概率论与数理统计

第一节　一维随机变量及其分布(1)

- 一、随机变量的定义
- 二、分布函数的性质

一、随机变量（Random Variable　r.v.）的定义

1. 随机变量的引入

如何更透彻地研究随机现象？

用数学分析的方法 $\xrightarrow{\text{研究}}$ 随机现象

随机事件 $\begin{cases} \text{数量表示} \\ \text{非数量表示} \end{cases}$ 与数字无关，如何用数学方法？

对样本空间和实数集建立对应关系

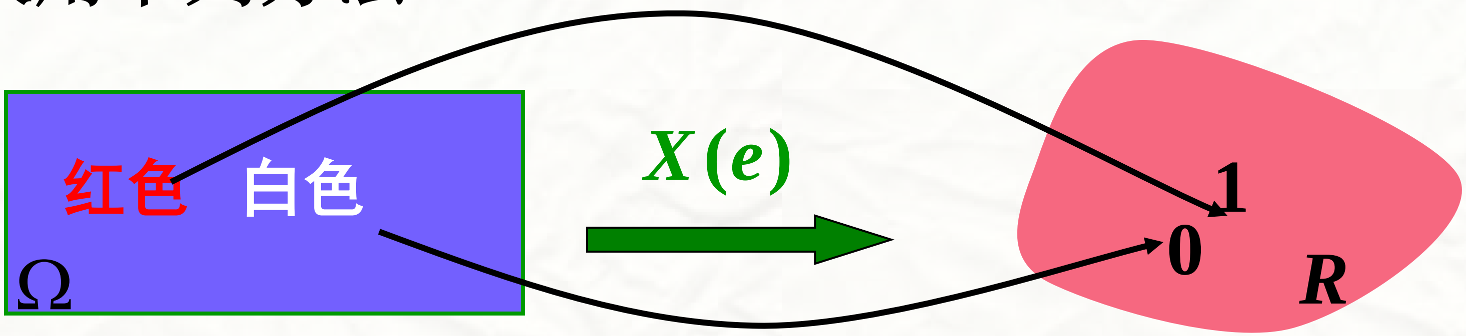
——随机变量

目　上　下　回　停　续

实例1 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球，观察摸出球的颜色.

$\Omega=\{\underbrace{\text{红色、白色}}_{\text{非数量}}\}$ $\xrightarrow{\ ?\ }$ 将Ω数量化

可采用下列方法



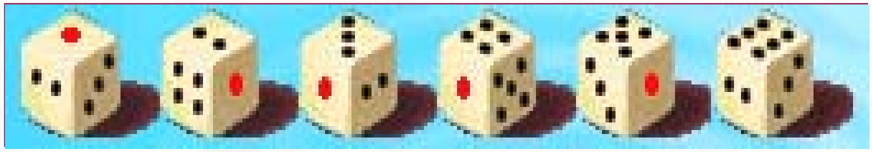
即有 X(红色)=1，X(白色)=0.

$$X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{红色},\\ 0, & e=\text{白色}.\end{cases}$$

这样便将非数量的 Ω={红色、白色} 数量化了.

实例2 抛掷骰子,观察出现的点数.

则有



Ω={1、2、3、4、5、6}

样本点本身就是数量

$X(e)=e$ 恒等变换

$$X(1)=1,\ X(2)=2,\ X(3)=3,\ X(4)=4,\ X(5)=5,\ X(6)=6,$$

且有

$$P\{X=i\}=\frac{1}{6},\quad (i=1,2,3,4,5,6).$$

目 上 下 回 停 续

2. 随机变量的定义

定义2.1 设 E是随机试验，其样本空间为$\Omega=\{\omega\}$.

若对于每一个样本点$\omega\in\Omega$，都有唯一的实数值

$X(\omega)$与之对应，则称定义在$\Omega=\{\omega\}$上的单值实

函数$X(\omega)$为随机变量（r.v.），简记为 X.

常用 X，Y，Z，…表示随机变量；

用$x, y, z, \ldots$ 表示X，Y，Z，…的取值.

目 上 下 回 停 续

注 1° r.v. X与高等数学中的实函数有本质区别：

1) X是 $\Omega \to \boldsymbol{R}$ 上的映射。

定义域：样本空间Ω，但是Ω不一定是实数集；

2) X的自变量在随机试验中是随机出现的，导致

X的取值是随机的，它的每一个可能取值都

有一定的概率；

摸球试验 Ω ={红色、白色}

$$X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{红色},\\ 0, & e=\text{白色}.\end{cases}$$

$$P\{X=1\}=P\{\text{红色}\}=p,$$

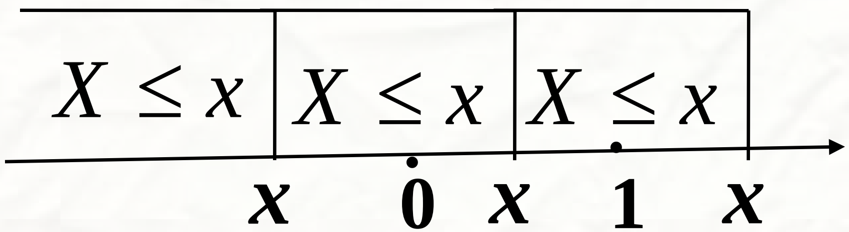
$$P\{X=0\}=P\{\text{白色}\}=1-p,$$

2^{o}任何随机事件都可以通过随机变量来表示. 即

对于任意实数 x, $\{X \le x\}$是随机事件.

摸球试验 $\Omega=\{$红色、白色$\}$

$$X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{红色},\\ 0, & e=\text{白色}.\end{cases}$$



对于任意实数 $x \in R$,

$$\{X \le x\} \Leftrightarrow \begin{cases}\Phi, & x<0,\\ \{\text{白色}\}, & 0 \le x < 1,\\ \Omega, & x \ge 1,\end{cases}$$

3^{o} 对于随机变量,我们常常关心它的取值.

二、分布函数及其性质

如果我们对随机事件$\{X\le x\}$求概率, 就引出了随机变量分布函数的概念.

1.分布函数的定义

定义2.2 称

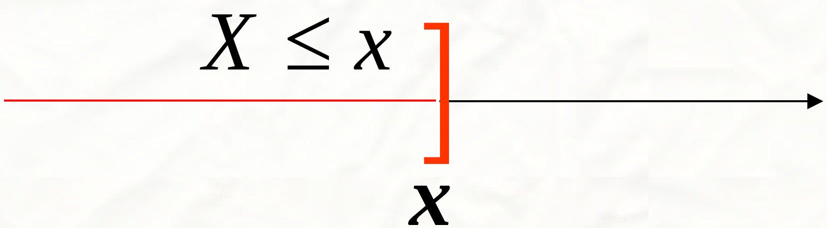
$$F(x) = P\{X \le x\} \qquad -\infty < x < \infty$$

为随机变量X 的分布函数.

记作 $X \sim F(x)$ 或 $X \sim F_X(x)$.

注. 1°如果将X看作数轴上随机点的坐标,则分布函数$F(x)$的值表示X 落在区间$(-\infty, x]$的概率.

$$F(x) = P(X \le x), \quad -\infty < x < +\infty$$



问： 在上 式中，X, x 皆为变量. 二者有什么区别？

x 起什么作用？ $F(x)$ 是不是概率？

$F(x)$ 是随机变量 X 取值不大于 x 的概率.

2° 分布函数是一个普通的函数，正是通过它，我们可以用数学分析的工具来研究 随机变量.

3° 有了分布函数，就可研究随机变量在某一区间内取值的概率情况.

2.分布函数的性质

(1) $0 \le F(x) \le 1,\ x \in R$;

(2) $F(x)$是单调不减的;

(3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(4) $F(x)$为右连续，即

$$\lim_{x \to a+0} F(x) = F(a), \quad \forall a \in R.$$

证 (1) $0 \le F(x) \le 1,\ x \in R;$

显然成立！

(2) $F(x)$是单调不减的；

对于 $b > a\ \ (a, b \in R)$, 由于

$$F(b) - F(a) = P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$= P(a < X \le b) \ge 0$$

所以$F(x)$单调不减.

(3) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0;$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1;$$

$$P(-\infty<X<\infty)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(n<X\leq n+1)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{F(n+1)-F(n)\}=\lim_{n\to+\infty}F(n)-\lim_{m\to-\infty}F(m)=1$$

又$F(x)$单调不减,$0\leq F(x)\leq 1,$

对于任意实数x,有$n\leq x\leq n+1(n\in Z),$

所以$F(n)\leq F(x)\leq F(n+1),0\leq F(n)\leq 1.$

进而 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=\lim\limits_{m\to-\infty} F(m)$ (存在)

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$ (存在)

于是 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)-\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=1$

即 $F(+\infty)-F(-\infty)=1$

$\because 1\geq F(+\infty)\geq F(+\infty)-F(-\infty)=1$

$\therefore\ F(+\infty)=1,\quad F(-\infty)=0$

(4) $F(x)$为右连续，即

$$\lim_{x\to a+0} F(x) = F(a), \quad \forall a \in R.$$

证明要用到较多的测度论的知识, 这里从略.

注 1° 可以证明：

一个函数若具有上述性质,则此函数一定是某个随机变量的分布函数 .(充要条件)

2° 重要公式

(1) $P\{X \le b\} = F(b);$

(2) $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a);$

(3) $P\{X > a\} = 1 - F(a);$

(4) $P\{X < b\} = F(b-0);$

(5) $P(X = b) = F(b) - F(b-0), b \in R.$

例 3 已知随机变量X的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

其中$\lambda>0$为常数，求常数 A，B的值.

解 由 $F(+\infty)=1$, 得

$$1=F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(A+Be^{-\lambda x})=A$$

$$\therefore \quad A=1$$

由分布函数的右连续性，得

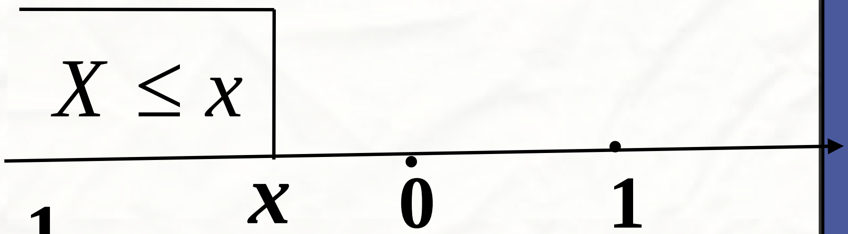
$$F(0+0)=\lim_{x\to+0}(A+Be^{-\lambda x})=F(0)=0$$

即 $F(0)=A+B=0 \quad \therefore \quad B=-A=-1$

例4 抛掷均匀硬币

$$X=\begin{cases}1, & \text{正面},\\ 0, & \text{反面}.\end{cases}$$

求随机变量X的分布函数.



解 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$

当 $x<0$ 时

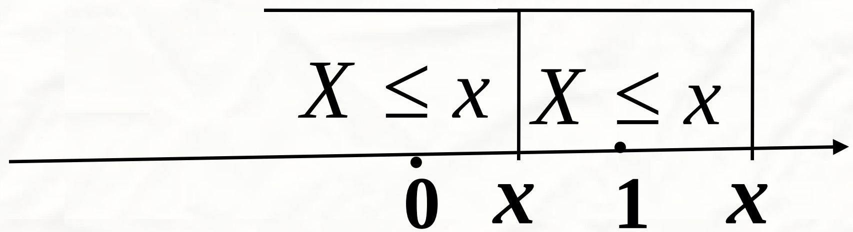
$$F(x)=P\{X\le x<0\}=0,$$

当$0 \le x < 1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \frac{1}{2};$$

当$x \ge 1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\}$$



$$= P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

得 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

内容小结

1. 随机变量是一个函数，是定义在样本空间上的函数.

2. 随机变量分为离散型和非离散型,其中非离散型包括连续型和其它类型.

3. 随机变量分布函数的概念.

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

4. 分布函数的性质.

(1) $0 \le F(x) \le 1,\ x \in R$;

(2) $F(x)$是单调不减的;

(3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(4) $F(x)$为右连续，即

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = F(x_0), \quad x_0 \in R.$$

思考题

不同的随机变量,他们的分布函数一定不相同吗?

解 不一定.例如抛均匀硬币, 令

$$X_1=\begin{cases}1, & \text{正面},\\ -1, & \text{反面}.\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}1, & \text{反面},\\ -1, & \text{正面}.\end{cases}$$

X_1与X_2在样本空间上对应法则不同,是两个不同的随机变量,但它们却有相同的分布函数.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/2, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

再见

备用题

例3-1 设连续型随机变量 X 的分布函数为:

$$F(x) = A + B\arctan x \qquad -\infty < x < +\infty$$

求: (1) 常系数 A及B;

(2) 随机变量 X 落在(-1,1)内的概率.

解 (1) 根据分布函数的性质可知

$$F(+\infty) = 1, \quad F(-\infty) = 0$$

依题意可得

$$F(+\infty) = A + \frac{\pi}{2}B = 1$$

$$F(-\infty) = A - \frac{\pi}{2}B = 0$$

联立上面两个方程可以解得

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi}$$

(2) 随机变量 X 落在(-1,1)内的概率可以表示为

$$P\{-1 < X < 1\} = F(1-0) - F(-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

例 4-1 一个靶子是半径为2米的圆盘,设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比,并设射击都能中靶,以X表示弹着点与圆心的距离.试求随机变量 X 的分布函数.

解 $\forall x \in R,\quad F(x) = P\{X \le x\}$

当$x < 0,\quad F(x) = P\{X \le x\}$ =0,

当$0 \le x < 2, F(x) = P\{X \le x\}$

$$=P\{X \le 0\} + P\{0 < X \le x\}$$

$$= P\{0 < X \le x\} = kx^2,$$

当$x \geq 2$, $F(x) = P\{X \leq x\}$

$=P\{X \leq 0\} + P\{0 < X \leq 2\} + P\{2 < X \leq x\}$

$= P\{0 < X \leq 2\} = 1$,

当$0 \leq x < 2$时, $P\{0 < X \leq x\} = kx^2$, k是常数.

由 $P\{0 < X \leq 2\} = 1$,

得 $4k = 1$, 即 $k = \dfrac{1}{4}$.

故 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

目 上 下 回 停 续