11.8 谓词逻辑的推理

形式化推理证明

谓词逻辑的蕴涵推理也是由前提、定理和证明三部分组成

(1) 前提：已知谓词逻辑公式，假定为真

(2) 证明：由前提出发最终得到定理的实施过程。期间使用两种手段，即推理规则与证明过程

(3) 定理：推理的结果，它是公式，通过证明而最终确定其为真

- 谓词逻辑的推理方法可看做是命题逻辑推理方法的扩充；
- P、T、CP等规则在谓词逻辑中同样适用；

推理规则

- 命题演算中所有推理规则都是谓词演算中的推理规则;

  $\forall x\, F(x) \land \forall y G(y) \Rightarrow \forall x\, F(x)$

  $\forall x\, F(x) \Rightarrow \forall x\, F(x) \lor \exists y G(y)$……

- 谓词演算中的所有永真蕴含式，恒等式也可作为推理规则；

  $\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \lor B(x))$

  $\exists x(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \land \exists x\, B(x)$

全称指定规则（US）
Universal Specification

$$\forall x A(x) \vdash A(y) \qquad \forall x A(x) \vdash A(c)$$

（1）　y是不在$A(x)$中约束出现的变元

（2）　c是个体常量

原因：$\forall x A(x) \rightarrow A(y)$和$\forall x A(x) \rightarrow A(c)$是永真式

对$\forall x \exists y F(x,y)$，　推得$\exists y F(y,y)$.　???

F(x,y)：x>y　　　　　　论述域：R

存在指定规则（ES）Existential Specification

$\exists x A(x) \vdash A(e)$　　　$\exists x A(x) \vdash A(c)$

条件：

(1) 选用未曾出现的字母e；

(2) 其中e是额外变元，它的变化范围是使$A(x)$为真的个体；c是使$A(x)$为真的个体常元符号

(3) $A(e)$只是新引入的一个假设，只是暂用的条件，不能用作结论

(4) $A(x)$中除x外还有其它自由变元时，不能使用此规则

例

指出下面证明中的错误。

证明：①$\forall x \exists y F(x,y)$　　P, 前提引入

②$\exists y F(z,y)$　　T, ①US

③ $F(z,c)$　　T, ②ES

④$\forall x\, F(x,c)$　　T,③UG

⑤$\exists y \forall x\, F(x,y)$　　T, ④EG

$\forall x \exists y F(x,y) \Longrightarrow \exists y \forall x\, F(x,y)$ (错误)

存在推广规则（EG）
Existential Generalization

$A(x) \vdash \exists y A(y)$ $\qquad$ $A(c) \vdash \exists y A(y)$

其中x是个体变元或额外变元, c是个体常元, 且

在A中取代x和c的y不能在A(x)中约束出现。

$\exists yF(x,y)$ $\qquad$ $\exists yF(y,y)$(错误)

全称推广规则（UG）
Universal Generalization

$$A(x) \vdash \forall y A(y)$$

（1）x是个体变元，且不在前提的任何公式中自由出现

（2）在之前的推导步骤中，x不能是常元和额外变元

例

前提条件： $\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$， $\exists xH(x)$

结论： $\exists xM(x)$

(1)	$\exists xH(x)$	P
(2)	$H(y)$	$T,(1),ES$
(3)	$\forall x(H(x)\rightarrow M(x))$	P
(4)	$H(y)\rightarrow M(y)$	$T,(3),US$
(5)	$M(y)$	$T,(2),(4)$, 假言推理
(6)	$\exists xM(x)$	$T,(5),EG$

结论：

- US和ES同时使用时，应先进行存在指定，再全称指定。
- US和ES用于推导过程中删除量词,删去了量词, 就可像命题演算一样进行推导；
- UG和EG主要用于使结论呈量化形式；
- ES而产生的额外变元不能保留在结论中，在推导结束之前使用EG使之成为约束变元。

例

凡是人都是要死的。苏格拉底是人。苏格拉底是要死的。

设：$M(x)$:x是人。$D(x)$:x 是要死的。a:苏格拉底。则：前提: $\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$，$M(a)$. 结论：$D(a)$.

证明：① $\forall x\,(M(x)\rightarrow D(x))$　　P

② $M(a)\rightarrow D(a)$　　① US 规则

③ $M(a)$　　P

④ $D(a)$　　②③ 假言推理

例

前提：$\forall x(F(x) \vee G(x))$，$\neg \exists x\, G(x)$. 结论：$\exists x\, F(x)$.

证明：

①	$\neg \exists x\, G(x)$	P
②	$\forall x \neg G(x)$	① 替换规则
③	$\neg G(a)$	② US
④	$\forall x(F(x) \vee G(x))$	P
⑤	$F(a) \vee G(a)$	④ US
⑥	$F(a)$	③⑤ 析取三段论
⑦	$\exists x\, F(x)$	⑥ EG

例 $\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x)\vee \exists xQ(x)$。

(1) $\neg(\forall xP(x) \vee \exists xQ(x))$	P(附加前提)
(2) $\neg\forall xP(x) \wedge \neg\exists xQ(x)$	T, (1), 德摩根
(3) $\exists x\neg P(x) \wedge \forall x\neg Q(x)$	T, (2), 否定内移
(4) $\exists x\neg P(x)$	T, (3), 简化式
(5) $\neg P(y)$	T, (4), ES
(6) $\forall x\neg Q(x)$	T, (3),简化式
(7) $\neg Q(y)$	T, (6), US
(8) $\neg P(y) \wedge \neg Q(y)$	T, (5), (7), 合取式
(9) $\neg(P(y) \vee Q(y))$	T, (8), 否定外移
(10) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$	P
(11) $P(y) \vee Q(y)$	T, (10), US
(12) $\neg(P(y) \vee Q(y)) \wedge (P(y) \vee Q(y))$	T, (9), (11), 合取式, 矛盾

例

学术委员会的每个成员都是博士并且是教授。有些成员是青年人。因而有的成员是青年教授。

解：首先符号化：

A(x):x是学术委员会成员；

B(x):x是博士；J(x):x是教授；H(x):x是青年人。

前提：$\forall x\,(A(x)\rightarrow B(x)\wedge J(x))$，$\exists x\,(A(x)\wedge H(x))$

结论：$\exists x\,(A(x)\wedge B(x)\wedge H(x))$

证明

①　$\exists x\,(A(x)\wedge H(x))$　　P

②　$A(c)\wedge H(c)$　　T ① ES 规则

③　$\forall x\,(A(x)\rightarrow B(x)\wedge J(x))$　　P

④　$A(c)\rightarrow B(c)\wedge J(c)$　　T ③ US规则

⑤　$A(c)$　　T ② 化简规则

⑥　$H(c)$　　T ② 化简规则

⑦　$B(c)\wedge J(c)$　　T ④⑤ 假言推理

⑧　$B(c)$　　T ⑦ 化简规则

⑨　$A(c)\wedge B(c)\wedge H(c)$　　T ⑤⑥⑧ 合取

⑩　$\exists x\,(A(x)\wedge B(x)\wedge H(x))$　　T ⑧ EG规则

例

前提：$\forall x(F(x) \to (G(a) \land R(x)))$， $\exists x\, F(x)$.

结论：$\exists x\, (F(x) \land R(x))$.

证明：① $\exists x\, F(x)$ P

② $F(b)$ T ① ES

③ $\forall x(F(x) \to (G(a) \land R(x)))$ P

④ $F(b) \to (G(a) \land R(b))$ T ③ US

⑤ $G(a) \land R(b)$ T ②④假言推理

⑥ $R(b)$ T ⑤ 化简

⑦ $F(b) \land R(b)$ T ②⑥ 合取

⑧ $\exists x\, (F(x) \land R(x))$ T ⑦ EG

作业

离散数学

(1) 根据需求用户建立数据库，它由若干事实和规则表示；

(2) 用户即可根据需要对所建成的数据库作提问，它用询问语句表示；

(3) 系统（即 PROLOG 解释系统）即能根据询问语句要求作自动推理，最后给出答案。

习 题 12

12.1 试用假设推理方法证明下面的定理：

(1) $(R\to P)\to((R\to Q)\to(R\to P\land Q))$；

(2) $(P\land Q\to R)\to(P\to(Q\to R))$.

12.2 试用假设推理方法证明下面的定理：（利用今天所学方法进行形式化推理证明）

(1) $\forall x(P(x)\to Q(x))\Rightarrow(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$；

(2) $\forall x\forall yP(x,y)\Rightarrow\forall y\forall xP(x,y)$；

(3) $\forall x(C(x)\to W(x)\land R(x))\land\exists x(C(x)\land Q(x))\Rightarrow\exists x(Q(x)\land R(x))$；

(4) $\neg\exists x(F(x)\land H(x))\land\forall x(G(x)\to H(x))\Rightarrow\forall x(G(x)\to\neg F(x))$.

12.3 指出下面证明的错误之处：

证明：$\exists xP(x)\land\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\land Q(x))$是永真的.

(1) $\exists xP(x)\land\exists xQ(x)$；

(2) $\exists xP(x)$；

(3) $\exists xQ(x)$；

(4) $P(e)$；

(5) $Q(e)$；

(6) $P(e)\land Q(e)$；

(7) $\exists x(P(x)\land Q(x))$.

3. 证明下述论证。

每一棵松树都是针叶树，每一冬季落叶的树都非针叶树。所以，每一冬季落叶的树都非松树。

12.4 试证明命题逻辑永真公式的公理系统不是独立的.

12.5 证明下列论断的正确性：

(1) 若直线 L_1 平行于直线 L_2，L_2 又平行于直线 L_3，则 L_1 必平行于 L_3；

(2) 在“经过三个不共线的点只有一个平面”的前提下，必有结论“两个相交平面只有一条交线”；

(3) 学术委员会中的每个成员都是博士与教授，有些成员是年轻人，因此有些成员是年轻教授.

12.6 试建立群的应用公理系统.

12.7 试建立树的应用公理系统.

12.8 试建立初等几何的应用公理系统.

徐版222页12.2 、 12.3 与附加题（铅笔写的3题）