第1篇 力学基础

”物理学的头一年一向是最困难的，在第一年里，学生要接受新思想、新概念、新方法，要比在高年级或者研究生的课程还要多得多，一个学生如果清楚地理解了力学中所阐述的基本物理内容，即使他/她还不能在复杂的情形下运用自如，他/她也克服了学习物理学的大部分真正的困难了……”

——伯克利物理学教程 引言

第1章 质点运动学

本章内容

§ 1.1 质点运动的描述

§ 1.2 质点运动学的基本问题

§ 1.3 叠加原理与曲线运动

§ 1.4 自然坐标及自然坐标中的速度、加速度

§ 1.5 相对运动

质点

- 质点运动的描述
  - 参考系
  - 坐标系
- 描述质点运动的物理量
  - 位矢
    - 轨迹方程
    - 运动方程
  - 位移与路程
  - 速度
  - 加速度

§1.1

- 质点运动问题的研究方法
  - 第一类问题（微分）
  - 第二类问题（积分）
- 常见的几种质点运动形式
  - 匀加速直线运动

§ 1.2

  - 抛体运动 § 1.3
  - 圆周运动 § 1.4
- 相对运动 § 1.5

§1.1 质点运动的描述

主要内容：

1. 质点 参考系 坐标系
2. 位置矢量与运动方程
3. 位移与路程
4. 速度
5. 加速度

学习要求：

掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点机械运动和特征的物理量

1.1.1 质点 参考系 坐标系

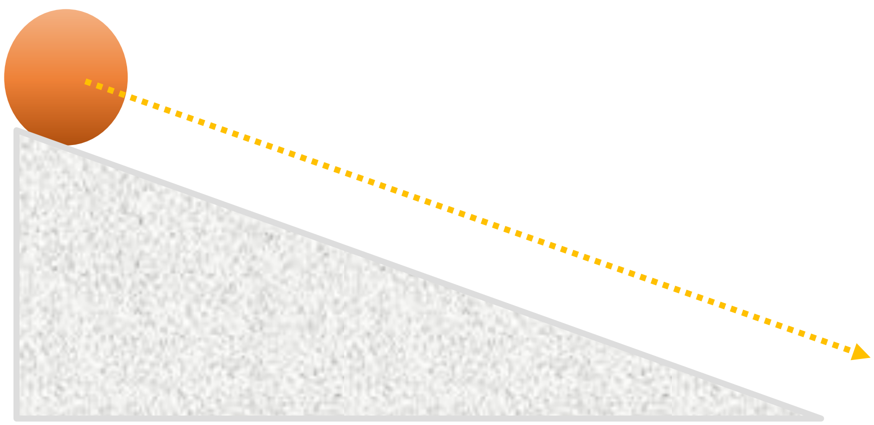
质点： 在所研究的问题中，可忽略形状和大小的物体

—— 有质量而无形状和大小

➢ **说明：** (1) 质点是一个理想模型；

(2) 质点的概念是相对的。

(3) 物体不变形且无转动运动时可视为质点



物体上任一点都可以代表物体的运动

参考系：为描述物体的运动而选取的一组**相对静止**的物体。

说明：

- 不存在绝对参考系，只存在相对参考系
- 参考系的选择，原则上是任意的，主要根据问题的性质和研究方便而定。
- 在描述物体的运动时，必须指明参考系。不同参考系中，对同一运动的描述一般不同。

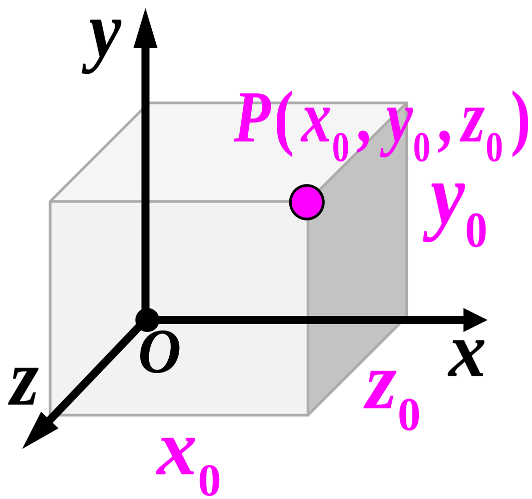
车厢的人：垂直下落

地面的人：抛体运动

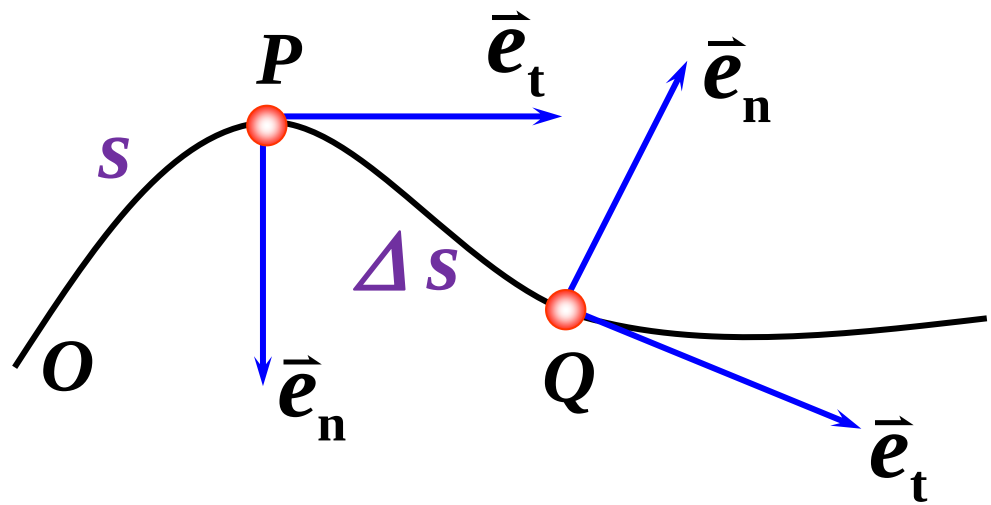
----运动的描述是相对的

坐标系：为了对物体的运动作出定量描述而对参考系的一种数学抽象。

常用坐标系：



直角坐标系



自然坐标系

(把坐标建立在运动轨迹上)

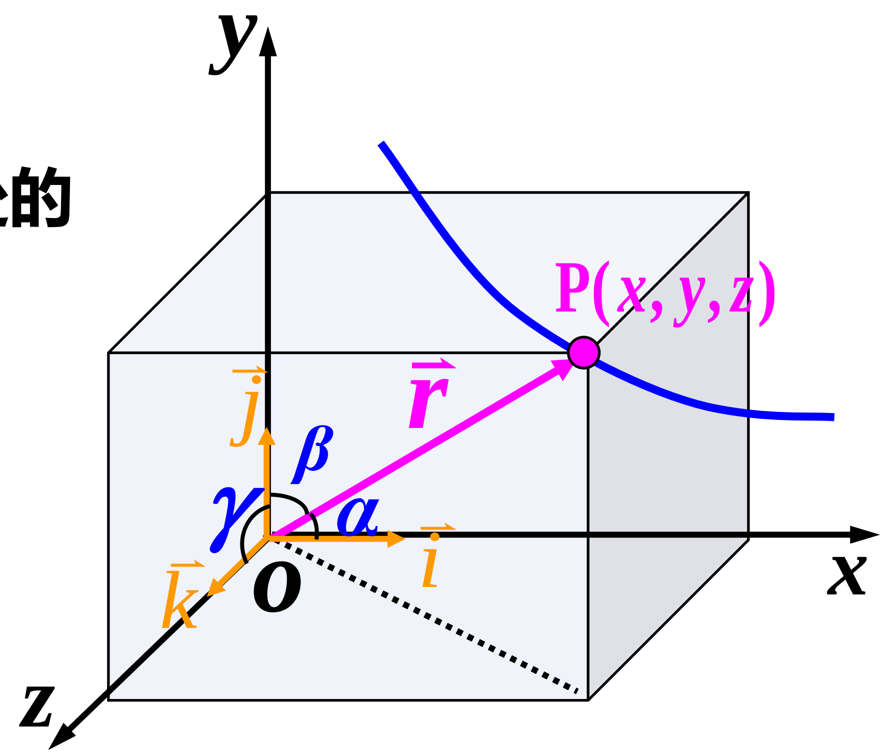
其它坐标系： 柱(面)坐标系 (轴对称问题) 球(面)坐标系 (球对称问题) 极坐标系 (某些平面问题)

说明：同一参照系中的不同坐标系对同一运动的数学描述是不同的，但对物体运动的规律是没有影响的

1.1.2 位置矢量与运动方程

1. 位置矢量（Position Vector）

定义：参考点引向质点所在处的矢量，用符号 $\vec{r}$ 表示。



在直角坐标系中

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

位矢的大小：

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位矢的方向余弦：

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

2. 运动方程（Equation of motion）

定义:质点的位矢随时间变化的函数关系。

矢量式 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

分量式 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$

质点被约束在二维平面（如沿 x , y 平面）内运动时

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

质点被限在一直线（如沿x轴）运动时 $x=x(t)$

3. 轨迹方程

从运动方程中消去参数 t 可得到运动轨迹方程。

例 **已知一质点的运动方程为**

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t \qquad (1)$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad (2)$$

式中 $x_0, y_0, v_{0x}, v_{0y}, a_y$ **等为常量。**

求 **质点的运动轨迹。**

解 **从式（1）中解出参数*t*，代入式（2）中得到轨迹方程**

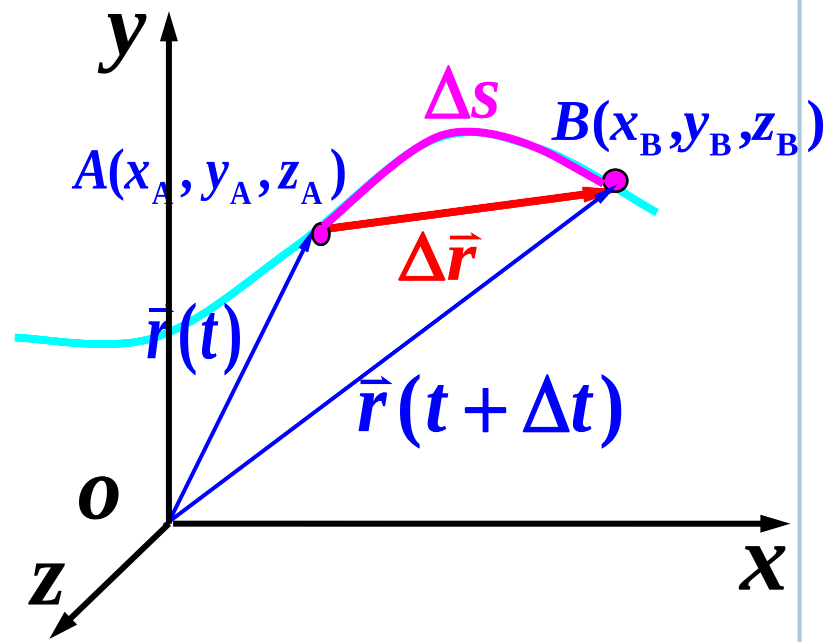
$$y(x) = y_0 + \upsilon_{0y}\left(\frac{x - x_0}{\upsilon_{0x}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{\upsilon_{0x}}\right)^2 a_y$$

——抛物线方程

1.1.3 位移与路程

1. 位移（Displacement）

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$



描述质点位置变化的物理量

在直角坐标系中：

$$\Delta\vec{r} = (x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}) - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k})$$

$$= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

2. 路程（Length of path）

质点沿运动轨迹所经过的实际路径长度，用 Δs 表示。

说明:

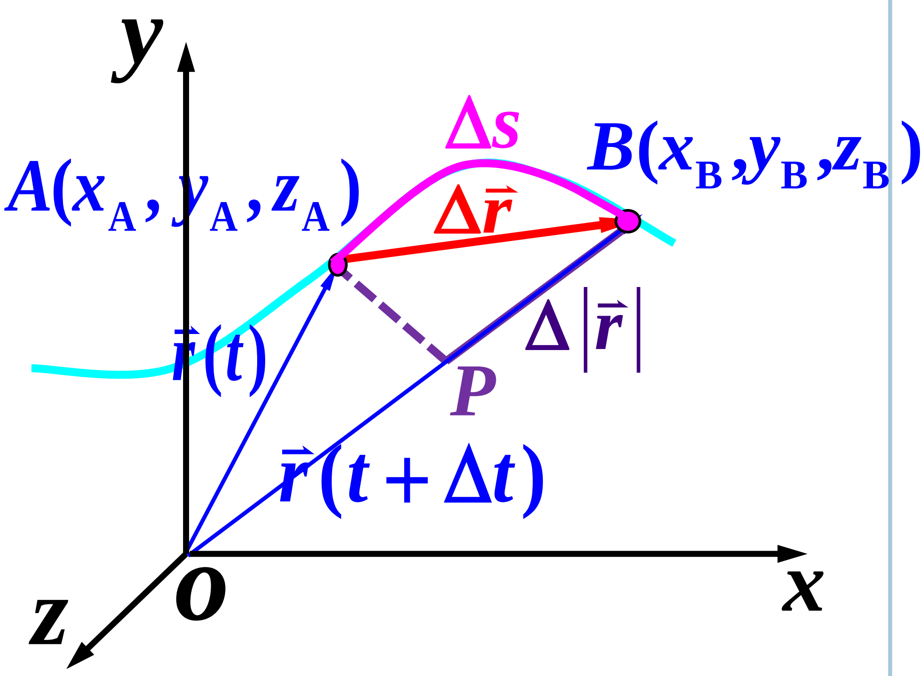
(1) 路程是标量，位移是矢量。

位移的模 $\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \overline{AB}$

路程 $\Delta s = \overset{\frown}{AB}$

位矢大小的增量

$\Delta|\vec{r}| = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{PB}$



(2) 位移的大小一般不等于路程。即 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$

当Δt 很小时近似相等，即 $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s$

当$\Delta t \to 0$ 时 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}|\Delta\vec{r}| = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s$ 即 $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$

1.1.4 速度与速率（Velocity and Speed）

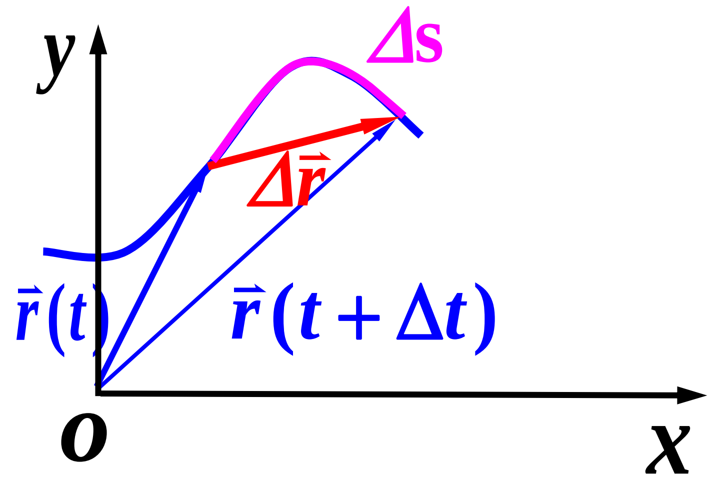
速度：描述质点**空间位置**变化的快慢及方向

1. 平均速度

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

大小: $\left|\overline{\vec{v}}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$

方向: $\Delta\vec{r}$ 的方向



速率：描述质点沿**实际运行轨道**移动的快慢

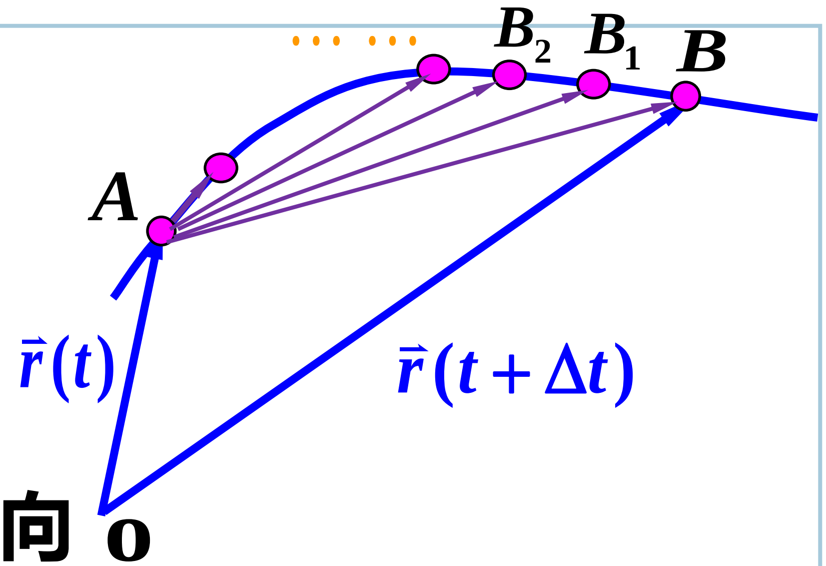
2. 平均速率

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

注意：平均速度的大小 $\left|\overline{\vec{v}}\right| \neq \overline{v}$ 平均速率

3.瞬时速度

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$



大小: $|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{|\mathrm{d}\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$

方向:轨道切线指向运动方向

速度等于位矢对时间的一阶导数

4.瞬时速率

$$\lim_{\Delta t\to 0}|\Delta\vec{r}|=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta s$$

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$|\mathrm{d}\vec{r}|=\mathrm{d}s \Rightarrow |\vec{v}|=v$$

瞬时速率反映了瞬时速度的大小

瞬时速率等于路程对时间的一阶导数。瞬时速率是恒取正值的标量。

- **学生1:**

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{dr(t)}{dt}$$

- **学生2:**

$$\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

哪个结果是正确的?

在直角坐标系中

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$$

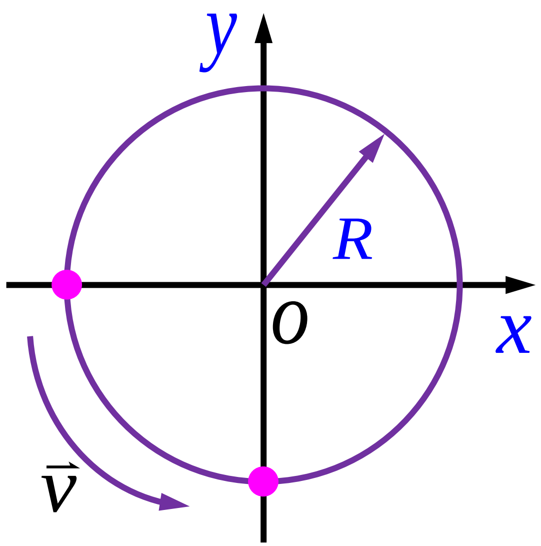
大小: $|\vec{\upsilon}| = \upsilon = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2 + \upsilon_z{}^2}$

方向夹角: $\alpha = \arccos\frac{\mathrm{x}}{r}$

例 质点作半径为R，速率为v 的匀速率圆周运动。

求 试写出由A点到B点下列各物理量：位移 $\Delta\vec{r}$ 、路程s、速度变化 $\Delta\vec{v}$ 、速度变化的大小 $|\Delta\vec{v}|$ 、速率的变化 Δv。

解 由图可知，位移



$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=-R\vec{j}-(-R\vec{i})$$

$$=R\vec{i}-R\vec{j}$$

路程 $s=\dfrac{1}{2}\pi R$

速度增量 $\Delta\vec{v}=\vec{v}_B-\vec{v}_A=v\vec{i}-(-v\vec{j})=v\vec{i}+v\vec{j}$

速度增量的大小 $|\Delta\vec{v}|=\sqrt{v^2+v^2}=\sqrt{2}v$

速率的增量 $\Delta v=v-v=0$

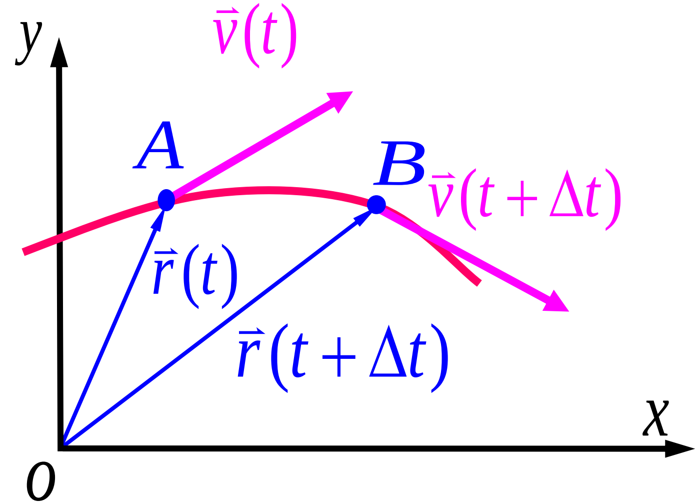
1.1.5 加速度（Acceleration）

描述质点运动速度变化快慢的物理量

1. 平均加速度

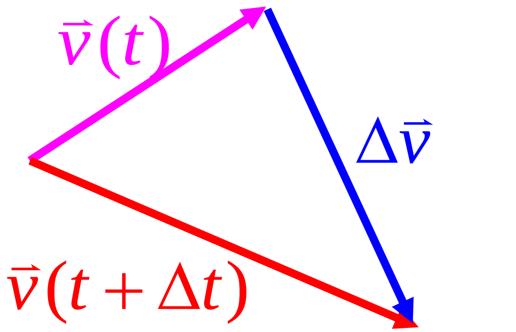
$$\bar{a} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

方向： $\Delta \vec{v}$ **的方向**



2. 瞬时加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$



加速度等于速度对时间的一阶导数，位矢对时间的二阶导数。

说明：

1.曲线运动中，加速度总指向运动轨道凹的一侧。

2.一维运动情况下 $\vec{a}$ 与 $\vec{v}$ 的方向在同一直线上。

在直角坐标系下

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

$$=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

大小 $a=|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

方向夹角 $\alpha=\arccos\frac{a_x}{a}$

讨论：加速度值越大，速度越大吗？
加速度值很大，速度大小是否有可能不变？

A	是	是
B	是	否
C	否	是
D	否	否

讨论：

加速度反映的是速度的变化， $\vec{a}$ 只与 $\overrightarrow{\Delta v}$ 有关，而与 $\vec{v}$ 本身无关

速度 $\vec{v}$ 是矢量，速度大小或方向任一因素发生变化，表明速度就发生了变化，即要产生加速度。

- 单方向变速直线运动

  ——— 速度的方向不变，大小随时间变化

- 匀速圆周运动

  ——— 速度的大小不变，方向随时间变化

- 一般的曲线运动

  ——— 速度的大小和方向均随时间变化

小结

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

$$\vec{\upsilon}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

矢量性

瞬时性

相对性