1}$，令 $B=C^{-1}$ 即得。

法2　因为A正定，所以存在正交矩阵Q，使得

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \text{ 且 } \lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$$

于是

$$A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$$

令 $B=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^{\mathrm{T}}$，即得 $A=B^{\mathrm{T}}B$。

充分性 $A^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}B=A$, A为实对称矩阵。

法1 由 $A=B^{\mathrm{T}}B$ 得 $(B^{-1})^{\mathrm{T}}AB^{-1}=E$，故$A$是正定矩阵。

法2 对任意 $x\neq 0$, 由B可逆知 $Bx\neq 0$, 于是

$$x^{\mathrm{T}}Ax=x^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}Bx=(Bx)^{\mathrm{T}}(Bx)=[Bx,Bx]>0$$

故A是正定矩阵。

例 判定 $5x^2-6xy+5y^2+4x+y-10=0$ 为何种二次曲线？

解 二元二次型 $5x^2-6xy+5y^2$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

因为 $\Delta_1=5>0$， $\Delta_2=\det\boldsymbol{A}=16>0$

所以$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，从而此二次曲线为椭圆。

例 t 满足__________时，二次曲面

$$x^2+(2+t)y^2+tz^2+2xy-2xz-yz+x-y+2z-5=0$$

是椭球面？

分析 此题为判定t满足什么条件时，二次曲面的二次型部分 $f=x^2+(2+t)y^2+tz^2+2xy-2xz-yz$ 正定。二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2+t & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & t \end{pmatrix}$$

由 $\Delta_1=1>0$，$\Delta_2=t+1>0$，$\Delta_3=t^2-\dfrac{5}{4}>0$

解得$t>\dfrac{\sqrt{5}}{2}$时 f 正定，此时二次曲面为椭球面。

例 求函数

$$f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z} \qquad (x>0,\ y>0,\ z>0)$$

的极值。

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1-\dfrac{y^2}{4x^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{2x}-\dfrac{z^2}{y^2},\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{2z}{y}-\dfrac{2}{z^2}$

由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial z}=0$ 得

$$4x^2=y^2,\ y^3=2xz^2,\ z^3=y$$

注意到 $x>0, y>0, z>0$， 由第1式得 $y=2x$，代入第2式得 $z=2x$，再代入第3式解得 $x=\dfrac{1}{2}$，故 $y=1$，$z=1$，即驻点为 $M_0(\frac{1}{2},1,,1)$。

又有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{y^2}{2x^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{2x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{2z}{y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2}{y}+\frac{4}{z^3}$$

故

$$A=\left.\begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x}+\frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y}+\frac{4}{z^3} \end{pmatrix}\right|_{M_0}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

由于

$$\varDelta_1 = 4 > 0，\varDelta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0，\varDelta_3 = \det \boldsymbol{A} = 32 > 0$$

即$\boldsymbol{A}$正定，故M_0为f的极小值点；且极小值为

$$f(\tfrac{1}{2},1,1) = 4$$