# §2.3 动量定理与动量守恒定律

**主要内容：**

1. 动量与冲量
2. 质点的动量定理
3. 质点系的动量定理
4. 动量守恒定律

## 2.3.1 冲量与动量

**1. 冲量** 作用力与作用时间的乘积（反映力对时间的累积效应）

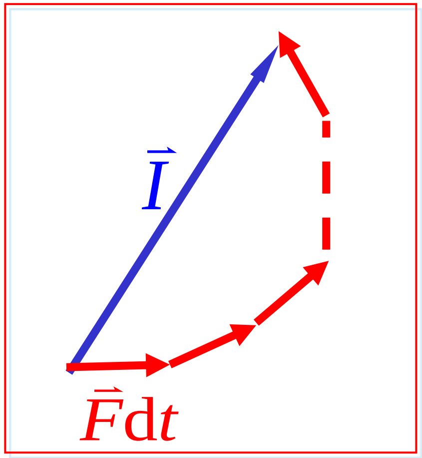
由牛顿第二定律 $\vec{F}=\mathrm{d}\vec{p}/\mathrm{d}t$ 有 $\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$

$\vec{F}$ 是随时间而变的，但d$t$时间内，可认为$\vec{F}$恒定不变。

元冲量：$\mathrm{d}\vec{I}=\vec{F}\mathrm{d}t$

力在$t_1$到$t_2$时间内的冲量为

$$\vec{I}=\int \mathrm{d}\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$$




冲量 $\vec{I}$ 的方向是元冲量的矢量和（$\sum_i \vec{F}_i\mathrm{d}t$）的方向。

例 一质点受合力作用，合力为 $\vec{F}=10t\vec{i}+2(2-t)\vec{j}+3t^2\vec{k}$

求 质点从静止开始在2s内所受合力的冲量

解 由冲量的定义有

$$\vec{I}=\int_0^2\vec{F}\mathrm{d}t$$

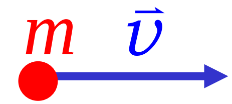
$$=\int_0^2[10t\vec{i}+2(2-t)\vec{j}+3t^2\vec{k}]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^2 10t\mathrm{d}t\vec{i}+\int_0^2 2(2-t)\mathrm{d}t\vec{j}+\int_0^2 3t^2\mathrm{d}t\vec{k}$$

$$=(20\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k})\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}$$

## 2. 动量

**牛顿运动定律** $\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$




**质点的运动状态** $\vec{p}=m\vec{v}$ **(状态量)**

- **动量是矢量，分量式为:** $p_x=mv_x, p_y=mv_y, p_z=mv_z$
- **动量与动能数量上的关系为** $E_\mathrm{k}=\dfrac{p^2}{2m}$

## 3. 质点的动量定理

$$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}=\mathrm{d}(m\vec{v})$$ **(动量定理微分形式)**

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}\mathrm{d}(m\vec{v})=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$ **(动量定理积分形式)**

**作用在质点上的合力在某一时间内的冲量等于质点在同一时间内动量的增量。**

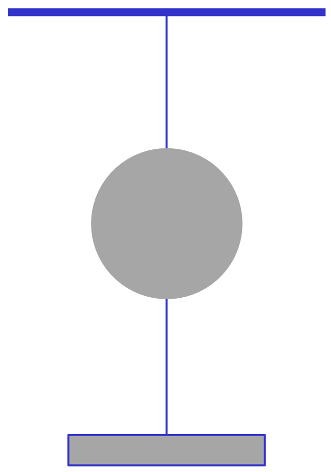
**如图所示在横梁下边用细线系一质量较大的金属球，金属球的下面用同样的细线系一小木棒，当用手向下缓慢拉动小木棒时，会被拉断的细线是（B），当迅速向下拉动小木棒时，会被拉断的细线是（A）**

A 金属球下面的细线

B 金属球上面的细线

C 金属球上面和下面的细线同时被拉断

D 无法判断



缓慢拉动，每个时刻都可近似看成平衡态

当用手向下猛拉小木棒时，金属球由于惯性还要保持静止

**例** 如图所示，一质量为$m=1\text{kg}$的质点，沿半径为$R=2\text{m}$的圆周运动。取$O$点为自然坐标的原点，质点在自然坐标中的运动方程为$s=\frac{1}{2}\pi t^2$ (SI)。

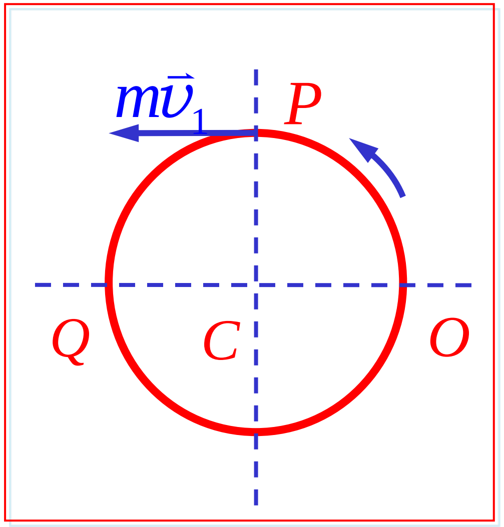
**求** 从$\sqrt{2}$秒到2秒这段时间内质点所受到的合力的冲量。

**解** 由质点的运动方程可知

$t_0=0$　　$s_0=0$　　质点位于$O$点

$t_1=\sqrt{2}\text{s}$　　$s_1=\pi\text{m}$　　质点位于$P$点

$t_2=2\text{s}$　　$s_2=2\pi\text{m}$　　质点位于$Q$点




质点的运动速率为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\pi t$$

$t_1=\sqrt{2}\text{s}$ 时，质点的速率和动量分别为

$$v_1=\sqrt{2}\pi\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$p_1=mv_1=\sqrt{2}\pi\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$ (方向如图所示)

$t_2 = 2\text{s}$ 时，质点的速率和动量分别为

$$\upsilon_2 = 2\pi \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$p_2 = m\upsilon_2 = 2\pi \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$ （方向如图所示）

$t_1$到$t_2$时间内质点所受合力的冲量为

$$\vec{I} = m\vec{\upsilon}_2 - m\vec{\upsilon}_1$$

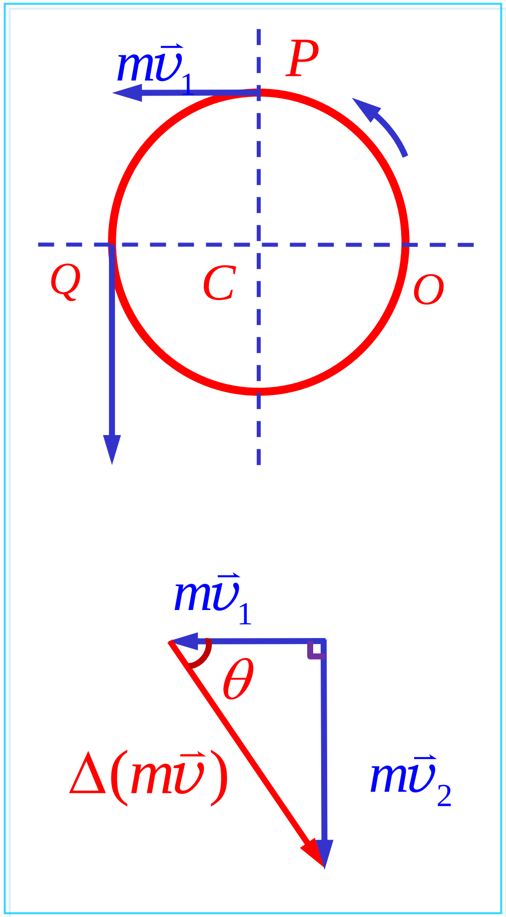
由图示动量合成三角形可知

$$I = |\Delta(m\vec{\upsilon})| = \sqrt{(m\upsilon_1)^2 + (m\upsilon_2)^2}$$

$$= 7.69 \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

冲量的方向可用$\theta$角来表示

$$\tan\theta = \frac{m\upsilon_2}{m\upsilon_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta = 54^\circ 44'$$



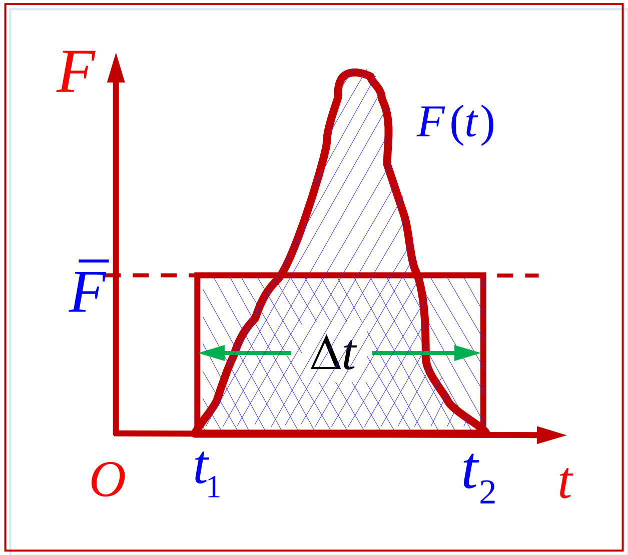
## ➢ 讨论

- 由动量定理可知，作用在质点上的合力的冲量由质点的始末状态决定而与中间过程无关。因此，**动量定理对打击、碰撞等问题特别有效。**

- 在碰撞、冲击等问题中，力的作用时间很短，且力的变化又复杂时，常引入**平均冲力**

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \bar{\vec{F}}(t_2 - t_1)$$

$$\bar{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{I}}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$




- 在碰撞、冲击等问题中，力的作用时间足够短时，可忽略重力等有限大小的力

**例** 一质量为$m$的蒸汽锤从高度为$h$ =1.5m的地方由静止下落，锤与被加工的工件的碰撞时间为$\Delta t$，且锤与工件碰撞后的末速度为零。

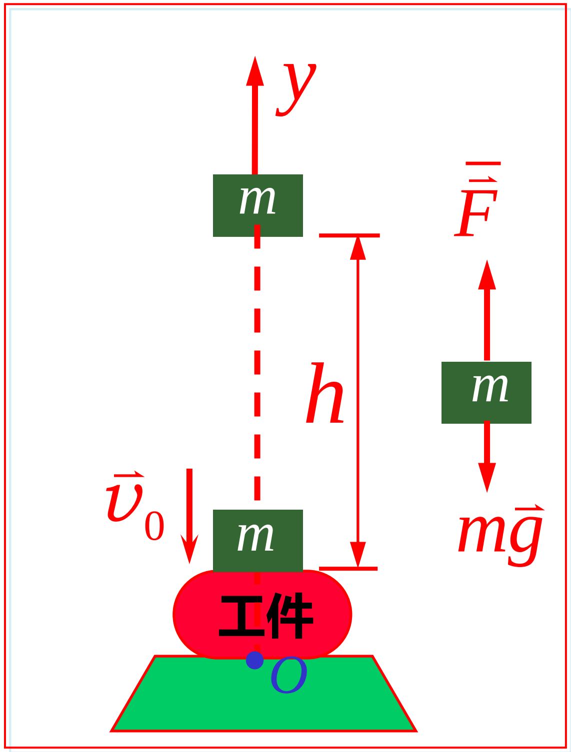
**求** 蒸汽锤对工件的平均冲击力与重力的比值。

蒸汽锤下降到工件表面时速度大小：$v_0=\sqrt{2gh}$

则由动量定理得

$$\int_0^{\Delta t}(\bar{F}-mg)\mathrm{d}t=0-(-mv_0)$$

$$\frac{\bar{F}}{mg}=1+\frac{1}{\Delta t}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$




| $\Delta t$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{F}/mg$ | 6.5 | 56 | 560 | 5600 |

- 时间短而冲力大，重力等往往可以忽略。

- 一般情况下，要利用动量和冲量在坐标系中的分量式进行动量定理的计算。

**直角坐标系中动量定理的分量形式**

$$\begin{cases} I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = m\upsilon_{2x} - m\upsilon_{1x} \\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = m\upsilon_{2y} - m\upsilon_{1y} \\ I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = m\upsilon_{2z} - m\upsilon_{1z} \end{cases}$$

**冲量的分量只改变自己方向上的动量**

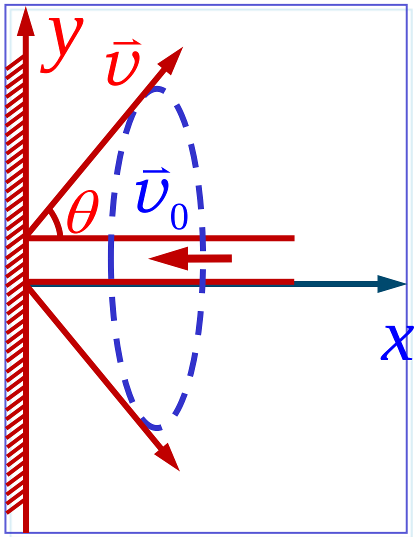
**例** 水力采煤、墙面清洗等过程用的高压水枪，以$v_0 = 30\text{m/s}$的速率向墙垂直喷出截面积$S = 3\times10^{-4}\text{m}^2$的水柱，如图所示。与墙冲击后，水滴向四周均匀飞溅形成一个半顶角$\theta = \pi/3$的圆锥面，飞溅速率$v = 4\text{m/s}$。

**求** 水柱对墙面的平均冲击力。

**解** 以$\Delta t$时间内喷向墙面的水柱中的水为研究对象。

设其质量为$m$，在图示的直角坐标系中，墙面对其沿$x$轴方向的作用力为$F_x$

沿$x$轴方向应用动量定理的分量式，有




$$\int_0^{\Delta t} F_x \mathrm{d}t = mv\cos\theta - (-mv_0)$$

$$\overline{F_x}\Delta t = m(v\cos\theta + v_0)$$

$$\overline{F_x} = \frac{m}{\Delta t}(v\cos\theta + v_0)$$

$$\overline{F}_x = \frac{m}{\Delta t}(v\cos\theta + v_0) = \frac{\rho S v_0 \Delta t}{\Delta t}(v\cos\theta + v_0)$$

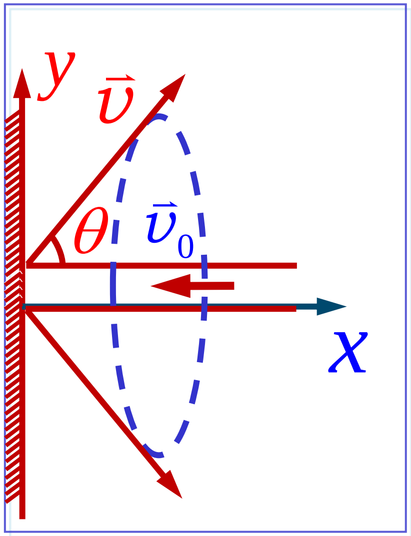
$$= \rho S v_0 (v\cos\theta + v_0)$$

**墙对水柱的净作用力沿轴方向，即垂直于墙面。**

**根据牛顿第三定律，水柱给墙面的平均冲击力为**

$$\overline{F} = -F_x = -\rho S v_0 (v\cos\theta + v_0)$$

**将已知参数代入上式，得**




$$\overline{F} = -288\text{N}$$

**方向沿$x$轴负向。**

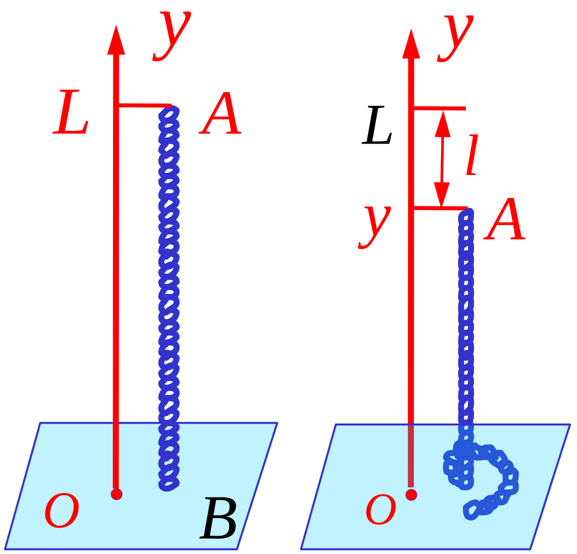
**例** 将一根质量为$m$、长度为$L$的均质柔绳竖直地悬挂起来，使其下端恰好与地面接触，如图所示。若将此绳上端由静止状态释放，让其自由下落到地面上。

**求** 当绳子下落$l$长度时，地面对绳的作用力。

**解** 以地面为坐标原点，沿竖直方向为$y$轴。

当绳子下落$l$长度时，未落地部分的绳子的速率为

$$v = \sqrt{2gl}$$ (方向向下)




在$\mathrm{d}t$ 时间内，$\mathrm{d}y = v\,\mathrm{d}t$ 的一小段绳子继续落地。以$\mathrm{d}y$ 绳子为研究对象，则其质量为

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}y = \frac{m}{L}\mathrm{d}y = \frac{m}{L} v \mathrm{d}t$$

$dy$这一小段绳子受力为：地面的平均冲力$\vec{F}_{\mathrm{N}}$和重力 $\mathrm{d}m\vec{g}$

忽略重力，则对$dy$应用动量定理，有

$$F_{\mathrm{N}}\mathrm{d}t=\mathrm{d}p=0-(-\upsilon\mathrm{d}m)=0-(-\frac{m}{L}\upsilon^{2}\mathrm{d}t)$$

$$F_{\mathrm{N}}=\frac{m}{L}\upsilon^{2}\xrightarrow{\text{代入}\upsilon\text{的表达式}}F_{\mathrm{N}}=\frac{2m}{L}lg$$

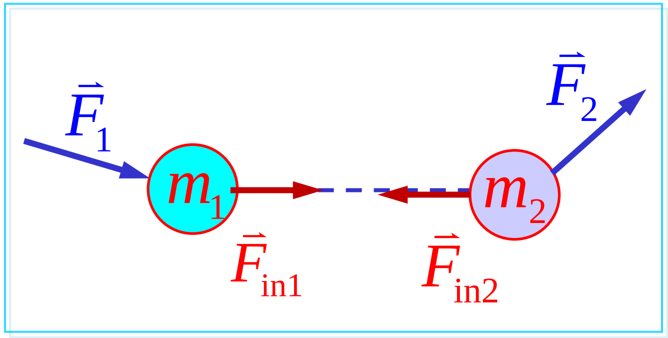
$dy$对地面的作用力为 $F_{\mathrm{N}}^{'}=F_{\mathrm{N}}=\dfrac{2m}{L}lg$

已落到了地面上$l$长度的绳子对地面的正压力等于此段绳子的重力： $F_{\mathrm{G}}=\dfrac{m}{L}lg$

地面受到总作用力为

$$F=F_{\mathrm{N}}^{'}+F_{\mathrm{G}}=\frac{2m}{L}lg+\frac{m}{L}lg=\frac{3m}{L}lg$$

## 2.3.3 质点系的动量定理




**外力：** $\vec{F}_1$ , $\vec{F}_2$ **内力：** $\vec{F}_{\text{in}1}$ , $\vec{F}_{\text{in}2}$

$t_1$ **时刻,两质点的速度分别为** $\vec{v}_{11}$ , $\vec{v}_{21}$

$t_2$ **时刻,两质点的速度分别为** $\vec{v}_{12}$ , $\vec{v}_{22}$

**对质点系中的各质点应用动量定理**

**对质点1，有** $\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{\text{in}1})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_{12}-m_1\vec{v}_{11}$

**对质点2，有** $\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{\text{in}2})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_{22}-m_2\vec{v}_{21}$

**两式相加，得**

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_{\text{in}1}+\vec{F}_{\text{in}2})\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_{12}+m_2\vec{v}_{22})-(m_1\vec{v}_{11}+m_1\vec{v}_{21})$$

其中 $$\vec{F}_{\text{in}1} = -\vec{F}_{\text{in}2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{\upsilon}_{12} + m_2\vec{\upsilon}_{22}) - (m_1\vec{\upsilon}_{11} + m_1\vec{\upsilon}_{21})$$

推广到$n$个质点的质点系，有

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \vec{F}_i \mathrm{d}t = (\sum_i m_i\vec{\upsilon}_{i2}) - (\sum_i m_i\vec{\upsilon}_{i1})$$

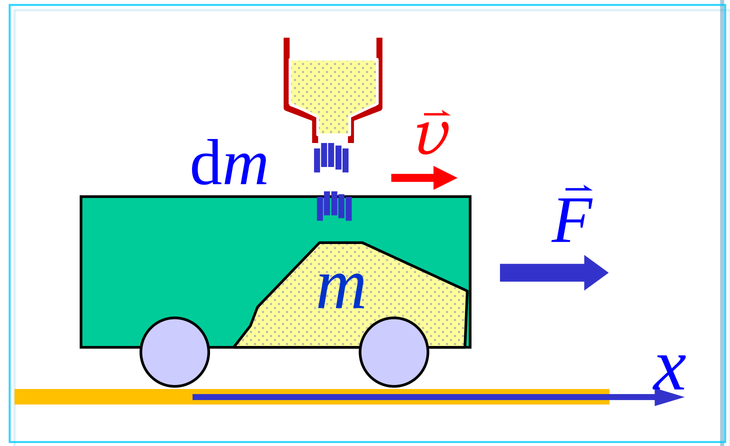
或 $$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$ (质点系动量定理)

**系统所受合外力的冲量等于质点系总动量的增量**

➢ 说明

- 内力的作用不改变系统的动量，但通常会改变系统的动能。
- 矢量方程，其分量式 $\int_{t_1}^{t_2} (\sum F_{ix})\mathrm{d}t = (\sum m_i\upsilon_{i2x}) - (\sum m_i\upsilon_{i1x})$

例　一装沙车以速率$v = 3\text{m/s}$从沙斗下通过，每秒钟落入车厢的沙为$\Delta m = 500\text{kg}$，如果使车厢的速率保持不变，应用多大的牵引力？(设车与轨道的摩擦不计)




解　设$t$时刻已落入车厢沙子的质量与沙车的质量之和为$m$，$\mathrm{d}t$时间内即将落入的沙子质量为$\mathrm{d}m$。

以$m$和$\mathrm{d}m$为研究系统，系统水平总动量

$t$ 时刻 $mv + \mathrm{d}m \cdot 0$　　$t + \mathrm{d}t$ 时刻 $mv + \mathrm{d}m \cdot v = (m + \mathrm{d}m)v$

动量的增量为　$\mathrm{d}p = (m + \mathrm{d}m)v - mv = \mathrm{d}m \cdot v$

根据动量定理　$F\mathrm{d}t = \mathrm{d}p = \mathrm{d}m \cdot v$

变质量系统

$$F = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v = 500 \times 3\ \text{N} = 1.5 \times 10^3\ \text{N}$$

## 2.3.4 动量守恒定律

**根据系统的动量定理可知：** $\Sigma\vec{F}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}\,\Sigma\vec{p}_i$

**当合外力** $\Sigma\vec{F}_i = 0$ **则** $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Sigma\vec{p}_i = 0$

$\Sigma\vec{p}_i = \Sigma m_i\vec{\upsilon}_i =$ 常矢量 （质点系的动量守恒定律）

**质点系所受合外力为零时，质点系的总动量保持不变。**

- 注意：
  - $|\vec{F}_{内}| >> |\vec{F}_{外}|$ **可近似认为系统动量守恒（碰撞、爆炸等）**
  - $\vec{F} \neq 0$，**但某一方向上合外力投影的代数和为零，该方向上动量守恒**

**当** $\Sigma F_{ix} = 0$ $\Sigma m_i\upsilon_{ix} =$ **常量**

**当** $\Sigma F_{iy} = 0$ $\Sigma m_i\upsilon_{iy} =$ **常量**

**当** $\Sigma F_{iz} = 0$ $\Sigma m_i\upsilon_{iz} =$ **常量**

**(动量守恒定律在直角坐标系中的分量式)**

- 系统的总动量守恒——系统内各个质点动量的**矢量和**不变
  在内力作用下系统总动量在各质点间的分配发生变化
- 系统的总动量守恒——运动全过程中，**任意时刻**的动量都相等

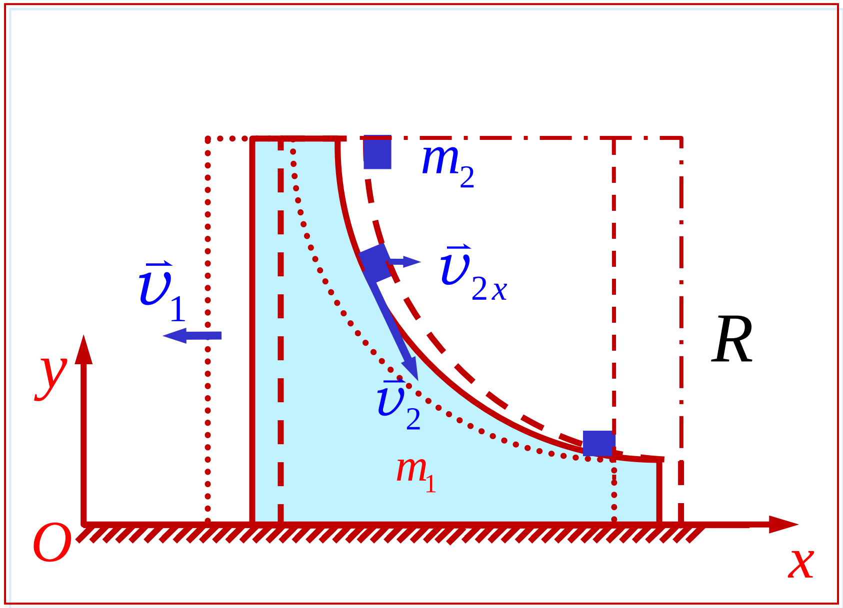
  - 合外力的冲量为零，系统动量守恒？
  - 合外力的功为零，系统动量守恒？

- 动量定理和动量守恒定律适用于惯性系。
- 动量守恒定律是自然界的普遍定律之一，对于宏观物体和微观粒子都适用。

**例** 一个有1/4圆弧滑槽、半径为$R$的大物体质量为$m_1$，停在光滑的水平面上，另一质量为$m_2$的小物体从圆弧滑槽顶点由静止下滑。

**求** 当小物体$m_2$滑到底时，大物体$m_1$在水平面上移动的距离。

**解** 取如图所示坐标系




取$m_1$和$m_2$为一系统

设 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$为下滑过程中$m_1$和$m_2$相对于地面的速度

水平方向系统动量守恒

$$0 = m_2 v_{2x} + m_1(-v_1)$$

$$m_2 v_{2x} = m_1 v_1$$

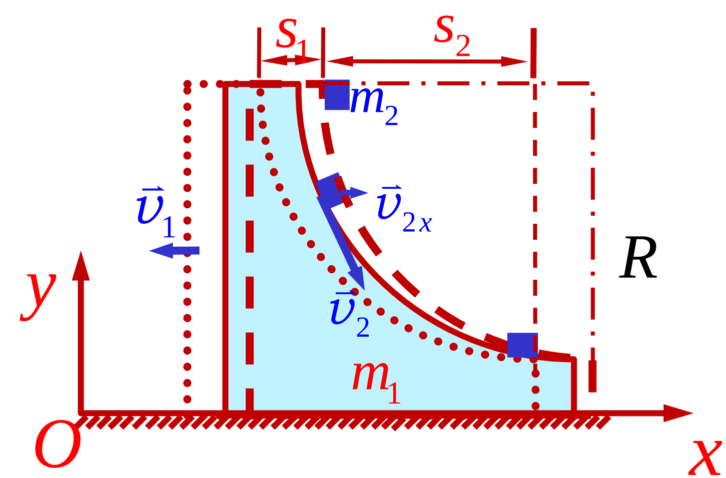
设$t = 0$时$m_2$在圆弧顶点,$t$ 时刻滑到最低点,对上式积分,有

$$m_2 \int_0^t v_{2x} \mathrm{d}t = m_1 \int_0^t v_1 \mathrm{d}t$$

$$m_2\int_0^t(\upsilon_2'-\upsilon_1)\mathrm{d}t = m_2\int_0^t \upsilon_{2x}\mathrm{d}t = m_1\int_0^t \upsilon_1\mathrm{d}t$$

$$m_2\int_0^t \upsilon_2'\mathrm{d}t - m_2\int_0^t \upsilon_1\mathrm{d}t = m_1\int_0^t \upsilon_1\mathrm{d}t$$

$$m_2R-m_2s_1 = m_1s_1$$




$m_2$相对$m_1$的水平速度为$\upsilon_2'$

$$\upsilon_{2x} = \upsilon_2' + (-\upsilon_1)$$

$s_1$和$s_2$分别表示$m_1$和$m_2$在水平方向移动的距离

有 $$s_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}R$$

**思考：此距离值与弧形槽面是否光滑有关?**

例 将百公斤的大石块平压在仰卧于地上的人的胸上，用一数公斤重的铁锤猛击石块，石块裂开，人安然无恙

根据资料，通常人的肋骨平均可以承受$5000N$的力，如果将肋骨压下$0.02m$，肋骨就要断裂

首先估算欲使肋骨断裂需要的能量$E$

$$E = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 5000 \times 0.02 = 100J$$

再考虑石块所获得能量的大小

设石块质量为$M$，铁锤质量为$m$，从$h$高度下落到石块上

可设铁锤击中石块后和石块一起运动，则由动量守恒

$$(M + m)v = mv_0$$

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

$$v=\frac{mv_0}{M+m}\approx\frac{m}{M}v_0=\frac{m}{M}\sqrt{2gh}$$

**石块所获得的动能**

$$E_k=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}2gh=\frac{m^2}{M}gh$$

**大致估算** ***M*=100kg，*m*=5kg，*h*=4m**

$$E_k=10J$$

$$E=\int m\vec{g}\bullet d\vec{r}=1000\times0.02=20J$$

## 应用动量定理和动量守恒定律解题步骤

(1) 选取研究对象。

(2) 分析受力。

判断是否满足动量守恒条件：1. 合外力为零 2. 沿某一方向合外力投影的代数和为零 3. 合外力远小于内力

不满足就应用动量定理求解

(3) 确定过程。

需要考虑一定的时间间隔或一个过程。

(4) 列方程求解。

要选取适当的坐标系（惯性系），一般要列出动量定理或动量守恒定律方程的分量式。

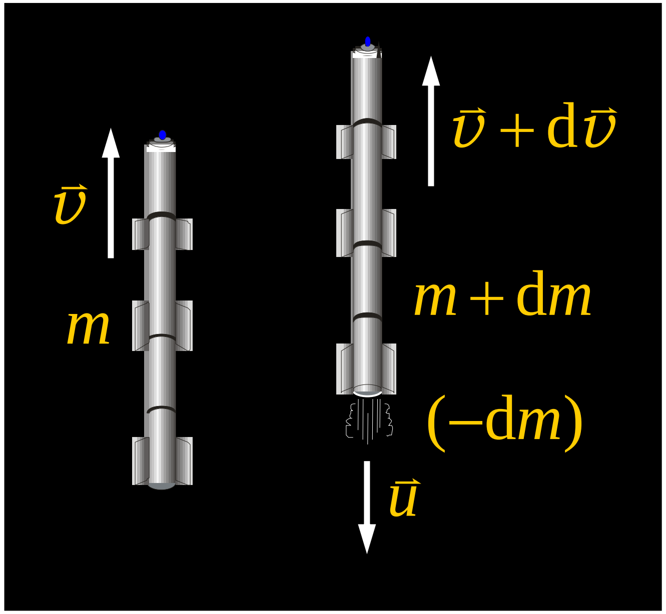
# §2.4 火箭飞行原理

主要内容：

火箭在自由空间飞行

火箭是一种自带燃料和助燃剂的太空飞行器，它依靠燃料燃烧喷出的气体所产生的反冲推力向前推进。

◆ 不计地球引力和空气阻力，求火箭所能达到的最大速度。




$t$- $t$+d$t$ 时间段：

-d$m$质量燃料变为气体，相对于地球以速度$\vec{u}$喷射出去

火箭质量 $m \rightarrow m+\mathrm{d}m$ ($\mathrm{d}m<0$)

相对于地球速度为$\vec{v} \rightarrow \vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}$

火箭-燃料系统动量守恒

在时间d$t$内，系统动量的增量为

$$\mathrm{d}\vec{p}=\left[(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v})+(-\mathrm{d}m)\vec{u}\right]-m\vec{v}$$

$$\mathrm{d}\vec{p} = [(m+\mathrm{d}m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + (-\mathrm{d}m)\vec{u}] - m\vec{v}$$

$$= m\vec{v} + (\mathrm{d}m)\vec{v} + m\mathrm{d}\vec{v} + (\mathrm{d}m)(\mathrm{d}\vec{v}) - (\mathrm{d}m)\vec{u} - m\vec{v}$$

**略去二阶无穷小**

$$= m\mathrm{d}\vec{v} - (\vec{u} - \vec{v})\mathrm{d}m$$

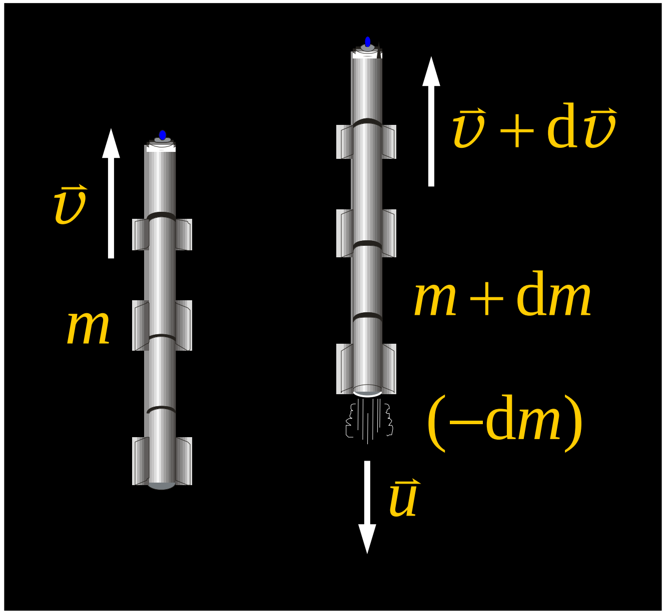
$$= m\mathrm{d}\vec{v} - \vec{v}_{\mathrm{r}}\mathrm{d}m = 0$$

$\vec{v}_{\mathrm{r}} = \vec{u} - \vec{v}$ **喷气出口的相对速度**

**取竖直向上作为$x$轴的正方向，则**

$$m\mathrm{d}v - (-v_{\mathrm{r}})\mathrm{d}m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}v = -v_{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$




**火箭发射时的质量为$m_{\mathrm{i}}$，初速度为$v_{\mathrm{i}}$，燃料耗尽时的质量为$m_{\mathrm{f}}$，末速度为$v_{\mathrm{f}}$。**

**通常喷气出口速度$v_{\mathrm{r}}$为常量，积分得** $v_{\mathrm{f}} = v_{\mathrm{i}} + v_{\mathrm{r}}\ln\dfrac{m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{f}}}$

火箭所能达到的最大速度 $v_{\mathrm{f}} = v_{\mathrm{i}} + v_{\mathrm{r}} \ln \dfrac{m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{f}}}$

喷气出口的相对速率 $v_r \sim 3.5\ km/s$，高效燃料可达 $4.1km/s$

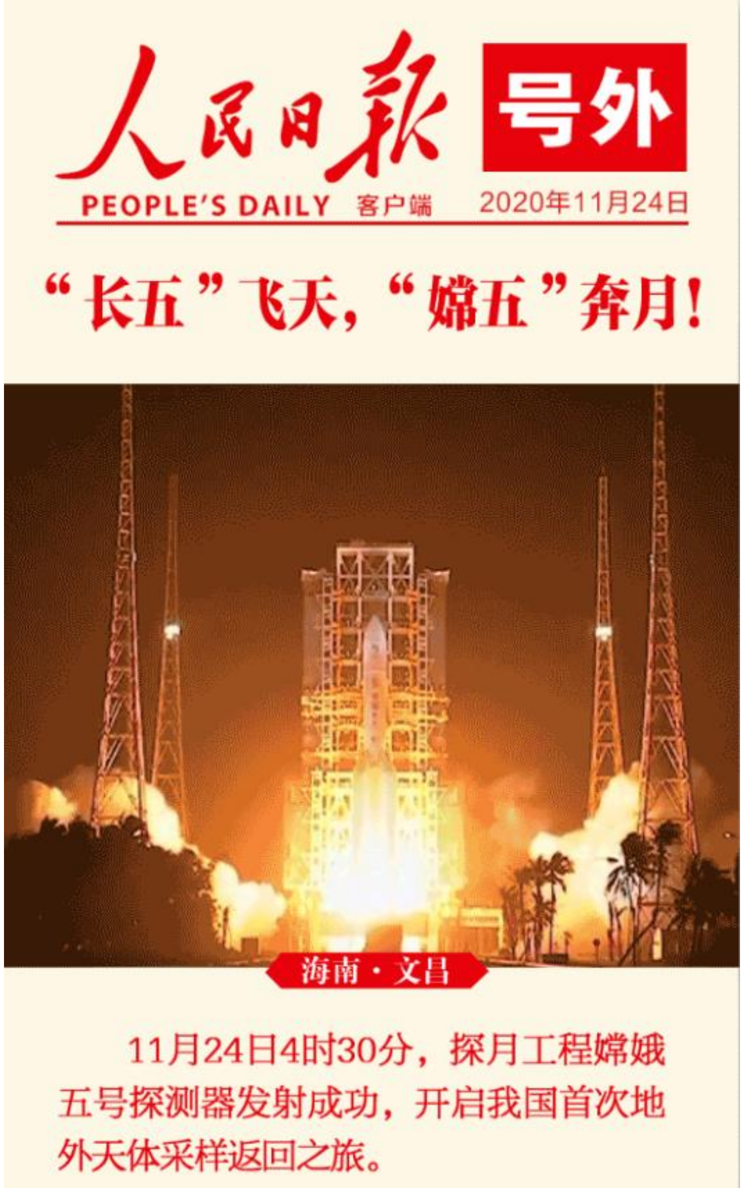
估算单级火箭所能达到的末速度：$v_r = 4\ km/s$ $\mathbf{m_i/m_f} = 15$ $v_i = 0$

$$v_f = 4 \times \ln 15 \approx 11\ km/s$$

考虑空气阻力和地球引力：$v_f \approx 7\ km/s$ <第一宇宙速度 $v_1 \sim 7.9\ km/s$

单级火箭不能把卫星送入预定轨道，人造地球卫星需采用多级火箭

2018年12月8日2时23分，中国在西昌卫星发射中心用长征三号乙运载火箭（三级火箭）成功发射嫦娥四号探测器，开启了月球探测的新旅程。此次发射任务是长征系列运载火箭的第294次发射。

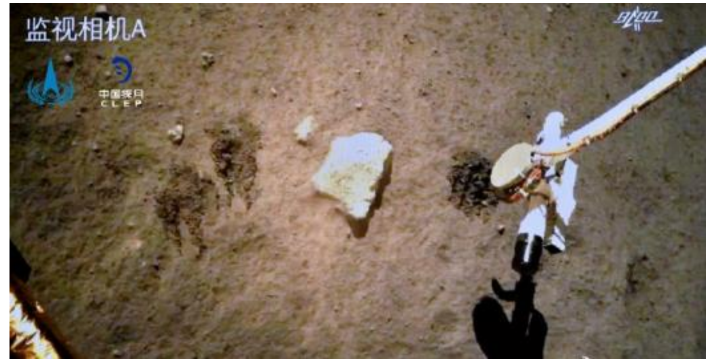

人民日报 号外
PEOPLE'S DAILY 客户端 2020年11月24日

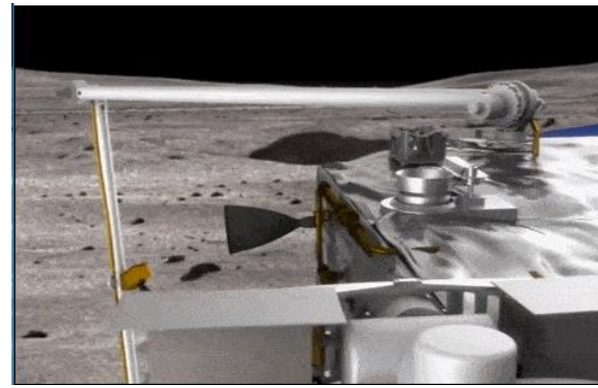
“长五”飞天，“嫦五”奔月！

海南·文昌

11月24日4时30分，探月工程嫦娥五号探测器发射成功，开启我国首次地外天体采样返回之旅。

2020年11月24日，长征五号遥五运载火箭搭载嫦娥五号探测器成功发射升空并将其送入预定轨道



自12月1日23时11分成功落月以来，嫦娥五号在约48小时内迅速完成了“挖土”“打包”“升旗”“起飞”等一系列工作，携月球“土特产”即将返回地球。

力对空间的积累

**过程量：功**

$A=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot\vec{r}$

**状态量：动能**

$E_k=\frac{1}{2}mv^2$

$E_k=\frac{p^2}{2m}$

**状态量：动量**

$\vec{p}=mv$

**过程量：冲量**

$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$

力对时间的积累

无需关注每一时刻运动情况

过程量⇄状态量

**质点动能定理**

$A=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}\cdot\vec{r}=\Delta E_k$

标量方程

矢量方程

**质点动量定理**

$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\Delta\vec{p}$

$\vec{F}dt=d\vec{p}$

**质点**

**质点系动能定理**

$A_{外}+A_{内}=\Delta E_k$

$A_{保内}=-\Delta E_p$

**功能原理**

$A_{外}+A_{非保内}=\Delta E_p+\Delta E_k$

避免保守内力做功积分计算

**机械能守恒定律**

$A_{外}+A_{非保内}=0$

$\Delta E=\Delta E_p+\Delta E_k$=常量

$\Sigma\vec{F}_{外i}=0$

$|\vec{F}_{内}|>>|\vec{F}_{外}|$

**质点系动量定理**

$\int_{t_1}^{t_2}(\Sigma\vec{F_i})dt=\Delta(\Sigma\vec{p_i})$

$\Sigma\vec{F_i}dt=d(\Sigma\vec{p_i})$

**动量守恒定律**

$\Sigma\vec{F}_{外}=0$

$\Sigma\vec{p_i}$=常量

**质点系**

# §2.5 对心碰撞

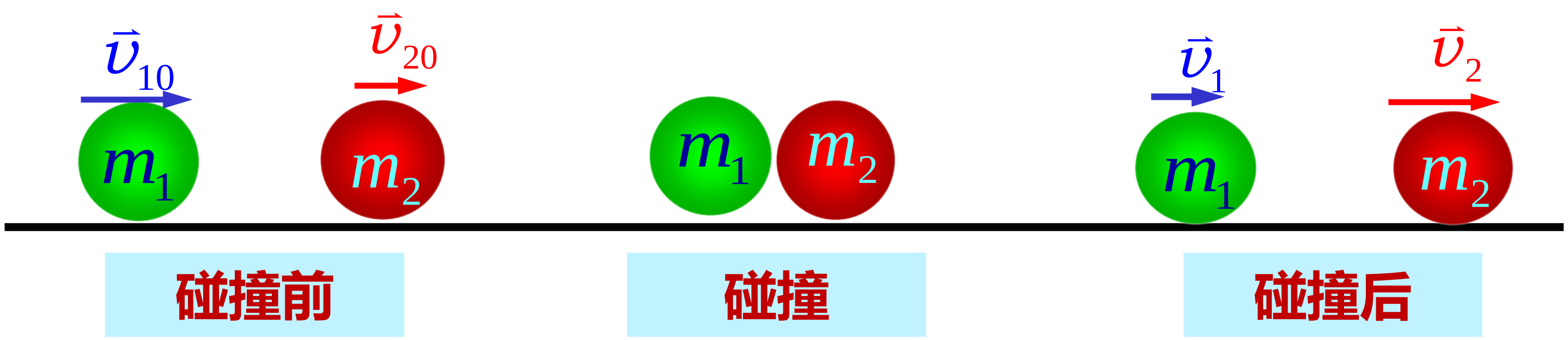
**主要内容：**

1. 完全弹性碰撞
2. 完全非弹性碰撞
3. 非完全弹性碰撞

**正碰：两球体碰撞前后的速度均在其连心线上。** 一维过程

**斜碰：两球体碰撞前后的速度不在其连心线上。** 二/三维过程

**球的正碰（对心碰撞）：**

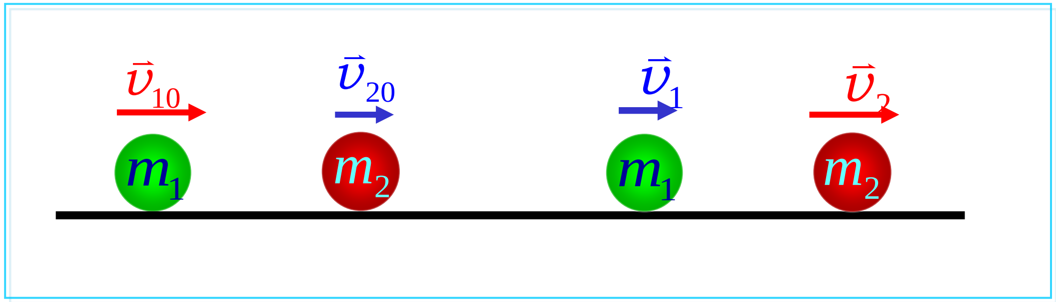



**恢复系数：碰撞后两球的分离速度与碰撞前两球的接近速度的比值。** 与碰撞体材料相关。

$$e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}$$

| 碰撞种类 | 完全弹性碰撞 | 完全非弹性碰撞 | 非完全弹性碰撞 |
| --- | --- | --- | --- |
| 表现 | **碰后完全恢复原状** | **碰后不分离** | **碰后部分恢复原状** |
| 速率关系 | $v_{10}-v_{20}=v_1-v_2$ | $v_1=v_2=v$ | $v_{10}-v_{20}>v_1-v_2$ |
| 恢复系数 | $e=1$ | $e=0$ | $0<e<1$ |
| 系统动量守恒 | √ | √ | √ |
| 系统动能守恒 | √ | × | × |
| 速度大小 | $v_1=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_{10}+\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_{20}$<br>$v_2=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{10}+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_{20}$ | $v=\frac{m_1v_{10}+m_2v_{20}}{m_1+m_2}$ | $v_1=v_{10}-\frac{m_2}{m_1+m_2}(1+e)(v_{10}-v_{20})$<br>$v_2=v_{20}+\frac{m_1}{m_1+m_2}(1+e)(v_{10}-v_{20})$ |

## 2.5.1 完全弹性碰撞




**系统动量守恒**

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

**系统动能守恒**

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

**可得**

$$v_{10} - v_{20} = v_2 - v_1$$

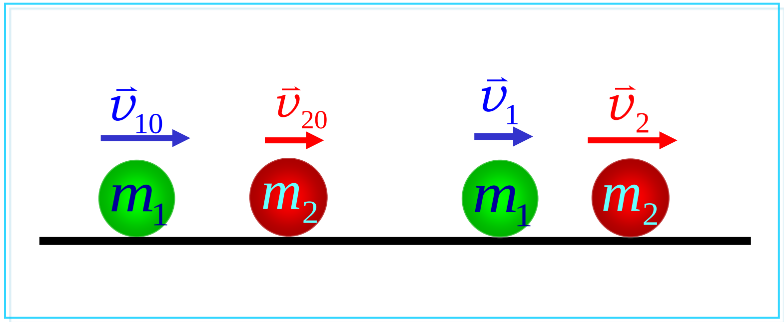
**则**

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{10} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{20}$$

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{10} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{20}$$

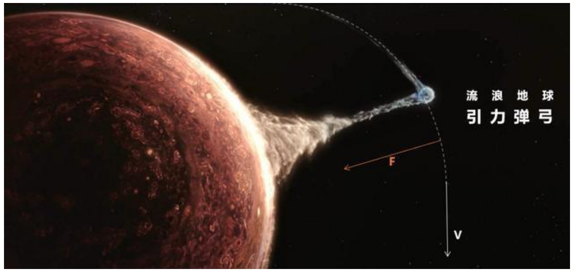
$$v_1=\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_{10}+\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)v_{20}$$

$$v_2=\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{10}+\left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_{20}\lim_{x\to\infty}$$



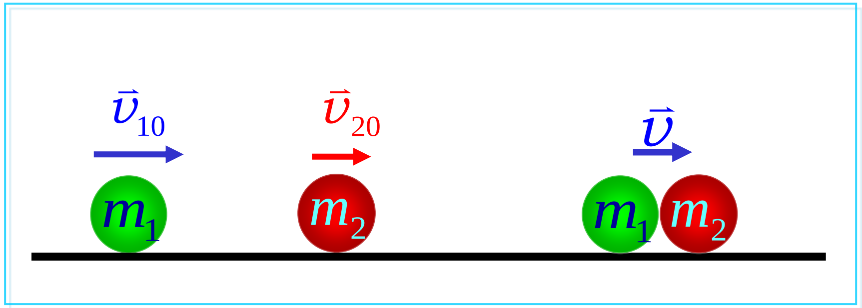

## ➢ 讨论

- **完全弹性碰撞时** $e=\dfrac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}=1$
- **当$m_1=m_2$时** $v_1=v_{20}$ ， $v_2=v_{10}$ ——**两球交换速度**
- **当$m_1<<m_2$且$v_{20}=0$时** $v_1\approx -v_{10}$ ， $v_2\approx 0$ ——**轻球被弹回**
- **当$m_1>>m_2$且$v_{20}=0$时** $v_1\approx v_{10}$ ， $v_2\approx 2v_{10}$ ——**轻球被加速**




引力弹弓效应可以给太空探测器加速， 将其甩向下一个目标。

## 2.5.2 完全非弹性碰撞




**系统动量守恒，且以共同速度运动，则**

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v$$

**可得**

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

**动能损失**

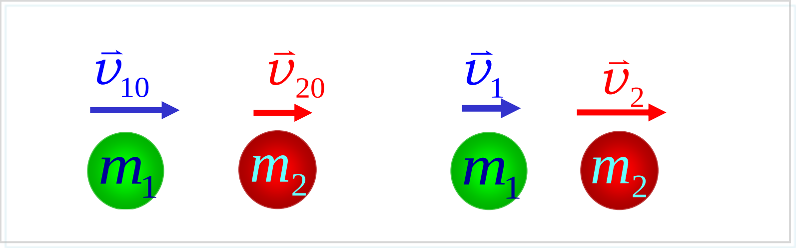
$$\Delta E = E_k - E_{k0}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2 (v_{10} - v_{20})^2}{m_1 + m_2} < 0$$

**恢复系数**

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} = 0$$

## 2.5.3 非完全弹性碰撞



**系统动量守恒**

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad v_2 = v_1 + (v_{10} - v_{20})e$$

**可得**

$$v_1 = v_{10} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1+e)(v_{10} - v_{20})$$

$$v_2 = v_{20} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(1+e)(v_{10} - v_{20})$$

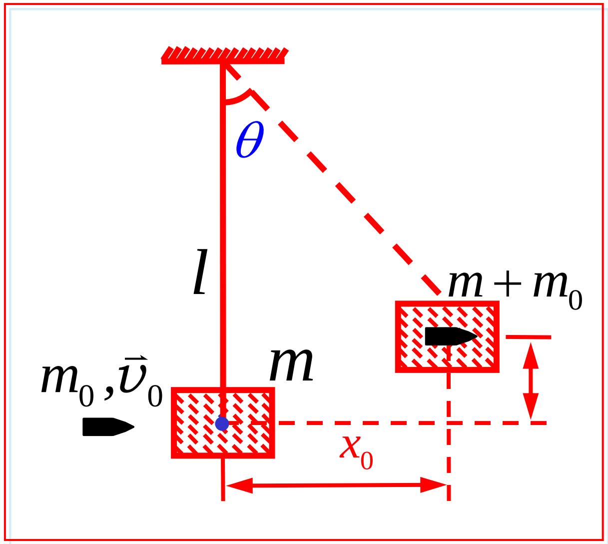
$$\Delta E = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 v_{10}^2 + m_2 v_{20}^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1-e^2)(v_{10} - v_{20})^2$$

例 如图冲击摆，质量为$m$的木块被悬挂在长度为$l$的细绳下端。一质量为$m_0$的子弹沿水平方向以速度$v_0$射中木块，并停留在其中，木块受到冲击而向斜上方摆动，当到达最高位置时，木块的水平位移为$x_0$。

求 子弹的速度$v_0$。

分为两个过程：




第一个过程，，子弹射入木块

完全非弹性碰撞，动量守恒

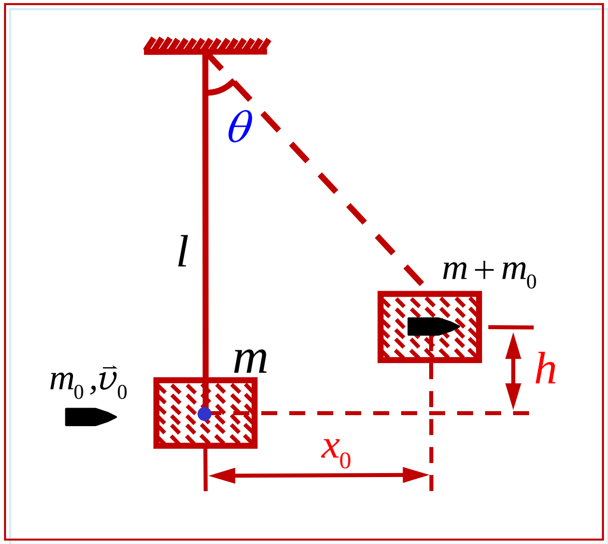
第二个过程,子弹木块上摆

子弹、木块、地球组成的系统机械能守恒

**例** 如图冲击摆，质量为$m$的木块被悬挂在长度为$l$的细绳下端。一质量为$m_0$的子弹沿水平方向以速度$v_0$射中木块，并停留在其中，木块受到冲击而向斜上方摆动，当到达最高位置时，木块的水平位移为$x_0$。

**求** 子弹的速度$v_0$。

**解** 第一个过程，完全非弹性碰撞




动量守恒 $m_0 v_0 = (m_0 + m) v$ (1)

第二个过程，上摆

机械能守恒(取最低点为势能零点)

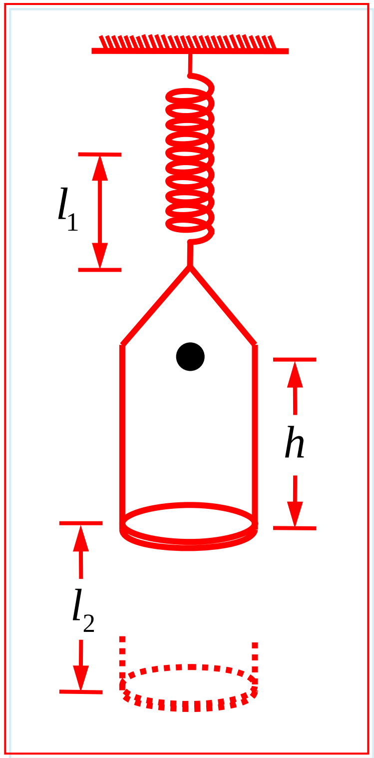
$$\frac{1}{2}(m_0 + m)v^2 = (m_0 + m)gh \qquad (2)$$

且有 $h = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$

$$v_0 = \frac{m_0 + m}{m_0}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

**例** **如图，用轻弹簧把质量为$m$的金属盘悬挂起来，静止在平衡位置，这时弹簧伸长了$l_1$ = 10cm。现有一个质量与金属盘相同的橡皮泥从高于盘底 $h$ = 30cm处由静止自由下落到盘上。**

**求** **此金属盘向下运动的最大距离$l_2$ 。**




**分为三个过程：**

**第一个过程，泥球自由下落**

**第二个过程，泥球与盘碰撞(完全非弹性碰撞)**

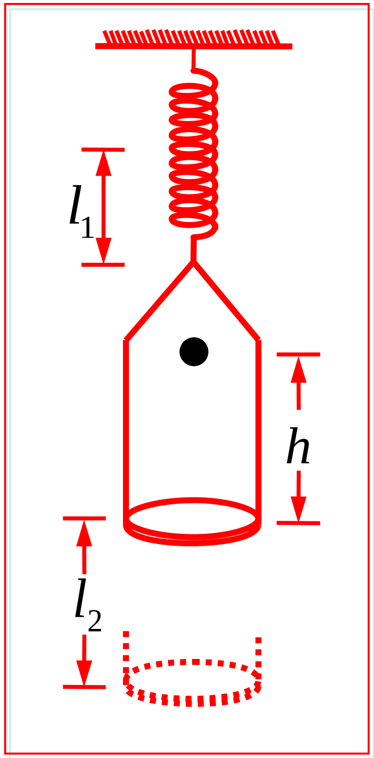
泥球和盘组成系统动量守恒

**第三个过程，泥球与盘共同向下运动**

无外力或非保守内力做功，弹簧、泥球、盘和地球组成的系统机械能守恒

**例** 如图，用轻弹簧把质量为$m$的金属盘悬挂起来，静止在平衡位置，这时弹簧伸长了$l_1 = 10\text{cm}$。现有一个质量与金属盘相同的橡皮泥从高于盘底 $h = 30\text{cm}$处由静止自由下落到盘上。

**求** 此金属盘向下运动的最大距离$l_2$。




**解** 泥球自由下落，落到盘底的速率为

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

泥球与盘碰撞**(完全非弹性碰撞)**，系统的动量守恒，设碰撞后的共同速度为$v_2$，则

$$mv_1 = (m+m)v_2$$

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

## 泥球和盘共同下降的过程

(弹簧、泥球、盘和地球组成的系统机械能守恒)

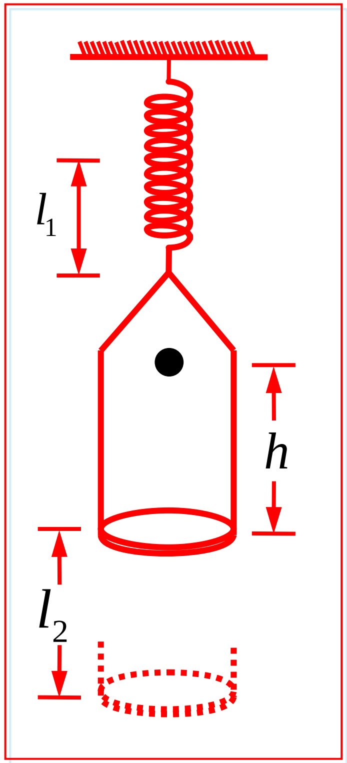
选弹簧的自然伸长端为弹性势能零点，以盘的最低点为重力势能零点

$$\frac{1}{2}(2m)\upsilon_2^2+(2m)gl_2+\frac{1}{2}kl_1^2 \quad =\frac{1}{2}k(l_1+l_2)^2$$

弹簧的劲度系数为 $k=\dfrac{mg}{l_1}$

而 $\upsilon_2=\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$ ， $l_1=10\text{cm}$

则 $l_2^2-20l_2-300=0$ ⇨ $l_2=30\text{cm}$



**下列描述正确的是（多选）：**

A. 一个物体的动量改变时，它的动能也一定改变

B. √ 两个质量不等的物体，具有相等的动能，则质量大的物体动量较大

C. 外力做功代数和为零，则系统的动量守恒

D. √ 一对内力所做的功之和一般不为零，但不排斥为零的情况

E. 系统所受合外力冲量的矢量和为零，则动量守恒