概率论与数理统计

§3.3 协方差及相关系数

- 一、协方差的概念与性质
- 二、相关系数的意义与性质
- 三、协方差矩阵

一、协方差的概念与性质

1. 问题的提出

若随机变量X和Y相互独立, 那么

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

若随机变量X和Y不相互独立,

$$D(X \pm Y) = ?$$

$$D(\underline{X \pm Y}) = E[(\underline{X \pm Y}) - E(\underline{X \pm Y})]^2$$

$$= E[(X - E(X)) \pm (Y - E(Y))]^2$$

$$= D(X) + D(Y) \pm 2\boxed{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}$$

协方差

2. 协方差与相关系数的定义

定义3.7

(X,Y)是二维随机变量, 量$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量X与Y的协方差, 记为$\mathrm{cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

而

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$$

称为随机变量X与Y的相关系数.

$$E|XY|\le\sqrt{E(|X|^2)E(|Y|^2)}$$

注1° X和Y的相关系数是标准化的随机变量

$$\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\text{与}\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$$

的协方差. 又称为标准协方差, 是个无量纲的量.

2° 若随机变量X与Y相互独立

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]=0.$$

3° $\operatorname{cov}(X,X)=D(X).$

目 上 下 回 停 续

3、协方差的计算公式

$$(1)\ \operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y);$$

$$(2)\ D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

证 (1) $\operatorname{cov}(X,Y)$

$$=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)]$$

$$=E(XY)-2E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

$$(2)\ D(X\pm Y)=E\left[\left(X\pm Y\right)-E\left(X\pm Y\right)\right]^2$$

$$=E\left[\left(X-EX\right)\pm\left(Y-EY\right)\right]^2$$

$$=E[X-E(X)]^2+E[Y-E(Y)]^2$$

$$\pm 2E\left\{\left[X-E\left(X\right)\right]\left[Y-E\left(Y\right)\right]\right\}$$

$$=D\left(X\right)+D\left(Y\right)\pm 2\operatorname{cov}\left(X,Y\right).$$

4、协方差的性质

性质3.11 $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X).$

性质3.12 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$

性质3.13 $\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(X,Y)$, a, b为常数.

性质3.14 $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y).$

性质3.15 若X与Y独立, 则$\operatorname{cov}(X,Y)=0.$

性质3.16 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y).$

推广 $$D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{i<j}\sum\operatorname{cov}(X_i,X_j).$$

例1 设随机变量X与Y的相关系数为0.5,

$$E(X)=E(Y)=0,\ E(X^2)=E(Y^2)=2,$$

求 $E(X+Y)^2$.

解 $E(X+Y)^2=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)$

$$=4+2[\operatorname{cov}(X,Y)+E(X)E(Y)]$$

$$=4+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=4+2\times 0.5\times 2=6.$$

例2 设$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1{}^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho\right)$,求$X$与$Y$的相关系数.

解 由 $p(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp$

$$\left\{\frac{-1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_1{}^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},-\infty<x<+\infty$$

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},-\infty<y<\infty.$$

$$\Rightarrow E(X)=\mu_1,\ E(Y)=\mu_2,\ D(X)=\sigma_1^2,\ D(Y)=\sigma_2^2.$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

令 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),\ u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2)\mathrm{e}^{-\frac{t^2+u^2}{2}}\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right)$$

$$+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right)$$

$=\dfrac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi}.$ 故有 $\mathrm{cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2.$

于是 $$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho.$$

注1° 二维正态分布密度函数中, 参数　代表了 X与Y的相关系数;

2° 对于二维随机变量(X, Y),

$$\rho = 0 \Leftrightarrow X\text{与}Y\text{相互独立}.$$

(证明见p41例2.12)

二、相关系数的意义与性质

1. 问题的提出

问a, b应如何选择, 可使得随机变量$a+bX$最接近随机变量Y? 接近的程度又如何来衡量?

分析　设　$e = E[Y-(a+bX)]^2$

则 e 可用来衡量 $a+bX$ 近似表达 Y 的好坏程度.

当 e 的值越小,表示 $a+bX$ 与 Y 的近似程度越好.

确定 a, b 的值,使 e 达到最小 .

$$e = E[Y-(a+bX)]^2$$

$$= E(Y^2)+b^2E(X^2)+a^2-2bE(XY)+2abE(X)$$

$$-2aE(Y).$$

将 e 分别关于 a,b 求偏导数,并令它们等于零,得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e}{\partial a} = 2a+2bE(X)-2E(Y)=0, \\ \dfrac{\partial e}{\partial b} = 2bE(X^2)-2E(XY)+2aE(X)=0. \end{cases}$$

解之得 $b_0 = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}$,

$$a_0 = E(Y) - E(X)\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)}.$$

将 a_0, b_0 代入 $\mathrm{e} = E[Y-(a+bX)]^2$ 中,得

$$\min_{a,b} \mathrm{e} = E[Y-(a_0+b_0X)]^2$$

$$= D(Y) - \frac{\operatorname{cov}^2(X,Y)}{D(X)} = [1 - \frac{\operatorname{cov}^2(X,Y)}{D(X)D(Y)}] \cdot D(Y)$$

$$= (1-\rho_{XY}^2)D(Y).$$

2. 相关系数的意义

当$|\rho_{XY}|$较大时e较小,表明X,Y的线性关系联系较紧密.

当$|\rho_{XY}|$较小时,X,Y线性相关的程度较差.

定义3.8

设随机变量X与Y的相关系数$\rho_{XY}=0$,

则称X和Y不相关.

例3 设θ服从$[0,2\pi]$上的均匀分布，$X=\cos\theta$，$Y=\cos(\theta+a)$，这里a是定数，求X和Y的相关系数？

解 $\because E(X)=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x=0,$

$$E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$E(Y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x+a)\mathrm{d}x=0,$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x+a)\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$E(XY)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\cdot\cos(x+a)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos a,$$

$$\therefore \operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}\cos a,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\cos a.$$

由 $X=\cos\theta, Y=\cos(\theta+a)$,

$\rho_{XY}=\cos a$,

可知:

$$\left.\begin{array}{l}\text{当} a=0 \text{时}, \rho=1, X=Y, \\ \text{当} a=\pi \text{时}, \rho=-1, X=-Y,\end{array}\right\} \text{存在线性关系.}$$

当 $a=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $a=\dfrac{3\pi}{2}$ 时, $\rho=0$, X与Y不相关;

但$X^2+Y^2=1$, 因此, X与Y不独立.

3. 独立与不相关的关系

(1) 不相关与相互独立的关系 (性质3.19)

$$\text{相互独立} \;\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}\; \text{不相关}$$

(2) 不相关的充要条件

1° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0;$

2° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = 0;$

3° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y);$

4° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y).$

例4 随机变量X与Y的方差存在且不等于0, 则$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$是X和Y____. (考研试题)

A 不相关的充分条件, 但不是必要条件

B 独立的充分条件, 但不是必要条件

C 不相关的充分必要条件

D 独立的充分必要条件

解 显然应该选择C.

目 上 下 例 停 续

例5 设随机变量X与Y独立同分布, 记$U=X-Y$, $V=X+Y$, 则随机变量U与V必然(   ).

A 不独立　　*B* 独立　　*C* 不相关　　*D* 相关

解

$$\operatorname{cov}(U,V)=E[(U-E(U))(V-E(V))]$$

$$=E[(X-Y-E(X)+E(Y))(X+Y-E(X)-E(Y))]$$

$$=E\{[X-E(X)-(Y-E(Y))][X-E(X)+(Y-E(Y))]\}$$

$$=E[X-E(X)]^2-E[Y-E(Y)]^2=0,$$

所以X与Y不相关.

X与Y同分布

4、相关系数的性质

性质3.17 $\left|\rho_{XY}\right| \le 1.$

证 设随机变量 $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \pm \dfrac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$

则 $$D(Z) = D\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) + D\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)$$

$$\pm 2\operatorname{cov}\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)$$

即 $1 + 1 \pm 2\rho_{XY} \ge 0 \Rightarrow \left|\rho_{XY}\right| \le 1.$

性质3.18 $|\rho_{XY}|=1$的充要条件是，存在常数a,b使$P\{Y=aX+b\}=1.$

证 $(\Rightarrow)$ 若$|\rho_{XY}|=1$，由于

$$D\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\pm\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)=2(1\pm\rho_{XY}),$$

因而 $\rho_{XY}=1$时，$D\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}-\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)=0,$

有 $P\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)=1.$

$\rho_{XY}=-1$时, $D\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}+\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)=0.$

因而 $P\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}=-\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)=1.$

故当$|\rho_{XY}|=1$, 有

$$P\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}=\pm\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)=1,$$

即以概率1成立$Y=aX+b$, 其中

$$a=\pm\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}},\ b=E(Y)\mp\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}E(X).$$

(⇐) 若存在常数a^*,b^*使

$$P\{Y=a^*+b^*X\}=1 \Leftrightarrow P\{Y-(a^*+b^*X)=0\}=1,$$

$$\Rightarrow P\{[Y-(a^*+b^*X)]^2=0\}=1,$$

$$\therefore \quad E[Y-(a^*+b^*X)]^2=0\times 1=0.$$ (数学期望定义)

$$\therefore\ 0=E[Y-(a^*+b^*X)]^2 \geq \min_{a,b} E[(Y-(a+bX))^2]$$

$$=E[Y-(a_0+b_0X)]^2$$

$$=(1-\rho_{XY}^2)D(Y)\geq 0$$

$$\Rightarrow |\rho_{XY}|=1.$$

性质3.19 若X与Y相互独立, 则X与Y不相关, 反之不真.

三、协方差矩阵

1. n 维随机变量协方差矩阵

设 n 维随机变量 $(X_{1,}X_{2,}\cdots X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$\sigma_{ij}=\mathrm{cov}(X_i,X_j)=E\{[X_i-E(X_i)][X_j-E(X_j)]\}$$

$i,j=1,2,\cdots n$, 都存在, 则称矩阵

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}\end{pmatrix}$$

为n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的协方差阵.

2. 二维随机变量的协方差矩阵

设(X_1, X_2)为二维随机变量，其协方差矩阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\sigma_{11} = E[X_1 - E(X_1)]^2 = D(X_1),$$

$$\sigma_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\} = \sigma_{12},$$

$$\sigma_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\},$$

$$\sigma_{22} = E[X_2 - E(X_2)]^2 = D(X_2).$$

注1^0 由于$c_{ij}=c_{ji}\ \ (i,j=1,2,\cdots n)$,所以协方差矩阵为对称的非负定矩阵.

注2^0 协方差矩阵的应用.

协方差矩阵可用来表示 随机变量的概率密度,从而可通过协方差矩阵达到对随机变量 的研究.

以二维正态随机变量 (X_1, X_2) 为例.

由于

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp$$

$$\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

引入矩阵 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},$

及 (X_1, X_2) 的协方差矩阵 $\sum = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix},$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix},$$

由此可得

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{\det\Sigma}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2\\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}.$$

由于 $(X-\mu)^{\mathrm{T}}\sum^{-1}(X-\mu)=$

$$\frac{1}{\det\sum}(x_1-\mu_1, x_2-\mu_2)\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right].$$

于是 (X_1, X_2) 的概率密度可写成

$$p(x_1, x_2)$$

$$=\frac{1}{2\pi\left(\det\sum\right)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^{\mathrm{T}}\sum^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

内容小结

1. 协方差与相关系数的定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差，记为 $\operatorname{cov}(X,Y)$，

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

称 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

2. 相关系数的意义

当$|\rho_{XY}|$接近1时,表明X,Y的线性关系联系较紧密.

当$|\rho_{XY}|$接近0时,X,Y线性相关的程度较差.

$\rho_{XY}=0$, 则称X和Y不相关.

目 上 下 回 停 续


再见

备用题

例1-1 设X与Y是两个随机变量, 且$D(X)=1$, $D(Y)=3$, $\text{cov}(X, Y)=-0.3$, 求方差$D(X+Y)$ 与 $D(2X-3Y)$.

解

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\text{cov}(X,Y)=3.4,$$

$$\begin{aligned} D(2X-3Y) &= D(2X)+D(3Y)-2\text{cov}(2X,3Y) \\ &= 4D(X)+9D(Y)-12\text{cov}(X,Y) \\ &= 34.6. \end{aligned}$$

例1-2 设随机变量X和Y均服从参数$\lambda=1/2$的指数分布，且相关系数$\rho_{XY}=1/2$，令函数$U=2X$，$V=X-Y$，求U与V的协方差 $\operatorname{cov}(U,V)$.

解 由随机变量X和Y均服从参数$\lambda=1/2$的指数分布，则

$$D(X)=4,\ D(Y)=4.$$

而

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=2,$$

$$\operatorname{cov}(U,V)=\operatorname{cov}(2X,X-Y)$$

$$=2D(X)-2\operatorname{cov}(X,Y)=4.$$

例2-1 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试计算$D(2X-3Y+8)$.

解 由**性质3.16**得

$$\begin{aligned}D(2X-3Y+8) &= D(2X)+D(3Y)-2\operatorname{cov}(2X, 3Y)\\ &= 4D(X)+9D(Y)-12\operatorname{cov}(X, Y)\end{aligned}$$

为了计算上述方差和协方差, 需要先计算$E(X)$, $E(X^2)$, $E(Y)$, $E(Y^2)$和$E(XY)$. 为此, 先计算X和Y的边缘分布.

$$p_Y(y)=\int_0^1 \frac{1}{3}(x+y)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(y+\frac{1}{2}\right)\quad (0\le y\le 2)$$

$$p_X(x)=\int_0^2 \frac{1}{3}(x+y)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}(x+1)\quad (0\le x\le 1)$$

由此计算得

$$E(X)=\int_0^1 \frac{2}{3}x(x+1)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_0^1 \frac{2}{3}x^2(x+1)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{18}$$

$$D(X)=\frac{7}{18}-\frac{25}{81}=\frac{13}{162}$$

$$E(Y)=\int_0^2 \frac{1}{3}y\left(\frac{1}{2}+y\right)\mathrm{d}y=\frac{11}{9}$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_0^2 \frac{1}{3}y^2\left(\frac{1}{2}+y\right)\mathrm{d}y=\frac{16}{9}$$

$$D(Y)=\frac{16}{9}-\left(\frac{11}{9}\right)^2=\frac{23}{81}$$

$$E(XY)=\frac{1}{3}\int_0^1\int_0^2 xy(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 xy\left(2x^2+\frac{8}{3}y\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

于是可得协方差

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\times\frac{11}{9}=-\frac{1}{81}$$

代回原式, 可得

$$D(2X-3Y+8)$$

$$=4\times\frac{13}{162}+9\times\frac{23}{81}-12\times\left(-\frac{1}{81}\right)=\frac{245}{81}\approx 3$$

目 上 下 回 停 续

例2-2 设二维连续型随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{1-y}, & x\ge 1, y\ge 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求函数$W=XY$与$Z=\dfrac{Y}{X}$的协方差$\operatorname{cov}(W,Z)$.

解

$$E(W)=\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}xy\frac{2}{x^3}e^{1-y}dy=4,$$

$$E(Z)=\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{y}{x}\frac{2}{x^3}e^{1-y}dy=\frac{4}{3},$$

$$E(WZ)=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}y^2\frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{1-y}\mathrm{d}y=5.$$

由协方差公式得

$$\mathrm{cov}(W,Z)=E(WZ)-E(W)E(Z)=-\frac{1}{3}.$$

例2-3 已知随机变量X,Y分别服从$N(1,3^2)$, $N(0,4^2)$, 且$\rho_{XY}=-1/2$, 设 $Z=X/3+Y/2$.

(1)求Z的数学期望和方差;

(2) 求X与Z的相关系数;

解 (1) 由 $E(X)=1,\ D(X)=9,\ E(Y)=0,\ D(Y)=16.$

得 $$E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$$

$$=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}.$$

目 上 下 回 停 续

$$D(Z) = D\left(\frac{X}{3}\right) + D\left(\frac{Y}{2}\right) + 2\operatorname{cov}\left(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\operatorname{cov}(X, Y)$$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + \frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$= 1 + 4 - 2 = 3.$$

$$(2)\ \operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{cov}(X,X)+\frac{1}{2}\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

故 $\rho_{XY}=\operatorname{cov}(X,Z)\Big/\left(\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}\right)=0.$

例2-4 设 $E(X)=-2,\ E(Y)=2,\ D(X)=1,$ $D(Y)=4,\ \rho_{XY}=-0.5,$ 试根据切比谢夫不等式估计：$P\{|X+Y|\geq 6\}.$

解 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=0,$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=D(X)+D(Y)+2\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\rho_{XY}$$

$$=1+4+2\times1\times2\times(-0.5)=3,$$

$$P\{|X+Y|\geq 6\}=P\{|(X+Y)-E(X+Y)|\geq 6\}$$

$$\leq\frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{1}{12}.$$

$$\boxed{P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}}$$

目 上 下 回 停 续

例4-1 设随机变量X, Y有方差, 求证: 随机变量$U = X + Y$与$V = X - Y$不相关的充分必要条件为$D(X) = D(Y)$.

解 因为
$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(U, V) &= \operatorname{cov}(X+Y, X-Y) \\ &= \operatorname{cov}(X, X) - \operatorname{cov}(Y, Y) \\ &= D(X) - D(Y).\end{aligned}$$

因此, $\operatorname{cov}(U,V) = 0$ 的充要条件是 $D(X) = D(Y)$.

例4-2 设掷三次均匀硬币，随机变量X表示出现的正面次数，Y表示正面次数与反面次数的差的绝对值，

(1) X与Y是否不相关?

(2) X与Y是否相互独立?

解 计算概率，得联合分布律

Y \ X	0	1	2	3
1	0	3/8	3/8	0
3	1/8	0	0	1/8

计算行和与列和，得边缘分布律

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

由于 $P\{X=0, Y=1\} \neq P\{X=0\}P\{Y=1\}$,

因此, X与Y不相互独立. 又因为

$$E(X) = 3/2, E(Y) = 3/2, E(XY) = 9/4.$$

由协方差公式得

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

于是X与Y不相关.