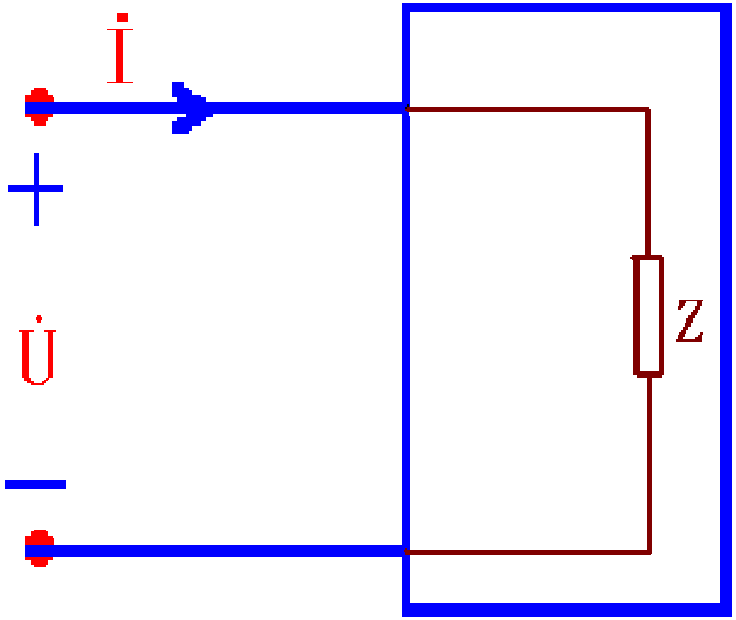
第八章 谐振电路

谐振现象： 含有RLC 的无源单口网络在正弦激励作用下，对于某些频率出现端口电压、电流同相位。



$Z = R+jX$ 或 $Y= G+jB$

谐振条件：

$X = X_L - X_C = 0$

或：

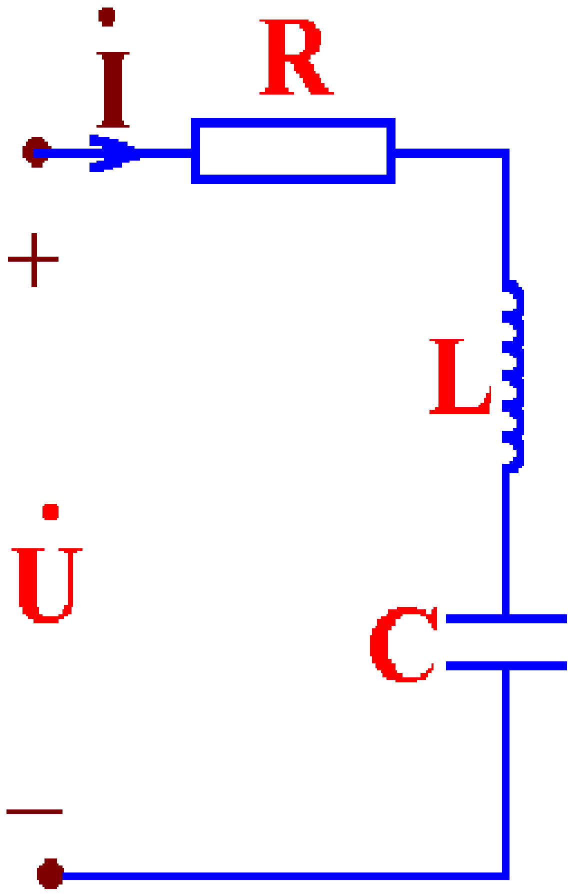
$B = B_C - B_L = 0$

谐振分类：

1、串联谐振
2、并联谐振
（简单谐振）

3、串并谐振
4、耦合谐振
（复杂谐振）

8-1 串联谐振



一、谐振条件与谐振频率：

谐振条件：$X = X_L - X_C = 0$

即，$\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0$

谐振频率：

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

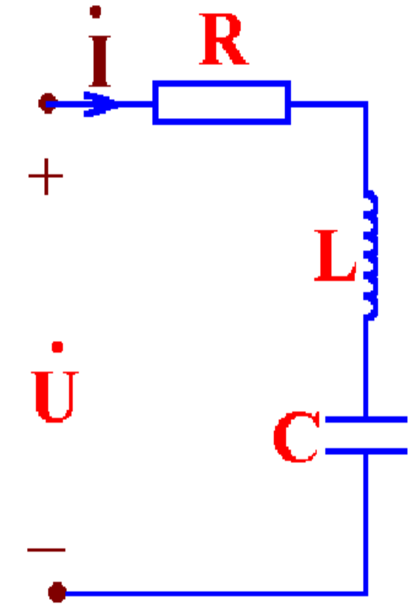
或，$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

谐振产生方法：

1）信号源给定，改变电路参数；

2）电路给定，改变信号源频率。

二、谐振参数：



1、谐振阻抗： 谐振时电路的输入阻抗 Z_0

串联谐振电路： $Z_0=R$

2、特征阻抗： 谐振时的感抗或容抗 ρ

串联谐振电路： $$\rho=\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C}=\sqrt{\frac{L}{C}}$$

3、品质因数： 谐振时特征阻抗与电路总阻抗的比值。

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R}=\frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

谐振时电感电压(或电容电压)与电源电压的比值。

三、串联谐振特性

1）阻抗最小：$Z_0=R$

2） $\varphi_u-\varphi_i=0$（电流与电压同相位）

3） $\cos\varphi=\cos(\varphi_u-\varphi_i)=1$

4） 电流达到最大值：

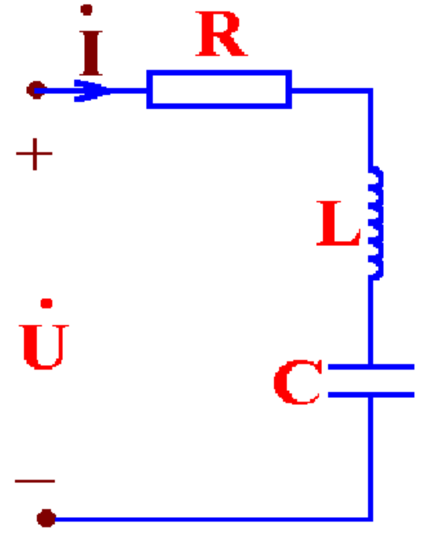
$$I_0=I_m=U/R$$

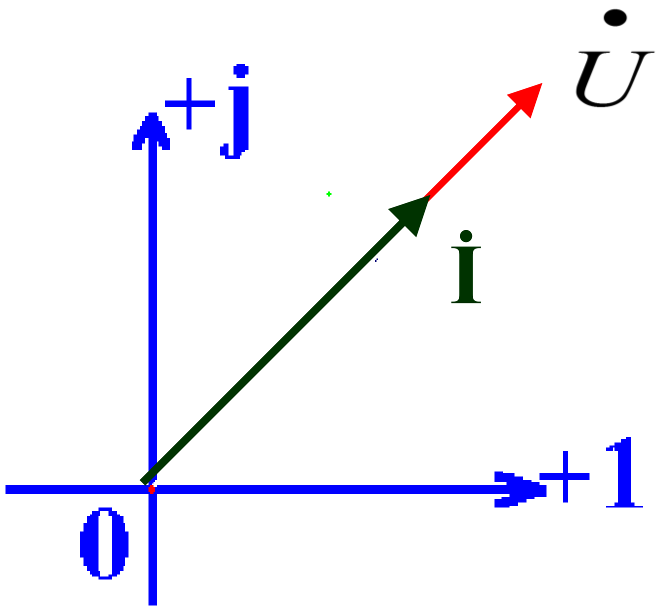
5） L、C两端出现过电压：

$$U_{L0}=I_0X_{L0}=\frac{U_S}{R}X_{L0}=QU_S$$

$$U_{C0}=I_0X_{C0}=\frac{U_S}{R}X_{C0}=QU_S$$

6）相量图





①能否用串联谐振来提高功率因数?

②如何判断电路达到谐振?

四、频率特性：

电路各个物理量随激励信号频率ω变化的特性。

1、阻抗频率特性：

$$X_L = \omega L$$

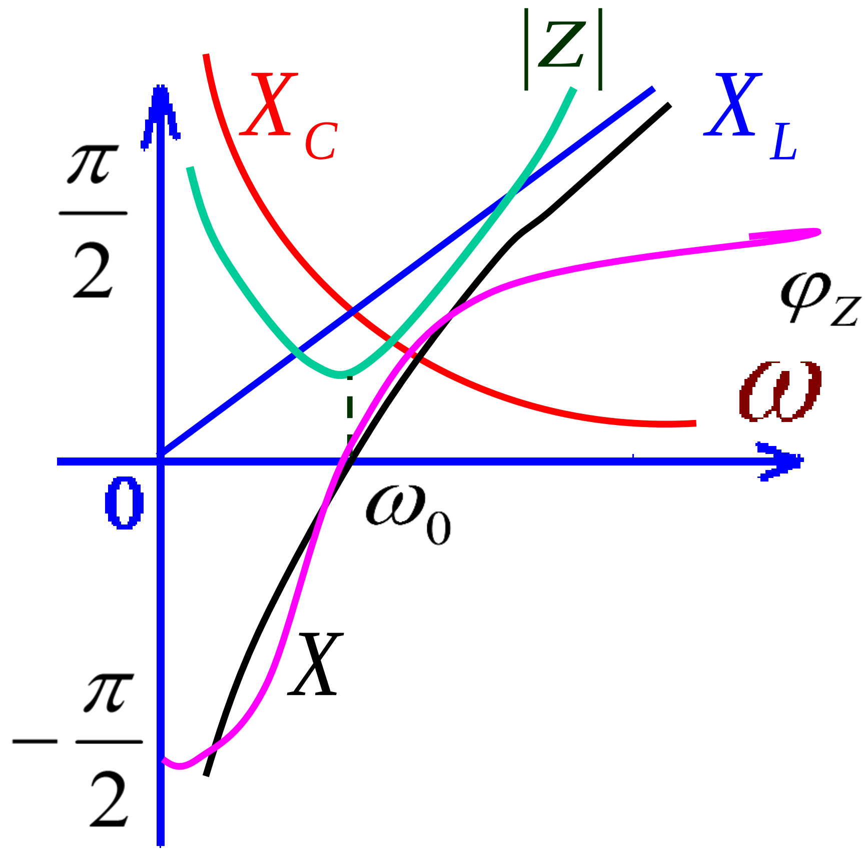
$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$X = X_L - X_C$$

$$Z = R + jX$$

其中：$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi_Z = tg^{-1}\frac{X}{R} = tg^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



2、导纳频率特性：

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z|\angle\varphi_Z}$$

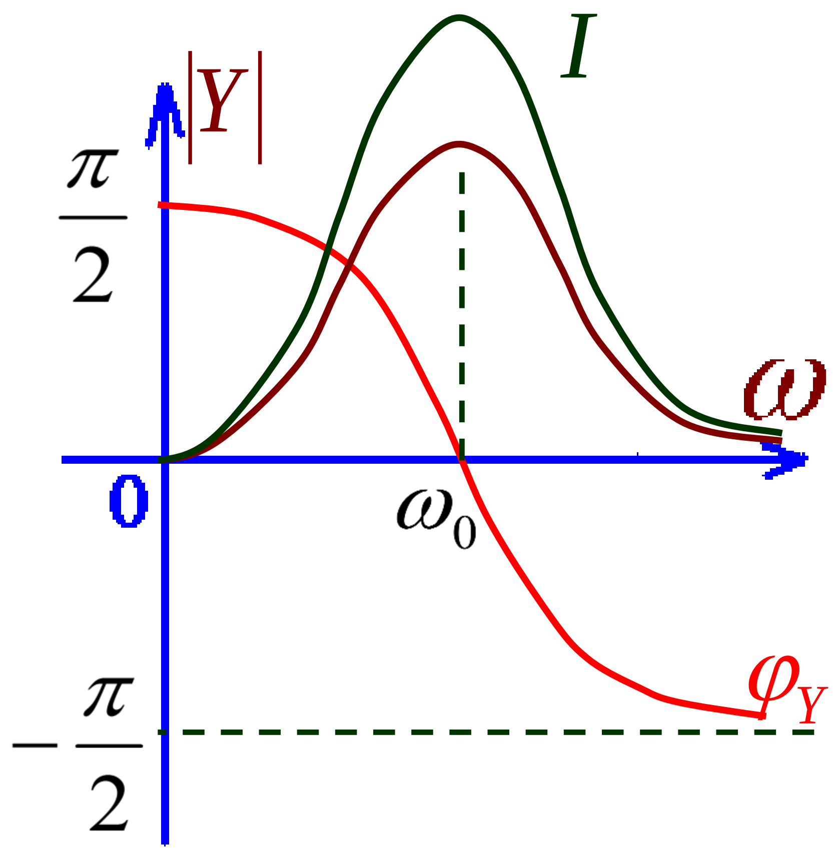
$$|Y| = \frac{1}{|Z|}$$

$$\boxed{\varphi_Y = -\varphi_Z}$$

3、电流频率特性：

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{\dot{U}}{|Z|\angle\varphi_Z}$$

其中： $I = U|Y|$



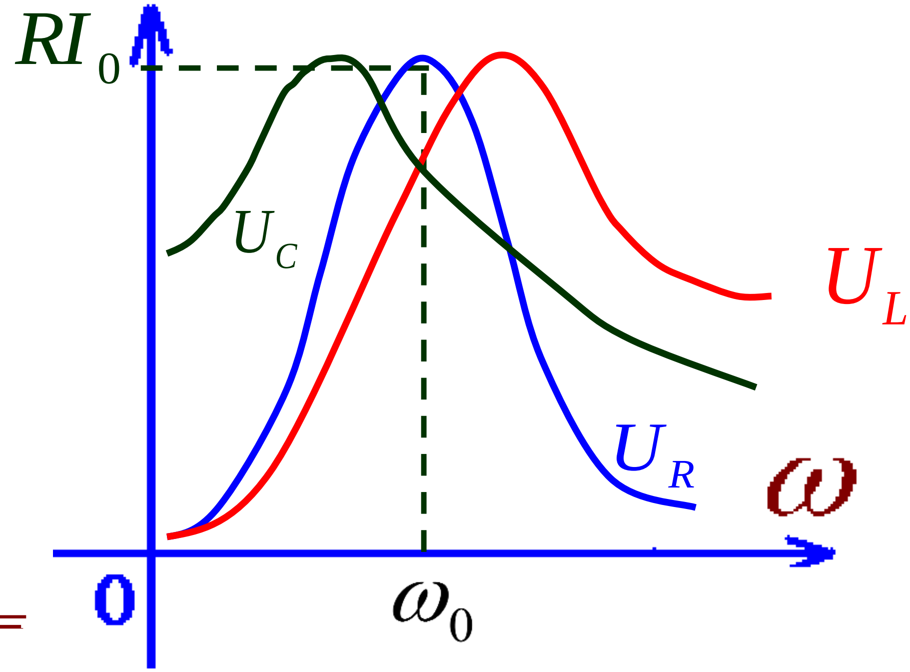
4、电压频率特性：

$$U_R = RI$$

$$U_L = \omega L I$$

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I$$

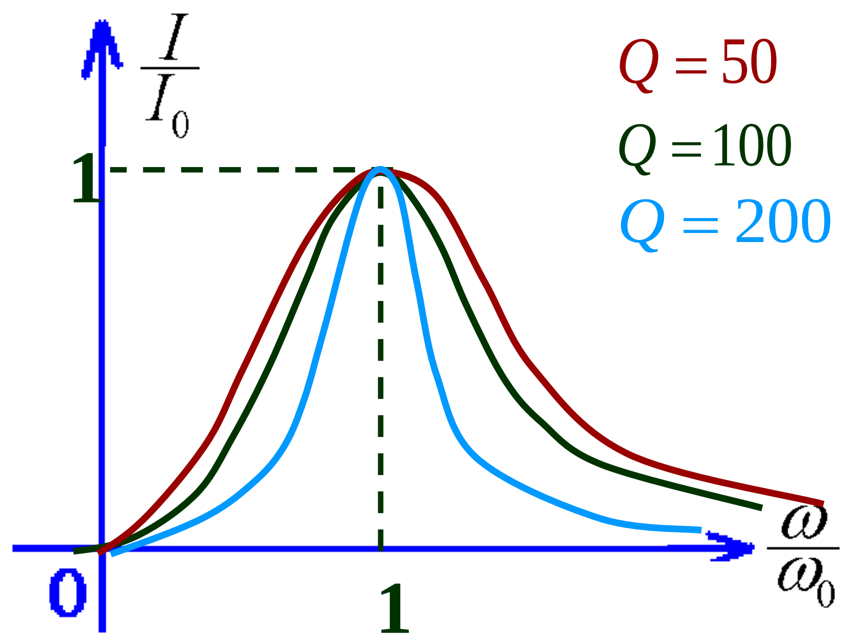
$$I = U|Y| = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$



5、相对频率特性：

（通用频率特性、归一化频率特性）

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$



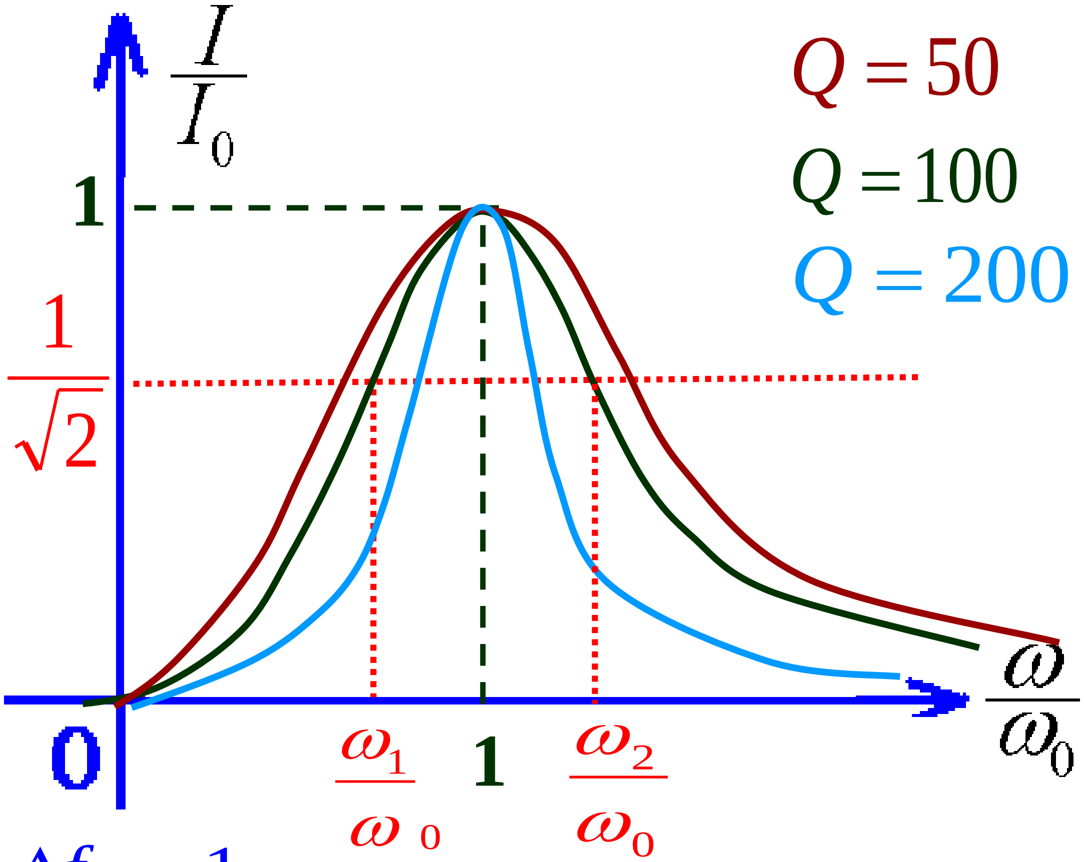
6、Q对频率特性的影响：

$$Q=\frac{\rho}{Z_0}=\frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

7、选择性：

选择有用信号、抑制无用信号的能力。



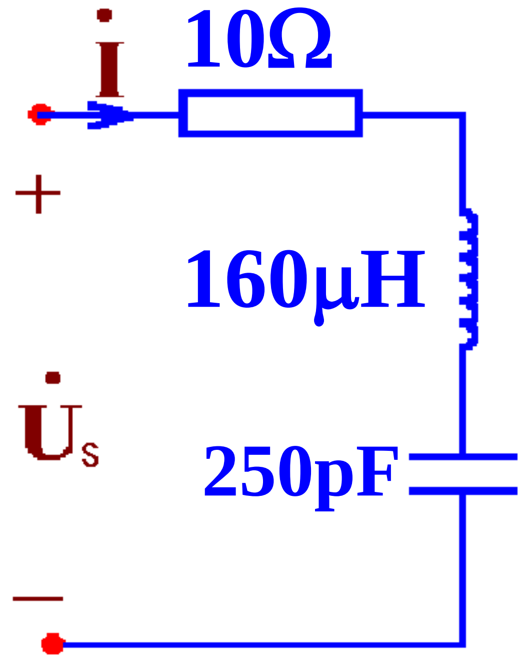
8、通频带：

当电源的ω发生变化时，能使电流 $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ 的频率范围。

通频带：$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$

相对通频带：$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{1}{Q}$ 或 $\frac{\Delta f}{f_0}=\frac{1}{Q}$

例1： 图示谐振电路, 已知U_s=1.0mV , 求f_0、Q、Δf、U_{L0}、I_0。



解:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 796kHz$$

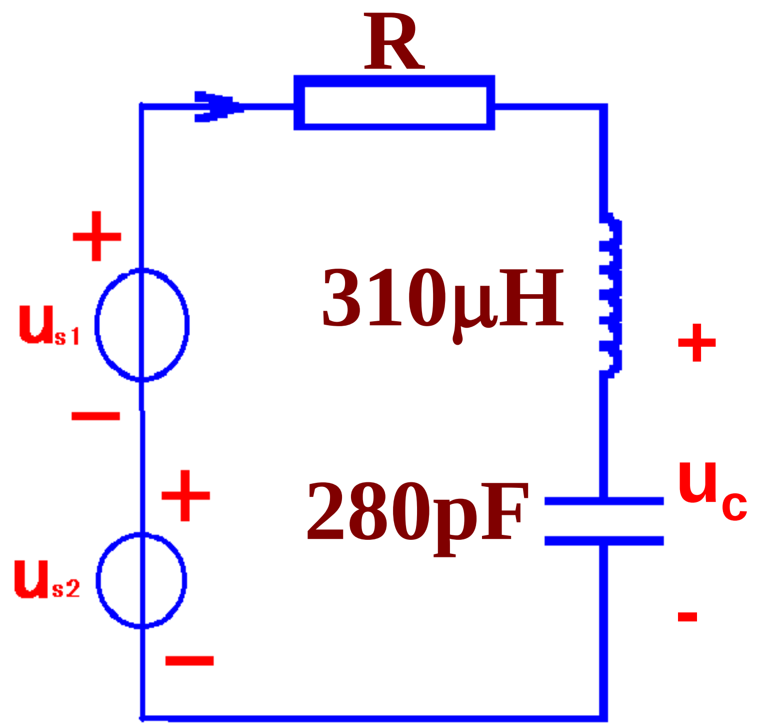
$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = 80$$

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = 9.95kHz$$

$$I_o = \frac{U_s}{R} = 0.1mA \qquad U_{Lo} = QU_s = 80mV$$

或者，$U_{Lo} = \omega_0 L I_0 = 2\pi f_0 I_0$

例2： 如图所示谐振电路, 已知Q =50， U_{s1}=1mV，f_1=540kHz; U_{s2}=1mV，f_2 =600kHz .求Us1和Us2 分别在电容C上产生的电压U_{C1}和U_{C2}。



解：
$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=540kHz$$

可见，f_1= f_0， 电路对540kHz谐振。

$$U_{C1}=QU_{s1}=50mV$$

$$I_0=\frac{U_{L1}}{2\pi f_0L}=47.5\mu A$$

电路对600kHz处于失谐：
$$I=\frac{I_0}{\sqrt{1+Q^2(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f})^2}}=4.48\mu A$$

$$U_{C2}=I\frac{1}{2\pi f_2C}=4.25mV$$

五、电源内阻的影响

1、谐振频率：不变

$$\omega_{0e} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

2、特征阻抗：不变

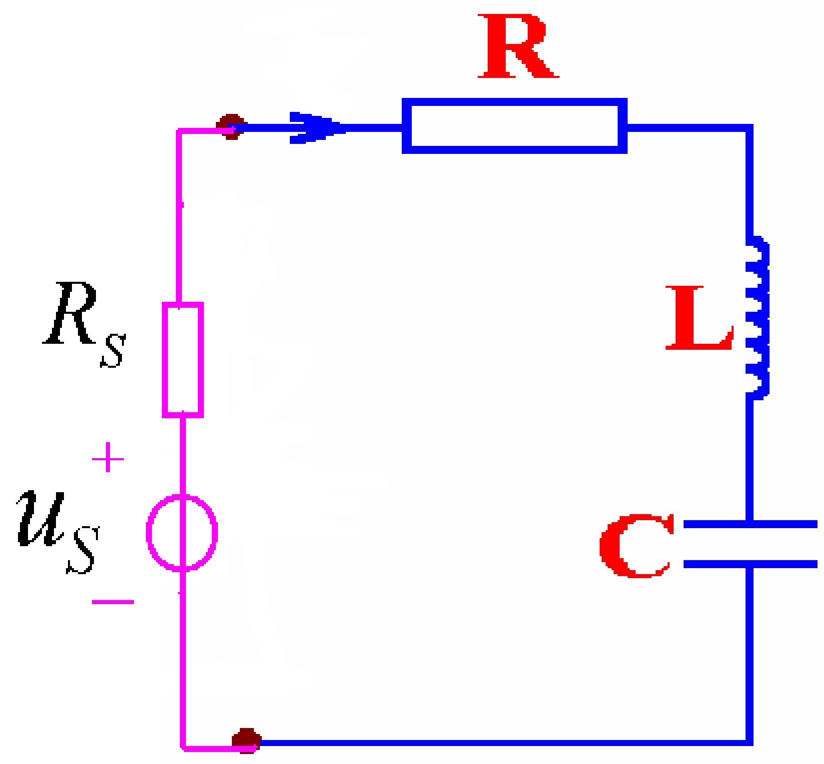
$$\rho_e = \omega_0 L = \rho$$

3、品质因数：变小

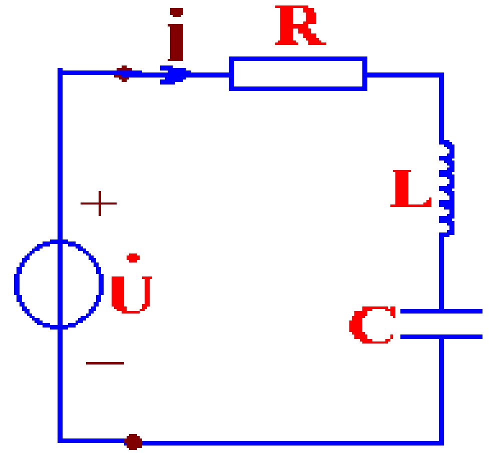
$$Q_e = \frac{\rho}{R_S + R} < Q$$

4、通频带：变大（展宽）

$$\Delta\omega_e = \frac{\omega_{0e}}{Q_e} = \frac{\omega_0}{Q_e} > \Delta\omega$$



8-2 并联谐振

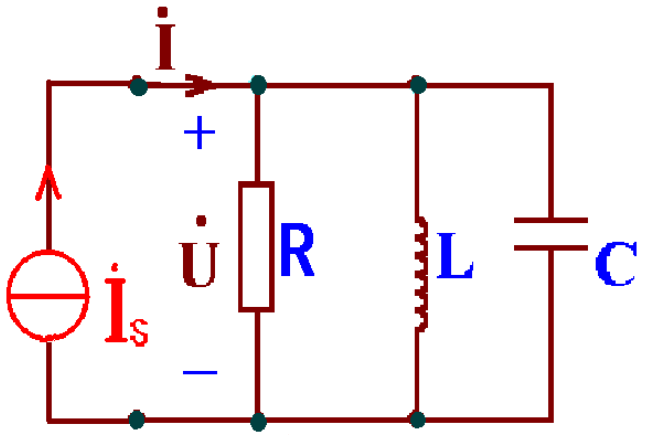


一、谐振条件与谐振频率

电路模型(a) :

$$\dot{I}_s = \dot{U}\,Y$$

$$Y = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$



(a)

谐振条件:

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

谐振频率:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

或:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

谐振阻抗:

$$Z_0 = R$$

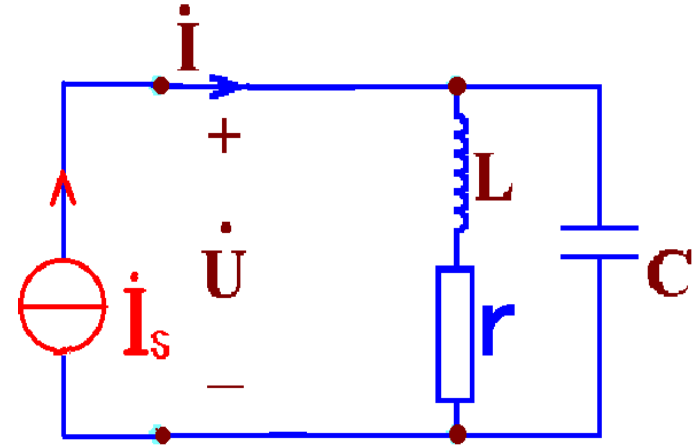
特征阻抗:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

电路模型(b)： $\dot{I}_s = \dot{U}\,Y$

$$Y = j\omega C + \frac{1}{r + j\omega L}$$

$$= \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} + j[\omega C - \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2}]$$



(b)

谐振导纳：$Y_0 = \dfrac{r}{r^2 + (\omega_0 L)^2}$

谐振条件：$\omega C - \dfrac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} = 0$

谐振阻抗：$Z_0 = \dfrac{L/C}{r}$

谐振频率：$\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - (\dfrac{r}{L})^2} = \omega_0$

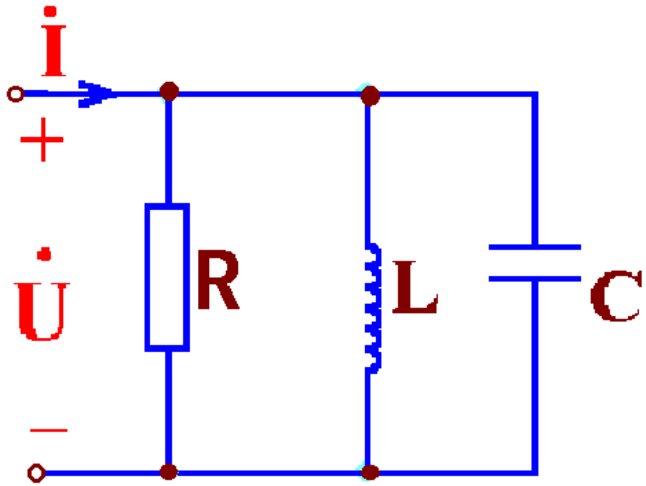
特征阻抗：$\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$

实际工程中ωL>>r，原因：①ω0很高，② ω在ω0 附近变化，即，ω也很大，③ r十分小。故，ωL >> r，r可以忽略。

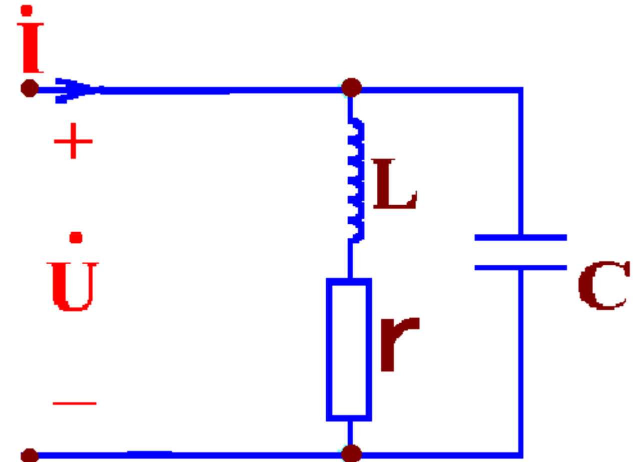
因此，$\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ 或 $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

二、电路等效变换：

谐振时电路端口伏安关系不变



(a)



(b)

谐振阻抗：

$$Z_0 = R \qquad\qquad Z_0 = \frac{L/C}{r}$$

等效参数：

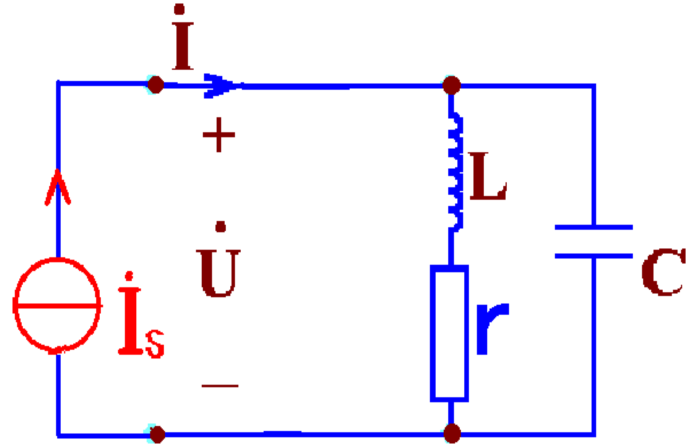
$$R = \frac{L/C}{r} \qquad\qquad r = \frac{L/C}{R}$$

品质因数：

$$Q = \frac{R}{\ } \qquad\qquad Q = \frac{\sqrt{L/C}}{r}$$

谐振时的感纳(或容纳)与电路的总导纳的比值。

三、并联谐振特性



1) 导纳最小： $Y_0 = \dfrac{r}{L/C}$

2) $\varphi_u - \varphi_i = 0$

3) $\cos\varphi = 1$

4) 电压达到最

思 考：

的方法提

$U = I_s Z_0$

$$I_{L0} = \frac{U_0}{\sqrt{r^2 + (\omega_0 L)^2}} \approx \frac{U_0}{\omega_0 L}$$

$$= \frac{Z_0 I_S}{\omega_0 L} = \frac{\dfrac{1}{\omega_0 L}}{\dfrac{1}{Z_0}} I_S = Q I_S$$

5) L、C中出现过电流：

$I_{L0} \approx I_{C0} = Q\ I_s$

+1

$$I_{C0} = \frac{U_0}{1/\omega_0 C} = \frac{Z_0 I_S}{1/\omega_0 C} = \frac{\omega_0 C}{1/Z_0} I_S = Q I_S$$

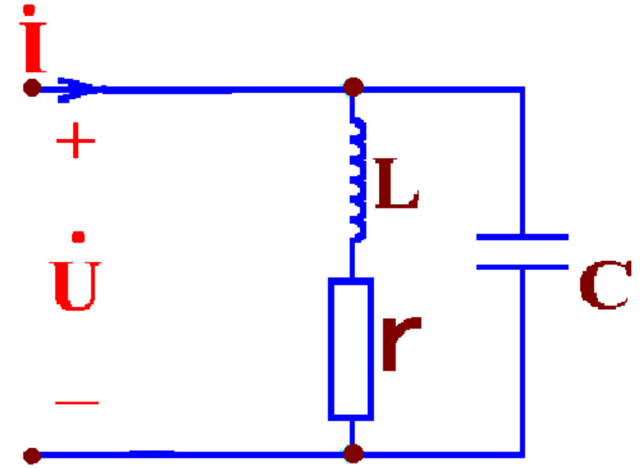
Q：谐振时电容电流（或电

6) 相量图

$Q = \dfrac{\ }{r}$

四、频率特性：

1、阻抗频率特性：

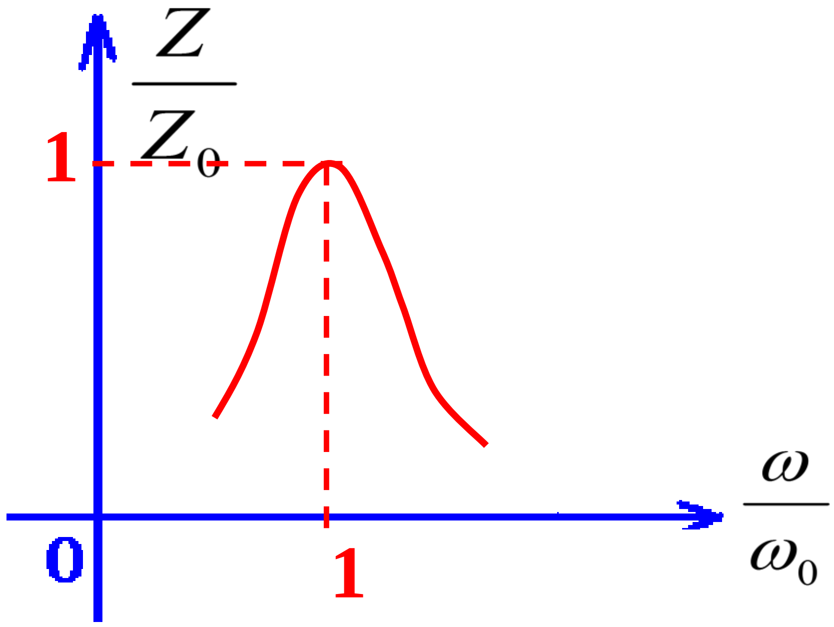


$$Z=\frac{(r+j\omega L)\dfrac{1}{j\omega C}}{(r+j\omega L)+\dfrac{1}{j\omega C}}$$

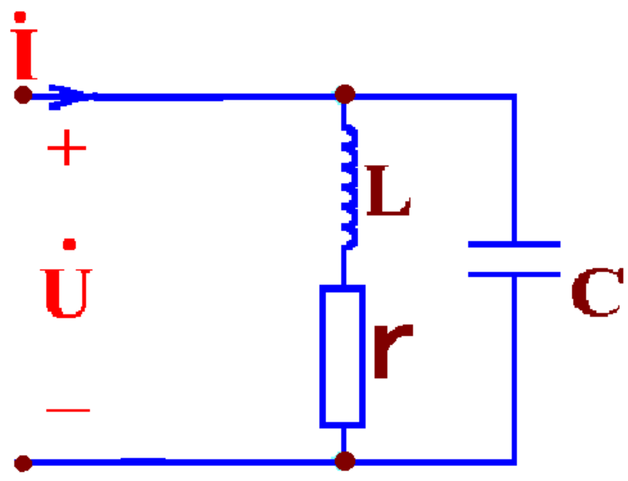
$$=\frac{\dfrac{L}{C}}{r+j(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}$$

$$\left|\frac{Z}{Z_0}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

阻抗模值的相对频率特性

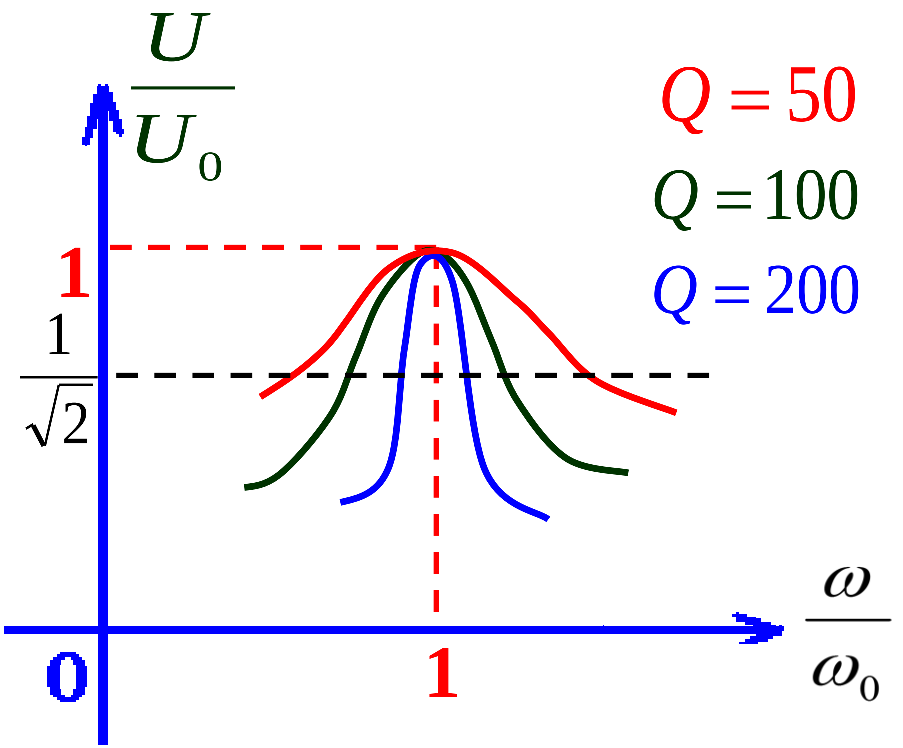


2、电压频率特性：



$$U = I|Z| = \frac{IZ_o}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$



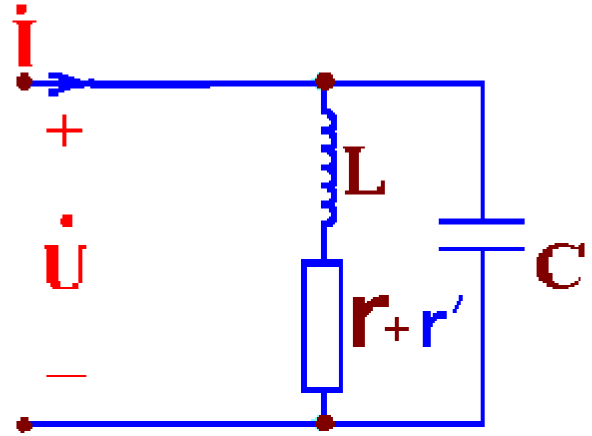
五、Q对频率特性的影响：

Q增大，特性曲线尖锐；
Q减小，特性曲线平坦。

因此： 选择性与Q成正比；
通频带与Q 成反比。

可见：选择性与Q成正比；
通频带与Q 成反比。
且：

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$



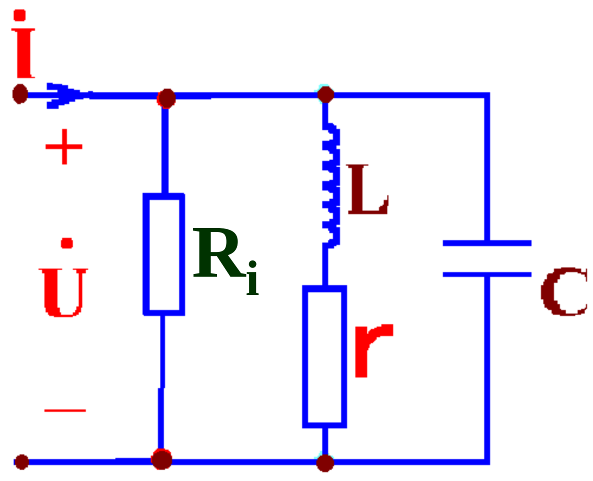
说明：
选择性、通频带、Q对频率特性的影响，概念上与串联谐振电路的相同。

六、并联电阻R_i的影响：

$$r' = \frac{L/C}{R_i}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \rho = \sqrt{L/C}$$

$$Q = \frac{Q_0}{1+\frac{Z_0}{R_i}}, \quad Z = \frac{Z_0}{1+\frac{Z_0}{R_i}}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

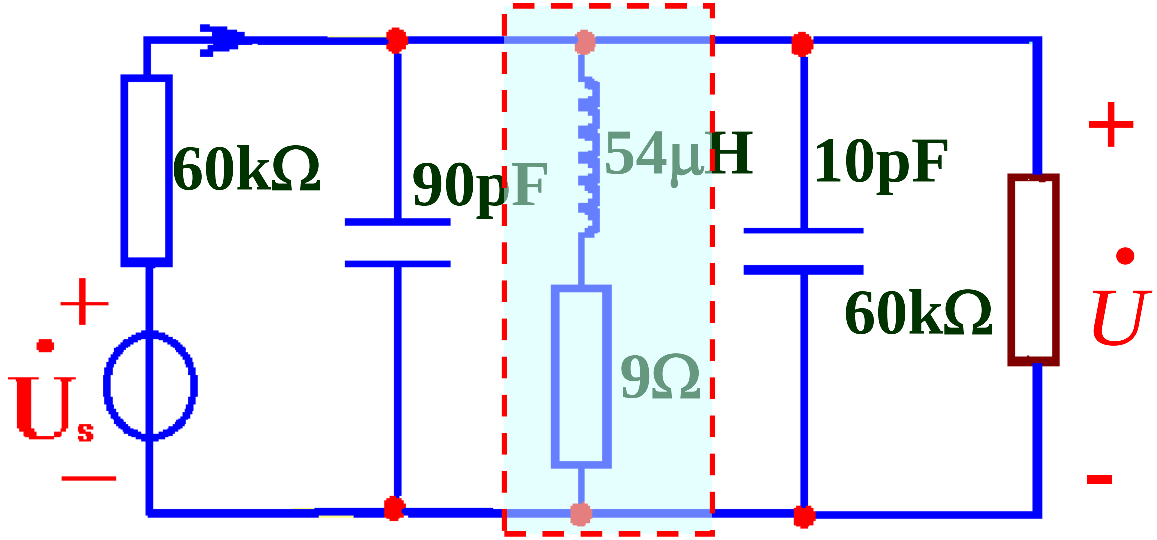


R_i：称为展宽电阻

品质因数、谐振阻抗下降；通频带增宽。

例1: 图示谐振电路, 已知U_s=12V , 求f_0、ρ、Q、Δf、U、Z_0。

解: $$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 2.17\text{MHz}$$

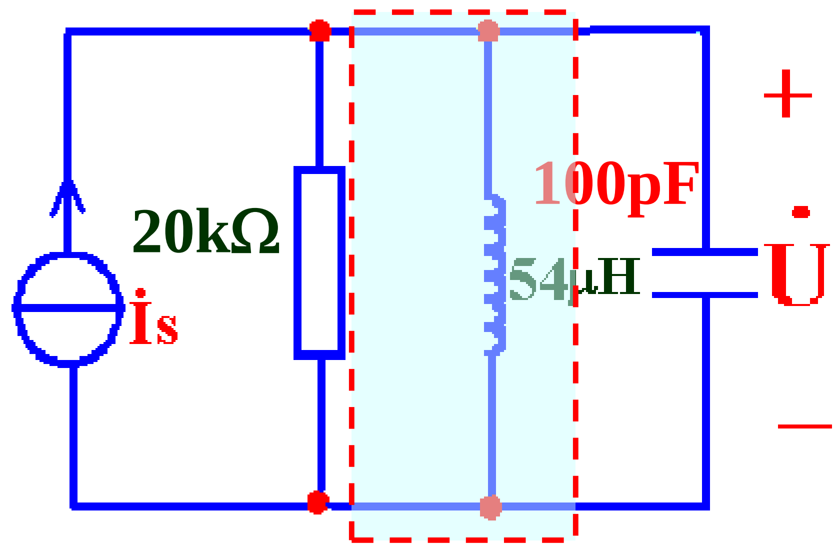


$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = 735\Omega$$

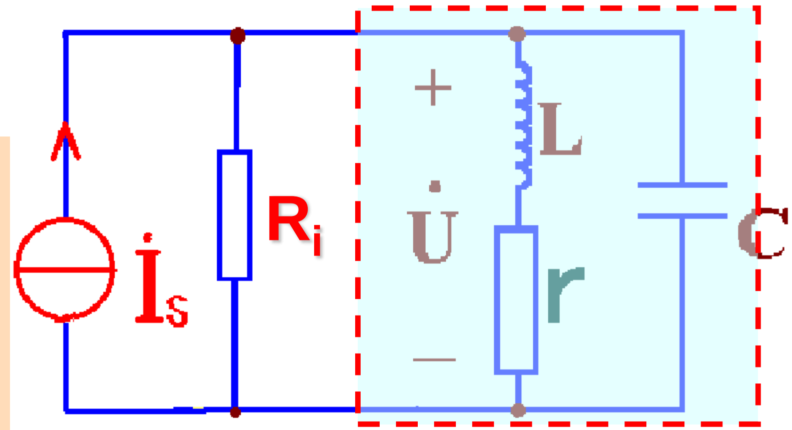
$$R = \frac{L/C}{r} = 60\text{k}\Omega \qquad Z_0 = 20\text{k}\Omega$$

$$Q = \frac{Z_o}{\rho} = 27.21 \qquad U = Z_o I_s = 4\text{V}$$

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = 79.8\text{kHz}$$



例2：图示谐振电路, 已知I_s=1mA , R_i=40k Ω, L=100 μH, C=100pF, r=25 Ω 。1）求谐振回路ω_0、ρ、Q、Z_0、 Δ ω; 2）求整个电路ω_{0e}、ρe、Q_e、Z_{0e}、 Δ ω_e; 3）求各支路电流和电压U。



解：1）谐振回路:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = 1k\Omega \qquad Q = \frac{\sqrt{L/C}}{r} = 40$$

$$Z_0 = \frac{L/C}{r} = 40k\Omega \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 250k(rad/s)$$

2）整个回路:

$$\omega_{0e} = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^7 rad/s, \qquad \rho_e = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = 1k\Omega$$

$$Q_e = \frac{Q}{1+\dfrac{Z_o}{R_i}} = 20 \qquad Z_{oe} = \frac{Z_o}{1+\dfrac{Z_o}{R_i}} = 20k\Omega$$

$$\Delta\omega_e = (1+\frac{Z_o}{R_i})\Delta\omega = 500k(rad/s)$$

3）各支路电流:

$$U = Z_{oe} I_s = 20V$$

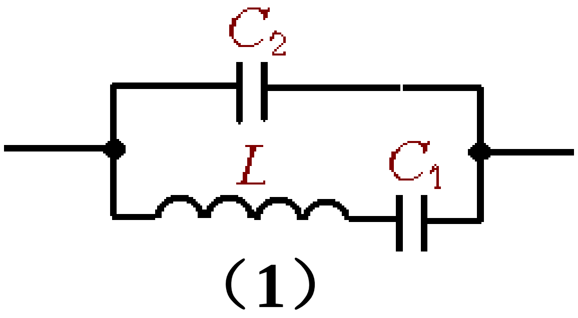
$$I_{R_i} = \frac{U}{R_i} = 0.5mA$$

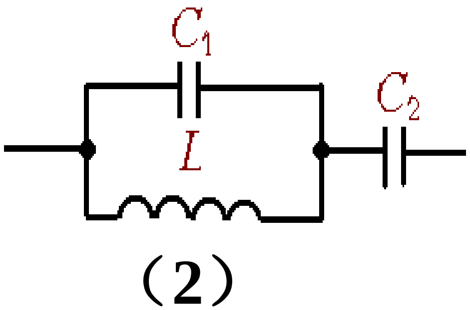
$$I_o = \frac{U}{Z_o} = 0.5mA$$

$$I_L \approx I_C = QI_o = 20mA$$

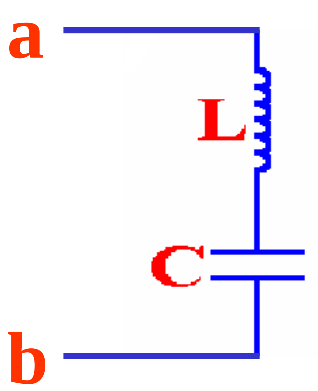
* 8-3 串、并联谐振

- 讨论由纯电感和纯电容所构成的串并联电路
- 仅讨论“谐振频率”





一、L、C串联谐振

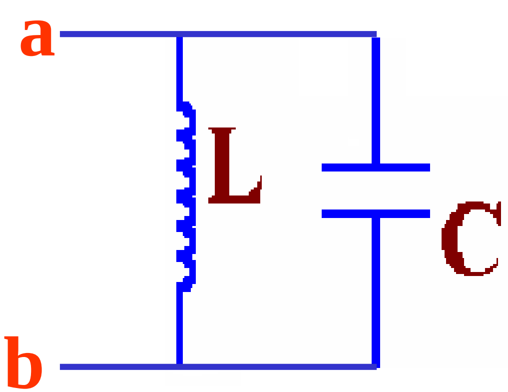


$$Z_{ab} = j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0\text{时},$$

发生谐振

故，Z=0，相当于a、b短路

二、L、C并联谐振

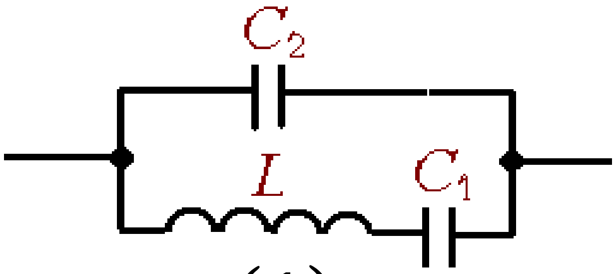


$$Y_{ab} = j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = 0\text{时},$$

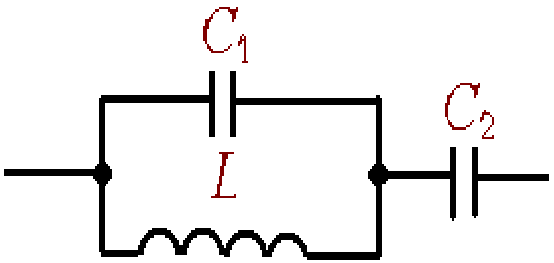
发生谐振

故，Z=∞，相当于a、b开路

三、串并联谐振（具有两个谐振点）



（1）



（2）

图(1)：

1、L、C1 发生串联谐振（第1个谐振点）

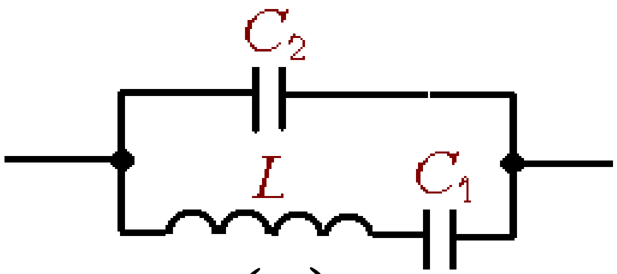
2、L与C1串联阻抗呈纯感性，L、C1、C2发生并联谐振（第2个谐振点）

图(2)：

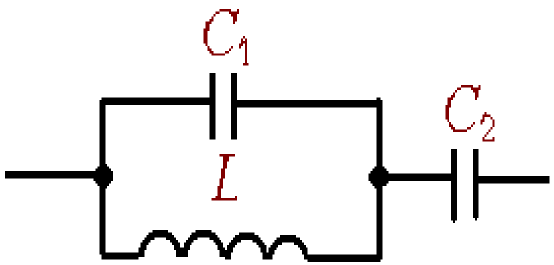
1、L、C1 发生并联谐振（第1个谐振点）

2、L与C1并联阻抗呈纯感性，L、C1、C2发生串联谐振（第2个谐振点）

求图示电路谐振频率：



（1）



（2）

解：

$$Z=\frac{-j\frac{1}{\omega C_1}\times j\omega L}{-j\frac{1}{\omega C_1}+j\omega L}-j\frac{1}{\omega C_2}$$

$$\omega_{串}=\frac{1}{\sqrt{LC_1}}$$

$$\omega_{并}=\frac{1}{\sqrt{LC_1}}$$

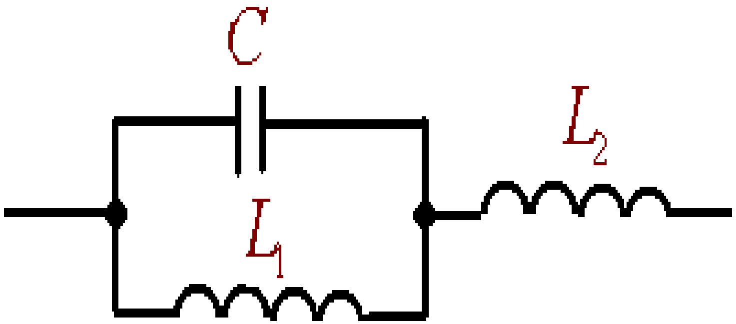
$$=\frac{-j\frac{L}{C_1}}{\omega L-\frac{1}{\omega C_1}}-j\frac{1}{\omega C_2}$$

$$\omega_{并}=\frac{1}{\sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}}$$

$$\omega_{串}=\frac{1}{\sqrt{L（C_1+C_2）}}$$

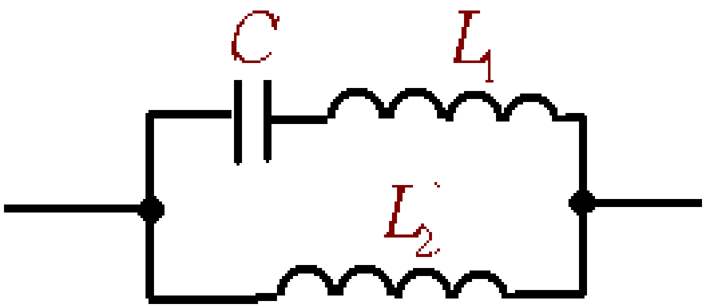
求图示电路谐振频率：

串联谐振：Z=0（ 短路 ）；并联谐振：Y=0或Z=∞（开路 ）



$$\omega_{并} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$$

$$\omega_{串} = \frac{1}{\sqrt{C \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}}}$$



$$\omega_{串} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}$$

$$\omega_{并} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}$$

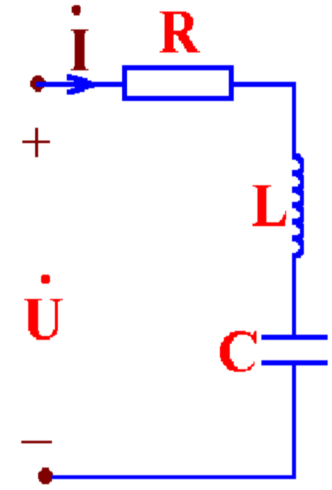
本章小结

1. 串联谐振

谐振条件、谐振频率、谐振阻抗、特征阻抗、品质因数、谐振特性;

频率特性（阻抗、导纳、电流、电压、相对特性、选择性、通频带）

品质因数对频率特性的影响



2. 并联谐振

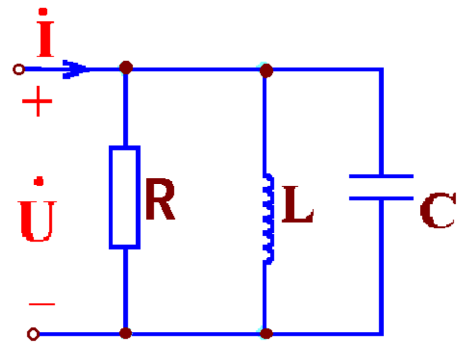
谐振条件、谐振频率、谐振阻抗、特征阻抗、品质因数、谐振特性;

电路等效变换

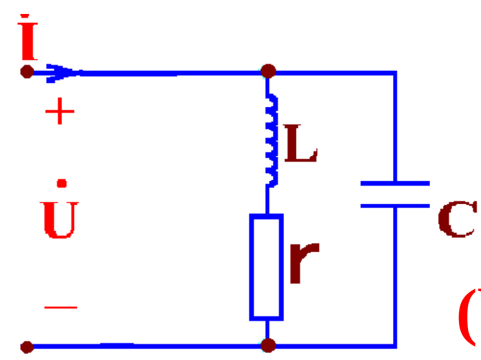
频率特性（阻抗、电压、选择性、通频带）

品质因数对频率特性的影响

并联电阻R_i的影响



(a)



(b)

3. 串并联谐振