- 基本蕴涵重言式

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$
3. $\neg A \Rightarrow A \to B$
4. $B \Rightarrow A \to B$
5. $\neg(A \to B) \Rightarrow A$
6. $\neg(A \to B) \Rightarrow \neg B$
7. $\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$
8. $\neg B \wedge (A \vee B) \Rightarrow A$
9. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$
10. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$

蕴涵重言式

11. $(A\to B)\wedge(B\to C) \Rightarrow (A\to C)$

12. $(A\to B)\wedge(C\to D) \Rightarrow (A\wedge C) \to (B\wedge D)$

13. $(A\vee B) \wedge (A\to C) \wedge (B\to C) \Rightarrow C$

14. $A \Rightarrow B \to(A\wedge B)$

15. $A\to B \Rightarrow (A \vee C) \to (B \vee C)$

16. $A\to B \Rightarrow (A \wedge C) \to (B \wedge C)$

17. $A\to (B\to C) \Rightarrow B\to (A\to C)$

等价重言式也可以作为蕴涵重言式

例（方法一）

证：┐Q∧(P→Q) □ ┐P

证┐Q∧(P→Q) →┐P 永真

P	Q	┐Q	P→Q	┐Q∧(P→Q)	┐P	┐Q∧(P→Q) →┐P
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1

例（方法二）

- 证：$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P$

$\Leftrightarrow \neg (\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \vee \neg P$

$\Leftrightarrow (Q \vee \neg (P \rightarrow Q)) \vee \neg P$

$\Leftrightarrow (Q \vee \neg (\neg P \vee Q)) \vee \neg P$

$\Leftrightarrow (Q \vee P \wedge \neg Q) \vee \neg P$

$\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q) \vee \neg P$

$\Leftrightarrow Q \vee P \vee \neg P \Leftrightarrow T$

蕴涵推理

蕴涵推理简称推理

数学推理：一般先有一些条件，由条件出发通过证明最终得到定理。推理的三要素：

(1) 前提：已知条件

(2) 证明：由前提出发最终得到定理的实施过程。期间使用两种手段，即推理规则与证明过程

(3) 定理：推理的结果，它是公式，通过证明而最终确定其为真

前提和定理均可形式化为公式，现对推理规则和证明过程形式化

推理规则是由蕴涵重言式得到的蕴涵推理规则，表示为：

$$\text{前提}1, \text{前提}2, \ldots, \text{前提}n \vdash \text{结论}$$

(1) 符号 $\vdash$ 表示“推出”之意

(2) 蕴涵重言式$A \Rightarrow B$表示“若A为真，则B亦为真”，即以A为前提，必得出B为其结论，故对$A \Rightarrow B$必有

$$A \vdash B$$

(3) 对$A \wedge B \Rightarrow C$，必然有：

$$A, B \vdash C$$

由蕴涵重言式可以导出以下推理规则：

1. $A \vdash (A\vee B)$， $B \vdash (A\vee B)$ （附加式）
2. $A, B \vdash A$， $A, B \vdash B$ （简化式）
3. $A, B \vdash A\wedge B$
4. $\neg A, A\vee B \vdash B$ （析取三段论）
5. $A, A\rightarrow B \vdash B$ （假言推论—分离规则）
6. $\neg B, A\rightarrow B \vdash \neg A$ （拒取式）
7. $A\rightarrow B, B\rightarrow C \vdash A\rightarrow C$ （假言三段论）
8. $A\rightarrow B, C\rightarrow D \vdash (A\wedge C) \rightarrow (B\wedge D)$ （合取推理）
9. $A\vee B, A\rightarrow C, B\rightarrow C \vdash C$ （两难推论）
10. $A\rightarrow B, A\rightarrow \neg B \vdash \neg A$ （归谬推理）
11. $A\rightarrow B \vdash (A\wedge C) \rightarrow (B\wedge C)$ （简单合取推理）

替换规则、代入规则同样适用

证明过程

由前提到定理的一种形式化过程的规范描述。

定义：证明过程可以形式化为一组公式序列$C_1, C_2, \ldots, C_n$，在该序列中只允许出现按下面三种方法所引入的公式：

（1）前提引入P：在C_i中允许出现前提；

（2）推理引入T：在序列中允许使用推理规则，而推理规则的结论允许出现在C_i中；

（3）附加前提引入CP：若待证定理中有$A \rightarrow B$的形式，则可以将A作为附加前提引入而允许在C_i中出现，此后若B出现在$C_j(j>i)$中，则$A \rightarrow B$即是定理。

最后出现的C_n即为定理。

例

构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我明天就有课. 若我明天有课，今天必备课. 我今天没备课. 所以，明天不是星期一、也不是星期三.

解 (1) 设命题并符号化

设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我明天有课，s：我今天备课

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\to r$，$r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$　结论：$\neg p\wedge\neg q$

(3) 证明

① $r\rightarrow s$	P
② $\neg s$	P
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p\vee q)\rightarrow r$	P
⑤ $\neg(p\vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p\wedge\neg q$	⑤置换

CP规则

$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

上式□ $\neg (P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn) \vee (P \rightarrow Q)$

□ $\neg (P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn) \vee (\neg P \vee Q)$

□ $\neg P1 \vee \neg P2 \vee \ldots \vee \neg Pn \vee \neg P \vee Q$

□ $(\neg P1 \vee \neg P2 \vee \ldots \vee \neg Pn \vee \neg P) \vee Q$

□ $\neg (P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \wedge P) \vee Q$

□ $(P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \wedge P) \rightarrow Q$

前提：$p\vee q$，$p\to r$，$r\to\neg s$

结论：$s\to q$

证明

① s	附加前提引入
② $p\to r$	前提引入
③ $r\to\neg s$	前提引入
④ $p\to\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论
⑧ $s\to q$	CP规则

归谬法 (反证法)

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

做法

在前提中加入$\neg B$，推出矛盾.

理由

$$
\begin{aligned}
& A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0 \\
\Leftrightarrow\ & A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0
\end{aligned}
$$

例

前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明 用归缪法

① q	结论否定引入
② $r\rightarrow s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

作业

- 完成图片中的4道推理证明习题

19. 试用假设推理方法证明$\neg(P\wedge\neg Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg R\rightarrow\neg P$.

20. 试用假设推理方法证明$(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\wedge(\neg S\vee P)\wedge Q\rightarrow(S\rightarrow R)$.

11. 证明下列论证的有效性：

(1) $(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow C)$，$\neg(B\wedge C)$，$D\vee A$ 推得 D

(2) $P\rightarrow Q$，$(\neg Q\vee R)\wedge\neg R$，$\neg(\neg P\wedge S)$推得$\neg S$

(3) $P\wedge Q\rightarrow R$，$\neg R\vee S$，$\neg S$ 推得$\neg P\vee\neg Q$

(4) $B\wedge C$，$(B\leftrightarrow C)\rightarrow(H\vee G)$推得 $G\vee H$

(5) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$，$R\wedge S$，$Q\wedge T$ 推得 R

12. 证明下列结论：

(1) $\neg P\vee Q$，$\neg Q\vee R$，$R\rightarrow S\Rightarrow P\rightarrow S$

(2) $P\rightarrow Q\Rightarrow P\rightarrow P\wedge Q$

(3) $P\vee Q\rightarrow R\Rightarrow P\wedge Q\rightarrow R$

(4) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)$，$Q\rightarrow(R\rightarrow S)\Rightarrow P\rightarrow(Q\rightarrow S)$