练习题

17.设<G, *>是一个偶数阶的群，设<H,* >是<G,*>的一个子群，这里|H|=|G|/2,证明<H,* >是正规子群，

证明: $\forall a \in H$, $aH=H=Ha$;

$\forall a \notin H$, $aH \cap H=\phi$,且$|aH|=|H|$,

但又$|H|=|G|/2$，所以$aH=G-H$。

同理得$Ha=G-H$, 有$aH=Ha$,

所以H是其正规子群。

练习

18 设<G, *>是一个群，H={a|a∈G∧对所有b∈G,a*b=b*a},证明<H,* >是正规子群。

证明：(1)则∀b∈G有a*b=b*a, $a^{-1}*a*b*a^{-1}=a^{-1}*b*a*a^{-1}$

$b*a^{-1}=a^{-1}*b$，故a^{-1} ∈H.

(2) ∀ a, b∈H, ∀ c∈G, 有

(a*b) *c =a* (b* c)=a *(c*b)=(a*c)*b=(c*a)*b=c *(a*b)

所以a*b∈H, 因此H是G的子群

(3) ∀ n∈G, ∃m∈H使m*n=n*m∈nH;因此Hn⊆nH,

同理n*m=m*n∈Hn;因此nH⊆Hn,所以nH= Hn。

因此H是<G,*>的正规子群。

练习

19 证明：如果$\langle H, * \rangle$和$\langle K,* \rangle$都是群$\langle G,*\rangle$的正规子群，那么$(H\cap K, *\rangle$也是一个正规子群。

证明: 首先证明是子群，再证明正规子群。

(1)$\forall x \in H\cap K$, $x \in H$ 且 $x \in K$,

所以$x^{-1} \in H$，$x^{-1} \in K$，即$x^{-1}\in H\cap K$;

$\forall x$，$y \in H\cap K$, 得 $x*y\in H\cap K$,

(2)$\forall a*m \in a(H\cap K)$, 得$m\in H$，$m \in K$, 而$\langle H, *\rangle$和$\langle K, * \rangle$是正规子群，故有$a*m \in aH=Ha$，$a*m \in aK=Ka$,

得$a*m=h1*a(h1 \in H)$，$a*m=k1*a(k1\in K)$，群的性质得$h1=k1$，得$a*m \in (H\cap K)\, a$

所以$a(H\cap K) \subseteq (H\cap K)\, a$

同理 $(H\cap K)a\subseteq a(H\cap K)$，所以为正规子群。

练习

32. 证明:在格中如果$a \le b \le c$，则$a \vee b = b \wedge c$,

$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

证明: $a \vee b = b \wedge c = b$

$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = b$

练习

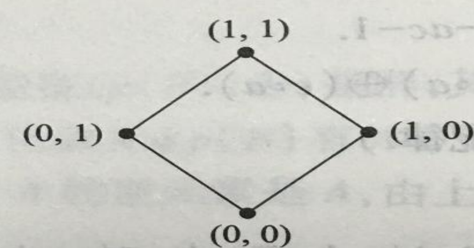
58. (3P−31) 设 $L_1=\{0,1\}$，$L_2=\{(a_1,a_2)\mid a_1,a_2\in L_1\}$，证明 $(L_2,\vee,\wedge)$ 是格，其中二元运算 $\vee,\wedge$ 定义为：对 $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in L_2$，有

$$(a_1,a_2)\wedge(b_1,b_2)=(\min(a_1,b_1),\min(a_2,b_2))$$
$$(a_1,a_2)\vee(b_1,b_2)=(\max(a_1,b_1),\max(a_2,b_2))$$

证明：根据题意，$L_2=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$，由运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 的定义，做如下计算：

$$(0,0)\wedge(0,1)=(0,0),(0,0)\vee(0,1)=(0,1);$$
$$(0,0)\wedge(1,0)=(0,0),(0,0)\vee(1,0)=(1,0);$$
$$(0,0)\wedge(1,1)=(0,0),(0,0)\vee(1,1)=(1,1);$$
$$(0,0)\wedge(0,0)=(0,0),(0,0)\vee(0,0)=(0,0);$$
$$(0,1)\wedge(1,0)=(0,0),(0,1)\vee(1,0)=(1,1);$$
$$(0,1)\wedge(1,1)=(0,1),(0,1)\vee(1,1)=(1,1);$$
$$(0,1)\wedge(0,1)=(0,1),(0,1)\vee(0,1)=(0,1);$$
$$(1,0)\wedge(1,1)=(1,0),(1,0)\vee(1,1)=(1,1);$$
$$(1,0)\wedge(1,0)=(1,0),(1,0)\vee(1,0)=(1,0);$$
$$(1,1)\wedge(1,1)=(1,1),(1,1)\vee(1,1)=(1,1).$$

相应的哈斯图为



方法2：也可以根据定义证明(交换律、结合律、吸收律)

从上图可以看出 $(L_2,\vee,\wedge)$ 是一个偏序，其中任意两个元素 (a_1,a_2) 和 $(b_1,b$

界，故 $(L_2,\vee,\wedge)$ 是格。

练习

60. (3P-33)证明：一个格$(L,\wedge,\vee)$是分配格当且仅当$a,b,c\in L$，有

$$(a\vee b)\wedge c\leqslant a\vee(b\wedge c)$$

证明：(1) 设$(L,\wedge,\vee)$是分配格，由$a\wedge c\leqslant a$和$b\wedge c\leqslant b\wedge c$，可得

$$(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\leqslant a\vee(b\wedge c)$$

所以有$(a\vee b)\wedge c\leqslant a\vee(b\wedge c)$.

(2) 反之，若对任意的$a,b,c\in L$，有$(a\vee b)\wedge c\leqslant a\vee(b\wedge c)$，则可得

$$\begin{aligned}(a\vee b)\wedge c&=((b\vee a)\wedge c)\wedge c\leqslant(b\vee(a\wedge c))\wedge c\\&=((a\wedge c)\vee b)\wedge c\leqslant(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\end{aligned}$$

又由$a\wedge c\leqslant(a\vee b)\wedge c$和$b\wedge c\leqslant(a\vee b)\wedge c$，可得

$$(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$$

于是就有$(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$.

类似可证或由对偶性得$(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(b\vee c)$也成立.

故$(L,\wedge,\vee)$是分配格.