第二章 电阻电路的等效变换

电路中只含有电阻元件,可源、受控源,但不包括电感、

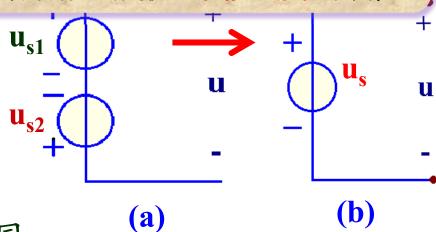
埋想电源的连接及录

把一个复杂的电路变换为简单电路,以便于进一步的电路分析与计算。

(等效条件:保持对外端口特性不变)

1、理想电压源

(1) 串联: 所连接的各个 电压源流过同一电流。



等效条件:

保持端口电流、端口电压相同。

等效变换式: $\mathbf{u}_{s} = \mathbf{u}_{s1} - \mathbf{u}_{s2}$

(2) 并联:

只有电压数值、极性完全相同的理想电

电压的代数和

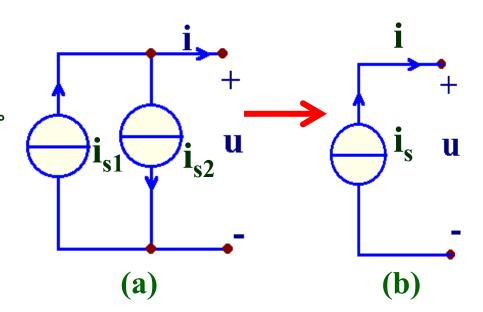
否则,不满足KVL。

2、理想电流源

(1) 并联: 所连接的各电流源端为同一电压。

等效条件:

保持端口电流、电压相同。



等效变换式:

$$\mathbf{i}_{s} = \mathbf{i}_{s1} - \mathbf{i}_{s2}$$

(2 电流的代数和

只有电流数值、方向完全相同的理想电流源才可串联。

否则,不满足KCL。

二、实际电源模型:

1、实际电压源模型

(1) 伏安关系:

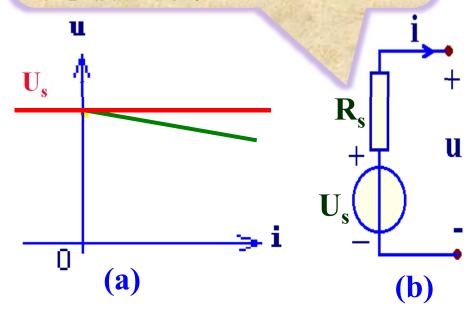
$$u = U_s - iR_s$$

其中: R_s直线的斜率。

(2) 电路模型:

1、R_s为实际电压源的内阻,数值上等于伏安直线的斜率;

2、端口电压u与端口电流i对外电路为关联参考方向。



实际电压源模型可等效为一个理想电压源U_s和电阻 R_s的串联组合。

2、实际电流源模型

(1) 伏安关系:

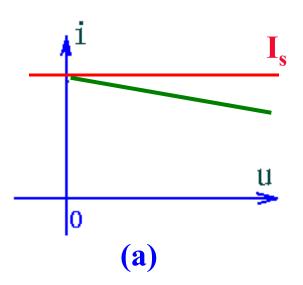
$$i = I_s - u/R_s = I_s - uG_s$$

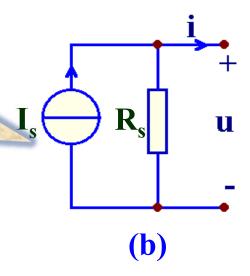
其中: G。直线的斜率。

(2) 电路模型:

1、R_s为实际电流源的内阻 (Gs为实际电流源的内电导), Gs在数值上等于伏安直线的斜率;

2、端口电压u与端口电流i对外 电路为关联参考方向。





三、实际电源模型的等效变换

1、开路电压和短路电流

(1) 开路电压uoc:

A、B两端开路时的端口电压,用uoc表示。U

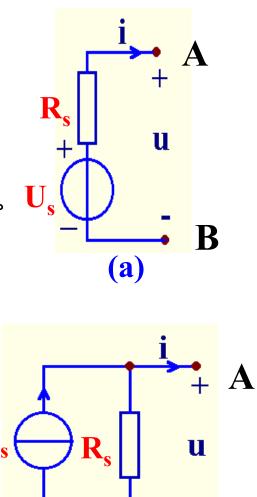


A、B端的外电路移走, 即、A、B端口断开,此时, 端口 —0.

把A、B端的外电路用一根导线代替,即,A、B端口短路,

图 a: \mathbf{u}_0 此时,端口电压 $\mathbf{u}=0$.

图 b: $\mathbf{u}_{oc} = \mathbf{R}_{S} \mathbf{I}_{S}$ $\mathbf{i}_{sc} = \mathbf{I}_{S}$

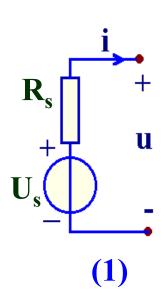


(b)

2、实际电源模型的等效变换

1) 已知电压源模型, 求电流源模型:

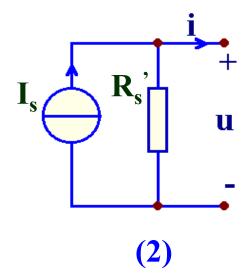
等效条件:保持端口伏安关系相同。



$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_{\mathbf{s}} - \mathbf{i}\mathbf{R}_{\mathbf{s}}$$

图(2)伏安关系:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{I}_{s} - \mathbf{i}) \mathbf{R}_{s}'$$
$$= \mathbf{I}_{s} \mathbf{R}_{s}' - \mathbf{i} \mathbf{R}_{s}'$$



等效变换关系: $U_s = I_s R_s' R_s = R_s'$

$$U_s = I_s R_s'$$

$$R_s = R_s$$

物理意义: Is为实际电压源 的短路电流, Is的方向: 电 压源的负极指向正极。

$$I_s = U_s / R_s \quad R_s' = R_s$$

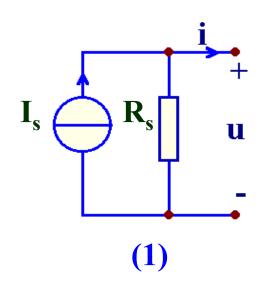
$$\mathbf{R}_{s}' = \mathbf{R}_{s}$$

已知电压源模型, 求电流源模型的等效变换步骤:

- ① PU_S 与RS的串联变成IS与RS的并联,内阻不变;
- ② 等效电流源的电流Is=Us/Rs, 即为电压源的短路电流;
- ③ Is的电流方向为从电压源的负极指向正极。

2) 已知电流源模型, 求电压源模型:

等效条件:保持端口伏安关系相同。

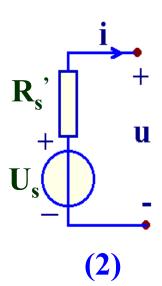


$$i = I_s - u/R_s$$

图(2)伏安关系:

$$i = (U_s - u) / R_s'$$

$$= U_s / R_s' - u / R_s'$$



等效变换关系: $I_s = U_s/R_s'$ $R_s = R_s'$

$$I_s = U_s / R_s'$$

$$R_s = R_s$$

物理意义: Us为实际电流源的开 路电压, Us的方向: 负极指向 正极的方向与Is的流向相同。

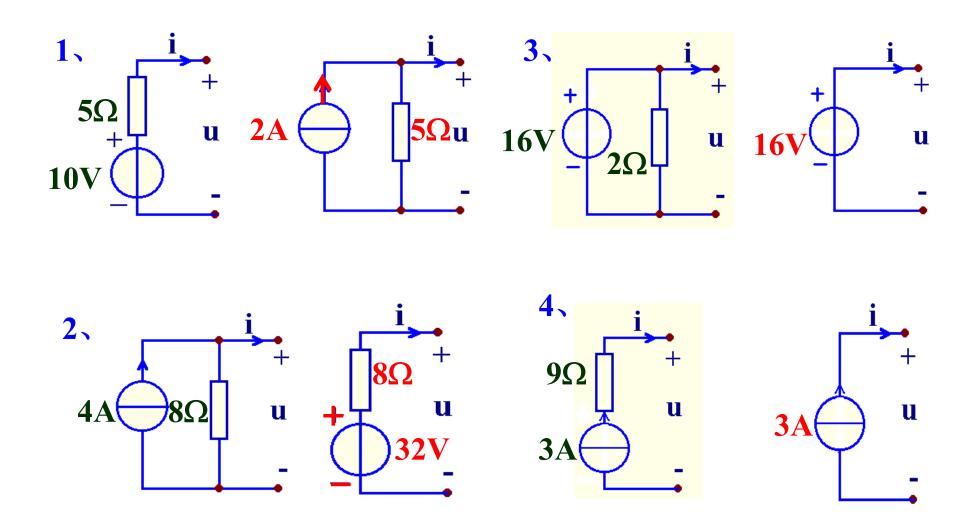
$$U_s = I_s R_s$$
 $R_s' = R_s$

$$\mathbf{R}_{s}' = \mathbf{R}_{s}$$

已知电流源模型,求电压源模型的等效变换步骤:

- ① 将 I_S 与 R_S 并联变成 U_S 与 R_S 串联,内阻不变;
- ② 等效电压源的电压 $U_S=R_SI_S$,等于电流源的开路电压;
- ③ 电压源的极性由负到正与Is的电流流向相同。

练习: 利用等效变换概念化简下列电路。

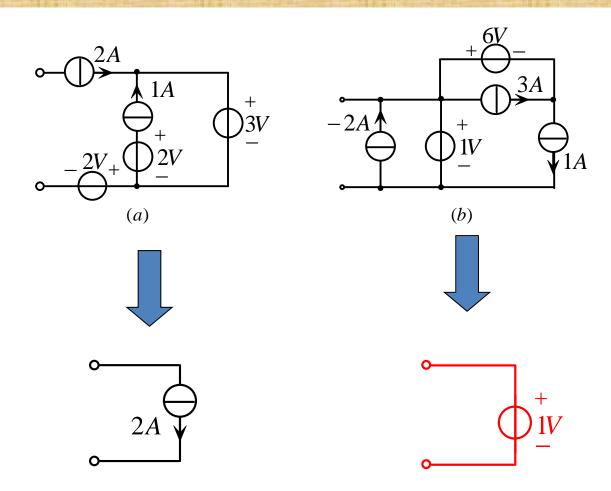


注意:

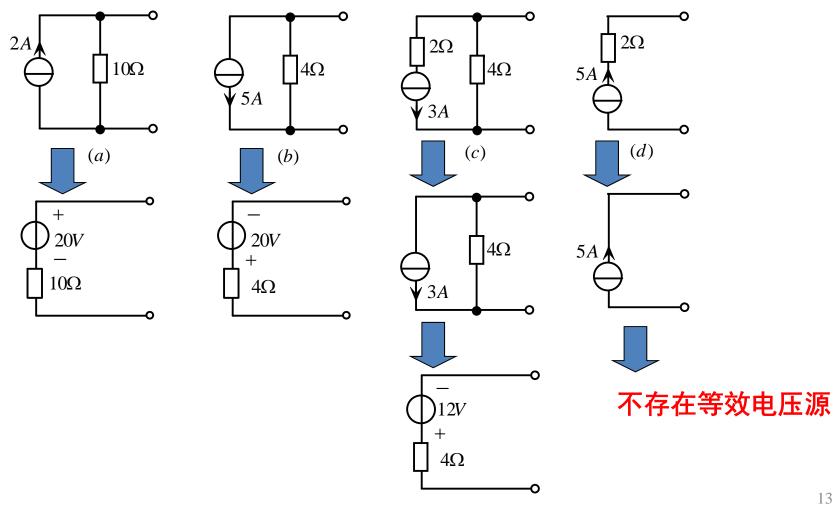
- 1、等效条件,注意:对外等效,对内不等效。
- 2、实际电源可进行电源的等效变换;
- 3、实际电源等效变换时注意等效参数的计算、以及电源 数值与方向如何计算。
- 4、理想电源不能进行电流源与电压源之间的等效变换。
- 5、与理想电压源并联的支路对外可以开始发发;与理想电流源串」 1. 理想电压源的 R_s =0, 理想

练习: 将图示电路化简为最简等效电路。

提示: 与理想电压源并联的支路对外可以开路等效; 与理想电流源串联的支路对外可以短路等效。



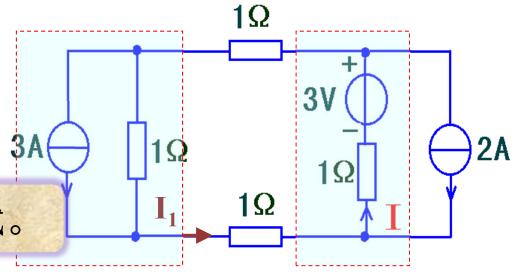
将图示电路(a)、(b)、(c)、(d)的等效电压源电路。 练习:

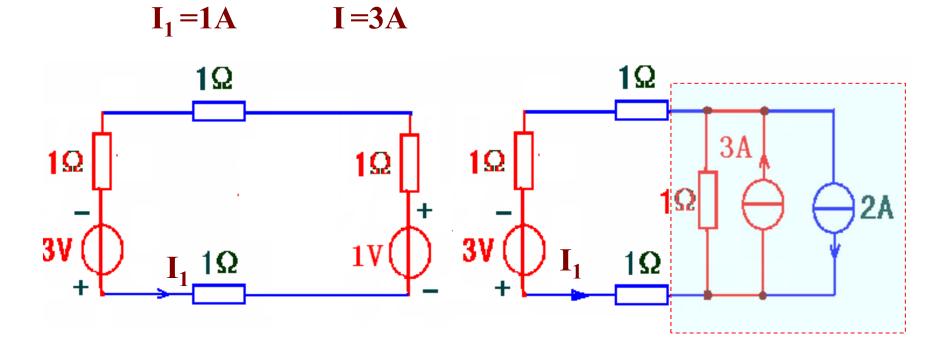


练习: 利用等效变换概念

求下列电路中电流了

目的:将待求电路化为最简形式。





2-2 电阻连接及等效变换

一、电阻串联连接及等效变换

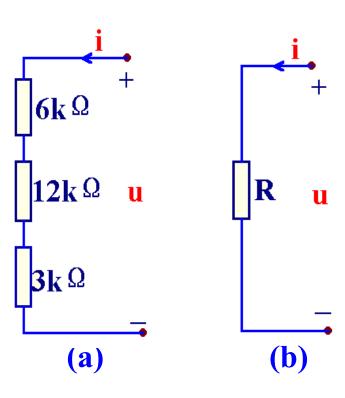
定义: 多个电阻顺序相连, 流过 同一电流的连接方式。

特点:

- 1) 所有电阻流过同一电流;
- 2) 等效电阻: $R = \sum_{k=1}^{N} R_{k}$

3) 所有电阻消耗的总功率:
$$P = \sum_{k=1}^{N} P_{k} = i^{2}R = \frac{u^{2}}{R}$$

4) 电阻分压公式: $u_m = \frac{R_m}{\sum_{k=1}^{N} R_k} u$



二、电阻并联连接及等效变换

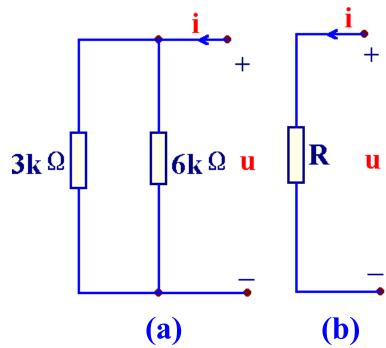
定义: 多个电阻首端相连、末端相连,施加同一电压的连接方式。

特点:

- 1) 所有电阻施加同一电压;
- 2) 等效电导: $G = \sum_{k=1}^{N} G_{k}$
- 3) 所有电阻消耗的总功率:

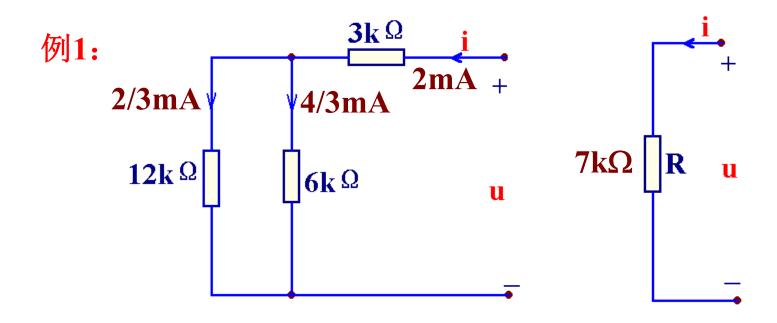
$$P = \sum_{k=1}^{N} P_k = i^2 R = \frac{u^2}{R}$$

4) 电阻分流公式: $i_m = \frac{G_m}{\sum_{k=1}^{N} G_k} i$



三、电阻混联及等效变换

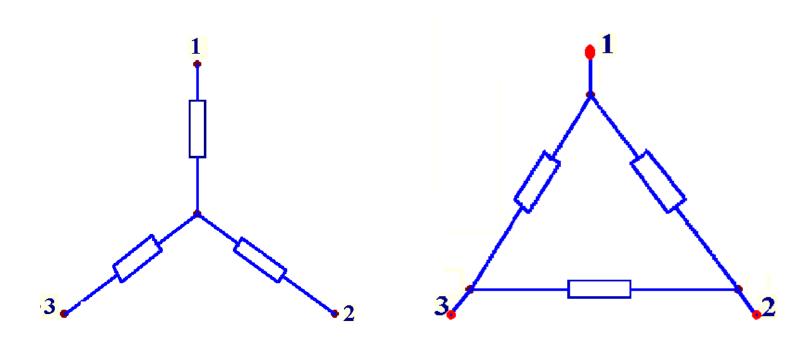
定义: 多个电阻部分串联、部分并联的连接方式



- 1) 求等效电阻R;
- 2) 若u=14V求各电阻的电流及消耗的功率。

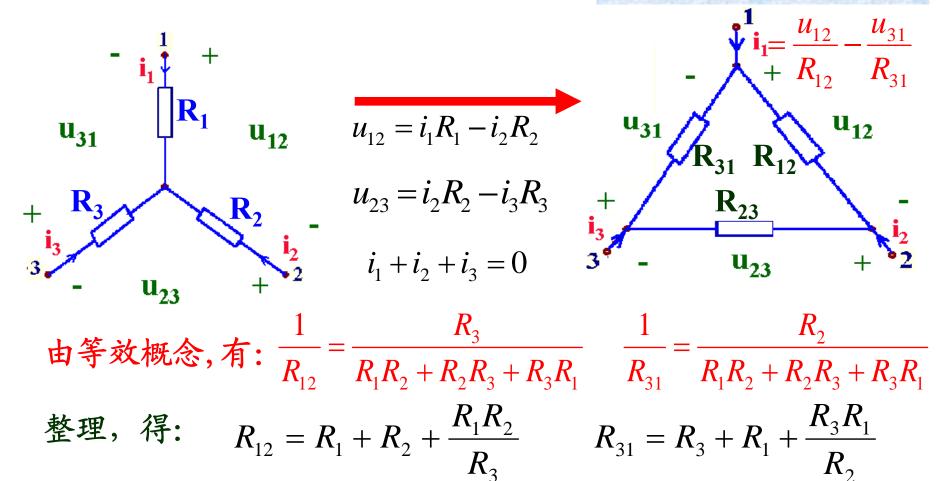
四、3个电阻的星形、三角形连接及等效变换

- 1、电阻的星形、三角形连接
- (a) 星形连接(T形、Y形) (b) 三角形连接(Π 形、 Δ 形)



2、从星形连接等效变换为三角形连接

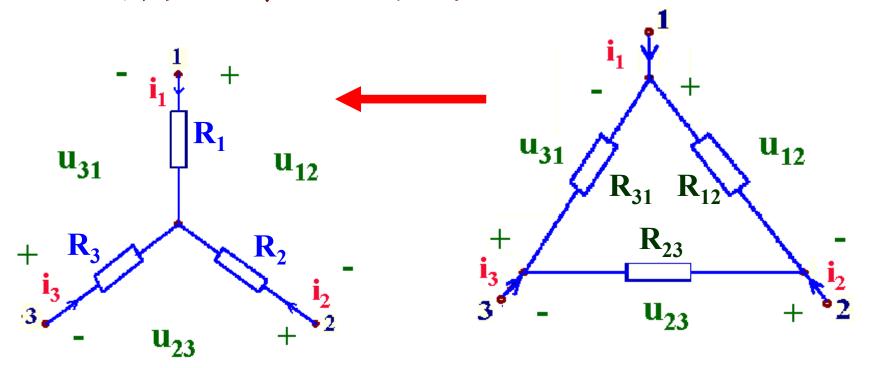
$$i_1 = \frac{R_3 u_{12} - R_2 u_{31}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$



同理,有:
$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$
 特例: 若, R₁=R₂=R₃=R_Y 则, R₁₂=R₂₃=R₃₁₌₃

则, R12=R23=R31=3RY

3、从三角形连接等效变换为星形连接

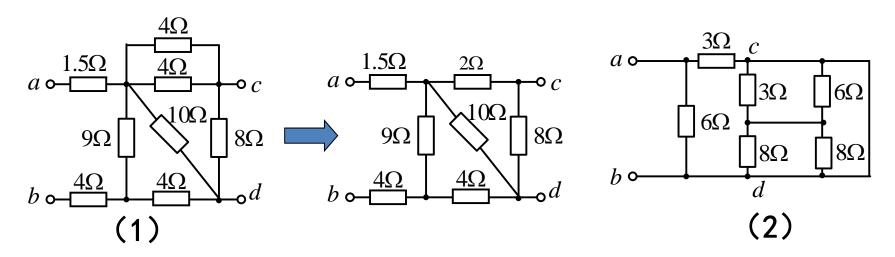


整理前述R12、R23、R31的变换式, 得:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

特例: 若, R12=R23=R31=RΔ, 则, R1=R2=R3=RΔ/3

例1 求图示电路的等效电阻 R_{ab} R_{cd} 。



解: 提示: 通过同一电流的元件为串联; 两端为同一电压的元件为并联; 无电流通过的元件可开路; 电位相同的节点可短路。

(1)
$$R_{ab} = 1.5 + 9 / /[(4 / /4 + 8) / /10 + 4] + 4 = 1.5 + 4.5 + 4 = 10\Omega$$

 $R_{cd} = 8 / /[2 + (9 + 4) / /10] = 3.9\Omega$

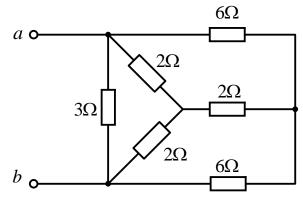
(2)
$$R_{ab} = 3//6 = 2\Omega$$
 $R_{cd} = 0\Omega$

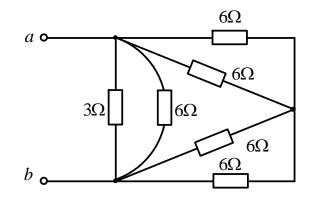
例2 求图示电路的等效电阻。

解:

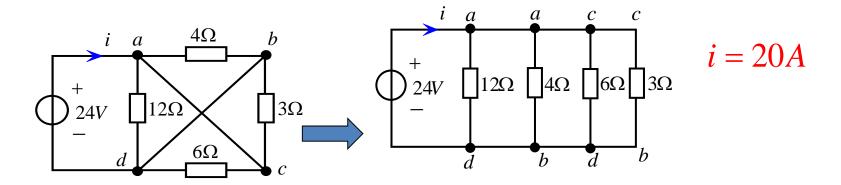
电路中,很显然三个 2Ω 的电阻是Y型联接,可将其转换成 Δ 联接,如图所示。则,

 $R_{ab} = 1.5\Omega$

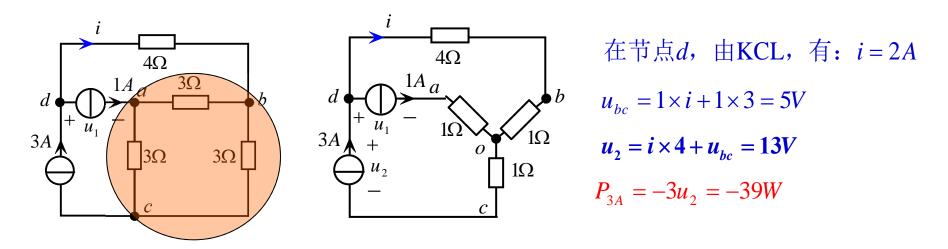




例3 图示电路, 求电流i.



例4 图示电路,求电压u₁及3A电流源吸收的功率。



 $u_1 = u_2 - u_{oc} - u_{ao} = 13 - 1 \times 3 - 1 \times 1 = 9V$

2-3 无独立源单口网络及其等效变换

一、单口网络:

具有两个引出端,且两端纽处流过同一电流。

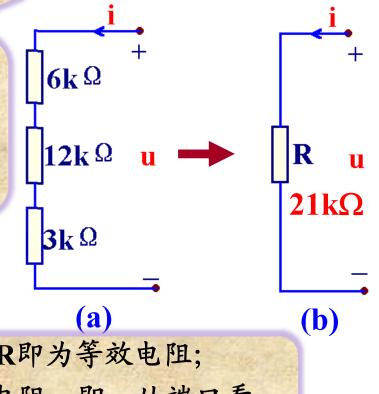
分 类:

- 1. 无源单口网络(仅由电阻组成 或由电阻与受控源组成);
 - 2. 有源单口网络(含独立电源)
- 三、无源单口网络的等效电路:

无源单口网络外部特性可以用

个等效电阻等效。

- 1.图(b)中的R即为等效电阻;
 - 2.又称输入电阻,即,从端口看 进去输入端的电阻。



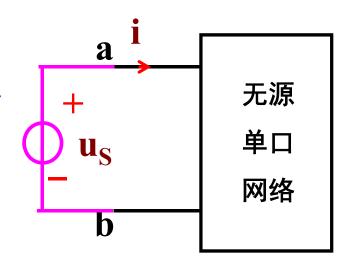
24

四、输入电阻

- 1、定义式: $R_{in} = \frac{u}{i}$ 注意: u、i 参考方向对单口网络是关联的。
- 2、求法:
- (1) 单口网络不含任何电源(仅由电阻构成)

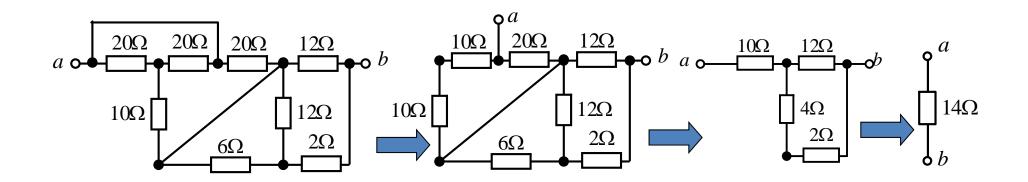
利用电阻的串联、并联、 Δ —Y或Y— Δ 等效变换的方法,求输入电阻。

(2) 单口网络含受控源(不含独立源)
用外加电源法。可外加电压源进而求出端口电流,也可以外加电流源进而求出端口电压,然后按定义式求单口网络的输入电阻(等效电阻): $R_{in} = \frac{u_s}{i}$ 注意:

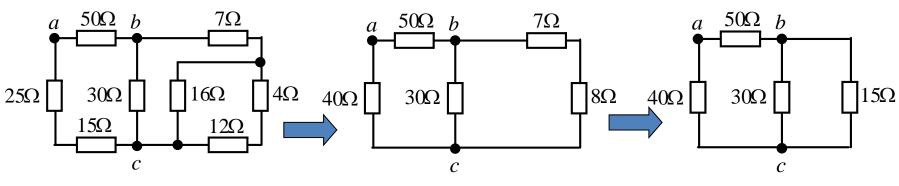


计算过程中如果用到等效变换,则受控源的控制支路不能变。25

例1 求图示单口网络的等效电路(习题2, 二-2)。



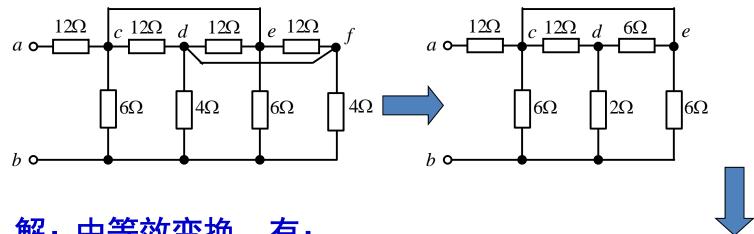
例2 求图示等效电阻 R_{ab}, R_{bc}, R_{ca}



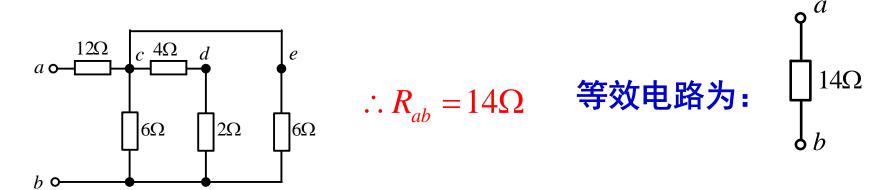
$$R_{ab} = 50/[40 + (30//15)] = 25\Omega \qquad R_{bc} = (40 + 50)//30//15 = 90//10 = 9\Omega$$

$$R_{ac} = 40/[50 + (30//15)] = 40//600 = 24\Omega$$

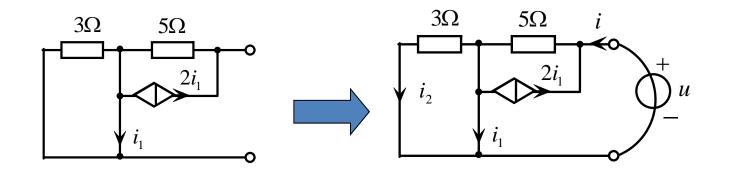
例3 求图示单口电路的等效电阻 R_{ab} 。



解: 由等效变换, 有:



例4 图示电路,求输入电阻 R_0 。



用外加电源法求解

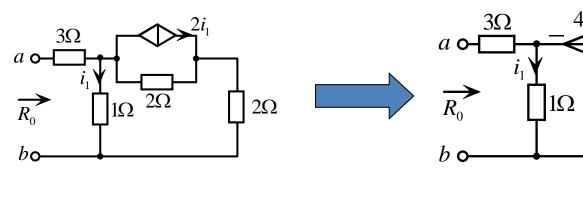
所以

 $R_0 = \frac{u}{i} = 15\Omega$

因为
$$i_2=0$$
 ,所以 $i=i_1$ 提示: 3Ω 所在支路被短路

$$\therefore u = 5(2i_1 + i) = 5(2i + i) = 15i$$

例5 求图示单口电路的输入电阻(等效电阻) R_0 。

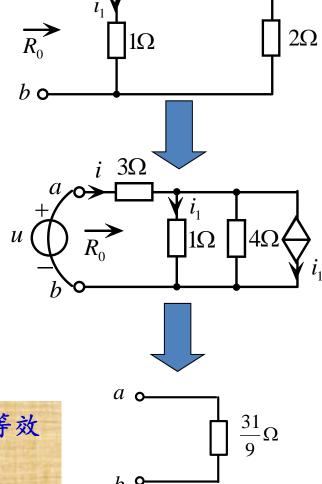


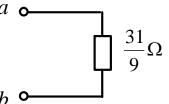
$$\therefore \quad i = i_1 + \frac{u - 3i}{4} + i_1$$

又:
$$i_1 = \frac{u-3i}{1}$$
, 并代入上式

$$R_0 = \frac{u}{i} = \frac{31}{9}\Omega$$

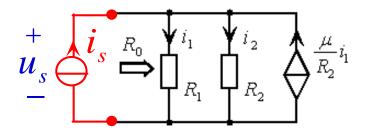
结论: 含线性受控源的单口网络, 对外等效 为一个电阻, 体现了受控源的电阻性。





例6 求图示单口电路的输入电阻(等效电阻)。

运用"在电路端口处外加电流源"的方法求解。



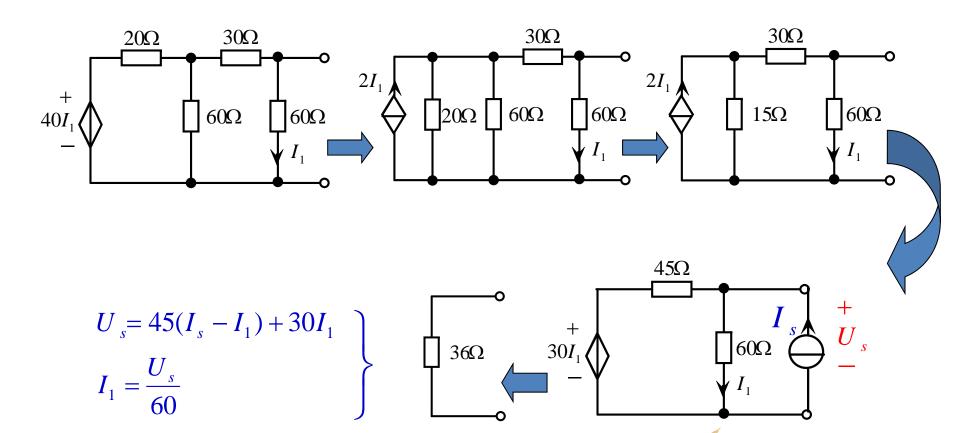
曲KCL,有:
$$i_s = i_1 + i_2 - \frac{\mu i_1}{R_2} = \frac{u_s}{R_1} + \frac{u_s}{R_2} - \frac{\mu}{R_2} \times \frac{u_s}{R_1}$$

整理上式,得:
$$R_0 = \frac{u_s}{i_s} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 - \mu}$$
 $\mu < (R_1 + R_2)$ 时,等效电阻R0大于0; $\mu > (R_1 + R_2)$ 时,等效电阻R0小于0.

结论: 含线性受控源的单口网络, 等效电阻为正电阻, 体现了受控源的电

阻性;等效电阻为负电阻,表示对外发出能量,体现了受控源的电源性。

例7 求图示单口电路的输入电阻。



$$\therefore R_0 = \frac{U_s}{I_s} = 36\Omega$$

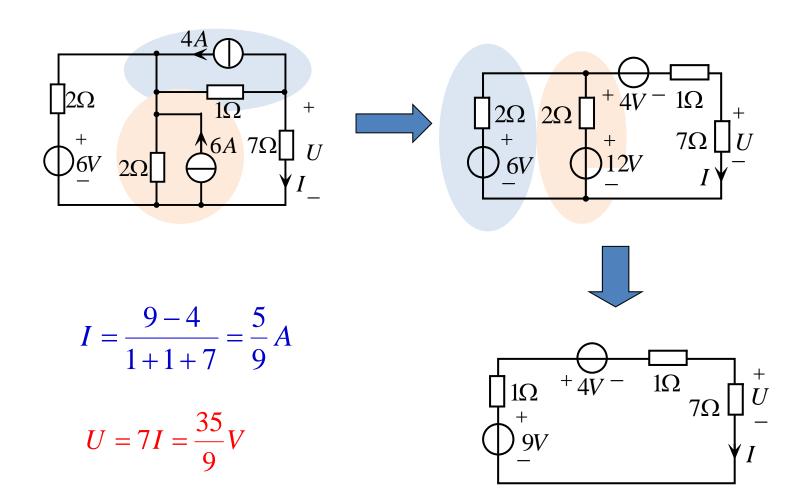
控制支路不能 参与任何变换!

2-4 用等效变换分析计算电路:

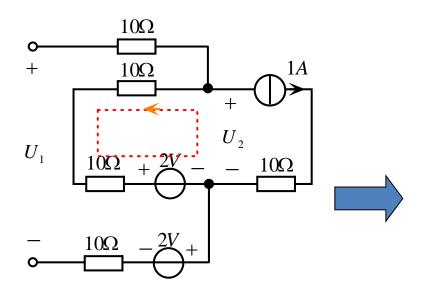
基本分析思想:

运用等效概念将电路化简为只有一个单回路或一个独立节点的最简形式,其中,受控源与独立电源同样处理,注意: 受控量所在的支路保持不变。

例1 图示电路,用等效变换求电压 U 。



例2 求 U_1 , U_2 , 及1A电流源吸收的功率P(端口开路)(习题2,二-8)。

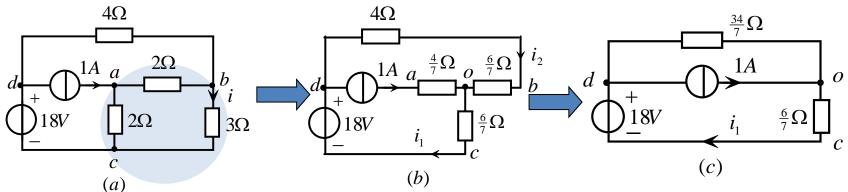


$$U_2 = -20 \times 1 + 2 = -18V$$

$$U_1 = U_2 + 2 = -16V$$

$$P_{1A} = (U_2 - 10 \times 1) \times 1 = -28W$$

例3 求图示电路中的电流 i。

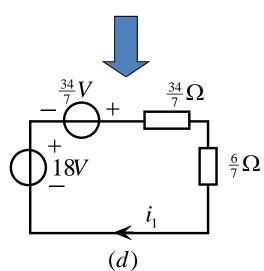


根据图 (d) 可得:
$$i_1 = \frac{18 + \frac{34}{7}}{\frac{34}{7} + \frac{6}{7}} = 4A$$

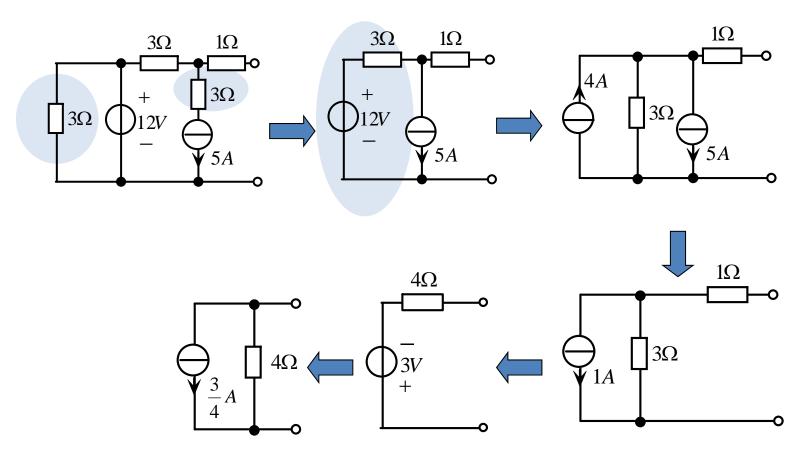
再回到图 (b): $i_2 = i_1 - 1 = 3A$

$$u_{bc} = \frac{6}{7}i_2 + \frac{6}{7}i_1 = 6V$$

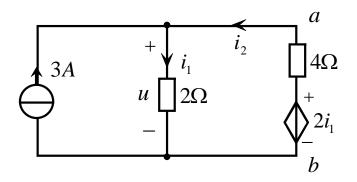
再回到题图(a): $i = \frac{u_{bc}}{3} = 2A$



例4 求图示电路的最简等效电路。



例5. 图示电路中,求 i_1, i_2 及支路a、b吸收的功率P。



应用KCL可得:
$$3 + i_2 = i_1$$

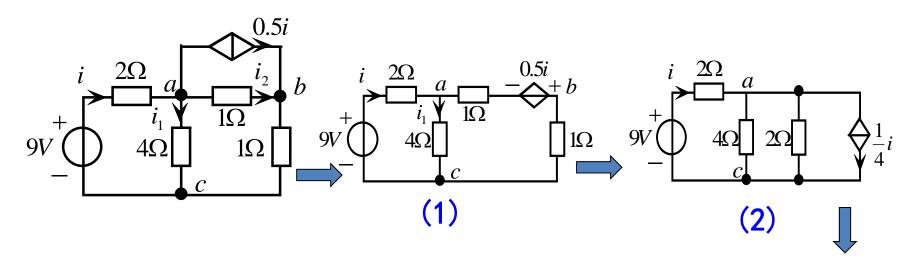
右边回路中,
$$4i_2 + 2i_1 = 2i_1$$
 应用KVL可得:

联立解得:
$$i_1 = 3A, i_2 = 0$$

故a、b支路吸收的功率为:

$$P = -ui_2 = 0$$

例6 图示电路, 求i和 0.5i受控源发出的功率。



进行等效变换 解:

曲 (3) 得
$$9 = (2 + \frac{4}{3})i - \frac{1}{3}i$$
 $i = 3A$

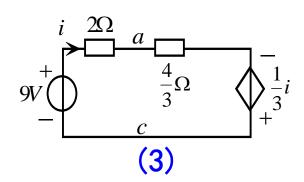
回到原图

$$u_{ac} = -2i + 9 = 3V$$

$$i_1 = \frac{u_{ac}}{4} = 0.75A$$

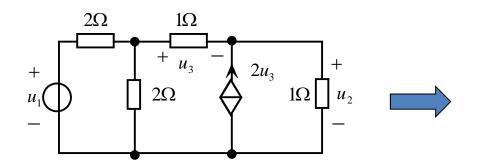
$$i_2 = i - 0.5i - i_1 = 0.75A$$

$$u_{ab} = 1i_2 = 0.75V$$



$$P = -u_{ab} \times 0.5i = -1.125W$$

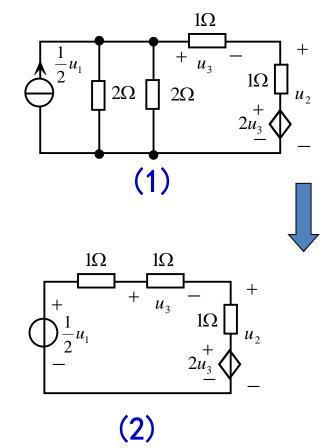
例7 图示电路,求 $\frac{u_2}{u_1}$ 的值



解: 进行等效变换

由 (2) 得
$$u_3 + u_3 + u_3 + 2u_3 = \frac{1}{2}u_1$$

$$u_1 = 10u_3$$



本章要点:

一、等效及等效变换的概念

(对外等效、对内不等效)

二、电源的连接及等效变换:

(理想电源;实际电源;实际电源间等效变换)

三、电阻的连接及等效变换:

(串联;并联;混联;星形连接与三角形连接及相互间等效变换)

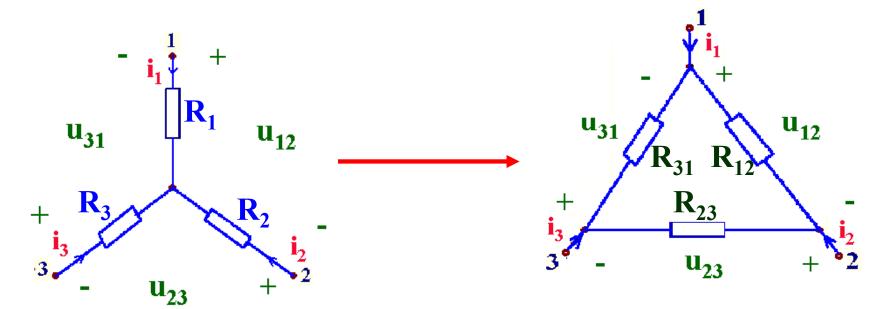
四、单口网络及无源单口网络的等效变换

- 1、单口网络不含任何电源(仅由电阻构成)
- 2、单口网络含受控源(不含独立源)

五、利用等效变换分析含受控源电路

(含受控源单口网络化简;含受控源简单电路分析)

从星形连接等效变换为三角形连接



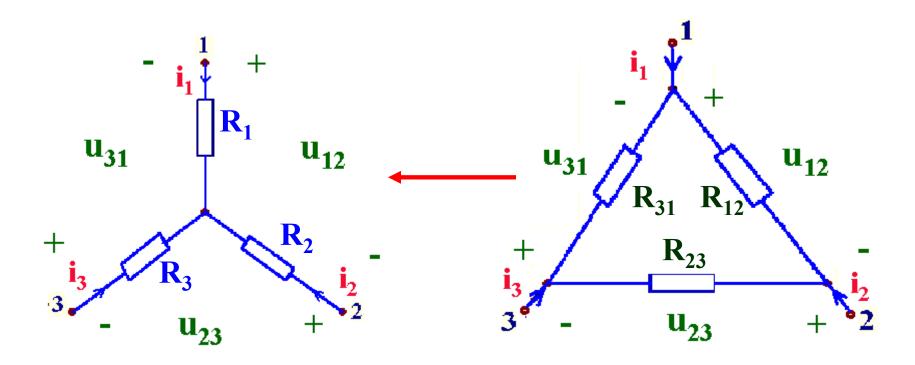
$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

变换式:

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

从三角形连接等效变换为星形连接



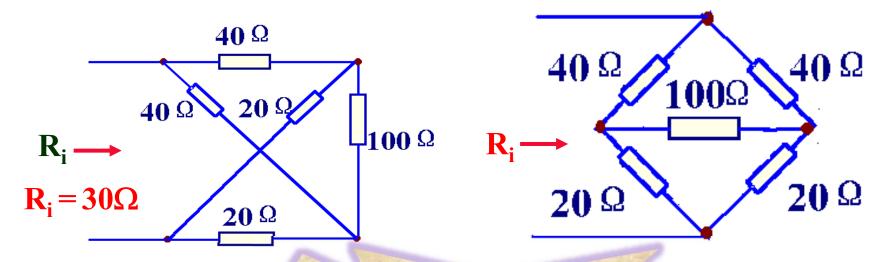
变换式:

$$R_{1} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_{2} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_{3} = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

导学复习: 典型例题与强化练习

练习1: 求等效电阻 Ri

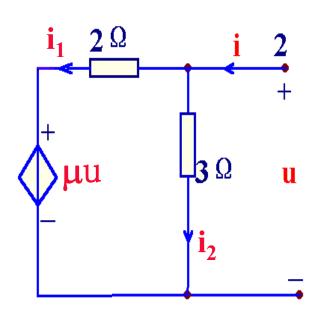
 6Ω



难以找出串并联关 类型: 无源单口网络,即,不含任何电源, 虑变化为另一种连 仅由电阻构成。 于分析计算(注意 求法: 利用电阻的串联、并联、△--Y或Y--△ 映器件之间的连接 等效变换的方法,求输入电阻 实际电路的几何形状) 3. 2 星形连接的三个电阻值相

3. 2. 星形连接的三个电阻值相 等(2Ω),便于等效计算。

练习2:将图示单口网络化为最简形式。



解: 外加电压u,有

#: 外加电压u,有
$$i_1 = \frac{u - \mu u}{2} \qquad i_2 = \frac{u}{3}$$

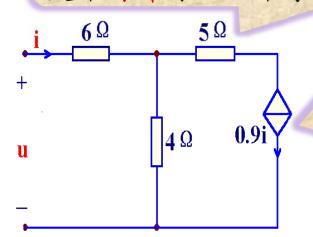
$$i = i_1 + i_2 = \frac{u}{3} + \frac{u - \mu u}{2} = (\frac{1}{3} + \frac{1 - \mu}{2})u$$

$$R = \frac{u}{i} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1 - \mu}{2}} = \frac{6}{5 - 3\mu}$$

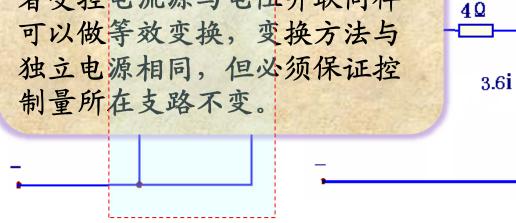
- 1. μ=5/3, 则, R=∞, 即, 开路;
- 2. μ 〈5/3, 则, R〉0, 即, 反映受控源的无源性;
- 3. µ〉5/3,则,R〈0,即,反映受控源的有源性。

练习3: 将图示单口网络化为最简形式。

与理想电流源串联的 支路对外可以短路等效



受控电压源与电阻串联或 者受控电流源与电阻并联同样 可以做等效变换, 变换方法与 独立电源相同, 但必须保证控 制量所在支路不变。

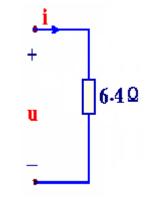


解: 单口网络等效变换, 由右图等效电路, 有

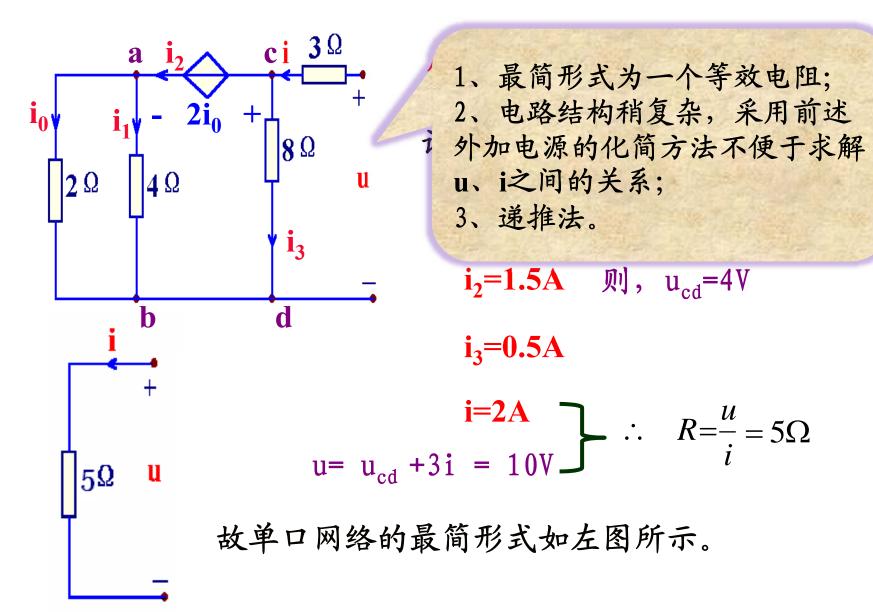
$$u = 6i + 4i - 3.6i$$

$$R = \frac{u}{i} = 6.4\Omega$$

最简形式电路为:



练习4:将图示单口网络化为最简形式。



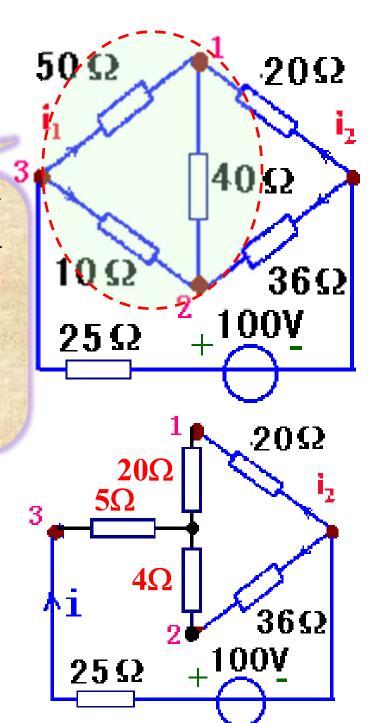
练习5:图示电路,求 i_1 、 i_2 。

- 1. 利用等效变换的思路,将其中一个 三角形连接等效变换为星形连接,以便 于进行电阻的串并联分析;
 - 2. 选取便于计算的其中一个三角形进行等效变换;
- 3. 三角形连接变换为星形连接时, 注意星形连接中的公共点的位置。

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{50 \times 10}{50 + 40 + 10}$$
 =5 Ω

解得: i = 2A $i_2 = -1A$

$$u_{31} = 30V$$
 $i_1 = 0.6A$



练习6: 求电压u、电流i。

 $0.9 k\,\Omega$ 8.1kΩ 18k Ω 1.8k Ω 2mA $0.9 \mathrm{k} \Omega$ 18kΩ 1.8kΩ

受控源可以采用独立电源的等效变换法进行变换

2... . 0.0:

闭合面,有

此3个节点所 因此,作为 思考:哪一类约束? 面)列写KCL方程。

i = 5mA

1、i为受控源的控制量,因此该支路应保持不变,不能参与变换; 8.1k^Q ²¹ 由此,该电路不能等效变换为一个单回路;

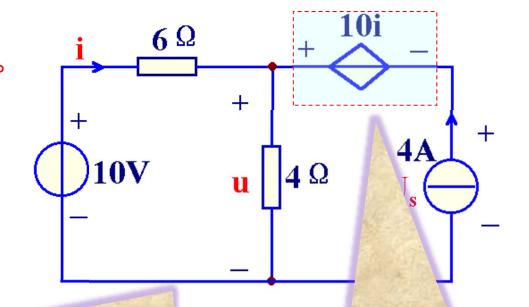
2、考虑等效变换为一个单节点。

练习7: 图示电路,求电压Us。

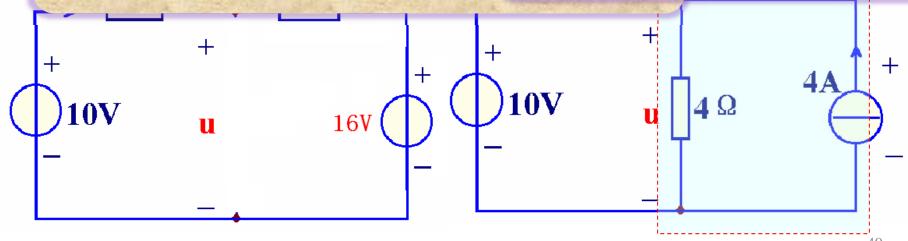
解: 由等效电路,有

$$i = \frac{10 - 16}{6 + 4} = -0.6A$$

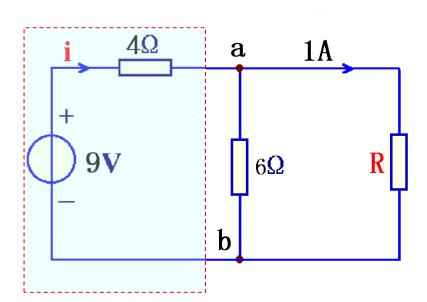
$$u = 10 - 6i = 13.6V$$



基本分析思想:运用等效概念将含约 与理想电流源串联的支路元件 化简为只有一个单回路或一个独立 对外可以短路等效。 对外可以短路等效。



练习8: 求i、电压u_{ab}以及电阻R。

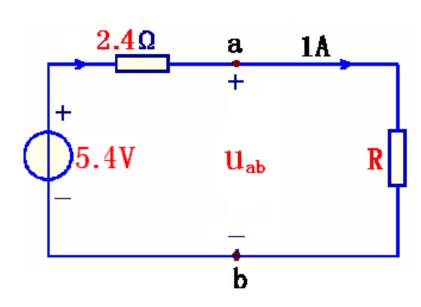


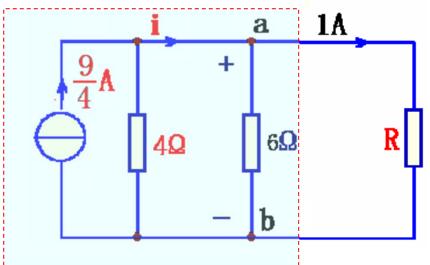
解: 经等效变换,有

$$u_{ab} = 3V$$

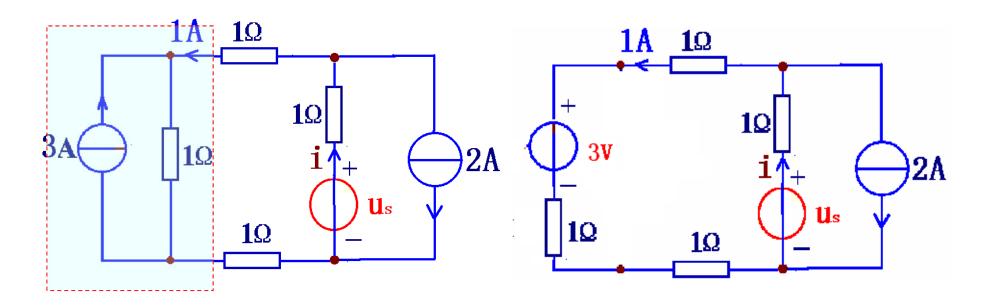
$$i=1.5A$$

$$R=3\Omega$$





练习9:图示电路, x_i 、 u_s 。

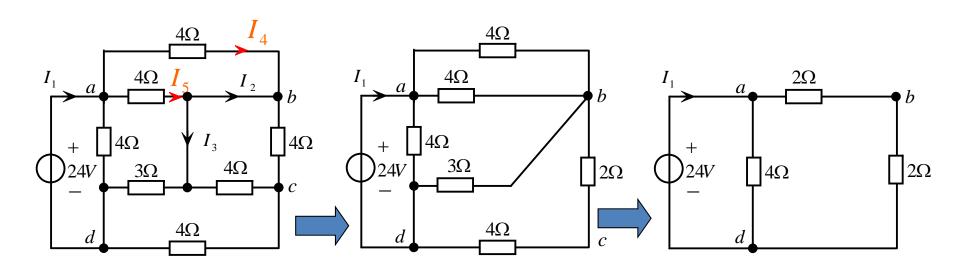


解: i=3A

经等效变换,有

$$u_S = (3*1) + (1*1) + 3 + (1*1) + (1*1) = 9V$$

练习10: 求图示电路中的电流 I_1, I_2, I_3



$$I_1 = 12A$$
 $U_{ab} = \frac{2}{2+2} \times 24 = 12V$ $U_{bd} = 12V$ $U_{bc} = \frac{2}{2+4}U_{bd} = 4V$ $I_4 = \frac{U_{ab}}{4} = 3A$ $I_{bc} = \frac{U_{bc}}{4} = 1A$ $I_2 = I_{bc} - I_4 = -2A$ $I_5 = \frac{U_{ab}}{4} = 3A$ $I_3 = I_5 - I_2 = 5A$

52