集合上的运算

1、并、交、差、补等运算

2、集合恒等式

运算

定义 设A和B是集合。

(a) "并" $A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$

(b) "交" $A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$

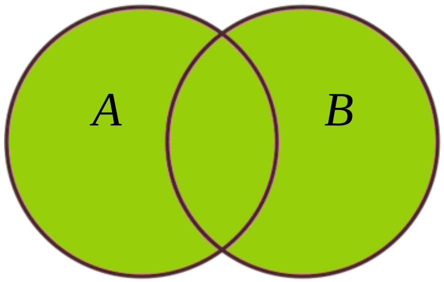
(c) "差" $A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$

(d) "补" $\sim A = U-A$ U为全集

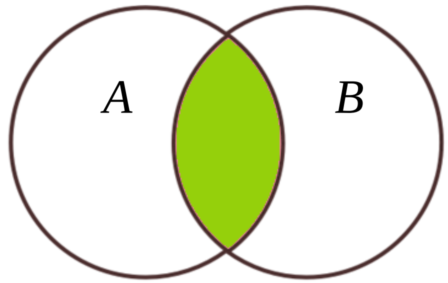
(e) "对称差" $A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$

环和 $A\oplus B = (A\cup B)-(A\cap B)$

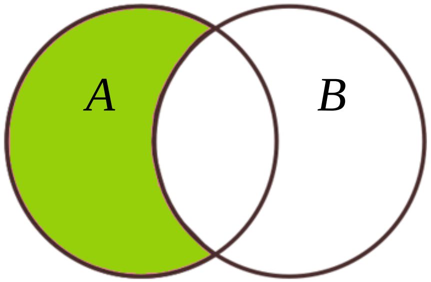
文氏图



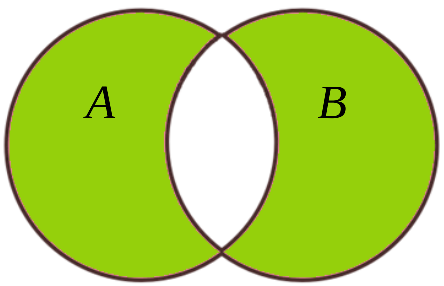
$A \cup B$



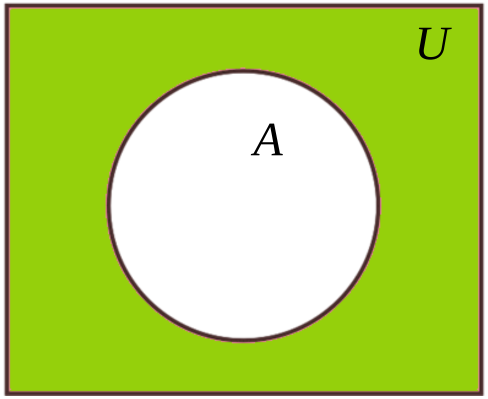
$A \cap B$



$A - B$



$A \oplus B$



$\sim A$

集合恒等式

集合算律

1. 只涉及一个运算的算律：

   交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$	$A\oplus B=B\oplus A$
结合	$(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$	$(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$
幂等	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$	

集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

	$\cup$与$\cap$
分配	$A\cup(B\cap C)=$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$
吸收	$A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$

3．涉及补运算的算律：

DM律，双补律

	$-$	$\sim$
D.M律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双补		$\sim\sim A=A$

4. 涉及全集和空集的算律：

互补律、零一律、同一律、否定律

矛盾律 排中律

	$\varnothing$	E
互补律	$A\cap\sim A=\varnothing$	$A\cup\sim A=E$
零一律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\varnothing=E$	$\sim E=\varnothing$

证明方法

证明方法：**谓词演算法、集合等式置换法**

谓词演算证明法的书写规范 (以下的X和Y代表集合公式)

(1) 证$X \subseteq Y$

任取x， $x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

(2) 证$X = Y$

方法一 分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$

方法二 任取x，$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

集合等式的证明

方法一：谓词演算法

例1 证明 $A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证 任取x,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$$ 吸收律

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

例2 证明 $A-B = A\cap\sim B$

证 任取x,

$$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B \Leftrightarrow x\in(A\cap\sim B)$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$

等式置换法

例3 假设交换律、分配律、同一律、零一律已经成立，证明吸收律.

证

$$
\begin{aligned}
& A\cup(A\cap B) \\
={}& (A\cap E)\cup(A\cap B) && \text{（同一律）} \\
={}& A\cap(E\cup B) && \text{（分配律）} \\
={}& A\cap(B\cup E) && \text{（交换律）} \\
={}& A\cap E && \text{（零一律）} \\
={}& A && \text{（同一律）}
\end{aligned}
$$

等式置换法

- **补的唯一性**
- 设A和B是论述域U的子集,那么B=~A当且仅当$A\cup B=U$和$A\cap B=\phi$。
- 证：（充分性）$B=U\cap B=(A\cup \sim A)\cap B$

$=(A\cap B)\cup(\sim A\cap B)=\phi\cup(\sim A\cap B)$

$=(\sim A\cap A)\cup(\sim A\cap B)$

$=(\sim A\cup(\sim A\cap B))\cap(A\cup(\sim A\cap B))$

$=\sim A\cap((A\cup\sim A)\cap(A\cup B))$

$=\sim A\cap(A\cup B)=\sim A\cap U=\sim A$

作业

每一松树都是针叶树，每一冬季落叶的树都非针叶树，所以，每一冬季落叶的树都非松树。

设P(x): x是松树，Q(x): x是针叶树，R(x): x是冬季落叶的树。 符号化：

$$\frac{\forall x(P(x) \to Q(x)), \forall x(R(x) \to \neg Q(x))}{\therefore \forall x(R(x) \to \neg P(x))}$$

作业

(1)	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	P
(2)	$P(y) \to Q(y)$	$T,(1),US$
(3)	$\neg Q(y) \to \neg P(y)$	$T,(2),E_{24}$
(4)	$\forall x(R(x) \to \neg Q(x)$	P
(5)	$R(y) \to \neg Q(y)$	$T,(4),US$
(6)	$R(y) \to \neg P(y)$	$T,(3),(5),I_6$
(7)	$\forall x(R(x) \to \neg P(x))$	$T,(6),UG$

课后作业

- 徐书 **57页 3、4、7、8、9**
  58页14、18、19