定式

一、伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^* = (A_{ji})_{n\times n}$$

$$\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} \qquad \text{（}\boldsymbol{A}\text{可逆时）}$$

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E} \qquad \text{（一般情形）}$$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* = \begin{cases} n, & \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n \\ 1, & \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank} \boldsymbol{A} < n-1 \end{cases}$$

二、$A=b\,a^{\mathrm{T}}$，a和b是n维列向量且$a^{\mathrm{T}}b=d\neq 0$

1）$A^k=(b\,a^{\mathrm{T}})^k=b\,(a^{\mathrm{T}}b)^{k-1}a^{\mathrm{T}}=d^{k-1}A$

2）$\operatorname{rank} A=1 \quad (1\le \operatorname{rank} A\le \operatorname{rank} b\le 1)$

3）A的非零特征值为d，对应的特征向量为b ；

$$(Ab=(b\,a^{\mathrm{T}})b=b\,(a^{\mathrm{T}}b)=db)$$

4）0为A的n-1重特征值。

$Ax=0$的基础解系含n-1个线性无关的特征向量；或直接计算得

$$\det(A-lE)=(d-l)(-l)^{n-1}$$

5）A相似于对角矩阵 $\operatorname{diag}(d,0,\cdots,0)$

三、矩阵的秩的有关结果

设A为$m\times n$矩阵

1） $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\le m$，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\le n$；

2） **若**$A\neq \boldsymbol{O}$，**则**$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}>0$；

3） $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$；

4） $\operatorname{rank}(l\boldsymbol{A})=\begin{cases}\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, & l\neq 0\\ 0, & l=0\end{cases}$

5） $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$

6） $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\le\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\le\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$

7） **若A可逆，则** $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$；

$\operatorname{rank}(\boldsymbol{CA})=\operatorname{rank}\boldsymbol{C}$；

8） $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$

9） **设**A**为**$m\times n$**矩阵，** $\boldsymbol{B}$**为**$n\times s$**矩阵，**
且$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$**，　则**

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B} \le n$$

10） **设**A**为**n**阶方阵，则**

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^* = \begin{cases} n, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n \\ 1, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A} < n-1 \end{cases}$$

11） $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$**的行向量组的秩**
$= \boldsymbol{A}$**的列向量组的秩**

四、向量组的有关性质

1）向量组与它的任一个极大无关组等价。

2）设向量组T_1含r个向量，向量组T_2含s个向量，且T_1可由T_2线性表示。如果T_1线性无关，则 $r \le s$ 如果 $r > s$，则T_1线性相关。

3）设向量组T_1的秩为r，向量组T_2的秩为s，若T_1可由T_2线性表示，则 $r \le s$。

4）等价的向量组有相同的秩。

五、线性方程组的有关结论

设系数矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，

$\operatorname{rank} A=r$ 右端向量 $b\neq 0$，增广矩阵 $\hat{A}=(A,b)$。

1) $Ax=b$ 有解 Û $\operatorname{rank}\hat{A}=\operatorname{rank}A$

Û b可由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$线性表示

Û 向量组$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 等价

Ü $\operatorname{rank} A=m$

Ü $m=n$时 $\det A\neq 0$

$Ax=0$ 必有解

2) $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ 有解时

(1) 解唯一 Û $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n$

($\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{0}$ 只有零解) Û $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关

Û $m = n$ 时 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$

(2) 无穷多解 Û $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} < n$

($\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{0}$ 有非零解) Û $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性相关

Û $m = n$ 时 $\det \boldsymbol{A} = 0$

(3) $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{0}$ 的解向量构成向量空间，其维数为 $n - \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$

(4) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量不构成向量空间。

① 若 h_1, h_2 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 h_1-h_2 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；

② 若 h 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，x 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $h+x$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解。

③ 若 $h_1,\cdots,h_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则

$$k_1h_1+\cdots+k_th_t \quad (k_1+\cdots+k_t=1)$$

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解。

(5) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_{n-r}x_{n-r}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$t_1,t_2,\cdots,t_{n-r}$ 任取。

(6) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=h^*+t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_{n-r}x_{n-r}$$

其中 h^* 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解，$x_1,x_2,\cdots,x_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$t_1,t_2,\cdots,t_{n-r}$ 任取。

六、初等矩阵

$\det \boldsymbol{E}(i, j) = -1$， $(\boldsymbol{E}(i, j))^{-1} = \boldsymbol{E}(i, j)$。

$\det \boldsymbol{E}(i(k)) = k \neq 0$， $(\boldsymbol{E}(i(k))^{-1} = \boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$。

$\det \boldsymbol{E}(i, j(k)) = 1$， $(\boldsymbol{E}(i, j(k))^{-1} = \boldsymbol{E}(i, j(-k))$。

若 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\mathrm{r}_i \leftrightarrow \mathrm{r}_j} \boldsymbol{B}$， 则 $\boldsymbol{E}(i, j)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$

若 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\mathrm{c}_i \leftrightarrow \mathrm{c}_j} \boldsymbol{D}$， 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i, j) = \boldsymbol{D}$

若 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\mathrm{r}_i \times k} \boldsymbol{B}$， 则 $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$

若 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\mathrm{c}_i \times k} \boldsymbol{D}$， 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i(k)) = \boldsymbol{D}$

若 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\mathrm{r}_i + k\,\mathrm{r}_j} \boldsymbol{B}$， 则 $\boldsymbol{E}(i, j(k))\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$

若 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\mathrm{c}_j + k\,\mathrm{c}_i} \boldsymbol{D}$， 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i, j(k)) = \boldsymbol{D}$。

七、A是正交矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

$$\det \boldsymbol{A} = \pm 1$$

A^{T}, A^{-1}, A^{*}, A^{k} 均为正交矩阵

当B也为正交矩阵时，AB是正交矩阵。

当 $k=\pm 1$ 时，kA也是正交矩阵。

A的列(或行)向量是两两正交的单位向量。

八、特征值与特征向量

1．已知x是A的特征向量，列出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = l\boldsymbol{x}$

2．已知 l_0是A的特征值，列出 $\det(\boldsymbol{A} - l_0\boldsymbol{E}) = 0$。

3．设 $l_1, l_2, \cdots, l_n$是 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值，则

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$l_1 l_2 \cdots l_n = \det \boldsymbol{A}$$

4．与A有关矩阵的特征值和特征向量

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$l\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$
特征值	l	$l l$	l^k	$f(l)$	$\frac{1}{l}$	$\frac{\det \boldsymbol{A}}{l}$	l	l
特征向量	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x}$		$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$

5．不同特征值对应的特征向量线性无关。

6． A的各行(列)元素之和为a 。

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\quad \text{(或 } A^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\text{)}$$

7．向量 a 是齐次线性方程组 $Ax=\mathbf{0}$的解向量，则 a 是A对应特征值 0 的特征向量。

8. 已知 $f(A)=O$, 则A的特征值满足 $f(l)=0$, 求A的可能特征值。

九、A是实对称矩阵

$$A^{\mathrm{T}} = A$$

1．特征值均为实数。

2．不同的特征值对应的特征向量正交。

3．必可相似于对角矩阵。

4．存在正交矩阵Q ,使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{pmatrix} l_1 & & & \\ & l_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & l_n \end{pmatrix}$$

十、A是正定矩阵

$A^{\mathrm{T}} = A$（实对称矩阵）

1．对任意 $x \neq \mathbf{0}$ 都有 $x^{\mathrm{T}} A x > 0$。

2．特征值均大于零。

3．顺序主子式均大于零。

4．存在正交矩阵Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{pmatrix} l_1 & & & \\ & l_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & l_n \end{pmatrix}, \quad l_i > 0$$

十一、已知 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

①用待定法求逆矩阵 A^{-1} 或 $(A+E)^{-1}$ 等;

②求A的部分特征值：A的特征值满足 $f(l)=0$。

十二、$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$

① $\boldsymbol{B}$的列向量是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量。

② $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\le n$（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶方阵）

十三、$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价 $(\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$：$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B})$

$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$

特例：$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{E}_n$等价

$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$， $\det\boldsymbol{A}\neq 0$

十四、A与B相似 $(A \sim B：P^{-1}AP = B)$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$$

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B}$$

$$\det(\boldsymbol{A} - l\boldsymbol{E}) = \det(\boldsymbol{B} - l\boldsymbol{E})$$

A与B有相同的特征值

十五、A与B合同 $(A \simeq B：P^{\mathrm{T}}AP = B)$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$$

当A对称时B也对称

实对称矩阵A与B的正负惯性指数相同

十六、等价、相似与合同的关系

1. 一般方阵

相似 Þ 等价

合同 Þ 等价

特征值相同且可对角化 Þ 相似

2. 实对称矩阵

特征值相同 Þ 相似且合同

特征值不同但正、负及零特征值个数相同

Þ 不相似但合同

其它情形 Þ 不相似不合同

十七、有关概念的关系

设 A 为 n 阶方阵

A非奇异 $(\det A \neq 0)$

Û A可逆$(AB = BA = E)$

Û A满秩$(\mathrm{rank}A = n)$

Û A能表示为一些初等矩阵的乘积

Û A的列(行)向量组线性无关

Û $Ax = 0$ 只有零解

Û $Ax = b$ 有唯一解

Û A无零特征值

※