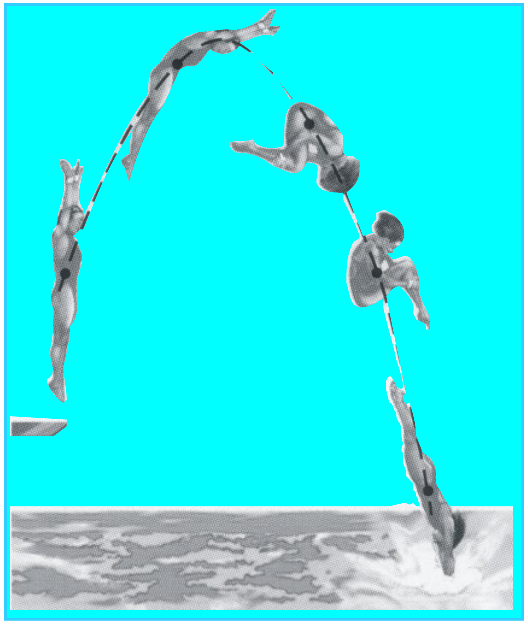
§2.6 质心运动定理

主要内容：

1. 质心

2. 质心运动定理



起跳-空中翻转-入水

各部分：运动情况复杂

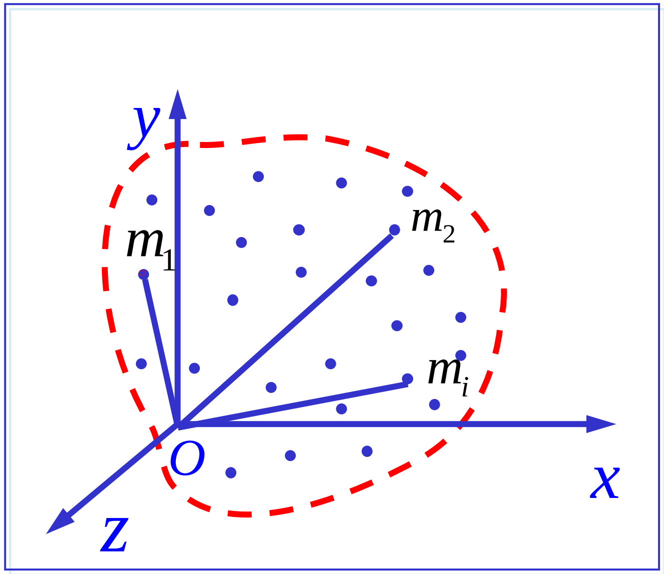
整体：抛体运动

2.6.1 质心

◆ 质心的定义

设质点系如图，各质点的质量、位矢和速度分别为

$$(m_1,\vec{r}_1,\vec{v}_1)\ ,(m_2,\vec{r}_2,\vec{v}_2)\ ,\cdots,(\boldsymbol{m_n},\vec{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{n}},\vec{v}_{\boldsymbol{n}})$$



质点系的动量

$$\vec{p}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_n\vec{v}_n$$

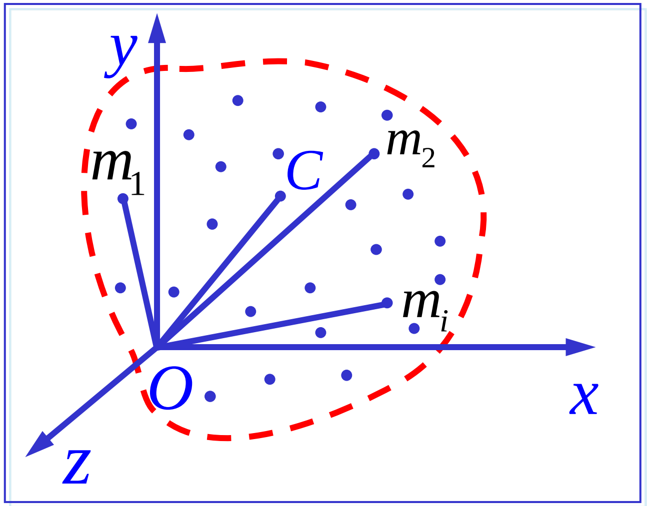
$$=m_1\frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t}+m_2\frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t}+\cdots+m_n\frac{\mathrm{d}\vec{r}_n}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\cdots+m_n\vec{r}_n)$$

质点系的总质量

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

设想质点系的全部质量和动量都集中在一个点C上，即任意时刻该点的动量都等于质点系的动量，这个点C就是质点系的质心。



设质心的位矢为 $\vec{r}_C$，**速度为** $\vec{v}_C$

且 $$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n)$$

质心的动量 $$m\vec{v}_C = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \vec{p}$$

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n)$$

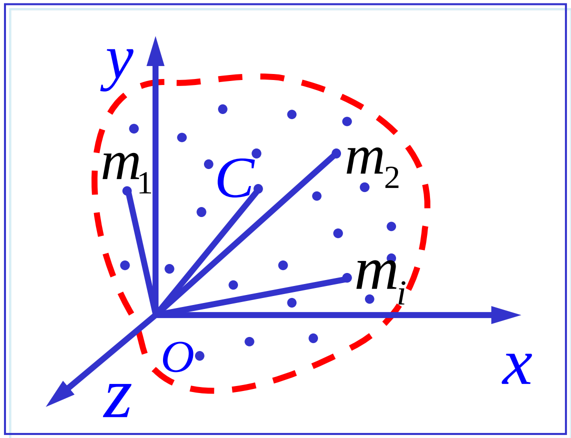
质心的位矢 $$\vec{r}_C = \frac{(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m}$$

◆ 质心位置的计算

直角坐标系中质心的位置坐标

质量为m的离散分布质点系的质心

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i$$



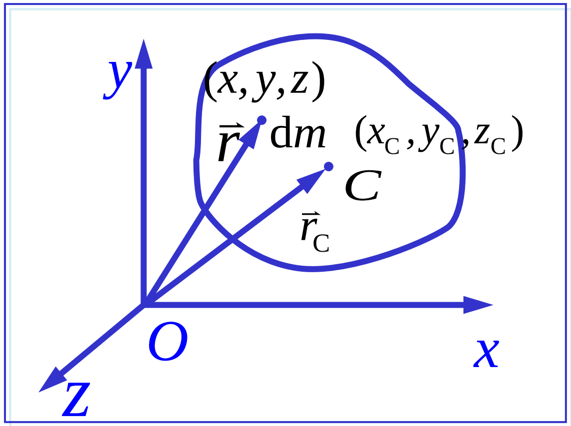
$$x_C = \frac{1}{m}\sum_i (m_i x_i)$$

$$y_C = \frac{1}{m}\sum_i (m_i y_i)$$

$$z_C = \frac{1}{m}\sum_i (m_i z_i)$$

质量为m的连续分布体的质心

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m$$

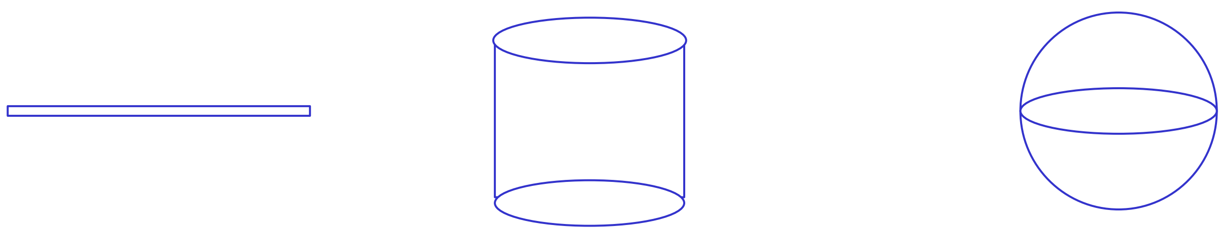


$$x_C = \frac{1}{m}\int x\,\mathrm{d}m$$

$$y_C = \frac{1}{m}\int y\,\mathrm{d}m$$

$$z_C = \frac{1}{m}\int z\,\mathrm{d}m$$

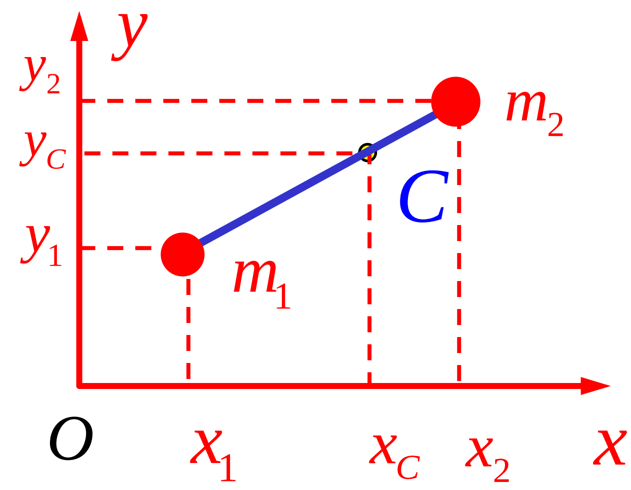
- 质心位矢$\vec{r}_c$与坐标系选择有关，但质心在质点系中的位置与坐标轴选择无关
- 质心在质点系中的位置由质点系的质量及其分布决定
- 重心指质点系各部分所受重力的合力的作用点。与质心是不同的两个概念。（思考：二者有可能重合吗？）
- 当物体的体积远小于地球体积，而物体所在范围内的重力加速度可以视为常矢量时，质心与重心重合。
- 质量均匀分布的对称体系，其质心在它的几何对称中心上。有一个对称轴时，质心在该对称轴上。有两个及以上对称轴时，质心在对称轴的交点上。



例 两个质点体系的质心

质量分别为m_1和m_2。

位置坐标为（x_1，y_1）和（x_2，y_2）



根据质心的位置坐标式可知

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\ ; \qquad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

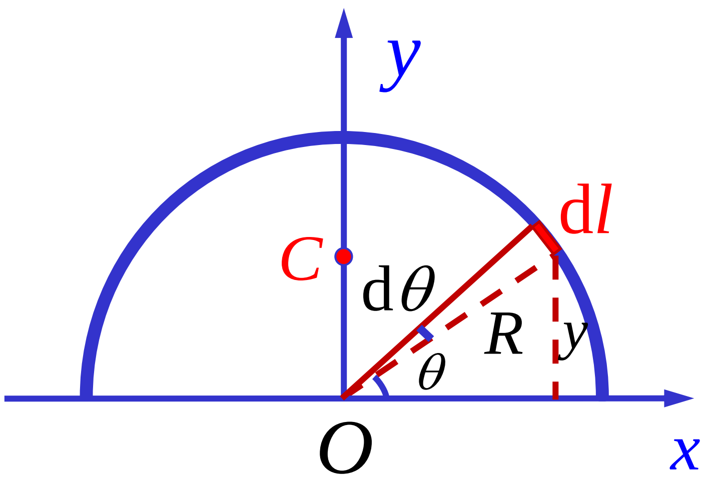
由质心的位置可得 $\dfrac{x_2 - x_C}{x_C - x_1} = \dfrac{m_1}{m_2}$ ； $\dfrac{y_2 - y_C}{y_C - y_1} = \dfrac{m_1}{m_2}$

比较此两式还可得 $\dfrac{y_2 - y_C}{x_2 - x_C} = \dfrac{y_C - y_1}{x_C - x_1}$

- **该质点系的质心C位于两质点的连线上，且质心到各质点的距离与质点的质量成反比。**

例 质量均匀的半圆形铁丝的质心

质量为m，半径为R



任取一微元长为dl，质量为dm

则有 $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l \;= \dfrac{m}{\pi R}\mathrm{d}l$

由质心的位置坐标式，有

$$x_C = \frac{\int x\lambda \mathrm{d}l}{m} \qquad y_C = \frac{\int y\lambda \mathrm{d}l}{m}$$

而 $x = R\cos\theta \quad y = R\sin\theta \quad \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$

则

$$x_C = \frac{\int_0^{\pi} R\cos\theta\cdot\lambda\cdot R\mathrm{d}\theta}{m} = 0 \quad y_C = \frac{\int_0^{\pi} R\sin\theta\cdot\lambda\cdot R\mathrm{d}\theta}{m} = \frac{2\lambda R^2}{m} = \frac{2}{\pi}R$$

即：半圆对y轴对称，质心在y轴上$2R/\pi$处

2.6.2 质心运动定理

质心的动量等于质点系的总动量

质心的动量 $\vec{p}=\sum m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_C$

由质点系动量定理，有

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}$$

质心的加速度 $\vec{a}_C=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}_C}$$ **（质心运动定理）**

质点系的质量与其质心加速度的乘积等于该质点系所受到的合外力。

判断下列说法是否正确：

1 质心的运动在一定程度上反映了质点系整体运动的特征 √

2 质心的运动状态取决于质点系的内力和外力

3 质点系动量守恒时质心静止或作匀速直线运动 √

4 质点系中每一质点相对于地面的运动都是该质点相对于质心的运动与质心运动的叠加 √

- **质心的运动状态完全决定于质点系所受的外力，内力不能使质心产生加速度；**
- **当质点系所受合外力为零时，该质点系的动量守恒；此时，该质点系的质心速度也将保持不变；在某个方向合外力分力为零时，质心速度在该方向的分量保持不变。**

例 一长$l = 4\text{m}$，质量$m_1 = 150\text{kg}$ 的船，静止在湖面上。现有一质量$m_2 = 50\text{kg}$ 的人，从船头走到船尾，如图所示。

求 人和船相对于湖岸各移动的距离。 (设水对船的阻力忽略不计)

解 以人和船组成的质点系为研究对象

建立坐标系，坐标如图所示。

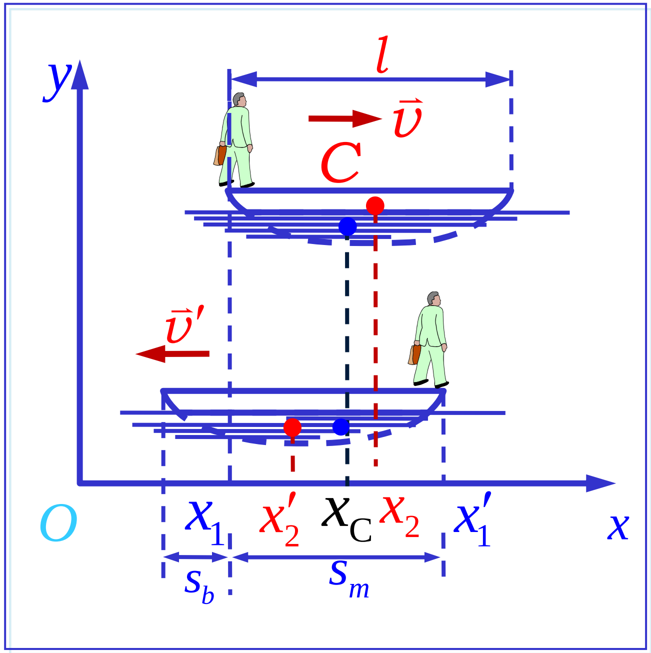
质点系所受外力沿x轴的分量为零

则 $$a_{Cx} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{Cx}}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\upsilon_{Cx} = 常量$$

而 $$\upsilon_{Cx} = \upsilon_{Cx0} = \frac{\mathrm{d}x_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

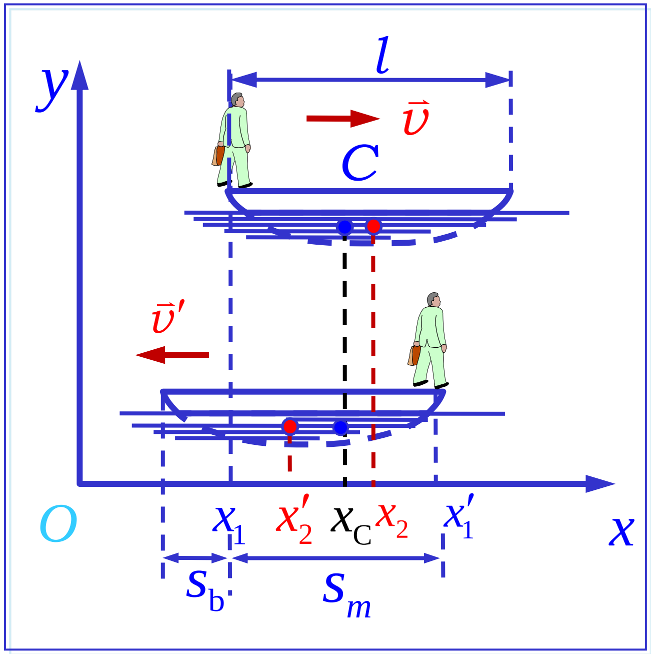
$$x_C = 常量$$



质心位置坐标在人走动过程中保持不变

在人走之前，人船系统质心的坐标为

$$x_C = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}$$



当人走到船尾时，系统质心的坐标为

$$x_C' = \frac{m_2 x_1' + m_1 x_2'}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_2 (x_1 + l - s_b) + m_1 (x_2 - s_b)}{m_1 + m_2}$$

因为 $x_C' = x_C$

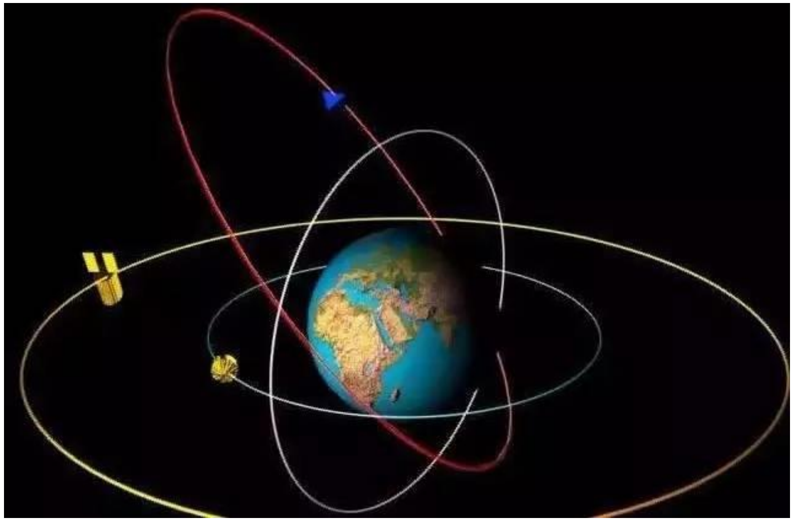
船相对于湖岸移动的距离为 $s_b = \dfrac{m_2 l}{m_2 + m_1} = \dfrac{50 \times 4}{150 + 50} = 1\text{m}$

人相对于湖岸移动的距离为 $s_m = l - s_b = \dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2} = 3\text{m}$

§ 2.7 质点的角动量定理与角动量守恒定律

主要内容:

1. 质点的角动量
2. 质点的角动量定理
3. 质点的角动量守恒定律



质点围绕一个中心的运动

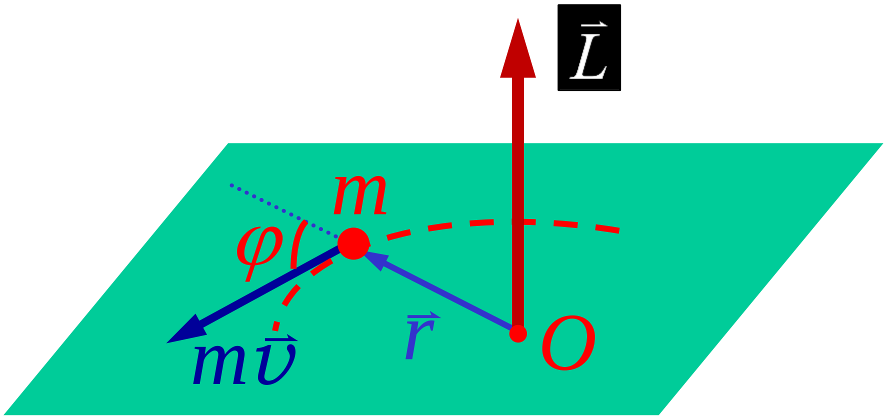
2.7.1 质点的角动量

设t 时刻质点的位矢 $\vec{r}$

质点的动量 $m\vec{\upsilon}$

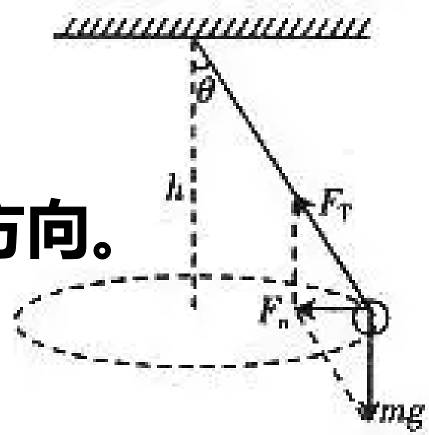
运动质点对O点的角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{\upsilon}$$



➢ 讨论

- 角动量大小： $L=rp\sin\varphi=m\upsilon r\sin\varphi$
- 角动量的方向： 位矢 $\vec{r}$ 和动量 $m\vec{\upsilon}$ 的矢积方向。
- 质点绕圆心作圆周运动时 $L=m\upsilon r=m\omega r^2$
- 同一质点的运动对不同参考点的角动量是不相同的。



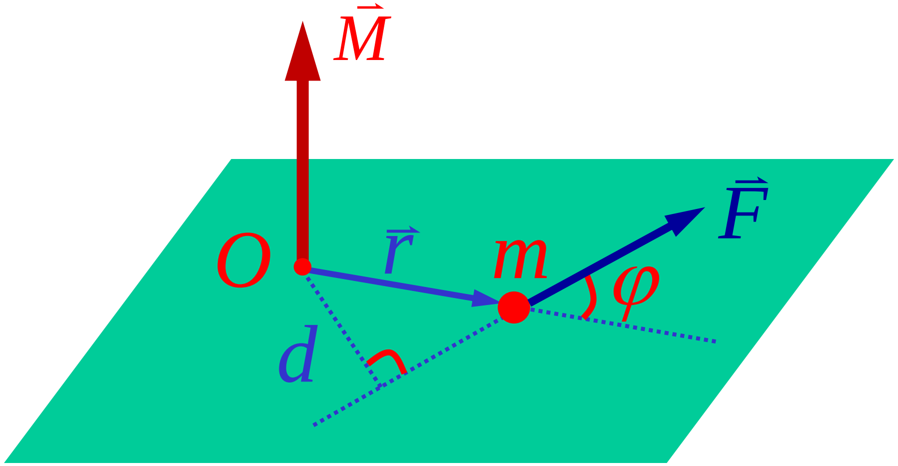
2.7.2 质点的角动量定理

1. 力对参考点的力矩

作用力$\vec{F}$作用于位矢为$\vec{r}$的某一质点上

作用力$\vec{F}$对参考点O的力矩

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$



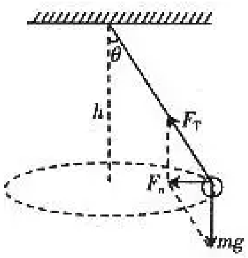
➢ 讨论

- **力矩的大小：** $M=Fr\sin\varphi=Fd$

  力臂d：作用力线到参考点O的垂直距离 $d=r\sin\varphi$

- **力矩的方向：位矢 $\vec{r}$和力$\vec{F}$的矢积方向。**

- **同一力对不同参考点的力矩是不相同的。**



2. 质点的角动量定理

由角动量的定义 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

两边对时间求导 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{F}$

(牛顿第二定律)

则 $\boxed{\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$ **(角动量定理)** $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$

质点所受的合力矩等于角动量对时间的变化率

- **微分形式** $\vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{L}$
- **积分形式** $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$ （$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t$ 为冲量矩）

力矩是使角动量发生变化的原因

已知地球质量为m，太阳质量为M，地心和日心的距离为R，引力常量为G，则地球绕太阳做圆周运动的轨道角动量大小为：

A. $m\sqrt{GMR}$ √

B. $\sqrt{\mathrm{GM}m/R}$

C. $\mathrm{m}M\sqrt{\mathrm{G}/R}$

D. $\sqrt{\mathrm{GM}m/2R}$

万有引力提供向心力： $\frac{GMm}{\mathrm{R}^2}=\mathrm{m}\frac{v^2}{R}$　$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$

角动量大小： $L=R\mathrm{m}v=m\sqrt{GMR}$

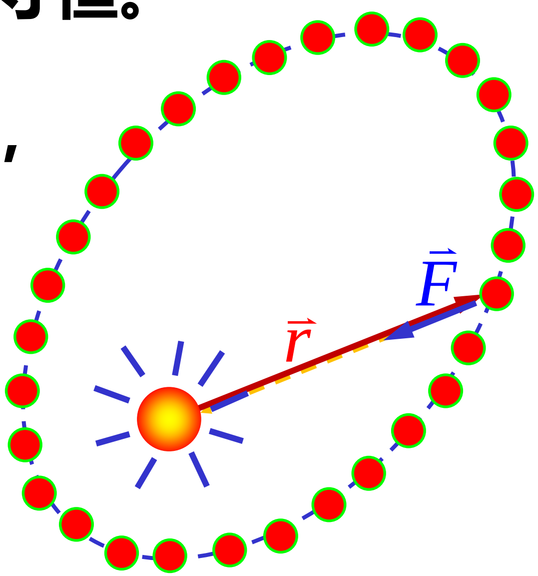
3. 角动量守恒定律

若 $\vec{M}=0$ **，则** $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=$常矢量

如果对于某一固定点O，质点所受的合力矩为零，则此质点对该定点的角动量保持不变。

➢ **讨论**

- **当合力**$\vec{F}=0$ **时，**$\vec{M}=0$**，质点的角动量守恒。**
- **力的作用线始终通过一固定点（力心），对力心的力矩为零。**



质点在有心力作用下运动，角动量守恒。

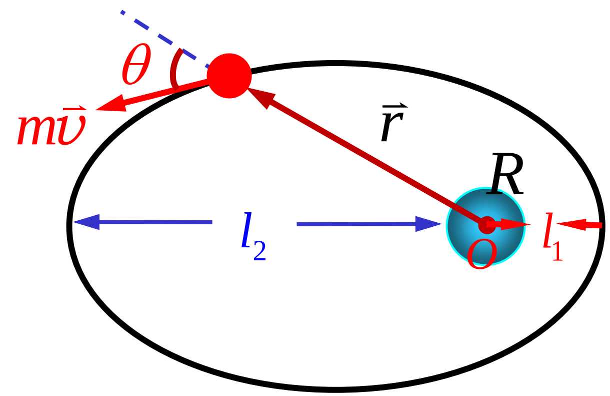
圆周运动时：

$$L=pr=mvr=\text{常量}$$

例 如图所示，我国第一颗人造地球卫星沿椭圆形轨道运动，地心为该椭圆的一个焦点。已知地球半径为 $R = 6378\text{km}$，卫星的近地点到地面的距离为 $l_1 = 439\text{km}$，远地点到地面的距离为 $l_2 = 2384\text{km}$ 。设卫星在近地点的速率为 $\upsilon_1 = 8.1\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$。

求 卫星在远地点的速率。

解 质点在有心力作用下运动，角动量守恒，有



$$L = m\upsilon r\sin\theta = \text{常量}$$

在近地点和远地点处 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

则 $$m\upsilon_1(R+l_1) = m\upsilon_2(R+l_2)$$

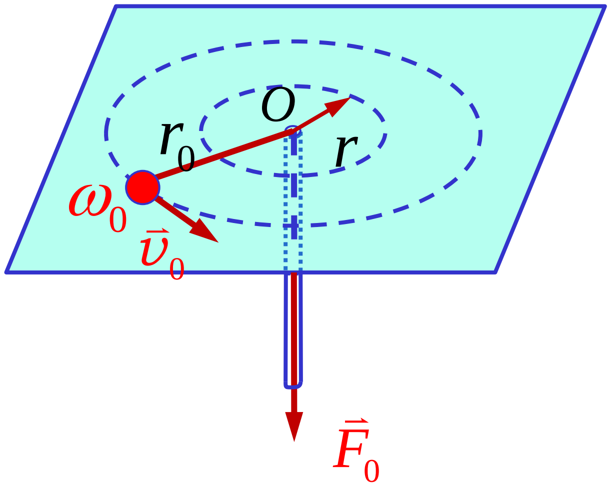
得 $$\upsilon_1 = \frac{R+l_2}{R+l_1}\upsilon_2 = 6.3\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$$

例 质量为m的小球系在绳子的一端，绳穿过铅直套管，使小球限制在一光滑水平面上运动。先使小球以角速度ω_0绕管心作半径为r_0的圆周运动，然后向下拉绳子，使小球运动半径逐渐减小，最后小球运动轨迹成为半径为r的圆。

求 将小球拉至离中心$r_0/2$处时，拉力$\vec{F}_0$所作的功。

解 小球在有心力作用下运动，角动量守恒，有：

$$m\omega_0 r_0^2 = m\omega r^2$$



又 $\upsilon_0 = \omega_0 r_0 \qquad \upsilon = \omega r$

得 $\upsilon = \dfrac{\omega_0 r_0^2}{r}$

由动能定理，有 $A = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 - \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \dfrac{1}{2}m\omega_0^2 r_0^2\left(\dfrac{r_0^2}{r^2} - 1\right)$

当 $r = \dfrac{r_0}{2}$时，拉力的功为 $A = \dfrac{3}{2}m\omega_0^2 r_0^2$

力对空间的积累

过程量：功

$A=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot\vec{r}$

状态量：动能

$E_k=\frac{1}{2}mv^2$

$E_k=\frac{p^2}{2m}$

状态量：动量

$\vec{p}=m\vec{v}$

过程量：冲量

$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$

力对时间的积累

无需关注每一时刻运动情况

过程量⇄状态量

质点动能定理

$A=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot\vec{r}=\Delta E_k$

标量方程

矢量方程

质点动量定理

$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\Delta\vec{p}$

$\vec{F}dt=d\vec{p}$

质点

质点系动能定理

$A_{外}+A_{内}=\Delta E_k$

$A_{非保内}=-\Delta E_p$

功能原理

$A_{外}+A_{非保内}=\Delta E_p+\Delta E_k$

避免保守内力做功积分计算

机械能守恒定律

$A_{外}+A_{非保内}=0$

$\Delta E=\Delta E_p+\Delta E_k$=常量

$\Sigma\vec{F}_{外i}=0$

$\left|\vec{F}_{内}\right|>>\left|\vec{F}_{外}\right|$

质点系动量定理

$\int_{t_1}^{t_2}(\Sigma\vec{F_i})dt=\Delta(\Sigma\vec{p_i})$

$\Sigma\vec{F_i}dt=d(\Sigma\vec{p_i})$

动量守恒定律

$\Sigma\vec{F}_{外}=0$

$\Sigma\vec{p_i}$=常量

质点系

力

$$\vec{\mathrm{F}}$$

动量

$$\vec{\mathrm{p}} = mv$$

牛顿第二定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{\mathrm{dt}}$$

状态量： **动量**

$$\vec{\mathrm{p}} = mv$$

过程量： **冲量**

$$\vec{\boldsymbol{I}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

动量定理的积分形式

$$\vec{\boldsymbol{I}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \Delta\vec{\mathrm{p}}$$

以固定点做参考点

力矩

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

角动量

$$\vec{\mathrm{L}} = \vec{r} \times \vec{p}$$

角动量定理微分形式

$$\vec{\mathrm{L}} = \frac{d\vec{M}}{\mathrm{dt}}$$

状态量： **角动量**

$$\vec{\mathrm{L}} = \vec{r} \times \vec{p}$$

过程量： **冲量矩**

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$

角动量定理积分形式

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \Delta\vec{\mathrm{L}}$$

本章小结

1. 牛顿运动定律（描述力的瞬时作用）

(1) 牛顿运动三定律

牛顿第一定律： **任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，直到其他物体作用的力迫使它改变这种状态为止。**

牛顿第二定律： $$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

当m不变时： $$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=m\vec{a}$$

牛顿第三定律： $$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$$

力的矢量叠加原理： $$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots$$

(2) 力学中几种常见的力

万有引力： $\vec{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{\mathrm{r}}$

重力： $\vec{F}_{\mathrm{G}} = m\vec{g}$

弹簧的弹性力： $\vec{F} = -kx\vec{i}$

静摩擦力： $F_{\mathrm{s}} \le F_{\mathrm{smax}}$　　$F_{\mathrm{smax}} = \mu_{\mathrm{s}} F_{\mathrm{N}}$

滑动摩擦力： $F_{\mathrm{k}} = \mu_{\mathrm{k}} F_{\mathrm{N}}$

(3) 应用牛顿运动定律解题的一般步骤

选取研究对象；分析受力情况，画出受力图；选取坐标系；列方程求解；讨论。

(4) 牛顿运动定律的适用范围

宏观低速物体；惯性系。

2. 功和能（描述力的空间累积效应）

(1) 功 $A_{ab}=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_{r_a}^{r_b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

重力的功： $A=mg(y_a-y_b)$

万有引力的功： $A=-Gm_1m_2(\dfrac{1}{r_a}-\dfrac{1}{r_b})$

弹簧弹性力的功： $A=\dfrac{1}{2}kx_a^2-\dfrac{1}{2}kx_b^2$

摩擦力的功： $A=-\mu_k mgs$

(2) 功率 $P=\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$

(3) 动能定理

质点的动能定理： $\int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\dfrac{1}{2}mv_b^2-\dfrac{1}{2}mv_a^2$

质点系的动能定理： $A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}$

(4) 保守力 $\oint_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$ **(重力、万有引力、弹簧弹性力等都是保守力)**

(5) 势能 $$E_{pa} = \int_a^{b(\text{势能零点})} \vec{F}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

重力势能: $E_p = mgy$ **(以 $y=0$ 的平面为势能零点)**

万有引力势能: $E_p = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$ **(以无穷远处为势能零点)**

弹簧弹性力势能: $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ **(以弹簧原长处为势能零点)**

保守力作功与势能的关系: $A_{保} = -\Delta E_p = -(E_{pb} - E_{pa})$

(6) 保守力与势能的微分关系

$$\vec{F} = -\nabla E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)$$

(7) 机械能守恒定律 **当** $A_{外} + A_{非保内} = 0$ **时，** $E_k + E_p =$ **常量。**

3. 动量和动量定理（描述力的时间累积效应）

(1) 冲量

元冲量： $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$

t_1 **至** t_2 **时间内的冲量：** $\vec{I} = \int \mathrm{d}\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

(2) 动量定理

质点的动量定理： $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

质点系的动量定理： $\int_{t_1}^{t_2} (\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t = (\sum_i m_i\vec{v}_{i2}) - (\sum_i m_i\vec{v}_{i1})$

(3) 动量守恒定律

当 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ **时，** $\vec{p} = \sum_i m_i\vec{v}_i =$**常矢量**

4. 质心

(1) 质心的位矢 $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$ 或 $\vec{r}_C = \dfrac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$

(2) 质心运动定理 $\vec{F} = m\vec{a}_C$

5. 角动量和角动量定理（描述力的时间累积效应）

(1) 力对固定点*O*的力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

(2) 质点对固定点*O*的角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}$

(3) 角动量定理 $\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

(4) 角动量守恒定律 当 $\vec{M} = 0$ 时， $\vec{L} =$ **常矢量**

动力学综合问题解法

规律	对象	对内外力的要求	方程性质	条件不满足
牛顿第二定律	质点	需分析各力的大小和方向	瞬时性 矢量性	
机械能守恒定律	质点系	$A_{非保内}=0$ $A_{外}=0$	过程与始末两态的标量等式	功能原理 $A_{外}+A_{非内}=\Delta E$
动量守恒定律	质点系	对内力无要求 $\vec{F}_{外}=0$	过程与始末两态的矢量等式	动量定理 $\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$
角动量守恒定律	质点或质点系	$\vec{M}_{外}=0$	过程与始末两态的矢量等式	角动量定理 $\vec{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$