第七章 格与布尔代数

- 格的定义及性质
- 子格
- 分配格、有界格、有补格
- 布尔代数

7.1 环

定义 设代数系统$<L,+,\circ>$，+和$\circ$是L上的两个二元运算, 如果它们满足:

(1)$<L,+>$是一个可换群;

(2)$<L,\circ>$是一个半群;

(3)$\forall a,b,c\in L$有

$$a\circ(b+c) = a\circ b + a\circ c$$

$$(b+c)\circ a = b\circ a + c\circ a$$

则称代数系统$<L,+,\circ>$是环。

例：$<I,+,\bullet>$ $<Z_k,+_k,\times_k>$

性质

设<L,+ ,∘>是环，0是加法么元，则有

(1) $a \circ 0 = 0 \circ a = 0$

(2) $a \circ (-b) = -a \circ b$

(3) $(-a) \circ (-b) = a \circ b$

证：$0 = a \circ 0 - a \circ 0 = a \circ (0+0) - a \circ 0 = a \circ 0 + a \circ 0 - a \circ 0 = a \circ 0$

7.2 格的定义与性质

定义7.1 设L是非空集合, +和∘是L上的两个二元运算, 如果它们满足交换律, 结合律和吸收率, 即$\forall a,b,c\in L$有

(1)交换律: $a+b=b+a$, $a\circ b=b\circ a$

(2)结合律: $(a+b)+c= a+(b+c)$, $(a\circ b)\circ c= a\circ(b\circ c)$

(3)吸收律: $a+(a\circ b) = a$, $a\circ(a+b) = a$

则称代数系统$<L,+ ,\circ>$是格, 也称代数格.

例如,

(1) 非空集合A的幂集$P(A)$构成的代数系统$<P(A), \cap, \cup >$是格.

(2) 正整数集Z^+与其上定义的两个运算:

gcd(a, b)　　两个正整数的最大公因数

lcm(a, b)　　两个正整数的最小公倍数

构成代数系统$<Z^+$, gcd, lcm$>$是格.

格的性质

格的性质1 格满足幂等律.

定理7.1 设$\langle L,+,\circ\rangle$是格, 则$\forall a\in L$有$a+a=a$, $a\circ a=a$.

证 由吸收律易证 $a+a=a+(a\circ(a+a))=a$, $a\circ a=a\circ(a+(a\circ a))=a$.

格的性质2 格的子代数必为格.

定理7.2 设$\langle L,+,\circ\rangle$是格, $\langle H,+,\circ\rangle$是它的子代数(其中$\varnothing\subset H\subset L$),则$\langle H,+,\circ\rangle$必为格, 称为$\langle L,+,\circ\rangle$的子格.

证 设$a,b,c\in H$, 则$a,b,c\in L$, L是格, 则a,b,c满足交换律, 结合律和吸收律, 所以H为格.

格的性质

格的性质3 格满足对偶律.

定义7.2 在格$<L,+,\circ>$的任一公式中, 出现$+$,$\circ$处分别用$\circ$, $+$替换后所得到的公式称为该公式的**对偶式**.

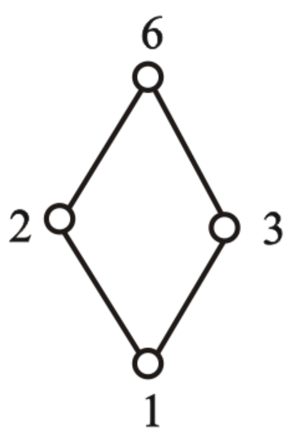
定理7.3 格中公式A为定理, 则A的对偶式A'仍为定理.
证　由格的对称性易证.

偏序格

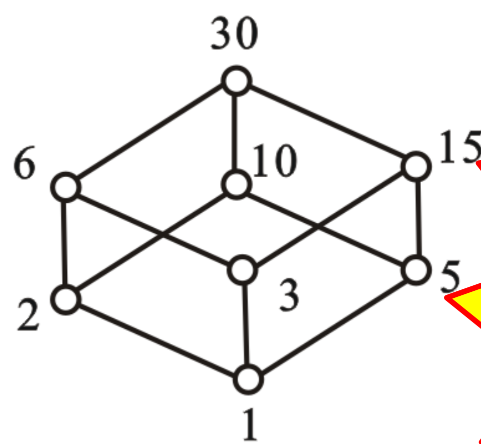
定义7.3 设$<S, \preccurlyeq>$是偏序集, 如果S的任意子集均有上确界(最小上界)和下确界(最大下界)，则称S关于偏序$\preccurlyeq$作成一个偏序格.
并非每个偏序集都是偏序格.

例1 设n是正整数，S_n是n的正因子的集合. D为整除关系，则偏序集$<S_n,D>$构成格. $\forall x,y\in S_n$, 定义$x\vee y$是lcm(x,y)，即x与y的最小公倍数. $x\wedge y$是gcd(x,y)，即x与y的最大公约数.

(S_8,D)



(S_6,D)



(S_{30},D)

求上确界和下确界可看成x与y的二元运算$\vee$和$\wedge$

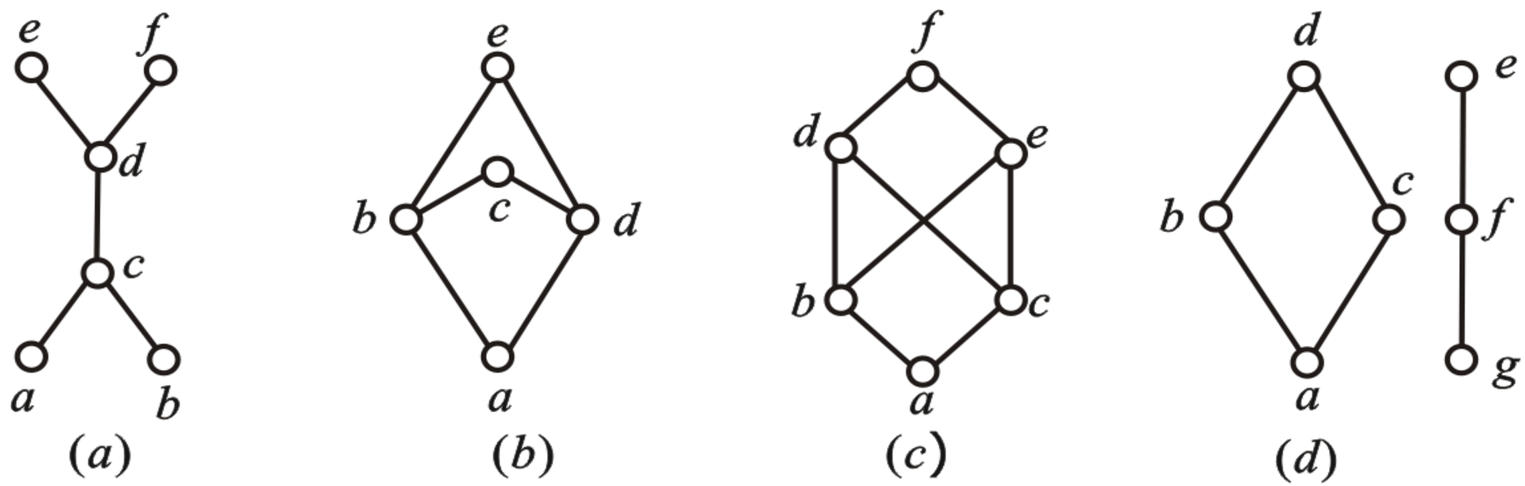
实例

例2 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由.

(1) $<P(B),\subseteq>$，其中$P(B)$是集合B的幂集.

(2) $<Z,\le>$，其中Z是整数集，$\le$为小于或等于关系.

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出.



(1) 幂集格. $\forall x,y\in P(B)$，$x\vee y$就是$x\cup y$，$x\wedge y$就是$x\cap y$.

(2) 是格. $\forall x,y\in Z$，$x\vee y=\max(x,y)$，$x\wedge y=\min(x,y)$，

(3) 都不是格. 可以找到两个结点缺少下确界或上确界

偏序格与代数格等价

从代数的观点看:

在偏序集中可以将求上确界和下确界定义为两个二元运算

$x \wedge y = \mathrm{glb}(x, y)$ $\{x, y\}$的下确界运算

$x \vee y = \mathrm{lub}(x, y)$ $\{x, y\}$的上确界运算

构成代数系统$<S, \wedge, \vee>$, 运算均满足交换律, 结合律和吸收律

从偏序格的观点看:

设有代数格$<L, +, \circ>$, 在其上定义关系≼如下:

$x \preccurlyeq y$: $x+y=x$, $x \circ y = y$ $(x \circ y = (x+y) \circ y = y)$(定义其中一个即可)

(1) 该关系有$x \preccurlyeq x$, 即≼是自反的; (等幂)

(2) 设$\forall x \forall y$, 若$x \preccurlyeq y$, 且$y \preccurlyeq x$成立, 则有$x=y$. 因此, ≼是反对称的;

(3) 如果$x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq z$, 则有$x \preccurlyeq z$, 故≼是传递的.

因此, $<L, \preccurlyeq>$是偏序集. 且$\forall x, y \in L$, 都存在下确界$x+y$与上确界$x \circ y$, 所以$<L, +, \circ>$是偏序格. (说明在下一页)

$x+y=x$; $y+z=y$ 得到 $x+z=x$

$x+z=(x+y)+z=x+(y+z)=x+y=x$

偏序格与代数格等价定理

定理7.4 代数格必是偏序格, 反之亦然.

Note:

(1) 代数格与偏序格等价, 不再区分, 统称为格.

(2) 并非每个偏序集都是格.

设有代数格$<L,+,\circ>$, 在其上定义关系$\preccurlyeq$如下:

$$x \preccurlyeq y:\ x+y=x$$

$\forall x,y \in L$, 都存在下确界$x+y$与上确界$x \circ y$.

$y+x+x=x+y$ 得$x+y \preccurlyeq x$

$y+x+y=x+y$ 得$x+y \preccurlyeq y$

设z是x和y的任意下界, 则$z \preccurlyeq x$, $z \preccurlyeq y$.

$z+x=z$, $z+y=z$

$z+x+y=z+y=z$ 得$z \preccurlyeq x+y$

子格及其判别法

定义7.4 设$<L,\wedge,\vee>$是格, S是L的非空子集, 若S关于L中的运算$\wedge$和$\vee$仍构成格, 则称S是L的**子格**.

例5 设格L如图所示. 令

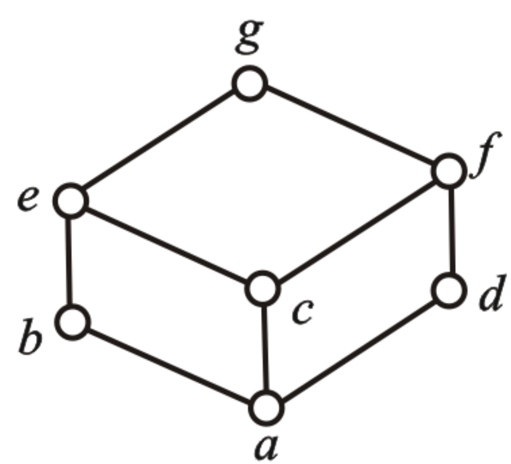
$S_1=\{a, e, f, g\}$,

$S_2=\{a, b, e, g\}$

S_1不是L的子格, 因为$e, f\in S_1$ 但

$$e\wedge f = c\notin S_1.$$

S_2是L的子格.



分配格、有界格与有补格

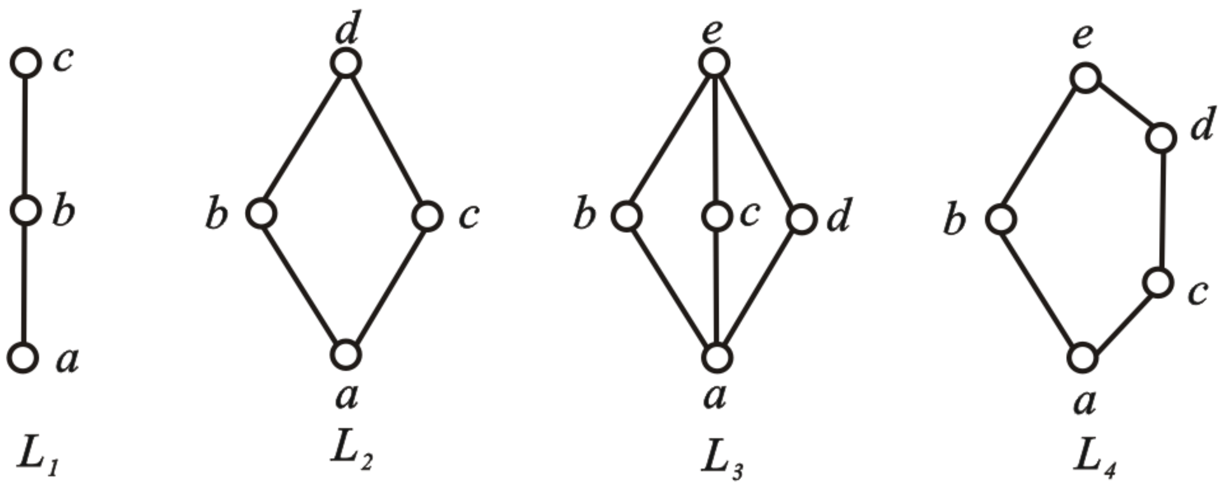
定义7.5 设$<L,\wedge,\vee>$是格, 若$\forall a,b,c\in L$,有

$$a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称L为分配格.

实例



L_1 和 L_2 是分配格, L_3 和 L_4不是分配格.

称 L_3为钻石格, L_4为五角格.

L_3:$b\wedge(c\vee d) = b$ $b\wedge c\vee b\wedge d = a$ L_4:$c\vee(b\wedge d)$

有界格的定义

定义7.6 设L是格,

(1) 若存在$a\in L$使得$\forall x\in L$有 $a\preccurlyeq x$, 则称a为L的(全)下界

(2) 若存在$b\in L$使得$\forall x\in L$有 $x\preccurlyeq b$, 则称b为L的(全)上界

说明:

- 格L若存在全下界或全上界, 一定是惟一的. (偏序的反对称)
- 一般将格L的全下界记为0, 全上界记为1.

定义7.7 设L是格,若L存在全下界和全上界, 则称L 为有界格, 一般将有界格L记为$<L,\wedge,\vee,0,1>$.

有界格的性质

定理7.5 设<L,∧,∨,0,1>是有界格, 则$\forall a \in L$有

$$a \wedge 0 = 0,\ a \vee 0 = a,\ a \wedge 1 = a,\ a \vee 1 = 1$$

注意:

- 有限格$L=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$是有界格, $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$是$L$的全下界, $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$是$L$的全上界.
- 0是关于∧运算的零元,∨运算的单位元；1是关于∨运算的零元,∧运算的单位元.
- 对于涉及到有界格的命题, 如果其中含有全下界0或全上界1, 在求该命题的对偶命题时, 必须将0替换成1, 而将1替换成0.

有界格中的补元及实例

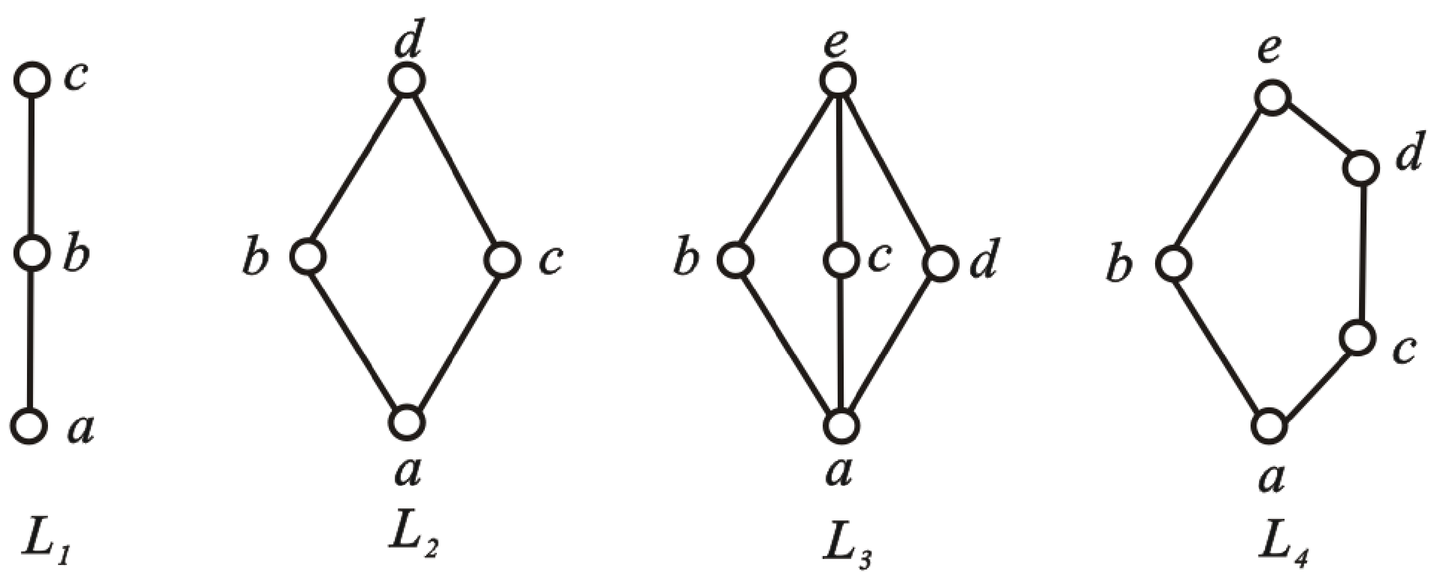
定义7.8 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格, $a\in L$, 若存在$b\in L$ 使得

$$a\wedge b=0 \text{ 和 } a\vee b=1$$

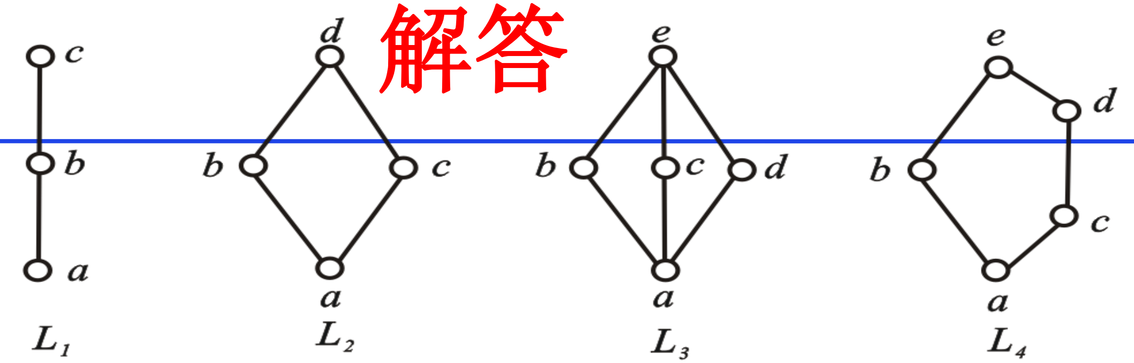
成立, 则称b是a的补元, 记为 $\bar{a}$或a'.

●注意：若b是a的补元, 那么a也是b的补元. a和b互为补元.

例7 考虑下图中的格. 针对不同的元素，求出所有的补元.



解答



(1) L_1中 a 与 c 互为补元, 其中 a 为全下界, c为全上界, b 没有补元(如,$\{b, a\}$的上确界b与全上界c不同).

(2) L_2中 a 与 d 互为补元, 其中 a 为全下界, d 为全上界, b与 c 也互为补元.

(3) L_3中a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b 和 d ; d 的补元是 b 和 c； b, c, d 每个元素都有两个补元.

(4) L_4中 a 与 e 互为补元, 其中 a 为全下界, e 为全上界, b 的补元是 c 和 d； c 的补元是 b； d 的补元是 b .

有界分配格的补元惟一性

定理7.6 设<L,∧,∨,0,1>是有界分配格. 若L中元素 a 存在补元, 则存在惟一的补元.

证 反证法, 假设b, c都是 a 的补元, 则有

$$a \vee b = 1,\ a \wedge b = 0$$

$$a \vee c = 1,\ a \wedge c = 0$$

从而有 $b=b\wedge 1=b\wedge(a\vee c)=(b\wedge a)\vee(b\wedge c)=0\vee(b\wedge c)=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c=1\wedge c=c$.

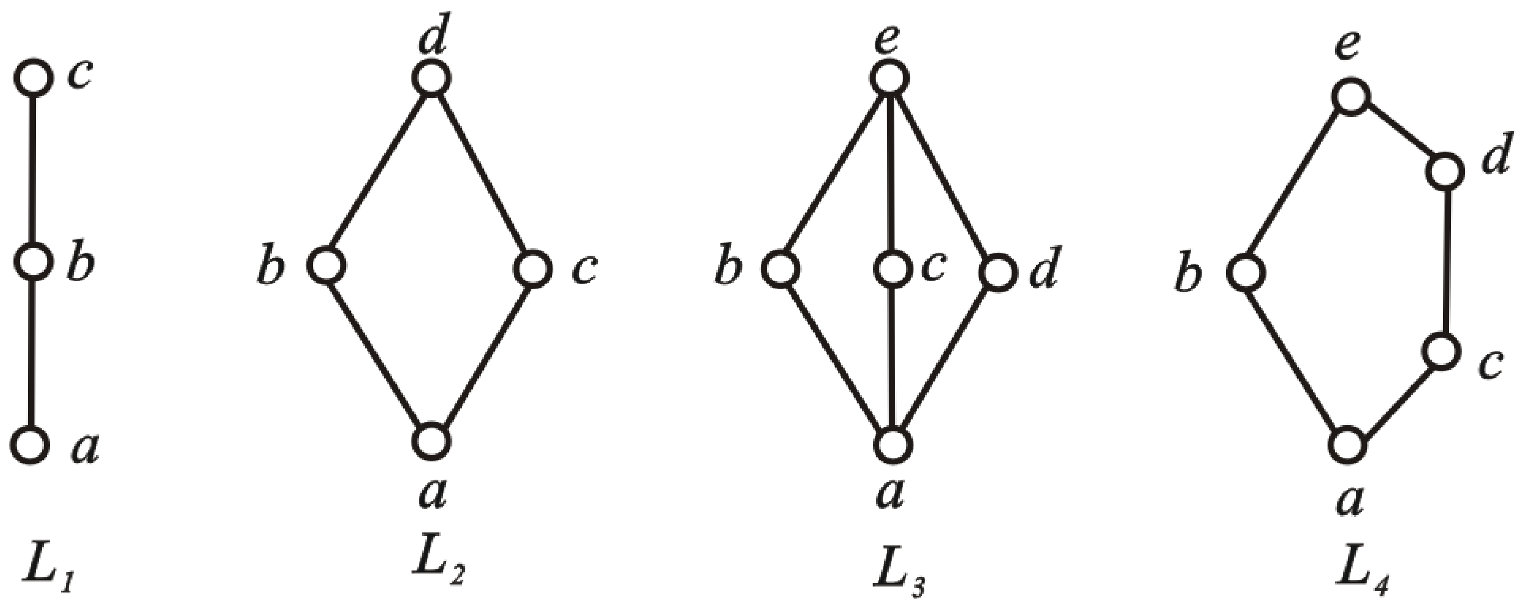
注意:

- 在任何有界格中, 全下界0与全上界1互补.
- 对于一般元素, 可能存在补元, 也可能不存在补元. 如果存在补元, 可能是惟一的, 也可能是多个补元. 对于有界分配格, 如果元素存在补元, 一定是惟一的.

有补格的定义

定义7.9 设<L,∧,∨,0,1>是有界格，若L中所有元素都有补元存在, 则称L为有补格.

例如, 图中的L_2, L_3和L_4是有补格, L_1不是有补格.



德摩根律

定理7.7 设<L,∧,∨>是有补分配格, 则对$\forall a, b \in L$,有

(1) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$

(2) $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

证 (1) 用分配律可证:

$$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = 0$$

$$(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = 1$$

所以，$(a' \wedge b')$是$(a \vee b)$的补，(1)成立。

有对偶律，(2)成立。

德摩根律的例子

命题逻辑的基本等值式:

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$,

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

集合算律:

$\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$

$\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$

布尔代数

定义7.10 如果一个格是有补分配格, 则称它为布尔格或布尔代数. 布尔代数标记为$<B,\wedge,\vee,',0,1>$, $'$为求补运算.

例8 设 S_{110} = {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110}是110的正因子集合，gcd表示求最大公约数的运算，lcm表示求最小公倍数的运算，问<*S*110, gcd, lcm>是否构成布尔代数？为什么？

解 (1) 不难验证S_{110}关于gcd 和 lcm 运算构成格. (略)

(2) 验证分配律 $\forall x, y, z \in S_{110}$ 有

$$\gcd(x, \mathrm{lcm}(y, z)) = \mathrm{lcm}(\gcd(x, y), \gcd(x, z))$$

(3) 验证它是有补格, 1作为*S*110中的全下界, 110为全上界, 1和110互为补元, 2和55互为补元, 5和22互为补元, 10和11互为补元, 从而证明了<*S*110, gcd, lcm>为布尔代数.

实例

例9 设B为任意集合, 证明B的幂集格$<P(B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, B>$构成布尔代数, 称为**集合代数.**

证 (1) $P(B)$关于$\cap$和$\cup$构成格, 因为$\cap$和$\cup$运算满足交换律, 结合律和吸收律.

(2) 由于$\cap$和$\cup$互相可分配, 因此$P(B)$是分配格.

(3) 全下界是空集$\varnothing$, 全上界是B.

(4) 根据绝对补的定义, 取全集为B, $\forall x \in P(B)$, $\sim x$是x的补元.

从而证明$P(B)$是有补分配格, 即布尔代数.

布尔代数的性质

定理7.8 设$<B,\wedge,\vee,',0,1>$是布尔代数, 则$\forall a\in B$, $(a')'=a$.

证 $(a')'$是a'的补元, a也是a'的补元. 由补元惟一性得$(a')'=a$.

布尔代数满足如下性质：

交换律、结合律、吸收律	格的定义
幂等律	格的性质
同一律、零一律	有界格定义及其性质
分配律	分配格定义
互补律(补元律)	有补格定义
双补律、德摩根律	有补分配格性质

布尔代数作为代数系统的定义

定义7.11 设$<B, *, \circ>$是代数系统, $*$和$\circ$是二元运算. 若$*$和$\circ$运算满足:

(1) 交换律, 即$\forall a,b\in B$有 $a*b = b*a$, $a\circ b = b\circ a$

(2) 分配律, 即$\forall a,b,c\in B$有

$$a*(b\circ c) = (a*b)\circ(a*c),\ a\circ(b*c) = (a\circ b) * (a\circ c)$$

(3) 同一律, 即存在$0,1\in B$, 使得$\forall a\in B$有$a *1 = a$, $a\circ 0 = a$

(4) 互补律, 即$\forall a\in B$, 存在 $a'\in B$ 使得 $a *a' = 0$, $a\circ a' = 1$

则称 $<B,*,\circ>$是一个布尔代数.

可以证明，布尔代数的两种定义是等价的.

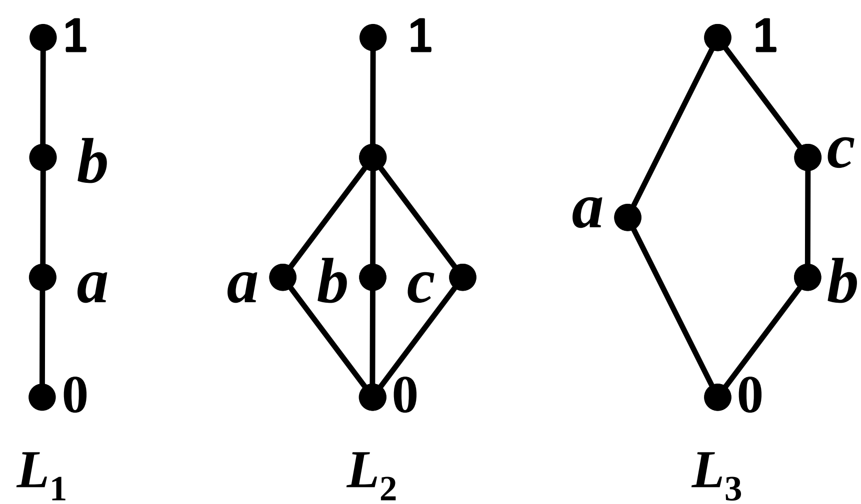
格的原子

定义7.12 设 L 是格, $0\in L$, $a\in L$, 若$\forall b\in L$有 $0\prec b\preccurlyeq a\Leftrightarrow b=a$, 则称 a 是 L 中的原子.

实例:

(1) 若L是B的幂集, 则L的原子就是B中元素构成的单元集

(2) 图中L_1的原子是a, L_2的原子是a, b, c, L_3的原子是a 和 b



有限布尔代数的表示定理

定义7.13 设有布尔代数$<B, \wedge, \vee, ', 0, 1>$, 如果$|B|$有限, 则称其为有限布尔代数.

定理7.9 (有限布尔代数的表示定理)

设B是有限布尔代数, A是B的全体原子构成的集合, 则B同构于A的幂集代数$<P(A), \cap, \cup, \sim, \varnothing, A>$.

实例

实例：(1) S_{110} = {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110}是关于gcd, lcm运算构成的布尔代数. 它的原子是2, 5和11, 因此原子的集合 A = {2,5,11}. 幂集

$$P(A) = \{\varnothing,\{2\},\{5\},\{11\},\{2,5\},\{2,11\},\{5,11\},\{2,5,11\}\}.$$

幂集代数是$<P(A),\cap,\cup,\sim,\varnothing,A>$. 只要令 $f: S_{110}\to P(A)$,

$$f(1) = \varnothing,\ f(2) = \{2\},\ f(5) = \{5\},\ f(11) = \{11\},$$

$$f(10) = \{2,5\},\ f(22) = \{2, 11\},\ f(55) = \{5, 11\},\ f(110) = A,$$

那么 f 就是从S_{110}到幂集$P(A)$的同构映射.

推论

推论1 任何有限布尔代数的基数为2^n, $n\in\mathbf{N}$.

证 设B是有限布尔代数, A是B的所有原子构成的集合, 且 $|A| = n$, $n\in N$. 由定理得 $B \simeq P(A)$, 而 $|P(A)| = 2^n$, 所以 $|B| = 2^n$.

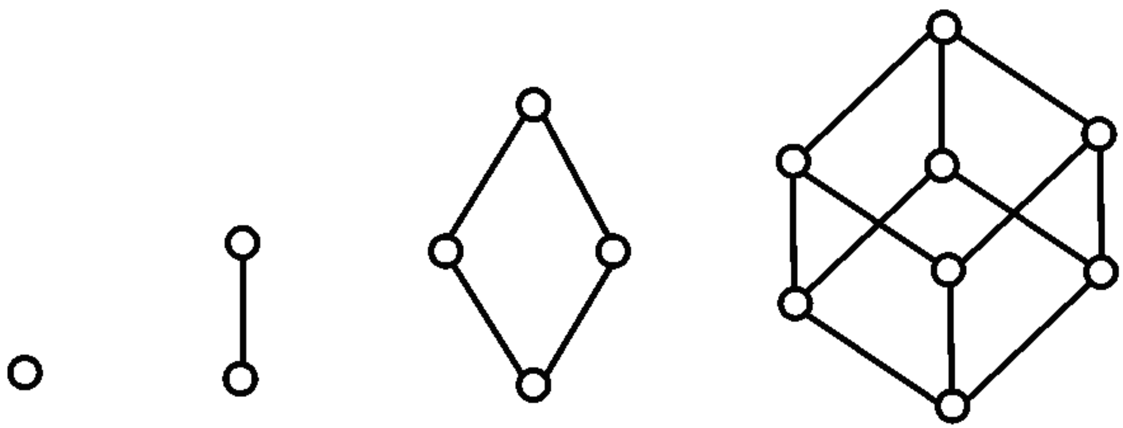
推论2 任何等势的有限布尔代数都是同构的. (证明省略)

结论：

- 有限布尔代数的基数都是2的幂,
- 对于任何自然数n, 2^n元的布尔代数必同构.
- 一般, 我们关心的布尔代数的最小元素数是2, 称为最小布尔代数, 例如开关代数$<\{0,1\}, \wedge, \vee>$是所有布尔代数的最小子代数

实例

下图给出了 1 元, 2 元, 4 元和 8 元的布尔代数.



作业

徐 P112　5

P113　13

P114　24　31　32　33