欧拉图补充

有向图判定方法：

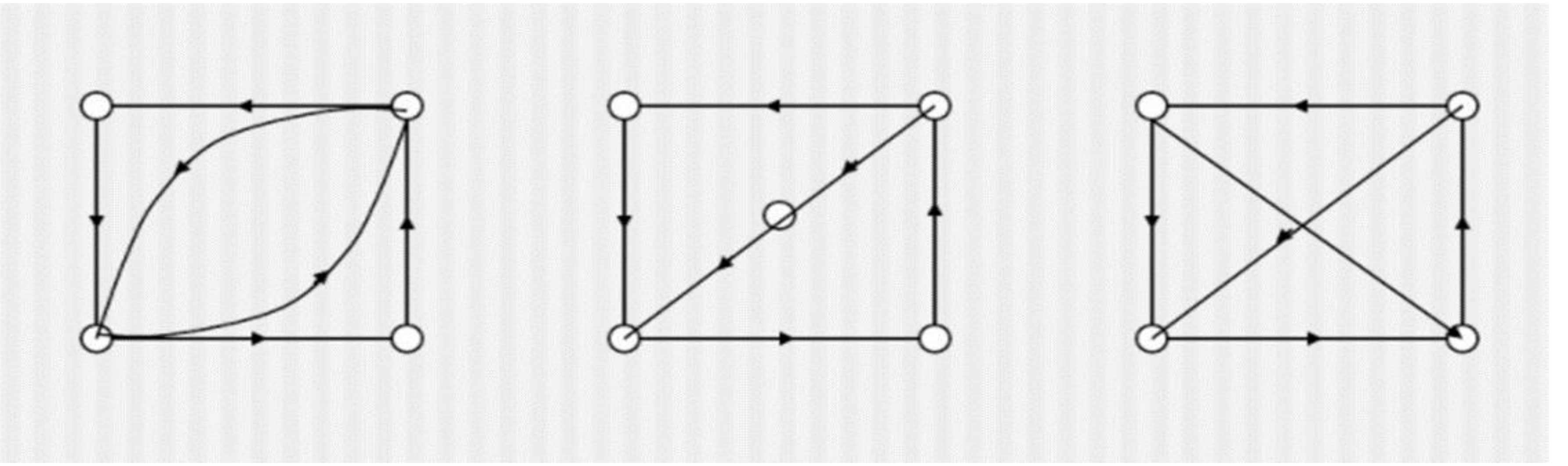
（1）连通有向图D具有欧拉回路(即欧拉图)

D中每个结点的入度＝出度；

（2）连通有向图D含有有向欧拉路径

D中除两个结点外，其余每个结点的入度＝出度，这两结点中，一个结点（始点）的出度-入度=1，另一结点（终点）的入度-出度=1.

练习



第九章　树

- 树及其性质
- 生成树
- 有向树及其应用

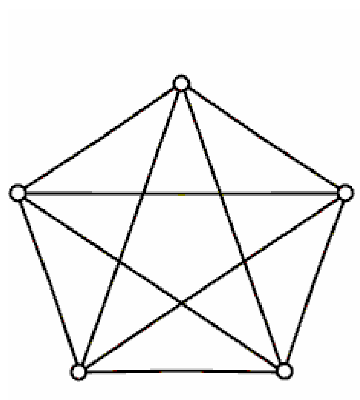
树的应用

1、用树表示家族谱、碳氢化合物、组织机构、树形连接并行处理系统等。

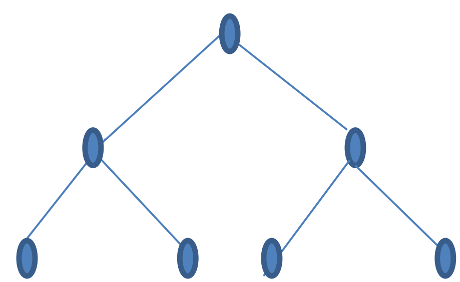
2、用加权树构造网络的算法；

3、利用二叉树方便快速地搜索到元素的位置；

4、 利用前缀码实现通信线路中的不定长编码......



简化5个信息中心的通信网络



7个并行处理器的并行系统

9.1 无向树及其性质

定义9.1

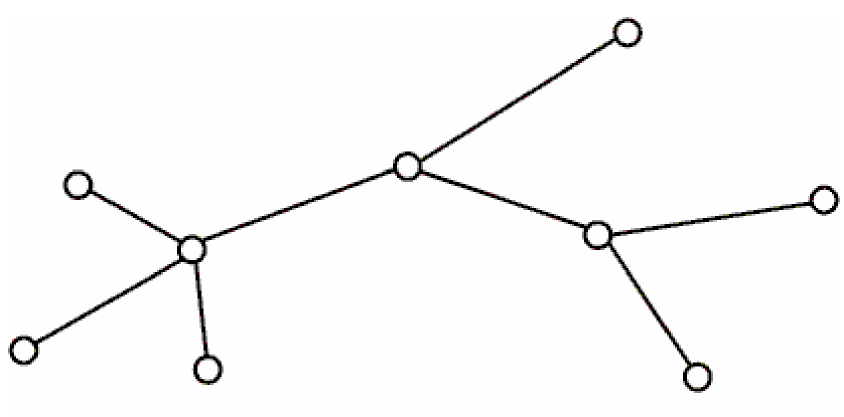
(1) 无向树——无回路的连通无向图

(2) 平凡树——平凡图

(3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶——1度顶点

(5) 分支点——度数≥2的顶点



无向树的等价定义

定理9.1 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且删除 G 中任何边使得G 变得不连通.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

- 树是边数最多的无回路图；树是边数最少的连通图；
- 若$m>n-1$,则图必含回路;若$m<n-1$,则图必不连通;

证明思路

(1)⇒(2). 关键一步是, 若路径不惟一必有回路.

(2)⇒(3). 若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一. 对n用归纳法证明$m=n-1$.

$n=1$正确. 设$n\le k$时正确，证$n=k+1$时也对: 取G中任意边e, $G-e$有且仅有两个连通分支G_1,G_2(为什么?), 它们的顶点满足$n_i\le k$, 由归纳假设得$m_i=n_i-1$, $i=1,2$. 于是$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$.

(3)⇒(4). 只需证明G连通. 用反证法. 否则G有s（$s\ge 2$）个连通分支都是小树. 于是有$m_i=n_i-1$, ,

$$m=\sum_{i=1}^{s} m_i=\sum_{i=1}^{s} n_i-s=n-s\ (s\ge 2)$$

这与$m=n-1$矛盾.

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

证明思路

(4)⇒(5). 只需证明命题

“G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$”.

命题的证明: 对n归纳.

所以，$\forall e \in E$, $G-e$只有$n-2$条边，由命题可知$G-e$不连通.

(5)⇒(6). 由(5)易知G为树，由(1)⇒(2)知，$\forall u,v \in V$（$u \neq v$），u到v有惟一路径，加新边(u,v)得惟一的一个圈.

(6)⇒(1). 只需证明G连通，这是显然的.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且删除 G 中任何边使得G 变得不连通.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

无向树的性质

定理9.2 设T是n阶非平凡的无向树，则T 中至少有两片树叶.

证 设 T 有 x 片树叶，由握手定理及定理9.1可知，

$$2(n-1)=2m=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$.

例题

例1 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

解 解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.

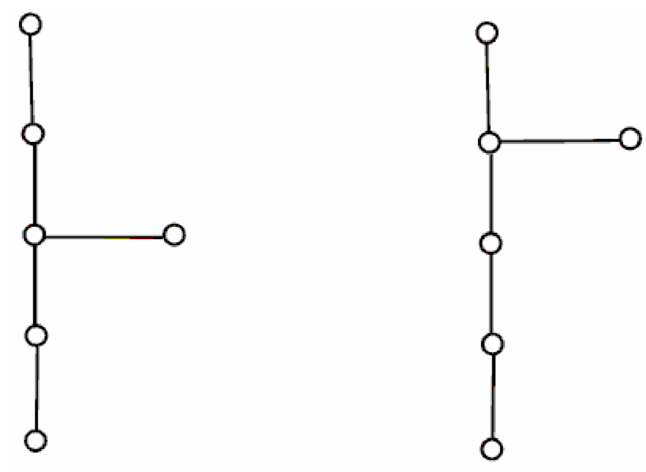
设有x片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$,

$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶.

❿T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3,

❿易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.



T_1 T_2

例题

例2 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n.

解 设T的阶数为n, 则边数为$n-1$，4度顶点的个数为$n-7$. 由握手定理得

$$2m = 2(n-1) = 5\times1+2\times1+3\times1+4(n-7)$$

解出$n = 8$，4度顶点为1个.

9.2 生成树

定义9.2 设G为无向图

(1) G的树——T 是G 的子图并且是树

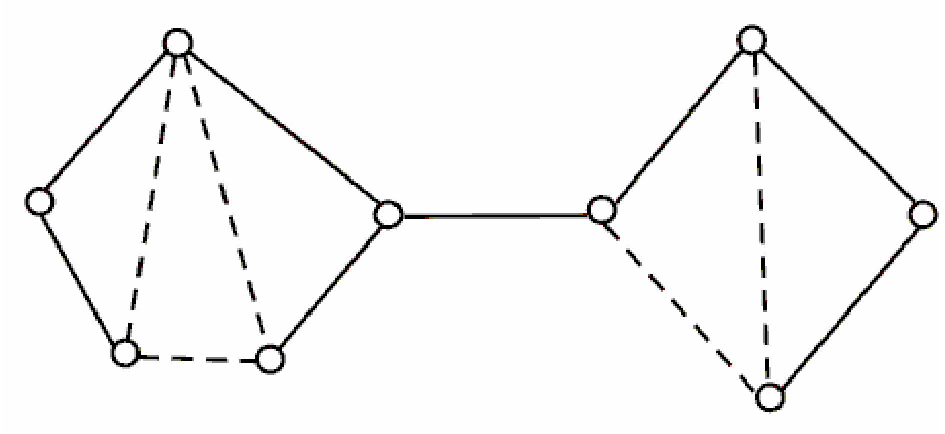
(2) G的生成树——T 是G 的生成子图并且是树

(3) 生成树T的树枝——T 中的边

(4) 生成树T的弦——不在T 中的边

(5) 生成树T的余树 $\overline{T}$——全体弦组成的集合的导出子图

$\overline{T}$不一定连通，也不一定不含回路。T不唯一。如图所示



生成树存在条件

定理9.3 无向图G具有生成树当且仅当G连通.

证 必要性显然.

充分性用破圈法（注意：在圈上删除任何一条边，不破坏连通性）——求生成树的方法: 寻找基本回路, 删除其一边

推论1 G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$.

推论2 $\overline{T}$ 的边数为$m-n+1$. 这个数称为G的基本回路的秩

基本回路系统

定理9.4 设T为G的生成树，e为T的任意一条弦，则$T\cup e$中含G中只有一条弦e, 其余边均为树枝的圈. 不同的弦对应的圈也不同.

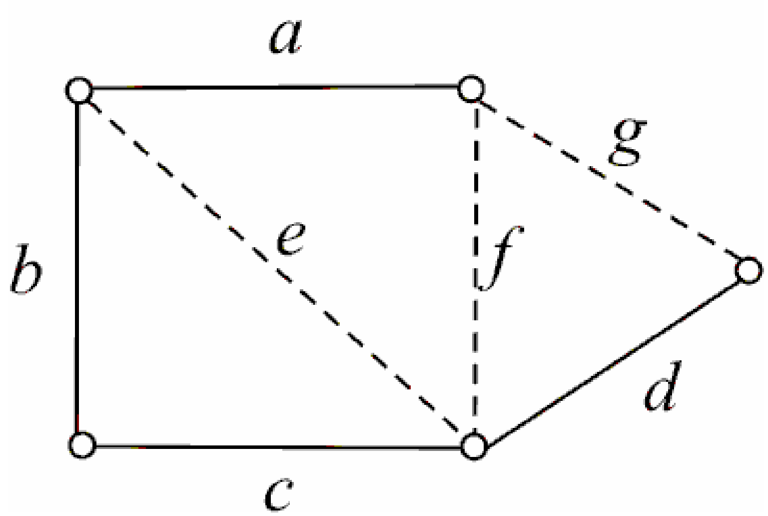
证 设$e=(u,v)$，在T中u到v有惟一路径Γ，则$\Gamma\cup e$为所求的圈.

定义9.3 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{m-n+1}$为$T$ 的弦. 设C_r为T 添加弦e'_r产生的只含弦e'_r、其余边均为树枝的圈. 称C_r为G的对应弦e'_r的**基本回路**或**基本圈**，r=1, 2, …, $m-n+1$. 并称$\{C_1, C_2, \ldots, C_{m-n+1}\}$为$G$对应$T$ 的**基本回路系统**，称$m-n+1$为G的**基本回路的秩(圈秩)**，记作 $\xi(G)$.

⑩求基本回路的算法：设弦$e=(u,v)$，先求T中u到v的路径Γ_{uv}，再并上弦e，即得对应e的基本回路.

实例

例3 图中实线边所示为生成树，求基本回路系统



解 弦e, f, g对应的基本回路分别为

$$C_e=e\ b\ c,\ C_f=f\ a\ b\ c,\ C_g=g\ a\ b\ c\ d,\ C_{基}=\{C_e, C_f, C_g\}.$$

最小生成树

定义9.4 T是$G=<V,E,W>$的生成树

(1) $W(T)$——T各边权之和

(2) **最小生成树**——G的所有生成树中权最小的

求最小生成树的一个算法

避圈法（Kruskal克鲁斯卡尔算法）设$G=<V,E,W>$，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$.

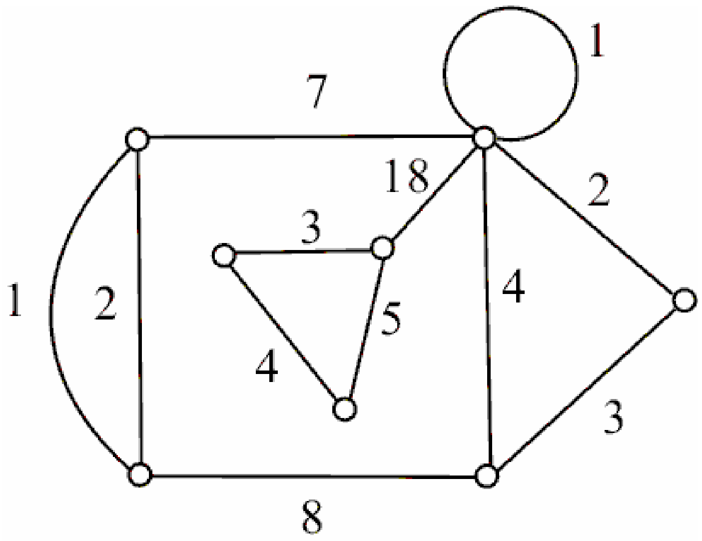
(1) 取e_1在T中

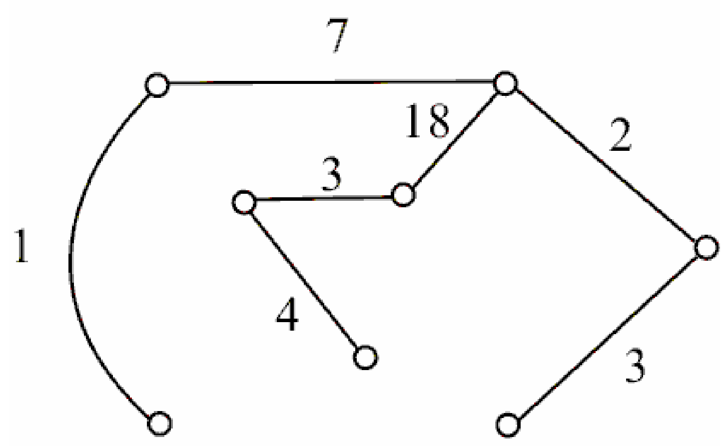
(2) 依次查$e_2, \ldots, e_m$.若$e_j(j\geq 2)$与已在T中的边不能构成回路，则取e_j也在T中，否则弃e_j.

(3) 直到得到生成树为止.

实例

例4 求图的一棵最小生成树.





所求最小生成树如图所示，$W(T)=38$.

教材例9.9是一个最小生成树的实际应用案例.

作业

P147　9.1　9.3　9.5

P153　21　23