第四节　条件概率、全概率公式与贝叶斯公式

- 一、条件概率
- 二、全概率公式
- 三、贝叶斯公式

一、条件概率

1. 问题的引入

引例 甲乙两台车床加工同一种机械零件，质量表如下：

	正品数	次品数	合计
甲车床	35	5	40
乙车床	50	10	60
总　计	85	15	100

从这100个零件中任取一个，求下列事件的概率：

(1)取出的一个为正品；　*A*

(2)取出的一个为甲车床加工的零件；　*B*

(3)取出的一个为甲车床加工的正品；　*AB*

(4)已知取出的一个为甲车床加工的零件，其为正品.　*C*

	正品数	次品数	合计
甲车床	35	5	40
乙车床	50	10	60
总　计	85	15	100

解 (1) $P(A)=\frac{85}{100}=0.85.$

(2) $P(B)=\frac{40}{100}=0.40.$

(3) $P(AB)=\frac{35}{100}=0.35.$

(4) 已知取出的一个为甲车床加工的零件，其为正品. A

附加条件B

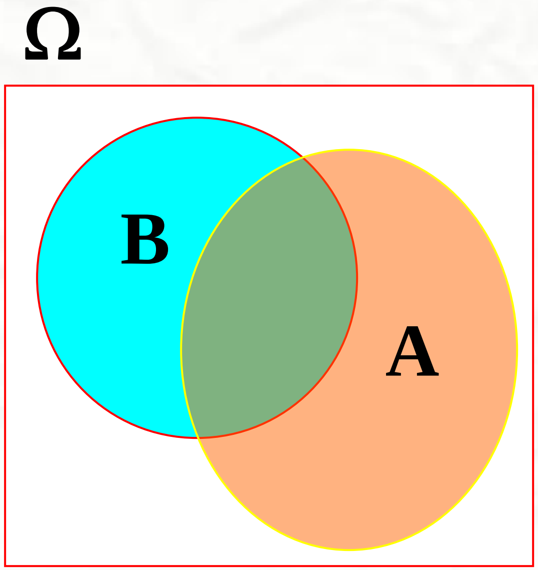
$C = A|B$：“事件B发生的条件下，事件A发生”

$\Leftrightarrow$“样本空间Ω中属于B的样本点必然出现的条件下，属于A的样本点出现”.

此时，样本空间已不再是原来包含100个样本点的Ω，而缩减为只包含40个样本点的 $\Omega_B = B$.

$$\therefore P(C) = P(A|B) = \frac{35}{40} = 0.875.$$

注 1° $P(A) = 0.85 \neq P(A|B)$.



$P(A)$: 以Ω为样本空间.

$P(A|B)$: 以$\Omega_B = B$为样本空间.

$$2^\circ\ P(A|B) = \frac{35}{40} = \frac{35/100}{40/100} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

这是巧合吗？不是.

2. 定义1.8 (条件概率的定义)

设A，B是两个事件，且$P(B) > 0$, 则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率.

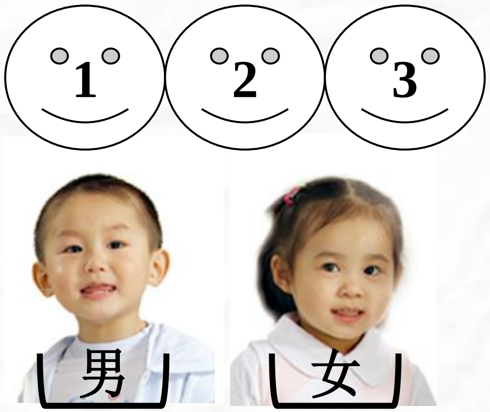
注 计算$P(A|B)$的两种方法：

① 样本空间缩减法；（适用于后面要讲的乘法公式中条件概率的计算，一般直接计算）

② 用定义.

例1 (1)求在有3个小孩的家庭中，至少有一个女孩的概率(设男孩与女孩是等可能的).

解 样本点总数：2^3,



$A=$“3个中至少有一个女孩”,

$\overline{A}=$“3个全是男孩”,

$$P(\overline{A})=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8},$$

$$\therefore P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

(2)在有3个小孩的家庭中，已知至少有1个女孩，求该家庭至少有1个男孩的概率.

解　A="3个小孩中至少有一个女孩",

再设　B="3个小孩中至少有一个男孩",

则已知　$P(A)=\frac{7}{8}$.　根据题意，? $P(B|A)$

根据定义 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

目 上 下 回 停 续

设 $A_1=$“有一个男孩两个女孩”,

$A_2=$“有两个男孩一个女孩”,

则 $AB=A_1+A_2 \quad (A_1A_2=\varnothing)$.

$\therefore \quad P(AB)=P(A_1)+P(A_2)$

$$=2\times\frac{C_3^2}{2^3}=\frac{6}{8}.$$

从而 $\quad P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{6/8}{7/8}=\dfrac{6}{7}.$

例1-1 某种动物由出生算起活20岁以上的概率为0.8, 活到25岁以上的概率为0.4, 如果现在有一个20岁的这种动物, 问它能活到25岁以上的概率是多少?

解 设 $A=$“能活 20 岁以上” 的事件;

$B=$“能活 25 岁以上”的事件;

则有 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad (\because B\subset A,\ \therefore AB=B)$$

因为 $P(A)=0.8,\quad P(B)=0.4,\quad P(AB)=P(B),$

所以 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}.$$

例1-2 从混有5张假钞的20张百元钞票中任意抽出2张,将其中1张放在验钞机上检验发现是假钞 .求2张都是假钞的概率.

解 令 A 表示“抽到2 张都是假钞”

B 表示“2 张中至少有1张假钞”

$$A \subset B$$

则所求概率是$P(A|B)$（而不是$P(A)$!),

目 上 下 回 停 续

$$P(AB) = P(A) = C_5^2 \Big/ C_{20}^2$$

$$P(B) = (C_5^2 + C_5^1 C_{15}^1) \Big/ C_{20}^2$$

所以

$$P(A|B) = P(AB) \Big/ P(B)$$

$$= C_5^2 \Big/ (C_5^2 + C_5^1 C_{15}^1) = 10/85 = 0.118.$$

3. 条件概率的性质

(1)非负性： $0 \le P(A|B) \le 1;$

证 $\because AB \subset B \quad \therefore 0 \le P(AB) \le P(B)$

又 $\because P(B) > 0 \qquad \therefore \ 0 \le \dfrac{P(AB)}{P(B)} \le 1$

即 $0 \le P(A|B) \le 1.$

(2)规范性： $P(\Omega|B) = 1, \ P(\varnothing|B) = 0;$

证 $\because \Omega B = B$

$$\therefore P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

(3) 可列可加性：

对于两两互斥的事件序列：A_1, $A_2, \cdots,$

有 $$P\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \middle| B\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k | B).$$

证 $$P\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \middle| B\right) = \frac{P\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) B\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k B)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k | B).$$

(4) 加法公式:

$$P((A_1 \cup A_2)|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B).$$

证 $$P((A_1 \cup A_2)|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2)B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1B) + P(A_2B) - P(A_1A_2B)}{P(B)}$$

$$= P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1A_2 | B).$$

(5) 逆事件的条件概率:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(\bar{A}B)}{P(B)} = 1 - P(\bar{A}|B).$$

? 条件概率和一般的概率有什么关系

4.乘法公式

若$P(B)>0$,则有 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

若$P(A)>0$,则有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

意义: 两事件积的概率等于其中的某一事件的概率乘以另一事件在前一事件已发生的条件下的条件概率.

推广: 设 A,B,C 为事件,且 $P(AB)>0$, 则有

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

一般地，设 A_1，$A_2, \cdots$，A_n是n个事件，若

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0,$$

则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots \cdot$$

$$\cdots \cdot P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

注：乘 法公式中条件概率的计算一般用样本空间缩减法直接计算。

摸球试验(卜里耶模型)

例2 设袋中装有 r 只红球，t 只白球.每次自袋中任取一只球，观察其颜色然后放回，并再放入 a 只与取出的那只球同色的球，若在袋中连续取球4次，试求第一，二次取到红球且第三，四次取到白球的概率.

解 设 $A_i\ (i=1,2,3,4)$ 为事件“第i次取到红球”，

则 $\overline{A_3},\overline{A_4}$ 为事件第三，第四次取到白球”，

目 上 下 回 停 续

因此所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(\overline{A_3}\,|\,A_1A_2)P(\overline{A_4}\,|\,A_1A_2\overline{A_3})$$

$$=\frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{t+a}{r+t+3a}.$$

此模型被卜里耶用来作为描述传染病的数学模型.

例2-1 设袋中有4只白球, 2只红球 ,

(1) 无放回随机地抽取两次, 每次取1球, 求在两次抽取中至多抽到1个红球的概率?

(2) 若无放回的抽取 3次, 每次抽取1球, 求 (*a*) 3次都是白球的概率？(*b*) 第1, 2次是白球，第3次是红球的概率？(*c*)第1次是白球的情况下，第2，3次均是白球的概率?

解 (1)设 A 为"两次抽取中至多抽到一个红球",

考虑次序: A_1 为"第一次抽取到白球",

A_2 为"第二次抽到白球.

则有 $A = A_1A_2 + \overline{A_1}A_2 + A_1\overline{A_2}$,

$$P(A) = P(A_1A_2) + P(\overline{A_1}A_2) + P(A_1\overline{A_2})$$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1) + P(A_1)P(\overline{A_2} \mid A_1)$$

$$+ P(\overline{A_1})P(A_2 \mid \overline{A_1})$$

$$= \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{14}{15}.$$

不考虑次序:

$$P(A) = \frac{C_4^2 + C_4^1C_2^1}{C_6^2} = \frac{14}{15}.$$

(2)设 A_3 为"第 3 次取出的是白球",

(a) $$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)$$

$$= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}. \quad \text{or} \quad = \frac{C_4^3}{C_6^3}$$

(b) $$P(A_1A_2\bar{A}_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(\bar{A}_3 \mid A_1A_2)$$

$$= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}.$$

设袋中有4只白球, 2只红球 ,

(*c*)第1次是白球的情况下，第2，3次均是白球的概率?

$$(c)\quad P(A_2A_3 \mid A_1) = \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1)} = \frac{C_4^3/C_6^3}{4/6} = \frac{1/5}{2/3} = \frac{3}{10}.$$

$$P(A_2A_3 \mid A_1) = P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{3}{5}\times\frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

$$= \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10},$$

单选题 1分

设置

设袋中有4只白球，2只红球，无放回取球，第1次是白球的情况下，第2，3次均是红球的概率？

A $\frac{3}{10}$

B $\frac{1}{10}$

C $\frac{3}{5}$

D $\frac{2}{5}$

提交

二、全概率公式

1. 问题的提出

三个人，两张电影票

抓阄

抓阄是否公平？

分析

假设A_1, A_2, A_3分别表示第1,2,3个人抓到电影票,

$$P(A_1)=\frac{2}{3},$$

影响A_2发生的有哪些事件?

$$A_1 \to A_2, \quad \overline{A}_1 \to A_2$$

$P(A_2)$?

影响A_3发生的有哪些事件?

$$A_1A_2 \to A_3, \quad \overline{A}_1A_2 \to A_3, \quad A_1\overline{A}_2 \to A_3, \quad \overline{A}_1\overline{A}_2 \to A_3$$

$P(A_3)$?

不可能事件

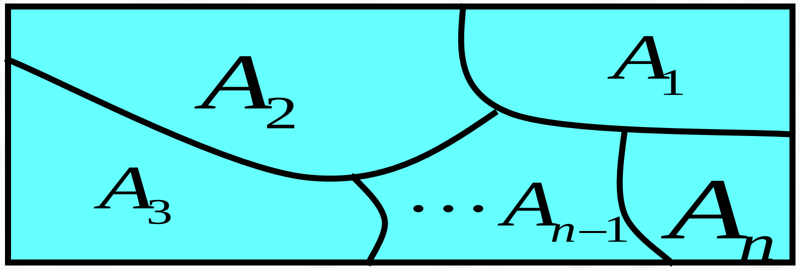
1. 样本空间的划分

定义 设Ω为试验E的样本空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n$为E的一组事件，若

$$(1) A_i A_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n;$$

$$(2) A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$为样本空间Ω的一个划分.



继续分析抓阄

$$A_2 = A_2\Omega = A_2(A_1 + \bar{A}_1) = A_2A_1 + A_2\bar{A}_1$$

于是 $P(A_2) = P(A_2A_1) + P(A_2\bar{A}_1)$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1)$$

2. 全概率公式

定理 设Ω为试验E的样本空间，B为E的事件，$A_1, A_2,$ $\cdots, A_n$为Ω的一个划分，且$P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n),$ 则

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

全概率公式

证 $$B = B\Omega = B\cap(A_1\cup A_2\cup\cdots A_n)$$

$$= BA_1\cup BA_2\cup\cdots\cup BA_n.$$

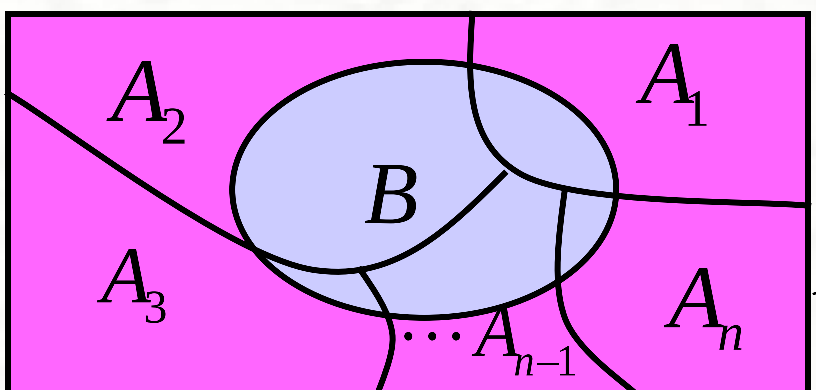
由 $A_iA_j=\varnothing \Rightarrow (BA_i)(BA_j)=\varnothing$

$$\Rightarrow P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n)$$

$$\Rightarrow P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+\cdots$$

$$+P(A_n)P(B\mid A_n).$$

图示



化整为零
各个击破

注 全概率公式中的条件：

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

可换为

$$B \subset \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

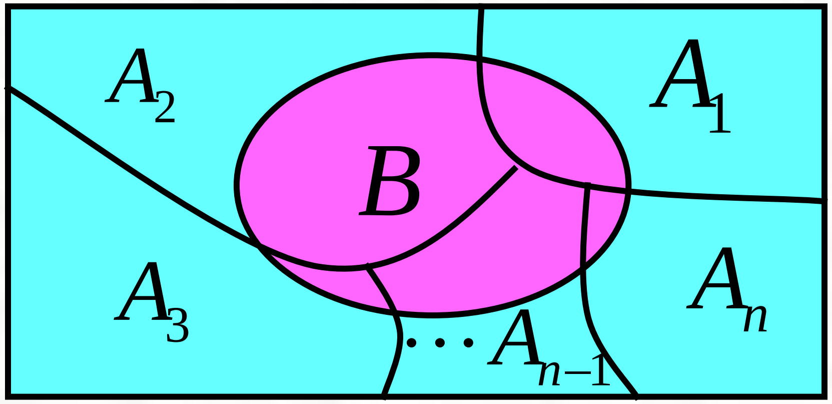
3.全概率公式的意义

直观意义：

某事件 B 的发生有各种可能的“原因” $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 引起，而 A_i 与 $A_j(i\neq j)$ 互斥，则 B 发生的概率与 $P(A_iB)(i=1,2,\cdots,n)$ 有关，且等于它们的总和：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB).$$

全概率公式的主要用途在于它可以将一个复杂事件的概率计算问题，分解为若干个简单事件的概率计算问题，最后应用概率的可加性求出最终结果.



最简单的情形

$$P(B) = P(BA) + P(B\bar{A})$$

$$= P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A})$$

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$$

$$= P(B)P(A/B) + P(\bar{B})P(A/\bar{B})$$

还是抓阄 $P(A_2)$?

$\frac{2}{3}$ A_1：抓到 $P(A_2 \mid A_1)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$ $\bar{A}_1$：没抓到 $P(A_2 \mid \bar{A}_1)=1$

A_2：抓到

$P(A_2)$?

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2 \mid \bar{A}_1)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}.$$

还是抓阄，求P（A_3）

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ A_1A_2 0

$\frac{1}{3}\times 1$ $\bar{A}_1A_2$ 1

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$ $A_1\bar{A}_2$ 1

A_3

$P(A_3)$?

$$P(A_3) = P(A_1A_2)P(A_3\mid A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)P(A_3\mid \bar{A}_1A_2)+ P(A_1\bar{A}_2)P(A_3\mid A_1\bar{A}_2)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{3}\times 1\times 1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{2}{3}$$

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{2}{3}$$

抓阄公平！

例3 甲、乙两个箱子,甲箱中装有两个白球,一个黑球;乙箱中装有一个白球,两个黑球.现由甲箱中任取一球放入乙箱,再从乙箱中任取一球,问取到白球的概率是多少?

解 以A_1表示事件“从甲箱中取出一个白球”,A_2表示“从甲箱中取出一个黑球”这一事件,以B表示“从乙箱中取出一个白球”这一事件,则:

$$A_1 \cup A_2 = \Omega, \quad 且 \quad A_1 A_2 = \varnothing,$$

$$P(A_1)=\frac{2}{3}, \qquad P(A_2)=\frac{1}{3},$$

$$P(B/A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \qquad P(B/A_2)=\frac{1}{4}.$$

因而

$$P(B)=P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

例3-1播种用的一等小麦种子中混和2.0%的二等种子, 1.5%的三等种子, 1.0%的四等种子. 用一等, 二等, 三等, 四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率为0.5,0.15,0.1,0.05.求这批种子所结的穗含有50颗以上麦粒的概率.

解 以$A_i(i = 1, 2, 3, 4)$分别记任选一颗种子是i等$(i = 1, 2, 3, 4)$这一事件,

用B表示在这批种子中任选一颗且这颗种子所结的穗含50颗以上麦粒这一事件.

则 $A_i(i = 1, 2, 3, 4)$是一个划分.

目 上 下 例 停 续

则由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B/A_i)$$

$$=0.955\times 0.5+0.02\times 0.15$$

$$+0.015\times 0.1+0.01\times 0.05$$

$$=0.4825.$$

例3-2 有3箱同型号的灯泡，已知甲箱次品率为1%，乙箱次品率为2%，丙箱次品率为3%，现从3箱中任取一灯泡，设取到甲箱的概率为$\frac{1}{2}$，而取到乙，丙两箱的机会相同，求取得次品的概率.

解 设 A_1, A_2, A_3分别表示“灯泡分别取自甲，乙，丙箱”．B表示“取到次品”．

已知 $P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{1}{4}$，$P(A_3)=\frac{1}{4}$.

$P(B|A_1)=1\%$，$P(B|A_2)=2\%$，$P(B|A_3)=3\%$.

目 上 下 回 停 续

所以

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=\frac{1}{2}\times 0.01+\frac{1}{4}\times 0.02+\frac{1}{4}\times 0.03$$

$$=0.0175$$

$$=1.75\%.$$

目 上 下 回 停 续

三、贝叶斯公式

1. 问题的提出

抓阄

如果已知第二个人抓到了，那么第一个人抓到的概率？

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

目 上 下 回 停 续

2. 贝叶斯公式

贝叶斯资料

定理 设Ω为试验E的样本空间,B为E的事件,

$A_1, A_2, \cdots, A_n$为Ω的一个划分,且$P(B) > 0$,

$P(A_i) > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$, 则

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

称此为贝叶斯公式.

证 $P(A_i|B)=\dfrac{P(A_iB)}{P(B)}$ $\quad i=1,2,\cdots,n.$

$$=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}.$$

[证毕]

3. 贝叶斯公式意义

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

后验概率

先验概率

如果已知事件B发生，则对于原因事件A_i 的概率给予重新估计， 后验概率比先验概率更有说服力，可以为进一步的决策提供依据。

例4 假定用血清甲胎蛋白法诊断肝癌，以C表示“被检验者患有肝癌”这一事件，以A表“判断被检验者患有肝癌”这一事件.假设这一检验法相应的概率为 $P(A|C)=0.95$, $P(\bar{A}|\bar{C})=0.90$.

又设在人群中 $P(C)=0.0004$. 现在若有一人被此检验法诊断为患有肝癌，求此人真正患有肝癌的概率$P(C|A)$.

解 因为$P(A|C)=0.95$,

$$P(A|\bar{C})=1-P(\bar{A}|\bar{C})=0.1,$$

$$P(C)=0.0004,\quad P(\bar{C})=0.9996$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(C|A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})}$$

$$=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.9996\times0.1}$$

$$=0.0038.$$

即平均10000个具有阳性反应的人中大约只有38人患有癌症.

例4-2 已知5%的男人和0.25%的女人是色盲患者，现随机地选取一人，此人恰为色盲患者，此人是男人的概率是多少？（假设男人，女人各占人数的一半）.

解 设A={选取的人患色盲}，设B={选取的人是男人}

则 $\overline{B}=$ {选取的人是女人}，依题意得

$$P(B)=\frac{1}{2},\qquad P(A|B)=0.05,$$

$$P(\overline{B})=\frac{1}{2},\qquad P(A|\overline{B})=0.0025.$$

根据逆概公式（贝叶斯公式），所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(B)\cdot P(A|B)+P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 0.05}{\frac{1}{2}\times 0.05+\frac{1}{2}\times 0.0025}$$

$$=\frac{20}{21}.$$

目 上 下 回 停 续

例4-3　盒中放有12个乒乓球，其中9 个是新的. 第1次比赛时从中选取3个来用，比赛后仍放回盒中，第2次比赛时再从盒中任取3个.

(1) 求第2次取出的球都是新球的概率；

(2) 又已知第2次取出的球都是新球，求第1次取到的都是新球的概率；

解　设 A_i =“第 1次比赛时用了 i个新球”，

$$(i = 0, 1, 2, 3)$$

B =“第 2次取出的全是新球”，

目 上 下 回 停 续

（1） 求第2次取出的球都是新球的概率；

A_i =“第 1次比赛时用了 i个新球”，

B =“第 2次取出的全是新球”，

$\because \quad P(A_i) = \dfrac{C_9^i \cdot C_3^{3-i}}{C_{12}^3} \quad (i = 0,1,2,3),$

$$P(B|A_i) = \frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3},$$

$$\therefore \quad P(B) = \sum_{i=0}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=0}^{3} \frac{C_9^i \cdot C_3^{3-i}}{C_{12}^3} \cdot \frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$$

$$= 0.146.$$

第二次

新球： 9-i 个

旧球： 3+i 个

(比赛后放回的球变为旧球)

（2）又已知第2次取出的球都是新球，求第1次取到的都是新球的概率;

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)},$$

$$\because \quad P(A_3B)=P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=\frac{C_9^6\cdot C_3^0}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{12}^3},$$

$$\therefore \quad P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{5}{21}=0.24.$$

第二次
新球：9-3 个
旧球：3+3 个
(比赛后放回的球变为旧球)

目 上 下 回 停 续

内容小结

1.条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \longrightarrow \text{乘法定理}$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

全概率公式

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$$

贝叶斯公式

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

2. 条件概率 $P(A|B)$与积事件$P(AB)$概率的区别

$P(AB)$ 表示在样本空间 Ω 中，计算 AB 发生的概率，而 $P(A|B)$ 表示在缩小的样本空间 Ω_B 中，计算 A 发生的概率.用古典概率公式，则

$$P(A|B)=\frac{AB\text{基本事件数}}{\Omega_B\text{中基本事件数}}.$$

$$P(AB)=\frac{AB\text{中基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件数}}.$$

一般来说，$P(A|B)$比$P(AB)$大.

3. 条件概率的性质

条件概率也是概率，故具有概率的性质：

(1)非负性 $P(B|A) \geq 0;$

(2)归一性 $P(\Omega|A) = 1;$

(3)可列可加性 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A);$

(4) $P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A);$

(5) $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A);$

(6) $P(B_1 - B_2|A) = P(B_1|A) - P(B_1B_2|A).$

再见

例2-3 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号．求他拨号不超过3次而接通电话的概率.

解 设$A=$“拨号不超过3次接通电话”，

$A_i=$“拨号i次接通电话”$(i=1,2,3)$，则

$$\because \quad \overline{A}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3},$$

$$\therefore \quad P(\overline{A})=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$ (拨号3次都未接通)

目 上 下 回 停 续

$$\therefore \quad P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$$

$$= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2 | \overline{A}_1)P(\overline{A}_3 | \overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$= \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{10}.$$

故 $\quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{7}{10} = \dfrac{3}{10}.$

目 上 下 回 停 续

例2-4 摸球试验(卜里耶模型)

箱中有b只黑球，r只红球，随机取出一只，把原球放回，并加进与抽出球同色的球c只，再取第二次，这样下去共取了n次球，问前n_1次取到黑球，后$n_2=n-n_1$次取到红球的概率是多少？

解 以A_1表示第一次取出黑球一事件,$\cdots\cdots$,A_{n_1}表示第n_1次取出黑球;A_{n_1+1}表示第n_1+1次取出红球,$\cdots\cdots$,A_n表示第n次取出红球,则

$$P(A_1)=\frac{b}{b+r},$$

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{b+c}{b+r+c}.$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_{n_1} \mid A_1 A_2 \cdots A_{n_1-1}) = \frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c}.$$

$$P(A_{n_1+1} \mid A_1 A_2 \cdots A_{n_1}) = \frac{r}{b+r+n_1 c}.$$

$$P(A_{n_1+2} \mid A_1 A_2 \cdots A_{n_1+1}) = \frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c}.$$

$$\cdots\cdots$$

$$P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) = \frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.$$

因此 $P(A_1A_2\cdots A_n)$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

$$= \frac{b}{b+r} \times \frac{b+c}{b+r+c} \times \frac{b+2c}{b+r+2c} \cdots$$

$$\times \frac{b+(n_1-1)c}{b+r+(n_1-1)c} \times \frac{r}{b+r+n_1c}$$

$$\times \frac{r+c}{b+r+(n_1+1)c} \times \cdots \times \frac{r+(n_2-1)c}{b+r+(n-1)c}.$$

此模型被卜里耶用来作为描述传染病的数学模型.

例3-5 设一仓库中有10 箱同种规格的产品, 其中由甲、乙、丙三厂生产的分别有5箱 , 3箱, 2 箱, 三厂产品的废品率依次为 0.1, 0.2, 0.3 从这 10 箱产品中任取一箱 , 再从这箱中任取一件产品, 求取得的正品概率.

解 设 A 为事件 "取得的产品为正品", B_1, B_2, B_3, 分别表示 "任取一件产品是甲、乙、丙生产的",

由题设知 $P(B_1)=\dfrac{5}{10}$, $P(B_2)=\dfrac{3}{10}$, $P(B_3)=\dfrac{2}{10}$.

$$P(A|B_1)=0.9,\quad P(A|B_2)=0.8,\quad P(A|B_3)=0.7,$$

故

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$=\frac{5}{10}\cdot\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{10}+\frac{2}{10}\cdot\frac{7}{10}$$

$$=0.82.$$

贝叶斯

Thomas Bayes

（1702-1763）

英国数学家

1742年成为英国皇家学会会员.在数学方面主要研究概率论.首先将归纳推理法用于概率论基础理论，创立了贝叶斯统计理论，对于统计决策函数、统计推断、统计的估算等做出了贡献.

目 上 下 回 停 续