概率论与数理统计

第三节 参数的区间估计

- 一、基本概念
- 二、数学期望的置信区间
- 三、正态总体方差的区间估计
- 四、两个正态总体
  均值差的区间估计
- 五、两个正态总体
  方差比的区间估计

一、基本概念

定义6.7 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，θ为未知参数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体 X 的样本. 如果存在两个统计量 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对于给定的 $\alpha\ (0<\alpha<1)$, 使得

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha$$

则称区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 为参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**置信区间,** $\hat{\theta}_1$称为置信下限，$\hat{\theta}_2$称为置信上限.

二、数学期望的置信区间

1. 正态总体 X 的方差 σ^2 已知，求 μ 的置信区间.

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知，求总体均值 μ 的区间估计．设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本，则有：

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

则 $$P\{|U| \le u_{\alpha/2}\} = 1 - \alpha$$

其中 $u_{\alpha/2}$ 为标准正态分布的 $\alpha/2$ 上侧分位数 .

目 上 下 回 停 续

即 $$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right|\le u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

则 $$P\left\{\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left[\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

若给定 $\alpha=0.05$，查正态分布表得

$u_{0.025}=1.96$，于是得 μ 的置信度为95%的置信区间为：

$$\left[\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

例1 某车间生产的滚珠直径 X 服从正态分布 $N(\mu, 0.06)$，现从某天生产的产品中抽取6个，测得直径分别为(单位:mm).

$$14.6,\ 15.1,\ 14.9,\ 14.8,\ 15.2,\ 15.1$$

试求平均直径置信度为95%的置信区间.

解 置信度为 $1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$

$u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$，由样本值得

$$\bar{x}=14.95,\ n=6,\ \sigma=\sqrt{0.06}$$

目 上 下 例 停 续

由公式有：

置信下限 $\overline{X}-u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.95-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.75$

置信上限 $\overline{X}+u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=14.95+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=15.15$

所以平均直径 μ 的置信度为95%的置信区间为

$$[14.75, 15.15].$$

若取 $\alpha=0.01$，可算出 μ 的置信度为 99%

的置信区间为$[14.69, 15.21]$.

2. 正态总体X的方差σ^2未知，求μ的置信区间.

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，求总体均值 μ 的区间估计. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 来自总体X 的一个样本，则有：

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

从而对于给定的置信度，$1-\alpha$ 有

$$P\left\{|T| \le t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

其中 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 是自由度为 $n-1$ 的 t 分布关于 $\alpha/2$ 的上侧分位数，于是有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}}\right| \le t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

即 $$P\left\{\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\right\}$$

故 μ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\right]$$

例2 某糖厂用自动包装机装糖，设每包糖的重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知． 某日开工后测得9包糖的重量分别为(单位：kg)

99.3，98.7，100.5，101.2，98.3，99.7，99.5，102.1，100.5

试求每包糖平均重量 μ 的置信度为95%的置信区间.

解 由题设知置信度 $1-\alpha=0.95$，

查 t 分布表得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$

目 上 下 回 停 续

由样本观测值得 $\bar{x}=99.978,\ S_n^{*2}=1.47$

则总体 X 的数学期望 μ 的置信度为95%的置信区间为

$$\left[\ \bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\,S_n^*\big/\sqrt{n}\,,\ \bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\,S_n^*\big/\sqrt{n}\ \right]$$

$$=\left[\ 99.978-2.306\times\sqrt{1.47}/3,\ 99.978+2.306\times\sqrt{1.47}/3\ \right]$$

$$=[99.046,100.91]$$

目 上 下 回 停 续

三、正态总体方差的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ，σ^2未知，求总体方差或标准差 σ 的区间估计．设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体 X 的一个样本，则有：

$$\chi^2 = \frac{(n-1){S_n^*}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

从而对于给定的置信度 $1-\alpha$，有

$$P\left\{ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \chi^2 \le \chi^2_{\alpha/2} \right\} = 1-\alpha$$

从而：
$$P\left\{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

故 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left[\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right]$$

而 σ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}\right]$$

例3 从自动机床加工的同类零件中抽取16件，测得长度分别为(单位:cm):

12.15, 12.12, 12.01, 12.08, 12.09, 12.16,

12.06, 12.13, 12.07, 12.11, 12.08, 12.01,

12.03, 12.01, 12.03, 12.06

假设零件长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，分别求零件长度方差 σ^2 和标准差 σ 的置信度为95%的置信区间.

解 由题意有 $n=16, 1-\alpha=0.95, \alpha=0.05$，查 χ^2

分布表得 $\chi^2_{0.025}(15)=27.5,\ \chi^2_{0.975}(15)=6.26$，又

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=12.08,\quad (n-1)S_n^{*2}=0.037$$

置信下限 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}=\dfrac{0.037}{27.5}\approx 0.0013$

置信上限 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}=\dfrac{0.037}{6.26}\approx 0.0059$

故σ^2的置信度为95%的置信区间为

$[0.0013, 0.0059]$，σ 的置信区间为$[0.036, 0.077]$.

四、两个正态总体均值差的区间估计

设 X 与 Y 是两个独立的正态总体，且

$X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, $(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$

为总体 X 的样本，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$ 为总体 Y 的样本，

求 $\mu_1 - \mu_2$ 的区间估计.

由于统计量 $T = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

其中 $S_w = \sqrt{\dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1) S_1^{*2} + (n_2 - 1) S_2^{*2}}{n_1 + n_2 - 2}}$

于是，对于给定的置信度 $1-\alpha$，有

$$P\left\{|T| \le t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\} = 1-\alpha$$

其中 $t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ 是自由度为 n_1+n_2-2 的 t 分布关于 $\alpha/2$ 的上侧分位数.

即 $$p\{(\overline{X}-\overline{Y})-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2$$

$$\le (\overline{X}-\overline{Y})+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\} = 1-\alpha$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为:

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y})-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\right.$$

$$\left.(\overline{X}-\overline{Y})+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

目 上 下 回 停 续

例4 机床厂某日从两台机床加工的零件中，分别抽取若干个样品，测得零件的尺寸分别如下（单位：cm）：

A台：6.2，5.7，6.5，6.0，6.3，5.8，5.7，6.0，6.0，5.8，6.0

B台：5.6，5.9，5.6，5.7，5.8，6.0，5.5 5.7，5.5

假设两台机器加工的零件尺寸均服从正态分布，且方差相等，取置信度为0.95，试求两台机器加工的零件平均尺寸之差的区间估计.

解 设A台机器加工的零件尺寸为总体 X， B台机器加工的零件尺寸为总体 Y， 由题设知置信度 $1-\alpha=0.95,\ n_1=11,\ n_2=9$

查表 t 分布表得 $t_{0.025}(18)=2.1009$

经计算得两台机器加工的零件平均尺寸分别为

$$\bar{x}_A=6.0,\ \bar{y}_B=6.7$$

$$n_1S_1^2=\sum_{i=1}^{n_1}x_i^2-n_1\bar{x}_A^2=0.64$$

$$n_2S_2^2=\sum_{i=1}^{n_2}y_i^2-n_2\bar{y}_B^2=0.24$$

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-1)S_2^{*2}}{n_1-n_2-2}}=\sqrt{\frac{0.64+0.24}{11+9-2}}=0.2211$$

则 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信上下限分别为

置信下限 $\overline{X}-\overline{Y}-t_{0.025}(18)S_w\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{9}}=0.0912$

置信上限 $\overline{X}-\overline{Y}+t_{0.025}(18)S_w\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{9}}=0.5088$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为95%的置信区间为

$$[0.0912,\ 0.5088]$$

五、两个正态总体方差比的区间估计

设 X 与 Y 是两个独立的正态总体，且

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$为总体 X 的样本,

$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$为总体$Y$ 的样本,

μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2，未知.

求此两个总体的方差比 σ_1^2/σ_2^2 的区间估计.

由于统计量

$$F=\frac{S_2^{*2}\sigma_1^2}{S_1^{*2}\sigma_2^2}\sim F(n_2-1,n_1-1)$$

于是对给定的置信度$1-\alpha$有：

$$P\{F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\le F\le F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\}$$

$$=1-\alpha$$

从而可得

$$\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\le\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right\}$$

$$=1-\alpha$$

故 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}},\right.$$

$$\left.F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\right]$$

例5 为了考查温度对某物体断裂强度的影响，在70°C与80°C分别重复做了8次试验，测得断裂强力的数据如下 (单位：MPa)：

70°C：20.5，18.8，19.8，20.9，21.5，19.5，
21.0，21.2

80°C：17.7，20.3，20.0，18.8，19.0，20.1
20.2，19.1

假设70°C下的断裂强度用 X 表示，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
80°C下的断裂强度用Y 表示，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且 X与 Y 相互独立. 试求方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为度为90%的置信区间.

解 由题设知置信度为$1-\alpha=0.9$, $n_1=n_2=8$,

查 F 分布表得 $F_{0.05}(7,7)=3.79$

由 F 分布分位数的性质得

$$F_{0.95}(7,7)=\frac{1}{F_{0.05}(7,7)}=\frac{1}{3.79}=0.2639$$

经计算得两正态总体的样本均值和样本修正方差分别为

$$\bar{x}=20.4,\quad \bar{y}=19.4,$$

$$S_1^{*2}=0.8857,\quad S_2^{*2}=0.8286$$

则 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为90%置信区间为

$$\left[F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)\frac{S_1^{*^2}}{S_2^{*^2}}, F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)\frac{S_1^{*^2}}{S_2^{*^2}}\right]$$

$$=\left[0.2639\times\frac{0.8857}{0.8286}, 3.79\times\frac{0.8857}{0.8286}\right]$$

$$=[0.2821, 4.0515]$$

内容小结

点估计不能反映估计的误差和精度, 因此, 本节引入了区间估计.

置信区间是一个随机区间$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$,它覆盖未知参数具有预先给定的高概率（置信度）， 即对于任意的$\theta \in \Theta$，有 $P(\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$.

求置信区间的一般步骤(分三步).

正态总体均值与方差的区间估计

1. 单个总体均值 μ 的置信区间

$$\begin{cases} (1)\ \sigma^2\text{已知}, & \left(\overline{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right). \\ (2)\ \sigma^2\text{未知}, & \left(\overline{X} \pm \dfrac{S_n^*}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right). \end{cases}$$

2. 单个总体均值 σ^2 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

3. 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

σ_1^2和σ_2^2均为已知，$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，但$\sigma^2$为未知，

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

4. 两个总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

总体均值 μ_1, μ_2 为未知,

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$


再见

备用题

例1-1 某商店每百元投资的利润服从正态分布，均值为 μ，方差为 σ^2，其中 $\sigma^2 = 0.4$，现随机抽取的五天的利润率为 -0.2，0.1，0.8，-0.6，0.9，试求 μ，的置信水平为0.95的置信区间．为使 μ，的置信水平为0.95的置信区间长度不超过0.4，则至少应随机抽取多少天的利润才能达到.

解 以 X 表示每天的利润率，方差 σ^2已知，则 μ 的置信区间为 $\left[\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

由题意可得置信度为 $1-\alpha=0.95,\ \overline{x}=0.2,\ n=5.$

查标准正态分布表得 $u_{\alpha/2}=1.96$

故 μ 的置信水平为0.95的置信区间为

$$[-0.354,\ 0.754].$$

当 $\alpha=0.05,\ n$ 未定时，置信区间长度为

$$L=2u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times1.96\times\frac{\sqrt{0.04}}{\sqrt{n}}$$

由 $L\le0.4$，则

$$n\ge\left(2\times1.96\times\frac{\sqrt{0.4}}{4}\right)^2=38.46$$

所以 $n\ge39.$

目 上 下 回 停 续

例5-1 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得这些滚珠的直径（mm）如下:

甲机床：15.0，14.8，15.2，15.4，14.9，15.1，15.2，14.8

乙机床：15.2，15.0，14.8，15.1，15.6，14.8，15.1，14.5，15.0

(1) 若两台机床生产的滚珠直径的标准差分别是 $\sigma_1 = 0.18$, $\sigma_2 = 0.24$，求这两台机床生产的滚珠直径均值差 $\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.90的置信区间.

(2) 若 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ 未知，求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.90的置信区间.

(3) 若两台机床生产的滚珠直径的均值分别是 $\mu_1 = 15.0$, $\mu_2 = 15.0$，求方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为0.90的置信区间.

(4) 若 μ_1，μ_2 未知，求方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为0.90的置信区间.

解

$$n_1 = 8,\ \bar{x} = 15.05,\ S_1^{*2} = 0.0457$$

$$n_2 = 9,\ \bar{y} = 14.9,\ S_2^{*2} = 0.0575$$

(1) 当 $\sigma_1 = 0.18,\ \sigma_2 = 0.24$ 时，$\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.90的置信区间为

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X} - \bar{Y} + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

查标准正态分布表得 $u_{0.05} = 1.645$，从而

$$\bar{X} - \bar{Y} - u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_2}} = -0.018$$

$$\bar{X} - \bar{Y} + u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = 0.318$$

故置信区间为$[-0.018, 0.318]$.

(2) 当 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 未知时，$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.90的置信区间为

$$[(\overline{X}-\overline{Y})-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},$$

$$(\overline{X}-\overline{Y})+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]$$

式中 $$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^{*^2}+(n_2-1)S_2^{*^2}}{n_1+n_2-2}}$$

目 上 下 回 停 续

$t_{0.05}(15)=1.7531,\ S_w=0.486$，则

$$\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=-0.044,$$

$$\bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=0.344.$$

(3) 当 μ_1，μ_2已知时，σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$F_{0.05}(8,9)=3.23,\ F_{0.95}(8,9)=\frac{1}{F_{0.05}(8,9)}=0.295$$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{F_{\alpha/2}(n_1,n_2)\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2},\ \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}\right]$$

这里 $\sum_{i=1}^{8}(X_i-15.0)^2=0.34,\ \sum_{i=1}^{9}(Y_i-14.9)^2=0.46$

$$F_{0.05}(8,9)=3.23,\ F_{0.95}(8,9)=\frac{1}{F_{0.05}(9,8)}=0.295$$

从而得 σ_1^2/σ_2^2 的0.90的置信区间为

$$\left[\frac{0.34/8}{3.23\times 0.46/9}, \frac{0.34/8}{0.295\times 0.46/9}\right]=[0.257, 2.918]$$

(4) 当 μ_1，μ_2 未知时，σ_1^2 / σ_2^2的置信度为的0.90的置信区间为

$$\left[\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right]$$

这里 $F_{0.05}(7,8)=3.50, F_{0.95}(7,8)=\dfrac{1}{F_{0.05}(8,7)}=0.268$

从而 σ_1^2 / σ_2^2 的0.90的置信区间为

$$\left[\frac{0.0457}{0.0575}\times\frac{1}{3.5}, \frac{0.0457}{0.0575}\times\frac{1}{0.268}\right]=[0.227, 2.965].$$