概率论与数理统计

王亮
liangwang1129@nwpu.edu.cn

第一节　随机变量的数学期望

- 一、数学期望的概念
- 二、随机变量函数的数学期望
- 三、数学期望的性质
- 四、应用实例

一、数学期望的概念

1. 问题的提出

1654年, 一个名叫梅累的骑士就“两个赌徒约定赌若干局, 且谁先赢 c 局便算赢家, 若在一赌徒胜a局 ($a<c$), 另一赌徒胜b局($b<c$)时便终止赌博, 问应如何分赌本” 为题求教于帕斯卡, 帕斯卡与费马通信讨论这一问题, 于1654 年共同建立了概率论的第一个基本概念 — **数学期望**

引例1　分赌本问题(产生背景)

A、*B*两人赌技相同, 各出赌金100元, 并约定先胜三局者为胜, 取得全部 200元. 由于出现意外情况, 在 *A* 胜 2 局、*B* 胜1局时, 不得不终止赌博, 如果要分赌金, 该如何分配才算公平?

分析 假设继续赌两局, 则结果有以下四种情况:

$A\ A$	$A\ B$	$B\ A$	$B\ B$
A胜B负	A胜B负	B胜A负	B胜A负
A胜B负	B胜A负	A胜B负	B胜A负

把已赌过的三局(A 胜2局、B 胜1局)与上述结果相结合, 即A、B赌完五局:

前三局: A胜2局B胜1局

后二局: $\boxed{A\ A \quad A\ B \quad B\ A}$ $\boxed{B\ B}$

A胜 B胜

故有, 在赌技相同的情况下, A、B最终获胜的可能性大小之比为 3:1.

即A 应获得赌金的 $\frac{3}{4}$, 而 B 只能获得赌金的 $\frac{1}{4}$.

因此, A 能 “期望” 得到的数目应为

$$200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150(\text{元}),$$

而B 能 “期望” 得到的数目, 则为

$$200 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{3}{4} = 50(\text{元}).$$

若设随机变量 X 为: 在 A 胜2局 B 胜1局的前提下, 继续赌下去 A 最终所得的赌金.

则 X 所取可能值为: $200 \qquad 0$

其概率分别为: $\frac{3}{4} \qquad \frac{1}{4}$

因而 A 期望所得的赌金即为 X 的 “期望” 值,

等于 $200 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 150$(元).

即为 X的可能值与其概率之积的累加.

引例2　选拔运动员

设某教练员有甲、乙两名射击运动员, 现需要选拔其中的一名参加运动会, 根据过去的记录显示, 二人的技术水平如下:

甲射手

击中环数	8	9	10
概率	0.3	0.1	0.6

乙射手

击中环数	8	9	10
概率	0.2	0.5	0.3

试问哪个射手技术较好?

解　运动员的水平是通过其平均水平来衡量的，因而甲、乙两射手的平均水平分别为

$$甲: 8\times 0.3+9\times 0.1+10\times 0.6=9.3(环),$$

$$乙: 8\times 0.2+9\times 0.5+10\times 0.3=9.1(环),$$

故甲射手的技术比较好.

目 上 下 回 停 续

引例3 加权平均成绩

设某学生四年大学各门功课成绩分别为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n,$$

其学分分别为 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$, 则称

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \frac{1}{n}\right)$$

为该生各门课程的**算术平均成绩**.

而

$$\bar{x}_\omega = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \frac{\omega_i}{\sum_{j=1}^{n}\omega_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \text{其中 } v_i = \omega_i \Big/ \sum_{j=1}^{n}\omega_j,$$

则称 $\bar{x}_\omega$ 为该生的**加权平均成绩**.

显然算术平均成绩是加权平均成绩的一种特例, 即 $v_i = \dfrac{1}{n}$, 可见加权平均才充分的体现了平均值的意义.

2. 离散型随机变量的数学期望

通过上述3个引例, 我们可以给出如下定义

定义3.1 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < \infty$, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 的和为随机变量 X 的**数学期望**, 记为 $E(X)$, 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

注1° $E(X)$是一个实数, 而非变量, 它是一种加权平均, 与一般的平均值不同, 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的真正的平均值, 也称**均值**.

注2° 级数的绝对收敛性保证了级数的和不随级数各项次序的改变而改变, 之所以这样要求是因为数学期望是反映随机变量X 取可能值的平均值, 它不因可能值的排列次序而改变.

3. 常见离散型随机变量的数学期望

例1 (二项分布) 设随机变量$X \sim B(n, p)$, 求$E(X)$.

解 设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布, 其分布律为

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

$$0 < p < 1, k = 0,1,2,\cdots,n.$$

则有 $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P\{X = k\}$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$= np$$

同时可得两点分布$B(1, p)$的数学期望为 p.

例2 (泊松分布) 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$, 求$E(X)$.

解 设$X\sim P(\lambda)$, 且其分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots,\lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

因而泊松分布$P(\lambda)$的数学期望为λ.

目 上 下 回 停 续

例3 (几何分布)设随机变量X服从几何分布, 求$E(X)$.

解 设随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p, q=1-p; k=1,2,\cdots,0<p<1.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^{k}\right)'$$

$$=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

这是因为$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{k}\right)'(|x|<1)=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'.$

目 上 下 回 停 续

常见离散型分布的数学期望小结

分布	分布律	$E(X)$
0–1 分布 $X \sim B(1, p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p
二项分布 $X \sim B(n, p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\ldots,n$	np
泊松分布 $X \sim P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$	λ
几何分布	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ $k=1,2,\ldots$	$\dfrac{1}{p}$

目 上 下 回 停 续

4. 连续型随机变量数学期望的定义

定义3.2 设连续型随机变量X的分布密度为$p(x)$, 若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$绝对收敛, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x)\mathrm{d}x < \infty,$$

则称积分$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x$的值为随机变量$X$的**数学期望**, 记为$E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x.$$

5. 常见连续型随机变量的数学期望

例4 (均匀分布) 设随机变量X服从均匀分布, 求$E(X)$.

解 设$X \sim U(a,b)$,其分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{1}{b-a}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a+b).$$

因而均匀分布数学期望位于区间的中点.

例5 (正态分布) 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其分布密度函数

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\sigma>0,-\infty<x<\infty.$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t \Rightarrow x=\mu+\sigma t$

所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

因而参数 μ 为正态分布的数学期望.

例6 (指数分布)

设随机变量 X 服从指数分布,其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ 其中 $\lambda>0$,

求 $E(X)$.

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}.$$

目 上 下 回 停 续

例7 (伽玛分布) 设随机变量$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, 求$E(X)$.

解 设随机变量$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, 则密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha} e^{-\beta x} \mathrm{d}x \overset{y=\beta x}{=\!=\!=} \int_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha}}{\beta \Gamma(\alpha)} e^{-y} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

当$\alpha = 1$时, X服从指数分布Exp(β), 这时$E(X) = 1/\beta$.

常见连续型分布的数学期望小结

分布名称	概率密度	$E(X)$
均匀分布	$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & 其他\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
正态分布	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ
指数分布	$p(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
伽玛分布	$p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0\end{cases}$	$\dfrac{\alpha}{\beta}$

6. 数学期望不存在的实例

例8 设离散型随机变量X的分布律为

$$p_k = P\left\{X = (-1)^k \frac{2^k}{k}\right\} = \frac{1}{2^k}, k = 1,2\cdots,$$

求$E(X)$.

解 由于 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\ln 2.$

但是 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$

因而其数学期望$E(X)$不存在.

二、随机变量函数的数学期望

(一) 一维随机变量函数的数学期望

1. 问题的提出

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "数学期望"] \arrow[d] & E(X) \\ f(X) \arrow[r, "数学期望"] & E[f(X)] = ? \end{tikzcd}$$

f是连续函数, $f(X)$ 是随机变量, 如: $aX+b$, X^2等等.

2. 一维随机变量函数数学期望的计算

如何计算随机变量函数的数学期望?

方法1 (定义法): $f(X)$是随机变量, 按照数学期望的定义计算$E[f(X)]$.

见2.3节的相关内容

关键: 由X的分布求出$f(X)$的分布.

难点: 一般$f(X)$形式比较复杂的, 很难求出其分布.

方法2 (公式法):

定理3.1 设X是一个随机变量, $Y=f(X)$, 则

$$E(Y)=E[f(X)]=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k)p_k, & X\text{为离散型}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)\mathrm{d}x, & X\text{为连续型}\end{cases}。$$

当X为离散型时, $P(X=x_k)=p_k$, $(k=1,2,\ldots)$;

当X为连续型时, X的密度函数为$p(x)$.

求$E[f(X)]$时, 只需知道X的分布即可.

证 现在只证明定理的特殊情形:

设X的密度函数为$p_X(x)$, $Y = f(X)$, 函数f单调连续, $x = f^{-1}(y)$为其反函数, 并且可导, 同时$\alpha \le y \le \beta$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) \mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=f^{-1}(y)} \int_{f(-\infty)}^{f(+\infty)} f(f^{-1}(y)) p_X(f^{-1}(y))(f^{-1}(y))' \mathrm{d}y$$

$$= \int_{f(-\infty)}^{f(+\infty)} y p_X(f^{-1}(y))(f^{-1}(y))' \mathrm{d}y$$

$$
=\begin{cases}\int_{\alpha}^{\beta} y p_X(f^{-1}(y))(f^{-1}(y))' \mathrm{d}y, (f^{-1}(y))' > 0 \\ \int_{\beta}^{\alpha} y p_X(f^{-1}(y))(f^{-1}(y))' \mathrm{d}y, (f^{-1}(y))' < 0\end{cases}
$$

$$
=\int_{\alpha}^{\beta} y p_X(f^{-1}(y))\left|(f^{-1}(y))'\right|\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta} y p_Y(y)\mathrm{d}y
$$

即

$$
E(Y)=E[f(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x)\mathrm{d}x
$$

例9　(考研试题)

设某种商品的需求量X是服从[10,30]上的均匀分布的随机变量, 而经销商店进货数量为区间[10, 30]中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利500元. 若供大于求则削价处理, 每处理1单位商品亏损100元; 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时每一单位商品仅获利300元.为使商品所获利润期望值不少于9280元, 试确定最少进货量.

解 设进货量为a, 则利润为

$$H(X)=\begin{cases}500a+(X-a)300, & a<X\le 30\\ 500X-(a-X)100, & 10\le X\le a\end{cases}$$

$$=\begin{cases}300X+200a, & a<X\le 30\\ 600X-100a, & 10\le X\le a\end{cases}$$

因此期望利润为

$$E[H(X)]=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}H(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{20}\int_{10}^{a}(600x-100a)\mathrm{d}x+\frac{1}{20}\int_{a}^{30}(300x+200a)\mathrm{d}x$$

$$E[H(X)] = \frac{1}{20}\left(600\times\frac{x^2}{2} - 100ax\right)\Big|_{10}^{a} +$$

$$\frac{1}{20}\left(300\times\frac{x^2}{2} + 200ax\right)\Big|_{a}^{30}$$

$$= -7.5a^2 + 350a + 5250.$$

因此 $-7.5a^2 + 350a + 5250 \geq 9280,$

解得 $20\frac{2}{3} \leq a \leq 26,$ 即最少进货量为21单.

目 上 下 回 停 续

(二) 二维随机变量函数的数学期望

对于二维随机变量而言, 其函数的数学期望计算方法可以由类似于**定理3.1**得到.

1. 二维离散型情形

设(X,Y)为二维离散型随机变量, $Z=f(X,Y)$为二元函数, 如果$E(Z)$存在,

$$E(Z)=E[f(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f(x_i,y_j)p_{ij}$$

其中(X,Y)的联合概率分布为p_{ij}.

目 上 下 回 停 续

2. 二维连续型情形

设(X,Y)为二维连续型随机变量, $Z=f(X,Y)$为二元连续函数, 如果$E(Z)$存在, 则

$$E(Z)=E[f(X,Y)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中(X,Y)的联合概率密度为$p(x,y)$.

目 上 下 回 停 续

例 10 设(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求$E(X), E(Y), E(Y/X), E[(X-Y)^2]$.

解 X的分布律为

X	1	2	3
p	0.4	0.2	0.4

得 $E(X) = 1\times 0.4 + 2\times 0.2 + 3\times 0.4 = 2.0.$

目 上 下 回 停 续

Y的分布律为

Y	-1	0	1
p	0.3	0.4	0.3

得$E(Y) = -1\times 0.3 + 0\times 0.4 + 1\times 0.3 = 0.$

因为(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

目 上 下 回 停 续

Y/X的分布律为

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
Y/X	-1	0	1	$-1/2$	$1/2$	0	$1/3$

p	0.2	0.1	0.4	0.1	0.1	0.1
Y/X	-1	$-1/2$	0	$1/3$	$1/2$	1

计算可得

$$E\left(\frac{Y}{X}\right)=-1\times 0.2-\frac{1}{2}\times 0.1+0\times 0.4+\frac{1}{3}\times 0.1$$

$$+\frac{1}{2}\times 0.1+1\times 0.1$$

$$=-\frac{1}{15}.$$

p	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1
(X,Y)	$(1,-1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(3,0)$	$(3,1)$
$(X-Y)^2$	4	1	0	9	1	9	4

$(X-Y)^2$的分布律为

p	0.1	0.2	0.3	0.4
$(X-Y)^2$	0	1	4	9

得 $E\left[(X-Y)^2\right]=4\times 0.3+1\times 0.2+0\times 0.1+9\times 0.4$

$$=5.$$

例11 设$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, X 与 Y相互独立,

求 $E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)$.

解 $E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(作极坐标变换)

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r^2}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

三、数学期望的性质

性质3.1 设C是常数, 则有$E(C)=C$.

证 $E(X)=E(C)=1\times C=C$.

性质3.2 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$E(CX)=CE(X).$$

证 $E(CX)=\sum_k Cx_k p_k = C\sum_k x_k p_k = CE(X).$

性质3.3 设 X、Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

证 $E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}y\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)\mathrm{d}y$

$=E(X)+E(Y).$

推广 $E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iE(X_i).$

性质3.4 设 X、Y是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

证 $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp_X(x)p_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_X(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)\mathrm{d}y$$

$$=E(X)E(Y).$$

注 连续型随机变量 X 的数学期望与离散型随机变量数学期望的性质类似. 上述证明只证了一类.

例12 一民航送客车载有 25 位旅客自机场开出, 旅客有9个到达一个车站车站可以下车. 如没有旅客下车就不停车, 以X表示停车的次数, 求 $E(X)$

(设每位旅客在各个车站下车是等可能的,并设各旅客是否下车相互独立).

解 引入随机变量X_i,

$$X_i = \begin{cases} 0, \text{在第}i\text{站无人下车} \\ 1, \text{在第}i\text{站有人下车} \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots 9)$$

则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_9$

$$P(X_i=0)=\left(\frac{8}{9}\right)^{25}, P(X_i=1)=1-\left(\frac{8}{9}\right)^{25} \quad (i=1,2\cdots 9)$$

$$E(X_i)=P(X_i=1)=1-\left(\frac{8}{9}\right)^{25} \quad (i=1,2\cdots 9)$$

得 $E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_9)$

$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_9)$$

$$=9\left[1-\left(\frac{8}{9}\right)^{25}\right]=8.5269(\text{次})$$

例13 设随机变量$X\sim N(0,1)$, $Y\sim U(0,1)$, $Z\sim B(5,0.5)$, 且X, Y, Z相互独立, 求随机变量$W=(2X+3Y)(4Z-1)$的数学期望.

解

$$\begin{aligned}E(W)&=E[(2X+3Y)(4Z-1)]\\&=E(2X+3Y)E(4Z-1)\\&=[2E(X)+3E(Y)][4E(Z)-1]\\&=\left(2\times 0+3\times\frac{1}{2}\right)(4\times 5\times 0.5-1)\\&=\frac{27}{2}.\end{aligned}$$

目 上 下 回 停 续

四、应用实例

厂家的销售策略

某设备寿命X(以年计)服从$\lambda=\frac{1}{4}$的指数分布. 按规定: 出售的设备在售出的一年内损坏可予以调换. 若出售一台设备赢利100元, 调换一台设备厂方需花费300元. 求厂方出售一台设备净赢利Y的数学期望.

解 依题设, 有 $p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-x/4}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

则 $P\{X \le 1\} = \int_{-\infty}^{1} p_X(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

$$P\{X > 1\} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$$

寿命不超过1年的概率＝出售的设备在售出一年之内调换的概率

寿命超过1年的概率＝不需调换的概率

因此出售一台设备净赢利*Y*的分布律为

Y	100	$100-300$
p	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$	$1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$

则 $EY = 100\mathrm{e}^{-1/4} - 200\left(1 - \mathrm{e}^{-1/4}\right) \approx 33.64$(元).

发行彩票的创收利润

某一彩票中心发行彩票10万张, 每张2元. 设头等奖1个, 奖金 1万元, 二等奖2个, 奖金各5千元; 三等奖10个, 奖金各1千元; 四等奖100个, 奖金各1百元; 五等奖1000个, 奖金各10元. 每张彩票的成本费为0.3元, 请计算彩票发行单位的创收利润.

解 设每张彩票中奖的数额为随机变量X, 则

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

目 上 下 回 停 续

X	10000	5000	1000	100	10	0
p	$1/10^5$	$2/10^5$	$10/10^5$	$100/10^5$	$1000/10^5$	p_0

每张彩票平均能得到奖金

$$E(X)=10000\times\frac{1}{10^5}+5000\times\frac{2}{10^5}+\cdots+0\times p_0$$

$$=0.5(\text{元}).$$

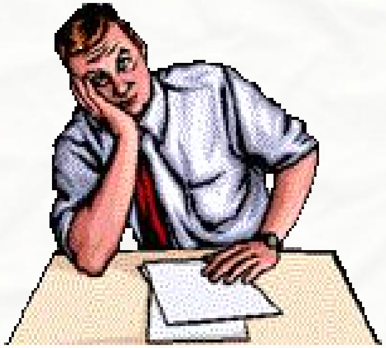
每张彩票平均可赚 $2-0.5-0.3=1.2(\text{元}).$

因此彩票发行单位发行10万张彩票的创收利润为

$$100000\times1.2=120000(\text{元}).$$

如何确定投资决策方向?

某人现有10万元现金, 想投资于某项目, 为期一年. 欲估成功的机会为30%, 并可获利8万元, 失败的机会为70%, 将损失2万元. 若存入银行, 同期间的利率为5%, 哪一种方案可使投资的效益较大?



解 设X为投资利润, 则

X	8	-2
p	0.3	0.7

$$E(X) = 8\times 0.3 - 2\times 0.7 = 1(\text{万元}),$$

存入银行的利息: $10\times 5\% = 0.5(\text{万元})$,

故应选择投资.

内容小结

1. 数学期望是一个实数, 而非变量, 它是一种**加权平均**, 与一般的平均值不同, 它从本质上体现了随机变量 X 取可能值的**真正的平均值**.

2. 数学期望的性质

$$
\begin{cases}
1^0\ E(C)=C; \\
2^0\ E(CX)=C(X); \\
3^0\ E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i); \\
4^0\ X,Y\text{独立} \Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y).
\end{cases}
$$


再见

备用题

例 8-1 设随机变量X的分布律为

$$P\{X=n\}=\frac{1}{n(n+1)},n=1,2,\cdots,$$

求证: 随机变量X没有数学期望.

证 由定义, 数学期望应为

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}np_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

由微积分学可知, 右边的级数发散.

因此, 随机变量X没有数学期望.

例8-2 (**柯西分布**) 设随机变量X服从柯西分布,求$E(X)$.

解 因X服从柯西分布,则其密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}(1+x^2)$

$$=\frac{1}{\pi}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^{+\infty}=\infty$$

因而其数学期望$E(X)$不存在.

例9-1 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光，电梯于每个正点的第5分钟、第25分钟和第55分钟从底层起行．假设在早上的8点的第X分钟到达底层候梯处，且X在[0,60]上服从均匀分布求游客等候时间的数学期望．（考研试题）

解 已知X在[0,60]上服从均匀分布，其密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\le x\le 60,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

设Y是游客等候电梯的时间(单位:分), 则

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X & 0\le X\le 5\\ 25-X & 5<X\le 25\\ 55-X & 25<X\le 55\\ 65-X & 55<X\le 60\end{cases}$$

因此

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)p(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{60}\int_{0}^{60}g(x)\mathrm{d}x$$

$$E(Y)=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\int_{25}^{55}(55-x)\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=11.67$$

例 9-2 设随机变量X的分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}3x^2/8, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试求$E(1/X^2)$. (考研试题)

解

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{3}{8}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

例 9-3（报童问题）设某报童每日的潜在卖报数X服从参数为λ的泊松分布. 如果每卖出一份报可报酬a, 卖不掉而退回则每份赔偿b, 若某报童买进n份报, 试求其期望所得. 进一步, 再求最佳的卖报份数.

解 若记真正卖报数为Y, 则Y与X的关系如下：

$$Y=\begin{cases} X, & X<n \\ n, & X\geq n \end{cases}$$

则Y的分布为 $P\{Y=k\}=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, & k<n\\ \displaystyle\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, & k=n\end{cases}$

记所得为Z, 则Z与Y的关系如下:

$$Z=f(Y)=\begin{cases}aY-b(n-Y), & Y<n\\ an, & Y=n\end{cases}$$

因此期望所得为

$$M(n)=E[f(Y)]$$

$$M(n) = E[f(Y)]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} [ka - (n-k)b] + \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) na$$

$$= (a+b)\lambda \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - n(a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + na$$

当a, b, λ 给定后, 求n使$M(n)$达到极大.

利用软件包求得计算结果如下: