概率论与数理统计

第二节 多维随机变量及其分布(2)

- 五、 边缘分布函数
- 六、离散型随机变量的边缘分布律
- 七、连续型随机变量的边缘分布

五、边缘分布函数

如果(X,Y)是一个二维随机变量,则它的分量X(或者Y)是一维随机变量.我们称X(或者Y)的分布为X(或者Y)关于二维随机变量(X,Y)的边缘分布.

边缘分布函数的定义

定义 设$F(x,y)$为随机变量(X,Y)的分布函数,

则 $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$,

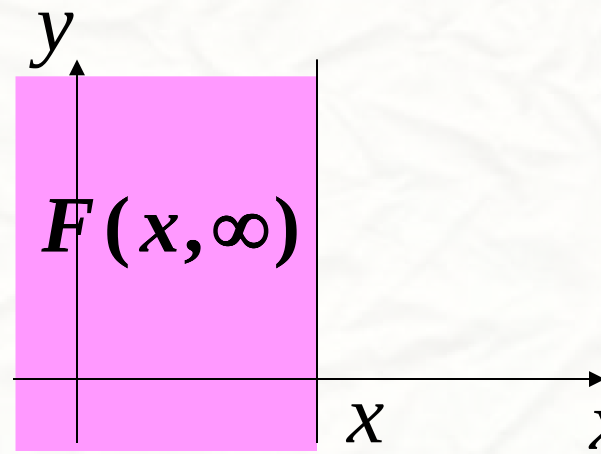
令 $y\to+\infty$, 称

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x, Y<+\infty\}=F(x,+\infty),$$

为随机变量(X,Y)关于X的边缘分布函数.

记为 $F_X(x)=F(x,+\infty)$.

几何表示:

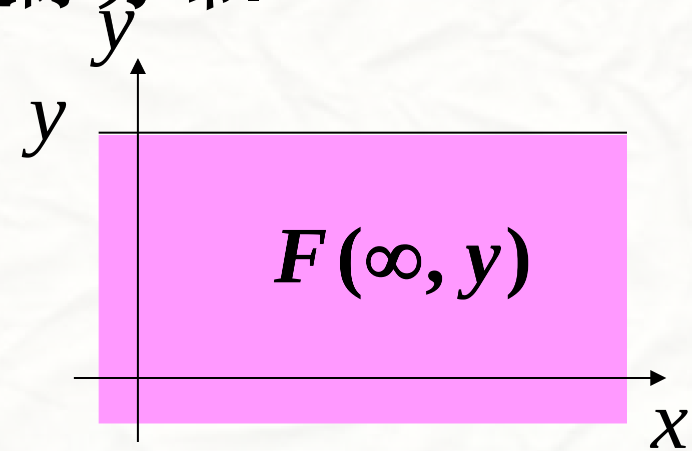


同理令 $x \to +\infty$,

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = P\{X < +\infty, Y \le y\} = P\{Y \le y\}$$

为随机变量(X,Y)关于Y的边缘分布函数.

边缘分布也称为边沿分布或边际分布.



六、离散型随机变量的边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$

记
$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$
$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

直观的从分布列表中看，就是

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$	$p_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
$p_{i\cdot}$	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$		

注：每一个 p_{ij} 叫作边缘概率，整体叫作边缘分布律。

X 和 Y 的边缘分布函数同于一维离散型随机变量的分布函数的求法，分别为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \sum_{x_i \le x} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{x_i \le x} p_{i\bullet},$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \sum_{y_j \le y} \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{y_j \le y} p_{\bullet j}.$$

例1 已知下列分布律，求其边缘分布律.

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}=P\{Y=y_j\}$
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注 联合分布律 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布律

七、连续型随机变量的边缘分布

定义 若(X,Y)为二维连续型随机变量,设密度函数为$p(x,y)$,则

$$p_X(x)$$

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\underline{\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y\right\}}\mathrm{d}x$$

则X的边缘密度函数为

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y$$

对照$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(x)dx$

同理可得Y的边缘密度函数为

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x$$

例3 设(X,Y)的分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求关于X和Y的边缘概率密度函数.

解 根据定义有

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy = e^{-x}$$

所以关于 X的边缘密度为 $(0<x<+\infty)$

$$p_X(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

目 上 下 例 停 续

同理可得关于 Y的边缘密度为

$$p_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

注　由联合分布密度能推出边缘分布密度,

但由边缘分布密度推不出联合分布密度.

例4 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数,且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,$

$-1<\rho<1.$

试求二维正态随机变量 的边缘概率密度.

解

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

注 通过本题,我们可以得到如下结论

1° 二元正态分布的边缘分布是一元正态分布.

即若 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

2° 上述的两个边缘分布中的参数与二元正态分布中的常数 ρ 无关.

3° 如果 $(X_1,Y_1) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_1)$,

$$(X_2,Y_2) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho_2),$$

其中 $\rho_1 \neq \rho_2$

则 (X_1,Y_1) 与 (X_2,Y_2) 的分布函数不同,

但是 X_1 与 X_2, Y_1 与 Y_2 的分布函数相同.

这表明,一般来讲,不能由边缘分布推出联合分布.

思考题

边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布一定是二维正态分布吗?

答: 不一定. 举一反例以示证明.

令 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然, (X,Y) 不服从正态分布,但是

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布不一定是二维正态分布.

填空题 2分

设置

设二维随机变量服从正态分布$N(1,0,1,1,0.5)$，

则$X\sim$ $Y\sim$

[填空1] [填空2]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

例4-1 设$(X,Y) \sim p(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

求 (1) $p_X(x)$; (2) $P\{X+Y \le 1\}$.

解 当$x>0$时,

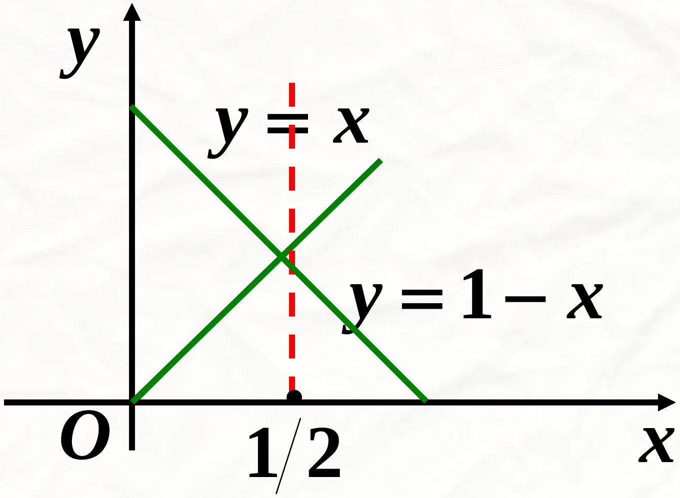
$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{x}^{+\infty} e^{-y}\,\mathrm{d}y=e^{-x}.$$

当 $x \le 0$ 时, $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}y=0.$

故 $$p_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

(2) $P\{X+Y\le 1\}$



$$= \iint\limits_{x+y\le 1} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_x^{1-x} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} [\mathrm{e}^{-(1-x)} - \mathrm{e}^{-x}]\mathrm{d}x = 1 + \mathrm{e}^{-1} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

内容小结

1. 边缘分布函数

随机变量(X,Y)关于X的边缘分布函数.

$$F_X(x)=F(x,+\infty)$$

随机变量(X,Y)关于Y的边缘分布函数.

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)$$

2. 离散型随机变量边缘分布

(1) 二维离散型随机变量(X,Y)关于X 的边缘分布律

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = P\{X = x_i\}, \quad i = 1,2,\cdots,$$

(2) 二维离散型随机变量(X,Y)关于Y 的边缘分布律

$$p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = P\{Y = y_j\}, \quad j = 1,2,\cdots,$$

(3) 二维离散型随机变量(X,Y)关于X 的边缘分布函数

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

(4) 二维离散型随机变量(X,Y)关于Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

3. 连续型随机变量边缘分布

(1) 二维连续型随机变量(X,Y)关于X的边缘密度函数

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) 二维连续型随机变量(X,Y)关于Y的边缘密度函数

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x$$

(3) 二维连续型随机变量(X,Y)关于X的边缘分布函数

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x$$

(4) 二维连续型随机变量(X,Y)关于Y的边缘分布函数

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y$$


再见

备用题

例3-1 如果二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y} \\ +e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求X和Y各自的边缘分布函数.

解 因为

$$\lim_{y\to+\infty}\{1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}\}=1-e^{-\lambda_1 x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\{1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}}\}=1-e^{-\lambda_2 y},$$

所以X和Y各自的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可见，这两个边缘分布都是指数分布，但这两个分布对应的随机变量不相互独立.

例3-2 设二维随机变量(ε,η)有密度函数

$$p(x,y)=\frac{20}{\pi^2(x^2+16)(y^2+25)}$$

求(ε,η)的联合分布函数及关于ε和η的边缘密度函数.

解

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}P(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{20}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(u^2+16)(v^2+25)}$$

$$=\frac{20}{\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+16}\right)\left(\int_{-\infty}^{y}\frac{\mathrm{d}v}{v^2+25}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}(\arctan\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2})(\arctan\frac{y}{5}+\frac{\pi}{2})$$

$$\text{故}F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\arctan\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2})(\arctan\frac{y}{5}+\frac{\pi}{2})$$

$$-\infty<x,y<+\infty$$

即为所求的联合分布函数.

$$F_\varepsilon(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi}(\arctan\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2})$$

$$F_\eta(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi}(\arctan\frac{y}{5}+\frac{\pi}{2})$$

即为所求的边缘分布函数.

例3-3 设(X,Y)在曲线$y=x^2, y=x$所围成的区域G里服从均匀分布.求联合分布密度和边缘分布密度.

解 区域G的面积$A=\int_0^1 (x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$,

由题设知(X,Y)的联合分布密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} 6, & 0\le x\le 1, x^2\le y\le x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

从而

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=6\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y=6(x-x^2),\ 0\le x\le 1$$

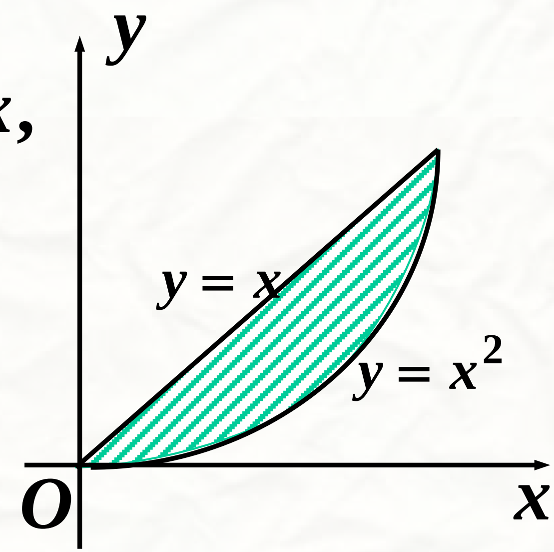


图3-3

即 $$p_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=6\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$$

$$=6(\sqrt{y}-y),0\le y\le 1$$

即 $$p_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例3-4 设二维随机变量(X,Y)具如下联合概率密度，求边缘分布.

$$(1)\ p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2\mathrm{e}^{-y+1}}{x^3}, & x>1, y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$(2)\ p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, & x>0, y\le 0,\text{或} x\le 0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解 (1)对$x>1$

$$p_X(x)=\int_1^{\infty}\frac{2\mathrm{e}^{-y+1}}{x^3}\mathrm{d}y=\frac{2}{x^3},$$

目 上 下 回 停 续

所以 $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}, & x>1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

对$y>1$

$$p_Y(y)=\int_1^{\infty}\frac{2\mathrm{e}^{-y+1}}{x^3}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-y+1},$$

所以 $p_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y+1}, & y>1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2)对$x>0$

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}};$$

对$x\le 0$

$$p_X(x)=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

所以 $p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty.$

同理可求出 $p_Y(y)$.

例3-5 设二维随机变量(X,Y)在$x^2+y^2\le r^2(r>0)$内服从均匀分布，求 X, Y 的边缘概率密度.

解 应先求出联合概率密度，为此求

$$G=\{(x,y): x^2+y^2\le r^2, r>0\}$$

的面积，显然G的面积为πr^2.

所以(X,Y)的联合概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}y$，当$|x|<r$时，

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{1}{\pi r^2}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2},$$

所以 $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|<r,\\ 0, & |x|\geq r.\end{cases}$

同理可求得

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y|<r,\\ 0, & |y|\geq r.\end{cases}$$

例4-1 设$(X,Y) \sim p(x,y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

求 (1) $p_X(x)$; (2) $P\{X+Y \le 1\}$.

解 当$x > 0$时,

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{x}^{+\infty} e^{-y}\,\mathrm{d}y = e^{-x}.$$

当 $x \le 0$ 时, $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$

故 $p_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

(2) $P\{X+Y\le 1\}$

$$=\iint\limits_{x+y\le 1} p(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}[\mathrm{e}^{-(1-x)}-\mathrm{e}^{-x}]\mathrm{d}x=1+\mathrm{e}^{-1}-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$