预备知识

习题

1. 用区间表示下面的邻域:

(1) $U(0,1)$;　　(2) $U(1,\frac{1}{3})$;

(3) $\overset{\circ}{U}(0,2)$;　　(4) $\overset{\circ}{U}(1,\frac{1}{3})$.

解 (1) $(-1,1)$;　　(2) $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$;

(3) $(-2,0)\cup(0,2)$;　　(4) $(\frac{2}{3},1)\cup(1,\frac{4}{3})$.

2. 设 $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, $B=[-5,3]$, 写出 $A\cup B$、$A\cap B$、$A\setminus B$、$B\setminus A$、A^C 的表达式.

解 $A\cup B=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\cup[-5,3]=\mathbf{R}$;

$A\cap B=[(-\infty,2)\cup(2,+\infty)]\cap[-5,3]=\{x|-5\le x<2,\ 2<x\le 3\}$;

$A\setminus B=[(-\infty,2)\cup(2,+\infty)]\setminus[-5,3]=\{x|-\infty<x<-5,\ 3<x<+\infty\}$;

$B\setminus A=[-5,3]\setminus[(-\infty,2)\cup(2,+\infty)]=\{x|x=2\}$;

$A^C=\{x|x=2\}$.

3. (1) 设映射 $f:X=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\to\mathbf{R}$, $x\in X$, $f(x)=\tan x$, 求集合 X 的像 $f(X)$;

(2) 设映射 $f:[1,+\infty)\to\mathbf{R}$, $x\in[1,+\infty)$, $f(x)=\ln x$, 求集合 $[1,+\infty)$ 的像 $f([1,+\infty))$.

解 (1) $\because$ $f(x)=\tan x$, $x\in X=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$, $\therefore$ $f(x)=\tan x\in[-1,1]$, 即

$$f(X)=[-1,1].$$

(2) $\because$ $f(x)=\ln x$, $x\in[1,+\infty)$, $\therefore$ $f(x)=\ln x\in[0,+\infty)$, 即

$$f([1,+\infty))=[0,+\infty).$$

4. 讨论下列映射是属于单射、满射、还是一一映射?

(1) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}, f(x)=\sin x$;

(2) $f:\mathbf{R}\to[-1,1],\ x\in\mathbf{R},\ f(x)=\sin x$;

(3) $f:X=\{0,1,2,3\}\to Y=\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\}$, $x\in X$, $f(x)=\frac{x-1}{2}$;

(4) $f:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ x\in[-1,1],\ f(x)=\arcsin x$.

解 (1) 既非单射，也非满射. (2) 满射，但非单射.

(3) 单射，但非满射. (4) 一一映射.

5. 求下列映射的逆映射:

(1) $f:[0,\pi]\to[-1,1],\ x\in[0,\pi],\ f(x)=\cos x$;

(2) $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbf{R},\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ f(x)=\tan x$.

解 (1) 由 $f(x)=\cos x$ 得，$x=\arccos(f(x))$，所以所求逆映射为:

$$f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi],\ x\in[-1,1],\ f^{-1}(x)=\arccos x.$$

(2) 由 $f(x)=\tan x$ 得，$x=\arctan(f(x))$，所以所求逆映射为:

$$f^{-1}:\mathbf{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ x\in\mathbf{R},\ f^{-1}(x)=\arctan x.$$

6. 设两个映射

$$g:\mathbf{R}\to(0,+\infty),\ x\in\mathbf{R},\ g(x)=\mathrm{e}^x,$$

$$f:(0,+\infty)\to\mathbf{R},\ u\in(0,+\infty),\ f(u)=\ln u,$$

求这两个映射的复合映射.

解 $f[g(x)]=\ln\mathrm{e}^x=x$,

故所求复合映射为: $f\circ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R},\ f[g(x)]=x$.