第六章 数值微分与数值积分

§1 引 言

一　函数$f(x)$的表达式复杂，或需要利用函数在相关离散节点处的函数值计算其导数。所以，有必要研究微分计算的数值方法。

二　积分学基本定理　$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

应用中碰到如下情况：

① $f(x)$的原函数无法用初等函数给出；$\int_2^5 e^{-x^2} dx$　$\int_2^5 \frac{\sin x}{x} dx$

② $f(x)$用表格形式给出；

③ $f(x)$的原函数能用初等函数表示，但表达式过于复杂。

所以，有必要研究积分计算的数值方法。

§2 数值微分公式

以离散数据$(x_i, f(x_i))\ (i=0,1,\ldots,n)$ 近似表达$y=f(x)$在节点x_i 处的导数值$f'(x_i)$，通常称为**数值微分（公式）**。

一 插值法

给出列表函数$y=f(x)$，可建立插值多项式$L_n(x)$。

$$f(x)=L_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \quad \xi\in(x_0,x_n)$$

取 $L_n'(x)$ 作为$f'(x)$的近似函数，则

$$f'(x)=L_n'(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x)+\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}\boxed{\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi(x))}$$

难以求得

限定求节点 x_i 的导数值，则 $\boxed{f'(x_i)=L_n'(x_i)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_i)}$

设$M=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$，则 $\left|f'(x_i)-L_n'(x_i)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}'(x_i)\right|$

为讨论方便，假定所给**节点为等距分布**。

1 两点公式 (n=1)

由 $f'(x_i)=L_1'(x_i)+\dfrac{f^{(2)}(\xi)}{2!}\omega_2'(x_i)\quad i=0,1\qquad \omega_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$

及 $L_1(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)\qquad L_1'(x)=\dfrac{1}{-h}f(x_0)+\dfrac{1}{h}f(x_1)$

得 $f'(x_i)=\dfrac{1}{h}[-f(x_0)+f(x_1)]+\dfrac{f^{(2)}(\xi)}{2}[(x-x_0)+(x-x_1)]\Big|_{x=x_i}\quad i=0,1$

$h=x_1-x_0$

即

$$\boxed{\begin{cases} f'(x_0)=\dfrac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]-\dfrac{h}{2}f''(\xi_0) & \xi_0\in(x_0,x_1)\\[2ex] f'(x_1)=\dfrac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]+\dfrac{h}{2}f''(\xi_1) & \xi_1\in(x_0,x_1)\end{cases}}$$

$$f'(x_i)=L_n'(x_i)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}'(x_i)$$

2 三点公式 (n=2)

由 $$p_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

令 $x_1=x_0+h \quad x_2=x_0+2h \quad x=x_0+th$

其中 $h=x_1-x_0=x_2-x_1$

得 $$p_2(x_0+th)=\frac{(t-1)(t-2)}{2}f(x_0)+\frac{t(t-2)}{-1}f(x_1)+\frac{t(t-1)}{2}f(x_2)$$

将两边对t求导，得

$$hp_2'(x_0+th)=\frac{f(x_0)}{2}\left[(t-1)+(t-2)\right]-f(x_1)\left[t+(t-2)\right]+\frac{f(x_2)}{2}\left[t+(t-1)\right]$$

即 $$p_2'(x_0+th)=\frac{1}{2h}\{(2t-3)f(x_0)-(4t-4)f(x_1)+(2t-1)f(x_2)\}$$

根据 $f(x)=p_2(x)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}$ ，则有

$$f'(x_i)=p_2'(x_i)+\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}[(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)]\Big|_{x=x_i}$$

$i=0,1,2$

注意在$x=x_0+th$ 中， 当$t=0,1,2$时， 得 $x=x_0,x_1,x_2$

故有

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)\}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)\quad \xi_0\in(x_0,x_2)$$

$$f'(x_1)=\frac{1}{2h}\{-f(x_0)+f(x_2)\}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)\quad \xi_1\in(x_0,x_2)$$

$$f'(x_2)=\frac{1}{2h}\{f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)\}+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)\quad \xi_2\in(x_0,x_2)$$

还可以建立高阶数值微分公式：$f^{(i)}(x)\approx p_n^{(i)}(x)\quad i=1,2,\cdots$

$$p_2'(x_0+th)=\frac{1}{2h}\{(2t-3)f(x_0)-(4t-4)f(x_1)+(2t-1)f(x_2)\}$$

二 Taylor展开法

证明
$$f'(x_i)=\frac{1}{h}[f(x_i+h)-f(x_i)]-\frac{h}{2}f''(\xi_1),\ \xi_1\in(x_i,x_i+h)$$

$$f'(x_i)=\frac{1}{h}[f(x_i)-f(x_i-h)]+\frac{h}{2}f''(\xi_2),\ \xi_2\in(x_i-h,x_i)$$

根据Taylor公式

$$f(x_i+h)=f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_1)$$

$$f(x_i-h)=f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_2)$$

即得。

两点公式
$$\begin{cases} f'(x_0)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]-\frac{h}{2}f''(\xi_0) & \xi_0\in(x_0,x_1) \\ f'(x_1)=\frac{1}{h}[f(x_1)-f(x_0)]+\frac{h}{2}f''(\xi_1) & \xi_1\in(x_0,x_1) \end{cases}$$

证明 $f'(x_i)=\frac{1}{2h}[f(x_i+h)-f(x_i-h)]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi_3),\ \xi_3\in(x_i-h,x_i+h)$

根据Taylor公式 $f(x_i+h)=f(x_i)+hf'(x_i)+\frac{h^2}{2}f''(x_i)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_1)$

$$f(x_i-h)=f(x_i)-hf'(x_i)+\frac{h^2}{2}f''(x_i)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_2)$$

相减 $f(x_i+h)-f(x_i-h)=2hf'(x_i)+\frac{h^3}{6}(f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2))$

即 $f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h}-\frac{h^3}{6}\frac{1}{2h}(f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2))$

若$f^{(3)}(x)$连续，则 $m\le\frac{1}{2}(f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2))\le M$

（m，M为$f^{(3)}(x)$的最小值与最大值）

由连续函数的介值定理，必存在ξ_3，使得

$$f^{(3)}(\xi_3)=\frac{1}{2}\left[f^{(3)}(\xi_1)+f^{(3)}(\xi_2)\right]$$

故得 $f'(x_i)=\frac{1}{2h}\left[f(x_i+h)-f(x_i-h)\right]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi_3),\ \xi_3\in(x_i-h,x_i+h)$

三点公式 $f'(x_1)=\frac{1}{2h}\{-f(x_0)+f(x_2)\}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)\quad \xi_1\in(x_0,x_2)$

三 Richardson外推法

假设一量S与步长h无关，$S^*(h)$为依赖于步长h的近似S的量。并有 $\boxed{S-S^*(h)=a_1h^{p_1}+a_2h^{p_2}+\cdots+a_kh^{p_k}+\cdots}$

$\{a_i\}_{i=1}^{\infty},\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$与步长$h$无关，幂次满足$0<p_1<p_2<\cdots$

即用$S^*(h)$近似S时，误差的量级是$O(h^{p_1})$。

由 $$\boxed{S-S^*(\frac{h}{2})=a_1(\frac{h}{2})^{p_1}+a_2(\frac{h}{2})^{p_2}+\cdots+a_k(\frac{h}{2})^{p_k}+\cdots}$$

得 $$[S-S^*(h)]-2^{p_1}[S-S^*(\frac{h}{2})] \Longrightarrow (1-2^{p_1})S-[S^*(h)-2^{p_1}S^*(\frac{h}{2})]$$

$$=a_2(1-2^{p_1-p_2})h^{p_2}+\cdots+a_k(1-2^{p_1-p_k})h^{p_k}+\cdots$$

即 $$S-\boxed{\frac{S^*(h)-2^{p_1}S^*\left(\frac{h}{2}\right)}{1-2^{p_1}}}=\hat{a}_2h^{p_2}+\hat{a}_3h^{p_3}+\cdots+\hat{a}_kh^{p_k}+\cdots$$

式中新的系数 $\left\{\hat{a}_k=a_k\dfrac{1-2^{p_1-p_k}}{1-2^{p_1}}\right\}_{k=2}^{\infty}$

令 $S_1^*(h)=\dfrac{1}{1-2^{p_1}}S^*(h)+\dfrac{-2^{p_1}}{1-2^{p_1}}S^*\left(\dfrac{h}{2}\right)$

由于 $S-S_1^*(h)=O(h^{p_2})$

故新的近似量 $S_1^*(h)$近似S时，误差的量级是 $O(h^{p_2})$。

上述高阶近似是两个低阶近似的线性组合。

依据$S_1^*(h)$的表达式，还可对$S_1^*(h)$再进行外推，得到量S的更高阶近似。

上述方法称为**Richardson外推技巧**。这一技巧可用于数值积分、数值微分等问题的数值计算。

$$S-\boxed{\dfrac{S^*(h)-2^{p_1}S^*\left(\dfrac{h}{2}\right)}{1-2^{p_1}}}=\hat{a}_2h^{p_2}+\hat{a}_3h^{p_3}+\cdots+\hat{a}_kh^{p_k}+\cdots$$

如：对一阶微分计算的中点公式进行外推

$$S(x)=f'(x),\ S^*(h)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

则 $$S-S^*(h)=f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=-\frac{f'''(x)}{3!}h^2-\frac{f^{(5)}(x)}{5!}h^4+\cdots$$

近似量 $S^*(h)$ 近似S时，误差量级是 $O(h^2)$ 。

$$S-S^*(\frac{h}{2})=-\frac{f'''(x)}{3!}(\frac{h}{2})^2-\frac{f^{(5)}(x)}{5!}(\frac{h}{2})^4+\cdots$$

$$[S-S^*(h)]-2^2[S-S^*(\frac{h}{2})]=O(h^4)\ \Rightarrow\ 3S-\left[4S^*(\frac{h}{2})-S^*(h)\right]=O(h^4)$$

$$\Rightarrow\ S-\left[\frac{4}{3}S^*(\frac{h}{2})-\frac{1}{3}S^*(h)\right]=O(h^4)$$ 即 $$f'(x)-\boxed{\left[\frac{4}{3}S^*(\frac{h}{2})-\frac{1}{3}S^*(h)\right]}=O(h^4)$$

令 $S_1^*(h)=\frac{4}{3}S^*\left(\frac{h}{2}\right)-\frac{1}{3}S^*(h)$

新的近似量$S_1^*(h)$近似S时，误差量级是 $O(h^4)$。

$$f'(x_i)=\frac{1}{2h}[f(x_i+h)-f(x_i-h)]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi_3)$$

§3 Newton-cotes 求积公式

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b,\ h_i = x_i - x_{i-1},\ x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$

一元可积函数的定积分 $I = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{h \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)h_i$

可以看成函数值线性组合的极限。

去掉极限过程就得到一种近似方法。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = I_n$$

或 $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + E_n[f] = I_n + E_n[f]$$

称为**求积公式**。$x_i\ (i = 0,1,2,\cdots n)$ 称为**求积节点** 。

$A_i (i = 0,1,2,\cdots n)$ 称为**求积系数**。

$E_n[f]$ 称为**求积公式的余项**（**截断误差**）；

A_i 仅与求积节点 x_i 的选取有关，它不依赖于$f(x)$。

一 求积公式的代数精（确）度

定义： 如果 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

对于任意不高于m次的代数多项式准确成立。

而对于某一个$m+1$次多项式并不准确成立。

则称上述求积公式具有m次**代数精（确）度**。

定理 求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 具有m次代数精度的充分必要条件是

$$\int_a^b dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \quad \int_a^b x dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i \quad \cdots \quad \int_a^b x^m dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^m$$

$$\int_a^b x^{m+1} dx \neq \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^{m+1}$$

证明：充分性 若

$$\int_a^b dx=\sum_{i=0}^n A_i \quad \int_a^b x dx=\sum_{i=0}^n A_i x_i \quad \cdots \quad \int_a^b x^m dx=\sum_{i=0}^n A_i x_i^m$$

$$\int_a^b x^{m+1} dx \neq \sum_{i=0}^n A_i x_i^{m+1}$$

则 $a_0\int_a^b dx+a_1\int_a^b xdx+\cdots+a_m\int_a^b x^m dx=a_0\sum_{i=0}^n A_i+a_1\sum_{i=0}^n A_i x_i+\cdots+a_m\sum_{i=0}^n A_i x_i^m$

即 $\int_a^b (a_0+a_1x+\cdots+a_m x^m)dx=\sum_{i=0}^n A_i(a_0+a_1x_i+\cdots+a_m x_i^m)$

求积公式对任意不高于m次的代数多项式准确成立。

由 $\int_a^b x^{m+1} dx \neq \sum_{i=0}^n A_i x_i^{m+1}$

知求积公式对于某一个m+1次多项式并不准确成立。

综上所述，求积公式具有m次代数精度。

必要性 若求积公式具有m次代数精度，则有

$$\int_a^b dx=\sum_{i=0}^n A_i \quad \int_a^b x dx=\sum_{i=0}^n A_i x_i \quad \cdots \quad \int_a^b x^m dx=\sum_{i=0}^n A_i x_i^m$$

由于求积公式对于某一个$m+1$次多项式并不准确成立，故有

$$\int_a^b (a_0+a_1x+\cdots+a_{m+1}x^{m+1})dx \neq \sum_{i=0}^n A_i(a_0+a_1x_i+\cdots+a_{m+1}x_i^{m+1})$$

即 $$a_0\int_a^b dx+a_1\int_a^b xdx+\cdots+a_m\int_a^b x^m dx+a_{m+1}\int_a^b x^{m+1}dx$$

$$\neq a_0\sum_{i=0}^n A_i+a_1\sum_{i=0}^n A_i x_i+\cdots+a_m\sum_{i=0}^n A_i x_i^m+a_{m+1}\sum_{i=0}^n A_i x_i^{m+1}$$

利用上述$m+1$个等式，则有

$$\int_a^b x^{m+1}dx \neq \sum_{i=0}^n A_i x_i^{m+1}$$

给定n+1个节点，构造至少有n次代数精度的求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\int_a^b dx = \sum_{i=0}^{n} A_i$$

$$\int_a^b x dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i$$

$$\vdots$$

$$\int_a^b x^n dx = \sum_{i=0}^{n} A_i x_i^n$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ \vdots \\ (b^{n+1}-a^{n+1})/n+1 \end{bmatrix}$$

若求积节点互异，则系数矩阵非奇异。所以，可通过求解方程组而得到唯一的n+1个求积系数。

定理 对于区间[a,b]上给定的$n+1$个互异节点$a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$，总存在求积系数$A_0, A_1, \cdots A_n$，使求积公式至少有$n$次代数精度，且该求积公式唯一。

Remark

定出$A_i(i=0,1,\cdots,n)$，则求积公式至少具有n次代数精度，但并不一定它具有n次代数精度。要将x^{n+1}代入求积公式，如果等式不准确成立，则求积公式具有n次代数精度；否则代数精度将大于n。

求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$至少有零次代数精度。

由 $\int_a^b dx = \sum_{i=0}^{n} A_i$ 知 $\sum_{i=0}^{n} A_i = b-a$

例： 确定求积公式$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\alpha h^2[f'(0)-f'(h)]$中的待定参数$\alpha$，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式具有的代数精度。(作业)

解: $\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\alpha h^2[f'(0)-f'(h)]$ 含一个待定参数

当$f(x)=1$时,有 $\int_0^h dx \equiv \frac{h}{2}[1+1]$

当$f(x)=x$时,有 $\int_0^h xdx \equiv \frac{h}{2}[0+h]+\alpha h^2[1-1]$

令求积公式对$f(x)=x^2$成立，即

$$\int_0^h x^2dx = \frac{h}{2}[0+h^2]+\alpha h^2(2\times 0-2h) \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{12}$$

令$f(x)=x^3$，代入已求得的求积公式，有

$$\int_0^h x^3dx = \frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{h^2}{12}[0-3h^2]$$

令$f(x)=x^4$，代入已求得的求积公式，有

$$\int_0^h x^4dx \neq \frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{h^2}{12}[0-4h^3]$$

故$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\frac{h^3}{12}[f'(0)-f'(h)]$有三次代数精度。

二 插值型求积公式

基本思想:

用插值多项式$p_n(x)$的积分代替函数$f(x)$的积分。

设已知互异节点$\{x_i\}_{i=0}^n$上的函数值$\{f(x_i)\}_{i=0}^n$。

由 $$f(x)=\sum_{i=0}^n l_i(x)f(x_i)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

得 $$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^n\left(\int_a^b l_i(x)dx\right)f(x_i)+\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

故 $$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)+\int_a^b\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx=I_n+E_n[f]$$

其中 $\boxed{A_i=\int_a^b l_i(x)dx}$。

求积系数由 $A_i=\int_a^b l_i(x)dx$ 确定的求积公式称为**插值型求积公式**。

定理 $n+1$个求积节点的数值求积公式是插值型的充要条件是该公式至少有n次代数精度。

证明： 必要性 设求积公式为插值型的。

由 $$E_n[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

可知：对于任意次数≤n的多项式$f(x)$, $E_n[f]=0$。

故**插值型求积公式至少具有n次代数精度**。

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)+\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

充分性*：设求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

至少具有n次代数精度。

则对于不高于n次的多项式，上述等式精确成立。

特别地，取 $f(x) = l_j(x) \quad (j = 0,1,\cdots,n)$

有
$$\int_a^b l_j(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i l_j(x_i)$$
$$= A_0 l_j(x_0) + A_1 l_j(x_1) + \cdots + A_n l_j(x_n)$$

注意 $l_j(x_i) = \delta_{ji}$

$$A_j = \int_a^b l_j(x)dx \quad (j = 0,1,\cdots,n)$$

根据插值型求积公式定义知，其求积公式为插值型求积公式。

三 Newton-cotes 公式

将$[a,b]$分为n等份，其步长$h=(b-a)/n$ ，节点 $x_i=a+ih \ \ (i=0,1,\cdots,n)$。对应的插值型求积公式称为**Newton-Cotes求积公式**。

由插值型求积公式，可得

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)+\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

$$A_i=\int_a^b l_i(x)dx \ =\int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}dx \qquad （n\neq 0）$$

其中节点等距分布。

n=0的公式称为**中点公式**（习题：用Taylor展开推导）

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})} \overset{\text{记为}}{=} M(f)$$

一次代数精度。

n=1的公式称为**梯形公式**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]} \overset{\text{记为}}{=} T(f)$$

一次代数精度。

n=2的公式称为**Simpson公式或抛物线公式**。

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)[\frac{1}{6}f(a)+\frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{6}f(b)]} \overset{\text{记为}}{=} S(f)$$

三次代数精度。

n=4的公式称为**Cotes公式**（$x_i = a_0 + ih \quad (i=0,1,\cdots,4)$）

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\approx (b-a)[\frac{7}{90}f(x_0)+\frac{32}{90}f(x_1)+\frac{12}{90}f(x_2)+\frac{32}{90}f(x_3)+\frac{7}{90}f(x_4)] \overset{\text{记为}}{=} C(f)$$

五次代数精度。

记 $A_i = (b-a)c_i^{(n)} \ (i=0,1,\cdots,n)$，$c_i^{(n)}$ 称为Cotes系数。

$$\sum_{i=0}^{n} A_i = \underline{\ b-a\ } \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i^{(n)} = \underline{\ 1\ }$$

定理 n为偶数（节点数$n+1$为奇数）时，Newton-Cotes求积公式的代数精度至少是$n+1$；

n为奇数（节点数$n+1$为偶数）时，Newton-Cotes求积公式的代数精度至少是n。

证明略

广义积分中值定理

如果$f(x)$，$g(x)$在区间$[a,b]$连续，且$g(x)$在区间(a,b)不变号，则存在$\eta\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\eta)\int_a^b g(x)dx$$

四 几种低阶求积公式的截断误差

① 若$f(x)$在$[a,b]$有二阶连续导数，**中点求积公式**有下列误差估计：

$$E_M[f]=\boxed{\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(\frac{a+b}{2})=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)}\quad a<\eta<b$$

证： 由Taylor展开式

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\quad \xi\text{依赖}x$$

两边在$[a, b]$上积分。因$(x-\frac{a+b}{2})^2$在$[a, b]$上不变号，故由广义积分中值定理知，在(a,b)上存在一点η，使得：

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\eta)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

$$=(b-a)f\left(\frac{b+a}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)\quad (a<\eta<b)$$

中点求积公式(n=0)有一次代数精度。

② 若$f(x)$在$[a,b]$有二阶连续导数，**梯形求积公式**有下列误差估计：

$$E_T[f]=\boxed{\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)}\quad a<\eta<b$$

证： 由 $E_T[f]=\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)dx$ ξ依赖x

注意$(x-a)(x-b)\le 0$， 且$f^{(2)}(\xi)$是$[a,b]$上依赖于x的连续函数。运用广义积分中值定理，在(a,b)上存在一点η，使得

$$E_T[f]=\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)dx=\frac{f''(\eta)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

$$=-\frac{1}{12}f''(\eta)(b-a)^3\quad (a<\eta<b)$$

梯形求积公式(*n*=1)有一次代数精度。

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)+\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

③ 若$f(x)$在$[a,b]$有四阶连续导数，**Simpson公式**有下列误差估计：

$$E_S[f]=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$
$$=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta), a<\eta<b$$

证： 注意Simpson公式的代数精度为三。构造次数不高于三次的多项式$H_3(x)$，使之满足插值条件：

$$H_3(a)=f(a), H_3(b)=f(b), H_3(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2}), H_3'(\frac{a+b}{2})=f'(\frac{a+b}{2})$$

$$E_S[f]=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$
$$=\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}[H_3(a)+4H_3(\frac{a+b}{2})+H_3(b)]$$
$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b H_3(x)dx$$

$$\int_a^b H_3(x)dx=\frac{b-a}{6}[H_3(a)+4H_3(\frac{a+b}{2})+H_3(b)]$$

注： 根据$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)+\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$，有

$E_2(f)=\int_a^b \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)dx$，但此积分无法计算。

$$E_S[f]=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b H_3(x)dx=\int_a^b[f(x)-H_3(x)]dx$$

$$=\int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx$$

注意 $(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)\le 0$，且 $f^{(4)}(x)$是$[a,b]$上的连续函数。运用广义积分中值定理，在(a, b)上存在一点η，使得

$$E_S[f]=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta), a<\eta<b$$

即 $$E_S[f]=\boxed{\int_a^b f(x)dx-\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)] =-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta), a<\eta<b}$$

Simpson公式(n=2)有三次代数精度。

④ 若$f(x)$在$[a,b]$有六阶连续导数，**Cotes公式**有下列误差估计：

$$E_C[f]=\int_a^b f(x)dx-$$

$$-(b-a)[\frac{7}{90}f(x_0)+\frac{32}{90}f(x_1)+\frac{12}{90}f(x_2)+\frac{32}{90}f(x_3)+\frac{7}{90}f(x_4)]$$

$$=-\frac{2}{945}(b-a)(\frac{b-a}{4})^6 f^{(6)}(\eta) \qquad a<\eta<b$$

Cotes公式有五次代数精度。

五 求积公式的收敛性与稳定性

求积公式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + E_n[f]$$

截断误差

$$E_n[f] = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n[f] = 0$（$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \int_a^b f(x)dx$），则称该**求积公式收敛**。

如果求积公式对函数值的误差不敏感(误差能够控制)，则称该**求积公式稳定**。

求积公式稳定的充分条件

设计算$\{f(x_i)\}_{i=0}^n$有绝对误差$\{e_i\}_{i=0}^n$，即

$$f^*(x_i)-f(x_i)=e_i$$

记 $I_n(f)=\sum_{i=0}^n A_i f(x_i),\quad I_n(f^*)=\sum_{i=0}^n A_i f^*(x_i)$

由 $\left|e(I_n^*)\right|=\left|I_n(f^*)-I_n(f)\right|=\left|\sum_{i=0}^n A_i f^*(x_i)-\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)\right|$

$$=\left|\sum_{i=0}^n A_i(f^*(x_i)-f(x_i))\right|=\left|\sum_{i=0}^n A_i e_i\right|\le\sum_{i=0}^n |A_i||e_i|$$

记 $\varepsilon=\max\limits_{0\le i\le n}|e_i|$ 　　则 $\left|e(I_n^*)\right|\le\varepsilon\sum_{i=0}^n|A_i|$

若 $A_i>0\ (i=0,1,\cdots,n)$ 　有 $\left|e(I_n^*)\right|\le\varepsilon\sum_{i=0}^n A_i=(b-a)\varepsilon$

故$\boxed{\text{当求积系数 } A_i \text{ 全为正时，求积公式稳定。}}$

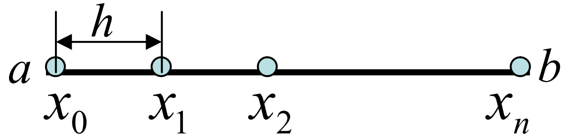
$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

§4 复化求积公式

一 复化求积算法

当$n \le 7$时，cotes系数为正；从n=8开始，cotes系数有正有负（见课本96页）。这会使计算误差得不到控制，稳定性得不到保证。

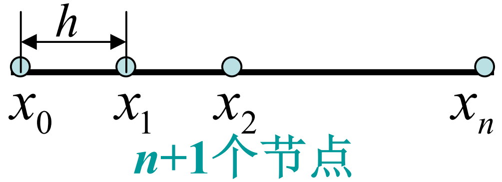
计算时通常不采用n较大的Newton-cotes公式，而是将$[a,b]$等分为n个小区间$[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0,1,\cdots,n-1$，记$h=(b-a)/n$。**在每个小区间上用低阶Newton-cotes公式，然后对所有小区间的计算结果求和**，这样建立的求积公式称为**复化（Newton-cotes）求积公式**。



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

1 复化梯形公式

1 1¤1 1¤1 ¤1



$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]-\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\eta_i)$$

$$=\frac{h}{2}[f(a)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(b)]-\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\eta_i)$$

$$=T_n(f)+E_{T_n}(f)$$

$$\boxed{T_n(f)=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)]}$$ 复化梯形公式

$$E_{T_n}(f)=I-T_n(f)=-\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\eta_i)$$ 复化梯形公式的余项

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)\quad a<\eta<b$$

若 $f''(x)$ 在$[a,b]$连续，设m为 $f''(x)$ 的最小值，M为 $f''(x)$ 的最大值，则

$$m \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i) \le M$$

根据连续函数介值定理，在(a,b)定有一点η，使

$$f''(\eta) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i)$$

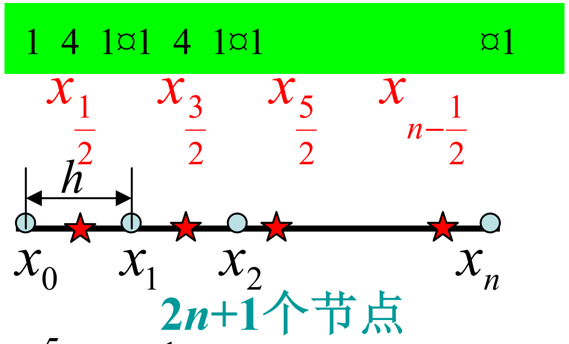
故 $$\boxed{E_{T_n}(f)} = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i) = -\frac{nh}{12}h^2 f''(\eta)$$

$$\boxed{= -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta)} \quad \eta \in (a,b)$$

当被积函数二阶导函数连续时，复化梯形公式收敛，并且稳定。

$$E_{T_n}(f) = I - T_n = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i)$$

2 复化Simpson公式



$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_i)+4f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(x_{i+1})]-\frac{h^5}{2880}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_i)$$

$$=\frac{h}{6}[f(a)+4f(x_{\frac{1}{2}})+2f(x_1)+4f(x_{\frac{3}{2}})+2f(x_2)+4f(x_{\frac{5}{2}})+\cdots$$

$$+2f(x_{n-1})+4f(x_{(n-1)+\frac{1}{2}})+f(b)]-\frac{h^5}{2880}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_i)$$

$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(b)\right]-\frac{h^5}{2880}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_i)$$

$$=S_n(f)+E_{S_n}(f)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)\quad a<\eta<b$$

$$\boxed{S_n(f)=\frac{h}{6}\left[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1}f(x_{i+\frac{1}{2}})+f(b)\right]}$$

复化Simpson公式

$$E_{S_n}(f)=I-S_n(f)=-\frac{h^5}{2880}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_i)$$

复化Simpson公式的余项

若$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$连续，设m为$f^{(4)}(x)$的最小值，M为$f^{(4)}(x)$的最大值，则有

$$m\le\frac{\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_i)}{n}\le M \qquad f^{(4)}(\eta)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_i)$$

故 $$\boxed{E_{S_n}(f)}=-\frac{h^5}{2880}\sum_{i=0}^{n-1}f^{(4)}(\eta_i)=-\frac{h^5}{2880}n\cdot f^{(4)}(\eta)$$

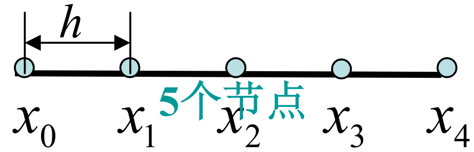
$$\boxed{=-\frac{b-a}{2880}h^4f^{(4)}(\eta)}\qquad \eta\in(a,b)$$

当被积函数二阶导函数连续时，复化Simpson公式收敛，并且稳定。

例： 取5个等距节点(含区间端点)，用复化梯形、复化Simpson求积公式近似计算$\int_0^1 e^x dx$（小数点后至少取4位）。

解： 对于复化梯形公式，$h=\dfrac{1-0}{4}=\dfrac{1}{4}$

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{h}{2}\left(e^0+2e^{\frac{1}{4}}+2e^{\frac{1}{2}}+2e^{\frac{3}{4}}+e^1\right)$$

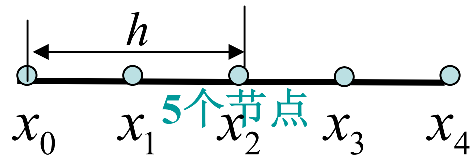


$$\approx \frac{0.25}{2}\times(1.00000+2\times1.28402+2\times1.64872+2\times2.11700+2.71828)$$

$$\approx 1.7272$$

对于复化Simpson公式，$h=\dfrac{1-0}{2}=\dfrac{1}{2}$

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{h}{6}\left(e^0+4e^{\frac{1}{4}}+2e^{\frac{1}{2}}+4e^{\frac{3}{4}}+e^1\right)$$



$$\approx \frac{0.5}{6}\times(1.00000+4\times1.28402+2\times1.64872+4\times2.11700+2.71828)$$

$$\approx 1.7183$$

$$\int_0^1 e^x dx = 1.718281828\cdots$$

例： 用积分$\int_2^8 \frac{1}{x}dx = 2\ln 2$计算ln2，且要使所得近似值具有5位有效数字。问用复化梯形公式、复化Simpson公式计算时，至少要取多少个节点?

解： 由 $\ln 2 = \frac{1}{2}\int_2^8 \frac{1}{x}dx$

且 $\frac{1}{2}\int_2^8 \frac{1}{x}dx > \frac{1}{2}\int_2^8 \frac{1}{8}dx = \frac{1}{2}(\frac{8-2}{8}) = 0.375$

即 $0.375 < \ln 2 < \ln e$

故计算ln2时，要使误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$。

① 由 $E_{T_n}(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta)$

得 $\left|E_{T_n}(f)\right| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \quad M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} \left|f^{(2)}(x)\right|$

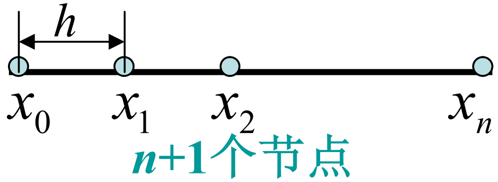
由 $f(x) = \frac{1}{2x} \quad f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \quad f''(x) = \frac{1}{x^3}$

得 $M_2 = \max\limits_{2 \le x \le 8} \left|\frac{1}{x^3}\right| = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

令 $\left|E_{T_n}(f)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{6^3}{12n^2} \times \frac{1}{8} \le \frac{1}{2} \times 10^{-5}$

得 $n \ge 670.8203933....$

故节点至少应取672个。



$$\ln 2 = \frac{1}{2} \int_2^8 \frac{1}{x} dx$$

② 由 $E_{S_n}(f)=-\dfrac{(b-a)}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)$

得 $\left|E_{S_n}(f)\right|\le\dfrac{b-a}{2880}h^4 M_4=\dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}M_4\qquad M_4=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right|$

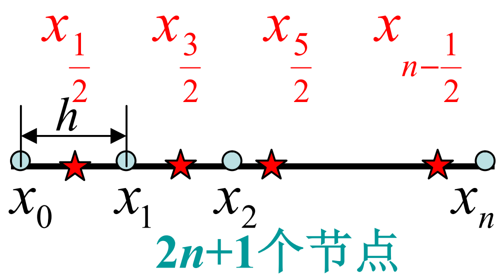
由 $f(x)=\dfrac{1}{2x}\quad f'(x)=-\dfrac{1}{2x^2}\quad f''(x)=\dfrac{1}{x^3}\quad f^{(3)}(x)=\dfrac{-3}{x^4}\quad f^{(4)}(x)=\dfrac{12}{x^5}$

得 $M_4=\max\limits_{2\le x\le 8}\left|\dfrac{12}{x^5}\right|=\left|\dfrac{12}{2^5}\right|=\dfrac{3}{8}$

令 $\left|E_{S_n}(f)\right|\le\dfrac{(b-a)^5}{2880n^4}M_4=\dfrac{6^5}{2880n^4}\times\dfrac{3}{8}\le\dfrac{1}{2}\times10^{-5}$

得 $n\ge21.21320343\cdots$ n至少应取22。

求积节点至少应取2n+1=45个 。



注：复化型求积公式非插值型求积公式。

二 区间逐次分半求积法

使用复化求积公式时，

① 若事先估计需要的节点个数，需要对被积函数的高阶导数做估计，其工作量可能很大；

② 被积函数的高阶导数无法估计时（如被积函数的解析表达式未知），节点数目无法事先估计。

③ 即使估计出应采用的节点数目，该节点数有可能偏大，从而增加了不必要的计算量。

实际中常用“事后误差估计”法。

“事后误差估计”法：在步长逐次分半的过程中，反复利用复化求积公式进行计算。并同时查看相继两次计算结果的差值是否达到要求，直到所求得的积分值满足精度要求为止。

用 $T_n(f), S_n(f), C_n(f)$ 和 $T_{2n}(f), S_{2n}(f), C_{2n}(f)$ 分别表示[a,b] n等份和2n等份时复化梯形求积公式、复化Simpson求积公式、复化Cotes求积公式的计算结果。

由**复化梯形公式**，有

$$I(f)=T_n(f)-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta_1) \qquad I(f)=T_{2n}(f)-\frac{b-a}{12}(\frac{h}{2})^2 f''(\eta_2)$$

假定$f''(x)$在$[a,b]$上变化不大，即 $f''(\eta_1)\approx f''(\eta_2)$

则 $$\frac{I(f)-T_n(f)}{\frac{-(b-a)}{12}h^2}\approx\frac{I(f)-T_{2n}(f)}{\frac{-(b-a)}{12}(\frac{h}{2})^2}$$ 即 $$\frac{I(f)-T_n(f)}{I(f)-T_{2n}(f)}\approx 4$$

上式可改写为 $$4T_{2n}(f)-T_n(f)\approx 3I(f)$$

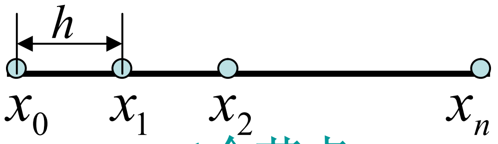
即 $$I(f)\approx T_{2n}(f)+\frac{1}{3}(T_{2n}(f)-T_n(f))$$

计算时只需检验$\left|T_{2n}(f)-T_n(f)\right|<\varepsilon$是否满足?若不满足，则再把区间分半进行计算，直到满足要求为止。

步长折半的复化梯形公式 (T_{2n}与T_n的关系)

目的：利用前一次计算结果以减少重复计算函数值的工作量。

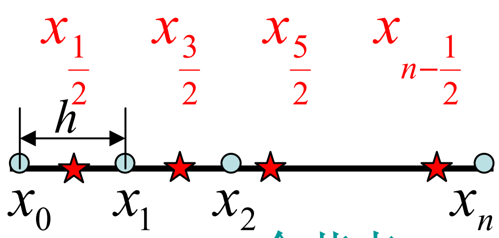
$$T_n(f)=\frac{h}{2}\Big[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)\Big]\qquad h=\frac{b-a}{n}$$



***n*+1个节点**

$$T_{2n}(f)=\frac{h'}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{2n-1}f(x_i')+f(b)\right)\qquad h'=\frac{h}{2}$$

$$\{x_i'\}_{i=1}^{2n-1}:\ \{x_{\frac{1}{2}},x_1,x_{\frac{3}{2}},x_2,\cdots,x_{n-1},x_{n-\frac{1}{2}}\}$$



2*n*+1个节点

故 $$T_{2n}(f)=\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}\boxed{\Big[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)}+2\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-\frac{1}{2}})\Big]$$

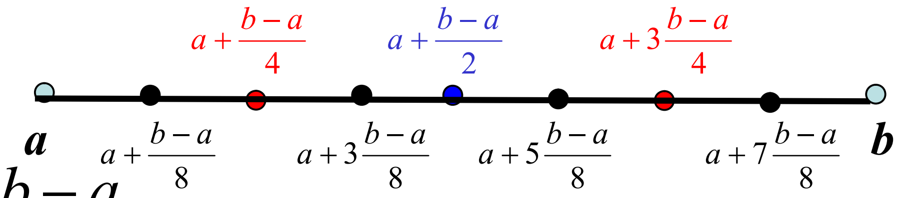
即 $$\boxed{T_{2n}(f)=\frac{1}{2}T_n(f)+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-\frac{1}{2}})}$$

$h'=\frac{h}{2}$

称为**步长折半（区间逐次分半）的复化梯形公式**。

步长折半复化梯形公式的实施：

$$T_1(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$



$$T_2(f)=\frac{1}{2}T_1(f)+\frac{b-a}{2}f(a+\frac{b-a}{2})$$

$$T_4(f)=\frac{1}{2}T_2(f)+\frac{b-a}{4}\left(f(a+\frac{b-a}{4})+f(a+3\frac{b-a}{4})\right)$$

$$T_8(f)=\frac{1}{2}T_4(f)$$

$$+\frac{b-a}{8}\left(f(a+\frac{b-a}{8})+f(a+3\frac{b-a}{8})+f(a+5\frac{b-a}{8})+f(a+7\frac{b-a}{8})\right)$$

$$\vdots$$

对**复化Simpson公式**，由

$$I(f)=S_n(f)-\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta_1) \quad I(f)=S_{2n}(f)-\frac{b-a}{2880}(\frac{h}{2})^4 f^{(4)}(\eta_2)$$

假定$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上变化不大，则 $\frac{I(f)-S_n(f)}{I(f)-S_{2n}(f)}\approx 2^4=4^2$

即 $I(f)\approx S_{2n}(f)+\frac{1}{15}(S_{2n}(f)-S_n(f))=S_{2n}(f)+\frac{1}{4^2-1}(S_{2n}(f)-S_n(f))$

对**复化Cotes公式**，由

$$I(f)=C_n(f)-\frac{2(b-a)}{945}(\frac{h}{4})^6 f^{(6)}(\eta_1) \quad I(f)=C_{2n}(f)-\frac{2(b-a)}{945}(\frac{h}{8})^6 f^{(6)}(\eta_2)$$

假定$f^{(6)}(x)$在$[a,b]$上变化不大，则有 $\frac{I(f)-C_n(f)}{I(f)-C_{2n}(f)}\approx 2^6=4^3$

即 $I(f)\approx C_{2n}(f)+\frac{1}{63}(C_{2n}(f)-C_n(f))=C_{2n}(f)+\frac{1}{4^3-1}(C_{2n}(f)-C_n(f))$

§5 Romberg求积算法

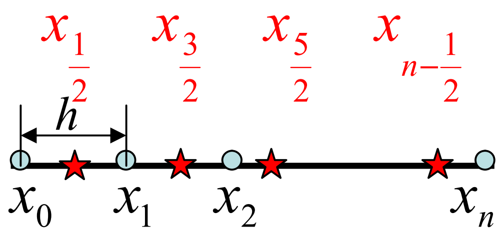
一 用低精度公式构造高精度公式

对于步长折半的逐步求积过程，可以运用 $T_{2n}(f)-T_n(f)$ 对 $T_{2n}(f)$ 进行校正，这样能够得到更好的积分近似值。

实际有 $T_{2n}(f)+\frac{1}{3}(T_{2n}(f)-T_n(f)) = \frac{4}{3}T_{2n}(f)-\frac{1}{3}T_n(f) = S_n(f)$

证明： 记 $h=x_{i+1}-x_i$，则

$$S_n(f)=\frac{h}{6}[f(x_0)+4f(x_{\frac{1}{2}})+2f(x_1)+4f(x_{\frac{3}{2}})+2f(x_2)$$
$$+\cdots+2f(x_{n-1})+4f(x_{n-1+\frac{1}{2}})+f(x_n)]$$



2n+1个节点

$$I(f)\approx T_{2n}(f)+\frac{1}{3}(T_{2n}(f)-T_n(f))$$

$$S_n(f)=\frac{h}{6}[2f(x_0)+4f(x_{\frac{1}{2}})+4f(x_1)+\cdots+4f(x_{n-1})+4f(x_{n-\frac{1}{2}})+2f(x_n)]$$

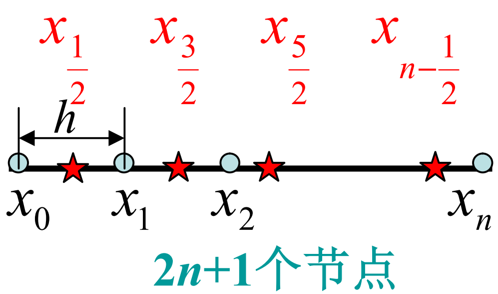
$$-\frac{h}{6}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

设 $\{x_i'\}_{i=1}^{2n-1}:\{x_{\frac{1}{2}},x_1,x_{\frac{3}{2}},x_2,\cdots,x_{n-1},x_{n-\frac{1}{2}}\}$

$$S_n(f)=\frac{2h}{6}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2n-1}f(x_i')]-\frac{h}{6}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)]$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}(\frac{h}{2})[f(a)+2\sum_{i=1}^{2n-1}f(x_i')+f(b)]-\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)]$$

$$=\frac{4}{3}T_{2n}(f)-\frac{1}{3}T_n(f)$$



即 $$\boxed{S_n(f)=\frac{4}{3}T_{2n}(f)-\frac{1}{3}T_n(f)} \qquad （1）$$

或 $$S_n(f)=\frac{4}{4-1}T_{2n}(f)-\frac{1}{4-1}T_n(f)$$

$$S_n(f)=\frac{h}{6}[f(x_0)+4f(x_{\frac{1}{2}})+2f(x_1)+4f(x_{\frac{3}{2}})+\cdots+2f(x_{n-1})+4f(x_{n-1+\frac{1}{2}})+f(x_n)]$$

类似可以证明：

$$C_n(f)=\frac{16}{15}S_{2n}(f)-\frac{1}{15}S_n(f) \qquad (2)$$

或 $$C_n(f)=\frac{4^2}{4^2-1}S_{2n}(f)-\frac{1}{4^2-1}S_n(f)$$

$$R_n(f)=\frac{64}{63}C_{2n}(f)-\frac{1}{63}C_n(f) \qquad (3)$$

或 $$R_n(f)=\frac{4^3}{4^3-1}C_{2n}(f)-\frac{1}{4^3-1}C_n(f)$$

这个公式称为**Romberg求积公式**。

序列$\{T_n(f)\}$，$\{S_n(f)\}$，$\{C_n(f)\}$和$\{R_n(f)\}$分别称为**梯形序列，Simpson序列，Cotes序列和Romberg序列**。

利用公式(1)、(2)、(3)构成计算积分的数值算法称为**Romberg求积算法**。

公式(1)、(2)、(3)表明：对复化梯形公式、复化Simpson公式、复化Cotes公式进行线性组合，得到了复化Simpson公式、复化Cotes公式、复化Romberg公式的计算值，从而分别把误差从$O(h^2)$提高到$O(h^4)$、把误差从$O(h^4)$提高到$O(h^6)$、把误差从$O(h^6)$提高到$O(h^8)$。

得到Romberg序列后还可以继续外推而得到新的求积序列。将这些计算结果进行线性组合来提高计算精度的技术称为**Richardson外推技术**。但由于在新的求积序列中，其线性组合系数分别为：

$$\frac{4^m}{4^m-1}\approx 1 \qquad \frac{1}{4^m-1}\approx 0$$

即新的求积序列与前一个序列结果相差不大，故通常外推到Romberg序列为止。

二 Romberg求积算法的实现

T数表

等分份数 $n=2^k$	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
$n=1$	T_1 **(1)**			
$n=2$	T_2 **(2)**	S_1 **(3)**		
$n=4$	T_4 **(4)**	S_2 **(5)**	C_1 **(6)**	
$n=8$	T_8 **(7)**	S_4 **(8)**	C_2 **(9)**	R_1 **(10)**
$n=16$	T_{16} **(11)**	S_8 **(12)**	C_4 **(13)**	R_2 **(14)**
$n=32$	T_{32} **(15)**	S_{16} **(16)**	C_8 **(17)**	R_4 **(18)**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

若 $|R_{2n}-R_n|<\varepsilon$ ，停止计算。

§ 6 Gauss型求积公式

给定$n+1$求积节点，通过**选取求积系数**，可使插值型求积公式的代数精度达到n或$n+1$。**若求积节点和求积系数共$2n+2$个待定参数都可以优化选取，**则含$n+1$个求积节点的求积公式有望达到$2n+1$次代数精度。

若$x_0, x_1, \cdots x_n$是$[a,b]$上的一组互异节点，且求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 具有$2n+1$次代数精度，则称该求积公式为**Gauss型求积公式**。

Gauss型求积公式是代数精度最高的求积公式。

例：n个求积节点的**插值型**求积公式，代数精度至少为<u>$n-1$</u>。n个求积节点的**高斯型**求积公式，代数精度为<u>$2(n-1)+1=2n-1$</u>。

定理 n为偶数（节点数$n+1$为奇数）时，Newton-Cotes求积公式的代数精度至少是$n+1$；
n为奇数（节点数$n+1$为偶数）时，Newton-Cotes求积公式的代数精度至少是n。

总结

1. 复化求积算法

- 复化梯形公式、复化Simpson公式及其余项
- 运用复化公式的余项估计求积节点的个数（或求积节点间距离）
- 基于误差事后估计法计算积分

2. 插值型求积公式

- 低阶Newton-Cotes公式及其截断误差
- 插值型公式及低阶Newton-Cotes公式代数精确度的结论
- 求积公式代数精度的判别
- 求积公式的收敛性与稳定性

3. Romberg求积算法

- 步长折半的复化梯形公式
- 用低精度公式构造高精度公式
- 用Romberg求积算法计算积分

4. 数值微分

- 用插值法及Taylor级数展开法推导或证明数值微分公式
- 基于常用数值微分公式的计算

5*. Gauss型求积公式

- Gauss型求积公式基本概念