第3章 刚体力学基础

§3.1 刚体运动概述

主要内容：

1. 刚体模型

2. 刚体的运动形式

3. 刚体的自由度

3.1.1 刚体模型

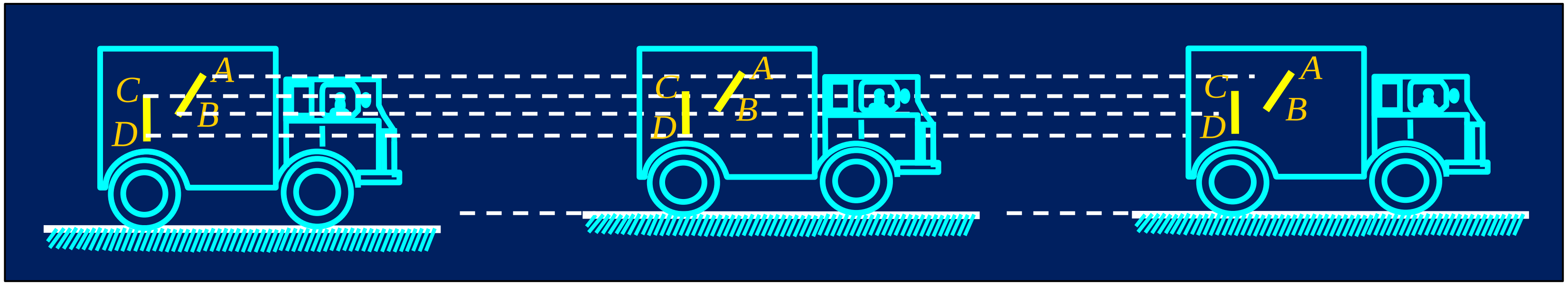
刚体（Rigid Body）：在力的作用下，大小和形状都始终保持不变的物体。

——理想模型

- 刚体可以看成是由无数质点构成的质点系
- 无论在多大的力作用下或刚体无论作何运动，刚体中任意两质点间的距离保持不变
- 各质点的运动规律→刚体的运动规律

3.1.1 刚体的运动形式

1. 平动 刚体内部所作的任何一条直线，在运动中都始终保持与自身平行 **可用一个点的运动描述（质心）**



平动的特点：

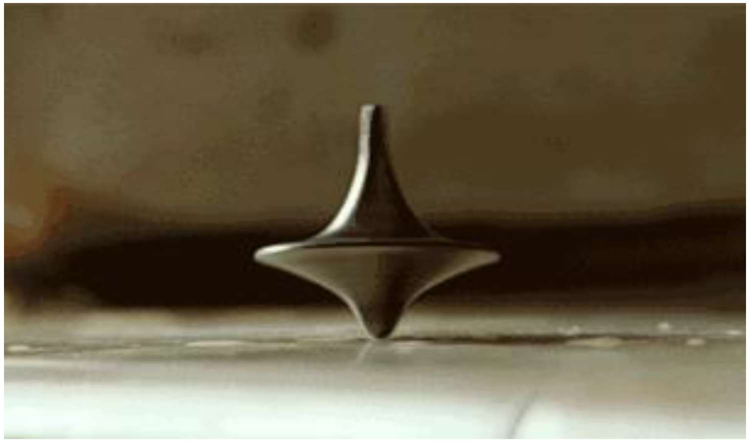
轨迹可以是直线，也可以是曲线

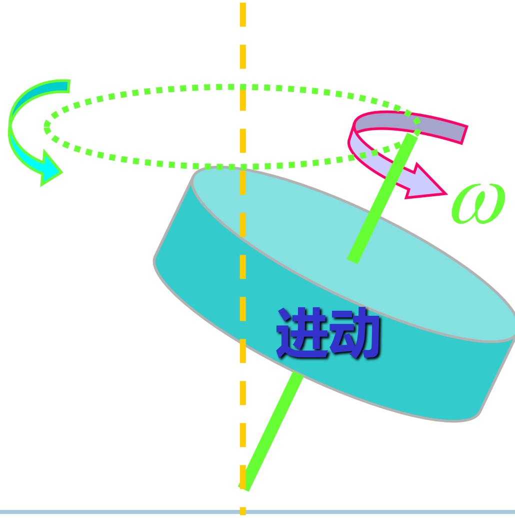
各质点的运动轨迹相同。所有质点都具有相同的位移、速度和加速度

2. 转动 刚体上的各质点都绕同一直线作圆周运动(转轴)

定轴转动： 转轴固定不动

非定轴转动： 转轴随时间变化

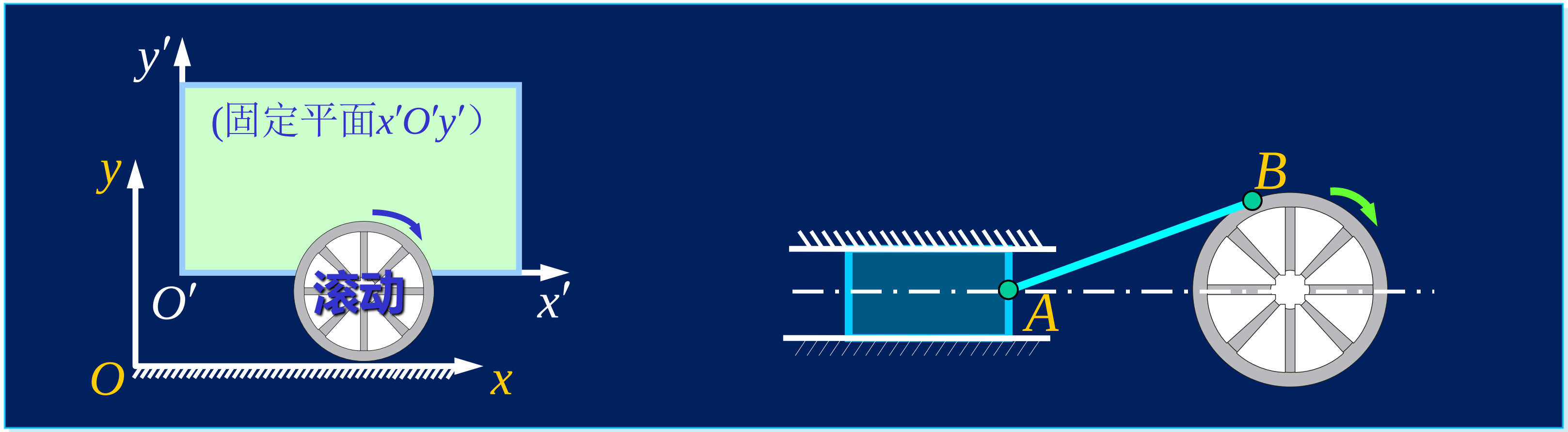




定点转动

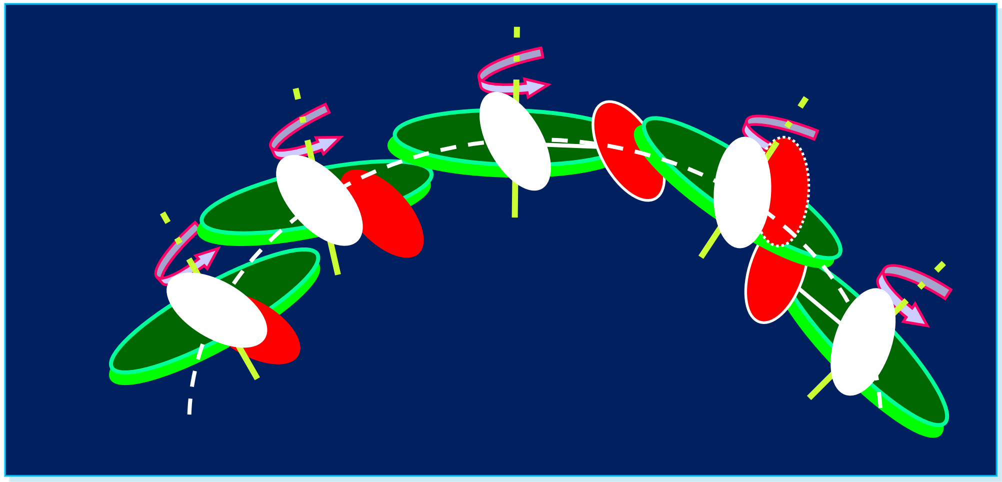
进动： 自转物体之自转轴又绕著另一轴旋转的现象

3. 平面平行运动：在运动过程中，刚体上任一点和某一固定平面的距离保持不变



一般运动:

铁饼在空中的运动

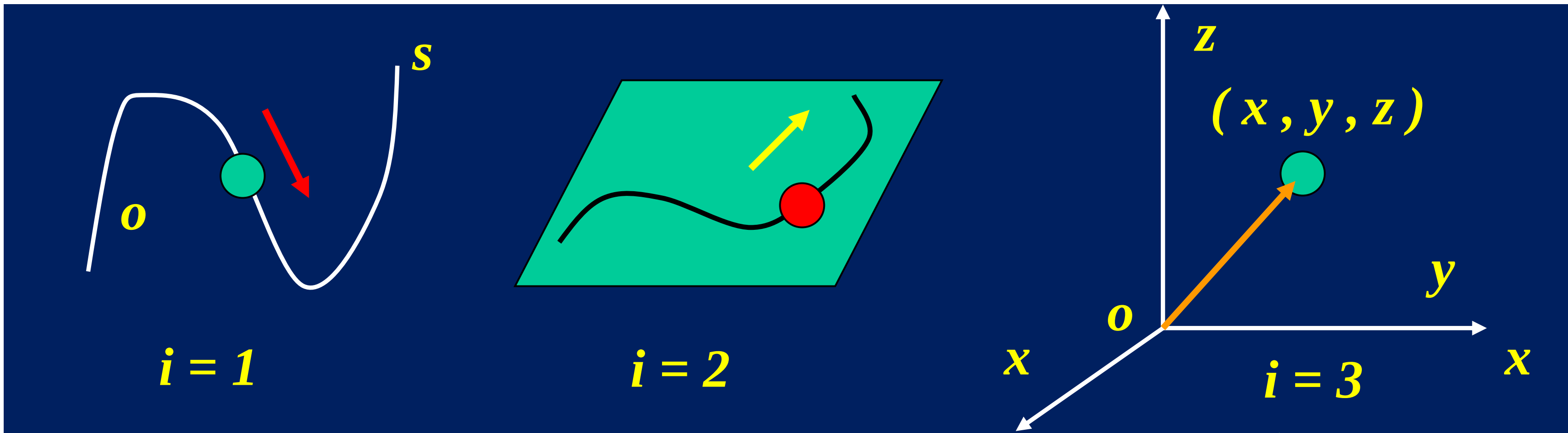


除上述几种运动形式外，刚体其它更为复杂的运动形式。

刚体运动=平动+转动

3.1.2 刚体的自由度

自由度：确定一个物体空间位置所需要的独立坐标数目。



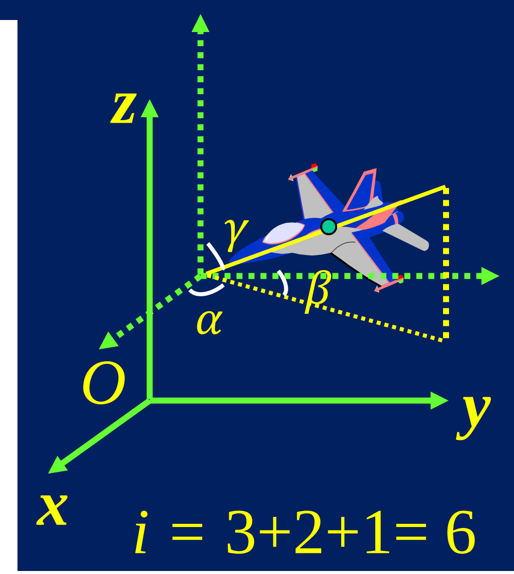
刚体的自由度

确定质心C的位置：3个平动自由度 (x，y，z)

确定瞬时轴的空间方位：3个方位角 (α，β，γ)，其中两个是独立的。

确定刚体绕瞬时轴转过的角度φ。

当刚体受到某些限制——自由度减少。



§3.2 刚体定轴转动的运动学规律

主要内容：

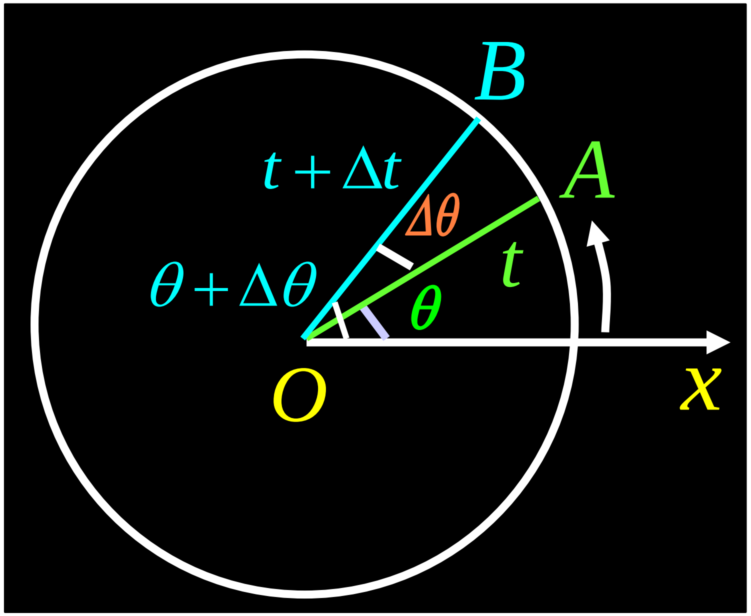
1. 描述刚体定轴转动的物理量
2. 定轴转动刚体上一点的速度和加速度与角量的关系
3. 刚体定轴转动运动学的两类问题

定轴转动时，刚体上各质点都绕固定轴作圆周运动，在任意时刻其上各质点的位移、速度、加速度(线量)各不相同。

质点的圆周运动→刚体定轴转动运动

3.2.1 描述刚体定轴转动的物理量

圆周运动的角量描述



□角位置θ $\theta = \theta(t)$

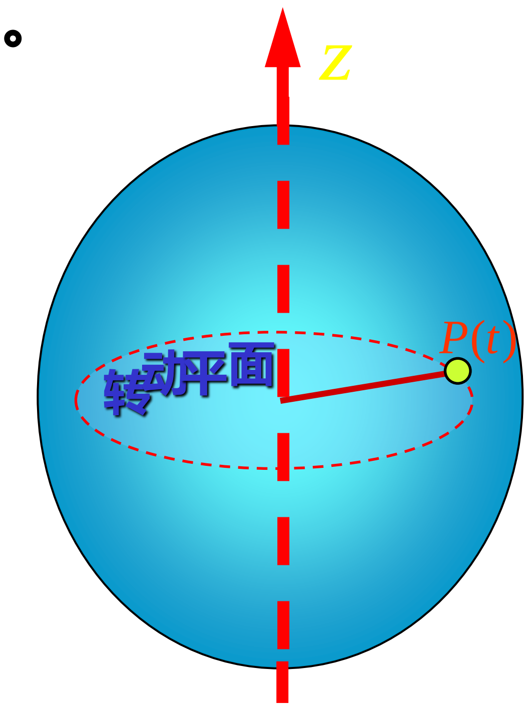
□角位移$\Delta\theta$ $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$

□角速度ω $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

□角加速度β $\beta = \frac{d\omega}{dt}$

刚体定轴转动的角量描述

转动平面：刚体上垂直于固定轴的任意平面。

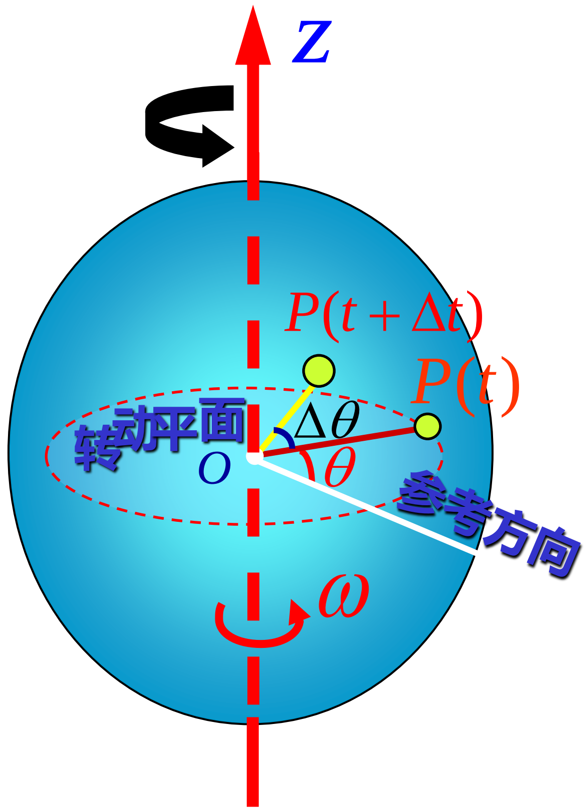


运动学中讲过的角坐标、角位移、角速度、角加速度等概念，以及有关公式都可适用于刚体的定轴转动。

角坐标θ

任选刚体上的任意点*P*点为参考点

刚体定轴转动的运动方程 $\theta = \theta(t)$



角位移Δθ

*P*在 t 和 $t+\Delta t$ 后的角坐标为θ_1和θ_2

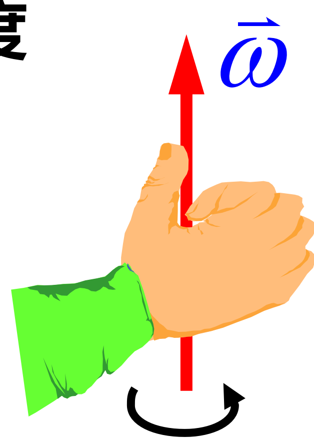
$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

沿逆时针转动，$\Delta\theta$为正；

沿顺时针转动，$\Delta\theta$为负。

角速度

$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 瞬时角速度 $\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 平均角速度

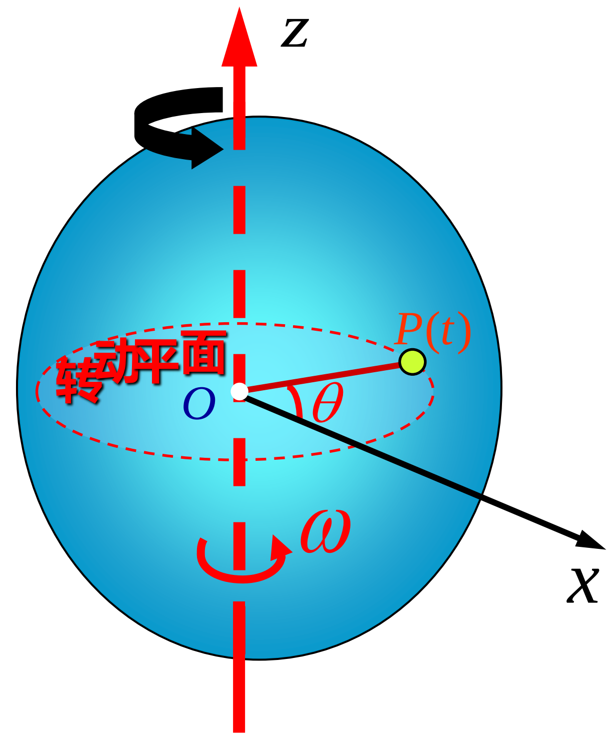


- 定轴转动角速度方向（正负）规定同角位移
- 刚体转动角位移矢量 $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

角加速度

(瞬时) 角加速度

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

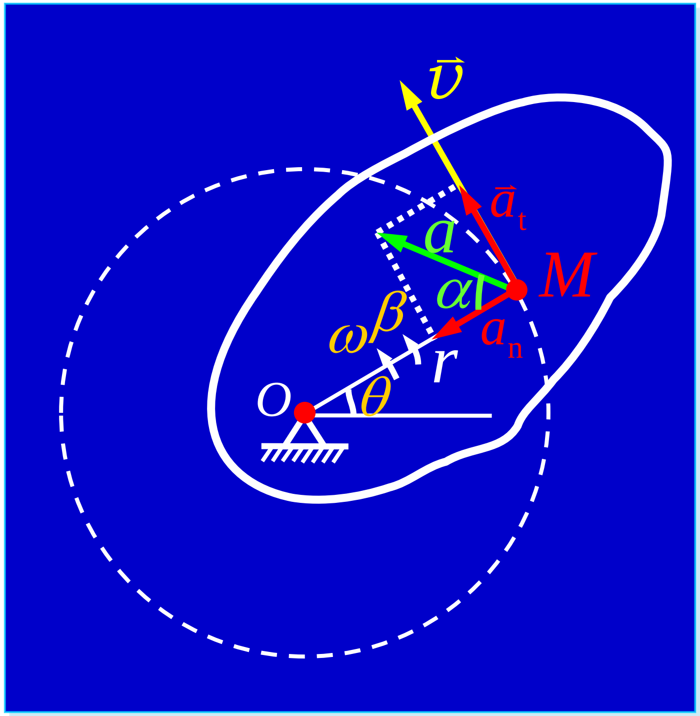


- 刚体定轴转动时，角加速度可看成是只有正、负的代数量。
- 定轴转动角加速度方向（正负）规定同角位移
- 刚体转动的角加速度矢量 $\vec{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

在一般刚体运动中，角加速度矢量和角速度矢量一般不沿同一方向。

3.2.2 定轴转动刚体上一点的速度和加速度与角量的关系

- 刚体内各个质点的位移、速度、加速度(线量)各不相同
- 刚体内各质点具有相同的角位移、角速度、角加速度



$$v = \omega r$$

$$a_t = r\beta$$

$$a_n = \omega^2 r = \omega v$$

- M点的线速度、切向加速度沿圆轨迹的切线，指向由ω、β的正负确定。
- ω和β同号，刚体加速转动；ω和β异号，刚体减速转动。

3.2.3 刚体定轴转动运动学的两类问题

◆ **第一类问题** —— 微分问题

已知刚体转动运动方程 $\theta=\theta(t)$，求角速度 ω、角加速度 β

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

◆ **第二类问题** —— 积分问题

已知角速度或角加速度及初始条件，求转动运动方程 $\theta=\theta(t)$

$$\omega=\omega_0+\int_0^t \beta\mathrm{d}t \qquad \theta=\theta_0+\int_0^t \omega\mathrm{d}t$$

- 对于刚体绕定轴匀变速转动，角加速度 $\beta=$ 常量，有

$$\omega=\omega_0+\beta t \qquad \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2 \qquad \omega^2=\omega_0{}^2+2\beta\left(\theta-\theta_0\right)$$

◆ 第一类问题

例 定轴转动运动方程为$\theta=10\pi t^2$，式中θ的单位为rad，t的单位为s

求角速度和角加速度及距转轴r处的质点的切向加速度和法向加速度

解 角速度为 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=20\pi t$

角加速度为 $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=20\pi$

距转轴r处质点的切向加速度大小 $a_{\mathrm{t}}=r\beta=20\pi r$

法向加速度大小 $a_n=r\omega^2=400\pi^2 rt^2$

例 一转动的轮子由于摩擦力矩的作用，在5s内角速度由15rad/s匀减速地降到10rad/s。求（1）角加速度（2）在此5s内转过的角度（3）还需要多长时间轮子停止转动

解 角速度为恒量

$$\omega = \omega_0 + \beta t \qquad \omega^2 = \omega_0{}^2 + 2\beta\left(\theta - \theta_0\right)$$

（1）角加速度

$$\beta = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = \frac{10-15}{5} = -1(rad/s^2)$$

（2）角位移

$$\theta - \theta_0 = \frac{\omega_1{}^2 - \omega_0{}^2}{2\beta} = \frac{10^2 - 15^2}{2\times(-1)} = 62.5(\text{rad/s})$$

（3）停止转动时间 $t' = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\beta} = \dfrac{0-10}{-1} = 10(s)$

◆ 第二类问题

例 电动机转子作定轴转动，开始时它的角速度$\omega_0 = 0$，经150s其转速达到12000r/min，已知转子的角加速度β与时间t满足$\beta = kt^2$。求在这段时间内，转子转过的圈数。

解 由角加速度的定义，有 $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = kt^2$

分离变量并积分，有 $\int_0^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^{t} kt^2 dt$ $\quad \omega_0 = 0$

t 时刻转子的角速度为 $\omega = \dfrac{1}{3}kt^3$ $\quad k = \dfrac{3\omega}{t^3}$

由角速度的定义 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ，得转子在150s内转过的角度为

注意单位换算

$$\theta = \int_0^{150} \frac{1}{3} \times k \cdot t^3 \mathrm{d}t = \frac{k}{12}\int_0^{150} \mathrm{d}t^4 = \frac{3\omega}{12 \times 150^3} \times 150^4 = \frac{3 \times 400\pi \times 150}{12} rad = 15000\pi(rad)$$

因而转子在这一段时间内转过的圈数为 $N = \dfrac{\theta}{2\pi}$ =7500r