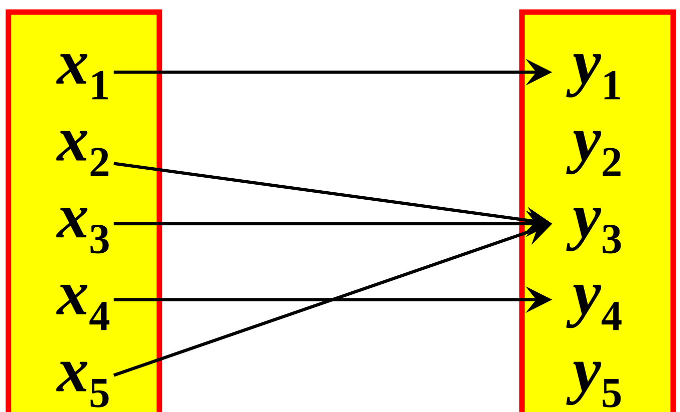
第三章 函数

- 函数定义
- 函数类型
- 函数运算

定义

定义 设X和Y是集合,对**每一**$x \in X$,都存在**唯一**的$y \in Y$,使$\langle x,y\rangle \in f$.则称关系f为从X到Y的函数, 记为 $f:X \to Y$。

- 当$\langle x,y\rangle \in f$，通常记为$y=f(x)$. x叫做函数的**自变元，**y叫做对应于自变元x的**函数值**。
- X为函数 f 的定义域(dom$f$)，$f(X)$为函数的值域(ran$f$)。



函数与关系的差别

A={a,b,c}，B={1,2}, 则A到B的所有不同函数有多少？

2^3

区别:

1. 关系和函数的数量不同:从A到B的不同关系有 $2^{|A|\times|B|}$ 个，从A到B的不同函数仅有 $|B|^{|A|}$

2. 关系和函数的基数不同:每一 个关系的基数可以从零一直到|A|× |B|,每一个函数的基数为|A|

3.关系和函数的第一元素存在差别:关系的第一 个元素可以相同，函数的第一元素一定是互不相同

函数的像和原像

定义 设函数 f：$A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$

(1)令$f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1\}$称为$A_1$在 f 下的像.当$A_1=A$时，称$f(A)$为函数的像

(2)令$f^{-1}(B_1)=\{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$称为$B_1$在 f 下的原像

注意：

- 函数值与像的区别：函数值 $f(x) \in B$, 像$f(A_1) \subseteq B$

例 设 f：$\mathrm{N} \to \mathrm{N}$, 且

$$f(x)=\begin{cases} x/2 & \text{若}x\text{为偶数} \\ x+1 & \text{若}x\text{为奇数} \end{cases}$$

令$A=\{0,1\}$, $B=\{2\}$, 那么有

$$f(A) = f(\{0,1\}) = \{ f(0), f(1)\}=\{0,2\}$$
$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\})=\{1,4\}$$

函数类型

定义 设 f: $A\to B$,

(1) 若 $\mathrm{ran}f=B$, 则称 $f:A\to B$是满射的(或从A到B上的函数)否则称内射的(或从A到B内的函数)

(2) 若 $\forall y\in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f:A\to B$是单射的（或从A到B的一对一的函数），否则称为多射（或从A到B的多对一的函数）

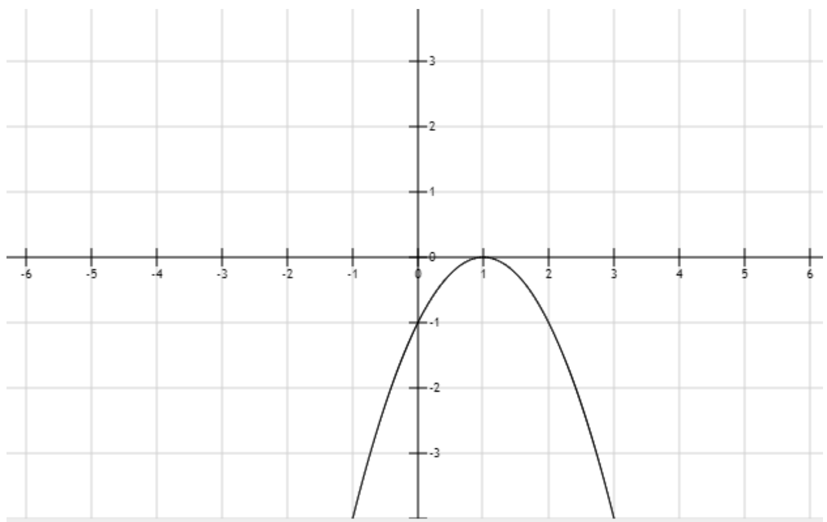
(3) 若 $f:A\to B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f:A\to B$是双射的（或一一对应函数）

在双射函数$f:A\to B$中，若$A=B$, 则称此函数为A的变换

例题

例1 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

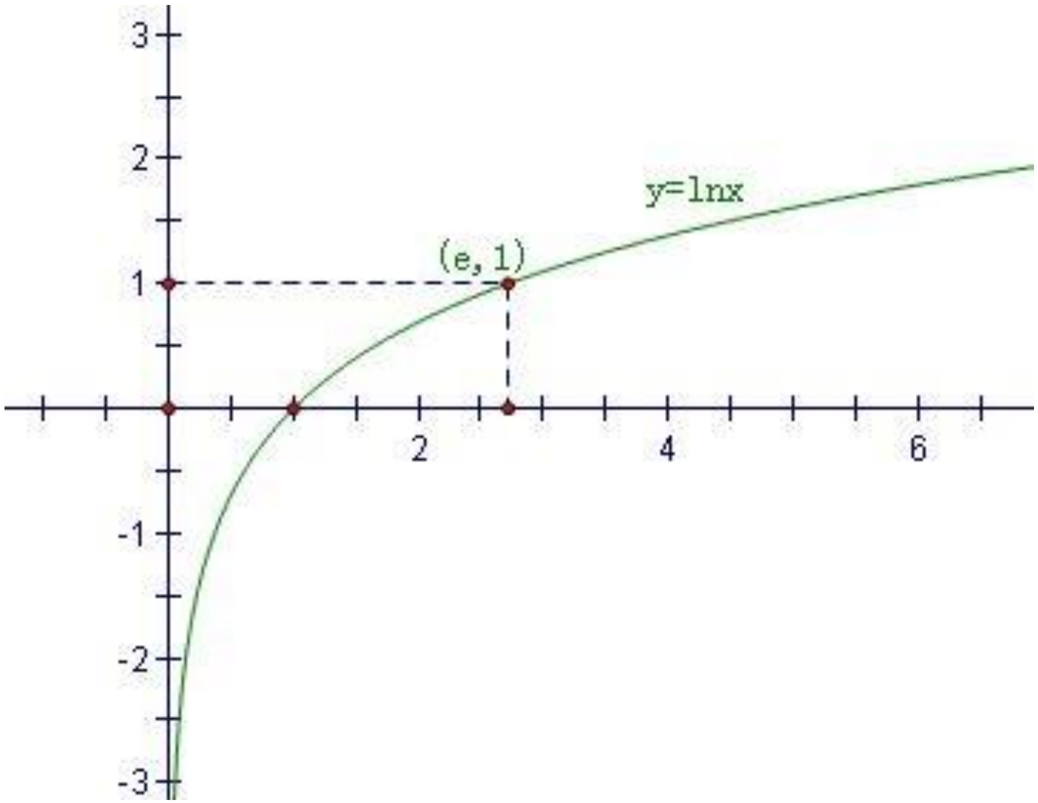
(1) f:R→R, $f(x)=-x^2+2x-1$



在x=1取得极大值0. 既不是单射也不是满射的

例题

(2) f: $Z^+ \to R$, $f(x)=\ln x$, Z^+为正整数集



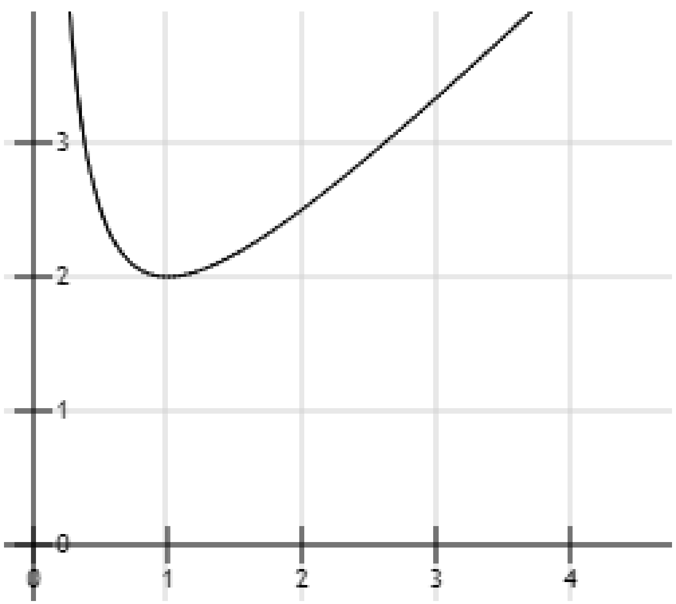
是单调上升的, 是单射的. 但不满射, $ranf=\{\ln 1, \ln 2, \ldots\}$.

例题

(3) f:R→R, $f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且ran$f$=R

(4) f:R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.



有极小值 $f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的

3.2 常用函数

定义

(1)设 $f:A\to B$, 如果存在$c\in B$使得对所有的 $x\in A$都有 $f(x)=c$, 则称 $f:A\to B$是常函数.

(2) 称 A上的恒等关系I_A为A上的恒等函数, 对所有的 $x\in A$都 有$I_A(x)=x$.

(3) 设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$, $\langle B, \preccurlyeq\rangle$为偏序集，$f:A\to B$， 如果对任意的 $x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的；如果对任意的$x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 就有$f(x_1) \prec f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的. 类似的也可以定义单调递减和严格单调递减的函数

常用函数

(4) 设A为集合, 对于任意的$A'\subseteq A$, A'的特征函数

$f_{A'}: A\rightarrow\{0,1\}$定义为

$$f_{A'}(a)=1,\ a\in A'$$

$$f_{A'}(a)=0,\ a\in A-A'$$

(5) 设R是A上的等价关系, 令

$$g:A\rightarrow A/R$$

$$g(a)=[a],\ \forall a\in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射

实例

(1) 偏序集$<P(\{a,b\}),R_{\subseteq}>$, $<\{0,1\},\leq>$, $R_{\subseteq}$为包含关系, $\leq$为一般的小于等于关系，令

$f:P(\{a,b\})\to\{0,1\}$, $f(\varnothing)=f(\{a\})=f(\{b\})=0$, $f(\{a,b\})=1$,

f 是单调递增的, 但不是严格单调递增的

(2) A的每一个子集 A'都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 例如$A=\{a,b,c\}$, 则有

$f_{\varnothing}=\{<a,0>,<b,0>,<c,0>\}$， $f_{\{a,b\}}=\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\}$

(3) 不同的等价关系确定不同的自然映射, 恒等关系确定的自然映射是双射, 其他自然映射一般来说只是满射. 例如

$A=\{1,2,3\}$, $R=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

$g: A\to A/R$, $g(1)=g(2)=\{1,2\}$, $g(3)=\{3\}$

3.3 函数运算及性质

定义 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 则 $f\circ g:A\to C$, 且$\forall x\in A$都有

$f\circ g(x)=g(f(x))$

定理 设$f:A\to B$, $g:B\to C$

(1) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是满射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是满射的

(2) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是单射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是单射的

(3) 如果 $f:A\to B$, $g:B\to C$是双射的, 则 $f\circ g:A\to C$也是双射的

- 函数的并与交不一定是函数

A={x}，B={a,b}

f={<x,a>}　g={<x,b>}

实例

考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, $C=\{c_1,c_2,c_3\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>\}$$

$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_3>,<b_4,c_3>\}$$

$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_3>\}$$

那么 $f:A\to B$和$f\circ g:A\to C$是单射的, 但$g:B\to C$不是单射

考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$, $C=\{c_1,c_2\}$. 令

$$f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_2>\}$$

$$g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_2>\}$$

$$f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_2>\}$$

那么$g:B\to C$ 和 $f\circ g:A\to C$是满射的, 但 $f:A\to B$不是满射

反（逆）函数

逆函数存在的条件

函数具有单值性

(1) 任给函数F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 只是一个二元关系.

对于某些$y \in B$-ran$f$, f^{-1}没有值与之对应

(2) 对于双射函数 $f:A \to B$, $f^{-1}:B \to A$是从B到A的双射函数.

定理 设 $f:A \to B$是双射的, 则$f^{-1}:B \to A$也是双射的.

反函数的性质

定理

(1) 设 $f:A\to B$是双射的, 则 $f^{-1}\circ f = I_B$, $f\circ f^{-1} = I_A$

(2) 对于双射函数 $f:A\to A$, 有 $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A$

例 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\quad g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 3 \\ -2 & x<3 \end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

求 $f\circ g$, $g\circ f$. 如果f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

求解

解

$$f \circ g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$$g \circ f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

f:R→R不是双射的, 不存在反函数.

g:R→R是双射的, 它的反函数是

g^{-1}:R→R, $g^{-1}(x)=x-2$

练习

1. 设 R 是从 $A=\{a,b,c\}$ 到 $B=\{d,e,f,g\}$ 的二元关系，下面哪个是函数？(　　　　)

A. $R=\{\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,d\rangle,\langle b,f\rangle\}$

B. $R=\{\langle a,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,g\rangle\}$

C. $R=\{\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\langle c,e\rangle,\langle b,g\rangle\}$

D. $R=\{\langle a,g\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,e\rangle,\langle b,f\rangle,\langle c,d\rangle\}$

2. 设 **N** 是自然数集合，f, g, h 是从 **N** 到 **N** 的函数，其中：

$$f(n)=n+1,\ g(n)=2n,\ h(n)=\begin{cases}0 & n\text{是偶数}\\ 1 & n\text{是奇数}\end{cases}$$

试求函数的复合运算 $f\circ g$ 和 $g\circ h$。（注：$f\circ g(x)=g(f(x))$）

作业

徐 p44 3.3 3.4

p59 35 36

方 p150 10（见图片）

9. 设 R 是集合 X 上的等价关系，在什么条件下，规范映射 $g: X \to X/R$ 是双射函数。

10. 设 $f: X \to Y$，定义 X 上的关系 R 如下：

$$x_1 R x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

证明 R 是等价关系。

11. 对图 4.3-3 所表示的函数确定其左或右逆元，如果它们存在。指明函数诱导的前域上的等价关系，并构造规范映射。