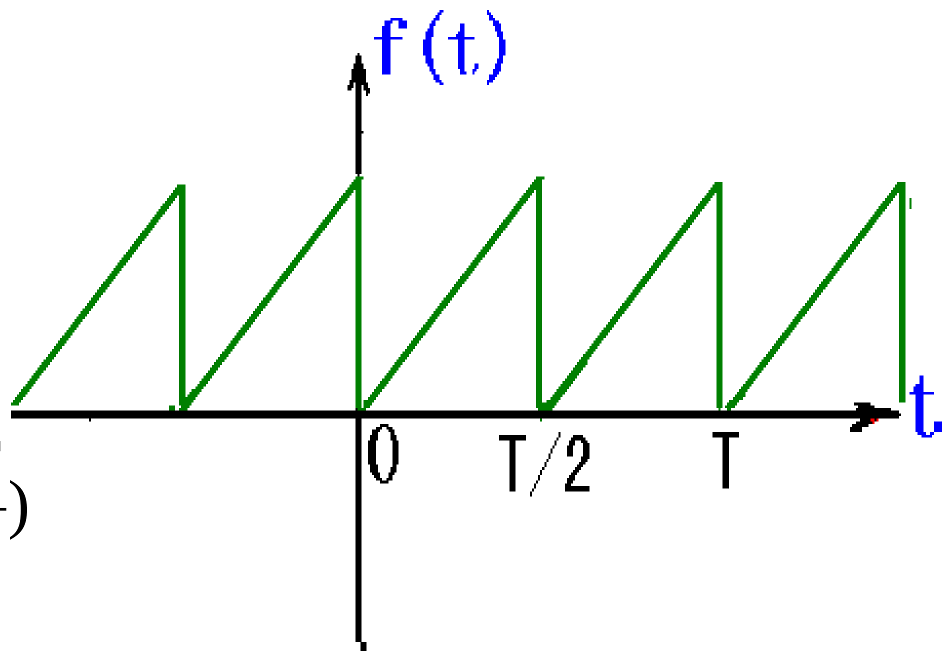
第八章　非正弦周期电流电路

8-1 非正弦周期电流及电压

定义： 随时间按非正弦规律周期变化的电流或电压。



分类：

1）偶函数：$f(t)=f(-t)$

2）奇函数：$f(t)=-f(-t)$

3）奇谐函数：$f(t)=-f(t\pm\frac{T}{2})$

4）偶谐函数：$f(t)=f(t\pm\frac{T}{2})$

8-2 非正弦周期函数傅立叶级数展开式

一、傅立叶级数展开式：

若非正弦函数 f(t)=f(t±nT)，且满足狄氏条件，则：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$=\mathrm{A}_0+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_{mn}\cos(\mathrm{n}\Omega\mathrm{t}+\varphi_n)$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}\rightarrow \text{基频}$$

其中：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\Omega t dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$\mathrm{A}_{mn}=\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}$$

$$\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$$

跳转到第一页

讨 论：$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

1）$A_0=a_0$ ——常量，与频率无关（直流分量、零频分量）

2）$A_{mn}\cos(n\Omega t+\varphi_n)$——正弦量，与n有关（谐波分量）

3）谐波分类：$A_0=a_0$ 直流分量

$$
\left.\begin{array}{lll}
A_{m1}\cos(\Omega t+\varphi_1) & \text{基波分量} & \omega=\Omega \\
A_{m2}\cos(2\Omega t+\varphi_2) & \text{二次谐波} & \omega=2\Omega \\
A_{m3}\cos(3\Omega t+\varphi_3) & \text{三次谐波} & \omega=3\Omega \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
A_{mk}\cos(k\Omega t+\varphi_k) & k\text{次谐波} & \omega=k\Omega
\end{array}\right\}
$$

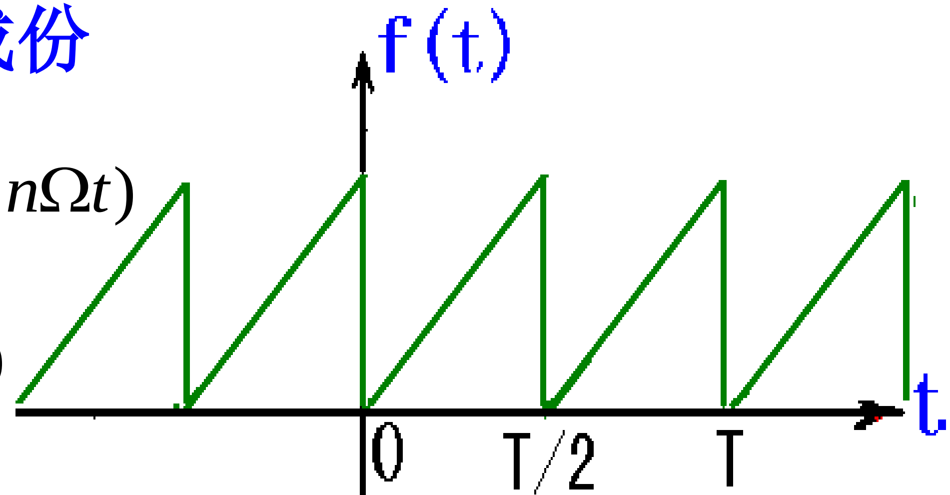
高次谐波：奇次谐波、偶次谐波

跳转到第一页

4）函数对称性与谐波的成份

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$



讨 论:

偶函数: 无奇函数分量 $b_n=0$ $a_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\cos n\Omega t dt$

奇函数: 无偶函数分量 $a_n=0$ $b_n=\frac{4}{T}\int_0^{T/2}f(t)\sin n\Omega t dt$

奇谐函数:无偶次谐波 $a_{2k}=b_{2k}=0$ $A_{2k}=0$

偶谐函数:无奇次谐波 $a_{2k+1}=b_{2k+1}=0$ $A_{2k+1}=0$

5）
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\Omega t dt \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\Omega t dt$$

8-3 非正弦周期电量的有效值

一、定义：

若非正弦电量 $i(t)=i(t\pm nT)$或$u(t)=u(t\pm nT)$，则有效值为：

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} \qquad U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$

二、计算：

1）按定义计算；

2）按傅立叶系数计算：

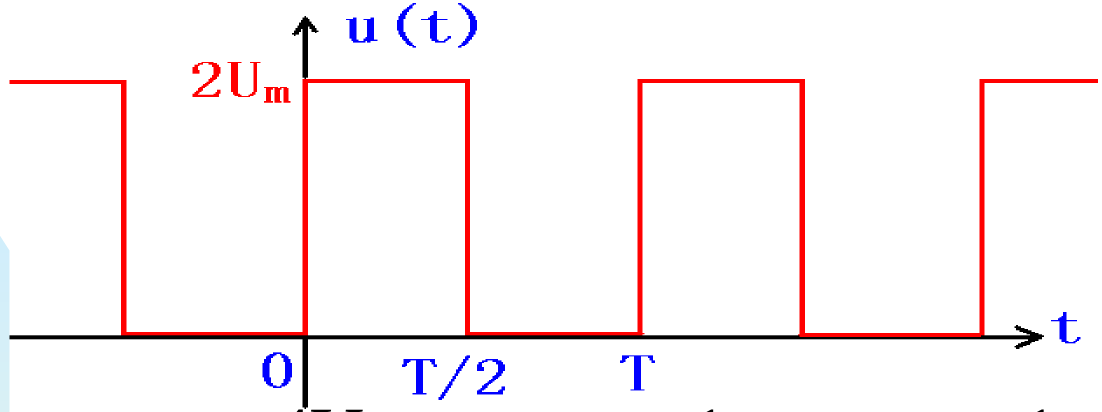
$$\mathrm{i(t)=I_0+\sum_{n=1}^{\infty}I_{mn}\cos(n\Omega t+\varphi_{in})}$$

$$I=\sqrt{I_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{I_{mn}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{I_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}I_n^2}$$

$$\mathrm{u(t)=U_0+\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}\cos(n\Omega t+\varphi_{un})}$$

$$\mathrm{U}=\sqrt{\mathrm{U_0}^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{U_{mn}}^2}=\sqrt{U_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}U_n^2}$$

例：图示电压中，T=2π，求u(t)有效值。



解：

$$u(t)=U_m+\frac{4U_m}{\pi}(\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\cdots)$$

$$U=\sqrt{U_0{}^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}{}^2}=\sqrt{U_m{}^2+(\frac{4U_m}{\pi})^2\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}\cdots)}=\sqrt{2}U_m$$

或 $$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}(2U_m)^2 dt}=\sqrt{2}U_m$$

跳转到第一页

说 明:

对于一个非正弦周期信号f(t),

（1）各次谐波分别满足:

$$I_n=\frac{I_{mn}}{\sqrt{2}},\text{或者}, I_{mn}=\sqrt{2}I_n$$

（2）f(t)只有有效值。

8-4 非正弦周期电流电路计算（重点）

一、一般步骤:

1）将激励为非正弦周期函数展开为傅立叶级数:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \cos(n\Omega t + \varphi_n)$$

即，将激励分解为直流分量和无穷多个不同频率的正弦激励分量;

叠加定理

2）求各激励分量单独作用时的响应分量:

（1）直流分量作用：直流电路的分析方法(C开路，L短路)求Y_0;

（2）基波分量作用：正弦稳态电路的分析方法($\omega = \Omega$)求y_1;

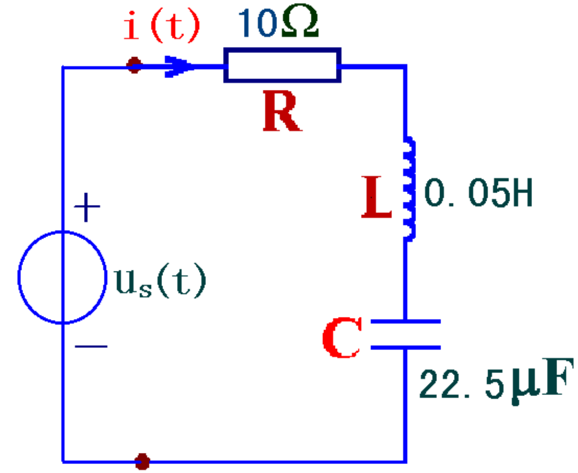
（3）二次谐波分量作用：正弦稳态电路的分析方法($\omega = 2\Omega$)求y_2;

………………

3）时域叠加：$y(t)= Y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots$

二、举例分析：

例1：　图示电路中 $u_s(t)=40+180\cos\omega t+60\cos(3\omega t+45°)+20\cos(5\omega t+18°)$，f=50Hz，求i(t)和电流有效值I。

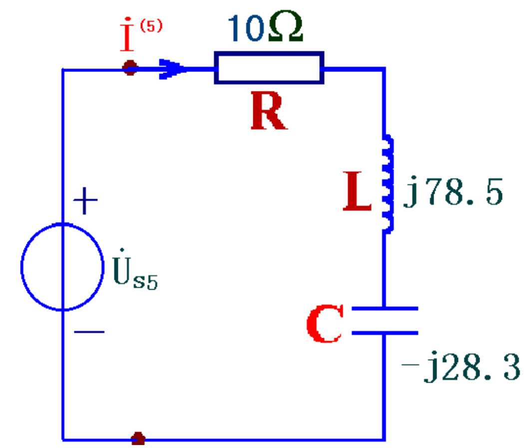


解：直流分量作用：　$i^{(0)}=0$

基波分量作用：　$i^{(1)}=1.426\cos(\omega t+86°)A$

3次谐波作用：　$i^{(3)}=6\cos(3\omega t+45°)A$

5次谐波作用：　$i^{(5)}=0.39\cos(5\omega t-61°)A$



由叠加定理，有：　$i=i^{(0)}+i^{(1)}+i^{(3)}+i^{(5)}$

$$i=1.426\cos(\omega t+86°)+6\cos(3\omega t+45°)+0.39\cos(5\omega t-61°)A$$

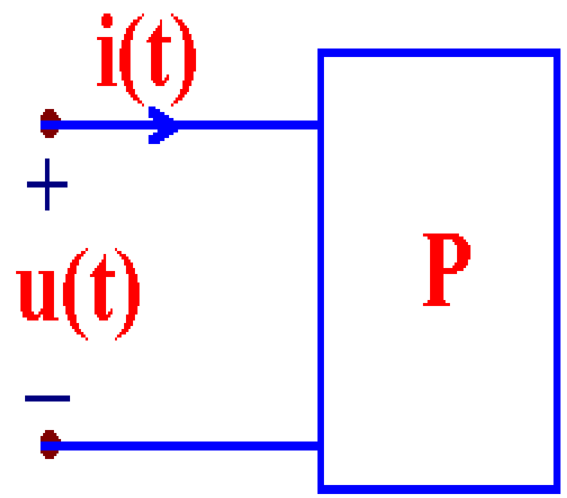
电流有效值为：

$$I=\sqrt{{I^{(0)}}^2+{I^{(1)}}^2+{I^{(3)}}^2+{I^{(5)}}^2}=4.37A$$

8-5 非正弦周期电流电路的平均功率

一、定义:

1）瞬时功率: 若单口网络的端口电流和电压分别为:



$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \cos(n\Omega t + \varphi_{in})$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \cos(n\Omega t + \varphi_{un})$$

则瞬时功率为: $p(t) = u(t) i(t)$

2）平均功率: $P = \dfrac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$

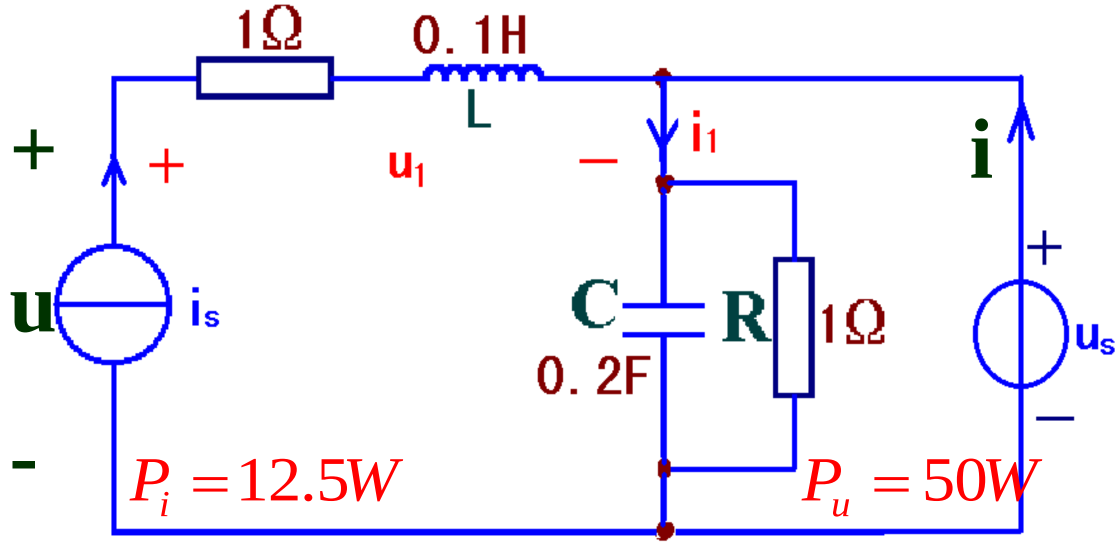
$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos(\varphi_{u1} - \varphi_{i1}) + U_2 I_2 \cos(\varphi_{u2} - \varphi_{i2}) + \cdots\cdots$$

二、举例： 求图示电路中$u_1(t)$、$i_1(t)$，并求各电源的发出功率。

其中：

$$i_s(t) = 5\cos(10t)\,\text{A}.$$

$$u_s(t) = 10\cos(5t - 90°)\,\text{V}.$$



解： **1、电流源单独作用：**

$$\dot{U}_1^{(1)} = 5\angle 45° \qquad i_1^{(1)} = 0$$

$$i^{(1)} = -i_s^{(1)} = -5\cos 10t$$

$$u_1^{(1)} = 5\sqrt{2}\cos(10t + 45°) = u^{(1)}$$

2、电压源单独作用：

由$\dot{U}_1^{(2)} = 0$， 得$u_1^{(2)} = 0$

$$\dot{I}_1^{(2)} = \dot{I}^{(2)} = 10\angle -45°$$

$$i^{(2)} = i_1^{(2)} = 10\sqrt{2}\cos(5t - 45°)$$

$$u^{(2)} = u_s = 10\cos(5t - 90°)$$

3、时域叠加：

$$u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} = 5\sqrt{2}\cos(10t + 45°)V$$

$$i_1 = i_1^{(1)} + i_1^{(2)} = 10\sqrt{2}\cos(5t - 45°)A$$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}$$

$$= 5\sqrt{2}\cos(10t + 45°) + 10\cos(5t - 90°)V$$

$$i = i^{(1)} + i^{(2)}$$

$$= -5\cos 10t + 10\sqrt{2}\cos(5t - 45°)A$$

跳转到第一页

本章小结

1. 非正弦周期电流及电压

2. 非正弦周期函数的傅立叶级数展开式

3. 非正弦周期电量的有效值

4. 非正弦周期电流电路稳态分析

5. 非正弦周期电流电路的平均功率