例　求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 & ① \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 & ② \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -7 & ③ \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 & ④ \end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

解　先采取以下步骤消元：使每个方程的未知数个数较前一个方程少。

法**1**：

上页　下页　返回

$$
(\mathrm{I}) \xrightarrow[\text{消}x_1]{①\leftrightarrow②}
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 & ① \times(-4) \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 & ② \\
4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -7 & ③ \\
x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 & ④
\end{cases}
\quad (\mathrm{II})
$$

$$
(\mathrm{II}) \xrightarrow[\substack{④-\ ① \\ \text{消}x_2}]{\substack{②-2① \\ ③-4①}}
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 & ① \\
x_2 + 3x_3 = -1 & ② \times(-6) \\
6x_2 + 11x_3 = 1 & ③ \\
x_2 + 3x_3 = -1 & ④
\end{cases}
\quad (\mathrm{III})
$$

上页 下页 返回

$$(\text{III}) \xrightarrow[④-②]{③-6②} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 & ① \\ x_2 + 3x_3 = -1 & ② \\ -7x_3 = 7 & ③ \\ 0x_3 = 0 & ④ \end{cases} \quad (\text{IV})$$

再采用“回代”过程求诸$x_i\,(i=3,2,1)$:

1）方程④为恒等式，去掉;

2）方程③$\times(-\frac{1}{7})$，得 $x_3=-1$;

3）将 $x_3=-1$代入方程②解得$x_2=2$;

4）将 $x_3=-1$和$x_2=2$代入方程①解得$x_1=1$。

上页 下页 返回

法2:

$$
(\mathrm{I}) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 & ① \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 & ② \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -7 & ③ \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 & ④ \end{cases} \quad (\mathrm{II})
$$

消x_1

$$
(\mathrm{II}) \xrightarrow[④-①]{②-2①,\ ③-4①} \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 & ① \\ x_2 + 3x_3 = -1 & ② \\ 6x_2 + 11x_3 = 1 & ③ \\ x_2 + 3x_3 = -1 & ④ \end{cases} \quad (\mathrm{III})
$$

消x_2

上页 下页 返回

$$(\mathrm{III}) \xrightarrow[\text{④}-\text{②}]{\text{①}+2\text{②} \quad \text{③}-6\text{②}} \begin{cases} x_1 \qquad\quad + 5x_3 = -4 & ① \\ \qquad x_2 + 3x_3 = -1 & ② \\ \qquad\quad -7x_3 = 7 & ③ \\ \qquad\quad\ 0x_3 = 0 & ④ \end{cases} \quad (\mathrm{IV})$$

消x_3

$$(\mathrm{IV}) \xrightarrow[\text{①}-5\text{③} \quad \text{②}-3\text{③}]{\text{③} \times (-\frac{1}{7})} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ 0x_3 = 0 \end{cases}$$

方程组的解为$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=-1$。

上页 下页 返回

对方程组施行一次初等变换，相当于对它的增广矩阵施行一次对应的初等行变换。

因此对于引例的线性方程组可以对其增广矩阵进行初等行变换来求解：

法1：线性方程组的增广矩阵

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 7 & -7 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & -7 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

上页 下页 返回

$$\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-4r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_3-6r_2\\ r_4-r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 + 3x_3 = -1 \\ -7x_3 = 7 \\ 0x_3 = 0 \end{cases}$

采用“回代”过程求得 $x_3=-1, x_2=2, x_1=1$。

上页 下页 返回

法2：线性方程组的增广矩阵

$$\hat{A} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & -7 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 - r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 4r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 11 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1 + 2r_2 \\ r_3 - 6r_2 \\ r_4 - r_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_3 \times (-\frac{1}{7}) \\ r_1 - 5r_3 \\ r_2 - 3r_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

方程组的解为 $x_1=1, x_2=2, x_3=-1$。

例 在矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 中，取1, 2行和3, 4列得到A的一个2阶子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=13$$

取1, 2, 3行和1, 3 , 4列得到A的一个3阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-5$$

在该矩阵中，

1阶子式共有 $C_4^1C_5^1=4\times5=20$ 个

2阶子式共有 $C_4^2C_5^2=\frac{4\times3}{2}\cdot\frac{5\times4}{2}=60$个

3阶子式共有 $C_4^3C_5^3=4\cdot\frac{5\times4\times3}{3\times2}=40$ 个

4阶子式共有 $C_4^4C_5^4=5$ 个

上页 下页 返回

例 求下列矩阵的秩：

1） $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$；　2） $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$。

解 1） A中2阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0$；

A只有一个3阶子式det$A$，且

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -11\\ 0 & -1 & -11\end{vmatrix}=0$$

故 $\operatorname{rank} A=2$。

上页　下页　返回

例　求下列矩阵的秩：

1）$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$；　2）$B=\begin{pmatrix}1&1&3&1&1\\0&2&-1&4&1\\0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$。

解　2）B中3阶子式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&4\\0&0&5\end{vmatrix}=10\neq 0$$

而所有的5个4阶子式全为0（均有一行元素全为0），故 $\operatorname{rank}B=3$。

例　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1\\0&3&2&1&0&-3\\0&0&1&2&3&6\\0&5&4&3&2&6\end{pmatrix}$ 的秩。

解　$$A\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1\\0&0&-1&-2&-3&-6\\0&0&1&2&3&6\\0&0&-1&-2&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}0&1&1&1&1&1\\0&0&-1&-2&-3&-6\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&7\end{pmatrix}$$

上页　下页　返回

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{B}$有3个非零行，从而 $\operatorname{rank} \boldsymbol{B} = 3$，故rank$\boldsymbol{A}$=3。

（因为$\boldsymbol{B}$的所有4阶子式全为零，而

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

所以 $\operatorname{rank} \boldsymbol{B} = 3$。）

注　矩阵$\boldsymbol{B}$还可通过初等行变换进一步化简：

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{7}]{\substack{r_1+r_2\\ r_2\times(-1)}}\begin{pmatrix}0&1&0&-1&-2&-5\\0&0&1&2&3&6\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-6r_3]{r_1+5r_3}\begin{pmatrix}0&1&0&-1&-2&0\\0&0&1&2&3&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{H}$$

矩阵$\boldsymbol{H}$在初等行变换下不能再化简，但作初等列变换还能进一步化简：

上页　下页　返回

$$
\boldsymbol{C} \xrightarrow[\substack{c_5-3c_3}]{\substack{c_4+c_2 \\ c_5+2c_2 \\ c_4-2c_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{c_1 \leftrightarrow c_2 \\ c_2 \leftrightarrow c_3 \\ c_3 \leftrightarrow c_6}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \boldsymbol{I}
$$

例 求n阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$的秩。

解　法1

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow[]{\substack{c_1+c_2\\ \vdots \\ c_1+c_n}}\begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ \vdots \\ r_n-r_1}}\begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

（1） $a=b$时：若$a=b=0$，则$\mathrm{rank}A=0$；

若$a=b\neq 0$，则$\mathrm{rank}A=1$。

（2） $a\neq b$时：若$a+(n-1)b=0$，则$\mathrm{rank}A=n-1$；

若$a+(n-1)b\neq 0$，则$\mathrm{rank}A=n$。

法2 $$\det A=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

（1） 当$a\neq b$且$a+(n-1)b\neq 0$时，则$\mathrm{rank}A=n$。

（2） 当$a=b$时，有

$$A=\begin{pmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & b & \cdots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

当b=0时，rank$\boldsymbol{A}$=0；当$b\neq 0$时，rank$\boldsymbol{A}$=1。

（3） 当$a+(n-1)b=0$且$b\neq 0$时，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -(n-1)b & b & \cdots & b & b \\ b & -(n-1)b & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & -(n-1)b & b \\ b & b & \cdots & b & -(n-1)b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\vdots \\ r_{n-1}-r_n}]{\substack{r_1-r_n \\ r_2-r_n}}\begin{pmatrix} -nb & 0 & \cdots & 0 & nb \\ 0 & -nb & \cdots & 0 & nb \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -nb & nb \\ b & b & \cdots & b & -(n-1)b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_n\times\frac{1}{b}]{\substack{r_1\times(-\frac{1}{nb})\\ \vdots \\ r_{n-1}\times(-\frac{1}{nb})}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -(n-1)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_n-r_1\\ r_n-r_2\\ \vdots\\ r_n-r_{n-1}}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

故$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n-1$。

例　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad - x_3 \quad + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 \quad + x_3 \quad - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解　对系数矩阵$\boldsymbol{A}$施行初等行变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

rank $\boldsymbol{A}=2<4$，有无穷多解（或非零解）。

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_2+x_4\\ x_3=\quad 2x_4\end{cases}$

通解为 $\begin{cases}x_1=t_1+t_2\\ x_2=t_1\\ x_3=\quad 2t_2\\ x_4=\quad t_2\end{cases}$ （t_1, t_2为任意常数）

上页 下页 返回

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \qquad\quad + x_4 = 1 \\ \quad -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

解 对增广矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换：

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4+7r_2]{\substack{r_1+2r_2\\ r_3-5r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_1-\frac{1}{2}r_3\\ r_2+\frac{1}{2}r_3\\ r_4+2r_3\\ r_3\times\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{r_4\times\frac{1}{8}\\ r_1+2r_4\\ r_2-r_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} \hat{\boldsymbol{A}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 4$，有唯一解

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 0$$

例　λ取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (2\lambda+1)x_1-\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda-1 \\ (\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda \\ (2\lambda-1)x_1+(\lambda-1)x_2+(2\lambda-1)x_3=\lambda \end{cases}$$

有唯一解，无解，无穷多解？在无穷多解时求通解。

解　**法1** 系数行列式

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_3} \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-1 & 2\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

1) 当$\lambda \neq 0$，$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -1$时，有唯一解；

2) 当$\lambda = 0$ 时，增广矩阵

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} \hat{A} = 3$, $\operatorname{rank} A = 2$， 无解。

3) 当$\lambda = 1$ 时， 增广矩阵

上页 下页 返回

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-3r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

$\operatorname{rank}\hat{A}=3$，$\operatorname{rank}A=2$，无解。

4) 当$\lambda=-1$时，增广矩阵

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 0 & -2\\ -3 & -2 & -3 & -1\\ -3 & -2 & -3 & -1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-3r_1\\ r_1\times(-1)}]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & -5 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{r_2\times(-\frac{1}{5})}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank}\hat{A}=\operatorname{rank}A=2<3$， 有无穷多解。

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=1-\frac{3}{5}x_3 \\ x_2=-1-\frac{3}{5}x_3 \end{cases}$

通解为 $\begin{cases} x_1=1-\frac{3}{5}t \\ x_2=-1-\frac{3}{5}t \\ x_3=t \end{cases}$ （t为任意常数）

法2　直接对增广矩阵 $\hat{A}$ 施行初等行变换：

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda+1 & -\lambda & \lambda+1 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 & \lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda-1 & 2\lambda-1 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2\lambda+1 & -\lambda+2 & -1 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda-2 & \lambda \\ \lambda+1 & 0 & \lambda+1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_3]{r_2+r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2\lambda+1 & -\lambda+2 & -1 \\ -1 & -\lambda & -\lambda-1 & \lambda-1 \\ \lambda+1 & 0 & \lambda+1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+(\lambda+1)r_2]{r_1+2r_2}$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
0 & -4\lambda+1 & -3\lambda & 2\lambda-3 \\
-1 & -\lambda & -\lambda-1 & \lambda-1 \\
0 & -\lambda^2-\lambda & -\lambda^2-\lambda & \lambda^2-1
\end{array}\right)
\xrightarrow[\ ]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_3 \times 4}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
-1 & -\lambda & -\lambda-1 & \lambda-1 \\
0 & -4\lambda+1 & -3\lambda & 2\lambda-3 \\
0 & -4\lambda^2-4\lambda & -4\lambda^2-4\lambda & 4\lambda^2-4
\end{array}\right)
\xrightarrow[\ ]{\substack{r_1 \times (-1) \\ r_3 - \lambda r_2}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & \lambda & \lambda+1 & -\lambda+1 \\
0 & -4\lambda+1 & -3\lambda & 2\lambda-3 \\
0 & -5\lambda & -\lambda^2-4\lambda & 2\lambda^2+3\lambda-4
\end{array}\right)
\xrightarrow{r_2 - \frac{4}{5} r_3}
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda+1 & -\lambda+1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5}\lambda^2+\frac{1}{5}\lambda & -\frac{8}{5}\lambda^2-\frac{2}{5}\lambda+\frac{1}{5} \\ 0 & -5\lambda & -\lambda^2-4\lambda & 2\lambda^2+3\lambda-4 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{4}]{r_3+5\lambda r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \lambda+1 & -\lambda+1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5}\lambda^2+\frac{1}{5}\lambda & -\frac{8}{5}\lambda^2-\frac{2}{5}\lambda+\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) & -(\lambda+1)(2\lambda^2-2\lambda+1) \end{array}\right)$$

1) 当$\lambda \neq 0$， $\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -1$时，$\operatorname{rank}\hat{A}=\operatorname{rank}A=3$，有唯一解；

2) 当$\lambda=0$ 时，$\operatorname{rank}\hat{A}=3$，$\operatorname{rank}A=2$， 无解。

3) 当$\lambda=1$ 时，$\operatorname{rank}\hat{A}=3$，$\operatorname{rank}A=2$，无解。

4) 当$\lambda=-1$ 时，$\operatorname{rank}\hat{A}=\operatorname{rank}A=2<3$，有无穷多解。

例 λ取何实值时，线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = \lambda \\ \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_3 + x_4 = \lambda \\ x_1 + \lambda x_4 = \lambda \end{cases}$$

有唯一解，无解，无穷多解？在无穷多解时求通解。

解 **法1** 系数行列式

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \underline{\underline{1列展开}} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)$$

1) 当$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -1$时，有唯一解；

2) 当$\lambda = 1$时， 增广矩阵

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_4]{r_1 - r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} \hat{A} = \operatorname{rank} A = 3 < 4$， 有无穷多解。

上页 下页 返回

同解方程组为
$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 \\ x_2 = \quad\ \ x_4 \\ x_3 = 1 - x_4 \end{cases}$$

通解为
$$\begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = \quad\ \ t \\ x_3 = 1 - t \\ x_4 = \quad\ \ t \end{cases}$$
（t为任意常数）

3) 当$\lambda = -1$ 时，增广矩阵

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 + r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_4]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&-1\\0&-1&0&1&-2\\0&0&-1&1&-1\\0&0&0&0&-4\end{array}\right)$$

$\operatorname{rank}\hat{A}=4$，$\operatorname{rank}A=3$， 无解。

法2 直接对增广矩阵 $\hat{A}$ 施行初等行变换：

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}\lambda&1&0&0&\lambda\\0&\lambda&1&0&\lambda\\0&0&\lambda&1&\lambda\\1&0&0&\lambda&\lambda\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-\lambda r_4}\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&-\lambda^2&\lambda-\lambda^2\\0&\lambda&1&0&\lambda\\0&0&\lambda&1&\lambda\\1&0&0&\lambda&\lambda\end{array}\right)$$

上页 下页 返回

$$\xrightarrow{r_2-\lambda r_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^3 & \lambda-\lambda^2+\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-\lambda r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^3 & \lambda-\lambda^2+\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^4 & \lambda-\lambda^2+\lambda^3-\lambda^4 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & \lambda \end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^3 & \lambda-\lambda^2+\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^4 & \lambda-\lambda^2+\lambda^3-\lambda^4 \end{array}\right)$$

1) 当$\lambda \neq \pm 1$时， $\operatorname{rank} \hat{\boldsymbol{A}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 4$，有唯一解；

2) 当$\lambda = 1$时，$\operatorname{rank} \hat{\boldsymbol{A}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3 < 4$， 有无穷多解；

3) 当$\lambda = -1$时，$\operatorname{rank} \hat{\boldsymbol{A}} = 4$，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3$，无解。

上页 下页 返回

例 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则必有 (C) 。

(A) $AP_1P_2=B$； (B) $AP_2P_1=B$；

(C) $P_1P_2A=B$； (D) $P_2P_1A=B$。

分析 $\boldsymbol{A}$由初等行变换变成矩阵$\boldsymbol{B}$，故(A)(B)不对。

又有 $\boldsymbol{A} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1 \leftrightarrow r_2} \boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_3+r_1} \boldsymbol{B}$

注意到 $\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{E}(1,2)$，$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{E}(3,1(1))$，所以$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$

故选(C) 。

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解 $$(A\mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&-1&1&0&0\\2&-1&2&0&1&0\\-1&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+2r_3]{r_1+2r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&6&3&1&0&2\\0&3&6&0&1&2\\-1&2&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{r_3\times(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-2&0&0&-1\\0&3&6&0&1&2\\0&6&3&1&0&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1+\frac{2}{3}r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \times (-\frac{1}{9})]{r_2 \times \frac{1}{3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_1 - 2r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right)$$

故

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

例 求矩阵X，使$AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 若A可逆，则$X=A^{-1}B$。

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}$$

上页 下页 返回

$$
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times(-\frac{1}{2})}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)
$$

故

$$
\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

例　已知n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1}\\ 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

求A的所有元素的代数余子式之和。

分析 先求代数余子式，再求和，这一过程太麻烦。注意到$A^*=(A_{ji})_{n\times n}$，且可由$A^*=(\det A)A^{-1}$求得A^*，而A^{-1}可通过初等变换法求得。

解　$\det A=1$，　又有

上页　下页　返回

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & \cdots & a^{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & a^{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_{n-1} - a r_n]{\substack{r_1 - a r_2 \\ r_2 - a r_3 \\ \vdots}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

从而 $A^{*} = (\det A)A^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

故 $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = n-(n-1)a$$