第二节　随机事件的运算和关系

- 一、随机事件间的运算
- 二、随机事件间的关系
- 三、运算定律

一、随机事件间的运算

3种运算

- 和事件
- 差事件
- 积事件

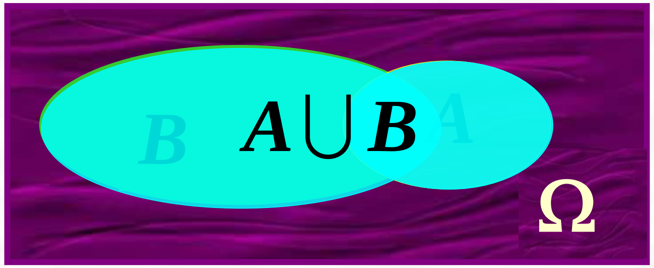
1.和事件(并事件)

"二事件A,B至少发生一个"也是一个事件，称为事件A与事件B的和事件. 记作$A\cup B$, 显然

$$A\cup B=\{w \mid w\in A\text{或}w\in B\}.$$

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定, 因此 "产品不合格" 是 "长度不合格" 与 "直径不合格" 的并.

图示事件 A 与 B 的并.



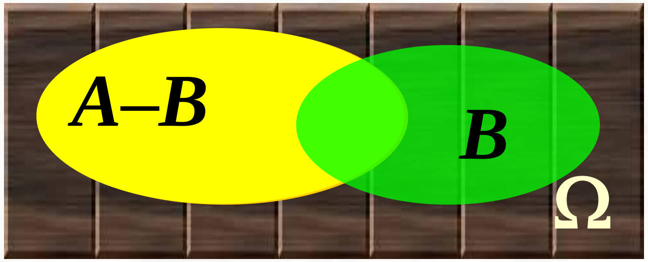
目 上 下 回 停 续

2.事件*A*与*B*的差(差事件）

由事件 *A* 发生而事件 *B* 不发生所组成的事件称为事件 *A* 与 *B* 的差事件, 记作 *A*- *B*.

实例 “长度合格但直径不合格”是“长度合格”与“直径合格”的差.

图示 *A* 与 *B* 的差



目 上 下 回 停 续

3.事件A与B的交(积事件)

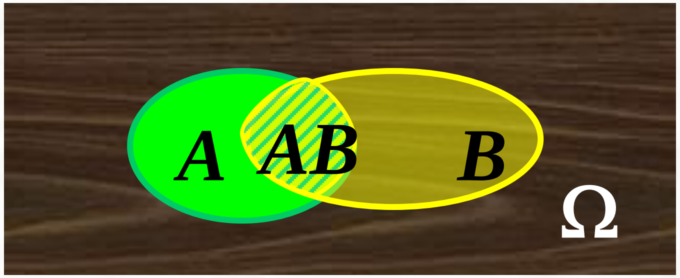
"二事件A,B同时发生"也是一个事件，称为事件A与事件B的**积事件**，记作$A\cap B$，显然

$A\cap B=\{w\mid w\in A且w\in B\}.$

积事件也可记作 $A\cdot B$ 或 AB.

实例 续上：“产品合格”是“长度合格”与“直径合格”的交或积事件.

图示事件A与B的积事件.



目 上 下 回 停 续

推广： ① $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生.

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$中至少有一个发生.

② $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生.

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$：

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$同时发生.

二、随机事件间的关系

4种关系

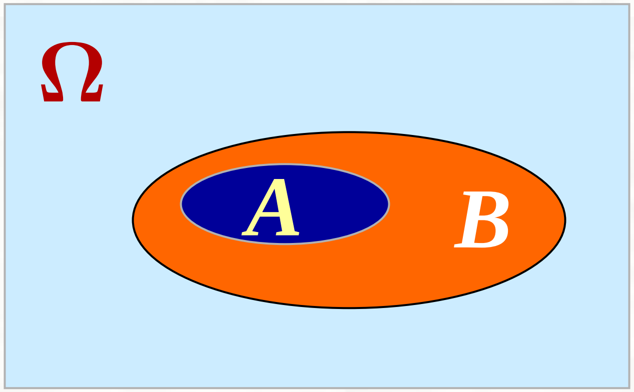
- 包含
- 相等（等价）
- 互斥（互不相容）
- 互逆（对立）

1. 包含关系

若事件 A 发生, 必然导致 B 发生，则称事件 B 包含事件 A, 记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

实例 “长度不合格” 必然导致 “产品不合格” 所以“产品不合格”包含“长度不合格”.

图示 B 包含 A.



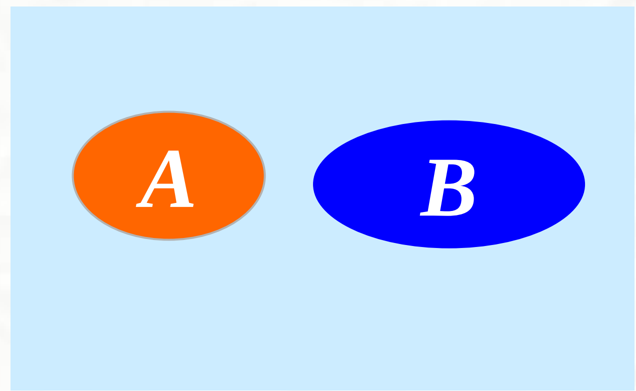
2. 相等关系

如果事件B包含事件A, 同时事件A包含事件 B , 则称事件A与事件B相等, 记作$A=B$.

3. 事件 A 与 B互斥 (互不相容)

若事件 A 的发生必然导致事件 B 不发生, B 发生也必然导致 A不发生, 则称事件 A与B互斥(或互不相容), 即

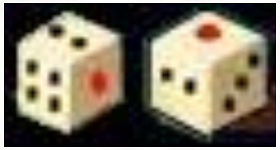
$$A \cap B = AB = \varnothing.$$



实例 1 抛掷一枚硬币,“出现花面” 与 “出现字面”是互不相容的两个事件.

实例 2 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数 .

“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ “骰子出现2点”



注 1° 当 $A\cap B=\varnothing$时, 可将$A\cup B$记为 “直和” 形式 $A+B$，即

$$A\cup B \stackrel{\Delta}{=} A+B \quad (\text{当}A\cap B=\varnothing\text{时}).$$

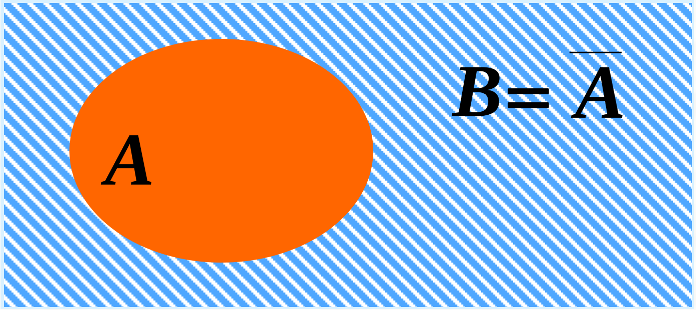
2° 任意事件A与不可能事件$\varnothing$为互斥.

4. 事件 A 的对立（或互逆）事件

设 A 表示“事件 A 发生”，则“事件 A 不发生”称为事件 A 的对立事件或逆事件. 记作 $\overline{A}$.

实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

图示 A 与 B 对立.



若 A 与 B 互逆, 则有 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$.

注 1° 互斥与互逆的关系

互逆 $\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array}$ 互斥

如：对于 $\Omega=\{1,2,\cdots,10\}$,

$$A=\{2\}, B=\{5\}.$$

显然，A与B只互斥不互逆.

而$D=\{1,3,5,7,9\}$与$G=\{2,4,6,8,10\}$互逆.

2° 必然事件Ω与不可能事件$\varnothing$互逆.

单选题 1分

设置

请问事件间的运算有几种?

A 3种

B 4种

C 5种

D 1种

提交

三、运算定律

1.交换律: (1) $A \cup B = B \cup A.$

(2) $AB = BA.$

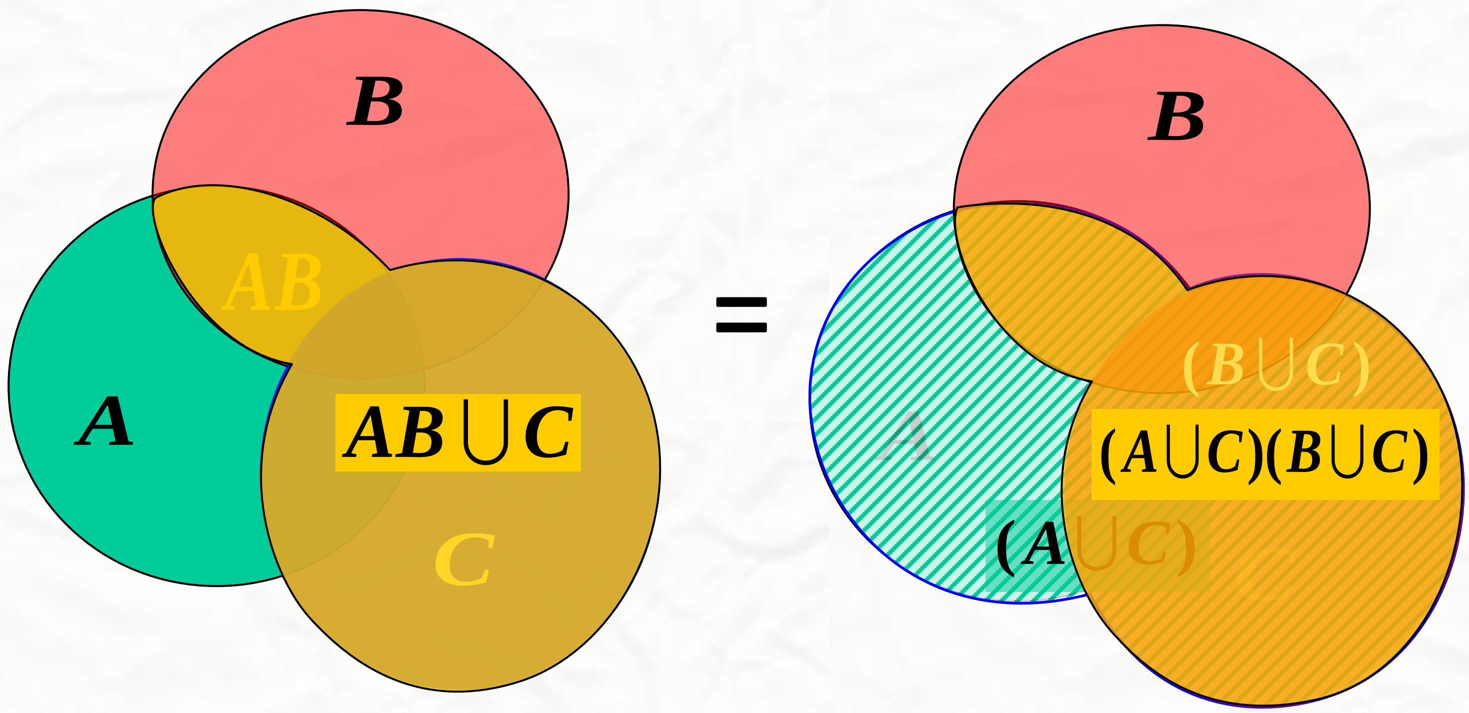
2.结合律: (1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$

(2) $(AB)C = A(BC).$

3.分配律: (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

★(2) $(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C),$

(3) $A(B - C) = AB - AC.$


B
AB
A
AB∪C
C
=
B
(B∪C)
(A∪C)(B∪C)
A
(A∪C)

4. 对偶律(De Morgan定理)

(1) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}.$

意义： "A, B至少有一个发生"的对立事件是"A, B均不发生".

(2) $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$

意义： "A, B均发生"的对立事件是"A, B至少有一个不发生".

推广： $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$ $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$

5. 其它一些性质

若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，$AB = A$.

特别地, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup \Omega = \Omega$.

$A\varnothing = \varnothing$, $A\Omega = A$.

目 上 下 回 停 续

例1 设A, B, C为三个事件，试用这三个事件的运算关系表示下列事件：

(1) A发生，而B，C都不发生.

可表示为：$A\bar{B}\bar{C}$，或 $A\overline{B\cup C}$；

(2) A, B都发生, C 不发生;

$$AB\bar{C}\text{，或 } AB-C;$$

(3) 三个事件同时都发生；　ABC；

(4) A, B, C中恰有一个发生.

可表示为：$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

(5) A, B, C中恰有两个发生.

可表示为：$AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$,

(6) 三个事件至少有一个发生;

$A\cup B\cup C$.

例2 设 A，B为随机事件，证明：

(1) $A-B=A-AB$,

证 (1) $A-AB=A\overline{AB}$ $\quad (A-B=A\overline{B})$

$$=A(\overline{A}\cup\overline{B})$$

$$=A\overline{A}\cup A\overline{B}=\varnothing\cup A\overline{B}$$

$$=A\overline{B}=A-B.$$

$$(2) A \cup B = A + B\overline{A} = A\overline{B} + \overline{A}B + AB.$$

证 $A + B\overline{A} = A \cup B\overline{A}$

$$= (A \cup B)(A \cup \overline{A})$$

$$= (A \cup B)\Omega = A \cup B.$$

$$A\overline{B} + \overline{A}B + AB$$

$$= A(B + \overline{B}) + \overline{A}B = A\Omega + B\overline{A}$$

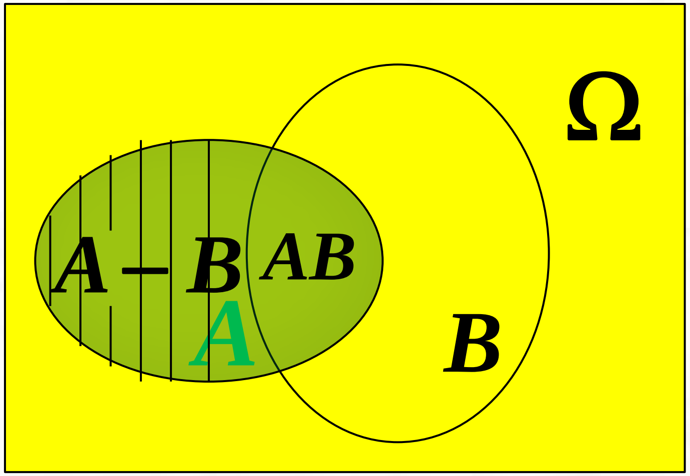
$$= A + B\overline{A} = A \cup B.$$

目 上 下 回 停 续

例 3 运用事件运算公式证明等式

$$\Omega = AB \cup (A-B) \cup \overline{A}$$

证明 因为 $A-B=A\overline{B}$,



于是 $AB \cup (A-B) \cup \overline{A}$

$= AB \cup A\overline{B} \cup \overline{A}$

$= A \cup \overline{A}$

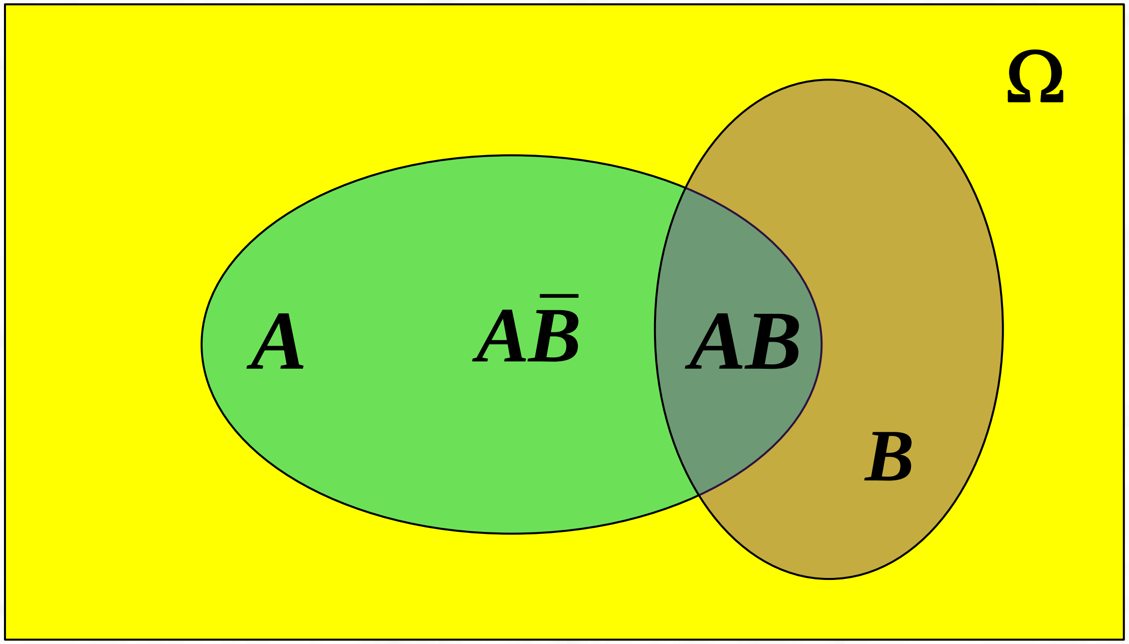
$= \Omega.$

Ω被划分为三个两两互斥的事件之和!

目 上 下 回 停 续

任何一个事件A都可以被另外一个事件B和它的逆事件$\bar{B}$划分！

$$A = AB + A\bar{B}$$



目 上 下 回 停 续

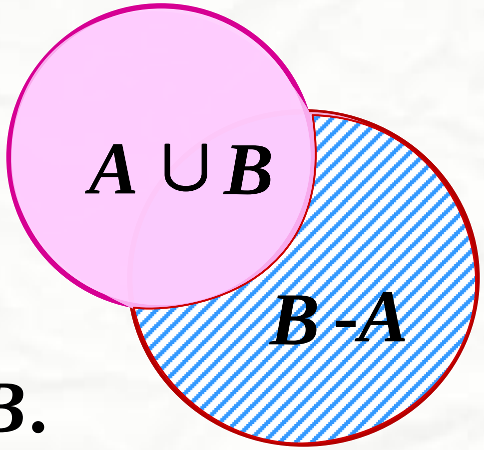
例 4 下列命题是否正确?

(1) $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$ ✗

A，B至少有一个不发生

A，B均不发生

(2) $A + (B - A) = B$ ✗



解 不正确.

一般地，$A + (B - A) = A \cup B \neq B.$

特别地，

若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，

从而 $A + (B - A) = A \cup B = B.$

(3) $B(A - C) = BA - BC.$ √

解 正确.

$$BA - BC = BA\overline{BC}$$

$$= BA(\overline{B} \cup \overline{C})$$

$$= BA\overline{B} \cup BA\overline{C} = \varnothing \cup BA\overline{C}$$

$$= BA\overline{C} = B(A - C).$$

内容小结

概率论与集合论之间的对应关系

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	空间(全集)
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\bar{A}$	A的对立事件	A的补集
$A \subset B$	A发生必然导致B发生	A是B的子集
$A = B$	事件A与事件B相等	A集合与B集合相等

目 上 下 回 停 续

$A \cup B$	事件A与事件B的和	A集合与B集合的并集
AB	事件A与B的积事件	A集合与B集合的交集
$A - B$	事件A与事件B的差	A与B两集合的差集
$AB = \varnothing$	事件A与B互不相容	A与B 两集合中没有相同的元素


再见

例 3-3 在计算机系学生中任选一名学生，设事件

A=“选出的学生是男生”；

B=“选出的学生是三年级学生”；

C=“选出的学生是运动员”.

(1)叙述事件$AB\overline{C}$的含义.

(2)在什么条件下,$ABC=C$成立?

(3)什么时候关系$C\subset B$成立?

解 (1) $AB\overline{C}$ 的含义是“选出的学生是三年级的男生，但他不是运动员”.

(2) $\because ABC \subset C,$

$\therefore ABC = C$的充要条件是：

$$C \subset ABC.$$

又 $\because ABC \subset AB,$

$\therefore ABC = C$的充要条件是：

$$C \subset AB.$$

$C \subset AB$ 即“计算系学生中的运动员都是三年级的男生”.

(3) 什么时候关系$C \subset B$成立？

解 当运动员都是三年级的学生时，C是B的子事件，即 $C \subset B$成立.