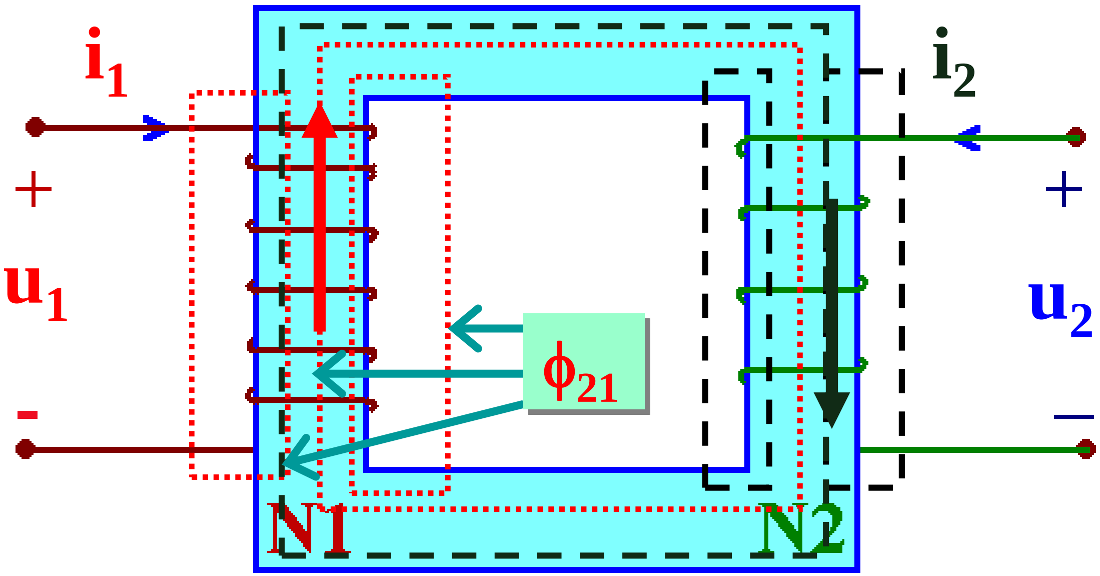
# 第七章 耦合电感与理想变压器

## 7-1 耦合电感

### 一、互感及互感电压

(空芯耦合线圈)




$$u_{11}=\frac{d\Psi_{11}}{dt}=L_1\frac{di_1}{dt}$$

$$u_{21}=\frac{d\Psi_{21}}{dt}=M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

$M_{21}$: 互感系数

$$u_{22}=\frac{d\Psi_{22}}{dt}=L_2\frac{di_2}{dt}$$

$$u_{12}=\frac{d\Psi_{12}}{dt}=M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$M_{12}$: 互感系数

$M_{12}=M_{21}=M$

$N_1$: $i_1 \rightarrow \phi_{11} \rightarrow \Psi_{11}=L_1 i_1$

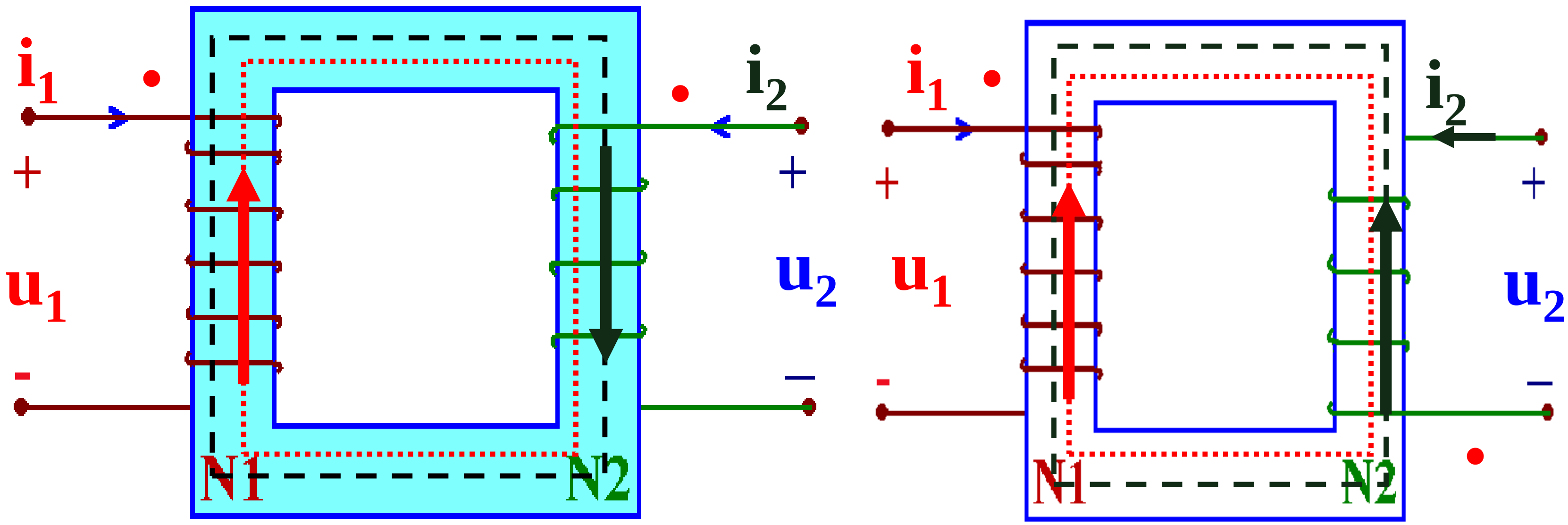
$\begin{cases}\phi_{21} \rightarrow \Psi_{21}=M_{21}i_1 \\ \phi_{s1}\end{cases}$

$N_2$: $i_2 \rightarrow \phi_{22} \rightarrow \Psi_{22}=L_2 i_2$

$\begin{cases}\phi_{12} \rightarrow \Psi_{12}=M_{12}i_2 \\ \phi_{s2}\end{cases}$

思考：电压$u_1$由几部分构成？$u_2$?

## 二、同名端：



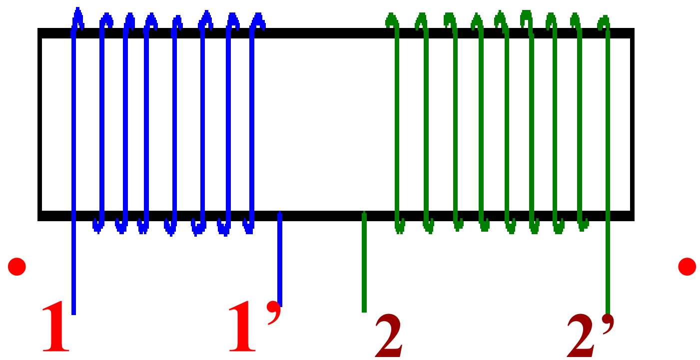

- 同名端规定：当电流$i_1$、$i_2$分别从两个线圈对应的端纽流入时，磁通相互加强，则这两个端纽称作为同名端。

同名端意义：若电流$i_1$由$N_1$的“•”端流入，则在$N_2$中产生的

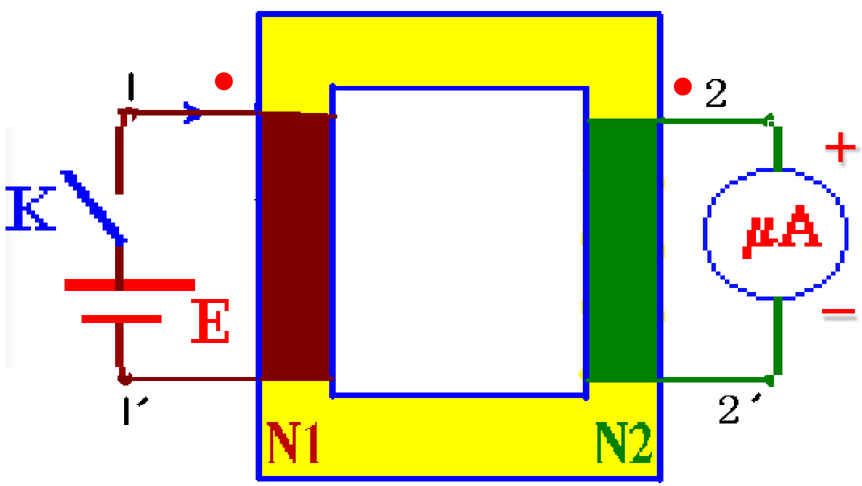
互感电压$u_{21}$的正极在$N_2$的“•”端。

- 同名端判断:

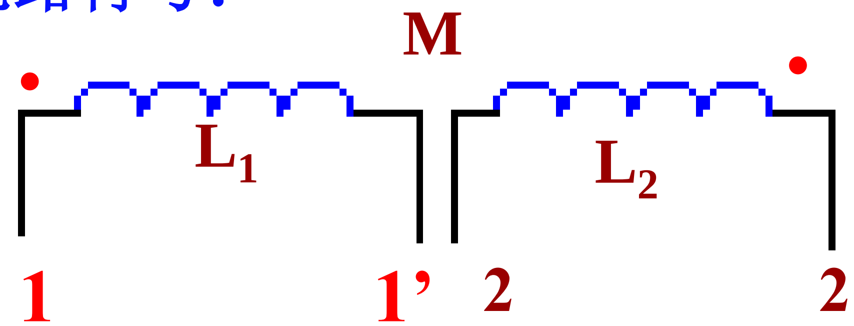
1、已知线圈绕向判断

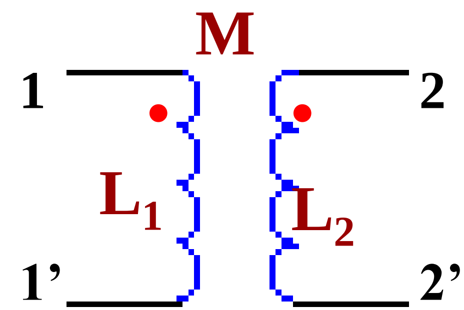



2、未知线圈绕向判断




三、耦合电感（互感）的电路符号:



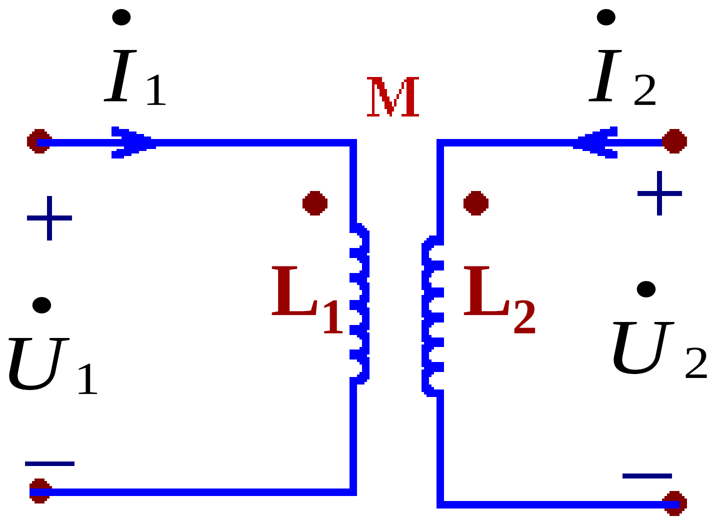

四、耦合系数:

表示两个线圈磁耦合的紧密程度。

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

# 7-2 耦合电感的伏安关系

## 一、时域关系




$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

## 二、频域关系

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

# 7-3 耦合电感的连接及等效变换

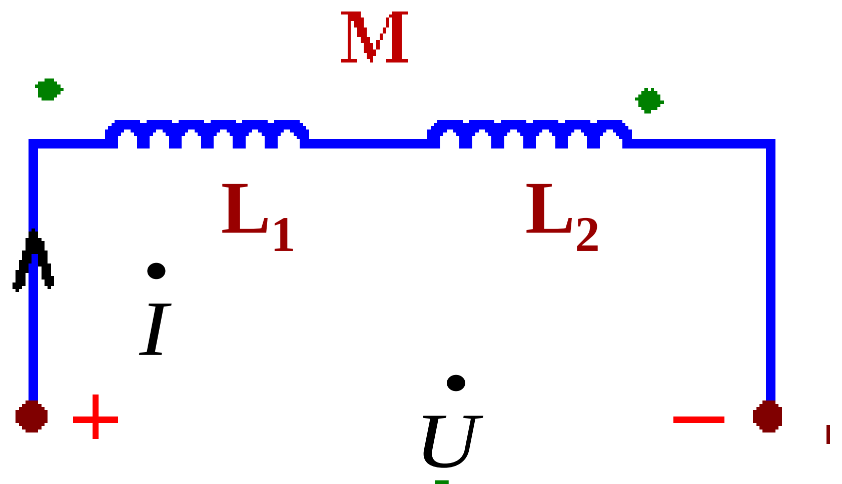
## 一、串联

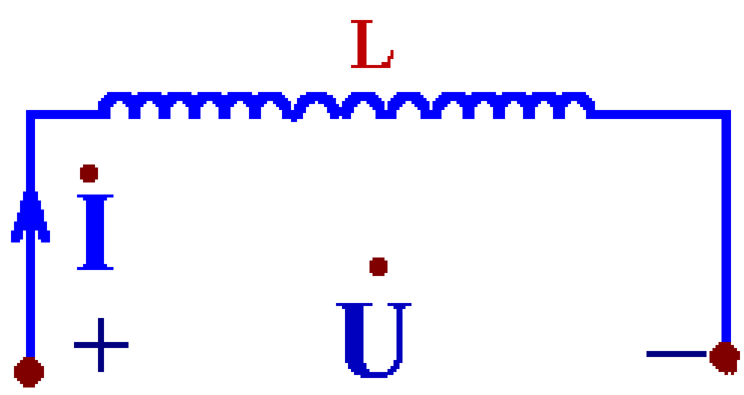
1、同向串联（顺接）

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

2、反向串联（反接）

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

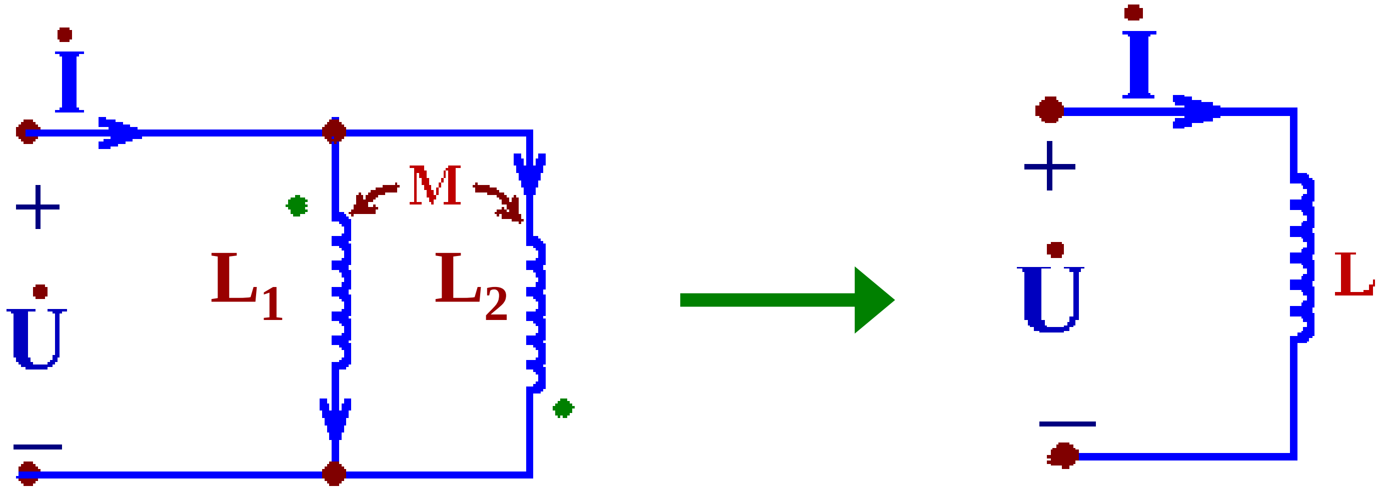



$$\therefore \quad \boxed{L = L_1 + L_2 \pm 2M}$$

（顺接取正，反接取负）

## 二、并联




### 1、同侧并联

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$$

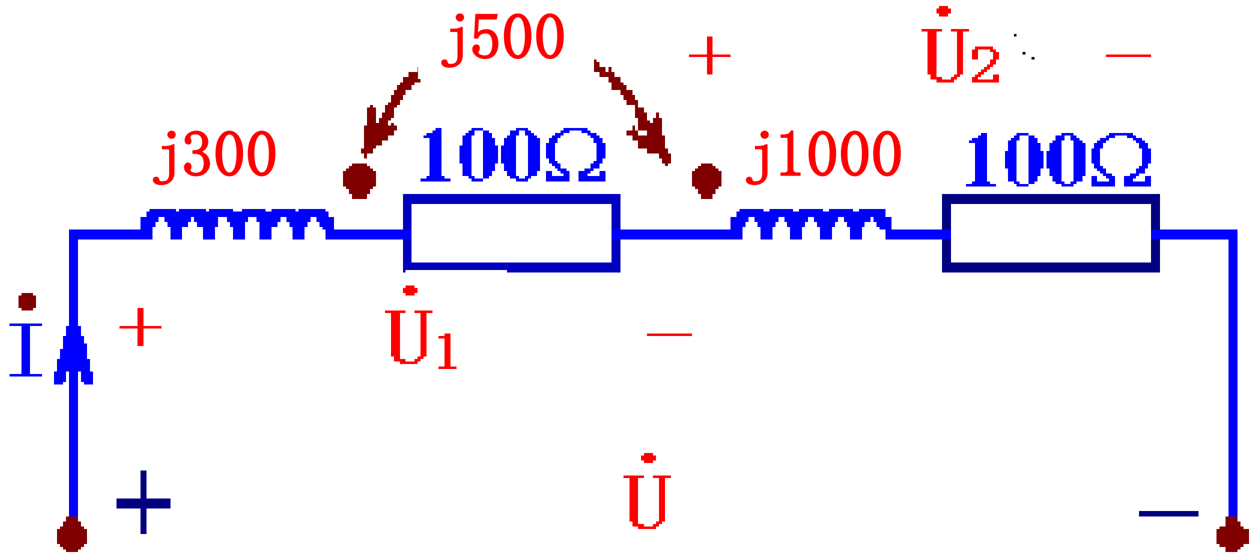
### 2、异侧并联

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$$

$$\therefore \quad \boxed{L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2\mp 2M}}$$

（同侧取负，异侧取正）

例1：图示电路，ω=100rad/s， U=220V。求: $\dot{U}_1$ 和 $\dot{U}_2$.

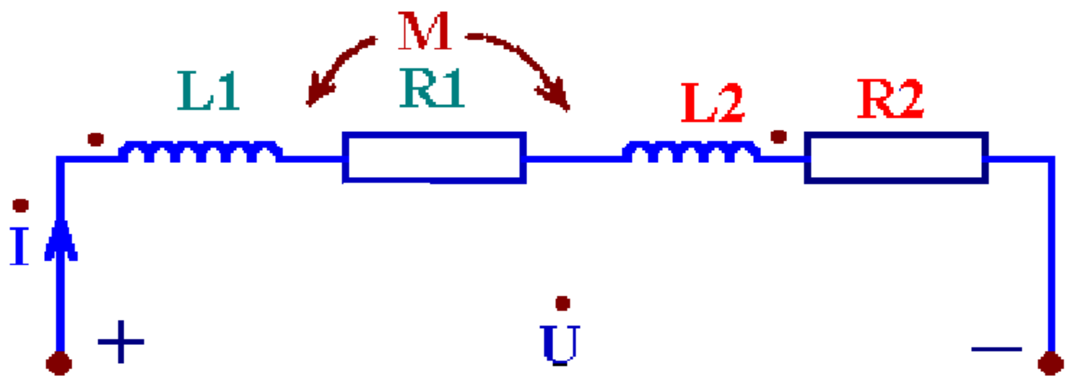



解： 设 $\dot{U} = 220\angle 0°$ $\quad \dot{I} = \dfrac{220\angle 0°}{200 + j300} = 0.61\angle -56.31° A$

$$\dot{U}_1 = j300\,\dot{I} - j500\,\dot{I} + 100\,\dot{I} = 136.4\angle -119.74° V$$

$$\dot{U}_2 = j1000\,\dot{I} - j500\,\dot{I} + 100\,\dot{I} = 311.04\angle 22.38° V$$

**例2：两个耦合线圈，接到220V、50Hz正弦电压上。顺接时I=2.7A，P=218.7W；反接时I=7A。求互感M=?**




解：

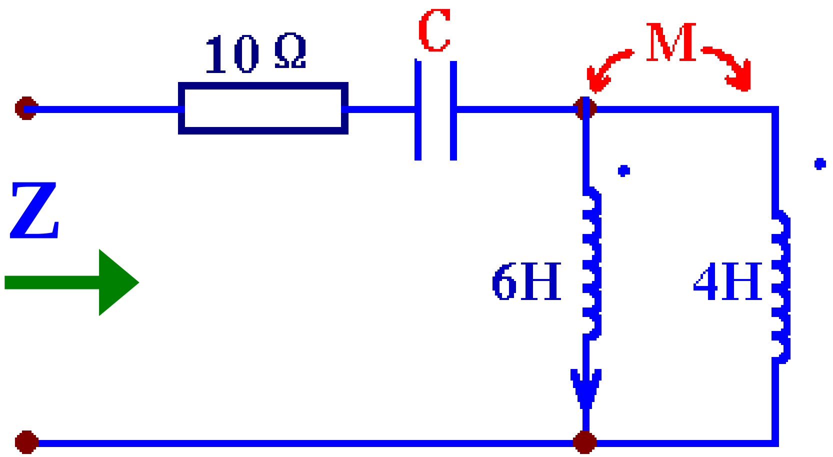
$$Z = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2M) = \begin{cases} R + jX_1 \\ R + jX_2 \end{cases}$$

顺接：$\dfrac{U}{I} = 81.481 = \sqrt{R^2 + X_1^{\ 2}}$，又，$\dfrac{P}{I^2} = 30 = R$　故，$X_1 = 75.756$

反接：$\dfrac{U}{I} = 31.429 = \sqrt{R^2 + X_2^{\ 2}}$，　故，$X_2 = 9.7066$

$$X_1 - X_2 = 4\omega M \quad \therefore \quad M = \frac{X_1 - X_2}{4\omega} = 53.07mH$$

例3：图示电路，ω=4rad/s, C = 5F ，M=3H。
求：输入阻抗Z。当C为何值时阻抗Z为纯电阻？

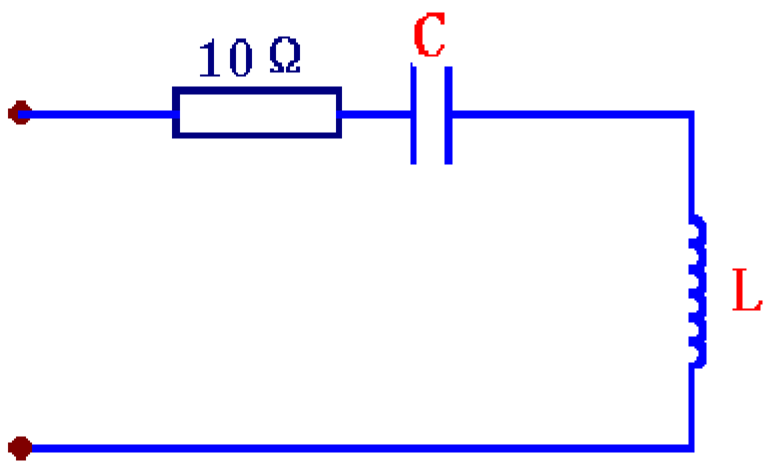



解：互感元件为同侧并联，有

$$L=\frac{4\times 6-3^2}{4+6-2\times 3}=\frac{15}{4}H$$

$$Z=10-j0.05+j15$$

$$=10+j14.95(\Omega)$$

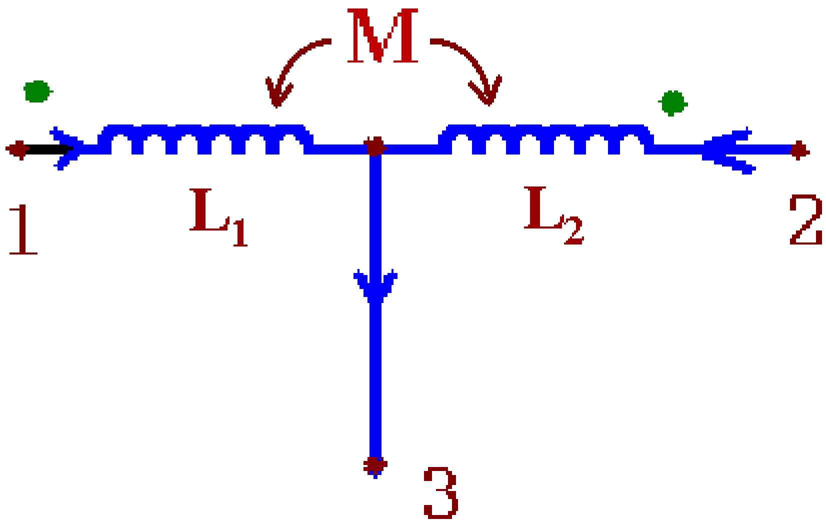



若改变电容使Z为纯电阻性，则有

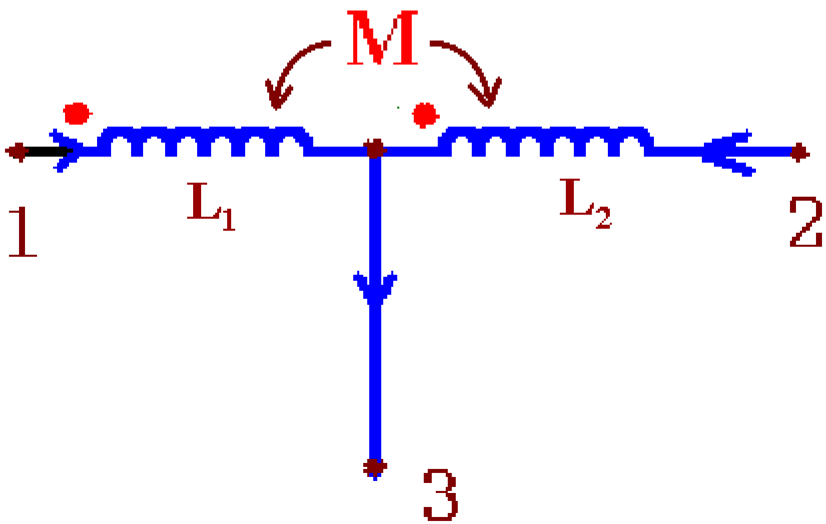
$$\frac{1}{\omega C}=15 \quad \therefore \quad C=\frac{1}{60}F$$

# 7-4 耦合电感的T型连接及等效变换

## 一、 T型连接

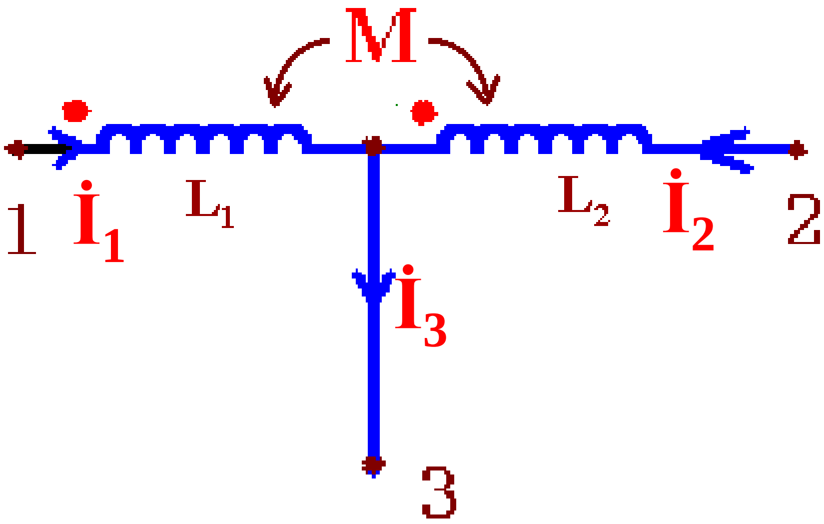



同侧T型连接




异侧T型连接

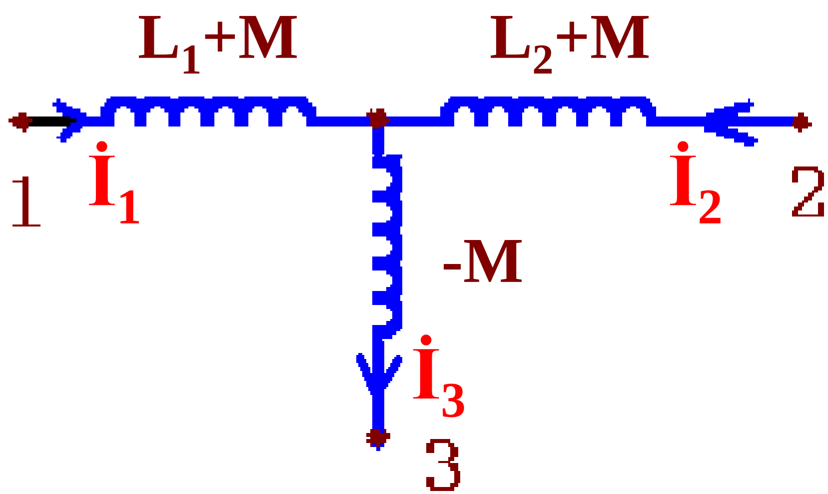
## 二、去耦等效电路




### 同侧T型连接

$$\dot{U}_{13} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$
$$= j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_3$$
$$\dot{U}_{23} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$
$$= j\omega(L_2 - M)\dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_3$$

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3$$

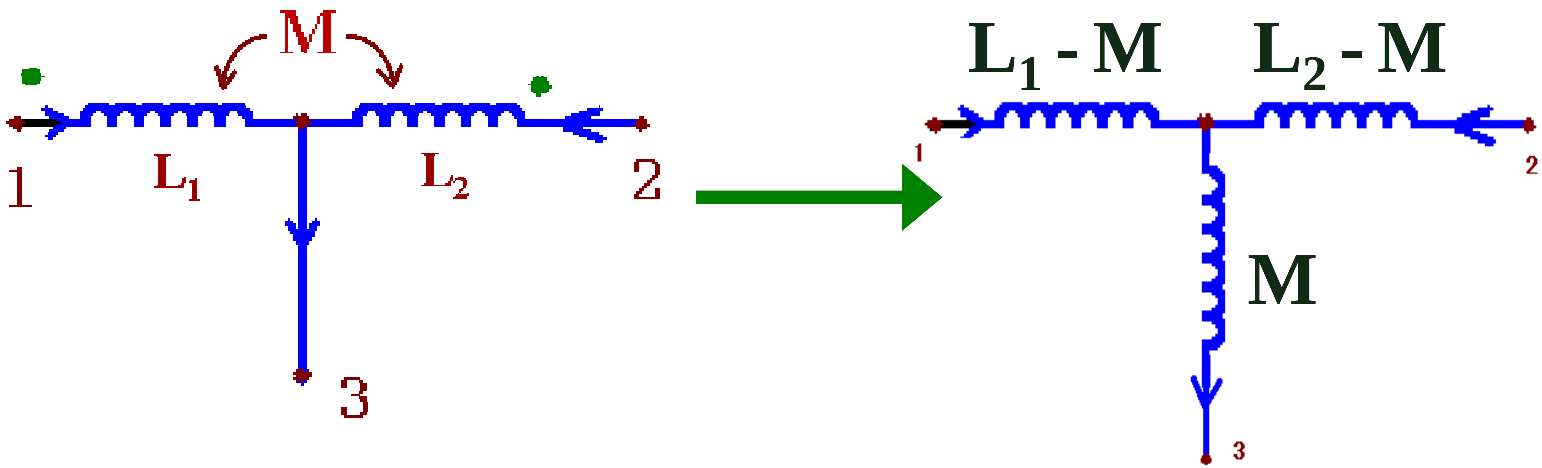



### 异侧T型连接

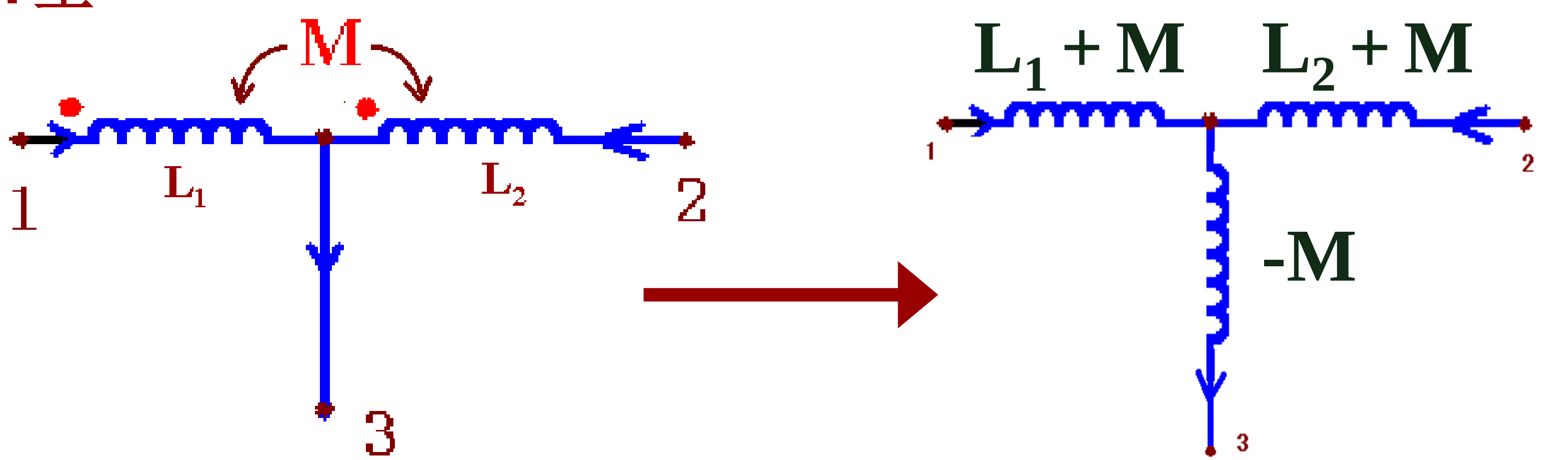
$$\dot{U}_{13} = j\omega(L_1 + M)\dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_3$$
$$\dot{U}_{23} = j\omega(L_2 + M)\dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_3$$

# 小 结：

同侧T型

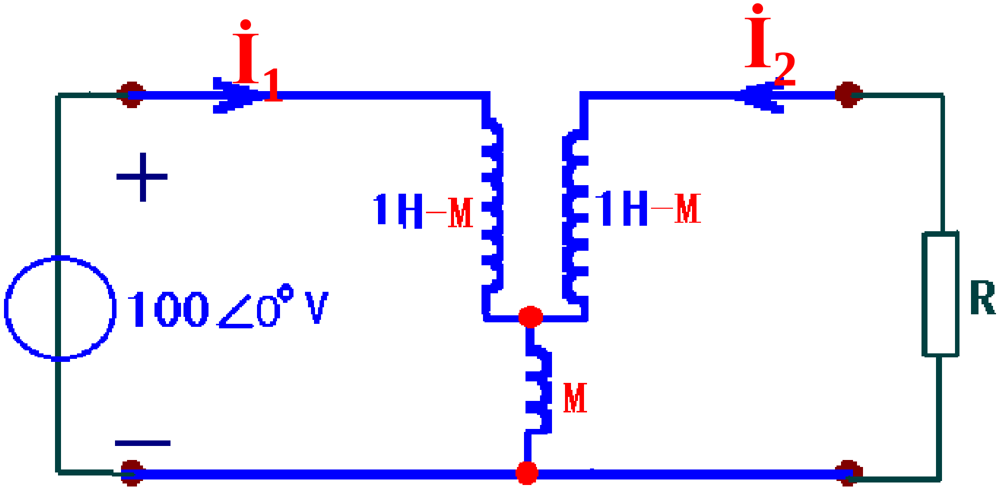



异侧T型



**例1：** 图示电路，ω=10rad/s， R=10Ω 。

分别求K=0.5和K=1时,电路中的电流$\dot{I}_1$和$\dot{I}_2$以及电阻R吸收的功率.




$$\dot{I}_1 = 11.3\angle 81.87° A$$

$$\dot{I}_2 = 4\angle -216.87° A$$

$$P = 160W$$

（2）K=1，M = 1H，有

$$j10\dot{I}_1 + j10\dot{I}_2 = 100\angle 0°$$

$$j10\dot{I}_1 + (10 + j10)\dot{I}_2 = 0$$

**解：** 去耦等效电路

（1）K=0.5，M = 0.5H，有

$$(j5 + j5)\dot{I}_1 + j5\dot{I}_2 = 100\angle 0°$$

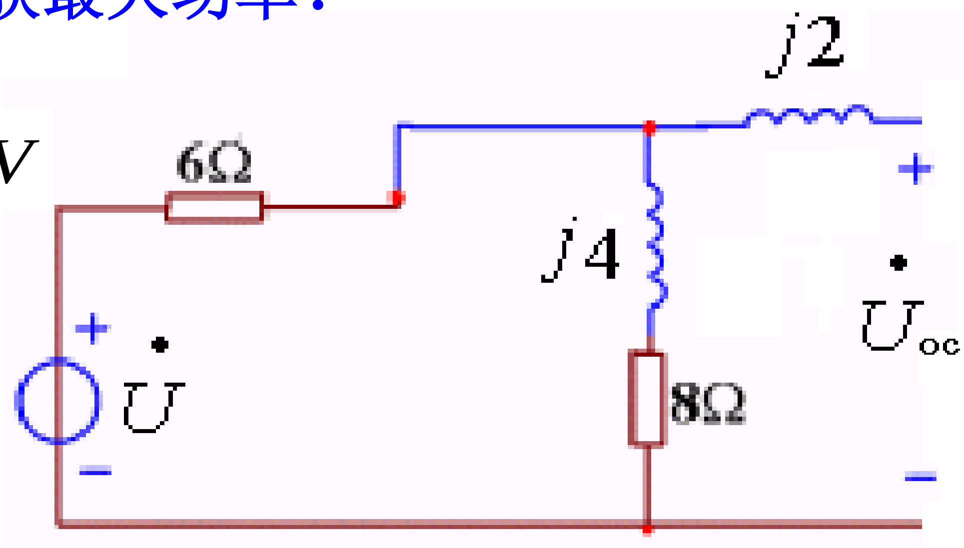
$$j5\dot{I}_1 + (j5 + j5 + 10)\dot{I}_2 = 0$$

$$\dot{I}_1 = 10\sqrt{2}\angle -45° A \qquad \dot{I}_2 = 10\angle -180°$$

$$P = 1000W$$

**例2：图示电路，求Z为何值可获最大功率？并求出最大功率。其中：**

$$u(t)=10\sqrt{2}\cos(10^4 t+53.1°)V$$




**解：**

1）判定同名端，并画出电路图：

2）去耦等效电路：

3）移去待求支路Z，有：

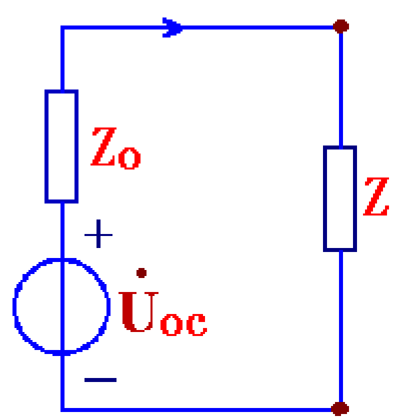
$$U_{oc}=\frac{8+j4}{14+j4}10\angle 0°$$

$$=6.11\angle 10.61°V$$

$$Z_o=j2+\frac{6(8+j4)}{14+j4}$$

$$=3.6+j2.67$$

4）戴维南等效电路：

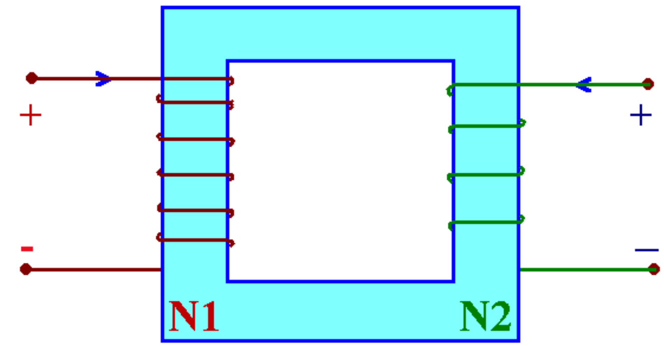



$$\therefore Z=\overset{*}{Z_o}$$

$$=3.6-j2.67(\Omega)$$

$$P_m=\frac{U_{oc}^{\ 2}}{4R_o}=2.59W$$

## 7-5 空芯变压器



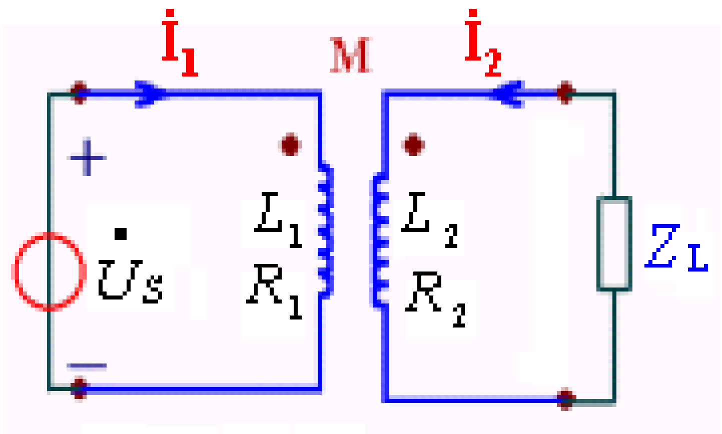

### 一、组成:

**N1: 初级线圈（原边线圈或原线圈）**

**N2: 次级线圈（副边线圈或副线圈）**

芯架：非导磁材料

### 二、电路模型:




### 三、电路方程:

$$(R_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_S$$

$$j\omega M\dot{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)\dot{I}_2 = 0$$

令 $Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 \quad X_M = \omega M$

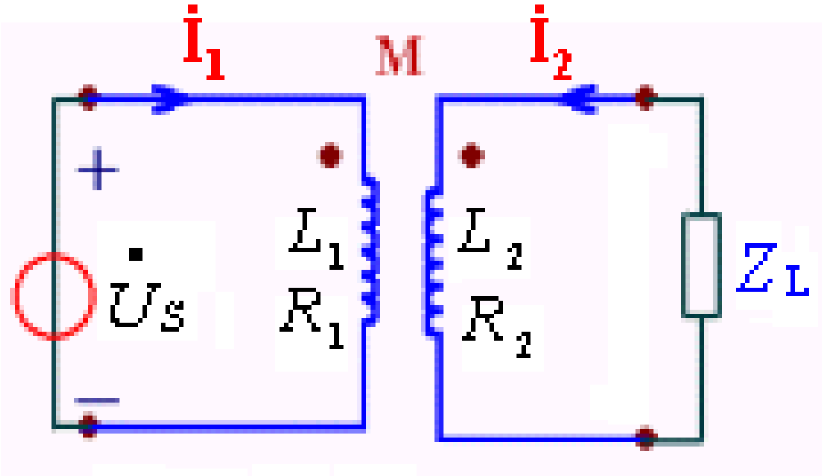
$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L$

$$Z_{11}\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 = \dot{U}_S$$

$$jX_M\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0$$

# 四、等效电路

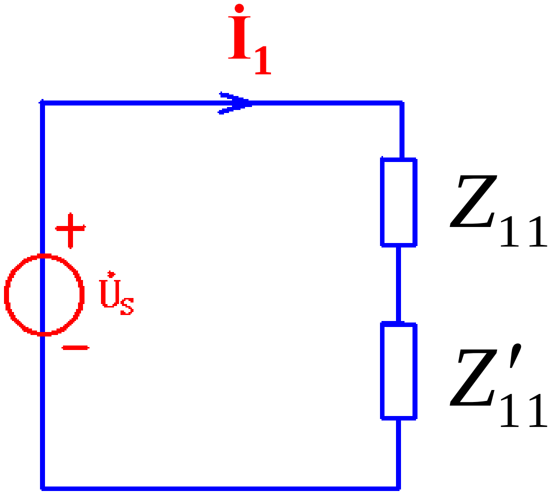
## 1、初级等效电路




$$Z_{11}\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 = \dot{U}_S$$

$$jX_M\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + \dfrac{X_M^2}{Z_{22}}} = \frac{\dot{U}_s}{Z_{11} + Z'_{11}}$$



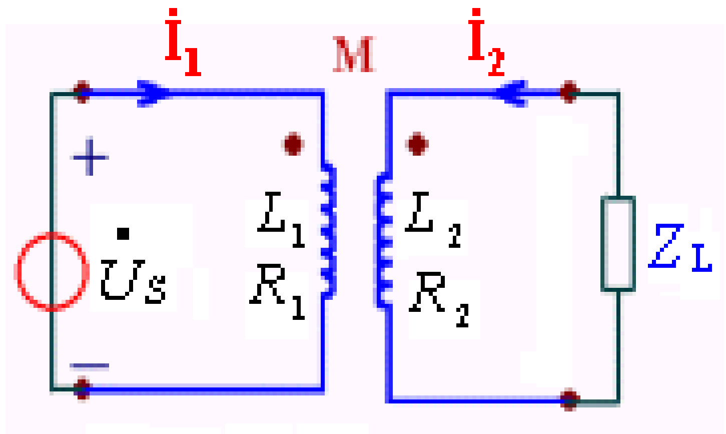

其中:

$\boxed{Z_{11} = R_1 + j\omega L_1}$（初级回路自阻抗）

$\boxed{Z'_{11} = \dfrac{X_M^2}{Z_{22}}}$（次级对初级的反射阻抗）

$$\boxed{Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L}$$

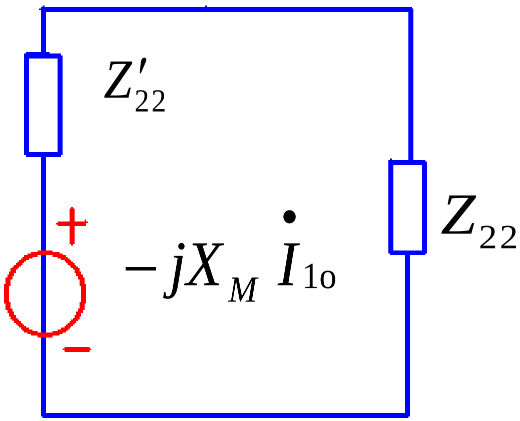
## 2、次级等效电路




$$Z_{11}\dot{I}_1 + jX_M\dot{I}_2 = \dot{U}_S$$

$$jX_M\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dfrac{-jX_M\dot{U}_s}{Z_{11}}}{Z_{22} + \dfrac{X_M^{\,2}}{Z_{11}}} = \frac{-jX_M\dot{I}_{1o}}{Z_{22} + Z'_{22}}$$



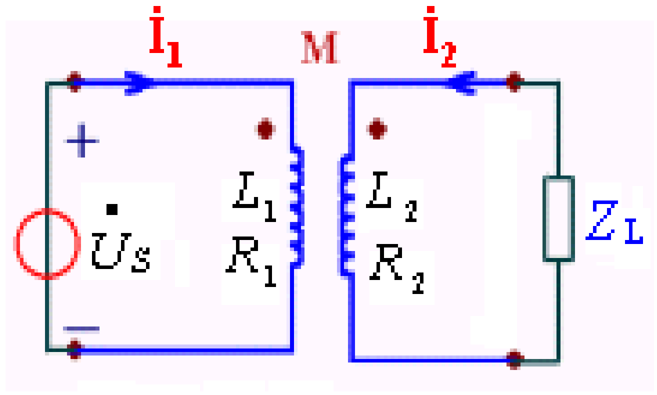

其中:

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L$$ （次级回路自阻抗）

$$Z'_{22} = \frac{X_M^{\,2}}{Z_{11}}$$ （初级对次级的反射阻抗）

$$\dot{I}_{1o} = \frac{\dot{U}_S}{Z_{11}}$$ ——次级开路时的初级电流

## 五、空芯变压器倒相作用




初级等效电路电流：$\dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_S}{Z_{11} + Z'_{11}}$

次级等效电路电流：$\dot{I}_2 = \dfrac{-jX_M \dot{I}_{1o}}{Z_{22} + Z'_{22}}$，

其中，$\dot{I}_{1o} = \dfrac{\dot{U}_S}{Z_{11}}$

可见：同名端改变时，电流$i_1$不变，$i_2$倒相。

## 六、含空芯变压器电路的分析

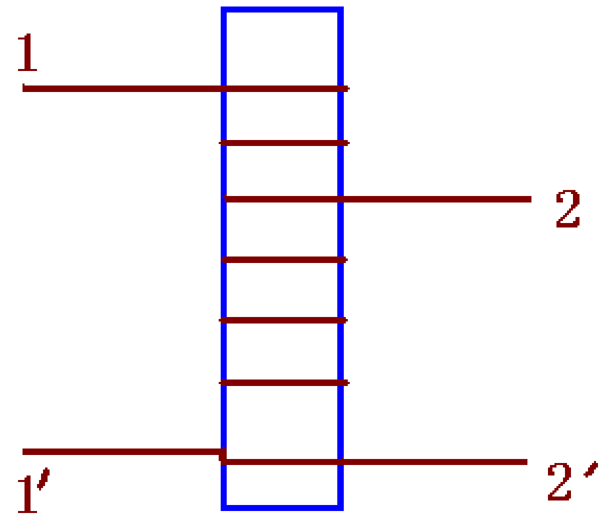
1、去耦等效法

2、初、次级等效法

3、直接方程分析法

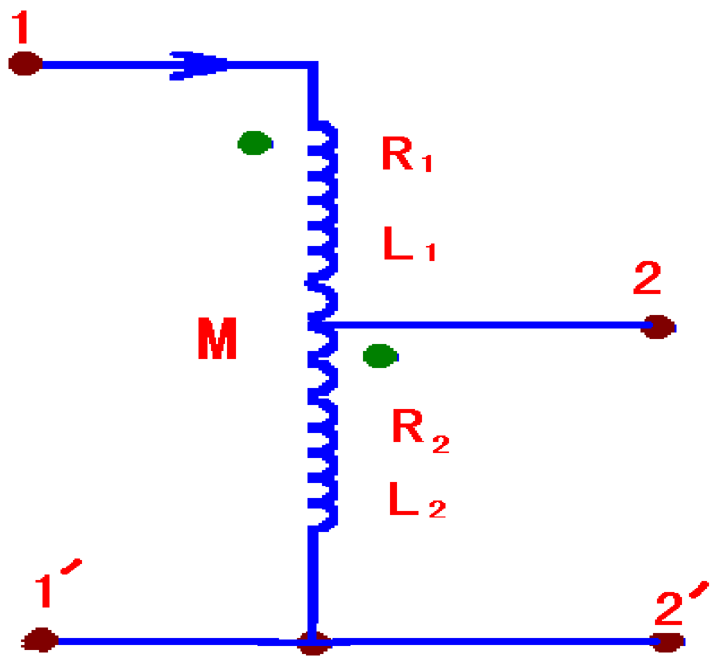
# 七、自耦空芯变压器

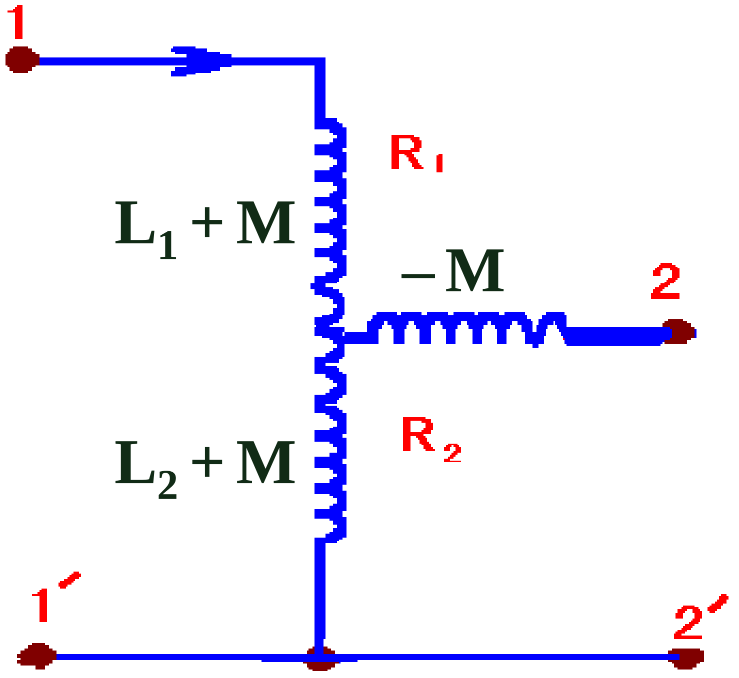
**1、组成：**




**2、电路模型：**

**3、去耦等效电路：**



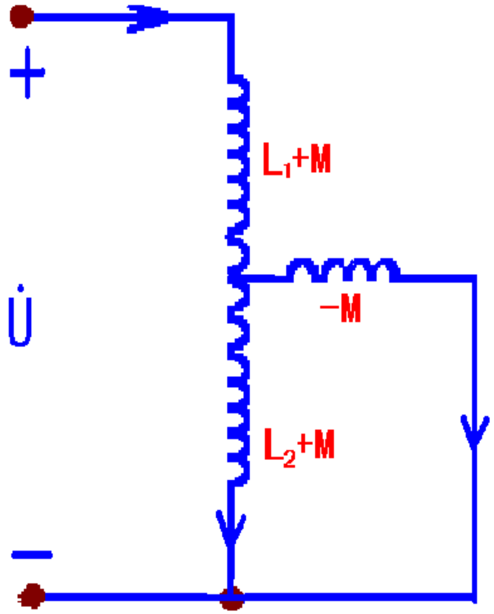



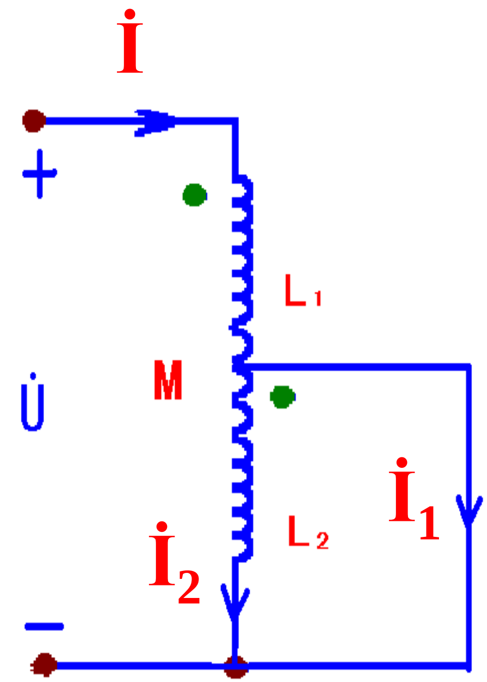
例1： 图示电路，ω=1000rad/s，U=50v， $L_1$ =10mH，$L_2$ =2mH, M =4mH 。求： 1）输入阻抗$Z_i$； 2） 求电路中的电流$\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$和$\dot{I}$；3）求$L_1$上的电压.

解: 去耦等效电路:

$$L = 14 + \frac{-4\times 6}{-4+6}(mH)$$

$$= 2mH$$



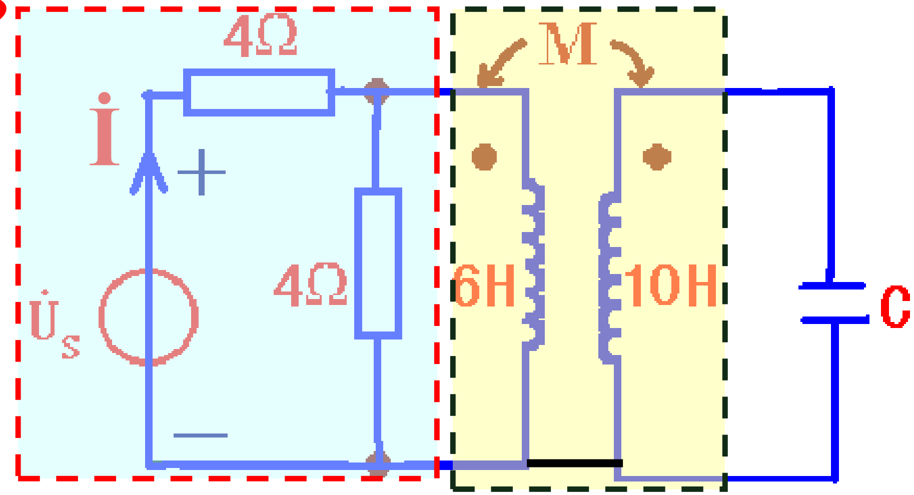

$$Z_i = j2\Omega$$

设$\dot{U} = 50\angle 0°$

$\dot{I} = -j25A$ $\quad \dot{I}_1 = -j75A$ $\quad \dot{I}_2 = j50A$

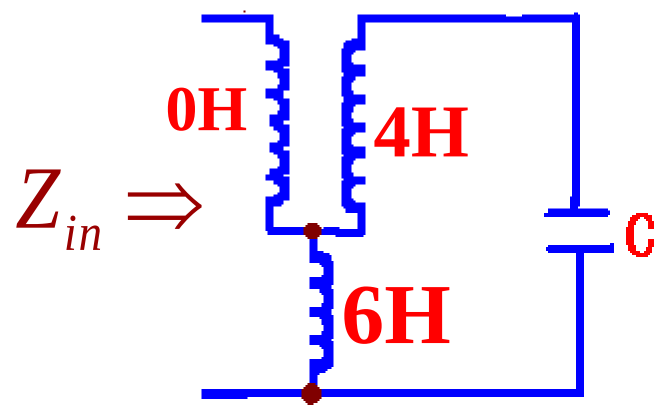
$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I}_2 = 50\angle 0° V$$

**例2：** 图示电路，$\omega$=1000rad/s，$U_S$=20v，M =6H 。求C=?时，$\dot{I}$与电源电压同相，并求$\dot{I}$=?




**解：**

去耦等效电路：




$$Z_{in}=\frac{j6k\left(j4k-j\dfrac{1}{\omega C}\right)}{j6k+j4k-j\dfrac{1}{\omega C}}$$

$\dot{I}$与电源电压同相，应有：

$$4k-\frac{1}{\omega C}=0 \qquad C=\frac{1}{4}\mu F$$

$$6k+4k-\frac{1}{\omega C}=0 \qquad C=\frac{1}{10}\mu F$$

## 含互感元件（耦合电感元件）电路分析应注意：

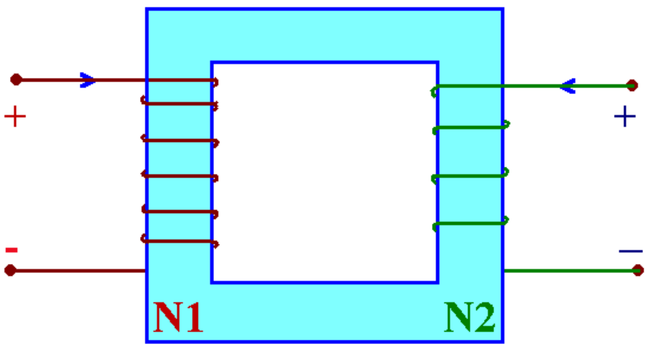
1、如果不去耦，列方程时不要漏掉互感电压，同时注意同名端与互感电压的关系；

2、去耦等效条件以及联接方式;

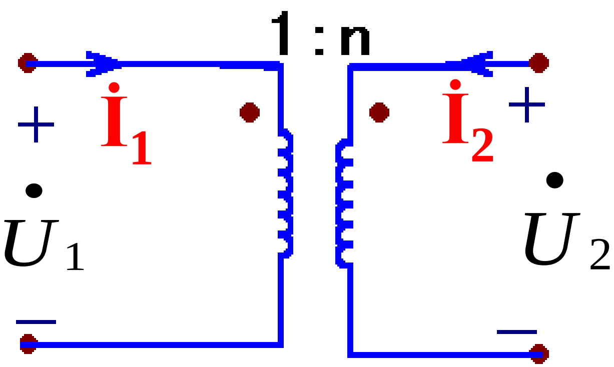
3、应用戴维南定理时，内外电路应无耦合。

# 7-6 理想变压器

## 一、组成：




## 二、电路模型：




$$\frac{1}{n}=\frac{N_1}{N_2}$$

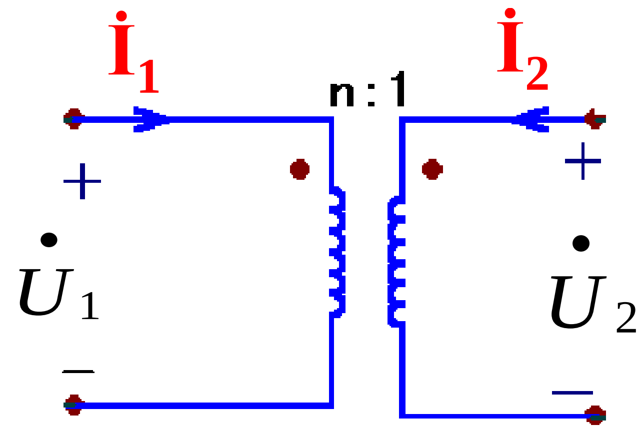
**理想化条件：**

1、全耦合, K=1

2、不消耗能量也不储存能量

3、$L_1$、$L_2$、$M\rightarrow\infty$

$$\frac{L_2}{L_1}=\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2=n^2$$

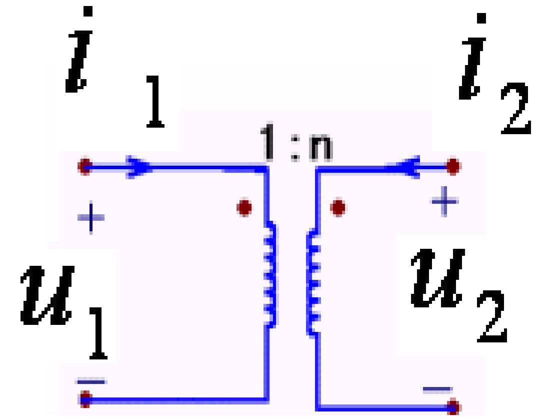



$$\frac{n}{1}=\frac{N_1}{N_2}$$

## 三、理想变压器的电路方程：

**1、电压关系** $u_2 = nu_1$　　$\dot{U}_2 = n\dot{U}_1$

**2、电流关系** $i_2 = -\frac{1}{n}i_1$　　$\dot{I}_2 = -\frac{1}{n}\dot{I}_1$




**说 明:**

1、电压与电流相互独立；

2、初级电压与次级电压满足代数关系：

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{n}$$

注：电压方向与同名端满足一致方向

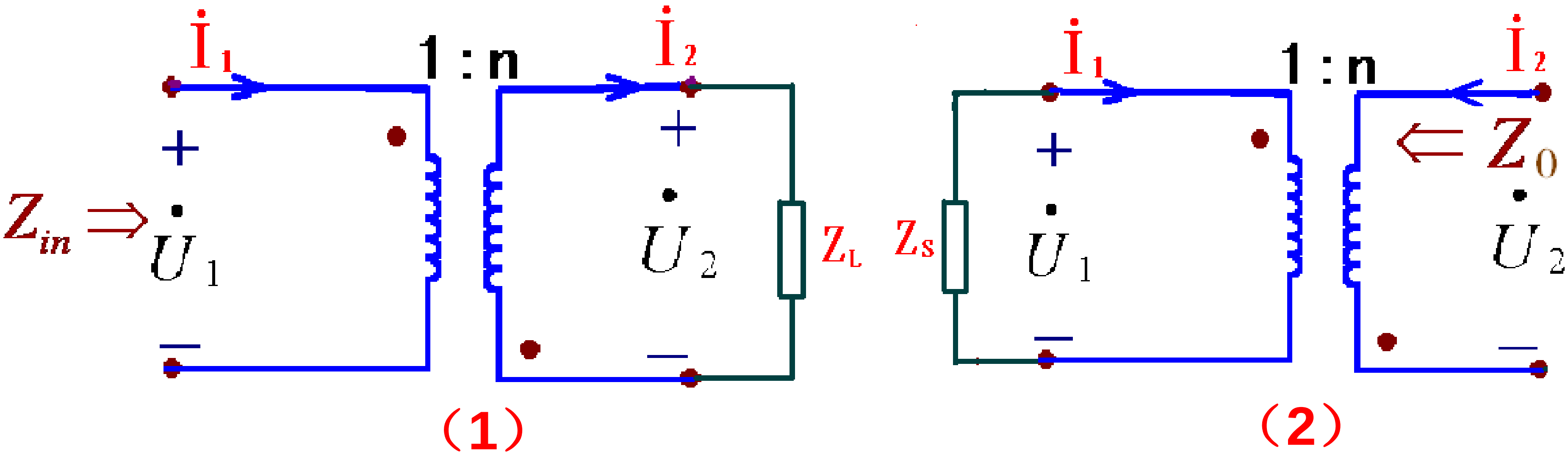
3、初级电流与次级电流满足代数关系：

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{n}{1}$$

注：电流方向与同名端满足一致方向

4、同名端、参考方向不同，则电路方程不同。

例：写出下列理想变压器伏安关系。

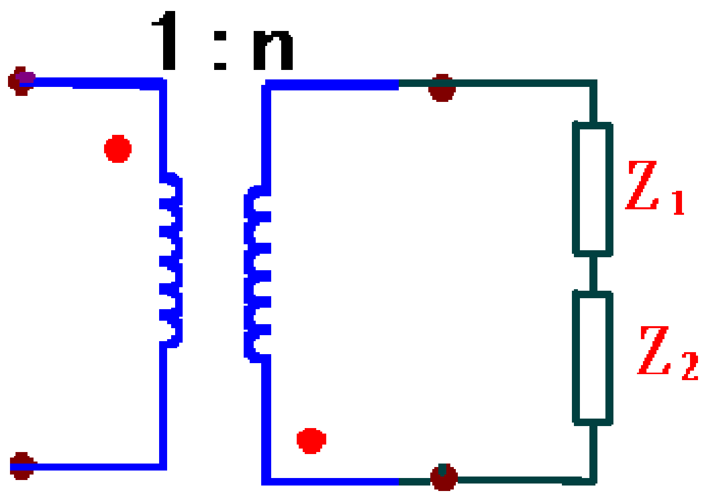



## 四、阻抗变换作用

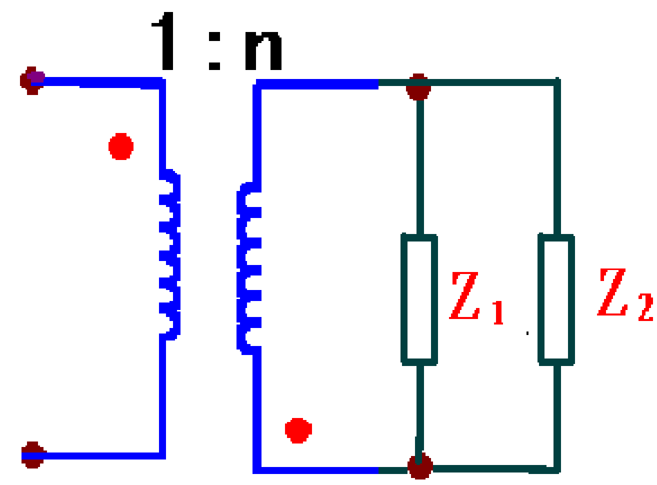
$$Z_i = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{1}{n^2} Z_L$$

$$Z_o = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = n^2 Z_S$$

例：求下列电路输入阻抗。



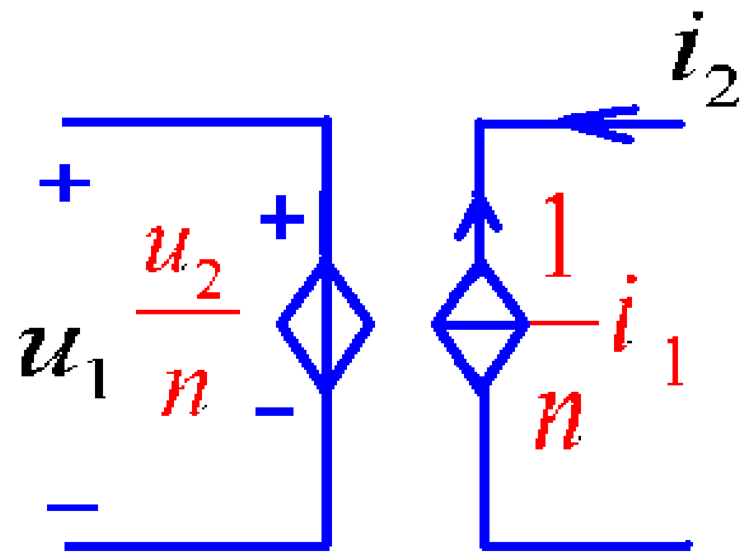

（1）




（2）

## 五、用受控源模拟理想变压器

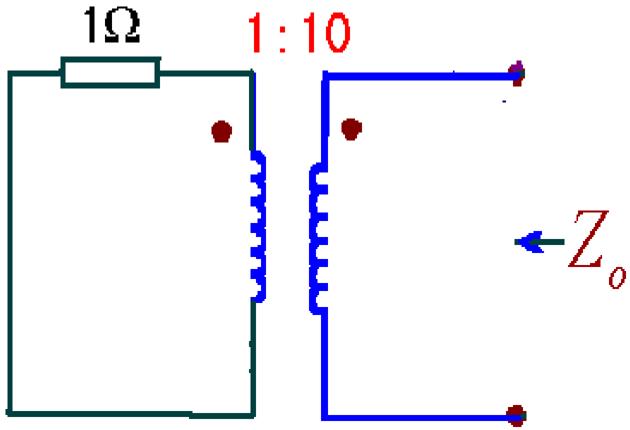
$$\left.\begin{aligned} u_2 &= n u_1 \\ i_2 &= -\frac{1}{n} i_1 \end{aligned}\right\}$$

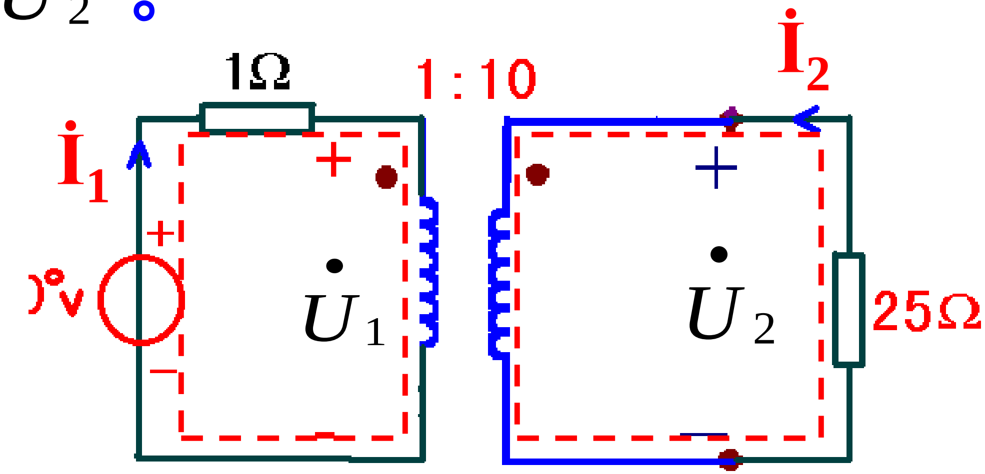


# 六、含理想变压器的电路分析

理想变压器作用：电压变换、电流变换、阻抗变换

例1： 图示电路，求电压 $\dot{U}_2$ 。




且, $\begin{cases} \dot{U}_2 = 10\dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 = -\dfrac{1}{10}\dot{I}_1 \end{cases}$

$\therefore \quad \dot{U}_1 = 2\angle 0°\text{V}$

$\dot{U}_2 = 20\angle 0°\text{V}$

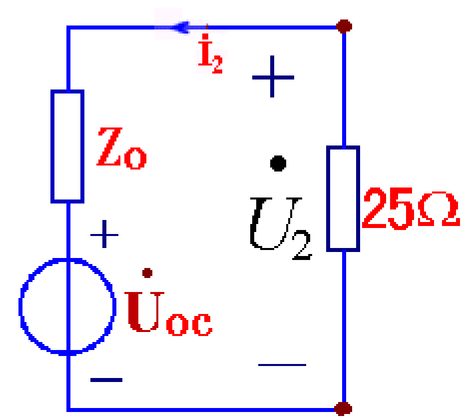
思路2:

戴维南定理法:

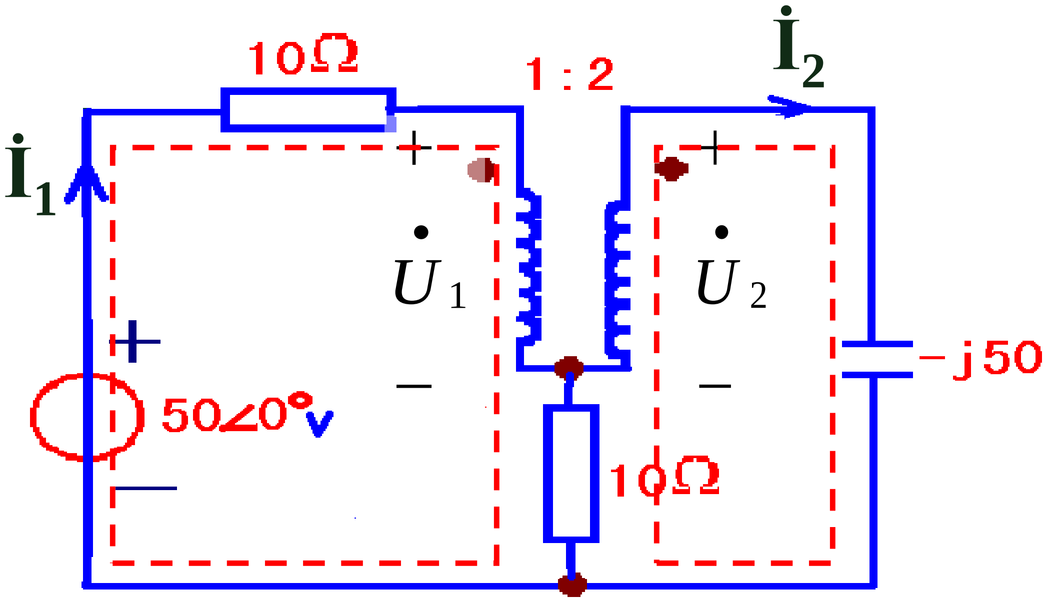
移去负载，有:

$\dot{U}_{oc} = 100\angle 0°$

$Z_o = 100\Omega$



例2： 图示电路，求$\dot{I}_1=?$ $\dot{I}_2=?$




解：网孔法：

$$20\dot{I}_1-10\dot{I}_2=50\angle 0°-\dot{U}_1$$

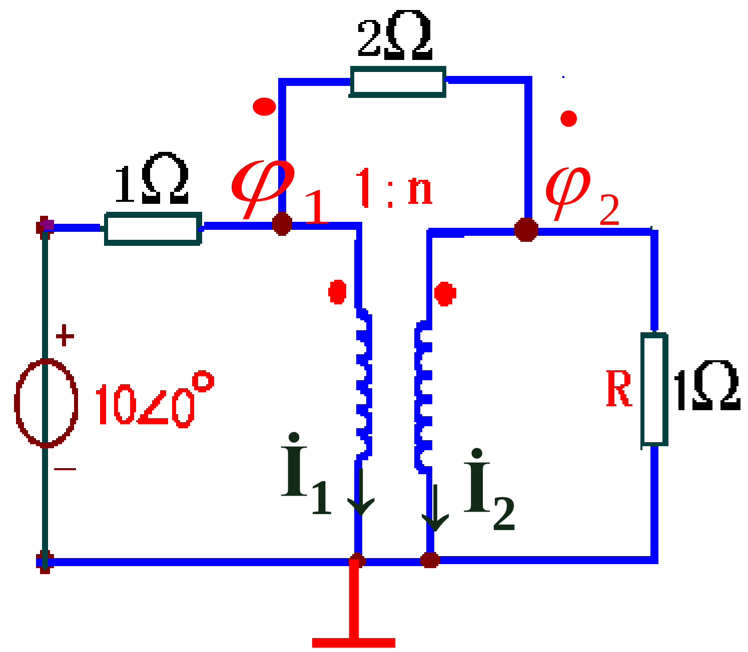
$$-10\dot{I}_1+(10-j50)\dot{I}_2=\dot{U}_2$$

且，$\dot{U}_2=2\dot{U}_1 \quad \dot{I}_2=\dfrac{1}{2}\dot{I}_1$

$$\therefore \quad \dot{I}_1=2+j2(A)$$

$$\dot{I}_2=1+j2(A)$$

练习1：图示电路，求n=?时，R可获最大功率$P_m$；并求$P_m$=?




解：节点电位方程：

$$1.5\dot{\varphi}_1 - 0.5\dot{\varphi}_2 = 10\angle 0° - \dot{I}_1$$

$$-0.5\dot{\varphi}_1 + 1.5\dot{\varphi}_2 = -\dot{I}_2$$

$$\dot{\varphi}_2 = n\dot{\varphi}_1$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{1}{n}\dot{I}_1$$

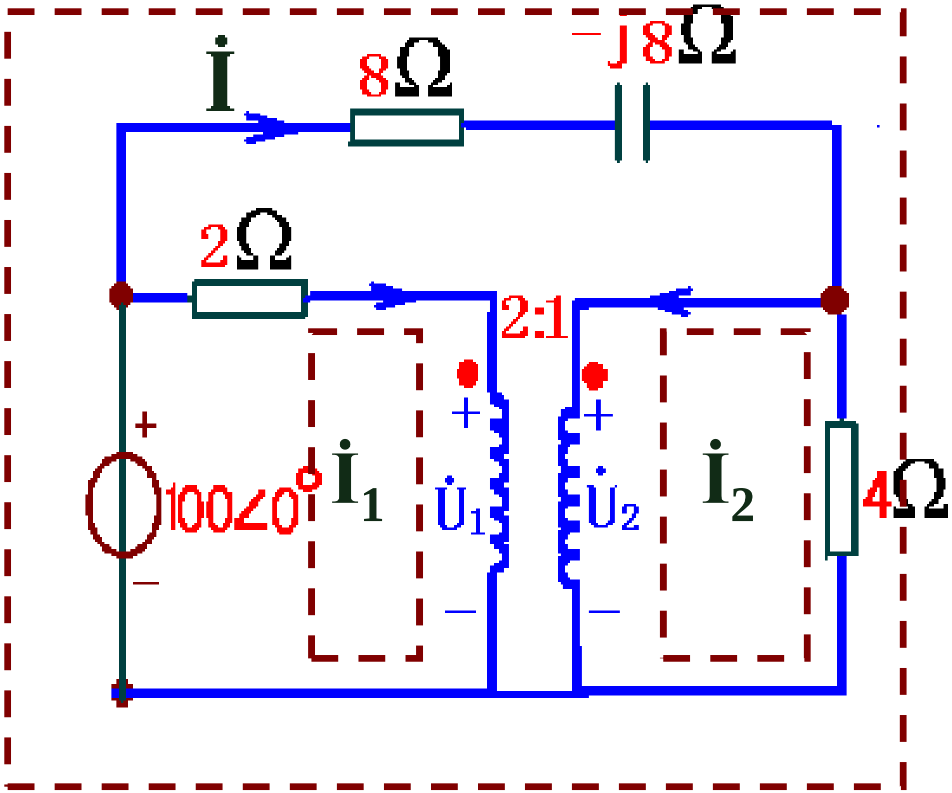
联立求解，有：

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{20n}{3n^2 - 2n + 3}$$

$$P = \frac{\varphi_2^{\;2}}{R} = \frac{400n^2}{(3n^2 - 2n + 3)^2}$$

$$\frac{dP}{dn} = 0 \quad \therefore \quad n = 1 \quad P_m = 25W$$

练习2：图示电路，求$\dot{I}$ =?




解：回路电流方程：

$$2\dot{I}_1 = 100\angle 0° - \dot{U}_1$$

$$-4\dot{I} + 4\dot{I}_2 = -\dot{U}_2$$

$$-4\dot{I}_2 + (12 - j8)\dot{I} = 100\angle 0°$$

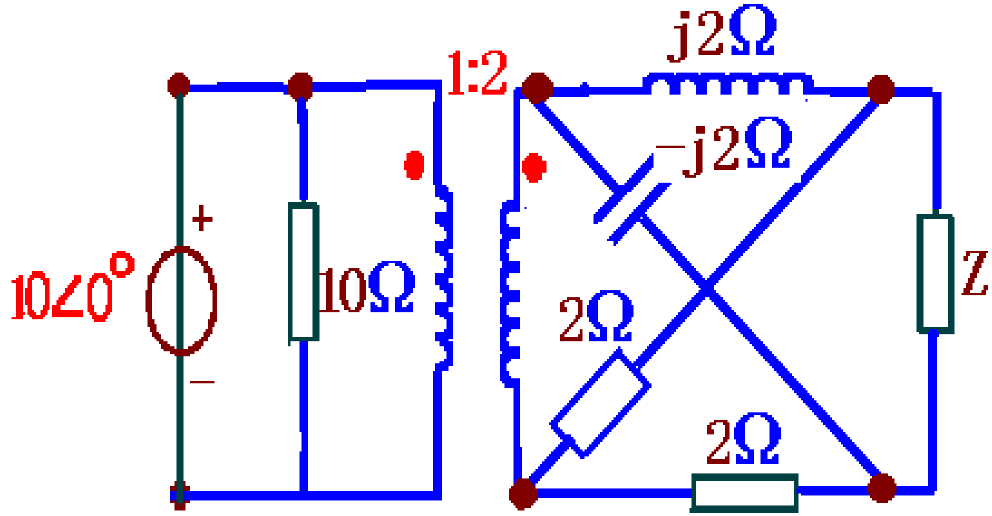
$$\dot{U}_1 = 2\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{1}{2}\dot{I}_2$$

联立求解，有：

$$\dot{I} = 4.776\angle 43.45° A$$

练习3：图示电路，求Z=? 可获最大功率$P_m$；并求$P_m$=?



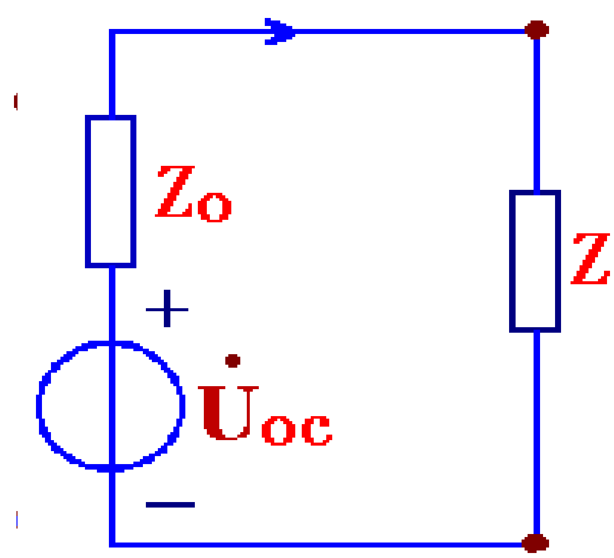

解：移去Z, 可求得：

$$\dot{U}_{oc}=(\frac{2}{2+j2}-\frac{2}{2-j2})20\angle 0^\circ$$

$$=-j20V$$

$$Z_o=\frac{j2\times 2}{2+j2}+\frac{-j2\times 2}{2-j2}$$

$$=2\Omega$$



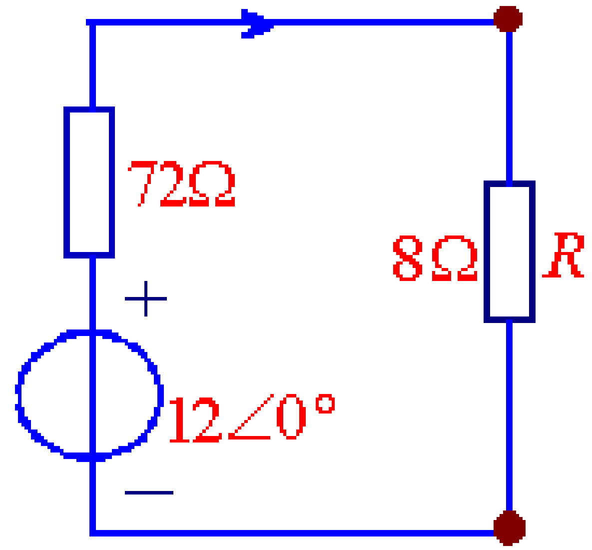

根据最大功率传输定理，应有：

$$Z=\overset{*}{Z}=2\Omega \qquad P_m=\frac{U_{oc}^2}{4R_0}=50W$$

**练习4：图示电路：**

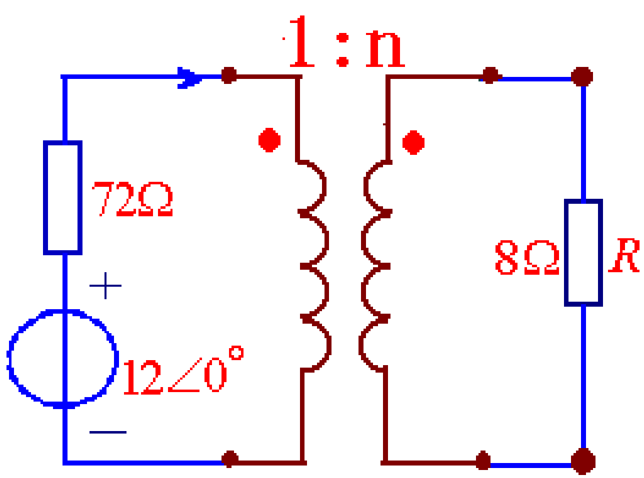
**1）求电阻R 消耗的功率；**

**2）若使 R获最大功率$P_m$可采取何种方法？并求对应电路参数和$P_m$。**




**解：** 1) $P=(\frac{12}{72+8})^2\times 8=0.18W$

**2) 可接入一个理想变压器实现功率匹配。**




**根据最大功率传输定理，应有：**

$$\frac{1}{n^2}\times 8=72 \qquad n=\frac{1}{3}$$

$$P_m=\frac{12^2}{4\times 72}=0.5W$$

# 本章要点：

一、基本概念：

耦合、互感、耦合系数、同名端、空心变压器、理想变压器；

二、电路计算：

1、含互感元件电路分析计算：

1）直接法：

列方程时不要漏掉互感电压；

注意同名端与互感电压的关系；

2）去耦等效法：去耦等效法条件、联接方式和参数计算；

2、含变压器电路分析计算：

1）空芯变压器

2）含理想变压器电路（电压、电流、阻抗变换关系）

注意：应用戴维南定理时，内外电路应无耦合。