第十一章 谓词逻辑

主要内容

- 谓词逻辑命题符号化
  - 个体、谓词、量词
  - 谓词逻辑命题符号化
- 函数
- 谓词逻辑公式
- 自由变元与约束变元
- 谓词逻辑等式与等式推理
- 蕴涵推理
- 谓词逻辑范式

命题逻辑的局限性：

“所有有成就的人都很刻苦”

“张三有成就”

“所以张三很刻苦”

众所周知，这个推理是正确的。但在命题逻辑中（$P \wedge Q$）$\rightarrow R$

却并非重言式,可知这个推理无法在命题逻辑的推理理论中得到证明。

需要对简单命题进行进一步分析！

原因：

简单命题是命题演算的基本单位，命题演算没有考虑到简单命题之间的内在联系和数量关系。

解决方法：

将简单命题再次细分，分析出个体词、谓词和量词，以克服命题演算的不足。

11.1基本概念：

1、个体词：可以独立存在的具体的或抽象的客体。

个体常元：具体的或特定，一般用a,b,c,…表示。

个体变元：抽象的或泛指的，一般用x,y,z,…表示。

个体域(论述域)：个体变项的取值范围。

全总个体域：由宇宙中一切事物构成的。

2、谓词：用来描述个体词性质或个体词之间相互关系的词。

当谓词与一个个体相联系时，刻划了个体性质；当与两个或两个以上个体相联系时，刻划个体之间的关系。

谓词常元：表示具体性质或关系的谓词。

谓词变元：表示抽象或泛指性质或关系的谓词。

例:

(1)3是有理数。 (2)x是无理数。

(3)阿杜与阿寺同岁。 (4)x与y有关系L。

其中“…是有理数”、“…是无理数”、“…与…同岁”、“…与…有关系L”均为谓词。上述可表示为:

(1)F(a) a:3 (2)G(x)

(3)H(a,b) a:阿杜。b:阿寺。

(4)L(x,y)

注意次序:李华是李兰的父亲 F(a,b)

F (x,y):x是y的父亲。

总结：

- 个体词和谓词一起构成了简单命题中的主谓结构。
- $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示含有n个个体变项的n元谓词，也可以看作是以个体域为定义域，以{0，1}为值域的n元函数或关系。
- 它不是命题。只有给P指定特定的谓词常项，给$x_1, x_2, \ldots, x_n$指定特定的个体常项后，它才成为命题。

11.2 量词

用谓词符号化下列命题：

(1)所有的大学生都要参加期末考试。

(2)有的大学生要参加期末考试。

它们的个体词与谓词均相同，唯一的区别在于个体的数量。为了区分，需引入量词。

- 对个体变元的数量进行限制。

量词的分类

量词分为两种：

全称量词：“一切”、“所有”、“凡”、“每一个”、“任意”等意，符号记作∀。

如：∀x 表示个体域内所有的x。

存在量词：“有一个”、“有的”、“存在”、“至少有一个”等，符号记作∃。

如:∃y表示个体域内有的y。

∃xP(x)：个体域里的有的个体具有性质P

或　个体域里存在着具有性质P的个体

例

(a) $\forall y(y < y+1)$ ；

(b) $\forall y(y=3)$ ；

(c) $\exists y(y < y+1)$ ；

(d) $\exists y(y=3)$;

如果论述域是整数, 则(a)是真, (b)是假, (c)和(d)是真。

谓词常元变为命题的方法

方法1. 将x取定一个值；

如 $F(x)$表示“x是质数”，那么$F(4)$是命题(假)

方法2. 将谓词量化。

总结：两方法都是给变元以约束；

量化后命题的真值与论述域有关；

例

(1) 人总是要死的;　　(2)有些人不怕死

设F(x):x是不怕死的; D(x): x是要死的; M(x):x是人。

若论述域是全人类, 则 ;

(1)符号化为　$\forall x D(x)$

(2)符号化为　$\exists x F(x)$

如果是全总个体域, 则分别为

$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$

$\exists x(M(x)\wedge F(x))$

特性谓词：

定义：使该个体从所给个体域里的其他事物中区别开来的谓词叫特性谓词

使用规则：当个体变元的取值范围是所给个体域的一部分时，需加入特性谓词

(1) 对全称量词, 特性谓词作为蕴含式之前件而加入

(2) 对存在量词, 特性谓词作为合取项而加入

例

(1)所有的人都长头发。

(2)有的人吸烟。

(3)没有人登上过木星。

令M(x)是人

(1) 令F(x)：x长头发，则有

$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

(2) 令S(x)：x吸烟，则有

$\exists x(M(x)\land S(x))$

(3) 令D(x)：x登上过木星，则有

$\neg\exists x(M(x)\land D(x))$

例

（4）政府官员不都是高素质的。

（5）没有不犯错误的人。

解：(4)令Q(x)是政府官员；H(x)是高素质的。

则符号化为 $\neg\forall x\,(Q(x)\rightarrow H(x))$

(5) 令M(x)：x是人；F(x): x会犯错误。

则符号化为 $\forall x(\,M(x)\rightarrow F(X))$

或 $\neg\exists x(M(x)\land\neg F(X))$

（6）在南京工作的人未必都是南京人。

解：设F(x)：x是在南京工作的人。

G(x)：x是南京人。

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

或 存在着在南京工作的非南京人。

$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

例（多元谓词）

(a) 对于所有的自然数, 均有x+y≥x。

设F(x, y)：x+y≥x, N(x)：x是自然数。

则符号化为:

$\forall x \forall y(N(x) \land N(y) \rightarrow F(x, y))$♡♡

(b) 某些人对某些食物过敏。

设F(x, y)：x对y过敏, M(x)：x是人,

G(x)：x是食物。

则符号化为

$\exists x \exists y(M(x) \land G(y) \land F(x,y))$

续

(c) 每个人都有些缺点。

设F(x, y): x有y, M(x): x是人, G(x): x是缺点。 符号化为:

$\forall x(M(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge F(x,y)))$

(d) 尽管有人聪明, 但未必一切人都聪明。

设F(x): x聪明, M(x): x是人。

于是有:

$\exists x(M(x) \wedge F(x)) \wedge \neg(\forall x(M(x) \rightarrow F(x)))$♡

11.3 函数

函数——谓词逻辑中个体与个体间的关系

函数有一元、二元、多元

表达为: $y=f(x)$; $z=f(x, y)$; $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

f为函数符号，等式左右均为个体变元

函数是个体到个体的映射

例6 将下述语句表达为函数

张三和他父亲及祖父三人一起去看演出。

解 设$F(x, y, z)$为某人x与某人y及某人z一起看演出，$f(x)$为x的父亲，又设a为张三，则此语句可写成：

$$F(a, f(a), f(f(a)))$$

11.4 谓词公式

(1) 谓词演算的原子公式是谓词演算公式。

(2) 若A , B是谓词演算公式, 则$(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $(\forall x A)$ 和 $(\exists x A)$是谓词演算公式。

(3) 只有有限次应用步骤 (1) 和 (2)构成的公式才是谓词演算公式。

11.5 自由变元与约束变元

定义

在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都为约束出现，A中不是约束出现的其他变元均称为是自由出现的.

例

(1) $\forall x P(x) \to Q(x)$

(2) $\exists x(P(x, y) \to Q(x, y)) \vee P(y, z)$

(3) $\forall x(F(x) \to G(x,y)) \to \exists y(H(x) \wedge L(x,y,z))$

(4) $\forall x(F(x,y) \to \exists y\, H(x,y))$

改名规则

一公式中的约束变元是可以更改的, 规则如下:

(1) 若要改名, 则该变元在量词及其辖域中的所有出现均须一起更改, 其余部分不变。

(2) 改名时所选用的符号, 必须是量词辖域内未出现的符号, 最好是公式中未出现的符号。

作业

21. 谓词公式 $\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))\rightarrow Q(x)$ 中，量词 $\forall x$ 的辖域是下列 4 个中的哪一个？

(1) $\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))$；　(2) $P(x)$；

(3) $P(x)\vee\exists yR(y)$；　(4) $Q(x)$.

22. 谓词公式 $\exists xA(x)\wedge\neg\exists xA(x)$ 的类型是下列 4 个中的哪一个？

(1) 永真式；

(2) 矛盾式；

(3) 非永真的可满足式；

(4) 不属于(1),(2),(3)中的任何类型.

23. 设个体域为整数集，下列公式中真值为 T 的是哪几个？

(1) $\forall x\exists y(x+y=0)$；

(2) $\exists y\forall x(x+y=0)$；

(3) $\forall x\forall y(x+y=0)$；

(4) $\exists x\exists y(x+y=0)$.

24. 设 $L(x)$：x 是演员，$J(x)$：x 是老师，$A(x,y)$：x 佩服 y，那么可将命题“所有演员都佩服某些老师”符号化为________.

(1) $\forall xL(x)\rightarrow A(x,y)$；

(2) $\forall x(L(x)\rightarrow\exists y(J(y)\wedge A(x,y)))$；

(3) $\forall x\exists y(L(x)\wedge J(y)\wedge A(x,y))$；

(4) $\forall x\exists y(L(x)\wedge J(y)\rightarrow A(x,y))$.

26. 公式 $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x,y))\vee\exists x(R(y,x)\rightarrow S(x))$ 的自由变元是________，约束变元是________.

27. 谓词公式 $\forall x(P(x)\rightarrow\exists xQ(x))$ 的前束范式是________.

28. 设个体域 $D=\{a,b\}$，消去公式中的量词，则 $\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)\Leftrightarrow$________.

29. 设个体域是整数集，命题 $\exists y\forall x(x\times y=0)$ 的真值为________.

30. 设个体域是 $\{1,2\}$，命题 $\forall x\exists y(x+y=3)$ 的真值为________.

31. 将下列命题符号化：

(1) 某些实数是有理数；(2) 所有的人都呼吸；(3) 每个母亲都爱自己的孩子.

32. 设个体域 $D=\{3,5,6\}$，谓词 $F(x)$：x 是素数，求 $\forall xF(x)$ 的真值.

33. 指出公式 $\forall x\forall y(R(x,y)\vee L(y,z))\wedge\exists xH(x,y)$ 中量词每次出现的辖域，并指出变元的每次出现是约束出现还是自由出现，以及公式的约束变元、自由变元.

徐版 21. 23. 24. 26. 28. 31. 32. 33.

13. 将下列断言译为逻辑符号，选用的谓词应使逻辑符号中至少含有一个量词：

(1) 有一个且仅有一个偶数质数。

(2) 没有一个奇数是偶数。

(3) 每一火车都比某些卡车快。

(4) 某些卡车慢于所有火车，但至少有一火车，快于每一卡车。

(5) 如果明天下雨，那么某些人将淋湿。

(6) 所有步行的、骑马的或乘车的人，凡是口渴的，都喝泉水。

14. 试译出“a 是 b 的外祖父”，只允许用以下谓词：$P(x)$ 表示“x 是人”，$F(x, y)$ 表示“x 是 y 的父亲”，$M(x, y)$ 表示“x 是 y 的母亲”。

方版13、14