

§ 12.4 静电场的环路定理 电势

主要内容:

1. 静电场力的功
2. 静电场的环路定理
3. 电势能
4. 电势 电势差
5. 电势的计算

12.4.1 静电场力的功 静电场的环路定理

1. 静电场是保守场

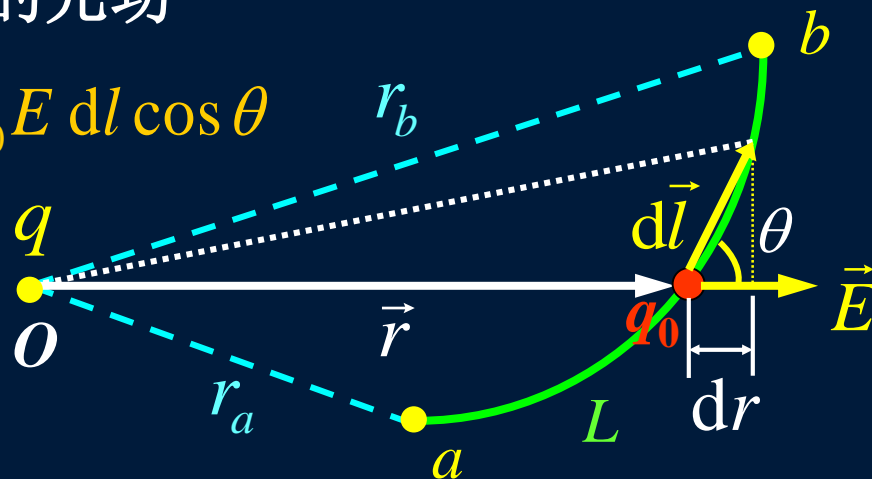
- 单个点电荷产生的电场中

点电荷 q 的电场对 q_0 所作的元功

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E dl \cos \theta$$

$$dl \cos \theta = dr$$

$$\Rightarrow dA = q_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$



移动 q_0 从 $a \rightarrow b$, 静电场力所作的功

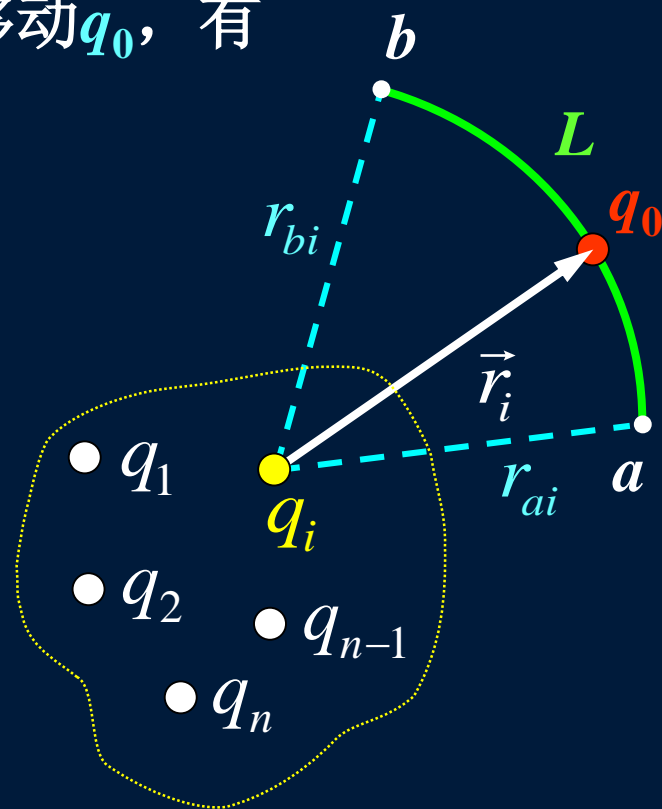
$$A = \int_{a(L)}^b dA = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

与路径无关

- 任意带电体系产生的电场中

在点电荷系 q_1 、 q_2 、...的电场中，移动 q_0 ，有

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \int_{a(L)}^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{a(L)}^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{a(L)}^b q_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{a(L)}^b q_0 \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \\ &= \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{ai}} - \frac{1}{r_{bi}} \right) \end{aligned}$$



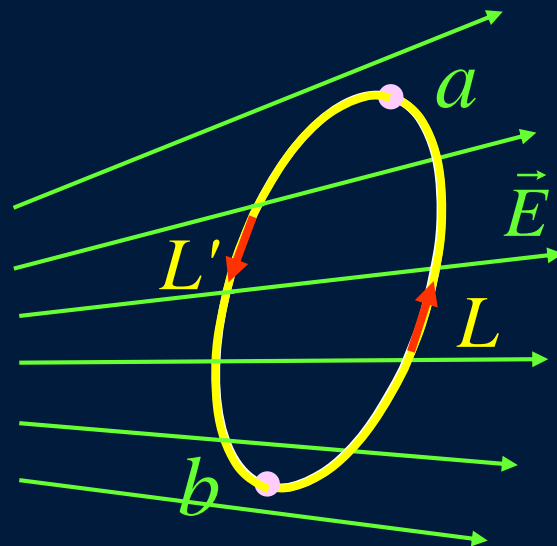
➤ 结论

电场力作功只与始末位置有关，与路径无关，所以静电力是保守力，静电场是保守力场。

2. 静电场的环路定理

在静电场中，沿闭合路径移动 q_0 ，电场力做功

$$\begin{aligned} A_{ab} &= \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{a(L)}^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{b(L')}^a q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{a(L)}^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{a(L')}^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{—— 静电场的环路定理}$$

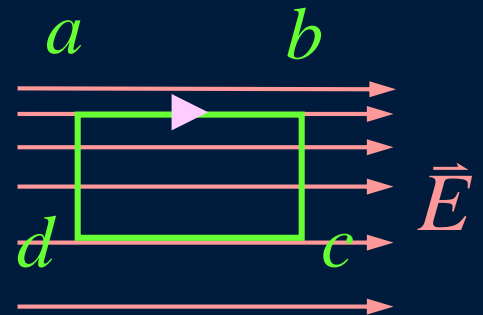
在静电场中，电场强度的环流为零。

➤ 讨论

(1) 环路定理是静电场的另一重要定理，可用环路定理检验一个电场是不是静电场。

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^b E_1 dl + \int_c^d -E_2 dl \\ &\neq 0\end{aligned}$$

不是静电场。



(2) 环路定理要求电力线不能闭合。

(3) 静电场是有源、无旋场，可引进电势能。

12.4.2 电势能

- 电势能的差

静电场 \longrightarrow 保守场 \longrightarrow 引入静电势能

定义: q_0 在电场中 a 、 b 两点电势能之差等于把 q_0 自 a 点移至 b 点过程中电场力所作的功。

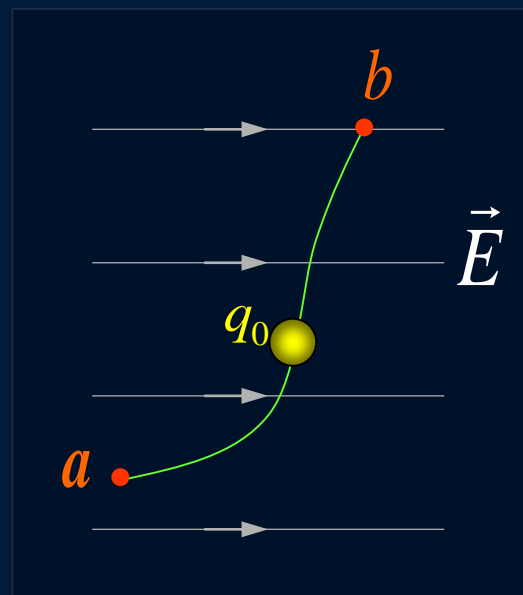
$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_a - W_b$$

- 电势能

取势能零点 $W_{“0”} = 0$

q_0 在电场中某点 a 的电势能:

$$W_a = \int_a^{“0”} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$W_a - W_b = ?$$

➤ 讨论

- (1) 电势能应属于 q_0 和产生电场的源电荷系统共有。
- (2) 电荷在某点电势能的值与零点选取有关，而两点的差值与零点选取无关。
- (3) 选势能零点的原则：
 - 当(源)电荷分布在有限范围内时，势能零点一般选在无穷远处。
 - 无限大带电体，势能零点一般选在有限远处一点。
 - 实际应用中取大地、仪器外壳等为势能零点。

12.4.3 电势 电势差

- 电势差

$$U_{ab} = \frac{W_a}{q_0} - \frac{W_b}{q_0} = \frac{A_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电场力对单位正电荷自 $a \rightarrow b$ 过程中所作的功。

- 电势定义

$$V_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{\text{"0"}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电场力对单位正电荷自 a (所求点) \rightarrow “电势零点”过程中所作的功。

7.4.4 电势 的计算

1. 点电荷电场中的电势

$$V_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

2. 点电荷系电场中的电势

设有 n 个点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 产生的电场中, 其电场强度

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

则某点 a 的电势可写成

$$\begin{aligned} V_a &= \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^\infty (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_a^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_a^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \int_a^\infty \vec{E}_n \cdot d\vec{l} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^\infty \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

$$V_a = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

在点电荷系产生的电场中, 任一点的电势等于每一个点电荷单独存在时在该点产生的电势的代数和 —— 电势叠加原理。

3. 电荷连续分布带电体电场中的电势

对连续分布的带电体

$$V_a = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

◆ 计算电势的方法

(1) 已知电荷分布 $V_a = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$

(2) 已知场强分布 $V_a = \int_a^{''0''} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

例 半径为 R ，带电量为 q 的均匀带电球面

求 带电球面的电势分布

解 根据高斯定律可得：

$$\begin{cases} E_1 = 0 & (r < R) \\ E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

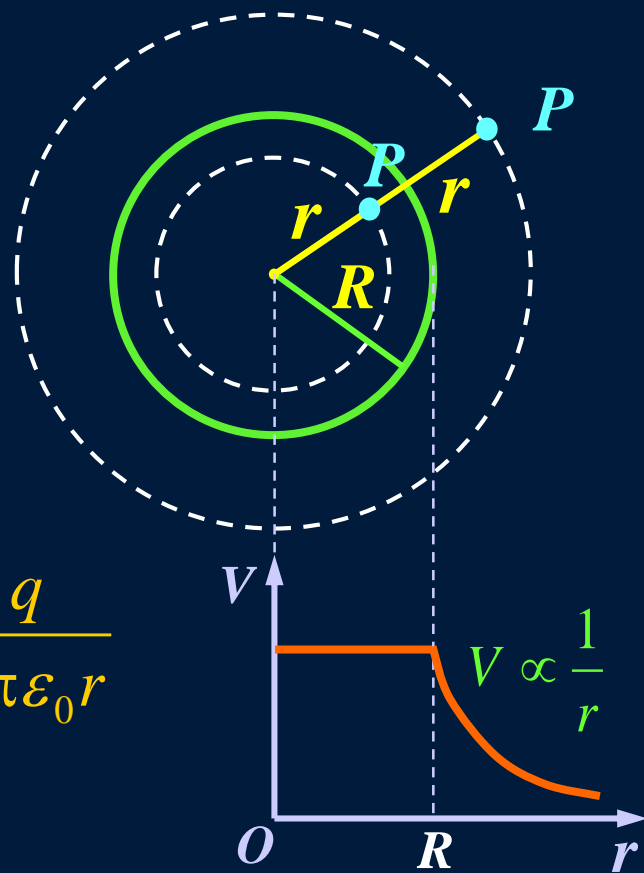
对球面外任一点 P ($r > R$)

$$V_{out} = \int_p^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

对球面内任一点 P ($r < R$)

$$V_{in} = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R \underline{E_1 dr} + \int_R^\infty E_2 dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

球内各点的电势相等，且等于球面上各点的电势。



➤ 讨论

对于半径为 R ，带电量为 q 的均匀带电球体，其电势分布

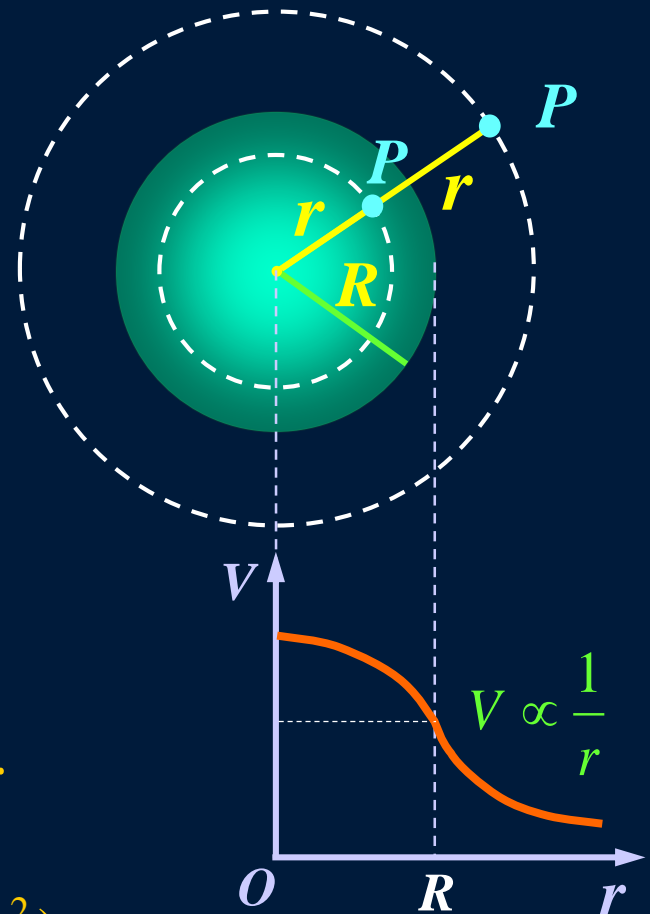
$$\begin{cases} E_1 = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} & r < R \\ E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

对球外任一点 P ($r > R$)

$$V_{out} = \int_p^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

对球面内任一点 P ($r < R$)

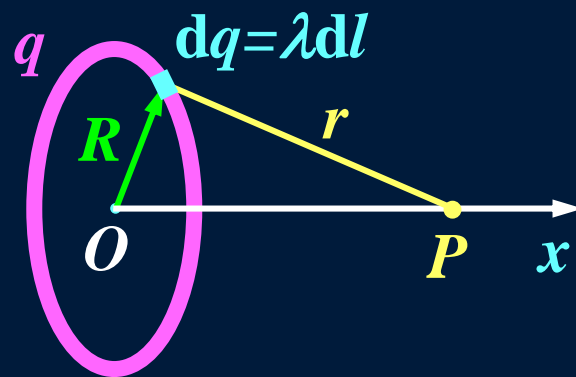
$$\begin{aligned} V_{in} &= \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) \end{aligned}$$



例 半径为 R ，带电荷为 q 的均匀带电圆环，

求 圆环轴线任一点 P 的电势。

解 建立如图坐标系，选取电荷元 dq ，



$$dq = \lambda dl, \quad \lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

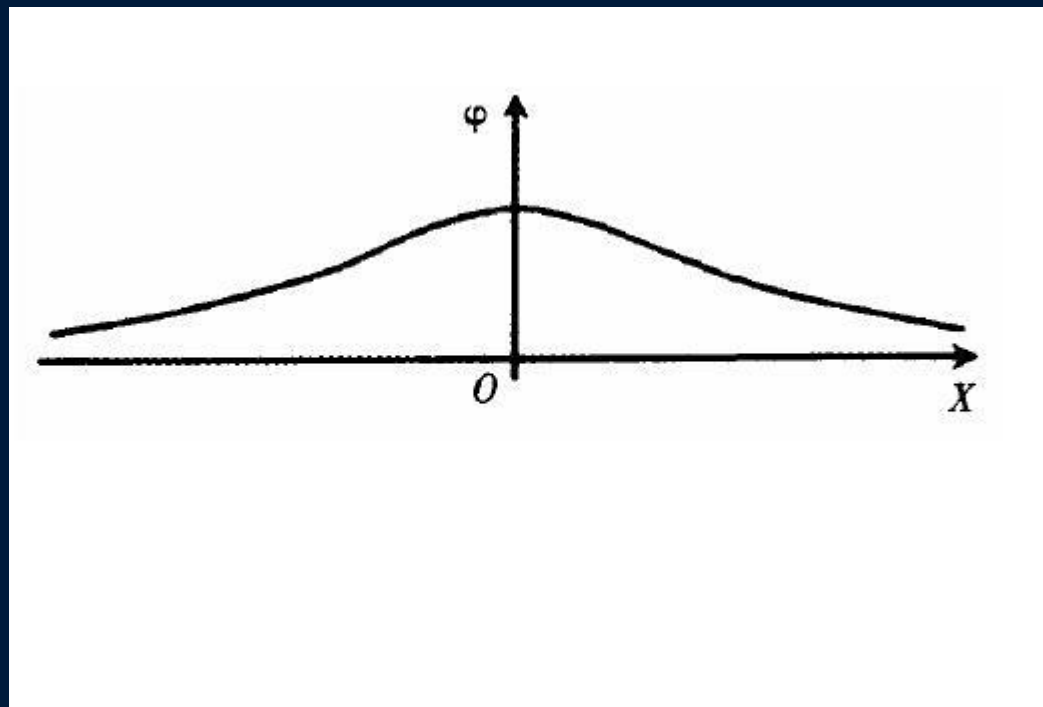
以无穷远为电势零点

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$V_P = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$

◆ 当 $x=0$ 时, $V_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

◆ 当 $x \gg R$ 时, $V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$



例 电荷线密度为 λ 的无限长均匀带电直线
求 其电势分布。

解 根据高斯定律得：

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

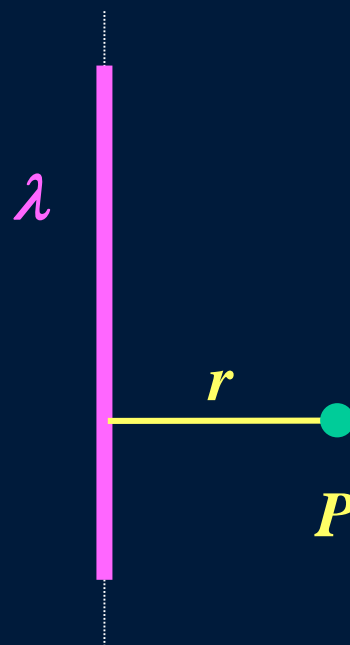
若仍以无穷远为电势零点，则由积分

$$V_p = \int_r^\infty \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

得出的电势为无穷大，无意义；若以 $r=0$ 为电势零点，也无意义。为此，我们选取 $r=r_0$ 处为电势零点，得

$$V_p = \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

◆ 当取 $r_0=1$ 时， $V_p = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r$

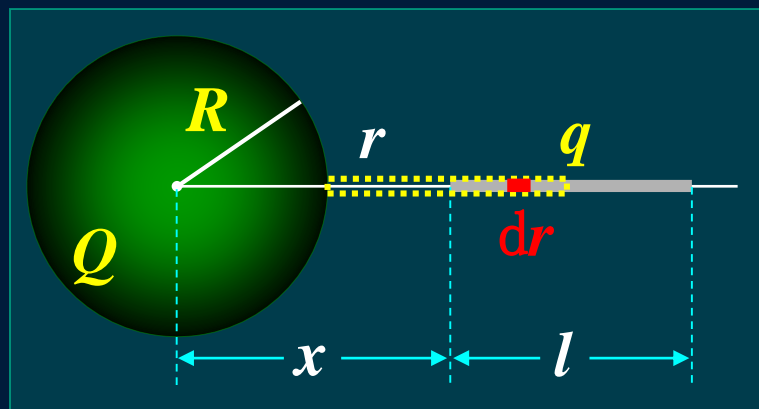


例 如图所示，球体半径 R ，均匀带电量 Q ，细杆长 l ，均匀带电量 q 。

求 (1) 杆在带电球的电场中所具有的电势能；

(2) 杆受到的电场力；

(3) 当杆的左端从球面运动到图示位置电场力所作的功。



解 (1) 球体外任一点的电势(以无穷远为电势零点)

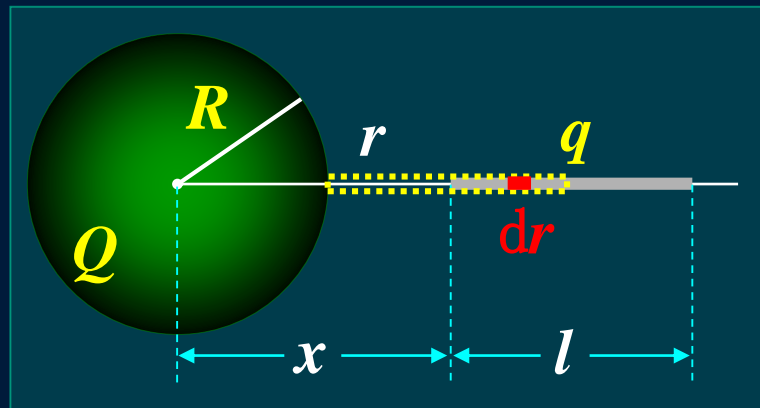
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

在细杆上取电荷元 $dq = \lambda dr$ ($\lambda = q/l$)，并取无穷远为势能零点，则电荷元 dq 在带电球体电场中所具有的电势能

$$dW = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{q}{l} dr$$

细杆具有的电势能

$$\begin{aligned} W &= \int_x^{x+l} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{q}{l} dr \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x+l}{x} \end{aligned}$$



(2) 杆受到的电场力

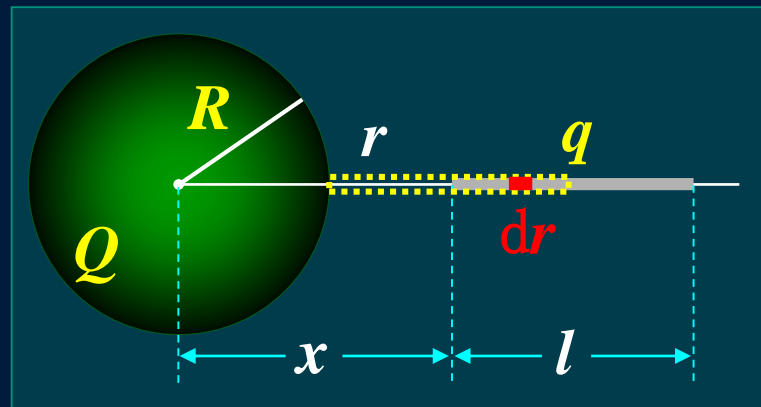
$$F = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+l} \right) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x(x+l)}$$

(3) 细杆左端在球面处时的电势能 $W_1 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R+l}{R}$

细杆左端移到距球心 x 处时的电势能 $W_2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x+l}{x}$

细杆左端从球面移到距球心 x 处的过程中，电场力所作的功为

$$\begin{aligned} A &= V_1 - V_2 \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \left(\ln \frac{R+l}{R} - \ln \frac{x+l}{x} \right) \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{(R+l)x}{(x+l)R} \end{aligned}$$



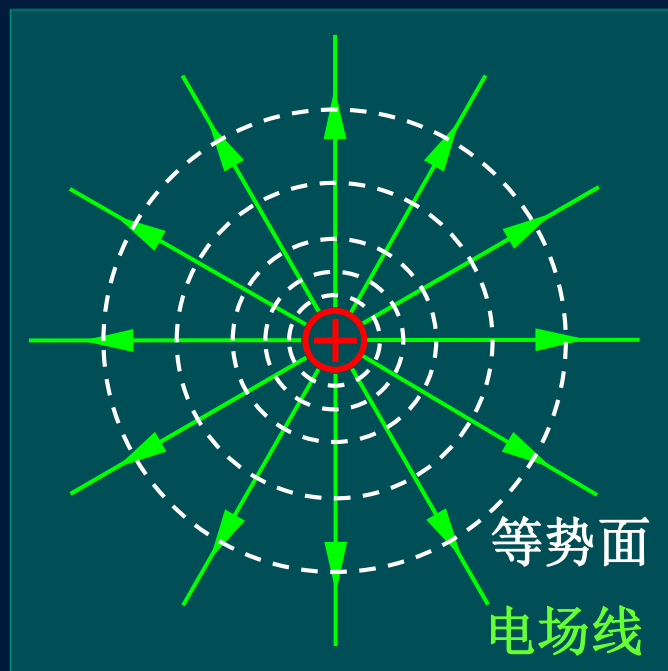
§ 12.5 等势面 电场强度与电势的微分关系

主要内容:

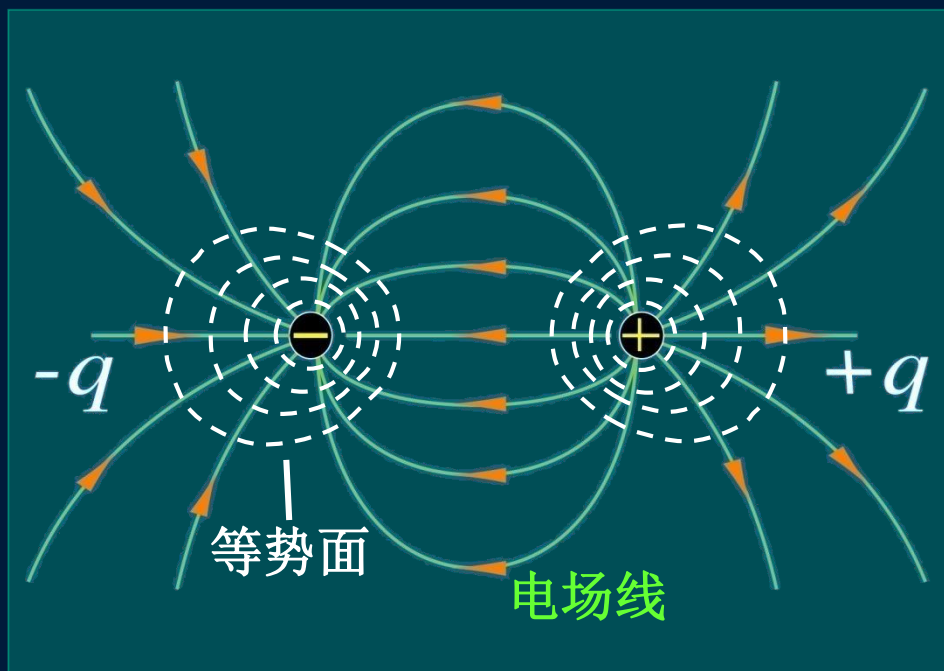
1. 等势面
2. 电场强度与电势的微分关系

12.5.1 等势面

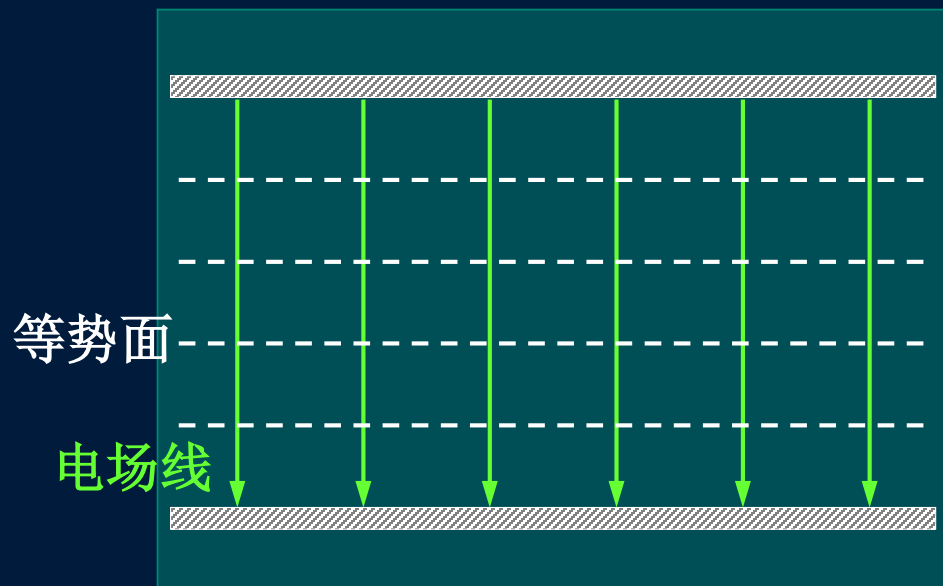
电场中电势相等的点连成的面称为等势面。



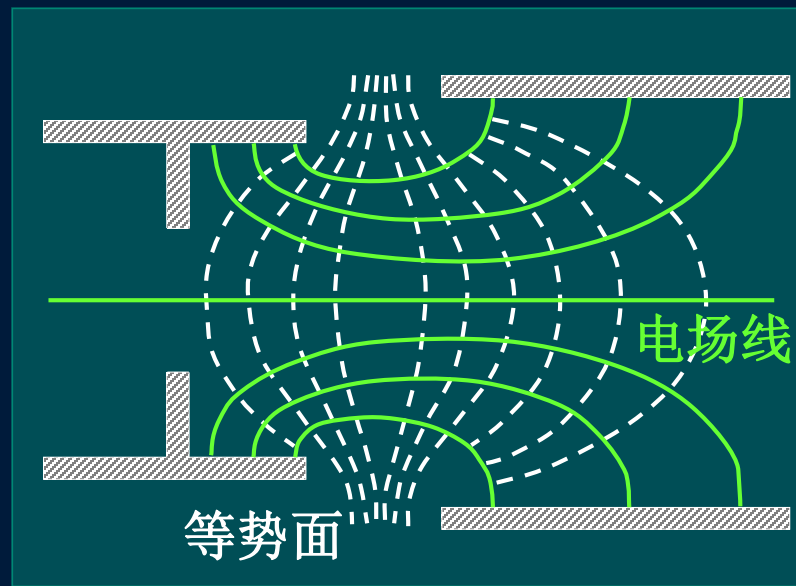
点电荷



电偶极子



带电平板电容器内部



示波管内部的电场

等势面的性质:

(1) 电场线与等势面处处正交。

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos \theta dl$$

$$dA = q_0 (V_a - V_b)$$

$$V_a = V_b \quad \longrightarrow \quad q_0 E \cos \theta dl = 0$$

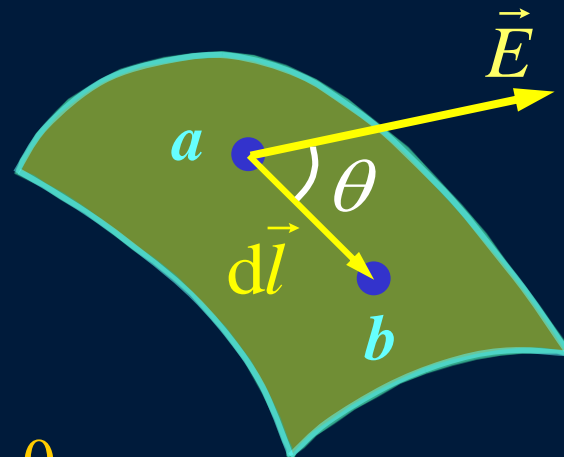
$$\cos \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

沿等势面移动电荷时，电场力所作的功为零。

(2) 规定相邻两等势面间的电势差都相同

等势面密 $\longrightarrow \vec{E}$ 大 等势面疏 $\longrightarrow \vec{E}$ 小

(3) 电场强度的方向总是指向电势降落的方向。



12.5.2 电场强度与电势的微分关系

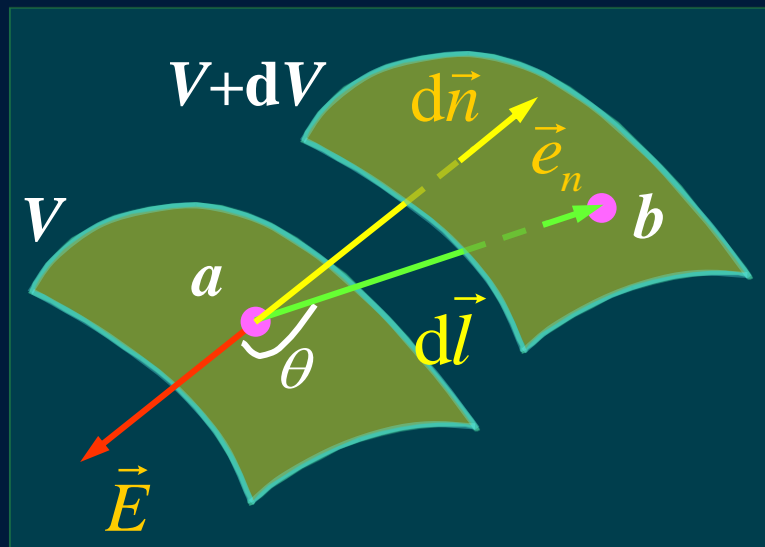
取两相邻的等势面

把点电荷 q_0 从 a 移到 b ，电场力作功为

$$\begin{cases} dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos \theta dl \\ \quad \quad \quad = q_0 E dn \\ dA = q_0 [V - (V + dV)] = -q_0 dV \end{cases}$$

$$\rightarrow E \cos \theta dl = E dn = -dV \rightarrow$$


$$E = -\frac{dV}{dn}$$



任意一场点处电场强度的大小等于沿过该点等势面法线方向上电势的变化率，负号表示电场强度的方向指向电势减小的方向。

元功 dA 也可按如下方法表示

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E \cos \theta dl = q_0 E_l dl = -q_0 dV$$


$$E_l = -\frac{dV}{dl}$$

电场强度在 $d\vec{l}$ 方向的投影等于电势沿该方向变化率的负值。

$$dl \geq dn \quad \longrightarrow \quad \frac{dV}{dl} \leq \frac{dV}{dn}$$

电势沿等势面法线方向的变化率最大

◆ 在直角坐标系中

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

进一步可表示为矢量形式

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad } V$$

某点的电场强度等于该点电势梯度的负值

例 已知 $V = 6x - 6x^2y - 7z^2$

求 电场强度的分布。

解 $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(6 - 12xy)$ $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 6x^2$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 14z$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = (12xy - 6)\vec{i} + 6x^2 \vec{j} + 14z \vec{k}$$

例 证明电偶极子任一点电场强度

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-\vec{p} + (3\vec{p} \cdot \vec{r}^0) \vec{r}^0)$$

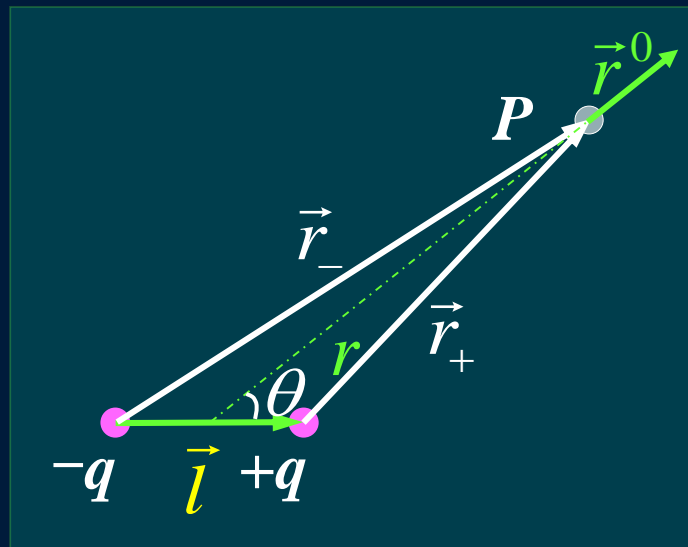
证 任一点 P 的电势为

$$V = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

$$r \gg l \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} r_+ = r - \frac{l}{2} \cos \theta, & r_- = r + \frac{l}{2} \cos \theta \\ r_- - r_+ \approx l \cos \theta, & r_+ r_- = r^2 \end{cases}$$

P 点电势可改写为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



建立图示坐标系，有

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad \cos \theta = \frac{z}{r}$$

P 点电势为

$$V = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



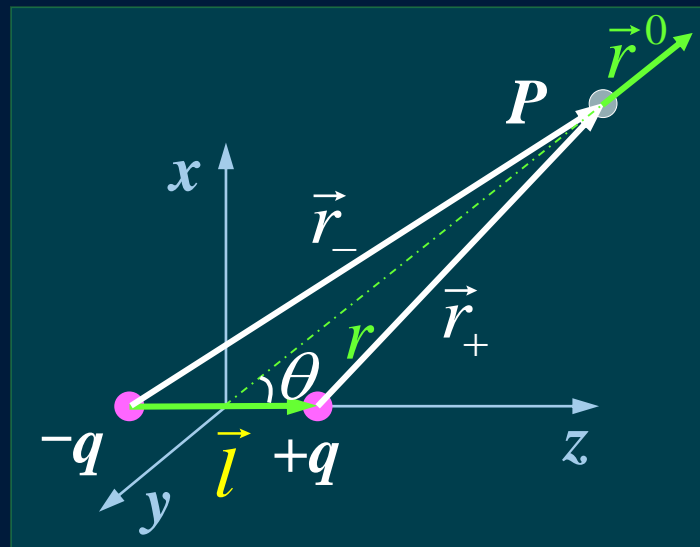
$$\partial r / \partial x = x / r, \quad \partial y / \partial x = y / r, \quad \partial r / \partial z = z / r$$

因此， P 点电场强度的分量

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{3pzx}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3pzy}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right)$$



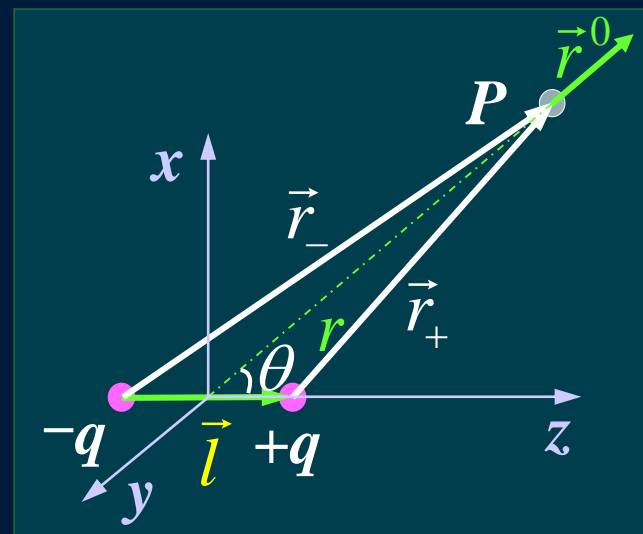
写成矢量式

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \\ &= \frac{3pz}{4\pi\epsilon_0 r^5} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{k}\end{aligned}$$

又 $\vec{p} = p\vec{k}$, $\vec{r} = r\vec{r}^0$, $z = \vec{r} \cdot \vec{k}$

由此, **P** 点电场强度可写为

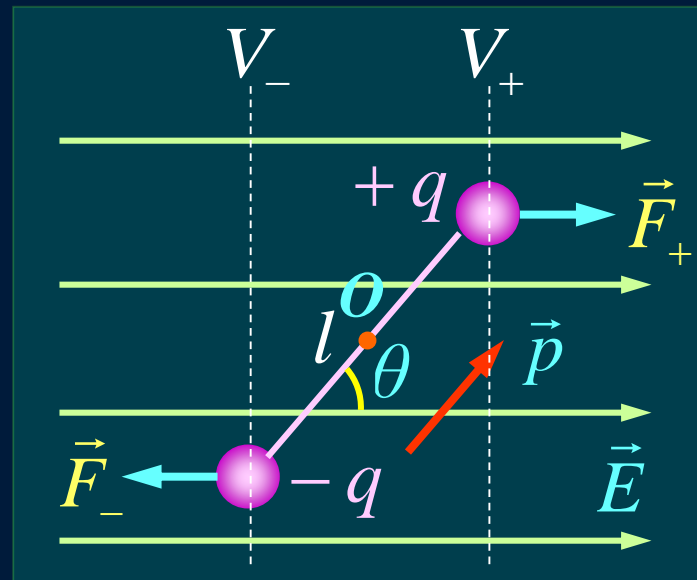
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3p(r\vec{r}^0 \cdot \vec{k})r\vec{r}^0}{r^2} - \vec{p} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-\vec{p} + (3\vec{p} \cdot \vec{r}^0)\vec{r}^0)$$



例 求电偶极子在均匀电场中所具有的电势能。

解 电偶极子在电场中具有的电势能

$$\begin{aligned} W &= W_+ + W_- \\ &= qV_+ - qV_- \\ &= -q(V_- - V_+) \end{aligned}$$



$(V_- - V_+)$ 为 $-q$ 和 $+q$ 所在处的电势差，由定义有

$$V_- - V_+ = \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l} = El \cos \theta \quad \longrightarrow \quad W = -qEl \cos \theta$$

进一步可表示为

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

本章小结

描述静电场基本性质的两个物理量  $\left\{ \begin{array}{l} \text{电场强度 } \vec{E} \\ \text{电势 } V \end{array} \right.$

两个基本定理 $\left\{ \begin{array}{l} \text{静电场的高斯定理} \\ \text{静电场的环路定理} \end{array} \right.$

1. 电场强度

(1) 定义式

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

电场强度是描述静电场性质的物理量，其是空间点坐标的单值函数，是一个矢量。

真空中的库仑定律
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

(2) 点电荷 q 产生的电场强度 $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

(3) 电场强度的叠加原理

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

对于带电体(电荷连续分布), 其电场强度

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

注意: 电场强度的积分是矢量积分。

(4) 电通量

在电场中穿过任意曲面 S 的电场线条数

—— (穿过该面的) 电通量(Φ_e)

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

(5) 静电场高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

在真空中的静电场中，通过任一闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的电荷电量的代数和除以 ϵ_0

高斯定理指出静电场是有源场，电荷就是它的源。

用高斯定理求电场强度的步骤：

- (a) 由电荷分布的对称性，分析电场强度分布的对称性；
- (b) 根据对称性选取适当的高斯面；
- (c) 计算通过高斯面的电通量及其内包围的电荷量；
- (d) 根据高斯定理求电场强度。

2. 电势

(1) 静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场是保守场。

(2) 电势能

q_0 在电场中某点 a 的电势能: $W_a = \int_a^{''0''} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$

(3) 电势

定义 $V_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{''0''} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

电势差 $U_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

(4) 点电荷电场中某点的电势

$$V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(5) 电势叠加原理

$$V_a = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

带电体(电荷连续分布)的电场中, 其电势

$$V_a = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(6) 电势的计算方法

已知电荷分布

$$V_a = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

已知场强分布

$$V_a = \int_a^{^0} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

3. 电场强度与电势的微分关系

$$E = -\frac{dV}{dn} \quad E_l = -\frac{dV}{dl}$$

在直角坐标系中

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

表示成矢量形式

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}\right) = -\text{grad } V$$

4. 电场中的电偶极子

电偶极子在均匀电场中受到的力矩为

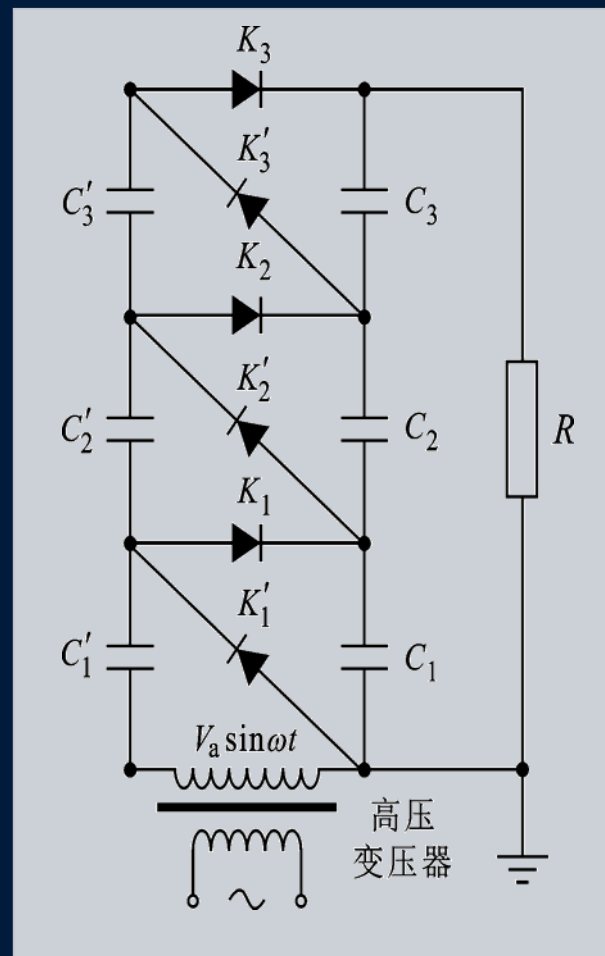
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

在均匀电场中所具有的电势能为

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



750KeV 高压倍压加速器



串激式倍压整流电路

(本章由刘丹东、徐忠铎编写制作)