第七章 线性空间与线性变换

§1、线性空间的定义与基本性质

例1 所有n维实向量的集合 R^n ,对于通常向量的加法与数乘运算构成线性空间。

例2 所有 $m \times n$ 矩阵的集合 $\mathbf{R}^{m \times n}$,对于通常矩阵的加法与数乘运算构成线性空间。

that that the

例9 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,非齐次线性方程组Ax = b的解向量集合 \widetilde{S} ,按通常向量的加法与数乘不构成线件空间。

原因: (1) \widetilde{S} 可能是空集;

- (2) S对加法不封闭:
- (3) 区对数乘不封闭。

例10 全体正实数集合 R^+ ,加法与数乘规定为 $m \oplus n = mn$, $k \circ m = m^k$, $\forall m, n \in R^+$, $k \in R$ 则 R^+ 构成线性空间。

其中1是零元素, $\frac{1}{m}$ 是元素m的负元素。







例3 全体实系数多项式集合P[*i*],按通常多项式的加法和数与多项式的乘法,构成线性空间。

例4 次数不超过n的全体实系数多项式集合 $P_n[t]$,按通常多项式的加法和数与多项式的乘法,构成线性空间。

例5 次数等于n的全体实系数多项式集合,对于 多项式的加法与数乘运算是否构成线性空间?

解 不构成。原因:

(1) 对加法不封闭,取 $t^n + 5$ 和 $-t^n - 2$ 属于该集合,但 $(t^n + 5) + (-t^n - 2) = 3$ 不属于该集合;







例11 全体二维实向量的集合V,加法与数乘规定为

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c,b+d+ac)$$

 $k \circ (a,b) = (ka,kb + \frac{k(k-1)}{2}a^2)$

则V构成线性空间。 因为

$$(a,b) \oplus (0,0) = (a+0,b+0+a0) = (a,b)$$

$$(a,b) \oplus (-a,a^2-b) = (a-a,b+(a^2-b)+a(-a))$$

= (0,0)

所以(0,0)是零元素, $(-a,a^2-b)$ 是元素(a,a)的 负元素。





(2) 对于数乘运算不封闭,如 $0(t^n + 5) = 0$ 不属于该集合;

(3) 无零元素。

例6 全体实函数的集合,对于通常函数的加法 与数与函数的乘法,构成线性空间。

例7 定义在区间[a,b]上的连续实函数的全体 C[a,b], 对于通常函数的加法与数与函数的乘法,构成线性空间。

例8 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 齐次线性方程组Ax = 0的解向 量集合S, 按通常向量的加法与数乘构成线性空间。





例12 全体n维实向量的集合V,对于通常向量的加法和如下定义的数乘运算是否构成线性空间?为什么?

1) $k \circ \alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in V$ 2) $k \circ \alpha = 0$, $\forall \alpha \in V$

解 1) 不构成。因为 $(k+l) \circ \alpha = \alpha$, 但

 $k \circ \alpha + l \circ \alpha = \alpha + \alpha = 2\alpha$

即运算律(7)不成立。

2) 不构成。因为 $1 \circ \alpha = 0 \neq \alpha$, 即 (5) 不成立。

例13 实数域R按通常数的加法与乘法运算, 构成线性空间。







§ 2、维数、基与坐标

例 在R^{2×2}中, 试讨论矩阵组

(1)
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2)
$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
, $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

的线性相关性。

例 设V是所有实函数构成的线性空间,讨论V中 函数组 e^{2t} , t^2 ,t 的线性相关性。

解设
$$k_1 e^{2t} + k_2 t^2 + k_3 t = 0$$

对其求导得 $2k_1 e^{2t} + 2k_2 t + k_3 = 0$
再求导得 $4k_1 e^{2t} + 2k_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & t^2 & t \\ 2e^{2t} & 2t & 1 \\ 4e^{2t} & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2e^{2t}(-2t^2 + 2t - 1) \neq 0$$

只有 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$,故 e^{2t} , t^2 ,t 线性无关。



解 (1) 设 $k_1E_{11} + k_2E_{12} + k_3E_{21} + k_4E_{22} = 0$, 即 $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

只有 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, 故 E_{11} , E_{12} , E_{21} , E_{22} 线性无关。

(2) 设
$$k_1G_1 + k_2G_2 + k_3G_3 + k_4G_4 = \mathbf{0}$$
, 即
$$\begin{cases} k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_3 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

例 判断P[t]中多项式组 $1,t,t^2,\dots,t^N$ 的线性 相关性,N为取定的自然数。

解 设 $k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots + k_N t^N = 0$ 上式分别求1阶、2阶、...、N阶导数得:

$$k_1 + 2k_2t + \dots + Nk_Nt^{N-1} = 0$$

 $2k_2 + \dots + N(N-1)k_Nt^{N-2} = 0$

$$N!k_N = 0$$

联立求解,得 $k_0 = \cdots = k_N = 0$,故 $1, t, t^2, \cdots, t^N$ 线性无关。



由于系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$,所以方程组

只有零解,故 G_1, G_2, G_3, G_4 线性无关。

例 判断P₃[t]中多项式组

 $f_1(t) = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, $f_2(t) = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$, $f_3(t) = t^3 + 6t - 5$, $f_4(t) = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

的线性相关性。

解 设 $k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) + k_4 f_4(t) = 0$ 整理得

 $(k_1 + 2k_2 + k_3 + 2k_4)t^3 + (-2k_1 - 3k_2 - 5k_4)t^2 +$ $(4k_1 + 9k_2 + 6k_3 + 7k_4)t + (k_1 - k_2 - 5k_3 + 5k_4) = 0$

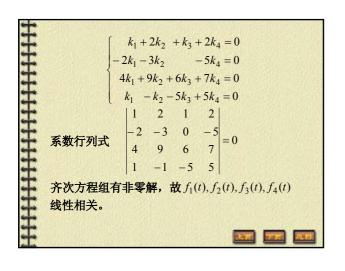
由 1,t,t2,t3 线性无关得

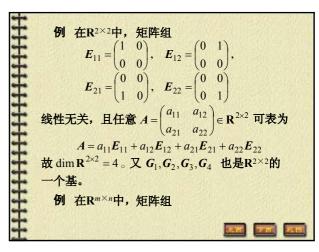


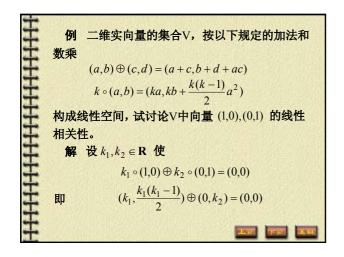


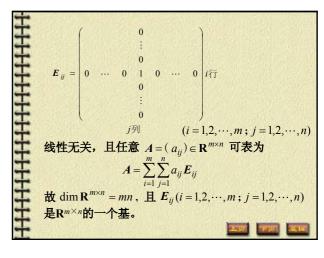


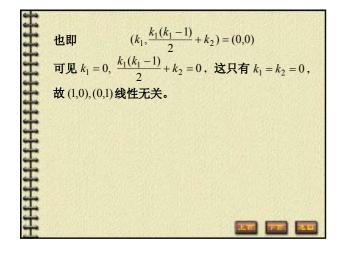


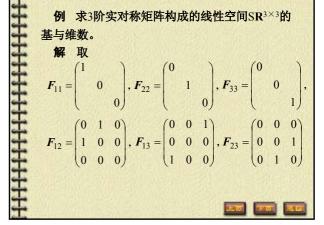


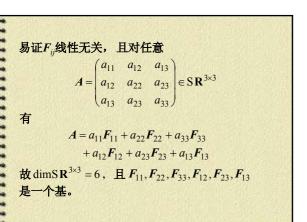


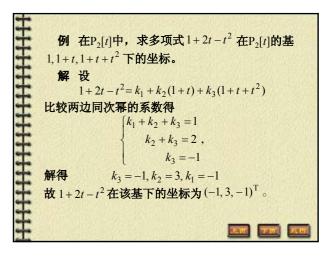


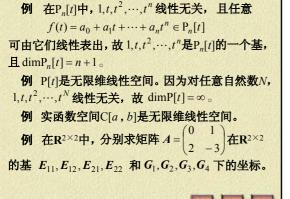


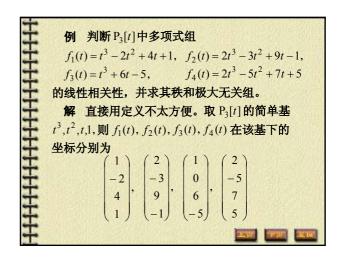








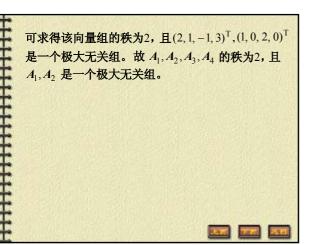


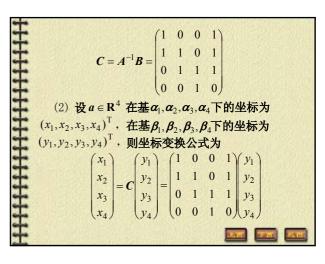


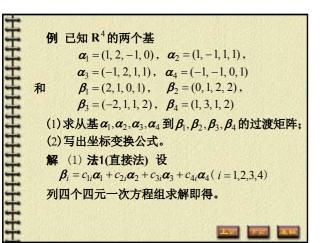
解 因为 $A = 0E_{11} + E_{12} + 2E_{21} - 3E_{22}$,所以 A 在该基下的坐标为 $(0,1,2,-3)^{T}$ 。
又设 $A = k_1G_1 + k_2G_2 + k_3G_3 + k_4G_4$,即 $\begin{cases}
0 = k_2 + k_3 + k_4 \\
1 = k_1 + k_3 + k_4 \\
2 = k_1 + k_2 + k_4 \\
-3 = k_1 + k_2 + k_3
\end{cases}$ 解之得 $k_1 = 0, k_2 = -1, k_3 = -2, k_4 = 3$,故 A在该基下的坐标为 $(0,-1,-2,3)^{T}$ 。

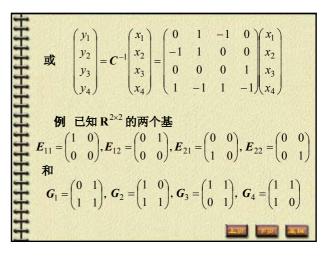
可求得该向量组的秩为2,且 $(1,-2,4,1)^{\mathrm{T}}$, $(2,-3,9,-1)^{\mathrm{T}}$ 为一个极大无关组。故 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ 线性相关,该多项式组的秩为2,且 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 为一个极大无关组。 例 求 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中矩阵组 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩和极大无关组。 解 取 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的简单基 E_{11} , E_{12} , E_{21} , E_{22} ,则矩阵 A_1 , A_2 , A_3 , A_4 在该基下的坐标为

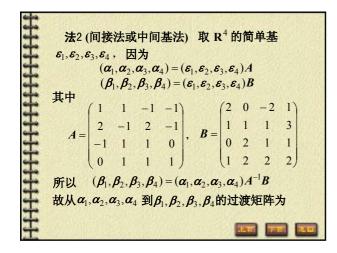
 $(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}}, (1,0,2,0)^{\mathrm{T}}, (3,1,1,3)^{\mathrm{T}}, (1,1,-3,3)^{\mathrm{T}}$

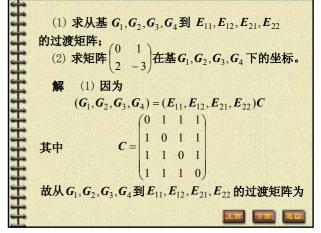


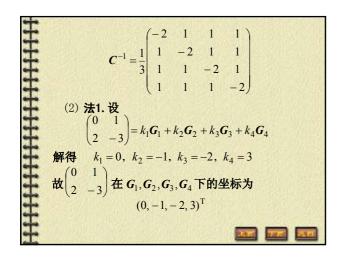


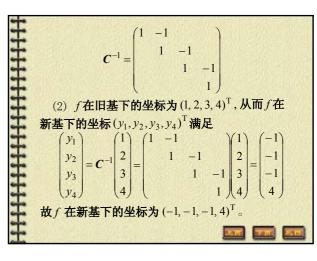


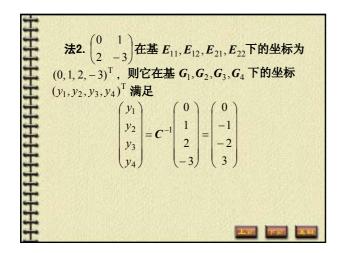


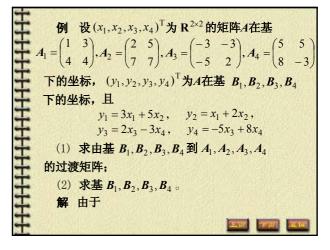


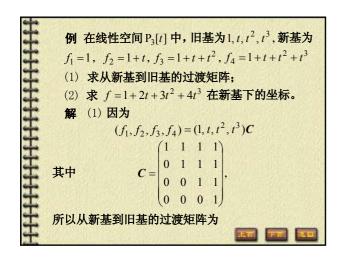


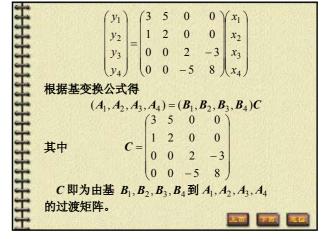


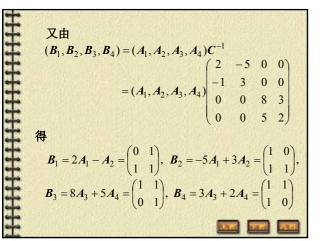


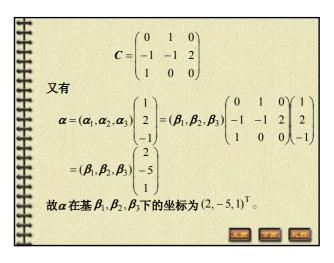




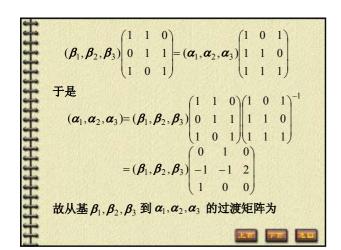


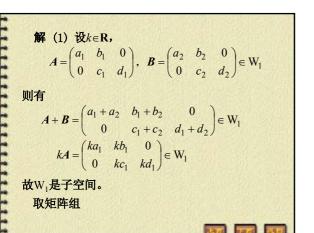


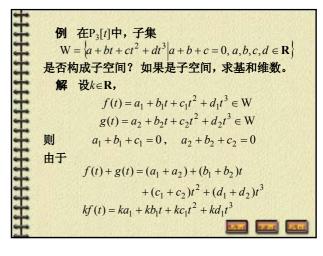


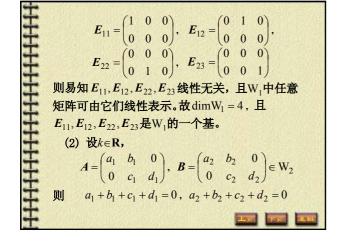


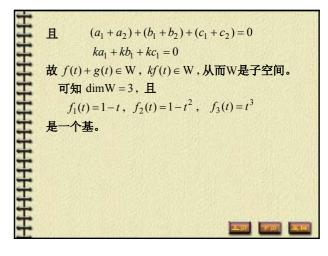
例 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是3维线性空间V 的两个基,且满足 $\begin{cases} \beta_1 & +\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_1 + \beta_2 & = \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 + \beta_3 = \alpha_1 & +\alpha_3 \end{cases}$ (1) 求从基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵; (2) 求元素 $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标。 解 由所给关系式得 § 3、线性子空间
例 在线性空间V中,{θ}和V都是V的子空间,称它们是V的平凡(假)子空间,其余的子空间称为非平凡(真)子空间。
例 在2维几何空间R²中,过原点的任一直线上的向量集合是R²的子空间;在R³中,过原点的直线或平面上的向量集合是R³的子空间。
例 全体实函数组成的线性空间中,P[t]是它的一个子空间;P_n[t]是P[t]的子空间。

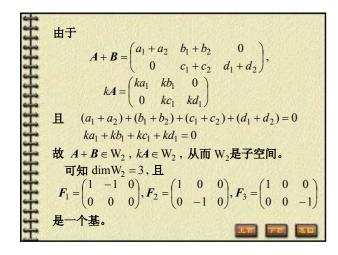


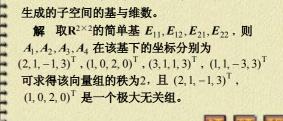












 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$

 $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

例 在R2×2中,求由

故 A_1,A_2,A_3,A_4 的秩为2,且 A_1,A_2 是一个极大 无关组。从而 $L(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 的维数为2,且 A_1,A_2 是它的一个基。

例 设
$$W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$$
, $W_2 = L(\beta_1, \beta_2)$, 其中 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 1, 1, 1)$ $\beta_1 = (2, -1, 0, 1)$, $\beta_2 = (1, -1, 3, 7)$ 求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的基与维数。

解 因为

 $W_1+W_2=L(\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2)+L(\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2)=L(\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2,\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2)$ 所以只要求出向量组 $\pmb{\alpha}_1,\pmb{\alpha}_2,\pmb{\beta}_1,\pmb{\beta}_2$ 的秩和极大无关组即可。由于

故 $\alpha = -c\alpha_1 + 4c\alpha_2 = c(-5, 2, 3, 4)$ (c任意) 从而 dim($W_1 \cap W_2$) = 1,且(-5, 2, 3, 4)是一个基。 注 本题可做如下修改:

1. 设

 $W_1\{(x_1,x_2,x_3,x_4) | x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0\}$ $W_2 = L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$,其中 $\boldsymbol{\beta}_1 = (2,-1,0,1)$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (1,-1,3,7)$, 求 $W_1 + W_2 和 W_1 \cap W_2$ 的基与维数。

可先求出 W_1 的基 $\alpha_1 = (1, 2, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-2, -1, 0, 1)$, 则 $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$, 其余步骤如上题。

2. 设 $W_1 = L(f_1(t), f_2(t))$, $W_2 = L(g_1(t), g_2(t))$, 其中







$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{\alpha}_{1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_{2}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_{1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_{2}^{\mathrm{T}}) \\ & = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而向量组的秩为3,且 $\alpha_1,\alpha_2,m{\beta}_1$ 是一个极大无关组,故 $\dim(W_1+W_2)=3$,基为 $\alpha_1,\alpha_2,m{\beta}_1$ 。

对任意 $\alpha \in W_1 \cap W_2$,有 $\alpha \in W_1$ 且 $\alpha \in W_2$,即 $\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2$ 也即 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 - l_1 \beta_1 - l_2 \beta_2 = 0$

比较分量得



$$f_1(t) = 1 + 2t + t^2$$
, $f_2(t) = -1 + t + t^2 + t^3$
 $g_1(t) = 2 - t + t^3$, $g_2(t) = 1 - t + 3t^2 + 7t^3$

求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的基与维数。

3. 设
$$W_1 = L(A_1, A_2)$$
, $W_2 = L(B_1, B_2)$, 其中
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的基与维数。





周野方程组为
$$\begin{cases} k_1 - k_2 - 2l_1 - l_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = 0 \\ k_1 + k_2 - 3l_2 = 0 \\ k_2 - l_1 - 7l_2 = 0 \end{cases}$$
因为
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
同解方程组为
$$\begin{cases} k_1 = -l_2 \\ k_2 = 4l_2 \\ l_1 = -3l_2 \end{cases}$$
通解为
$$\begin{cases} k_1 = -c \\ k_2 = 4c \\ l_1 = -3c \\ l_2 = c \end{cases}$$

§ 4、线性变换

例 设Z是全体整数的集合, Z'是全体偶数的 集合。 定义

$$\sigma(n) = 2n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

这是Z到Z'的一个映射。

o是满射,又是单射,即o是——对应的。

例 设 $R^{n \times n}$ 是全体n阶方阵的集合,定义

$$\sigma_1(A) = \det A \quad \forall A \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

这是Rn×n到R的一个映射。

σ.是满射,但不是单射。



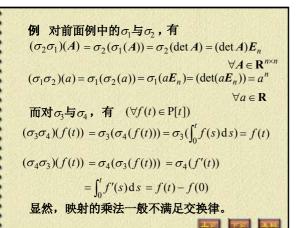


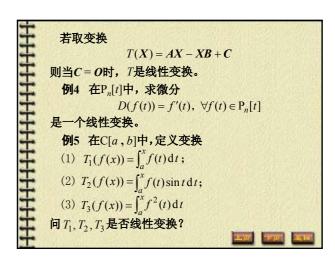


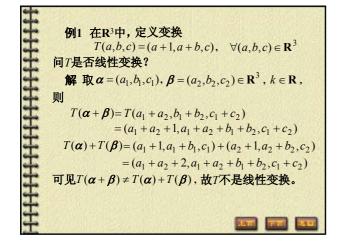
例 定义 $\sigma_2(a) = aE_n \qquad \forall a \in \mathbf{R}$ 这是R到 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 的一个映射。 $\sigma_2 \mathbb{E} \stackrel{\cdot}{=} \mathbf{h}$,但不是满射。 $\mathbf{M} \stackrel{\cdot}{\in} \mathbf{P}[t]$ 是数域R上全体多项式的集合。定义 $\sigma_3(f(t)) = f'(t), \quad \sigma_4(f(t)) = \int_0^t f(s) \, \mathrm{d}s \quad \forall f(t) \in \mathbf{P}[t]$ 则 $\sigma_3 \mathbf{n} \sigma_4 \mathbb{E} \mathbf{P}[t]$ 上的变换。 $\sigma_3 \mathbb{E} \stackrel{\cdot}{\in} \mathbf{h}$,但不是单射。 $\sigma_4 \mathbf{n} \mathbb{E} \stackrel{\cdot}{\in} \mathbf{h}$,但是单射。 $\mathbf{M} \stackrel{\cdot}{\in} \mathbf{N} \mathbf{n}$ 定义在实数集合R上的函数 $\mathbf{y} = f(x)$ 是R上

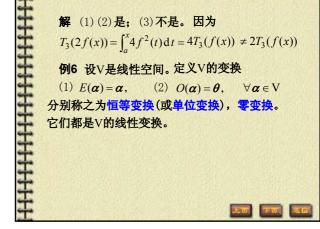
的一个变换。

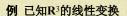
例2 在 R^n 中,定义变换 T(x) = Ax, $\forall x \in R^n$ 而 $A \in R^{n \times n}$ 取定 则T是 R^n 的线性变换。 例3 在 $R^{n \times n}$ 中,定义变换 T(X) = AX - XB, $\forall X \in R^{n \times n}$ 其中 $A, B \in R^{n \times n}$ 取定。问T是否线性变换? 解 设 $X, Y \in R^{n \times n}$, $k \in R$,则有 T(X + Y) = A(X + Y) - (X + Y)B = (AX - XB) + (AY - YB) = T(X) + T(Y) T(kX) = A(kX) - (kX)B = k(AX - XB) = kT(X)故T是 $R^{n \times n}$ 的线性变换。











$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$$

- (1) 求R(T) 的维数和一个基:
- (2) 求N(T) 的维数和一个基。

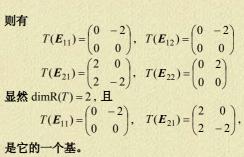
解 (1) 取R3的简单基

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$$

由于

 $T(\varepsilon_1) = (1, 0, 1), T(\varepsilon_2) = (2, 1, 1), T(\varepsilon_3) = (-1, 1, -2)$ 可求得 $T(\varepsilon_1)$, $T(\varepsilon_2)$, $T(\varepsilon_3)$ 的秩为2, 且 $T(\varepsilon_1)$, $T(\varepsilon_2)$ 是一个极大无关组。 故 $\dim R(T) = 2$,且 (1,0,1), (2,1,1)是R(T)的一个基。





(2) 设
$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in N(T)$$
,则由



(2) 设
$$\alpha = (x_1, x_2, x_3) \in N(T)$$
,则
$$T(\alpha) = T(x_1, x_2, x_3)$$

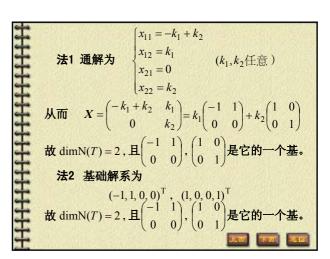
$$= (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3) = (0, 0, 0)$$
于是
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$
同解方程组为
$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$
,通解为
$$\begin{cases} x_1 = 3k \\ x_2 = -k \text{ (k任意)} \\ x_3 = k \end{cases}$$
于是 $\alpha = k(3, -1, 1)$ 。故 dimN(T) = 1,且(3, -1, 1)

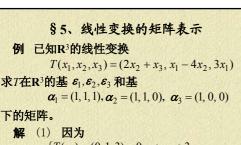
$$T(X) = MX - XM$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_{21} & -2x_{11} - 2x_{12} + 2x_{22} \\ 2x_{21} & -2x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_{21} & = 0 \\ -2x_{11} - 2x_{12} & +2x_{22} = 0 \\ 2x_{21} & = 0 \\ -2x_{21} & = 0 \end{cases}$$
同解方程组为
$$\begin{cases} x_{11} = -x_{12} + x_{22} \\ x_{21} = 0 \end{cases}$$

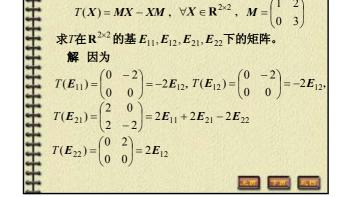
例 已知
$$\mathbf{R}^{2\times 2}$$
的线性变换
$$T(X) = \mathbf{M}X - \mathbf{X}\mathbf{M} \qquad \forall X \in \mathbf{R}^{2\times 2} \ , \ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
 求 T 的象子空间与核子空间的维数和基。
$$\mathbf{M} \quad (1) \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{R}^{2\times 2}$$
的简单基
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



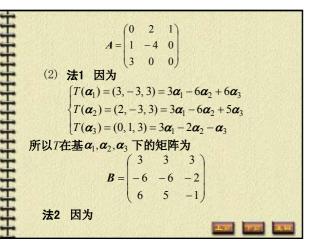


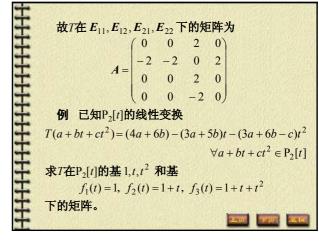
解 (1) 因为
$$\begin{cases} T(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = (0,1,3) = 0\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + 3\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ T(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = (2,-4,0) = 2\boldsymbol{\varepsilon}_1 - 4\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ T(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = (1,0,0) = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_2 + 0\boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{cases}$$

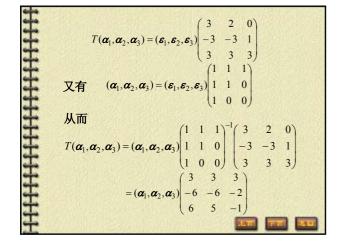
所以T在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 下的矩阵为

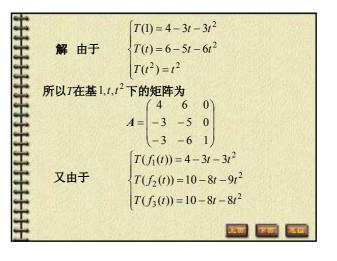


例 已知R^{2×2}的线性变换

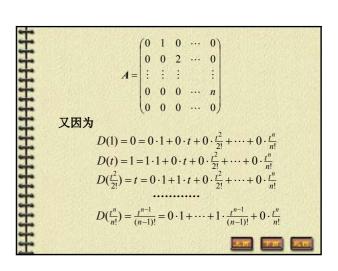




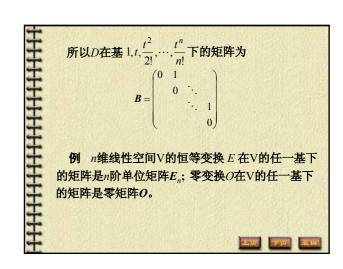


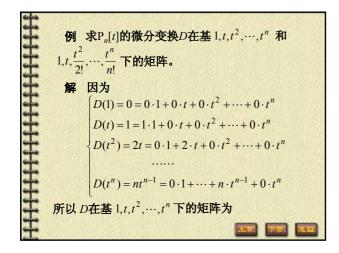


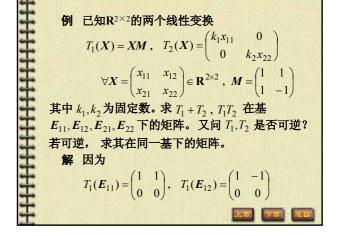
所以
$$T(f_1, f_2, f_3) = (1, t, t^2) \begin{pmatrix} 4 & 10 & 10 \\ -3 & -8 & -8 \\ -3 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$
 又有 $(f_1, f_2, f_3) = (1, t, t^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 从而
$$T(f_1, f_2, f_3) = (f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 10 & 10 \\ -3 & -8 & -8 \\ -3 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

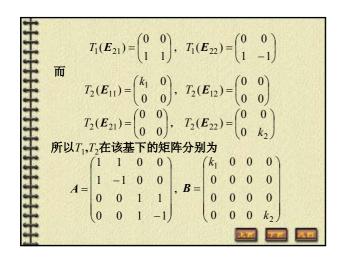


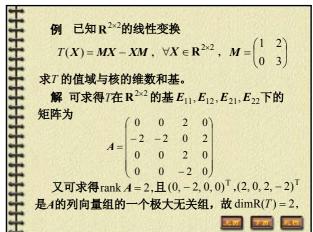
所以7在基
$$f_1(t), f_2(t), f_3(t)$$
 下的矩阵为
$$B = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 18 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$
所以7在基 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 下的矩阵为
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 18 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -9 & -8 \end{pmatrix}$$

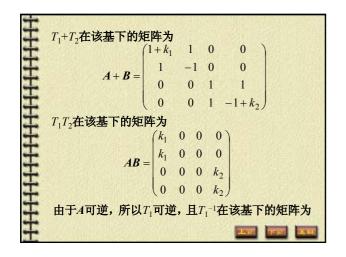


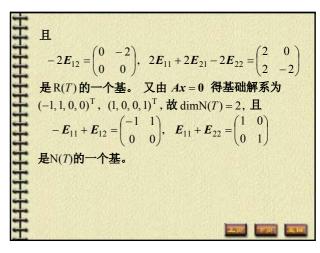


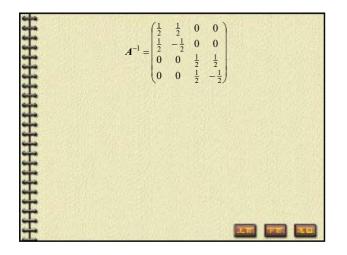


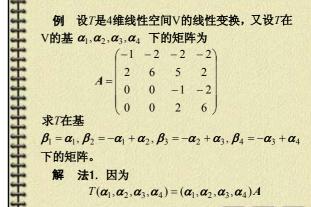










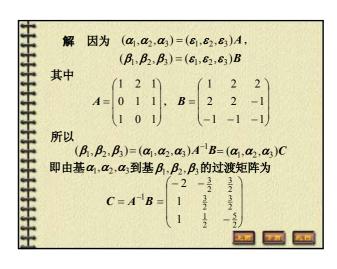


又有
$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) \boldsymbol{P}$$
,其中
$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L} \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
于是
$$T(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4) = T[(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) \boldsymbol{P}]$$

$$= [T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)] \boldsymbol{P}$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}$$

$$= (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4) \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}$$
从而 T 在基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 下的矩阵为

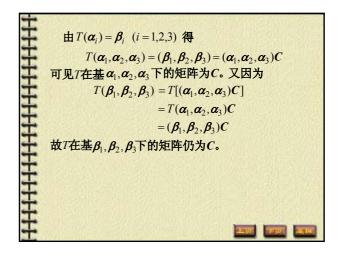


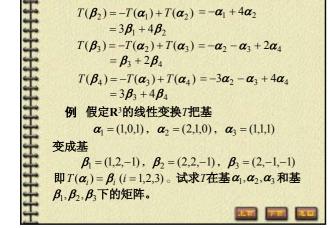
$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
法2. 由 $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)A$ 知
$$T(\alpha_1) = -\alpha_1 + 2\alpha_2,$$

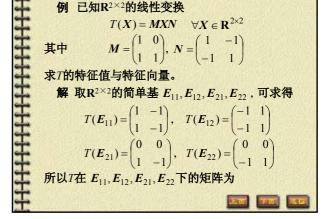
$$T(\alpha_2) = -2\alpha_1 + 6\alpha_2,$$

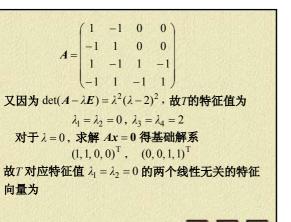
$$T(\alpha_3) = -2\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4,$$

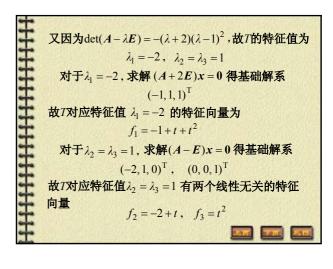
$$T(\alpha_4) = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + 6\alpha_4$$
于是
$$T(\beta_1) = T(\alpha_1) = -\alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 + 2\beta_2$$

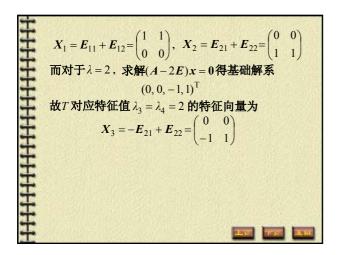


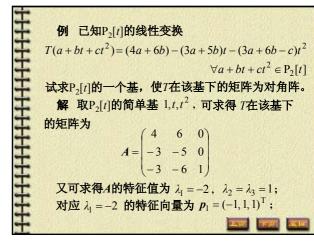


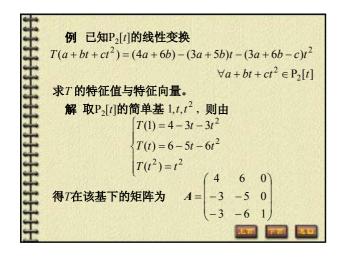


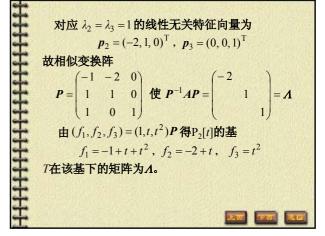












例 给定 V^6 的基 $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ 及线性变换

$$T(\alpha_i) = \alpha_i + 2\alpha_{7-i}$$
 (i = 1,2,...,6)

- 1) 求T的全部特征值与特征向量;
- 2) 求V的一组基, 使T在该基下的矩阵为对角阵。
- 解 1) 由于 $T(\alpha_1, \dots, \alpha_6) = (\alpha_1, \dots, \alpha_6)A$,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}$$

§ 6、欧氏空间

例 在n维向量空间Rn中,对任意

$$\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$$

规定 $[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\beta}$

易证它是内积,R"按上述内积构成欧氏空间。 也称上述内积为R"的标准内积。

如果规定
$$[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i y_i = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\beta}$$

其中 $k_i > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, 而 $\Lambda = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$,则它也是内积, \mathbf{R}^n 按此内积也构成欧氏空间。

可求得 $\det(A - \lambda E) = [(\lambda - 1)^2 - 4]^3 = (\lambda + 1)^3 (\lambda - 3)^3$ 故A的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$
, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$

对应特征值-1的线性无关特征向量为

 $(-1, 0, 0, 0, 0, 1)^{T}$, $(0, -1, 0, 0, 1, 0)^{T}$, $(0, 0, -1, 1, 0, 0)^{T}$

对应特征值3的线性无关特征向量为

(1,0,0,0,0,1)^T, (0,1,0,0,1,0)^T, (0,0,1,1,0,0)^T 故T的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$
, $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$

对应特征值-1的线性无关特征向量为

$$\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_6$$
, $\beta_2 = -\alpha_2 + \alpha_5$, $\beta_3 = -\alpha_3 + \alpha_4$

更进一步,若规定 $[\alpha, \beta] = \alpha^{T} A \beta$,其中 $A \ge n$ 阶正定矩阵,则它也是内积。

例 在mn维矩阵空间 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 中,对任意 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ii})_{m \times n}$,规定

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$
 (标准内积)

 $[A, B] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} a_{ij} b_{ij} \qquad (k_{ij} > 0)$

则它们都是内积,R^{m×}"按这些内积构成欧氏空间。



7000

全部特征向量为

 $k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + k_3 \beta_3$ (k_1, k_2, k_3 不全为零) 对应特征值3的线性无关特征向量为

 $m{eta}_4 = m{lpha}_1 + m{lpha}_6$, $m{eta}_5 = m{lpha}_2 + m{lpha}_5$, $m{eta}_6 = m{lpha}_3 + m{lpha}_4$ 全部特征向量为

$$k_4 \beta_4 + k_5 \beta_5 + k_6 \beta_6$$
 (k_4, k_5, k_6 不全为零)

2) T在V的一组基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ 下的矩阵为 $\Lambda = diag(-1, -1, -1, 3, 3, 3)$

10.00

例 在实线性空间C[a,b]中,规定

$$[f(t),g(t)] = \int_a^b f(\tau)g(\tau) d\tau$$

$$[f(t),g(t)] = \int_{a}^{b} w(\tau)f(\tau)g(\tau)d\tau$$

 $\forall f(t), g(t) \in \mathbb{C}[a,b]$

其中 $w(t) \in C[a,b]$ 且w(t) > 0。

由定积分性质易知它们是内积。

例 在线性空间 $P_n[t]$ 中,对任意 $f(t),g(t) \in P_n[t]$

规定

$$[f(t),g(t)] = \int_0^1 f(\tau)g(\tau) d\tau$$

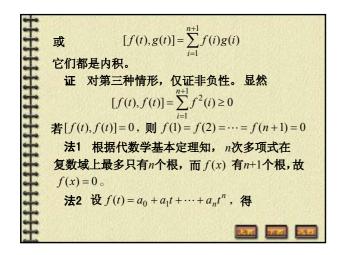
或 [f(

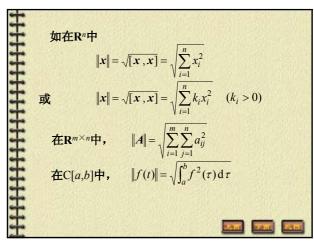
 $[f(t),g(t)] = \int_{-1}^{1} f(\tau)g(\tau) d\tau$

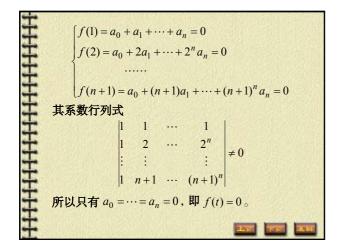


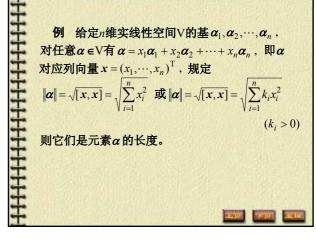


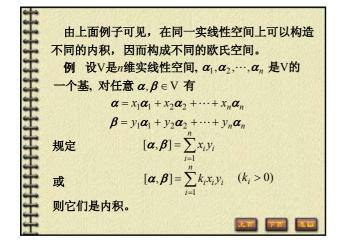


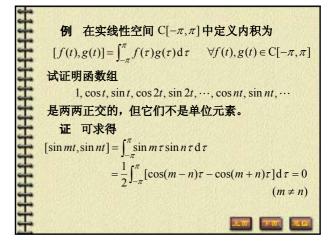












$$[\cos mt, \cos nt] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\tau \cos n\tau \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)\tau + \cos(m+n)\tau] \, d\tau = 0$$

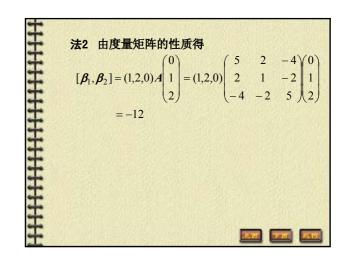
$$(m \neq n)$$

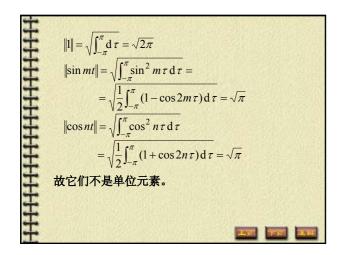
$$[\sin mt, \cos nt] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\tau \cos n\tau \, d\tau$$

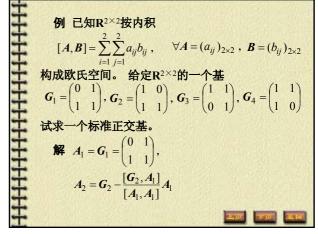
$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)\tau + \sin(m-n)\tau] \, d\tau = 0$$

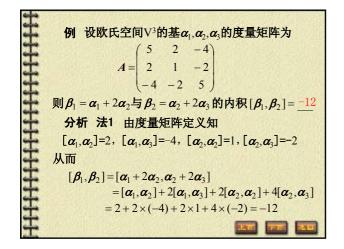
$$[1, \cos nt] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\tau \, d\tau = 0$$

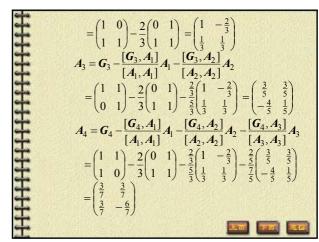
$$[1, \sin nt] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin n\tau \, d\tau = 0$$
于是该函数组两两正交。又有

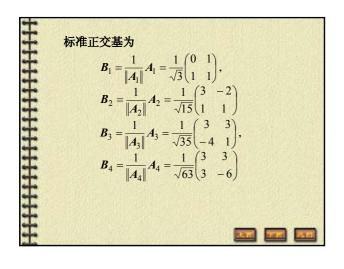


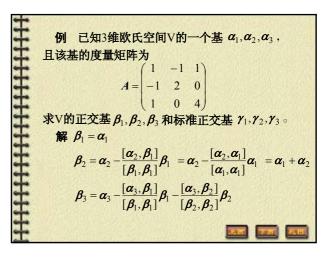


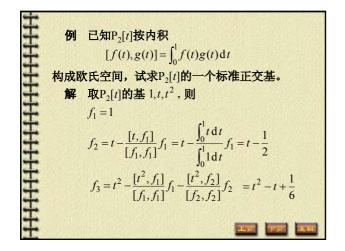


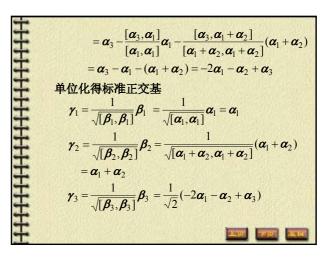


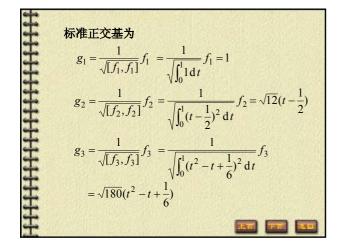


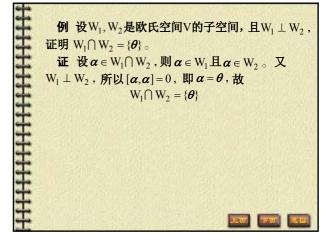


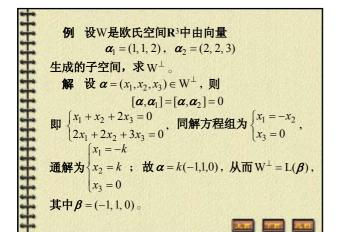


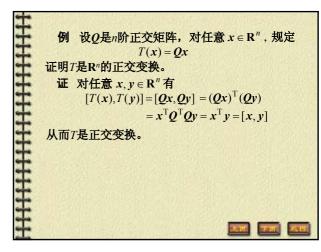


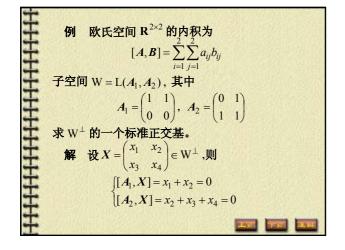


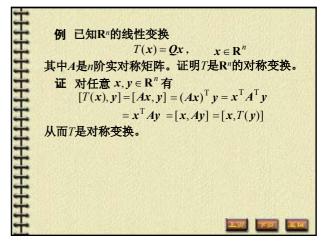


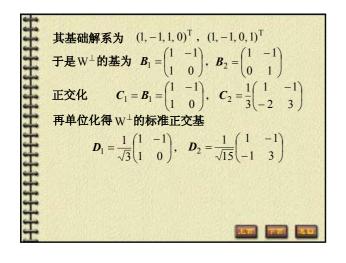


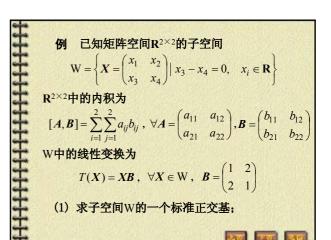












- (2) 验证T是W中的对称变换;
- (3) 求W的一个标准正交基, 使 T在该基下的 矩阵为对角矩阵。

解(1)W的基为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

它们已正交,单位化得W的一个标准正交基

$$\mathbf{\textit{B}}_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\textit{B}}_{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\textit{B}}_{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 可求得





由 $(D_1, D_2, D_3) = (B_1, B_2, B_3)Q$ 得W的标准正交基

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B_1 + B_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T在该基下的矩阵为A。







$$T(\mathbf{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1 + 2\mathbf{B}_2$$

$$T(\mathbf{B}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

$$T(\mathbf{B}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3\mathbf{B}_3$$

可见T在标准正交基 B_1 , B_2 , B_3 下的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

由于A是实对称矩阵,所以T是W中的对称变换。





例 设欧氏空间 V^n 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵 为G,正交变换T在该基下的矩阵为A,证明:

$$A^{\mathrm{T}}GA = G$$

证 法1 由 $T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) A$ 知

$$T(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\alpha}_1 a_{1i} + \boldsymbol{\alpha}_2 a_{2i} + \dots + \boldsymbol{\alpha}_n a_{ni}$$

设
$$G = (g_{ij})_{n \times n}$$
 , 则有

$$g_{ij} = [\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j] = [T(\boldsymbol{\alpha}_i), T(\boldsymbol{\alpha}_j)]$$

$$= [\boldsymbol{\alpha}_1 a_{1i} + \dots + \boldsymbol{\alpha}_n a_{ni}, \boldsymbol{\alpha}_1 a_{1j} + \dots + \boldsymbol{\alpha}_n a_{nj}]$$

$$= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{si} [\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_t] a_{tj}$$







(3) 可求得 $\det(A-\lambda E) = -(\lambda-3)^2(\lambda+1)$, 从而A的 特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$ 。

对应 ル = ル = 3 的特征向量为

$$p_1 = (1, 1, 0)^T$$
, $p_2 = (0, 0, 1)^T$ (已正交)

对应 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $p_3 = (-1, 1, 0)^T$ 。

故正交矩阵
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

故 $A^{T}GA = G_{\circ}$

法2 由于T是正交变换,从而 $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_n)$ 也是V"的基(不一定是标准正交基)。又由

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)A$$

 $= (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}) \boldsymbol{G} \begin{vmatrix} a_{2j} \\ \vdots \end{vmatrix}$

知,从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 的过渡矩阵为A,故基 $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_n)$







