例 求解二元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = -4 \end{cases}$$

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1) - 6 \quad = -7 \neq 0$$

可求得 $D^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 7$ ， $D^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -7$

解为 $x_1 = \dfrac{D^{(1)}}{D} = \dfrac{7}{-7} = -1$ ， $x_2 = \dfrac{D^{(2)}}{D} = \dfrac{-7}{-7} = 1$

例　求解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

解　系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & -6 & -4 \end{vmatrix} = 8 + 21 + 6 - 7 - (-12) - (-12) = 52$$

又有　$D^{(1)} = 52$，$D^{(2)} = -52$，$D^{(3)} = 156$

解为　$x_1 = \dfrac{D^{(1)}}{D} = 1$，$x_2 = \dfrac{D^{(2)}}{D} = -1$，$x_3 = \dfrac{D^{(3)}}{D} = 3$

例 排列3 1 4 2 5 的逆序数为

$$\tau\,(3\ 1\ 4\ 2\ 5\,)= 2+0+1+0+0 = 3$$

自然排列1 2 3 $\cdots$ n的逆序数是0；

排列$n\ (n-1)\cdots 1$的逆序数为

$$\tau=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}$$

例 下列乘积项中，哪些可以构成相应阶行列式中的项？

1) $-a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{51}$； 2) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$。

解 1）不能构成。乘积项中有两个第1列的元素；

2）可以构成。重排为

$$a_{12}a_{23}a_{36}a_{45}a_{54}a_{61}$$

因为 $\tau(236541)=1+1+3+2+1=8$

故该项符号为正，可以构成6阶行列式中的项。

例 计算4阶行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$。

解 先求所有乘积项 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$：

$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=56$，　$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-98$

$(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-36$，　$(-1)^{\tau(1342)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=84$

$(-1)^{\tau(1423)}a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}=-72$，　$(-1)^{\tau(1432)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}=96$

$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-60$，　$(-1)^{\tau(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}=105$

$(-1)^{\tau(2314)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}=50$，　$(-1)^{\tau(2341)}a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}=-140$

$(-1)^{\tau(2413)}a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}=100$，　$(-1)^{\tau(2431)}a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}=-160$

$(-1)^{\tau(3124)}a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}=54$，　$(-1)^{\tau(3142)}a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}=-126$

$(-1)^{\tau(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-70$，　$(-1)^{\tau(3241)}a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}=196$

$(-1)^{\tau(3412)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=-120$，　$(-1)^{\tau(3421)}a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}=144$

$(-1)^{\tau(4123)}a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}=-54$，　$(-1)^{\tau(4132)}a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}=72$

$(-1)^{\tau(4213)}a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}=70$，　$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-112$

$(-1)^{\tau(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}=-60$，　$(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=72$。

再求其代数和，得

$$D=56-98-36+84-72+96-60+105+50-140+100$$
$$-160+54-126-70+196-120+144-54+72$$
$$+70-112-60+72=-9$$

例 计算下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分析 乘积项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$：

$a_{1p_1}=0\,(p_1>1)$， 取 $p_1=1$；

$a_{2p_2}=0\,(p_2>2)$，取 $p_2=2$；

……

$a_{n-1,p_{n-1}}=0\,(p_{n-1}>n-1)$， 取 $p_{n-1}=n-1$；$p_n=n$。

解 $D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

上页 下页 返回

上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分析 乘积项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$：

$a_{1p_1}=0\,(p_1<n)$， 取$p_1=n$；

$a_{2p_2}=0\,(p_2<n-1)$，取$p_2=n-1$；

……

$a_{n-1,p_{n-1}}=0\,(p_{n-1}<2)$， 取$p_{n-1}=2$； $p_n=1$。

解 $D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

相应地，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & a_{2,n-1} & \\ a_{n-1,2} & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

上页 下页 返回

例 已知 $D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$

则 x^4 的系数为_____，x^3 的系数为______。

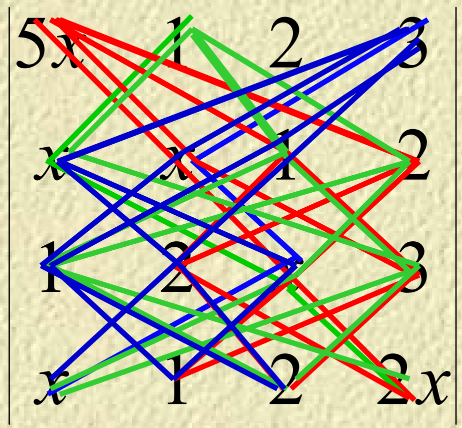
分析 含 x^4 的项：

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4$$

含 x^3 的项：

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-2x^3$$

$$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3$$



故 x^4 的系数为 $\underline{\ 10\ }$，x^3 的系数为 $\underline{\ -5\ }$。

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$。

解 $D \overset{c_1 \leftrightarrow c_3}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

利用○元素

将○元素

消为零

上页 下页 返回

$$\xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - 2r_1}} - \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 + r_2]{r_3 - 2r_2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + r_3} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

上页 下页 返回

例 计算$n+1$阶行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_1 & d \\ & & d_1 & b_1 \\ & \iddots & & \vdots \\ d_n & & & b_n \end{vmatrix}$，

其中$d_i\neq 0\,(i=1,2,\cdots,n)$。

主要特点： 箭形行列式（三条线）。

处理方法： 直接化为三角或次三角行列式。

解

$$D_{n+1}\overset{\substack{c_{n+1}-\frac{b_1}{d_1}c_n \\ \vdots \\ c_{n+1}-\frac{b_n}{d_n}c_1}}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_1 & d-\dfrac{a_1b_1}{d_1}-\cdots-\dfrac{a_nb_n}{d_n} \\ & & d_1 & \\ & \iddots & & \\ d_n & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} d_1\cdots d_n\left(d-\frac{a_1b_1}{d_1}-\cdots-\frac{a_nb_n}{d_n}\right)$$

例 计算n阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 4 \end{vmatrix}$。

主要特点：行(列)和相同。

处理方法：将各列(行)元素加到第1或n列(行)，再化为三角或次三角行列式。

解

$$D_n \xlongequal[\substack{\vdots \\ c_1+c_n}]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3}} \begin{vmatrix} n+3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n+3 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+3 & 1 & \cdots & 4 & 1 \\ n+3 & 1 & \cdots & 1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\vdots \\ r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} n+3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=(n+3)\cdot 3^{n-1}$$

例 计算行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{vmatrix}$。

主要特点：反对称行列式。

处理方法：利用行列式性质。

解

$$D_5 \xlongequal[i=1,\cdots,5]{c_i \div (-1)} (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c & -d \\ a & 0 & -e & -f & -g \\ b & e & 0 & -h & -i \\ c & f & h & 0 & -j \\ d & g & i & j & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -D_5^{\mathrm{T}} = -D_5$$

故 $D_5 = 0$。

两类特殊行列式：设 $D_n = \left| a_{ij} \right|$

例 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解 当 $n>2$ 时

$$
D_n \xlongequal[\substack{\text{第2个行列式} \\ c_1 \div b_1}]{\text{按1列分开}} \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}
$$

$$
+ b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{(2)\, c_i - b_i c_1 \\ i=2,\cdots,n}]{\substack{(1)\, c_i - c_1 \\ i=2,\cdots,n}}
$$

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0 \quad \text{（两列成比例）}
$$

上页 下页 返回

当 $n=1$ 时，$D_1 = |a_1+b_1| = a_1+b_1$

当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$

$$= (a_1+b_1)(a_2+b_2)-(a_1+b_2)(a_2+b_1)$$

$$= (a_1-a_2)(b_2-b_1)$$

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$。

解 法1

$$D \xlongequal{3列展开} 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 5 & -9 & 7 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 5 & -9 & 7 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -3 & 7 & 4 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -3 & 7 & 4 \\ 5 & -9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=1\times 78+(-1)\times 34+2\times(-54)+1\times 55=-9$$

上页 下页 返回

例 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$。

法2

$$D \xlongequal[r_4 - r_1]{\substack{r_2 + r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{3列展开} 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1 + 2c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{3行展开} (-1)\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

上页 下页 返回

例 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

主要特点：两条线行列式。

处理方法：直接展开。

解 $D_n \xlongequal{\text{按1列展开}} a\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

$$+b\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n$$

例 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & -2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-2)\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1)\end{vmatrix}$$

分析 将D_n的第1列加到第n列、第2列加到第n列、…、第$n-1$列加到第n列，即可将D_n的最后一列的后$n-1$个元素化为0。

上页 下页 返回

解

$$D_n \xlongequal[\substack{\vdots \\ c_n+c_{n-1}}]{\substack{c_n+c_1 \\ c_n+c_2}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)}{2}$$

例 计算$2n$阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}$$

主要特点：两条线行列式。

处理方法：直接展开。

上页 下页 返回

解 $D_{2n} \xlongequal{\text{按1行展开}} a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a & & & & & b & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a & b & & & \\ & & c & d & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c & & & & & d & \\ 0 & & & & & & d \end{vmatrix}$

$$+\, b(-1)^{1+2n}\begin{vmatrix} 0 & a & & & & & b \\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c & & & & & d \\ c & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{(2)按}2n-1\text{行展开}]{\text{(1)按}2n-1\text{行展开}} adD_{2n-2} - bc(-1)^{2n-1+1} D_{2n-2}$$

$$=(ad-bc)D_{2(n-1)}$$

于是

$$D_{2n}=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots$$

$$=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^n$$

例 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}2&1&&&\\1&2&1&&\\&1&2&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&1&2\end{vmatrix}$$

上页 下页 返回

主要特点：三对角行列式(三条线)。

处理方法：直接展开，得到递推公式。

解

$$D_n \xlongequal{\text{按1行展开}} 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

从而 $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = \cdots = D_2 - D_1$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 = 3 - 2 = 1$$

故 $D_n = D_{n-1} + 1 = D_{n-2} + 2 = \cdots = D_1 + (n-1) = n+1$

例 证明

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha$$

主要特点：三对角行列式(三条线)。

处理方法：直接展开，得到递推公式。

上页 下页 返回

证

$$D_n \xlongequal{\text{按}n\text{行展开}} 2\cos\alpha\cdot(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$+1\cdot(-1)^{n+(n-1)}\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2\cos\alpha & 0 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos\alpha\cdot D_{n-1} - D_{n-2}$$

用第二数学归纳法证明:

$n=1$时，结论成立；设$n\leqslant k$时结论成立。则当$n=k+1$时

$$D_{k+1}=2\cos\alpha\cdot D_k-D_{k-1}=2\cos\alpha\cos k\alpha-\cos(k-1)\alpha$$

$$=2\cos\alpha\cos k\alpha-(\cos k\alpha\cos\alpha+\sin k\alpha\sin\alpha)$$

$$=\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha=\cos(k+1)\alpha$$

由归纳假设知 $D_n=\cos n\alpha$

例 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \qquad x_i\neq a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

主要特点：各行(列)大部分元素相同。

处理方法：升阶法(加边法)。

解 $D_n \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & x_1-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_1+\frac{1}{x_i-a_i}c_{i+1}}\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1}{x_1-a_1}+\cdots+\frac{a_n}{x_n-a_n} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1-a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2-a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)[1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}]$$

例 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & \cdots & x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

主要特点：各行(列)大部分元素成比例。

处理方法：升阶法(加边法)。

上页 下页 返回

解

$$D_n \xlongequal{\text{升阶}} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{\mathrm{r}_i - x_{i-1}\mathrm{r}_1} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{c_1+x_i c_{i+1}} \begin{vmatrix} 1+x_1^2+\cdots+x_n^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

例 范德蒙(**Vandermonde**)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j)$$

$$\begin{aligned}&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\cdots(x_n-x_1)\times\\ &\qquad\times(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)\times\\ &\qquad\qquad\times\cdots\cdots\cdots\times\\ &\qquad\qquad\qquad\times(x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

例 计算$n+1$阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解 通过逐行对换化为范德蒙行列式。

$$D_{n+1}=(-1)^{n+(n-1)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

（注意：$x_i=a-i+1\ (i=1,2,\ldots,n)$ ）

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}\left[(a-i+1)-(a-j+1)\right]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}(j-i)=\prod_{n+1\ge i>j\ge 1}(i-j)$$

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$

解 构造5阶范德蒙行列式

上页 下页 返回

$$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\a&b&c&d&x\\a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{vmatrix}$$

则 $D_5 \xlongequal{\text{按5列展开}} A_{15}+xA_{25}+x^2A_{35}+x^3A_{45}+x^4A_{55}$

其中 $A_{45}=(-1)^{4+5}D=-D$。又有

$$D_5=(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)\times$$
$$\times(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d)$$
$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\times$$
$$\times[x^4-(a+b+c+d)x^3+\cdots]$$

故 $D=(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

例 已知行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & -7 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

则第3行各元素的代数余子式之和

$$A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} + A_{35} = \underline{\qquad\qquad}$$

分析 法1 注意第2行的元素全为3，由引理知

$$0 = (a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} + a_{24}A_{34} + a_{25}A_{35})$$

$$= 3(A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34} + A_{35})$$

上页 下页 返回

故 $$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}+A_{35}=0$$

法2

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}+A_{35}=$$

$$=1\cdot A_{31}+1\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}+1\cdot A_{34}+1\cdot A_{35}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & -7 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=0$$

上页 下页 返回

例 已知n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

则第n行各元素的代数余子式之和

$$A_{n1} + A_{n2} + \cdots + A_{nn} = \underline{\qquad\qquad}$$

分析

$$A_{n1} + A_{n2} + \cdots + A_{nn} = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a & a \\ a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x & a \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} c_1 - c_n \\ \underline{\underline{c_2 - c_n}} \\ \vdots \\ c_{n-1} - c_n \end{array} \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}$$

例 问 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1 \end{cases}$$

有唯一解，并求其解。

解 系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_1+c_4}]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3}} \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda+3 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda+3 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda+3 & 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)^3$$

于是当 $\lambda\neq-3$ 且 $\lambda\neq1$ 时，方程组有唯一解。

又可求得

$$D^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

同理可求得 $D^{(2)}=D^{(3)}=D^{(4)}=(\lambda-1)^3$

故 $x_1=x_2=x_3=x_4=\dfrac{(\lambda-1)^3}{(\lambda+3)(\lambda-1)^3}=\dfrac{1}{\lambda+3}$

例　证明：若n次多项式 $f(x)$ 有$n+1$个互异的零点，则此多项式恒为零。

证　设 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$，且 $x_0, x_1, \cdots, x_n$是$f(x)$ 的$n+1$个互异零点。则

$$\begin{cases} f(x_0)=c_0+c_1x_0+c_2x_0^2+\cdots+c_nx_0^n=0 \\ f(x_1)=c_0+c_1x_1+c_2x_1^2+\cdots+c_nx_1^n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x_n)=c_0+c_1x_n+c_2x_n^2+\cdots+c_nx_n^n=0 \end{cases}$$

由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge 0}(x_i-x_j)\neq 0$$

故该方程组只有零解，即$c_0=c_1=\cdots=c_n=0$，从而$f(x)=0$。