例 求下列矩阵的特征值与特征向量：

1） $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$；

解

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ -2 & -2-\lambda & 4\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2+r_3}{=\!=}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 2\\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda\\ 2 & 4 & -2-\lambda\end{vmatrix}\overset{c_3-c_2}{=\!=}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 4 & -6-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & -6-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2+5\lambda-14)=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-7$。

当$\lambda_1=\lambda_2=2$时，解方程组$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由于

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+2r_1}}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $x_1=-2x_2+2x_3$，基础解系

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故对应$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$的全部特征向量为

$$k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2\text{不全为}0$$

当$\lambda_3 = -7$时，解方程组$(\boldsymbol{A} + 7\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。由于

$$\boldsymbol{A} + 7\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 - 4r_3} \begin{pmatrix} 0 & -18 & -18 \\ 0 & 9 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-\frac{4}{9}r_2 \\ r_2\times(\frac{1}{9})}]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{r_3\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，基础解系 $\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$,

故对应 $\lambda_3=-7$ 的全部特征向量为

$$k\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\quad(k\neq 0)$$

2) $$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & -2 & -8\\ -4 & 0 & -1\end{pmatrix};$$

解 $$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 1\\ 4 & -2-\lambda & -8\\ -4 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+2)\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ -4 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

A的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$

当$\lambda_1=-2$时，解方程组$(A+2E)x=\mathbf{0}$，由于

上页 下页 返回

$$A+2E=\begin{pmatrix}5&0&1\\4&0&-8\\-4&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-5r_2]{\substack{r_3+r_2\\ r_2\times\frac{1}{4}}}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&11\\1&0&-2\\0&0&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{\substack{r_1\times\frac{1}{11}\\ r_2+2r_1\\ r_3+7r_1}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为$\begin{cases}x_1=0x_2\\x_3=0x_2\end{cases}$，基础解系$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

上页 下页 返回

故对应$\lambda_1=-2$的全部特征向量为

$$k\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad(k\neq 0)$$

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&-3&-8\\-4&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\times\frac{1}{2}]{\substack{r_2-2r_1\\r_3+2r_1}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&-3&-10\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-\frac{1}{3})}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{10}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

同解方程组为$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{10}{3}x_3 \end{cases}$，基础解系为$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$,

故对应$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$的全部特征向量为

$$l\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (l \neq 0)$$

3） $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$。

解 $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ -6 & -11 & -6-\lambda\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2+\lambda c_3}\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -\lambda^2-6\lambda-11 & -6-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+\lambda c_2}$$

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\lambda^3-6\lambda^2-11\lambda-6 & -\lambda^2-6\lambda-11 & -6-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6)=-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

注：整数根为常数项6的因子，而6的因子为：±1，±2，±3，±6；逐一代入验证。

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=-3$。

对应 $\lambda_1=-1$, 求解$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由于

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -6 & -11 & -5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$，基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$,

故对应 $\lambda_1=-1$的全部特征向量为

$$k_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\quad (k_1\neq 0)$$

对应 $\lambda_2=-2$，求解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由于

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\-6&-11&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{4}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{4}x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$，基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$，

故 $\lambda_2=-2$ 对应的全部特征向量为

$$k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\quad(k_2\neq 0)$$

对应 $\lambda_3=-3$，求解$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由于

$$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\-6&-11&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{9}\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{9}x_3\\x_2=-\frac{1}{3}x_3\end{cases}$，基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}$，

故对应 $\lambda_3=-3$ 的全部特征向量为

$$k_3\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}\quad(k_3\neq 0)$$

例 设A是3阶方阵，且

$$\det(A-E)=\det(A+2E)=\det(2A+3E)=0$$

则 $\det A=$ __**3**__，$\det A^*=$ __**9**__，$\det(2A^*-3E)=$ __**126**__

分析 由 $\det(A-E)=\det(A+2E)=\det(2A+3E)=0$

知A的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-\frac{3}{2}$

于是$\det A=3$。A^*的特征值为

$$\frac{\det A}{\lambda_1}=3，\quad \frac{\det A}{\lambda_2}=\frac{3}{-2}，\quad \frac{\det A}{\lambda_3}=\frac{3}{-\frac{3}{2}}=-2$$

所以$\det A^*=9$。又$2A^*-3E$的特征值为

$$2\times3-3=3，\quad 2\times(-\frac{3}{2})-3=-6，\quad 2\times(-2)-3=-7$$

故$\det(2A^*-3E)=126$。

上页 下页 返回

例 已知 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，求参数 a,b 和特征向量 $\boldsymbol{x}$ 对应的特征值。

解 由定义 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，即

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad 得\begin{cases}2-1-2=\lambda\\5+a-3=\lambda\\-1+b+2=-\lambda\end{cases}$$

解得 $a=-3, b=0, \lambda=-1$。

例 已知向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$是矩阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征向量，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

求常数k。

解 因为$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，即$\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，也即

$$\lambda\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

于是$\begin{cases}\lambda(k+3)=1\\ \lambda(2k+2)=k\\ \lambda(k+3)=1\end{cases}$，由方程1得 $\lambda=\dfrac{1}{k+3}$，代入方程2

整理得$k^2+k-2=0$，解得$\begin{cases}\lambda=1\\ k=-2\end{cases}$，$\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{4}\\ k=1\end{cases}$。

例 已知方阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明$\boldsymbol{A}$的特征值只可能是±1。

证 设$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。上式两边左乘$\boldsymbol{A}$得

$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，即$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}=\lambda^2\boldsymbol{x}$，或$(\lambda^2-1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

由 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 知 $(\lambda^2-1)=0$，故$\lambda=\pm1$。

例 证明 $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$与 $B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$的特征值相同，行列式相同，秩相同，但它们不相似。

证 因为 $\det(A-\lambda E)=(2-\lambda)^2=\det(B-\lambda E)$

所以A与B的特征值为2(2重)； $\det A=4=\det B$，

$\operatorname{rank} A=2=\operatorname{rank} B$。用反证法证明$A$不与$B$相似。

若有可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$。则由于$B=2E$，于是 $A=PBP^{-1}=P(2E)P^{-1}=2PP^{-1}=2E=B$

与已知条件矛盾，故A不与B相似。

例 设$\boldsymbol{A}$为2阶矩阵，α_1,α_2为线性无关的2维列向量，

$$\boldsymbol{A}\alpha_1=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$$

则$\boldsymbol{A}$的非零特征值为__1__。

解 应填1。因为

$$\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2)=(\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2)=(\boldsymbol{0},2\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$$

记$\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2)$，则$\boldsymbol{P}$可逆，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

即$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，从而它们有相同的特征值。

可求得$\boldsymbol{B}$的特征值为0和1，故$\boldsymbol{A}$的非零特征值为1。

例　问矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{pmatrix}$可否对角化？

若可以，试求相似变换矩阵P和相应的对角矩阵。

解　$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\-6&-11&-6-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=-(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=-3$，$\boldsymbol{A}$可对角化。

可求得对应 $\lambda_1=-1$的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$；

对应$\lambda_2=-2$的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2=(1,-2,4)^{\mathrm{T}}$；

对应$\lambda_3=-3$的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,-3,9)^{\mathrm{T}}$；

故相似变换矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}，使得 \ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

例 判定下列矩阵可否对角化？若可以，试求相似变换矩阵和相应的对角矩阵。

$$1)\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

解 可求得 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$

$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-7$。

当$\lambda_1=\lambda_2=2$时，解方程组$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由于

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3+2r_1}}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

法1 同解方程组为 $x_1=-2x_2+2x_3$，基础解系为

$$\boldsymbol{p}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}，\boldsymbol{p}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

法2 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=1,$

即对应于2重特征值2有两个线性无关的特征向量，故$\boldsymbol{A}$可对角化。

可求得对应$\lambda_3=-7$的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(-1,-2,2)^{\mathrm{T}}$。

故相似变换矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}，使得 \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -7\end{pmatrix}$$

2） $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & -2 & -8\\ -4 & 0 & -1\end{pmatrix}。$$

解 可求得 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$。

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，解方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于

$$A-E=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&-3&-8\\-4&0&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{10}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

法1 同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=-\frac{10}{3}x_3\end{cases}$，基础解系为 $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{10}{3}\\1\end{pmatrix}$,

法2 $\mathrm{rank}(A-2E)=2$,

对应2重特征值 1 只有一个线性无关的特征向量,

故A不可对角化。

上页 下页 返回

例 已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$，试求$\boldsymbol{A}^n$。

解 可求得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & -7\end{pmatrix}$，其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}，且 \ \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

故

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & (-7)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2^{n+3}+(-7)^n & -2^{n+1}+2(-7)^n & 2^{n+1}-2(-7)^n \\ -2^{n+1}+2(-7)^n & 5\times 2^n+4(-7)^n & 2^{n+2}-4(-7)^n \\ 2^{n+1}-2(-7)^n & 2^{n+2}-4(-7)^n & 5\times 2^n+4(-7)^n \end{pmatrix}$$

例 设三阶方阵A的特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_2=(3,2,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_3=(7,6,9)^{\mathrm{T}}$，求$\boldsymbol{A}$。

解 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，

可求得 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$，故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}6 & 4 & -5 \\ 6 & 5 & -6 \\ 6 & 5 & -5\end{pmatrix}$$

例 设A为n阶方阵，$1,2,\cdots,n$ 是A的n个特征值，求n阶行列式 $\det(A-(n+1)E)$的值。

解　法1　$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{pmatrix}$，于是

$$\det(A-(n+1)E)=\det(P\Lambda P^{-1}-(n+1)E)$$
$$=\det(\Lambda-(n+1)E)$$
$$=\begin{vmatrix}-n&&&\\&-(n-1)&&\\&&\ddots&\\&&&-1\end{vmatrix}=(-1)^n n!$$

上页 下页 返回

例 设A为n阶方阵，$1,2,\cdots,n$ 是A的n个特征值，求n阶行列式$\det(A-(n+1)E)$的值。

解 **法2** $A-(n+1)E$的特征值为

$$\lambda_1 = 1-(n+1),\ \lambda_2 = 2-(n+1),\ldots,\ \lambda_n = n-(n+1)$$

故 $$\det(A-(n+1)E) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = (-1)^n n!$$

法3 因为$\det(A-\lambda E) = (1-\lambda)(2-\lambda)\cdots(n-\lambda)$

所以$\det(A-(n+1)E) = (-1)^n n!$

例 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

相似，求x和y。

解 法1 $\boldsymbol{B}$的对角元是$\boldsymbol{A}$的特征值，利用特征值的性质得

$$\begin{cases}2+0+x=a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+y-1\\2y(-1)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det\boldsymbol{A}=-2\end{cases}$$

解得 $y=1, x=0$。

法2

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & x-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[\lambda^2-\lambda x-1]$$

特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=y$，$\lambda_3=-1$ 应是它的根。

代入 $\lambda_3=-1$ 得 $x=0$; 代入 $\lambda_2=y$ 得

$$(2-y)(y^2-1)=0,$$

解得 $y=2$，$y=1$ 或 $y=-1$，由

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=2+0+0=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+y-1$$

确定出 $y=1$。

法3 由 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\det(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E})$ 得

$$(2-\lambda)[\lambda^2-\lambda x-1]=(2-\lambda)(y-\lambda)(-1-\lambda)$$

比较同次幂系数得

$$\begin{cases} x+2=y+1 \\ 1-2x=-y+1 \\ -2=-2y \end{cases}$$

解得 $y=1, x=0$。

上页 下页 返回

例 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，α_1,α_2为$\boldsymbol{A}$的分别属于特征值$-1,1$ 的特征向量，向量α_3满足$\boldsymbol{A}\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$。

(1) 证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2) 令$\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$。

解 (1) 因为α_1,α_2是$\boldsymbol{A}$的属于不同特征值的特征向量，所以α_1,α_2线性无关。假设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

式$(*)$左乘$\boldsymbol{A}$得 $k_1\boldsymbol{A}\alpha_1+k_2\boldsymbol{A}\alpha_2+k_3\boldsymbol{A}\alpha_3=\boldsymbol{0}$

即 $-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=\boldsymbol{0}$

式$(*)$减上式得 $2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=\boldsymbol{0}$

由α_1,α_2线性无关知$k_1=k_3=0$，代入式$(*)$得

上页 下页 返回

$$k_2\alpha_2=\mathbf{0}$$

由于$\alpha_2\neq\mathbf{0}$，故 $k_2=0$，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

(2) 由(1)知矩阵 $\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，且

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,\boldsymbol{A}\alpha_3)$$

$$=(-\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

于是 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例 问矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 是否正交矩阵？为什么？

解 令 $\beta_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$

因为 $\|\beta_1\|=\sqrt{2}$, $\|\beta_2\|=\sqrt{3}$, $\|\beta_3\|=\sqrt{6}$, 不是单位向量

故$\boldsymbol{B}$不是正交矩阵。

注意到β_1,β_2,β_3 是两两正交的向量，构造矩阵

$$\boldsymbol{C}=(\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2,\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

则$\boldsymbol{C}$为正交矩阵。

例 设A是$2k+1$阶正交矩阵，且$\det \boldsymbol{A}=1$，证明1是A的特征值。

分析 要证明1是A的特征值，只要证明$\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=0$。

证 因为

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) &= \det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\det \boldsymbol{A} \\
&= \det(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \det(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) \\
&= (-1)^{2k+1}\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = -\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})
\end{aligned}
$$

所以$\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=0$，故1是$A$的特征值。

例 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶正交矩阵，且$\det \boldsymbol{A}=-\det \boldsymbol{B}$。试求$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$。

解 因为

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$$
$$= \det\boldsymbol{A}\det[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]\det\boldsymbol{B}$$
$$= -(\det\boldsymbol{B})^2\det(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = -\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$$

故$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 0$。

例 设λ 是正交矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，证明 $\frac{1}{\lambda}$也是$\boldsymbol{A}$的特征值。

证 法1 设$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，左乘$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$得$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$，可见$\frac{1}{\lambda}$也是$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的特征值。由于$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{A}$有相同的特征值，从而$\frac{1}{\lambda}$是$\boldsymbol{A}$的特征值。

法2 $\det(A-\frac{1}{\lambda}E)=\det(A-\frac{1}{\lambda}A^{\mathrm{T}}A)$

$$
\begin{aligned}
&=\det(E-\frac{1}{\lambda}A^{\mathrm{T}})\det A\\
&=\det[\frac{1}{\lambda}(\lambda E-A^{\mathrm{T}})]\det A\\
&=(\frac{1}{\lambda})^{n}\det(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}\det A\\
&=(\frac{1}{\lambda})^{n}\det(\lambda E-A)\det A\\
&=\frac{(-1)^{n}}{\lambda^{n}}\det A\det(A-\lambda E)=0
\end{aligned}
$$

故 $\frac{1}{\lambda}$ 是A的特征值。

例 设三阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为6,3,3，与特征值6对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，试求矩阵$\boldsymbol{A}$。

分析 这是一个对角化的反问题， 但是缺少对应于特征值3的特征向量。利用实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交这一性质，可利用与$\boldsymbol{p}_1$的正交条件求出对应于3的特征向量。

解 设特征值3对应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$$

则由 $$[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{x}]=x_1+x_2+x_3=0$$

得同解方程组 $$x_1=-x_2-x_3$$

解得基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

它们即是特征值3对应的两个线性无关的特征向量。

令 $$P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

则 $$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

故

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$$

例 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,将下列实对称矩阵化为对角矩阵:

1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

解 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$, $\boldsymbol{A}$的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-7$$

对于$\lambda_1=\lambda_2=2$, 求解$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 由于

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $x_1 = -2x_2 + 2x_3$

基础解系为 $\boldsymbol{p}_1 = (-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2 = (2,0,1)^{\mathrm{T}}$

它们是对应2的两个线性无关的特征向量。正交化得

$$\alpha_1 = \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_2 = \boldsymbol{p}_2 - \frac{[\boldsymbol{p}_2, \alpha_1]}{[\alpha_1, \alpha_1]}\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化得
$$\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3\sqrt{5}}\\ \frac{4}{3\sqrt{5}}\\ \frac{5}{3\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

对于$\lambda_3=-7$，求解$(\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由于

$$\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-18&-18\\0&9&9\\2&4&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，基础解系为 $\boldsymbol{p}_3 = (-1,-2,2)^{\mathrm{T}}$

单位化得 $\boldsymbol{q}_3 = (-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$。故正交矩阵

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ 使\ \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -7 \end{pmatrix}$$

2） $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$。

解 $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$=-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+4\lambda-4(2-\lambda)$

$=-\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8$

$=-(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4)$，

特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=4$

可求得对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

单位化得 $\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},\boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},\boldsymbol{q}_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

故正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\-1&2&-2\\2&2&1\end{pmatrix}, \text{使得 } \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&4\end{pmatrix}$$

例 设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为3，向量

$$\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},\ \alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解。

(1) 求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量；

(2) 求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$和对角矩阵Λ，使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\Lambda$。

解 (1) 由$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为3，得

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

即$\lambda_3=3$是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$是对应的特征向量，全体特征向量为 $k_3\alpha_3$ $(k_3\neq 0)$。

又由α_1,α_2 线性无关和

$$A\alpha_1 = \mathbf{0} = 0\alpha_1, \quad A\alpha_2 = \mathbf{0} = 0\alpha_2$$

知α_1,α_2是A对应2重特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$的特征向量；

全体特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$（$k_1,k_2$不全为0）。

(2) 对α_1,α_2正交化：

$$\xi_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$$

$$\xi_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2,\xi_1]}{[\xi_1,\xi_1]}\xi_1 = \alpha_2 - \frac{-3}{6}\xi_1 = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

再将ξ_1,ξ_2,α_3单位化： $\beta_1 = \dfrac{1}{\|\xi_1\|}\xi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$

$$\beta_2 = \frac{1}{\|\xi_2\|}\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \beta_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$$

则正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

使得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$$

其中

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回