第四章 函数插值

§1 引言

§2 Lagrange插值法

§3 Newton插值法

§4* 等距节点插值

§5 Hermite插值

§6 分段插值

§7* 三次样条插值

§1 引言

问题提出

仅有采样值，但需要知道非采样点处的函数值。

解决上述问题的一种思路：对用数据表给出的未知函数，建立一个便于计算的近似函数作为表达式。

函数插值法是建立近似函数表达式的一种基本方法。

一 插值问题

设 $\mathbf{P}_n$ 为不超过 n 次的多项式集合，即

$$\mathbf{P}_n = \left\{\varphi(x) \middle| \varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, a_i \in R, 0 \le i \le n\right\}$$

已知 $\{x_i\}_{i=0}^n \subset [a, b]$ 处的函数值 $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$。求 $\varphi(x) \in \mathbf{P}_n$，使得

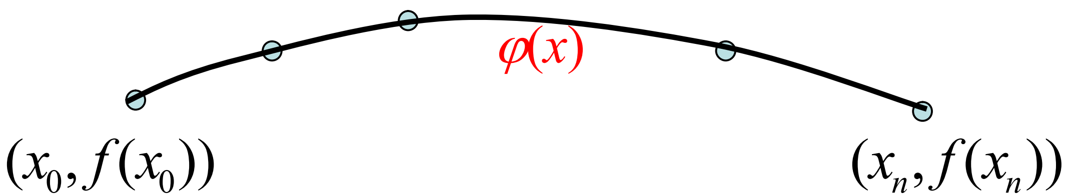
$$\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n$$

如何求插值函数 $\varphi(x)$ 称为**插值问题**。

$\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n$ 称为**插值条件**。

$\varphi(x)$ 称为**插值函数**，$f(x)$ 称为**被插值函数**，$[a,b]$ 称为**插值区间**，$\{x_i\}_{i=0}^n$ 称为**插值节点**。

几何意义



二 插值多项式的存在唯一性

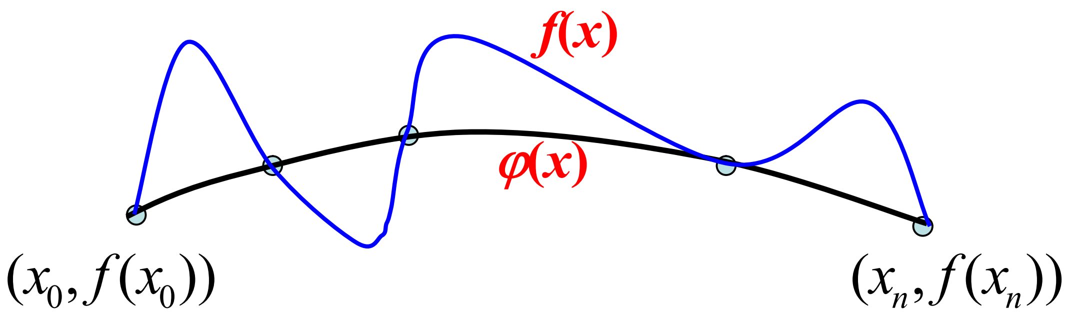
设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 求 $\varphi(x)$ 要求其满足 $\varphi(x_i)=f(x_i), i=0,1,\cdots,n$，即需求多项式 $\varphi(x)$ 的系数。

由
$$\begin{cases}\varphi(x_0)=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=f(x_0)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \varphi(x_n)=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=f(x_n)\end{cases}$$

即
$$\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(x_0)\\ f(x_1)\\ f(x_2)\\ \vdots\\ f(x_n)\end{bmatrix}$$

当节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 互异, 系数矩阵非奇异, 得到：***n*+1**个插值条件确定的不超过***n*** 次的插值多项式存在唯一。

三 代数插值的误差估计



Rolle定理函数$f(x)$满足：
1 在闭区间$[\boldsymbol{a},b]$上连续，
2 在开区间(a,b) 内可导，
3 $f(a)=f(b)$，则至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$。

设 $\varphi(x)\in\mathbf{P}_n$ $\quad R_n(x)=f(x)-\varphi(x)$ 称为**插值余项**。

定理 设$f^{(n)}(x)$在区间$[a, b]$上连续，$f^{(n+1)}(x)$在区间(a, b)内存在。$\varphi(x)$是满足插值条件的不超过n次的插值项式。则对任意$x\in[a,b]$，存在$\xi=\xi(x)\in(a,b)$，使得

$$R_n(x)=f(x)-\varphi(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

证明 由插值条件知 $R_n(x_i)=f(x_i)-\varphi(x_i)=0, i=0,1,2,\cdots,n$

故设 $\boxed{R_n(x)=k(x)\omega_{n+1}(x)}$

做以t为自变量的辅助函数

$$\boxed{g(t)=f(t)-\varphi(t)-k(x)\omega_{n+1}(t)}$$

$g(t)$的几阶导数至少有一个零点？

则$x_0,x_1,\cdots,x_n$以及x为$g(t)$的零点。

显然$g^{(n)}(t)$在区间$[a, b]$上连续，$g^{(n+1)}(t)$在区间(a, b)内存在。

对函数$g(t)$在区间$[a,b]$上的n+2互异零点形成的n+1个子区间上使用罗尔(Rolle)定理：函数$g'(t)$在区间(a,b)上至少有n+1个互异零点。

这n+1个零点又形成n个子区间，对$g'(t)$在这些子区间上使用罗尔定理：函数$g''(t)$在区间(a,b)上至少有n个互异零点。

$R_n(x)=f(x)-\varphi(x)$ $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

以此类推，函数$g^{(n+1)}(t)$在区间(a,b)上至少有1个零点 $\xi=\xi(x;x_0,x_1,\cdots,x_n)$ ，使得$g^{(n+1)}(\xi)=0$。

由 $g(t)=f(t)-\varphi(t)-k(x)\omega_{n+1}(t)$

求导 $g^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-(n+1)!k(x)$ 得 $k(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

故 $R_n(x)=k(x)\omega_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$ $\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

Remarks

① 若$\left|f^{(n+1)}(x)\right|$在区间$[a,b]$有上界$M_{n+1}$时，有

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

② 可通过求解线性方程组得到插值多项式，但计算量大。

§2 Lagrange插值法

插值问题：已知$\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$处的函数值$\{f(x_i)\}_{i=0}^{n}$。求$\varphi(x) \in \mathbf{P}_n$，使得$\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n$。求插值多项式的方法简称为**插值法**。

求解函数插值问题：

具体方法

- **§2 Lagrange插值法**
- **§3 Newton插值法**
- **§4 等距节点插值法**

由于插值多项式的存在唯一性，无论采用何种方法构造出的插值多项式，它们均恒等。

一 Lagrange插值基函数

通常选取 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 作为插值空间 $\mathbf{P}_n$ 的一组基函数。本节引入该空间中的另外一组基函数：Lagrange插值基函数。

针对 $n+1$ 个互异的插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$，构造不超过 n 次的插值多项式 $l_i(x), i=0,1,2,\cdots,n$，使之满足

$$l_0(x_0)=1, l_0(x_1)=0, l_0(x_2)=0, \cdots, l_0(x_n)=0$$

$$l_1(x_0)=0, l_1(x_1)=1, l_1(x_2)=0, \cdots, l_1(x_n)=0$$

$$\vdots$$

$$l_n(x_0)=0, l_n(x_1)=0, l_1(x_2)=0, \cdots, l_n(x_n)=1$$

即

$$l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases} \quad j=0,1,2,\cdots,n$$

设 $l_i(x)=k_i(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$

由 $l_i(x_i)=1$，得

$$k_i=\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

故 $$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

或 $l_i(x)=\dfrac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$ 其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

$l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 称为关于节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 的**Lagrange插值基函数**（可以证明它们确实构成**P**$_n$的一组基）。

它们依赖于插值节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$，并满足

$$l_i(x_j)=\delta_{ij},\quad i,j=0,1,2,\cdots,n$$

$$l_i(x_0)=0,\ l_i(x_1)=0,\cdots,\ l_i(x_{i-1})=0,\ l_i(x_i)=1,\ l_i(x_{i+1})=0,\cdots,\ l_i(x_n)=0$$

二 Lagrange插值公式

做 $L_n(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+\cdots+f(x_n)l_n(x)$

可验证 $\boxed{L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}f(x_i)$

满足插值条件。$L_n(x)$称之为**Lagrange插值多项式**。

其误差估计（称之为**导数型插值余项**）为

$$\boxed{R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)}$$

① 若被插值函数$f(x)$本身就是不超过n次的多项式, 则 $L_n(x)\ \equiv f(x)$

② $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\equiv 1$ 取$f(x)=1$，则 $f^{(n+1)}(\xi)=0$。

故 $1\cdot l_0(x)+1\cdot l_1(x)+\cdots+1\cdot l_n(x)\equiv 1$

例题: 取 $x_0=-\frac{\pi}{2}, x_1=0, x_2=\frac{\pi}{2}$ 为节点，建立y=sin$x$的Lagrange插值多项式。

解:

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

即

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})}{(-\frac{\pi}{2}-0)(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}(-1)+\frac{(x+\frac{\pi}{2})(x-0)}{(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}))(\frac{\pi}{2}-0)}$$

$$=-\frac{2x(x-\frac{\pi}{2})}{\pi^2}+\frac{2(x+\frac{\pi}{2})x}{\pi^2}=\frac{2x}{\pi}$$

注: $L_n(x)$为不超过n次的多项式，其次数可能低于n。

例题： 设关于节点$\{x_i\}_{i=0}^n$的Lagrange插值基函数为

$\{l_i(x)\}_{i=0}^n$，则 $\sum_{i=0}^n x_i^3 l_i(3.5) =$ __________ $(n \ge 3)$

由 $$f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

当 $f(x) = x^3$，则有 $x^3 = \sum_{i=0}^n x_i^3 l_i(x) \quad (n \ge 3)$

故 $$\sum_{i=0}^n x_i^3 l_i(3.5) = 3.5^3 \quad (n \ge 3)$$

Remark

误差估计中，插值误差与节点$\{x_i\}_{i=0}^n$和点x之间的距离有关。节点距离x越近，插值误差的绝对值一般情况下越小。

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \left| R_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|, \omega_{n+1}(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$$

例题： 已知$f(-2)=2$，$f(-1)=1$，$f(0)=2$，$f(0.5)=3$，试选用合适的插值节点，通过二次插值多项式计算$f(-0.5)$的近似值, 使之精度尽可能高。

解： 依据误差估计式$|R_n(x)| \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$，选 $x_0=-1, x_1=0, x_2=0.5$为插值节点。

插值基函数为：

$$l_0(x)=\frac{(x-0)(x-0.5)}{(-1-0)(-1-0.5)} \quad l_1(x)=\frac{(x+1)(x-0.5)}{(0+1)(0-0.5)} \quad l_2(x)=\frac{(x+1)(x-0)}{(0.5+1)(0.5-0)}$$

二次插值多项式为 $L_2(x)=l_0(x)+2l_1(x)+3l_2(x)$ 无需整理

$$f(-0.5)\approx L_2(-0.5)=1\times l_0(-0.5)+2\times l_1(-0.5)+3\times l_2(-0.5)=4/3$$

三 反插值法

例 已知单调连续函数在如下采样点处的函数值

x_i	1.0	1.4	1.8	2.0
$y_i=f(x_i)$	-2.0	-0.8	0.4	1.2

用上述数表求方程$f(x)=0$在[1,2]内根的近似值 。

分析

y_i	-2.0	-0.8	0.4	1.2	0
$f^{-1}(y_i)=x_i$	1.0	1.4	1.8	2.0	?

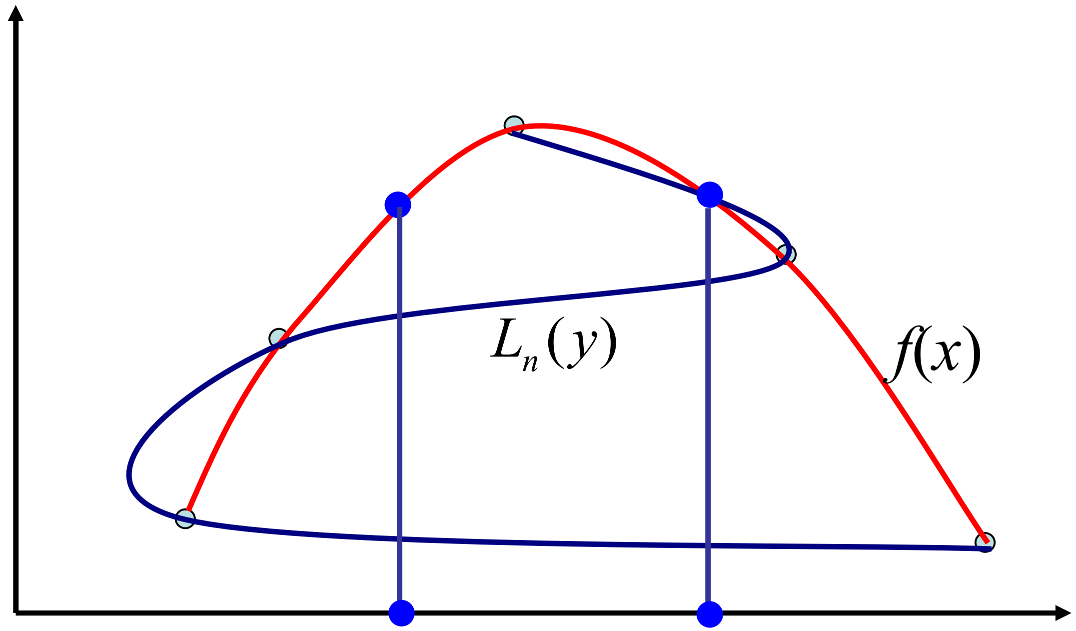
已知一单调连续函数$y=f(x)$在一些采样点的函数值，而需要近似计算某已知函数值y^*所对应的自变量x^*时可采用**反插值法**。

解： 对$y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 进行三次插值，插值多项式为

$$
\begin{aligned}
L_3(y) = {} & f^{-1}(y_0)\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)} \\
& + f^{-1}(y_1)\frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \\
& + f^{-1}(y_2)\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)} \\
& + f^{-1}(y_3)\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)} \\
= {} & 1.675+0.3271y-0.03125y^2-0.01302y^3
\end{aligned}
$$

无需整理

于是有 $x^*=f^{-1}(0)\approx L_3(0)=1.675$



用反插值法时， $f(x)$必须满足单调性条件。

§3 Newton插值法

插值问题：已知$\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$ 处的函数值$\{f(x_i)\}_{i=0}^{n}$。求

$\varphi(x) \in \mathbf{P}_n$， 使得$\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n$。

Lagrange 插值公式的特点：

形式对称。

$A \Leftarrow 0 \qquad A \Leftarrow A + f(x_0)l_0(x) \qquad A \Leftarrow A + f(x_1)l_1(x)$

$\cdots\cdots \qquad A \Leftarrow A + f(x_n)l_n(x)$

通常用于理论分析。

当增加插值节点时， 计算不方便(Lagrange 插值基函数要随之发生变化)。

当 M_{n+1}未知，无法估计误差。

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x), \quad R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),$$

一　差商（均差）的定义

定义： 设$\{x_i\}_{i=0}^{n}$是一组互异节点。

$f(x)$关于节点x_k的**零阶差商：** $f[x_k]=f(x_k)$

$f(x)$关于互异节点x_j和x_k的**一阶差商：**

$$f[x_j,x_k]=\frac{f(x_k)-f(x_j)}{x_k-x_j}\quad (i\neq j)$$

$f(x)$关于互异节点x_i、x_j和x_k的**二阶差商：**

$$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}\quad (\,i,j,k\text{ 互不相同})$$

$f(x)$关于互异节点$\{x_i\}_{i=0}^{k}$的**k阶差商：**

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_k]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

二 Newton插值公式

设$\{x_i\}_{i=0}^{n}$为插值节点，$x \neq x_i \ (i=0,1,\cdots,n)$ 。由定义

$$f(x) = f(x_0) + f[x, x_0](x - x_0)$$

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + f[x, x_0, x_1](x - x_1)$$

$$f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + f[x, x_0, x_1, x_2](x - x_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots, x_n] + f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_n)$$

$$f[x, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x, x_0]}{x_1 - x}$$

$$f[x, x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x, x_0, x_1]}{x_2 - x}$$

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_n] - f[x, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x}$$

将第二式代入第一式，得

$$f(x)=\underline{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)}+f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

$$=N_1(x)+R_1(x)$$

$$N_1(x_1)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_1-x_0)=f(x_1)$$

$N_1(x)$ 满足 $N_1(x_0)=f(x_0)$ $N_1(x_1)=f(x_1)$

$N_1(x)$ 称为**线性Newton插值多项式**。

再将第三式继续代入$f(x)$,得

$$f(x)=\underline{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)}$$

$$+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=N_2(x)+R_2(x)$$

可验证： $N_2(x_0)=f(x_0)$ $N_2(x_1)=f(x_1)$ $N_2(x_2)=f(x_2)$

$N_2(x)$ 称为**二次Newton插值多项式。**

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)$$

$$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)$$

$$\cdots\cdots$$

将后面的式子逐步代入前面$f(x)$的表达式，得

$$f(x)=\underline{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)}$$

$$\underline{+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}$$

$$+f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$\boxed{\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

$$=N_n(x)+R_n(x)$$

可验证： $N_n(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,\cdots,n)$

$N_n(x)$ 称为**n次Newton插值多项式**。

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)\ =f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$$

称之为**差商型插值余项**。

节点增减时，应该使用Newton 插值多项式。

如果$f(x)$充分光滑，则有前面的误差估计

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$ **导数型**

$$=f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$$ **差商型**

导数型插值余项的缺点

- 对函数的光滑性要求高；
- 需估计导函数的最值；
- 偏保守。

差商型插值余项的优点

- 对被插值函数光滑性要求不高；
- 利用差商可以近似求得插值余项，进而改进插值精度。

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$$

三 差商的计算

$$N_n(x)=\underline{f(x_0)}+\underline{f[x_0,x_1]}(x-x_0)+\underline{f[x_0,x_1,x_2]}(x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots$$
$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

求Newton插值多项式的关键是用差商表计算 $N_n(x)$ 中的系数：$f[x_0,x_1,\cdots,x_k],k=1,2,\cdots,n$

差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0,x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	…
…	…	………	………	………	

四　差商的性质

性质1　$\lim\limits_{x_i \to x_j} f[x_i, x_j] = f'(x_j)$

$$\lim_{x_i \to x_j} f[x_i, x_j] = \lim_{x_i \to x_j} \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} = \lim_{x_i \to x_j} \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = f'(x_j)$$

即差商是微商的离散形式。

性质2　差商可以表示为函数值的线性组合，即

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)} \quad \text{(也可用归纳法证明)}$$

根据插值多项式的唯一性，由 $N_n(x) = L_n(x)$ 得

$$f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n]\omega_n(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i)$$ 比较两端 x^n 的系数，即得

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f(x_0)}{\omega'_{n+1}(x_0)} + \frac{f(x_1)}{\omega'_{n+1}(x_1)} + \cdots + \frac{f(x_n)}{\omega'_{n+1}(x_n)}$$

性质3 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$与节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$排列次序无关。

即 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_0,x_n,\cdots,x_1]=f[x_1,x_n,\cdots,x_0]=\cdots$

由差商表达式$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)}$ 即得。

性质4 存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

根据插值多项式的唯一性，由 $N_n(x)=L_n(x)$

有 $f[x_0,x_1,\cdots x_n,x]\omega_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$

即 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x]=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

取$x=x_{n+1}$，即得导数和差商的上述关系。

例题： 设 $f(x)=x^3+2x^2-x+1$，则

$f[0,1,2,3]=$ __1__ , $f[0,1,2,3,4]=$ __0__ 。

例题： 设函数 $f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ ， 求差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 之值，其中 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 是互异节点。

解： ① 用

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

当$k=n+1$时，$f[x_0,x_1,\cdots,x_{n+1}]=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}=1$

当$k\geq n+2$时，$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\dfrac{f^{(k)}(\xi)}{k!}=0$

② 用

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

当$k\leq n$时， $f(x_j)=0 \quad j=0,1,\cdots,k \quad k\leq n$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=0$$

故

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\begin{cases}0 & k\leq n\\ 1 & k=n+1\\ 0 & k\geq n+2\end{cases}$$

§5 Hermite插值

Hermite插值问题

不仅要求插值多项式与被插值函数在节点处的函数值相等，还要求它们在某些点处的导数值相同。已知$f(x)$在节点 x_0 处的函数值及导数值

$$f^{(k)}(x_0), k=0,1,\ldots,n$$

要求构造不超过n次的多项式 $P_n(x)$ 满足如下n+1个插值条件: $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\ \ k=0,1,2,\cdots,n$

$P_n(x)$为$f(x)$在 x_0 处的n阶Taylor展开式，即

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

给定*m*+1个插值条件，构造次数不超过*m*次的Hermite插值多项式的方法:

（1）基于待定函数；　（2）基于重节点差商。

例1 建立 $H_3(x)$，使之满足 $\begin{cases} H_3(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,1,2 \\ H_3'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$

并推导其插值余项表达式。

解法1 设 $H_3(x) = N_2(x) \boxed{+ k(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}$

$$N_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

显然有 $H_3(x_i) = f(x_i) \quad i = 0,1,2$

令 $H_3'(x_0) = N_2'(x_0) + k(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = f'(x_0)$

得到 $k = \dfrac{f'(x_0) - f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2](x_0 - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$

将 k 代入 $H_3(x)$ 即得所求插值多项式。

注 插值多项式所加待定部分要求：

多项式次数与所求多项式次数相等（三次）；函数条件依旧成立；含参数个数与未用的导数条件个数相等。

解法2 用带有重节点的差商表

$$f'(x_0)$$

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & \Rightarrow f[x_0,x_0] & & & \\
x_0 & f(x_0) & & \Rightarrow f[x_0,x_0,x_1] & & \\
 & & \Rightarrow f[x_0,x_1] & & \Rightarrow f[x_0,x_0,x_1,x_2] & \\
x_1 & f(x_1) & & \Rightarrow f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & & \Rightarrow f[x_1,x_2] & & & \\
x_2 & f(x_2) & & & &
\end{array}$$

$$H_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_0](x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_0)$$
$$+f[x_0,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_0)(x-x_1)$$

设 $f(x)\in C^1[a,b],\ x_0\in(a,b)$ ， 定义 $f[x_0,x_0]=\lim\limits_{x\to x_0} f[x,x_0]$

则有 $f[x_0,x_0]=f'(x_0)$

由 $f[x,x_0]=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0+\theta(x-x_0))\quad 0<\theta<1$

所以 $f[x_0,x_0]=\lim\limits_{x\to x_0} f[x,x_0]=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x_0+\theta(x-x_0))=f'(x_0)$

插值余项 注意 $H_3(x_i)=f(x_i),(i=0,1,2),H_3'(x_0)=f'(x_0)$

由 $R_3(x)=f(x)-H_3(x)$

则 $R_3(x_0)=0,\ R_3'(x_0)=0,\ R_3(x_1)=0,\ R_3(x_2)=0$。

故 $\boxed{R_3(x)=k(x)(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)}$

做 $\boxed{g(t)=f(t)-H_3(t)-k(x)(t-x_0)^2(t-x_1)(t-x_2)}$

函数	零点
$g(t)$	$x \quad x_0 \quad x_1 \quad x_2$
$g'(t)$	$\xi_0 \quad x_0 \quad \xi_1 \quad \xi_2$
$g''(t)$	$\bar{\xi}_0 \quad \bar{\xi}_1 \quad \bar{\xi}_2$
$g'''(t)$	$\hat{\xi}_0 \quad \hat{\xi}_1$

$\boxed{g^{(4)}(t)\ \text{至少1个零点}\ \xi}$。

利用Rolle定理

由 $\begin{cases} g^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-k(x)4! \\ g^{(4)}(\xi)=0 \end{cases}$

得 $R_3(x)=f(x)-H_3(x)$

$$=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)$$

若$f(x)$具有m阶连续导数，则α是$f(x)$的m重零点之充要条件为：

$$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ \cdots,\ f^{(m-1)}(\alpha)=0,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

例2 建立$H_3(x)$，使之满足 $\begin{cases} H_3(0)=0,\ H_3(1)=1, \\ H_3'(0)=0,\ H_3'(1)=3, \end{cases}$

并推导其插值余项表达式。

法1: 设 $H_3(x)=N_1(x)\boxed{+(a+bx)(x-x_0)(x-x_1)}$

其中 $N_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)\ =0+\dfrac{1-0}{1-0}x=x$

由 $H_3'(x)=1+b(x^2-x)+(a+bx)(2x-1)$

且 $H_3'(0)=1+a\times(-1)=0$

$H_3'(1)=1+(a+b)\times(2\times1-1)=3$

得 a=1，b=1

所求插值多项式为 $H_3(x)=x+(x+1)(x^2-x)=x^3$

注 插值多项式所加待定部分要求：

多项式次数与所求多项式次数相等（三次）；函数条件依旧成立；含参数个数与未用的导数条件个数相等。

$$\begin{cases} H_3(0)=0,\ H_3(1)=1, \\ H_3'(0)=0,\ H_3'(1)=3, \end{cases}$$

法2： 用带有重节点的差商表

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & & & & \\
 & & \underset{f'(x_0)}{0} & & & \\
0 & 0 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 1 & \\
1 & 1 & & 2 & & \\
 & & \underset{f'(x_1)}{3} & & & \\
1 & 1 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
H_3(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_0](x-x_0) \\
&\quad + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_0) \\
&\quad + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)(x-x_0)(x-x_1) \\
&= 0 + 0(x-0) \\
&\quad + 1\times(x-0)(x-0) \\
&\quad + 1\times(x-0)(x-0)(x-1) \\
&= x^2 + x^2(x-1) = x^3
\end{aligned}$$

推导插值余项表达式

设 $R_3(x) = f(x) - H_3(x)$

则 $R_3(x_0)=0,\ R_3(x_1)=0,\ R_3'(x_0)=0,\ R_3'(x_1)=0 \quad (x_0=0,\ x_1=1)$

$$R_3(x) = k(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

若$f(x)$具有m阶连续导数，则α是$f(x)$的m重零点之充要条件为：

$$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0,\ \cdots,\ f^{(m-1)}(\alpha)=0,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

设 $R_3(x) = f(x) - H_3(x) = k(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2$

做 $g(t) = f(t) - H_3(t) - k(x)(t-x_0)^2(t-x_1)^2$

则 $g(x_0)=0,\ g(x_1)=0,\ g(x)=0 \quad g'(x_0)=0,\ g'(x_1)=0$

$g'(t)$ 至少有4个零点

……

$g^{(4)}(t)$ 至少1个零点 ξ

函数	零点				
$g(t)$	x		x_0		x_1
$g'(t)$		ξ_0	$\boxed{x_0}$	ξ_1	$\boxed{x_1}$

得 $R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$

Remarks

求插值函数时，待定函数的方法实施麻烦；重节点差商的方法与Newton插值法的实施类似。

例3 设有函数$y=f(x)$的如下数据：

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
0	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	

试求满足插值条件
$$\begin{cases} p(0)=f(0)=0, \quad p(1)=f(1)=1 \\ p'(0)=f'(0)=0, \; p'(1)=f'(1)=1 \\ p''(0)=f''(0)=0 \end{cases}$$
的插值多项式$p(x)$。

注：解法较多，仅用两种方法求解。

法1（1）先求满足插值条件 $\begin{cases} p(0)=f(0)=0, & p(1)=f(1)=1 \\ p'(0)=f'(0)=0, & p'(1)=f'(1)=1 \end{cases}$

的3次插值多项式 $p_3(x)$。

造如下重节点差商表（ $f[x_0,x_0]=f'(x_0)$, $f[x_1,x_1]=f'(x_1)$ ）

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	0			
0	0	0（$f'(0)$）		
1	1	1	1	
1	1	1（$f'(1)$）	0	-1

则 $p_3(x)=0+0\cdot(x-0)+1\cdot(x-0)(x-0)+(-1)(x-0)(x-0)(x-1)$

$=2x^2-x^3$

（2）求满足题中插值条件的多项式 $p(x)$。

设 $p(x)=p_3(x)\boxed{+c(x-0)^2(x-1)^2}$

由 $p''(0)=f''(0)=0$，得 $c=-2$

于是 $p(x)=-2x^4+3x^3$

$\begin{cases} p(0)=f(0)=0, & p(1)=f(1)=1 \\ p'(0)=f'(0)=0, & p'(1)=f'(1)=1 \\ p''(0)=f''(0)=0 \end{cases}$

法2 $\boxed{f[\underbrace{x_0,x_0,\cdots,x_0}_{n+1\text{个}}]=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$ 记忆类似 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

即 $f[x_0,x_0]=f'(x_0),\ f[x_0,x_0,x_0]=\dfrac{f''(x_0)}{2!},\ f[x_1,x_1]=f'(x_1),$

造重节点差商表

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	0				
		0 ($f'(0)$)			
0	0		0($\dfrac{f''(0)}{2!}$)		
		0 ($f'(0)$)		1	
0	0		1		-2
		1		-1	
1	1		0		
		1 ($f'(1)$)			
1	1				

（2）求满足题中插值条件的多项式$p(x)$。

$$p(x)=0+0\cdot(x-0)+0\cdot(x-0)(x-0)+1\cdot(x-0)(x-0)(x-0)$$
$$-2\cdot(x-0)(x-0)(x-0)(x-1)$$

$$\begin{cases} p(0)=f(0)=0, & p(1)=f(1)=1 \\ p'(0)=f'(0)=0, & p'(1)=f'(1)=1 \\ p''(0)=f''(0)=0 \end{cases}$$

$$p(x)=x^3-2(x^4-x^3)=-2x^4+3x^3$$

例4 用插值法求在x=0与cos$x$相切、在$x=\frac{\pi}{2}$与cos$x$相交的二次多项式，并推导插值余项的表达式。

法1： 设$f(x)$=cos$x$，插值条件为

x_i	0	$\pi/2$
$f(x_i)$	1	0
$f'(x_i)$	0	

先由 $f(0)=1, f(\pi/2)=0$，求出 $L_1(x)=N_1(x)=-\frac{2}{\pi}(x-\frac{\pi}{2})$

设待求插值函数为 $H_2(x)=N_1(x)+A(x-0)(x-\frac{\pi}{2})$

由$H_2'(0)=0$，得 $A=-\frac{4}{\pi^2}$

进而得到 $H_2(x)=-\frac{4}{\pi^2}x^2+1=-0.4053x^2+1$

法2： 用带有重节点的差商表

$$f'(x_0)$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ 0 & 1 & & -4/\pi^2 & \\ & & -2/\pi & & \\ \pi/2 & 0 & & & \end{array}$$

$$H_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_0)$$

$$= 1 + 0(x - 0) - \frac{4}{\pi^2}(x - 0)(x - 0)$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}x^2 + 1 = -0.4053x^2 + 1$$

插值条件

x_i	0	$\pi/2$
$f(x_i)$	1	0
$f'(x_i)$	0	

设余项 $$R(x)=f(x)-H_2(x)=k(x)x^2(x-\frac{\pi}{2})$$

令 $$g(t)=f(t)-H_2(t)-k(x)t^2(t-\frac{\pi}{2})$$

则函数$g(t)$充分光滑，且有如下零点

$$g(0)=g(\frac{\pi}{2})=g(x)=0 \qquad g'(0)=0$$

故函数$g'(t)$在互异节点0、$\frac{\pi}{2}$和x形成的区间上至少有三个零点。

使用Rolle定理，则有

$$g'''(\xi)=f'''(\xi)-3!k(x)=0 \quad \xi\in(0,\frac{\pi}{2})$$

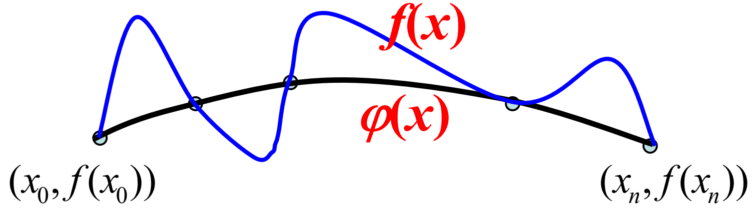
故 $$k(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!} \quad \xi\in(0,\frac{\pi}{2})$$

插值余项为 $$R(x)=f(x)-H_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}x^2(x-\frac{\pi}{2})$$

§6 分段插值

在实际应用中，很少采用高次插值。

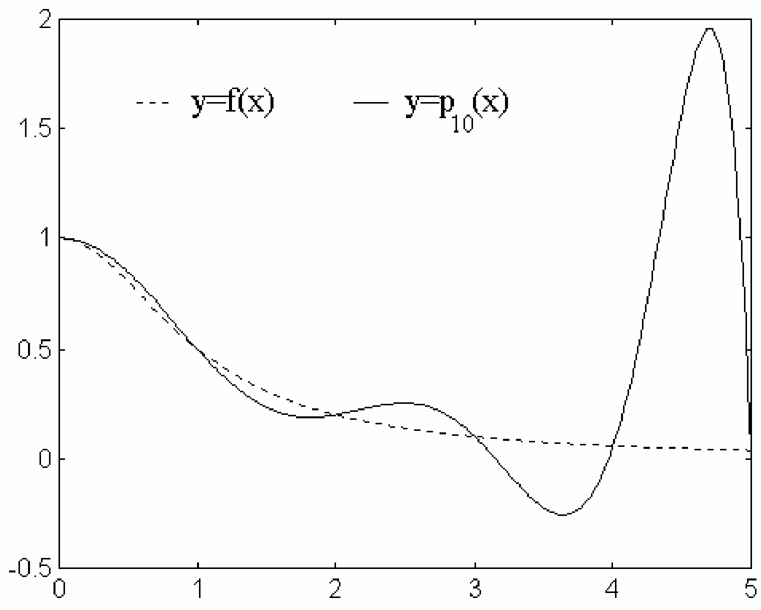
在两相邻插值节点间，插值函数未必能够很好地近似被插值函数。

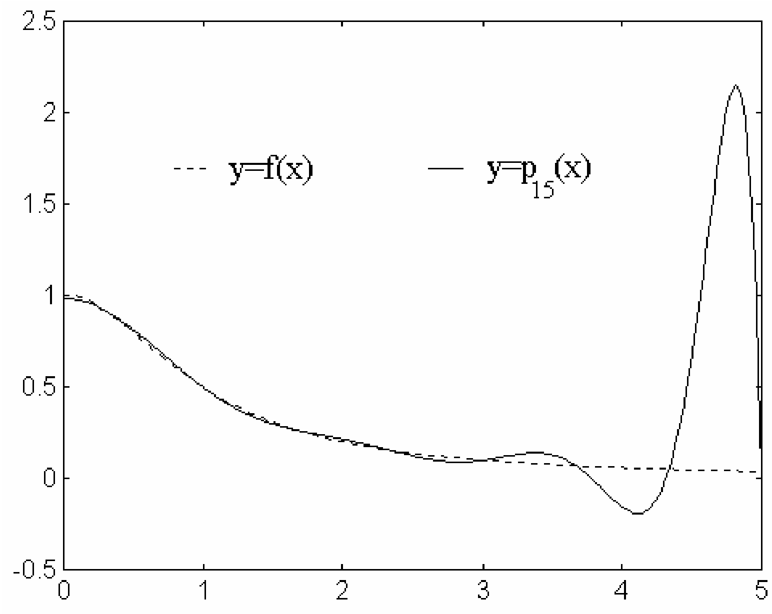


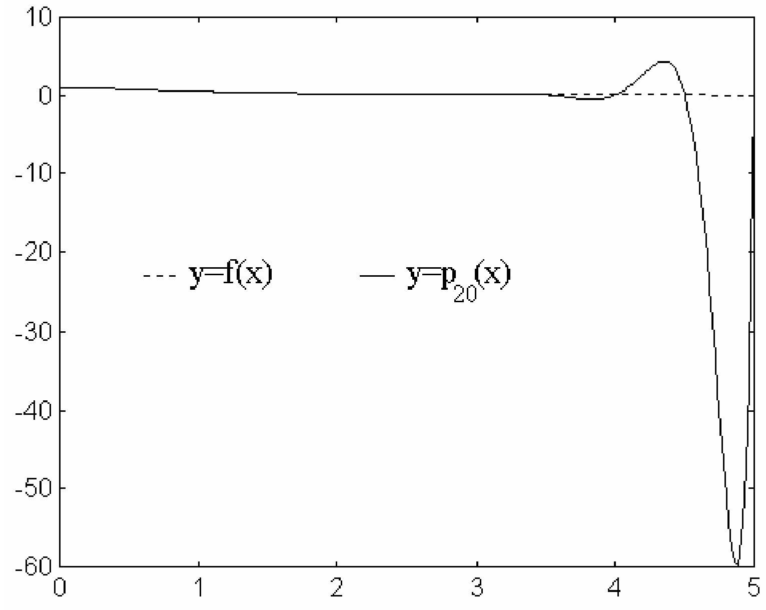
高次插值函数的收敛性讨论

函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间$[-5,5]$上用等距节点的插值问题是Runge曾研究过的一个有名实例。在区间上分别采用10次、15次、20次的等距节点插值多项式。随着插值次数的提高，在$|x|>3.63$范围内的近似程度并没有变好，反而变坏。

高次插值并不一定带来更好的近似效果。







结 论

(1) 高次插值不保证收敛（也不保证稳定）。

(2) 通常不使用高于七、八次的多项式插值。

(3) 当数据节点多时，可采用分段插值。

用等距节点插值公式对 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间[0, 5]上的近似程度示意图

一 分段Lagrange插值

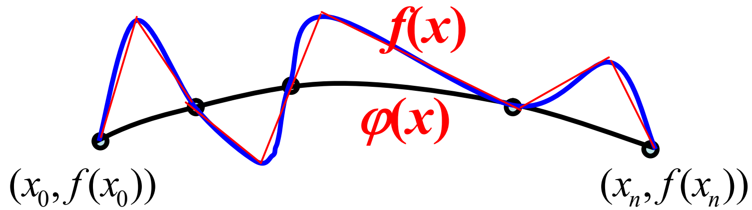
给定节点处的函数值

- 将插值区间[a,b]分成一系列的小区间：

$$[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)\quad x_0=a,\,x_n=b$$

- 在每个子区间$[x_{i-1},x_i]$上做低次Lagrange插值 $p^{(i)}(x)$
- 整个插值区间的分段Lagrange插值函数$\varphi_h(x)$为

$$\varphi_h(x)=\begin{cases} p^{(0)}(x) & x\in[x_0,x_1] \\ p^{(1)}(x) & x\in[x_1,x_2] \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p^{(n-1)}(x) & x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$



随着子区间长度变小，不提高子区间上的插值幂次便可以满足给定的任意精度要求。

$\varphi_h(x)$是整体插值区间上的连续函数，但一般子区间端点处的导数不存在。

1 等距节点分段线性插值的收敛性

设$f(x)$在插值区间$[a,b]$上具有二阶连续导函数，将$[a,b]$均分成n个子区间，记 $h=\dfrac{b-a}{n}$，区间端点为$\{x_i=a+ih\}_{i=0}^{n}$。当$x\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,\cdots,n$

$$L_1^{(i)}(x)=f(x_{i-1})\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}+f(x_i)\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\quad x\in[x_{i-1},x_i]$$

$\forall x\in[x_{i-1},x_i]$

$(x-x_{i-1})(x-x_i)$在$(x_{i-1}+x_i)/2$取得极值

$$\left|R_1^{(i)}(x)\right|=\left|f(x)-L_1^{(i)}(x)\right|=\left|\frac{f''(\xi_i)}{2!}(x-x_{i-1})(x-x_i)\right|$$

$$\le\frac{M_2}{2}\cdot\frac{1}{4}(x_i-x_{i-1})^2=\frac{M_2}{8}h^2\to 0\ (h\to 0)\qquad M_2=\max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$$

$\forall x\in[a,b]$

$$\left|f(x)-\varphi_h(x)\right|\le\frac{M_2}{8}h^2\to 0\ \ (h\to 0)$$

当h趋于零时，分段线性插值函数$\varphi_h(x)$在整体插值区间$[a,b]$上一致地收敛到被插值函数$f(x)$。

2 等距节点分段二次插值的收敛性

设$f(x)$在插值区间$[a,b]$上具有三阶连续的导函数，将$[a,b]$均分成n (n为偶数)个子区间，记区间端点为

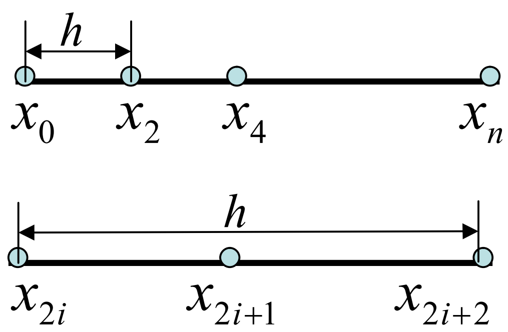
$$\left\{ x_i = a + i\frac{b-a}{n} \right\}_{i=0}^{n} \quad h = 2\frac{b-a}{n} = x_{2i+2} - x_{2i}, i = 0,1,\cdots,\frac{n}{2}-1。$$

若在每个子区间$[x_{2i}, x_{2i+2}]$，取插值节点$x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}$，采用二次等距节点插值，插值多项式为

$$L_2^{(i)}(x) = f(x_{2i})\frac{(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2})}{(x_{2i}-x_{2i+1})(x_{2i}-x_{2i+2})}$$

$$+ f(x_{2i+1})\frac{(x-x_{2i})(x-x_{2i+2})}{(x_{2i+1}-x_{2i})(x_{2i+1}-x_{2i+2})}$$

$$+ f(x_{2i+2})\frac{(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})}{(x_{2i+2}-x_{2i})(x_{2i+2}-x_{2i+1})} \qquad x \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$$

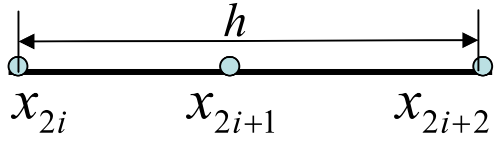


子区间 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$上的插值余项为

$$\left|R_2^{(i)}(x)\right| = \left| f(x) - L_2^{(i)}(x) \right|$$

$$= \boxed{\left| \frac{f'''(\xi_i)}{3!}(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2}) \right|}$$

$\boxed{h = x_{2i+2} - x_{2i}}$



$$\le \frac{M_3}{6}\frac{h}{2}\max_{x_{2i}\le x\le x_{2i+2}}\left|(x-x_{2i})(x-x_{2i+2})\right|$$

$$\le \frac{M_3}{6}\frac{h}{2}\frac{h^2}{4} = \frac{M_3 h^3}{48} \to 0 \quad (h \to 0)$$

$$M_3 = \max_{a\le x\le b}\left|f'''(x)\right|$$

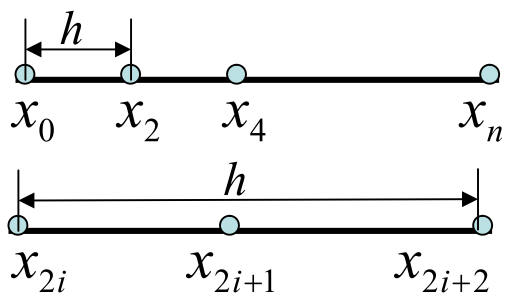
$$\forall x \in [a,b] \quad \left| f(x) - \varphi_h(x) \right| \le \frac{M_3 h^3}{48} \to 0 \quad (h \to 0)$$

当h趋于零时，分段二次插值函数$\varphi_h(x)$在整体插值区间$[a,b]$上一致收敛到被插值函数$f(x)$。

注： 当$\left| f(x) - \varphi_h(x) \right| \le CM_3h^3$，均可得到分段二次插值函数$\varphi_h(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛到被插值函数$f(x)$。

在区间[−1,1]上构造 $f(x)=\sin x$ 的等距节点函数表。问最少取多少个节点，能够保证用分段线性插值（类似作业）、分段二次插值求 $\sin x$ 近似值时，绝对误差限满足 $\varepsilon \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$。

解　按课本记号: 将 $[a,b]$ 均分成 n (n 为偶数)个子区间，在子区间 $[x_{2i},x_{2i+2}]$，取插值节点 x_{2i},x_{2i+1},x_{2i+2}，做二次等距节点插值。

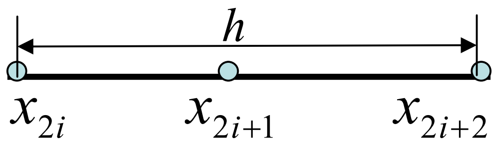


$$h = 2\frac{b-a}{n} = x_{2i+2} - x_{2i},\ i = 0,1,\cdots,\frac{n}{2}-1$$

由 $R_2^{(i)}(x) = f(x) - L_2^{(i)}(x) = \dfrac{f'''(\xi_i)}{3!}(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2})$

则 $\left|R_2^{(i)}(x)\right| \le \dfrac{M_3}{3!}\boxed{\max\limits_{x_{2i}\le x\le x_{2i+2}}\left|(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2})\right|}$　$M_3 = \max\limits_{a\le x\le b}\left|f'''(x)\right|$

由 $h=[x_{2i},x_{2i+2}]$ 设 $x-x_{2i+1}=\frac{s}{2}h \quad (-1\le s\le 1)$



$$x-x_{2i}=x-x_{2i+1}-(x_{2i}-x_{2i+1})=\frac{s}{2}h-(-\frac{h}{2})=\frac{h}{2}(s+1)$$

$$x-x_{2i+2}=x-x_{2i+1}-(x_{2i+2}-x_{2i+1})=s\frac{h}{2}-\frac{h}{2}=\frac{h}{2}(s-1)$$

$$\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\frac{M_3}{3!}\max_{-1\le s\le 1}\left|(s+1)s(s-1)\frac{h^3}{8}\right|$$

注1： 区间变换为线性变换 $x-x_{2i+1}=ksh$ 均可。如取 $x-x_{2i+1}+sh$ ，则 $-1/2\le s\le 1/2$ 。

设 $g(s)=(s+1)s(s-1)$ 则 $g'(s)=3s^2-1$

得驻点 $\bar{s}=\pm 1/\sqrt{3}$ 且 $g(\bar{s})=\pm 2\sqrt{3}/9$

故 $\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\frac{M_3h^3}{3!}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}$ $\longrightarrow$

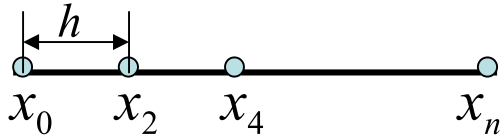
注2： 此式不做区间变换也可直接求得。

$$\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\frac{M_3}{3!}\max_{x_{2i}\le x\le x_{2i+2}}\left|(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2})\right|$$

这一估计与i无关, 对$\forall x\in[a,b]$有 $\left|f(x)-\varphi_h(x)\right|\le\frac{M_3h^3}{6}\frac{\sqrt{3}}{36}$

对题中的 $\varepsilon \le \dfrac{1}{2}\times 10^{-4}$ 及 $M_3=\max\limits_{a\le x\le b}|f'''(x)|=\max\limits_{-1\le x\le 1}|-\cos x|=1$，

令 $\dfrac{h^3}{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{36}\le\dfrac{1}{2}\times 10^{-4}$，得 $h\le\left(\dfrac{36\times 3}{\sqrt{3}}\times 10^{-4}\right)^{1/3}\approx 0.1840578633\ldots\ldots$



由 $h=2\dfrac{b-a}{n}=x_{2i+2}-x_{2i}$，得 $n=2\dfrac{b-a}{h}\ge 21.73229618\ldots\ldots$

等分份数（偶数）为 $[n+1]=22$

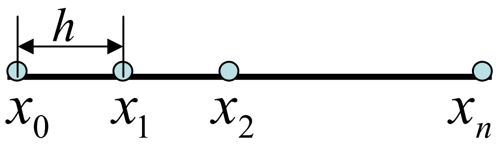
节点个数 $N=n+1=23$。

注意：课本记号中的等分份数 $n=2\dfrac{b-a}{h}$ 为偶数。

如：$n\ge 5.4$，取 $n=6$，$n\ge 6.4$，取 $n=8$。

$$|R_2(x)|\le\frac{M_3h^3}{6}\frac{\sqrt{3}}{36}$$

若按记号: 在子区间 $h=x_{i+1}-x_i=\dfrac{b-a}{n}$ ，取插值节点 $x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1}$，做二次等距节点插值。



由 $R_2^{(i)}(x)=f(x)-L_2^{(i)}(x)=\dfrac{f'''(\xi_i)}{3!}(x-x_i)(x-x_{i+\frac{1}{2}})(x-x_{i+1})$

则 $\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\dfrac{M_3}{3!}\max\limits_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left|(x-x_i)(x-x_{i+\frac{1}{2}})(x-x_{i+1})\right|$ $\quad M_3=\max\limits_{a\le x\le b}\left|f'''(x)\right|$

由 $h=[x_{i+1},x_i]$ 设 $x-x_{i+\frac{1}{2}}=\dfrac{s}{2}h \quad (-1\le s\le 1)$

$$x-x_i=x-x_{i+\frac{1}{2}}-(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})=\frac{s}{2}h-(-\frac{h}{2})=\frac{s+1}{2}h$$

$$x-x_{i+1}=x-x_{i+\frac{1}{2}}-(x_{i+1}-x_{i+\frac{1}{2}})=s\frac{h}{2}-\frac{h}{2}=\frac{s-1}{2}h$$

则 $\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\dfrac{M_3}{3!}\max\limits_{-1\le s\le 1}\left|(s+1)s(s-1)\dfrac{h^3}{8}\right|$

设 $g(s)=(s+1)s(s-1)$ 则 $g'(s)=3s^2-1$ 得驻点 $\bar{s}=\pm 1/\sqrt{3}$

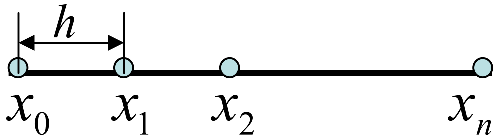
且 $g(\bar{s}) = \pm 2\sqrt{3}/9$ 故 $\left|R_2^{(i)}(x)\right| \le \dfrac{M_3 h^3}{3!} \cdot \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{9} = \dfrac{M_3 h^3}{6} \dfrac{\sqrt{3}}{36}$

这一估计与i无关, 对$\forall x \in [a,b]$有 $\left|f(x) - \varphi_h(x)\right| \le \dfrac{M_3 h^3}{6} \dfrac{\sqrt{3}}{36}$

对题中的$\varepsilon \le \dfrac{1}{2} \times 10^{-4}$及$M_3 = \max\limits_{a \le x \le b} \left| f'''(x) \right| = \max\limits_{-1 \le x \le 1} \left| -\cos x \right| = 1$,

令$\dfrac{h^3}{6} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{36} \le \dfrac{1}{2} \times 10^{-4}$， 可解得 $h \le \left(\dfrac{36 \times 3}{\sqrt{3}} \times 10^{-4} \right)^{1/3} \approx 0.1840578633\ldots\ldots$

用 $x_i, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1}$做一段插值，



$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \qquad n = \frac{b-a}{h} \ge 10.866\ldots\ldots$$

等分份数（未必是偶数）为 $[n+1] = 11$

节点个数为$2[n+1] + 1 = 23$

注：记号不同，所求n不同（本质相同），但一段插值区间的长度及所需的最少节点数相同。

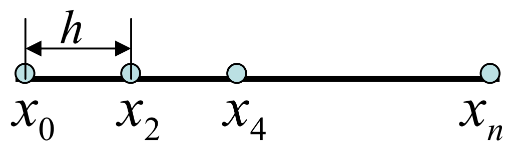
驻点 $\bar{s} = \pm 1/\sqrt{3}$

Remarks

$[a,b]$均分成n (n为偶数)个子区间，其端点为$\{x_i=a+ih\}_{i=0}^{n}$。

$$\boxed{h=2\frac{b-a}{n}=x_{2i+2}-x_{2i},i=0,1,\cdots,\frac{n}{2}-1}$$

（课本记号）



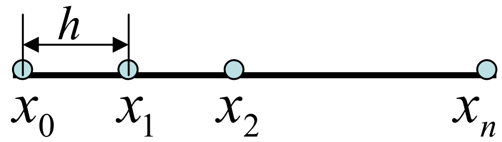
$$R_2^{(i)}(x)=\frac{f'''(\xi_i)}{3!}(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2})$$

节点个数$N=\underbrace{n}_{\text{偶数}}+1$。若$n$非整数，取$N=\underbrace{[n+1]}_{\text{偶数}}+1$或$N=\underbrace{[n+2]}_{\text{偶数}}+1$。

$[a,b]$均分成n个子区间，其端点为$\{x_i=a+ih\}_{i=0}^{n}$。

$$\boxed{h=\frac{b-a}{n}=x_{i+1}-x_i,i=0,1,\cdots,n}$$

（非课本记号）



$$R_2^{(i)}(x)=\frac{f'''(\xi_i)}{3!}(x-x_i)(x-x_{i+\frac{1}{2}})(x-x_{i+1})$$

节点个数$N=2n+1$。若n非整数，取$N=2[n+1]+1$。

不做区间变换 令 $g(x)=(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2})$

即 $$g(x)=(x-x_{2i+1}+x_{2i+1}-x_{2i})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+1}+x_{2i+1}-x_{2i+2})$$
$$=(x-x_{2i+1}+\frac{h}{2})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+1}-\frac{h}{2})$$

由 $$g'(x)=(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+1}-\frac{h}{2})+(x-x_{2i+1}+\frac{h}{2})(x-x_{2i+1}-\frac{h}{2})$$
$$+(x-x_{2i+1}+\frac{h}{2})(x-x_{2i+1})$$
$$=2(x-x_{2i+1})^2+(x-x_{2i+1})^2-\frac{h^2}{4}=3(x-x_{2i+1})^2-\frac{h^2}{4}$$

得驻点 $\tilde{x}=x_{2i+1}\pm\frac{h}{\sqrt{12}}=x_{2i+1}\pm\frac{\sqrt{3}h}{6}$，且

$$g(\tilde{x})=(\pm\frac{\sqrt{3}h}{6}+\frac{h}{2})(\pm\frac{\sqrt{3}h}{6})(\pm\frac{\sqrt{3}h}{6}-\frac{h}{2})=[(\pm\frac{\sqrt{3}h}{6})^2-\frac{h^2}{4}](\pm\frac{\sqrt{3}h}{6})$$

即 $|g(\tilde{x})|=\left|(\frac{h^2}{12}-\frac{h^2}{4})\frac{\sqrt{3}h}{6}\right|=\frac{\sqrt{3}}{36}h^3$， 故 $\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\frac{M_3}{3!}\cdot\frac{\sqrt{3}}{36}h^3$

$$\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\frac{M_3}{3!}\max_{x_{2i}\le x\le x_{2i+2}}\left|(x-x_{2i})(x-x_{2i+1})(x-x_{2i+2})\right|$$
$$\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\frac{M_3h^3}{3!}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

分段Lagrange插值的特点

- 收敛；
- 稳定；
- 分段点处虽然连续，但一般不够光滑。

只保证插值函数的整体连续性，在各小段的连接处虽然左右导数均存在，但不一定相等。因而在连接处不光滑, 不能够满足精密机械设计(如船体、飞机、汽车等的外形曲线设计)对函数光滑性的要求。

二 分段Hermite插值

在分段插值中，对小区间 $[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$ 上运用Hermite插值，则可得到分段Hermite插值，如在$[x_{i-1},x_i]$，构造两点三次Hermite插值多项式 $S_3(x)$，使之满足$S_3(x_i)=f(x_i)$， $S_3'(x_i)=f'(x_i)$ 。则

$$S_3(x)=\left(1+2\frac{x_{i-1}-x}{x_{i-1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\right)^2 f(x_{i-1})+\left(1+2\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}\right)\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2 f(x_i)$$

$$+(x-x_{i-1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}\right)^2 f'(x_{i-1})+(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)^2 f'(x_i)$$

$S_3(x)$具有如下性质：

① 在$[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$上是不超过三次的多项式；

② 在节点x_i $(i=1,2,\cdots,n-1)$处具有一阶连续的导数。

构造$S_3(x)$不仅需要各节点的函数值，还需要各节点的导数值，从而限制了它的工程应用。

§7 三次样条插值*

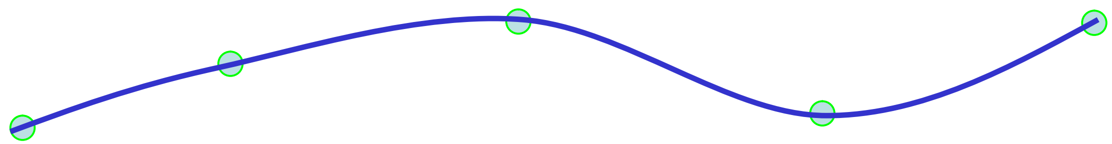
一 三次样条插值函数的定义

数学上三次样条插值中的“样条”来源于工程师的做法。

放样：要求曲线光滑地通过型值点。

工程师的做法：

使用一种有弹性的细长木条(或金属条)，称之为样条(Spline)，强迫它弯曲通过已知点。



定义 给定区间$[a,b]$的一个分划

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

若实值函数$s(x)$满足：

① 在$[x_{i-1}, x_i]\ (i = 1,2,\cdots,n)$上是不超过三次的多项式；

② 在节点$x_i\ (i = 1,2,\cdots,n-1)$处具有二阶连续的导数。

③ 满足插值条件 $s(x_i) = f(x_i)\ (i = 0,1,2,\cdots,n)$。

则称$S(x)$是$f(x)$关于节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$的**三次样条插值函数**。

三次样条插值函数是分段插值。

例 若 $s(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c & 1 \le x \le 3 \end{cases}$

是三次样条插值函数，则a= ___，b=___，c=___。

答案： a=3，b=3，c=1。

总结

1. Hermite插值多项式及其余项表达式的构造

- Hermite插值多项式的构造
- 余项表达式的构造

2. Lagrange与Newton插值公式

- 插值问题的求解
- 插值余项表达式的运用（导数型及差商型）
- 反插值问题的求解
- 差商的计算及性质

3. 插值多项式的存在唯一性

- 函数插值问题
- 导数插值问题

4. 分段低次插值

- 高次插值的问题
- 指定误差限，估计节点个数或节点间距离

5*. 三次样条插值函数