第八章 图论原理

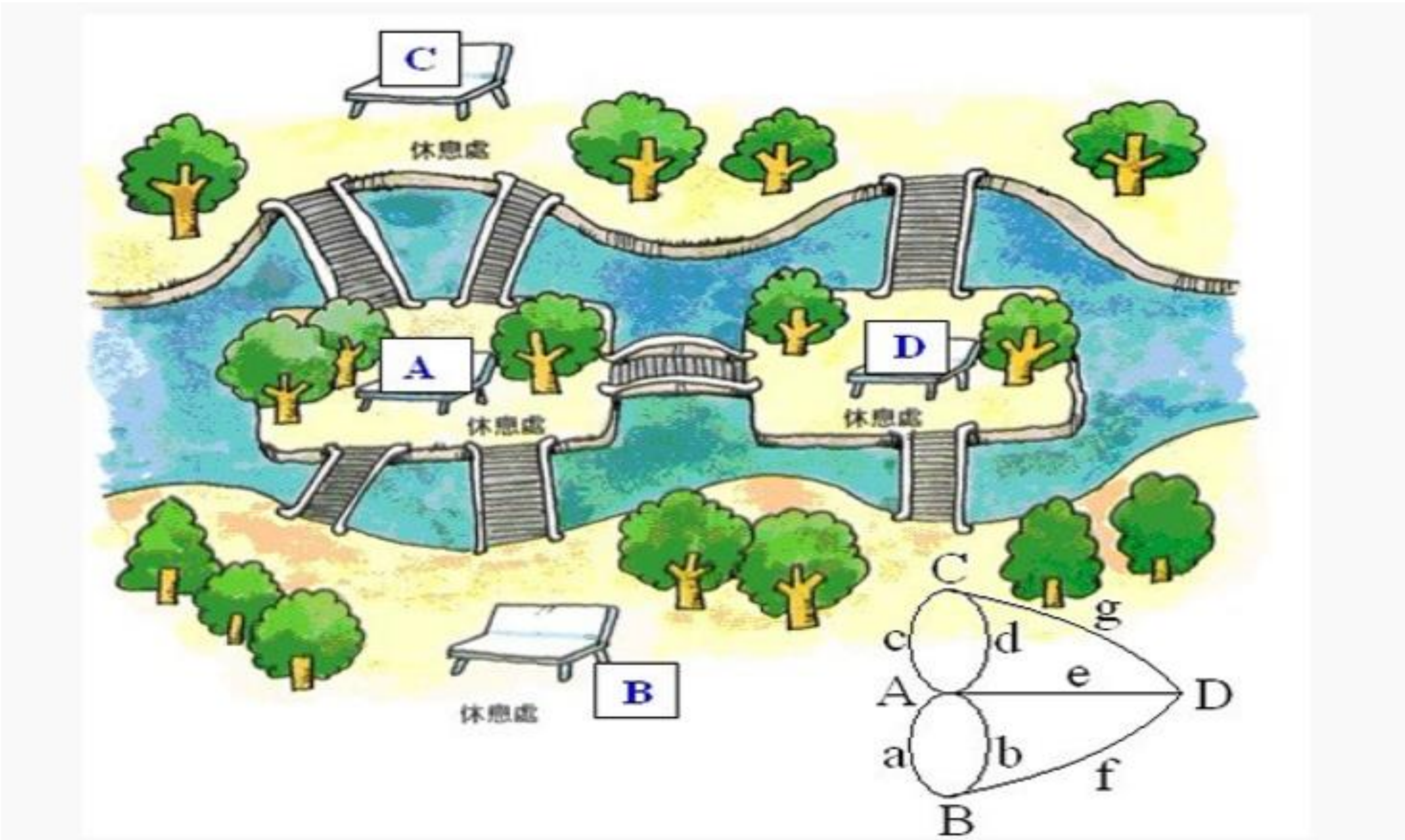
图论是用图的方法研究客观世界的一门科学；

用结点表示事物，用边表示事物间的联系，结点和边构成的图表示所研究的客观对象；

图论中所关注的并不是图的几何状态，而是其结构特性；

历史背景：18世纪的哥尼斯堡七桥问题与欧拉图

哥尼斯堡七桥问题



主要内容

- 图
- 通路、回路与图的连通性
- 图的矩阵表示
- 欧拉图
- 哈密顿图

8.1 图的基本概念

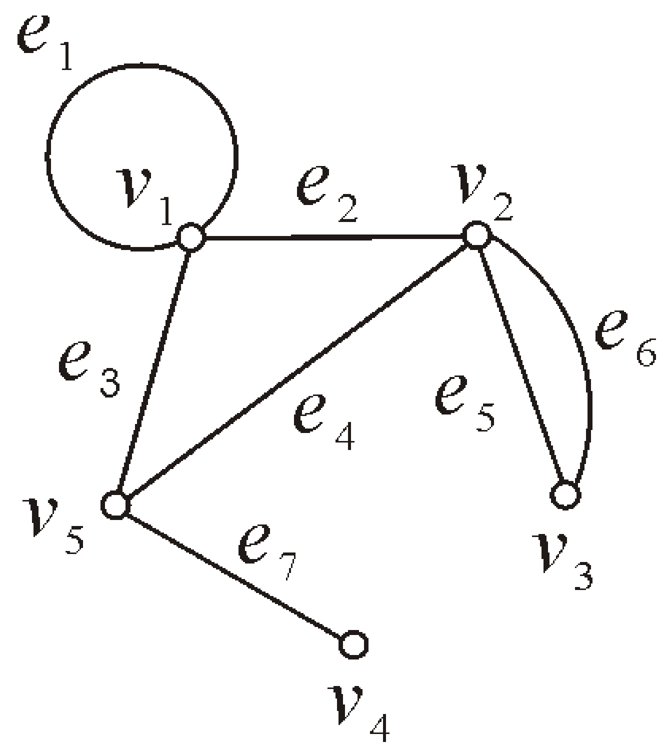
定义8.1 无向图$G = <V,E>$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为**顶点**

(2) E为边的集合，其元素称为**无向边**

每条边可用一个结点对表示

实例



设

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

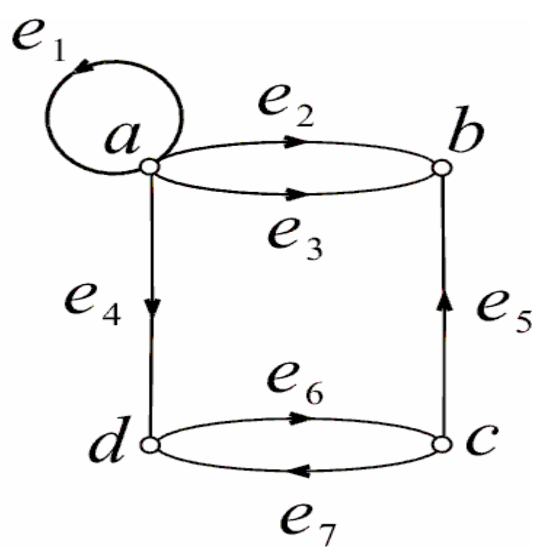
$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

则 $G = <V,E>$为一无向图

有向图

定义8.2 有向图D=<V,E>, 只需注意E是$V\times V$ 的多重子集

图2表示的是一个有向图，试写出它的V 和 E



相关概念

1. 图

① 可用G泛指图（无向的或有向的）

② $V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$

③ 顶点数称为图的阶， n个顶点的图称作n阶图

2. 有限图

3. 无边的图称为零图，n 阶零图记为N_n，1阶零图称为平凡图

4. 顶点集为空集称为空图——$\varnothing$

多重图与简单图

定义8.3

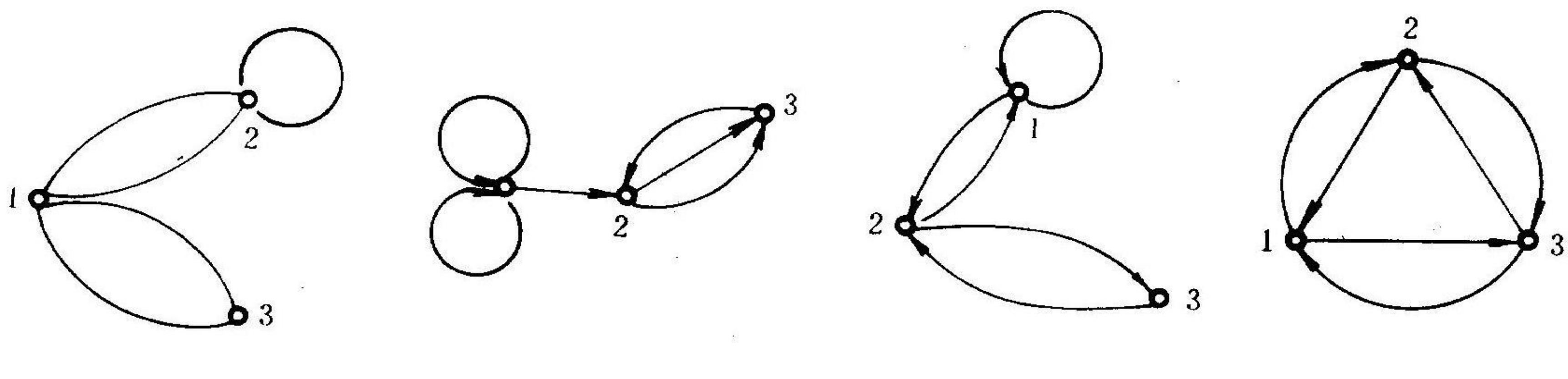
(1) 无向图中的平行边及重数(两点之间有多条边)

(2) 有向图中的平行边及重数（注意方向性）

(3) 多重图(包含多重边的图)

(4) 简单图(不含平行边也不含环)

成都到西安有多少条路可以通行；繁忙的通信结点间通常架设多条光纤线路



(a) (b) (c) (d)

顶点的度数

定义8.4

(1) 设G=<V,E>为无向图, $\forall v \in V$, $d(v)$——v的度数(次数), 简称度: v作为边的端点的次数

(2) 设D=<V,E>为有向图, $\forall v \in V$,

$d^+(v)$——v的出度(引出次数)

$d^-(v)$——v的入度(引入次数)

$d(v)$——v的度或度数$= d^+(v)+d^-(v)$

(3) 最大度$\Delta(G)$ $\Delta(D)$, 最小度$\delta(G)$ $\delta(D)$

- 交通运输网络中，关联边的数量较多的结点通常较为繁忙。
- 通信网络中，关联边的数量较多的结点通常是网络的关键结点，一旦出现故障，对整个网络通信的影响非常大。

握手定理

定理8.1 设$G=\langle V,E\rangle$为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

证 G中每条边 (包括环) 均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m 条边共提供 $2m$ 度.

此定理是欧拉1736年给出的，他形象地描述为：许多人见面握手，两只手握在一起，被握过手的总次数为偶数。

定理8.2 设$D=\langle V,E\rangle$为任意有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

握手定理推论

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证 设$G=<V,E>$为任意图，令

$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)$为奇数$\}$

$V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)$为偶数$\}$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于$2m$, $\sum_{v\in V_2}d(v)$均为偶数，所以 $\sum_{v\in V_1}d(v)$为偶数，但因为V_1中顶点度数为奇数，所以$|V_1|$必为偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问G至少有几个顶点？

解 本题的关键是应用握手定理.

设除3度与4度顶点外，还有x个顶点$v_1, v_2, \ldots, v_x$， 则

$$d(v_i) \leq 2，\ i=1, 2, \ldots, x，$$

于是得不等式

$$32 \leq 24+2x$$

得 $x \geq 4$, 阶数 $n \geq 4+4+3=11$.

图的同构

定义8.5 设$G_1=\langle V_1,E_1\rangle$, $G_2=\langle V_2,E_2\rangle$为两个无向图(两个有向图)，若存在双射函数$f:V_1\to V_2$, 对于$v_i,v_j\in V_1$,

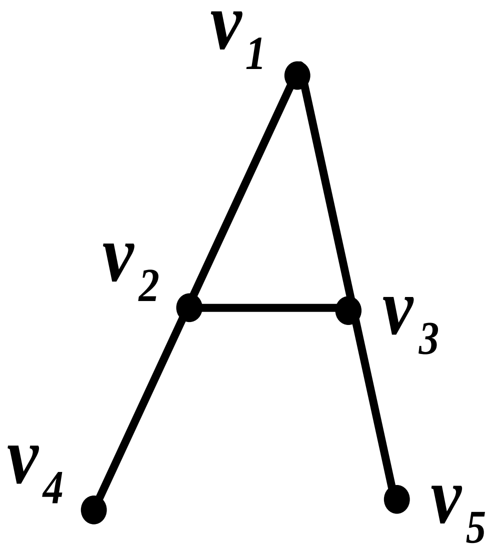
$$(v_i,v_j)\in E_1 \text{ 当且仅当 } (f(v_i),f(v_j))\in E_2$$

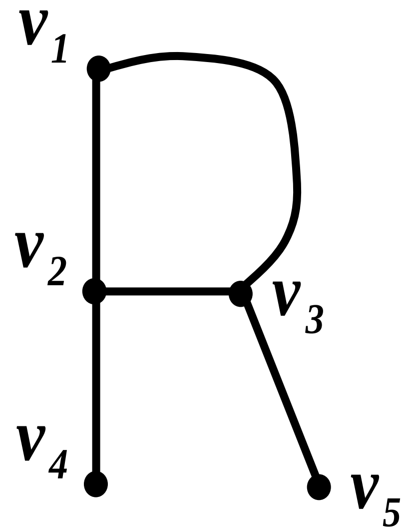
$$(\langle v_i,v_j\rangle\in E_1 \text{ 当且仅当 } \langle f(v_i),f(v_j)\rangle\in E_2\,)$$

并且, (v_i,v_j)（$\langle v_i,v_j\rangle$）与 $(f(v_i),f(v_j))$（$\langle f(v_i),f(v_j)\rangle$）的重数相同，则称$G_1$与$G_2$是同构的，记作$G_1 \simeq G_2$.

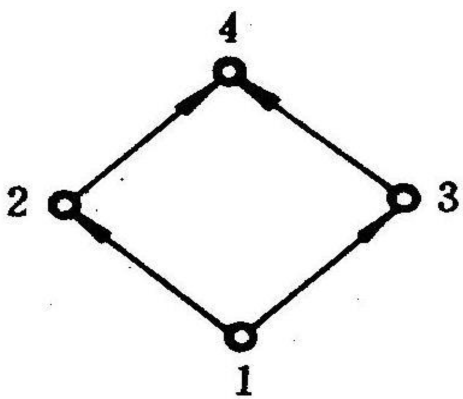
- 图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性，即等价.
- 能找到多条同构的必要条件，但它们全不是充分条件:
  - ① 边数相同，顶点数相同;
  - ② 度数相同;
  - 若破坏必要条件，则两图不同构
- 判断两个图同构是个难题

实例

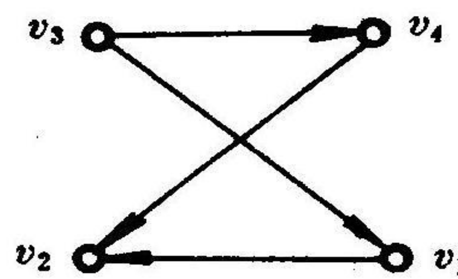




同构

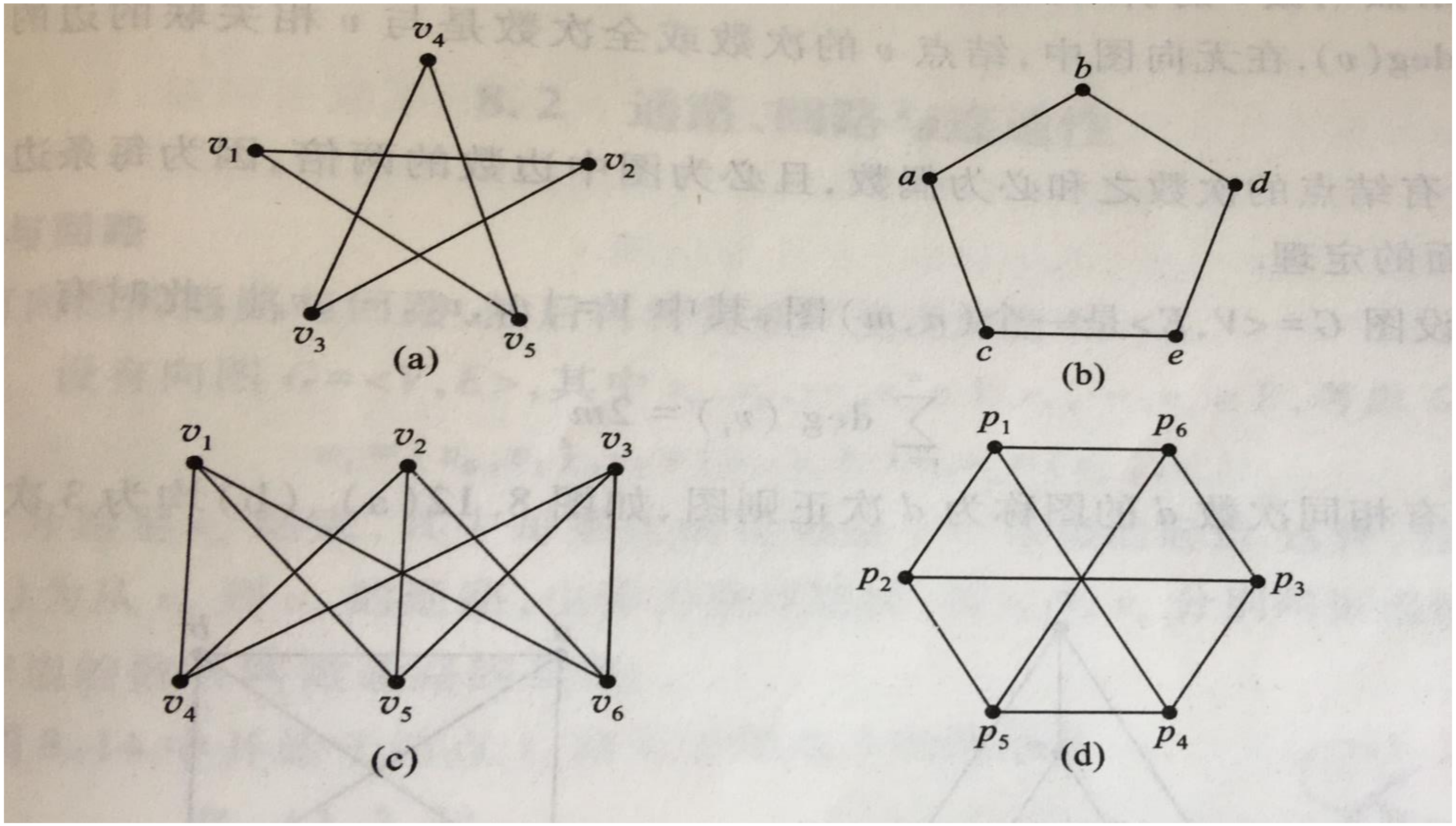


(a)



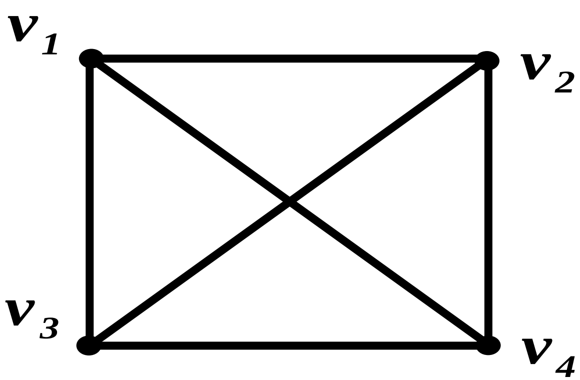
(b)

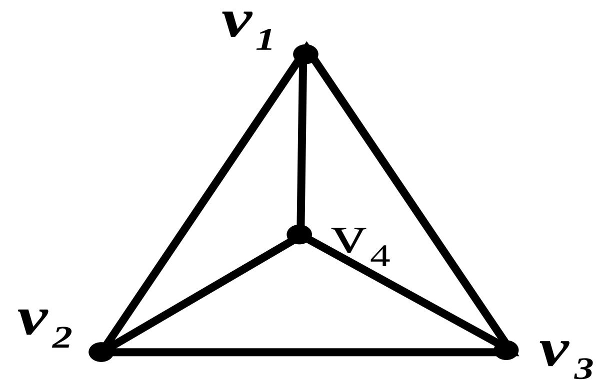
实例



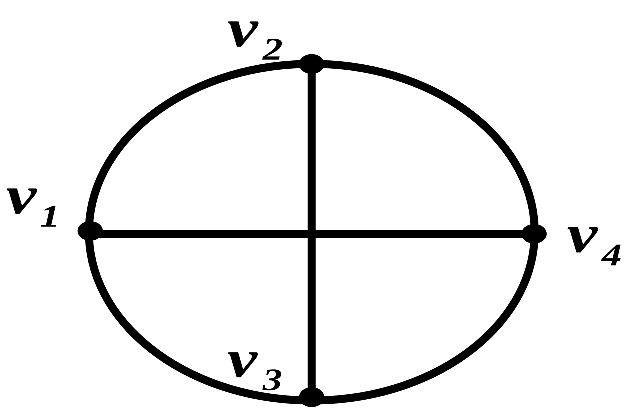
a，b同构；c，d 同构

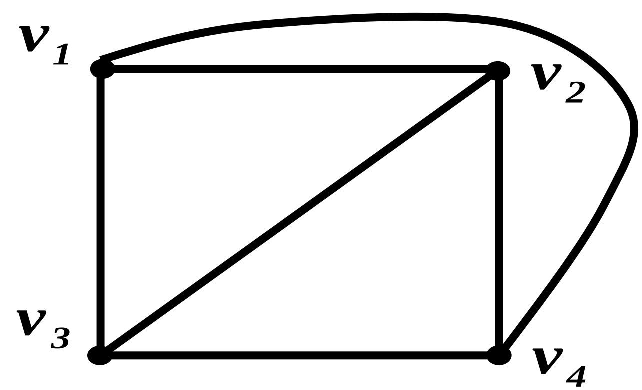
实例



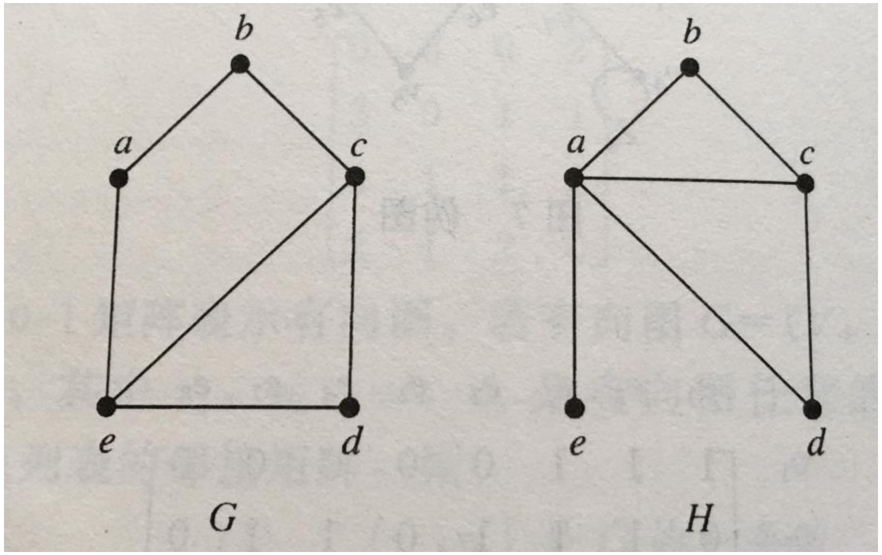


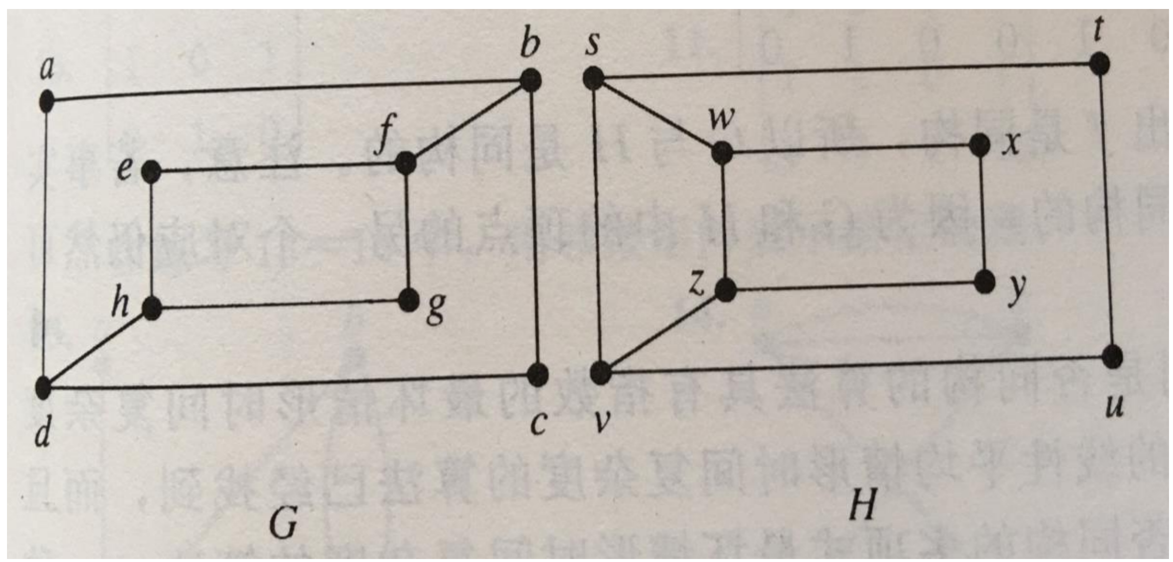
同构





实例





不同构

n 阶完全图与竞赛图

定义8.6

(1) n (n≥1) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n.

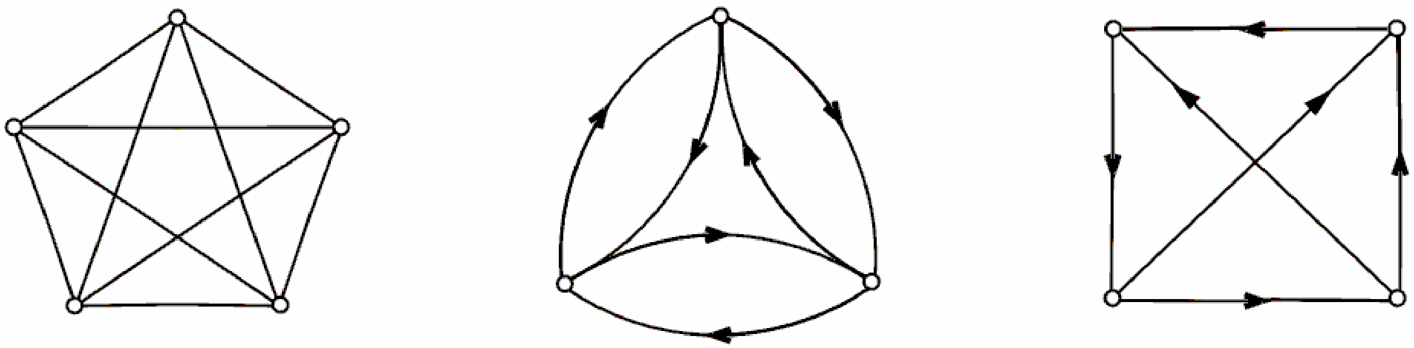
简单性质：边数 $m=\frac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

(2) n (n≥1)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图. (有时根据需要包括带环的)

简单性质： $m=n(n-1), \Delta=\delta=2(n-1), \Delta^+=\delta^+=n-1$

(3) n (n≥1) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

n 阶 *k* 正则图



(1)　　(2)　　(3)

(1)为K_5，　(2)为3阶有向完全图，　(3)为4阶竞赛图.

定义8.7　*n* 阶*k*正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图

简单性质：边数（由握手定理得）$m=\dfrac{nk}{2}$

K_n是 $n-1$正则图

子图

定义8.8 $G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$

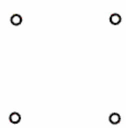
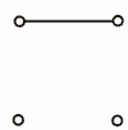
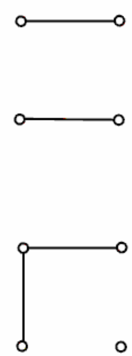
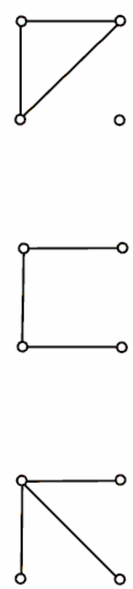
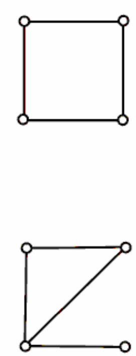
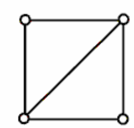
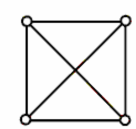
(1) $G'\subseteq G$ —— G'为G的子图，G为G'的母图

(2) 若$G'\subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

(3) 若$V'\subset V$或$E'\subset E$，称G'为G的真子图

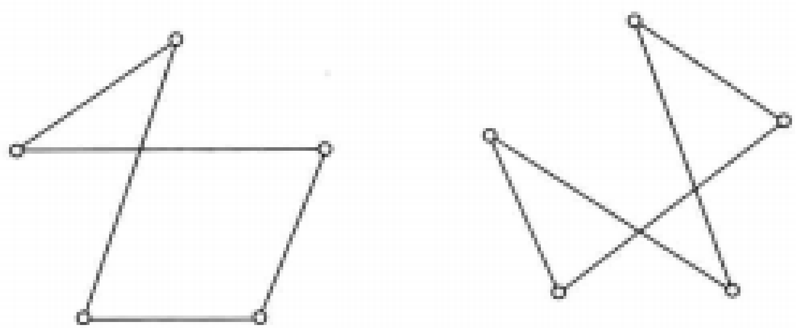
实例

例2 画出K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6
							

补图

定义8.9 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合导出的图，称为G的补图，记作 $\overline{G}$.



(a)　　(b)

8.2 通路与回路

定义8.10 给定无向标定图G，G中顶点与边的交替序列

$\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$，其中$v_{i-1}, v_i$ 是 e_i 的端点.

(1) 通路与回路：Γ为通路；若 $v_0=v_l$，Γ为回路. l 为长度.

(2) 简单通路与回路：所有边各异，Γ为简单通路，又若$v_0=v_l$，Γ为简单回路

(3) 基本(初级)通路与基本(初级)回路：Γ中所有顶点各异，所有边也各异，则称Γ为基本(初级)通路(路径)，又若除$v_0=v_l$，则称Γ为基本(初级)回路(圈)（基本回路一定是简单回路）

(4) 复杂通路与回路：有边重复出现

有向图中, 通路、回路及分类的定义与无向图相似, 只要注意有向边方向的一致性.

通路与回路的长度

定理8.3 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的基本通路（路径）.

定理8.4 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于n的基本回路.

图的连通性

无向图的连通性

(1) 顶点之间的连通关系：$G=<V,E>$为无向图

① 若 v_i 与 v_j 之间有通路，则 $v_i \sim v_j$

② 规定: $\forall v \in V$, $v \sim v$

③ ~是V上的等价关系 $R=\{<u,v> \mid u,v \in V$且$u \sim v\}$

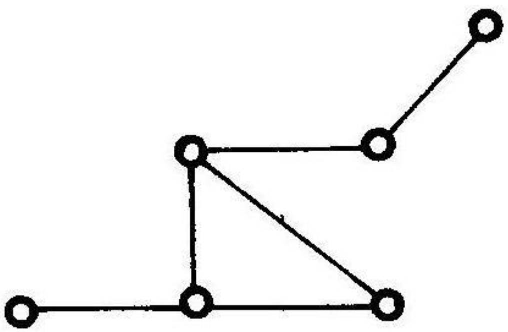
(2) G的连通性与连通分支

① 若$\forall u,v \in V$，$u \sim v$，则称G连通

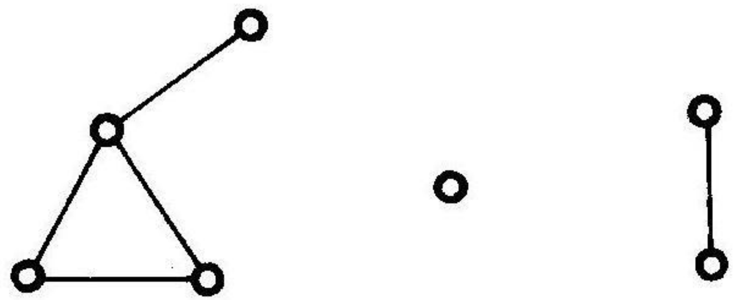
② $V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$，称$G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$为连通分支，其个数 $p(G)=k$ ($k \geq 1$)；

$k=1$，G连通

实例



(a)



(b)

有向图的连通性

定义8.11 $D=<V,E>$为有向图

$v_i \to v_j$（v_i 可达 v_j）——v_i 到v_j 有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$（v_i 与v_j 相互可达）

性质

$\to$ 具有自反性($v_i \to v_i$)、传递性

$\leftrightarrow$ 具有自反性、对称性、传递性

有向图的连通性及分类

定义8.12 $D=<V,E>$为有向图

D弱连通(连通)——基图为无向连通图

D单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j \vee v_j\to v_i$

D强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

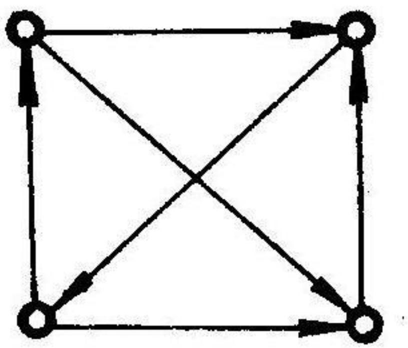
易知，强连通⇒单向连通⇒弱连通

判别法

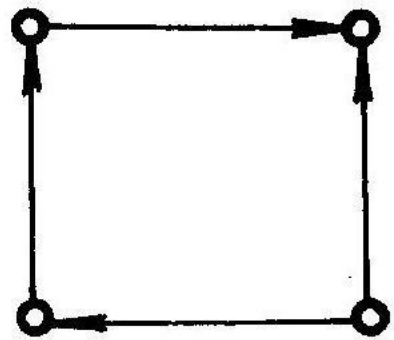
定理8.5 D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理8.6 D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

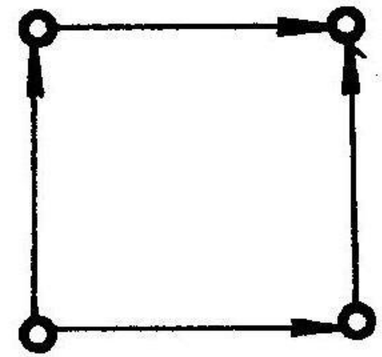
实例



(a)



(b)

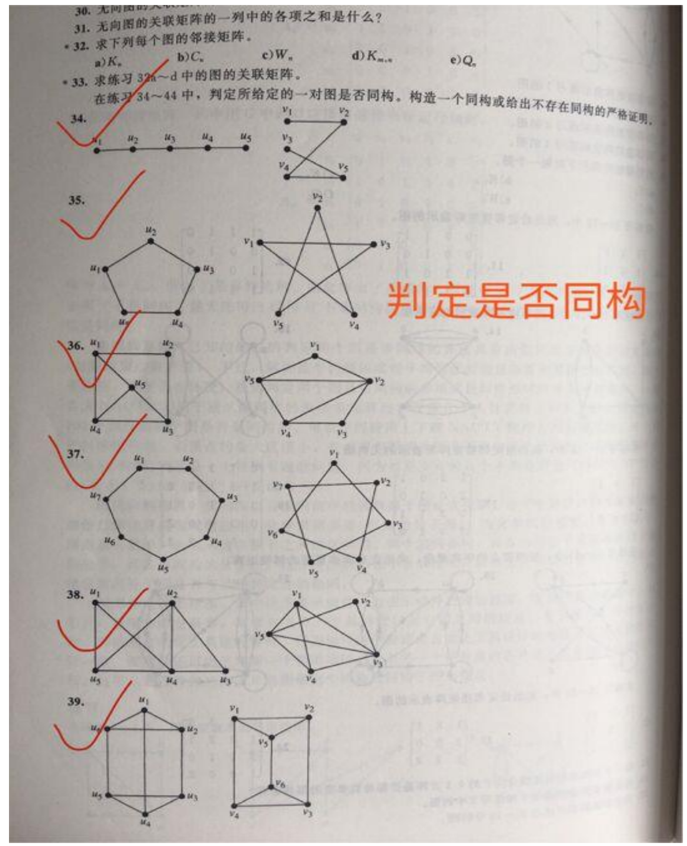


(c)

作业

徐 P152 6 10 11

P153 13



30. 无向图的关联……

31. 无向图的关联矩阵的一列中的各项之和是什么？

* 32. 求下列每个图的邻接矩阵。

a) K_n b) C_n c) W_n d) $K_{m,n}$ e) Q_n

* 33. 求练习 32a～d 中的图的关联矩阵。

在练习 34～44 中，判定所给定的一对图是否同构。构造一个同构或给出不存在同构的严格证明。

34.

35.

36.

37.

38.

39.