第二节 正态总体均值与方差的假设检验

- 一、单个总体参数的检验
- 二、两个总体参数的检验
- 三、基于成对数据的检验(t 检验)
- 四、内容小结

一、单个总体$N(\mu,\sigma^2)$均值 μ 的检验

1. σ^2为已知, 关于μ的检验(U 检验法)

在上节中讨论过正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$

当σ^2为已知时, 关于$\mu=\mu_0$的检验问题:

1° 假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$;

2° 取检验统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\qquad (\text{当}H_0\text{为真时})$$

3° 给定显著水平 α ($0 < \alpha \le 0.05$)

$$P\{ |U| > u_{\frac{\alpha}{2}} \} = \alpha$$

由 $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$，查表可得 $u_{\frac{\alpha}{2}}$.

拒绝域： $W_1 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid |u| \ge u_{\frac{\alpha}{2}}\}$， 其中

$$u = U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\leftrightarrow W_1' = \{u \mid |u| \ge u_{\frac{\alpha}{2}} \}$$

4° 由样本值算出 U 的值 u，若 $u \in W_1'$，则拒绝 H_0；

若 $u \notin W_1'$，则接受 H_0.

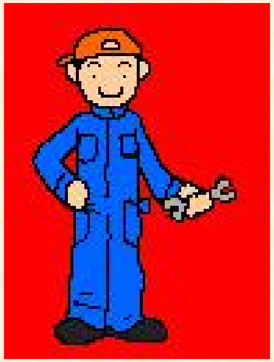
例1 某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的平均长度为10.5cm, 标准差是0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取**15**段进行测量, 其结果如下:

10.4 10.6 10.1 10.4 10.5 10.3 10.3 10.2

10.9 10.6 10.8 10.5 10.7 10.2 10.7

假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? $(\alpha = 0.05)$

解 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.15$,



1° 假设 $H_0: \mu = 10.5$, $H_1: \mu \neq 10.5$,

2° 取检验统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\quad (\text{当}H_0\text{为真时})$$

3° 给定显著水平 $\alpha=0.05$, $\frac{\alpha}{2}=0.025$

由 $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}$, 即 $\Phi(u_{0.025})=0.975$,

查表得 $u_{0.025}=1.96$,

拒绝域: $W_1'=\{u \mid |u|\geq 1.96\}$

4° 作判断

$$n = 15, \quad \bar{x} = 10.48, \quad \alpha = 0.05,$$

则 $$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{10.48 - 10.5}{0.15 / \sqrt{15}} = -0.516,$$

于是 $$|u| = 0.516 < u_{0.025} = 1.96,$$

$$\because \quad u \notin W_1' = \{u \mid |u| \geq 1.96\}$$

故接受 H_0, 认为该机工作正常.

2. σ^2为未知, 关于μ的检验(t检验)

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,其中μ,σ^2未知,显著性水平为α.

1° 假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu\neq\mu_0$;

2° 取检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$ (当H_0为真时)

3° 给定显著水平α ($0<\alpha\leq 0.05$)

$$P\{|T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\alpha,$$ 查表可得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

拒绝域:

$$W_1' = \{t \mid |t| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

$$t = T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

4° 由样本值算出 T的值t,

若$t \in W_1'$, 则拒绝H_0;

若$t \notin W_1'$, 则接受H_0.

例2 如果在例1中只假定切割的长度服从正态分布, 问该机切割的金属棒的平均长度有无显著变化? $(\alpha = 0.05)$

解 依题意 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2均为未知,

要检验假设 $H_0: \mu = 10.5$, $H_1: \mu \neq 10.5$,

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$, $s_n^* = 0.237$,

$$|t| = \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{s_n^* / \sqrt{n}}\right| = \left|\frac{10.48 - 10.5}{0.237 / \sqrt{15}}\right| = 0.327,$$

t分布表

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(14) = 2.1448 > |t| = 0.327$,

故接受 H_0, 认为金属棒的平均长度 无显著变化.

3. μ为未知, 关于σ^2的检验(χ^2 检验)

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2均为未知,

$X_1, X_2,\cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本,

1° 假设 H_0 : $\sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

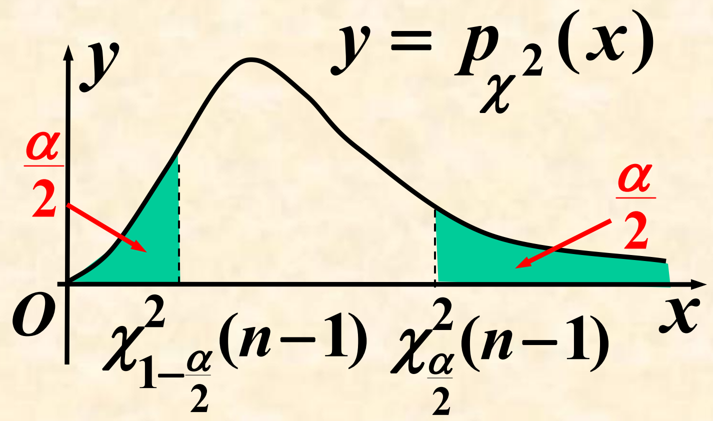
其中 σ_0 为已知常数.

2° 取检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2} \text{或} = \frac{nS_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$ (当H_0为真时)

3° 给定显著水平 α ($0< \alpha \le 0.05$)

查表得临界值：



$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\quad \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

$$P\{ \chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \}$$

$$= P\{ \chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \} = \frac{\alpha}{2},$$

拒绝域：

$$W_1' = \{ \chi^2 \mid \chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \} \cup \{ \chi^2 \mid \chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \},$$

4° 由样本值算出 χ^2 的值 χ_0^2,

若 $\chi_0^2 \in W_1'$, 则拒绝 H_0;

若 $\chi_0^2 \notin W_1'$, 则接受 H_0.

$$\chi^2 = \frac{(n-1){S_n^*}^2}{\sigma_0^2}$$

拒绝域: $W_1' = \{\chi^2 \mid \chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

$\cup \{\chi^2 \mid \chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$,

例3 某厂生产的某种型号的电池, 其寿命长期以来服从方差σ^2=5000 (小时²) 的正态分布, 现有一批这种电池, 从它生产情况来看, 寿命的波动性有所变化. 现随机的取26只电池, 测出其寿命的样本方差 s_n^{*2}=9200(小时²). 问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化?

$(\alpha = 0.02)$

解 要检验假设 $H_0: \sigma^2 = 5000, \quad H_1: \sigma^2 \neq 5000,$

$$n = 26, \quad \alpha = 0.02, \quad \sigma_0^{\ 2} = 5000,$$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.01}(25) = 44.314,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.99}(25)=11.524,$$

拒绝域为: $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^{\,2}}\le 11.524$, 或 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^{\,2}}\ge 44.314$.

因为 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^{\,2}}=\dfrac{25\times 9200}{5000}=46>44.314$,

所以拒绝 H_0,

认为这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化.

例4 (续例1)如果只假设切割长度服从正态分布，问该机切割的金属棒长度的标准差有无显著变化? $(\alpha = 0.05)$

解 因为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2均为未知,

要检验假设 $H_0: \sigma = 0.15$, $H_1: \sigma \neq 0.15$,

即 $H_0: \sigma^2 = 0.0225$, $H_1: \sigma^2 \neq 0.0225$,

$n = 15$, $\bar{x} = 10.48$, $\alpha = 0.05$, $s_n^{*2} = 0.056$,

因为 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^2} = \dfrac{14 \times 0.056}{0.0225} = 34.844$,

查表得 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(14)=5.629,$

$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(14)=26.119,$

于是 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^{\ 2}}=\dfrac{14\times 0.056}{0.0225}=34.844>26.119,$

所以拒绝 H_0,

认为该机切割的金属棒长度的标准差有显著变化.

例5 某厂生产的铜丝的折断力指标服从正态分布, 现随机抽取9根, 检查其折断力, 测得数据如下(单位:千克): 289, 268, 285, 284, 286, 285, 286, 298, 292. 问是否可相信该厂生产的铜丝的折断力的方差为20? ($\alpha = 0.05$)

解 按题意要检验 $H_0: \sigma^2 = 20$, $H_1: \sigma^2 \neq 20$,

$n = 9$, $\bar{x} = 287.89$, $s_n^{*2} = 20.36$,

查表得 $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18$, $\chi^2_{0.025}(8) = 17.5$,

于是 $\dfrac{(n-1)s_n^{*2}}{\sigma_0^2} = \dfrac{8 \times 20.36}{20} = 8.14$, $2.18 < 8.14 < 17.5$,

故接受 H_0,认为该厂生产铜丝的折断力的方差为20.

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,

$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

X与Y独立，样本$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$来自总体 X,

样本$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_1})$来自总体 Y.

(一) 总体均值的检验

1.已知 σ_1^2, σ_2^2 (用U检验法)

1° 假设: $H_0:\mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$,

2° 取检验的统计量为

$$U=(\overline{X}-\overline{Y})/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$ (当H_0成立时)

3° 取显著性水平为α. $P\{|U|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$

由 $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}$，查表可得 $u_{\frac{\alpha}{2}}$.

拒绝域： $W_1'=\{u \mid |u|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}$ $\left(u=(\bar{x}-\bar{y})/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

4° 由样本值算出U的值u，若$u\in W_1'$，则拒绝H_0;

若$u\notin W_1'$，则接受H_0.

例4 卷烟厂向化验室送去 A,B两种烟草,化验尼古丁的含量是否相同 ,从A,B中各随机抽取重量相同的5例进行化验,测得尼古丁的含量 (单位: mg)分别为

A:	24	27	26	21	24
B:	27	28	23	31	26

据经验知,两种烟草的尼古丁含量 均服从正态分布,且相互独立,A种的方差为5,B种的方差为8,取$\alpha = 0.05$,问两种烟草的尼古丁含 量是否有显著差异?

解 以X和Y分别表示A,B两种烟草的尼古丁含量，

则$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^{2)}$,且$X,Y$独立.

1° 假设$H_\circ:\mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

2° 取检验的统计量为

$$U=(\overline{X}-\overline{Y})/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sim N(0,1)$$ (当H_0成立时)

3° 给定$\alpha=0.05$,

由$\Phi(u_{0.025})=0.975$, 查表可得 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$

拒绝域：$W_1' = \{u \mid |u| \geq u_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96\}$

4° 作判断

依题设，有 $\sigma_1^2 = 5, \sigma_2^2 = 8, n_1 = n_2 = 5.$

由所给数据求得

$$\bar{x} = 24.4, \qquad \bar{y} = 27$$

$$u = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \frac{24.4 - 27}{\sqrt{\frac{5}{5} + \frac{8}{5}}} = -1.612$$

$\because \quad |u| = 1.612 < 1.96, \ \therefore$ 接受原假设H_0.

2. $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 但$\sigma^2$未知. (用$t$检验法)

1° 假设: $H_0:\mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$,

2° 取检验的统计量为

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$ (当H_0成立时)

其中 $$S_w^2=\frac{(n_1-1)S_{1n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{2n_2}^{*2}}{n_1+n_2-2}.$$

3° 给定显著水平 $\alpha\,(0<\alpha\le 0.05)$

$$P\{\,|T|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\,\}=\alpha,$$

查表可得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$.

拒绝域： $W_1'=\{t\mid |t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\,\}$

4° 由样本值算出 T 的值 t,

若 $t\in W_1'$, 则拒绝 H_0;

若 $t\notin W_1'$, 则接受 H_0.

(二) 总体方差的检验 (F检验法)

1° 假设: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$,

2° 取检验的统计量为

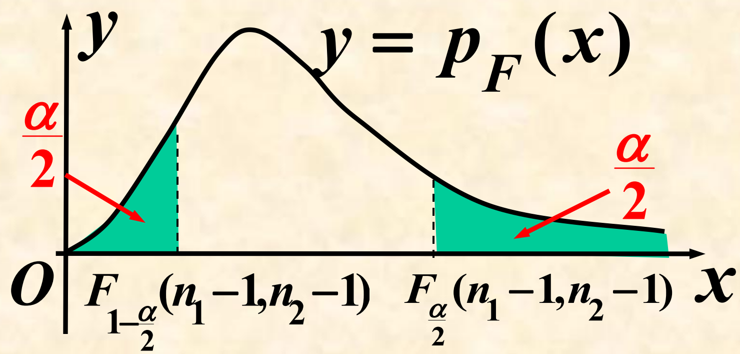
$$F=\frac{S_{1n_1}^{*2}\sigma_2^2}{S_{2n_2}^{*2}\sigma_1^2}=\frac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n_2}^{*2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$ (当H_0成立时)

3° 给定显著水平α ($0<\alpha\leq 0.05$)

查表得临界值: $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$, $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$.

$$P\{F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\}$$

$$= P\{F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\} = \frac{\alpha}{2},$$



拒绝域:

$$W_1' = \{f \mid f \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\}$$

$$\cup \{f \mid f \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\},$$

4° 作判断. 由样本值算出 F的值 f,

若 $t \in W_1'$, 则拒绝 H_0; 若$f \notin W_1'$, 则接受H_0.

例5 设X，Y分别表示 $70^\circ C$与$80^\circ C$下某种材料的断裂强力(单位：公斤)，X与Y相互独立，

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2),$$

为了考察温度对材料断 列强力的影响，在 $70^\circ C$与$80^\circ C$下，分别重复作了 8次试验，得数据如下：

$$70^\circ C：\bar{x} = 20.4, \quad s_1^{*2} = \frac{6.20}{7};$$

$$80^\circ C：\bar{y} = 19.4, \quad s_2^{*2} = \frac{5.80}{7},$$

其中 $\bar{x}$，s_1^{*2}分别表示总体X的样本均值与修正样本方差；

$\bar{y}$，s_2^{*2}分别表示总体Y的样本均值与修正样本方差，试问：

在$70^\circ C$与$80^\circ C$下，这种材料的断裂强力有无明显差异$(\alpha = 0.05)$?

$(u_{0.025} = 1.96, t_{0.025}(14) = 2.226, F_{0.025}(7,7) = 4.99)$

解 **(1) F 检验**

1° 检验假设 H_{01}: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2° 取统计量 $F = \dfrac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}} \sim F(7,7)$

3° 给定 $\alpha = 0.05$, $F_{\frac{\alpha}{2}}(7,7) = F_{0.025}(7,7) = 4.99$

目录 上页 下页 返回 结束

$$F_{0.975}(7,7)=F_{1-\frac{\alpha}{2}}(7,7)=\frac{1}{F_{0.025}(7,7)}=\frac{1}{4.99}\approx 0.20$$

拒绝域：

$$W=\{F \mid F\le F_{0.975}(7,7)=0.20\text{或}F\ge F_{0.025}(7,7)=4.99\}$$

4° 由样本值计算 F的观察值 f：

$$f=\frac{s_1^{*2}}{s_1^{*2}}=\frac{6.20/7}{5.80/7}\approx 1.07$$

5° 检验：$\because\ 0.20<f<4.99,\quad f\notin W$

$\therefore$ 接受假设 H_{01}：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$,

目录 上页 下页 返回 结束

(2) t 检验

1° 检验假设 H_{02}： $\mu_1 = \mu_2$， H_2： $\mu_1 \neq \mu_2$

2° 取统计量

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y})}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{7S_1^{*2} + 7S_2^{*2}}} \cdot \sqrt{56}$$

$$\sim t(n_1 + n_2 - 2) = t(14)$$

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^{*2} + (n_2 - 1)S_2^{*2}}{n_1 + n_2 - 2}$. $(n_1 = n_2 = 8)$

3° 给定 $\alpha = 0.05$, $t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(14)=2.226$,

拒绝域: $W = \{T \mid |T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(14) = 2.226\}$

4° 由样本值计算 T的观察值 t:

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{7s_1^{*2}+7s_2^{*2}}}\cdot\sqrt{56}=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{s_1^{*2}+s_2^{*2}}}\cdot 2\sqrt{2} \approx 2.1602$$

5° 检验: $\because \quad |t| = 2.1602 < t_{0.025}(14) = 2.226$,

$\therefore$ 接受假设 H_{02},

即在$70^\circ C$与$80^\circ C$下, 这种材料的断裂强 力无明显差异 $(\alpha = 0.05)$.

例6 分别用两个不同的计算机系统检索10个资料，测得平均检索时间及方差(单位:秒)如下：

$$\bar{x} = 3.097,\quad \bar{y} = 3.179,\quad {s_x^*}^2 = 2.67,\quad {s_y^*}^2 = 1.21,$$

假定检索时间服从正态分布，问这两系统检索资料有无明显差别？$(\alpha = 0.05)$

解 根据题中条件，首先应检验方差的齐性.

假设 $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2,\quad H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2.$

$$F_{0.025}(9,\ 9) = 4.03,\quad F_{0.975}(9,\ 9) = 0.248,$$

取统计量 $F = \dfrac{{S_x^*}^2}{{S_y^*}^2}$，$f = \dfrac{2.67}{1.21} = 2.12,$

$$0.248 < f = 2.12 < 4.03,$$

故接受 H_0，认为 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$.

再验证 $\mu_x = \mu_y$,

假设 $H_0: \mu_x = \mu_y$, $H_1: \mu_x \neq \mu_y$.

取统计量 $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$,

其中 $S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^{*2} + (n_2 - 1)S_2^{*2}}{n_1 + n_2 - 2}$.

当H_0为真时, $T \sim t(n_1+n_2-2)$.

$n_1=10, \quad n_2=10, \quad t_{0.05}(18)=2.101,$

因为 $t=\dfrac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{3.097-2.179}{\sqrt{\dfrac{9(2.67+1.21)}{18}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{10}}}$

$=1.436<2.101,$ 故接受 H_0,

认为两系统检索资料时间无明显差别.

三、基于成对数据的检验（t检验）

有时为了比较两种产品, 或两种仪器, 两种方法等的差异, 我们常在相同的条件下作对比试验, 得到一批成对的观察值. 然后分析观察数据作出推断. 这种方法常称为**逐对比较法**.

例1　有两台光谱仪I_x , I_y ,用来测量材料中某种金属的含量, 为鉴定它们的测量结果有无显著差异, 制备了9件试块(它们的成分、金属含量、均匀性等各不相同), 现在分别用这两台机器对每一试块测量一次, 得到9对观察值如下:

$x(\%)$	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
$y(\%)$	0.10	0.21	0.52	0.32	0.78	0.59	0.68	0.77	0.89
$d=x-y(\%)$	0.10	0.09	-0.12	0.18	-0.18	0.11	0.12	0.13	0.11

问能否认为这两台仪器的测量结果有显著的差异? $(\alpha=0.01)$

解　本题中的数据是成对的, 即对同一试块测出一对数据, 我们看到一对与另一对之间的差异是由各种因素, 如材料成分、金属含量、均匀性等因素引起的. [这也表明不能将光谱仪I_x对9个试块的测量结果(即表中第一行)看成是一个样本, 同样也不能将表中第二行看成一个样本, 因此不能用表7.3中第4栏的检验法作检验].

目录 上页 下页 返回 结束

而同一对中两个数据的差异则可看成是仅由这两台仪器性能的差异所引起的. 这样, 局限于各对中两个数据来比较就能排除种种其他因素, 而只考虑单独由仪器的性能所产生的影响.

表中第三行表示各对数据的差 $d_i = x_i - y_i$

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 来自正态总体 $N(\mu_d, \sigma^2)$,

这里 μ_d, σ^2均为未知. 若两台机器的性能一样,

则各对数据的差异 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 属随机误差,

随机误差可以认为服从正态分布, 其均值为零.

要检验假设 $H_0: \mu_d = 0,\ H_1: \mu_d \neq 0.$

设 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 的样本均值 $\bar{d}$, 修正样本方差 s_n^{*2},

按表7.3中第二栏中关于单个正态分布均值的t检验,
知拒绝域为

$$|t| = \left|\frac{\bar{d} - 0}{s_n^* / \sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1),$$

由 $n = 9,\ t_{\alpha/2}(8) = t_{0.005}(8) = 3.3554,\ \ \bar{d} = 0.06,$

$s_n^* = 0.1227,$ 可知 $|t| = 1.467 < 3.3554,$ 所以接受 H_0,

认为这两台仪器的测量结果无显著的差异.

四、内容小结

本节学习的正态总体均值的假设检验有:

1. 单个总体均值 μ 的检验 ——U检验;

2. 单个正态总体方差的检 验法 —— χ^2 检验法;

3. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验 —— t 检验;

4. 两个正态总体方差的检验法 —— F 检验法;

5. 基于成对数据的检验 —— t 检验;

正态总体均值、方差的检验法见下表

(显著性水平为 α)

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\ne\mu_0$	$u\ge u_\alpha$ $u\le -u_\alpha$ $\lvert u\rvert\ge u_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}}$	$\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$ $\mu\ne\mu_0$	$t\ge t_\alpha(n-1)$ $t\le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1-\mu_2\le\delta$ $\mu_1-\mu_2\ge\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ (σ_1^2,σ_2^2已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mu-\mu_0>\delta$ $\mu-\mu_0<\delta$ $\mu-\mu_0\ne\delta$	$u\ge u_\alpha$ $u\le -u_\alpha$ $\lvert u\rvert\ge u_{\alpha/2}$
4	$\mu_1-\mu_2\le\delta$ $\mu_1-\mu_2\ge\delta$ $\mu_1-\mu_2=\delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-2)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}$	$\mu-\mu_0>\delta$ $\mu-\mu_0<\delta$ $\mu-\mu_0\ne\delta$	$t\ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t\le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert\ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-1)$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	$\sigma^2 \le \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$	$\chi^2 \ge \chi_\alpha^2(n-1)$ $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \ge \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$或 $\chi^2 \le \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1,μ_2未知)	$F = \dfrac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$	$F \ge F_\alpha(n_1-1,n_2-1)$ $F \le F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ $F \ge F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或 $F \ge F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$
7	$\mu_D \le 0$ $\mu_D \ge 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \ne 0$	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$

附表7.1

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2已知)	$Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu \ne \mu_0$	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert \ge z_{\alpha/2}$
2	$\mu \le \mu_0$ $\mu \ge \mu_0$ $\mu = \mu_0$ (σ^2未知)	[illegible]	$\mu > \mu_0$ [illegible]	$t \ge t_\alpha(n-1)$ $t \le -t_\alpha(n-1)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n-1)$
3	$\mu_1-\mu_2 \le \delta$ $\mu_1-\mu_2 \ge \delta$ $\mu_1-\mu_2 = \delta$ (σ_1^2,σ_2^2已知)	[illegible]	[illegible]	$z \ge z_\alpha$ $z \le -z_\alpha$ $\lvert z\rvert \ge z_{\alpha/2}$
4	$\mu_1-\mu_2 \le \delta$ $\mu_1-\mu_2 \ge \delta$ $\mu_1-\mu_2 = \delta$ ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知)	$t=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-2)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\mu-\mu_0 > \delta$ $\mu-\mu_0 < \delta$ $\mu-\mu_0 \ne \delta$	$t \ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $t \le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$ $\lvert t\rvert \ge t_{\alpha/2}(n_1+n_2-1)$

$$t \le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$$

附表7-2

$$F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \text{或}$$
$$F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$$

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
5	σ σ σ (			$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}(n-1)$ $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ $\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或 $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
6	$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2未知)	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \geq F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \leq F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$或 $F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$
7	$\mu_D \leq 0$ $\mu_D \geq 0$ $\mu_D = 0$ (成对数据)	$t = \dfrac{\overline{D}-0}{S_D/\sqrt{n}}$	$\mu_D > 0$ $\mu_D < 0$ $\mu_D \neq 0$	$t \geq t_{\alpha}(n-1)$ $t \leq -t_{\alpha}(n-1)$ $\|t\| \geq t_{\alpha/2}(n-1)$

第五章§3定理5.8的推论1

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\overline{X}, S_n^{*2}$ 分别是样本均值和修正样本方差,则有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S_n^* / \sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

分别是这两个样本的方 差,则有

(1) $$\frac{S_1^{*2}/S_2^{*2}}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1);$$

(2) 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$时,

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-1)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}$, $S_w=\sqrt{S_w^2}$.

t分布表a $\quad P\{t(n) > t_{\alpha}(n)\} = \alpha$

n	α=0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	[illegible]	[illegible]	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	[illegible]	[illegible]	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	[illegible]	[illegible]	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	[illegible]	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	[illegible]	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208

2.1448

例2 有甲、乙两台机床加工相同的产品, 从这两台机床加工的产品中随机地抽取若干件, 测得产品直径(单位:*mm*)为

机床甲: 20.5, 19.8, 19.7, 20.4, 20.1, 20.0, 19.0, 19.9

机床乙: 19.7, 20.8, 20.5, 19.8, 19.4, 20.6, 19.2,

试比较甲、乙两台机床加工的产品直径有无显著差异? 假定两台机床加工的产品直径都服从正态分布, 且总体方差相等. $(\alpha = 0.05)$

解 依题意, 两总体 X 和 Y 分别服从正态分布

$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$, μ_1, μ_2, σ^2均为未知,

需要检验假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1:\mu_1\neq\mu_2$.

$$n_1=8,\quad \bar{x}=19.925,\ s_1^{*2}=0.216,$$

$$n_2=7,\quad \bar{y}=20.000,\quad s_2^{*2}=0.397,$$

且 $s_w^{\ 2}=\dfrac{(8-1)s_1^{*2}+(7-1)s_2^{*2}}{8+7-2}=0.547,$

查表可知 $t_{0.05}(13)=2.160,$

$t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{7}}}=-0.265<2.160$，所以接受 H_0，

即甲、乙两台机床加工的产品直径无显著差异.

例4 某砖厂制成两批机制红砖, 抽样检查测量砖的抗折强度(公斤), 得到结果如下:

第一批: $n_1 = 10,\ \bar{x} = 27.3,\ S_1^* = 6.4;$

第二批: $n_2 = 8,\ \bar{y} = 30.5,\ S_2^* = 3.8;$

已知砖的抗折强度服从正态分布, 试检验:

(1)两批红砖的抗折强度的方差是否有显著差异?

(2)两批红砖的抗折强度的数学期望是否有显著差异? (均取$\alpha = 0.05$)

解 (1) 检验假设: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

用 F 检验法， 当 H_0 为真时，

统计量 $F=\dfrac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\sim F(n_1-1,\ n_2-1)$，

查表8-1知拒绝域为

$F\geq F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)$ 或 $F\leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)$，

由 $n_1=10, n_2=8, S_1^{*2}=40.96, S_2^{*2}=14.44,$

$$F_{0.025}(9,7)=4.82,\quad F_{0.975}(9,7)=\frac{1}{F_{0.025}(7,9)}=0.283,$$

得 $F=\dfrac{40.96}{14.44}=2.837$, 显然 $0.283<2.837<4.82$,

所以接受 H_0, 认为抗折强度的方差没有显著差异.

(2) 检验假设: $H_0:\mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$

用 t 检验法, 当 H_0 为真时,

$$\text{统计量 } t=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中$S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-1)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}$.

查表7.3知拒绝域为 $|t|\geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$

由$t_{0.025}(10+8-2)=t_{0.025}(16)=2.1199$,

$$S_w^2=\frac{9\times 40.96+7\times 14.44}{16}=29.3575,\quad S_w=5.418,$$

得$|t|=\dfrac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\dfrac{|27.3-30.5|}{5.418\times 0.474}=1.245<2.1199$,

所以接受H_0,认为抗折强度的期望无显著差异.