概率论与数理统计

下 回 停

第二节　多维随机变量及其分布(1)

- 一、二维随机变量及其分布
- 二、二维离散型随机变量
- 三、二维连续型随机变量
- 四、常用的分布

一、二维随机变量及其分布

1. 问题的提出

在实际问题中，可能遇到多个随机变量的情形，如:

1) 射击问题中,对于弹着点需要横坐标和纵坐标描述;

2) 人的基本特征需要考虑性别,身高,体重等;

3) 评价产品的质量,可能有多个评价指标如尺寸,外形等.

1. n维随机向量

定义2.3 由n个随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$构成的向量

$$X=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

称为n 维随机变量,也称为n 维随机向量.

2. n维随机向量的分布函数

表示$\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega : X_i(\omega) \le x_i\}$

定义 称 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

为随机向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数或联合分布函数.

特别　当n=2时，二维分布函数

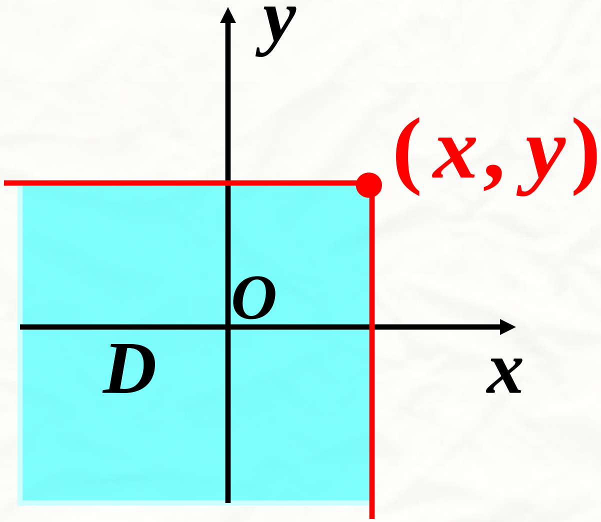
$$F(x, y)=P\{X \le x, Y \le y\}$$

表示随机点 (X, Y) 落在平面区域

$$D=(-\infty, x]\times(-\infty, y]$$

$$=\{(u,v) \mid u \le x, v \le y\}$$

内的概率.



3. 二维分布函数$F(x, y)$的性质

(1) $0 \le F(x,y) \le 1; (x,y) \in R^2$

(2) $F(x,y)$分别对x, y为单调非降函数，即

当$x_2 \ge x_1$时，$F(x_2, y) \ge F(x_1, y)$;

当$y_2 \ge y_1$时，$F(x, y_2) \ge F(x, y_1)$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = F(-\infty, y) = 0;$

$\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = F(x,-\infty) = 0;$

$\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y) = F(-\infty,-\infty) = 0;$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = F(+\infty,+\infty) = 1;$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x,y) = F(+\infty, y) = F_Y(y);$$

$$\lim_{y\to+\infty} F(x,y) = F(x,+\infty) = F_X(x).$$

边缘分布函数，后面专门讲

(4) $F(x,y)$分别关于x,y右连续，即

$$F(x+0,y) = F(x,y),$$

$$F(x,y+0) = F(x,y);$$

目 上 下 回 停 续

(5) 若 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$,则

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

$$= P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} \ge 0.$$

证明 这里仅给出性质(5)的证明

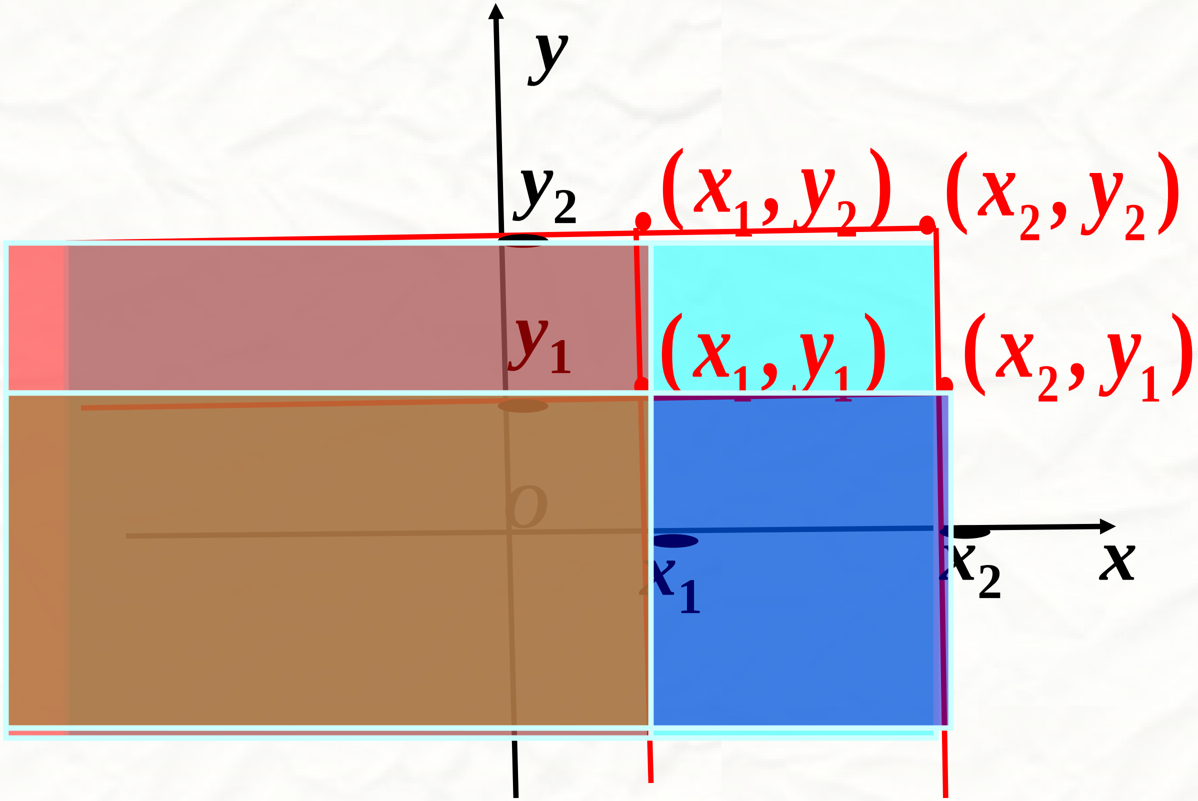
$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= P\{X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} - P\{X \le x_1, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= P\{X \le x_2, Y \le y_2\} - P\{X \le x_2, Y \le y_1\}$$

$$- P\{X \le x_1, Y \le y_2\} + P\{X \le x_1, Y \le y_1\} \ge 0,$$

故 $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \ge 0.$



$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$= P\{X \le x_2, Y \le y_2\} - P\{X \le x_1, Y \le y_2\}$$

$$- P\{X \le x_2, Y \le y_1\} + P\{X \le x_1, Y \le y_1\} \ge 0,$$

二、二维离散型随机变量

1. 二维离散型随机变量

定义 若二维随机变量 (X,Y) 的分量 X, Y 均为离散型随机变量，则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

2. 分布律

若(X,Y)的所有可能取值为

$$(x_i, y_j) \quad (i, j = 1,2,\cdots)$$

目 上 下 回 停 续

则称 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad (i, j = 1,2,\cdots)$

为(X,Y)的分布律，可记为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

其中

p_{ij}满足：

(1) $p_{ij} \geq 0,$

$(i, j = 1,2,\cdots);$

(2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

目 上 下 回 停 续

例1 箱中装两个白球, 三个黑球; 分别进行有放回的摸球和无放回的摸球,定义如下随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{第1次摸白球},\\ 0, & \text{第1次摸黑球}.\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{第2次摸白球},\\ 0, & \text{第2次摸黑球}.\end{cases}$$

则(X,Y) 的分布律可以写为

有放回

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$

无放回

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$
1	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$

三、二维连续型随机变量

1. 二维连续型随机变量

定义2.5 对于二维随机变量(X,Y),若存在非负可积函数$p(x,y)$,使对任意实数x,y,二元分布函数$F(x,y)$可表示为

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称(X,Y)为二维连续型随机变量,

$p(x,y)$称为联合密度函数.

2.性质

(1) $p(x,y)\geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(+\infty,+\infty)=1$;

* (3) 设G是xOy平面上的一个区域,点(X,Y)落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(4)若$p(x,y)$在(x,y)连续,则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=p(x,y)$.

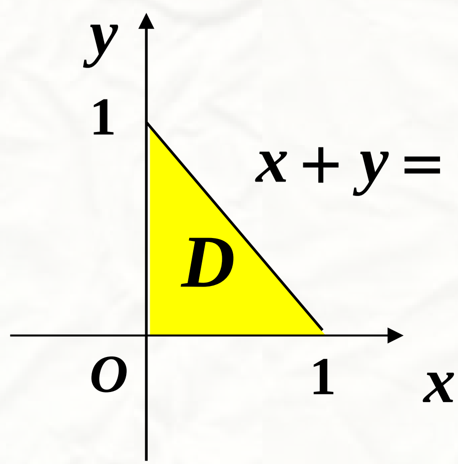
目 上 下 回 停 续

例2 设(X,Y)的分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求$F(x,y)$;

(2) 求(X,Y)落在区域D内的概率,区域D如图所示.



解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

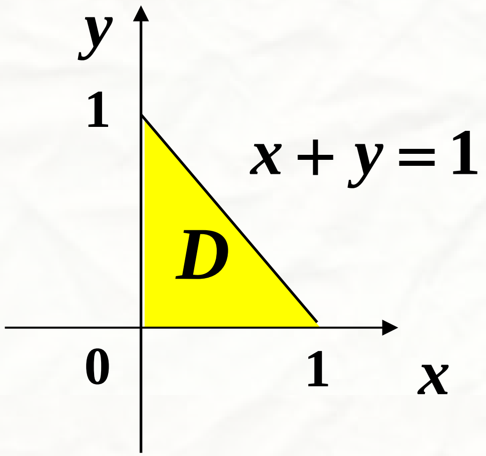
$$=\begin{cases}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}\mathrm{e}^{-(u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y.$$



$$=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{x-1})\,\mathrm{d}x=\int_0^1(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-1})\,\mathrm{d}x$$

$$=1-2\mathrm{e}^{-1}\approx 0.2642$$

例2-1 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), & 0<x<2, 2<y<4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求:(1)常数k;(2)$P\{X<1,Y<3\}$;

(3)$P\{X+Y\leq 4\}$.

解 (1)$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_2^4 \mathrm{d}y\int_0^2 k(6-x-y)\mathrm{d}x = k\int_2^4 (10-2y)\mathrm{d}y = 8k,$$

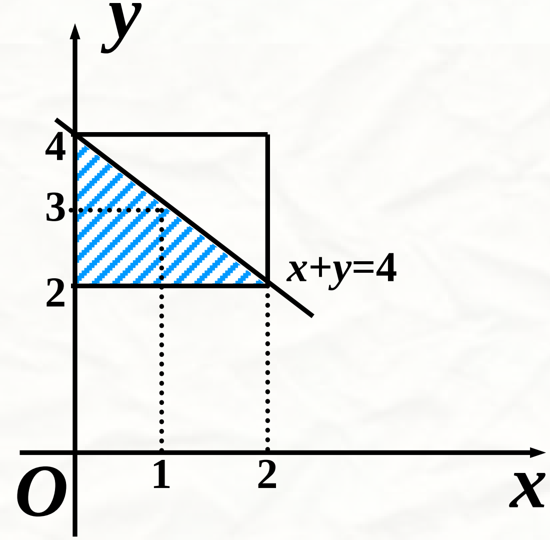
故 $k=1/8$.

目 上 下 回 停 续

$$(2)\ P\{X<1, Y<3\} = \int_2^3 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{1}{8}(6-x-y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{8}\left(\frac{11}{2}-y\right)\mathrm{d}y = \frac{3}{8}.$$

$$(3)\ P\{X+Y\le 4\} = \frac{1}{8}\int_0^2 \mathrm{d}x \int_2^{4-x} (6-x-y)\,\mathrm{d}y$$



$$= \frac{1}{8}\int_0^2 (6-4x+x^2/2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}.$$

四、常用分布

1.均匀分布

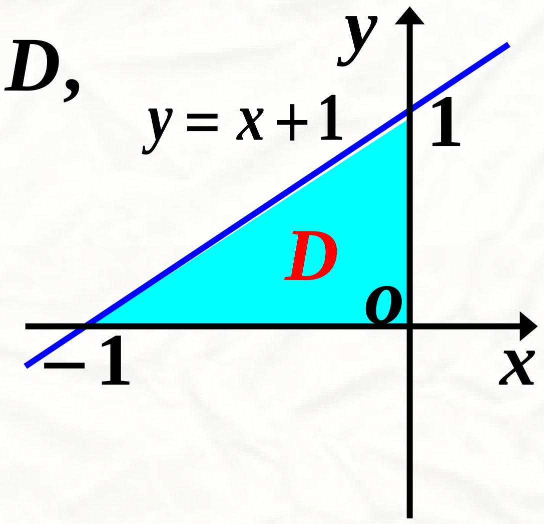
定义 设D是平面上的有界区域, 其面积为S, 若二维随机变量(X, Y)具有密度函数

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称(X, Y)在D上服从均匀分布.

目 上 下 回 停 续

例3 已知随机变量 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布，试求 (X, Y) 的密度函数及分布函数，其中 D 为 x 轴，y 轴及直线 $y = x+1$ 所围成的三角形区域．



解 由 $p(x,y)=\begin{cases}1/S, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

得 $p(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

或 $p(u,v)=\begin{cases}2, & (u,v)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

(1) 当 $x<-1$ 或 $y<0$ 时，

$$p(u,v)=0,\ (u,v)\in D^*,\ \text{其中}$$

$$D^*=\{(u,v)\,|\,-\infty<u\le x,-\infty<v\le y\}$$

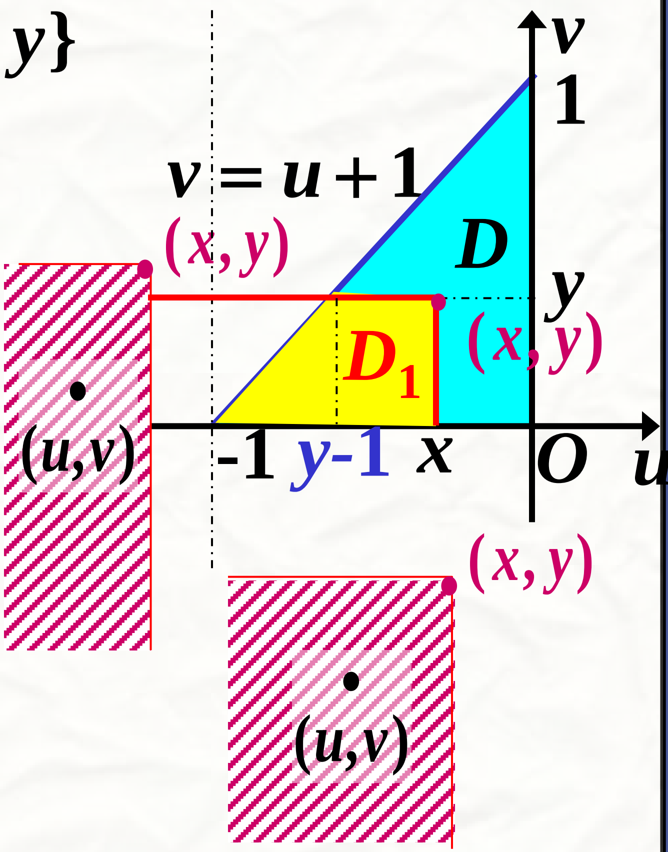
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}0\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v=0;$$

(2) 当 $-1\le x<0, 0\le y<x+1$ 时，

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\iint_{D_1}p(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

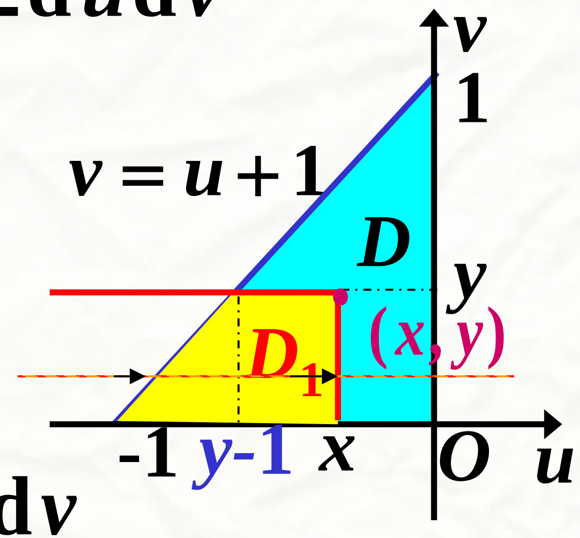


目 上 下 回 停 续

(2) 当 $-1 \le x < 0, 0 \le y < x+1$ 时,

$$F(x,y) = \iint\limits_{D_1} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint\limits_{D_1} 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= 2\boxed{\iint\limits_{D_1} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$ 梯形面积

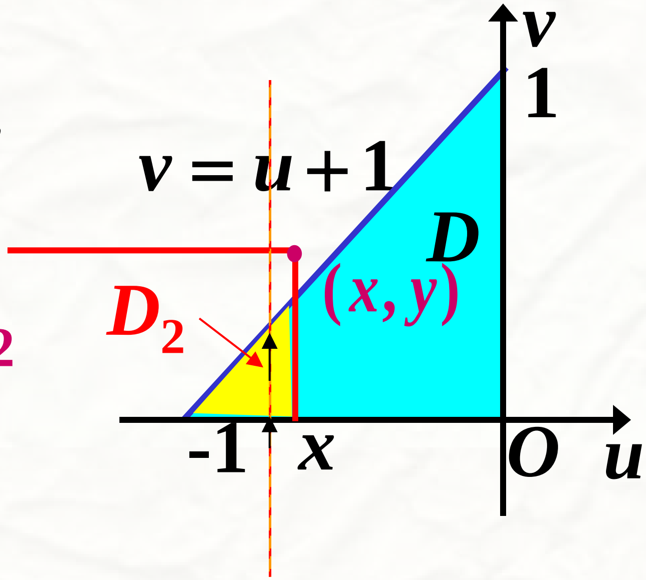


或

$$= 2\int_0^y \mathrm{d}v \int_{v-1}^{x} \mathrm{d}u = 2\int_0^y (x - v + 1)\,\mathrm{d}v$$

$$= (2x - y + 2)y;$$

(3) 当 $-1 \le x < 0, y \ge x+1$ 时,



$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \iint_{D_2} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \overset{\text{或}}{=} 2\cdot\frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$= \int_{-1}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v = (x+1)^2;$$

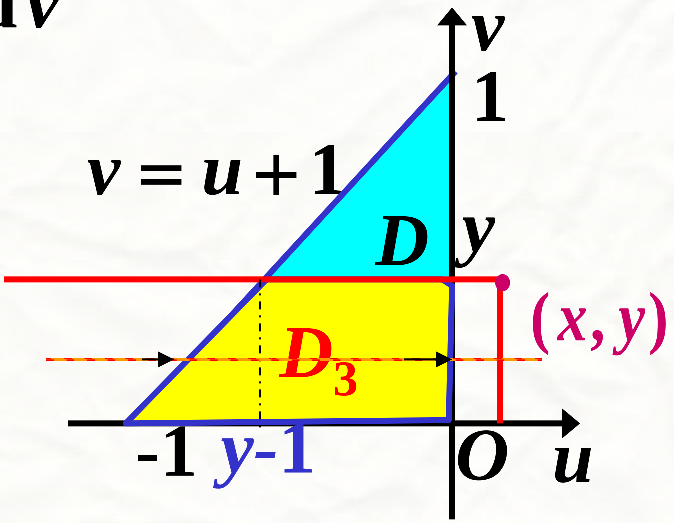
(4) 当 $x \ge 0, 0 \le y < 1$ 时,

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{D_3} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_{-1}^{y-1}\mathrm{d}u\int_{0}^{u+1} 2\,\mathrm{d}v + \int_{y-1}^{0}\mathrm{d}u\int_{0}^{y} 2\,\mathrm{d}v$$

或
$$= 2\int_{0}^{y}\mathrm{d}v\int_{v-1}^{0}\mathrm{d}u$$

$$= (2-y)y;$$



(5) 当 $x \geq 0, y \geq 1$ 时,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint_{D} 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=1.$$

所以 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<-1, \text{或 } y<0, \\ (2x-y+2)y, & -1\leq x<0, 0\leq y<x+1, \\ (x+1)^2, & -1\leq x<0, y\geq x+1, \\ (2-y)y, & x\geq 0, 0\leq y<1, \\ 1, & x\geq 0, y\geq 1. \end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

2. 二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有密度函数

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

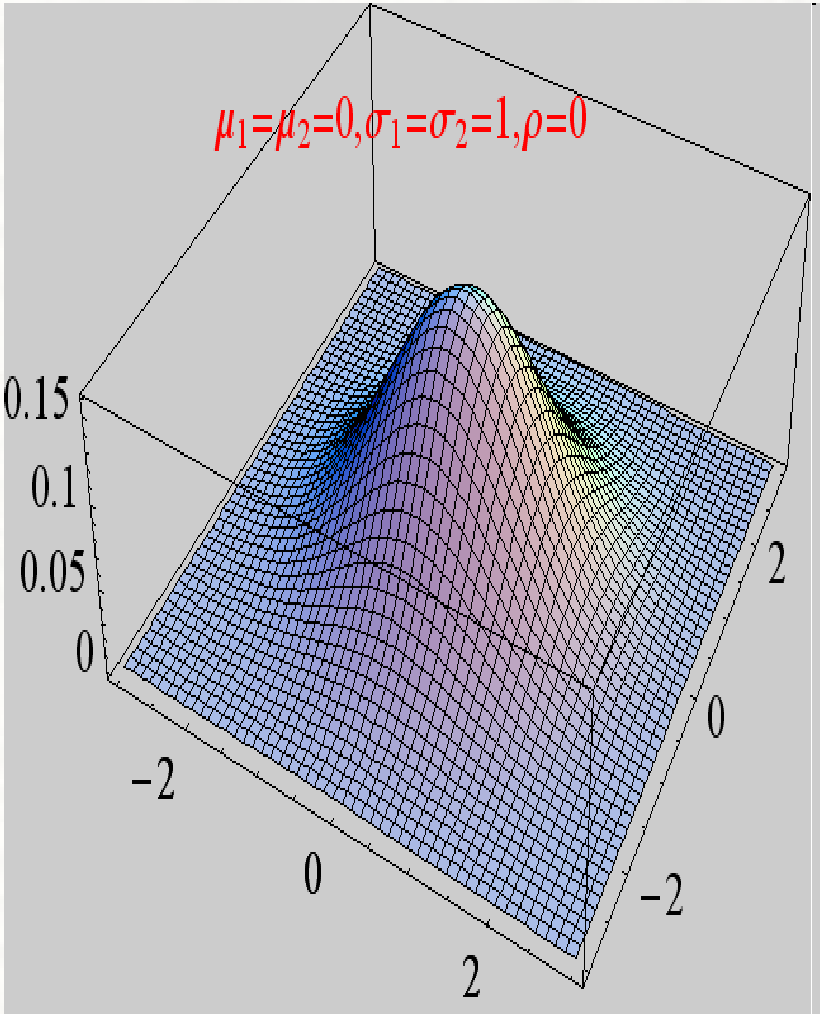
$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

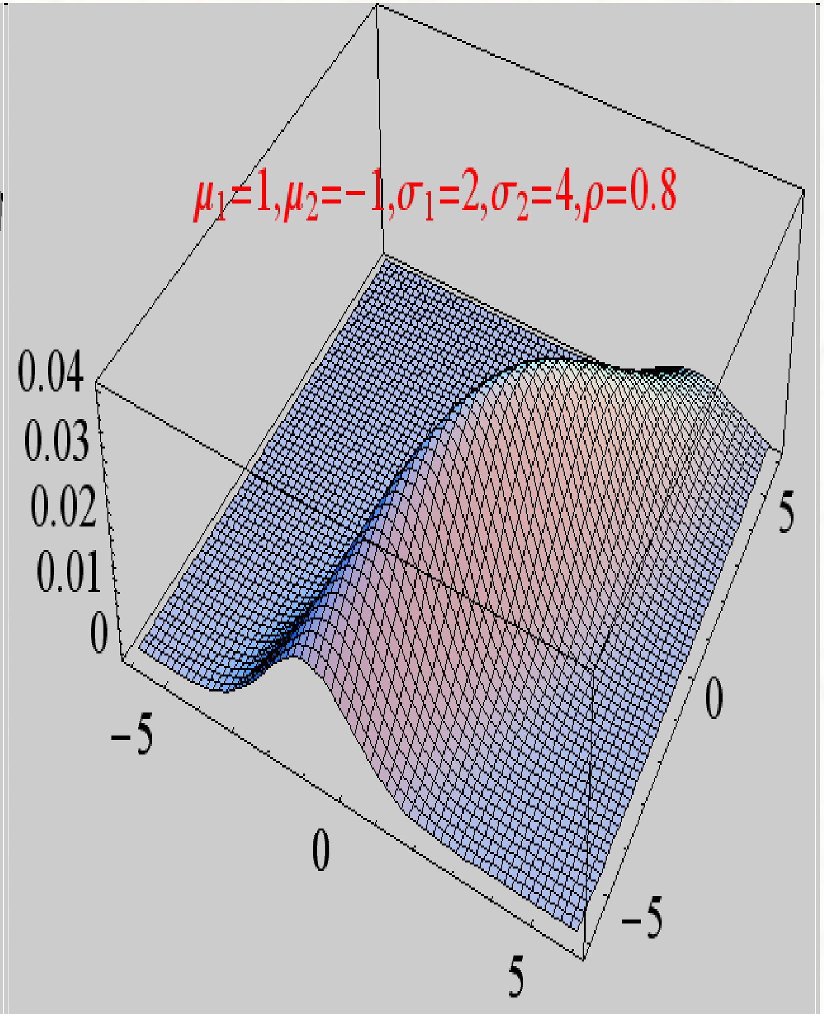
其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

二维正态分布的图形


$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
−2
0
2
2
0
−2


$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
−5
0
5
5
0
−5

内容小结

1. 二维随机变量的分布函数

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}.$$

2. 二维离散型随机变量的分布律及分布函数

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots;$$

$$F(x,y)=\sum_{\substack{x_i\le x\\ y_j\le y}} p_{ij}.$$

3. 二维连续型随机变量的分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} p(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

思考题

$$令F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\geq -1,\\ 0, & x+y<-1.\end{cases}$$

请判断 $F(x,y)$ 是否为某个二维随机向量的分布函数.

不是, 虽然 $F(x,y)$ 满足性质(1)–(4), 但不满足性质(5),

因为 $F(1,1)-F(1,-1)-F(-1,1)+F(-1,-1)$

$$=1-1-1+0=-1<0.$$


再见

备用题

例1-1 将一枚均匀的硬币掷 3次，令：

X ={3次抛掷中正面出现的次数};

Y ={3次抛掷中正面出现次数与反面出现次数之差的绝对值}.

试求(X,Y)的联合分布律.

解 X的可能取值为 0，1，2，3；

Y的可能取值为1，3 .

目 上 下 回 停 续

$$P\{X=0, \quad Y=1\}=0; \quad P\{X=0, \quad Y=3\}=\frac{1}{8};$$

$$P\{X=1, \quad Y=1\}=\frac{3}{8}; \quad P\{X=1, \quad Y=3\}=0;$$

$$P\{X=2, \quad Y=1\}=\frac{3}{8}; \quad P\{X=2, \quad Y=3\}=0;$$

$$P\{X=3, \quad Y=1\}=0; \quad P\{X=3, \quad Y=3\}=\frac{1}{8}.$$

由此得随机变量(X,Y)的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

例1-2 设随机变量Y服从参数为$\lambda=1$的指数分布，定义随机变量X_k如下：

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\le k,\\ 1, & Y>k.\end{cases}\qquad k=1,2,$$

求X_1和X_2的联合分布列.

解 (X_1,X_2)的联合分布列共有如下4种情况：

$$P(X_1=0,X_2=0)=P(Y\le 1,Y\le 2)=P(Y\le 1)$$

$$=1-\mathrm{e}^{-1}=0.63212,$$

目 上 下 回 停 续

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(Y \le 1, Y > 2) = 0,$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(Y > 1, Y \le 2) = P(1 \le Y \le 2)$$

$$= \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} = 0.23254,$$

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(Y > 1, Y > 2) = P(Y > 2)$$

$$= 1 - P(Y \le 2) = \mathrm{e}^{-2} = 0.13534.$$

所以(X_1, X_2)的联合分布列为

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	0.63212	0.00000
1	0.23254	0.13534

目 上 下 回 停 续

例1-3 设随机事件A,B满足

$$P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=P(A|B)=\frac{1}{2}.$$

令$X=\begin{cases}1, & 若A发生,\\ 0, & 若A不发生.\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & 若B发生,\\ 0, & 若B不发生.\end{cases}$

求(X,Y)的分布列.

解 $P(A)=\dfrac{1}{4},P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{2},$

所以$P(AB)=\dfrac{1}{8}$, 又 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{1}{2},$

所以$P(B)=\frac{1}{4}$.从而

$$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}.$$

$$P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

$$P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

$$P(X=1,Y=1)=P(AB)=\frac{1}{8}.$$

所以(X,Y)的联合分布列为

所以(X,Y)的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

目 上 下 回 停 续

例2-1 设二维随机变量(X,Y)的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} c(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2<R^2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(1) 求常数c;

(2) 求(X,Y)落入圆$x^2+y^2\le r^2\ (0<r<R)$内的概率.

解 (1)由密度函数的性质，得

目 上 下 回 停 续

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2<R^2}c\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作极坐标变换 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，得

$$1=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R c(R-\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{1}{3}\pi R^3\cdot c$$

所以，$c=\dfrac{3}{\pi R^3}$.

$$P\left\{(X,Y)\in\left\{x^2+y^2\le r^2\right\}\right\}$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2<r^2} \frac{3}{\pi R^3}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

作极坐标变换 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$，得

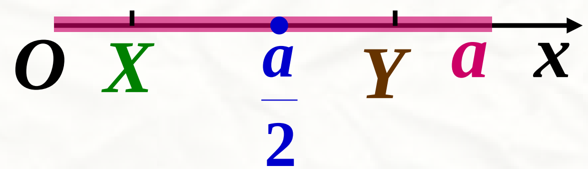
$$P\left\{(X,Y)\in\left\{x^2+y^2\le r^2\right\}\right\}$$

$$=\frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r(R-\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{3r^2}{R^2}\left(1-\frac{2r}{3R}\right)$$

例2-2 在长为a的线段的中点的两边随机地各取一点，求两点间的距离小于$a/3$的概率.

解 记X为线段中点左边所取点到端点0的距离，Y为线段中点右边所取点到端点0的距离，

则$X \sim U(0,a/2), Y \sim U(a/2,a)$, 且$X$与$Y$相互独立，它们的联合密度函数为



$$p(x,y)=\begin{cases} \dfrac{4}{a^2}, & 0<x<\dfrac{a}{2}, \dfrac{a}{2}<y<a, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

而$p(x,y)$的非零区域与$\{|x-y|<a/3\}$的交集为

图2.2的阴影部分，因此，所求概率为

$$P\left(|Y-X|<\frac{a}{3}\right)$$

$$=\int_{\frac{a}{6}}^{\frac{a}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{3}+x}\frac{4}{a^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{9}.$$

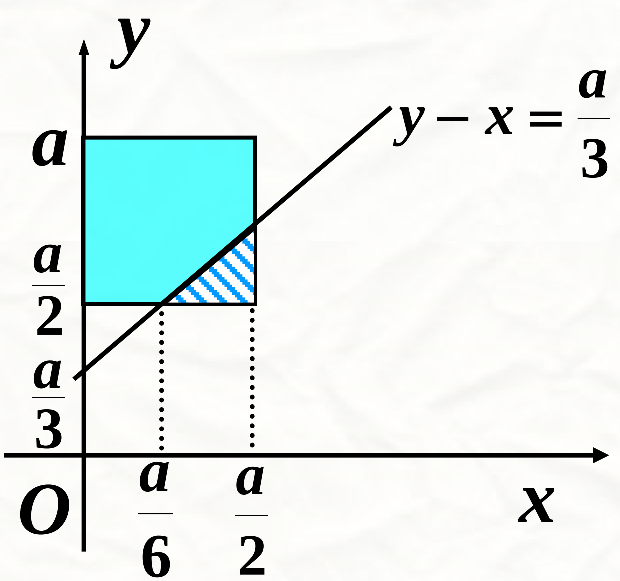


图2-2

目 上 下 回 停 续

例2-3 设随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases} c-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & x\ge 0, y\ge 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求:(1)常数c;(2)概率密度函数$p(x,y)$.

解 (1)由$1=F(+\infty,+\infty)=c$

得$c=1$.

$$(2)\ p(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3^{-x}\ln 3-3^{-x-y}\ln 3)$$

目 上 下 回 停 续

$$= 3^{-x-y}(\ln 3)^2, \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

故 $$p(x,y) = \begin{cases} 3^{-x-y}(\ln 3)^2, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

例2-5 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1)确定常数k;

(2)求(X,Y)落在区域D的概率,

其中$D=\{(x,y); 0<x\le 1, 0<y\le 2\}$.

解 (1)由联合密度的性质知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$$

而$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} k\mathrm{e}^{-(3x+4y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= k\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y = \frac{k}{12} = 1,$$

所以$k = 12.$

(2)求(X,Y)落在区域D内的概率，使用公式

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_{D} p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此时$D = \{(x, y); 0 < x \le 1, 0 < y \le 2\}$

于是有

$$P\{0 < X \le 1, 0 < Y \le 2\} = 12\int_0^1 e^{-3x}dx\int_0^2 e^{-4y}dy$$

$$= \left.(-e^{-3x})\right|_0^1 \cdot \left.(-e^{-4y})\right|_0^2$$

$$= (1-e^{-3})(1-e^{-8})$$

$$\approx 0.9502$$