概率论与数理统计

第二节 估计量的评价标准

- 一、问题的提出
- 二、无偏估计
- 三、最小方差无偏估计
- 四、有效估计
- 五、相合估计(一致估计)

一、问题的提出

对于总体分布中的同一个未知参数,θ 若采用不同的估计方法，可能得到不同的估计量 $\hat{\theta}$。

究竟采用哪一个估计量更好呢？这就产生了如何评价与比较估计量的好坏的问题，我们从估计量的数学期望及方差这两个数字特征出发，引入无偏估计，最小方差无偏估计，有效估计和相合估计等概念。

二、无偏性

设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2,\cdots, X_n)$是参数$\theta$的一个估计量，如果 $E(\hat{\theta})=\theta$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计(量).

如果 θ 的一列估计$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1, X_2,\cdots, X_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，满足关系式

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n)=\theta$$

则称 $\hat{\theta}_n$是 θ 的渐近无偏估计量.

估计量$\hat{\theta}$如果不是无偏估计量, 就称这个估计量是有偏的，称$E(\hat{\theta})-\theta$为估计量$\hat{\theta}$的偏差 .

例1 设总体X的一阶和二阶矩存在，分布是任意的，记$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$; 则样本均值$\bar{X}$是μ的无偏估计，样本方差S_n^2是σ^2的渐近无偏估计，修正样本方差S_n^{*2}是σ^2无偏估计 .

证 $E(\bar{X})=\mu$, $E\left(S_n^2\right)=\dfrac{n-1}{n}\delta^2$, $E\left(S_n^{*2}\right)=\sigma^2$

所以, $\bar{X}$和S_n^{*2}均为无偏估计量，而

$$\lim_{n\to\infty} E\left(S_n^2\right)=\lim\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

故S_n^2是σ^2的渐近无偏估计.

例2 设总体 X 服从区间 $[0, \theta]$ 上的均匀分布,

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的一个样本 .

试证：参数 θ 的矩估计量 ,$\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计; θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_L = \max\limits_{1 \le i \le n} X_i = X_{(n)}$ 是 θ 的渐近无偏估计.

证

$$E\left(\hat{\theta}_1\right) = E\left(2\overline{X}\right) = 2E\left(X\right) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

故 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 是无偏估计量.

$$p_{X(n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E\left(\overset{\wedge}{\theta}_L\right)=E\left(X_{(n)}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_{X(n)}(x)dx$$

$$=\int_0^\theta\frac{n}{\theta^n}x^n dx=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$$

所以$\hat{\theta}_L$是θ的有偏估计量.

但是,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_L\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\theta = \theta$$

即 $\hat{\theta}_L$是θ 的渐近无偏估计量.

但只要修正为

$$\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_L = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$

那么 $\hat{\theta}_2$也是 θ 的无偏估计量.

注　1° 一个未知参数可能有不止一个无偏估计量.

设α_1和α_2为满足$\alpha_1+\alpha_2=1$的任意常数, 则

$\alpha_1\hat{\theta}_1+\alpha_2\hat{\theta}_2$ 都是无偏估计量.

2° 有时一个参数的无偏估计可能不存在.

例如，设总体$X\sim N(\theta,\ 1)$, 则 $|\theta|$ 就没有无偏估计. 其中 $E|X|=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\theta^2}{2}}+\theta[2\phi(\theta)-1]$.

目 上 下 回 停 续

3° 有时无偏估计可能明显不合理.

例如，设 X_1 是来自泊松总体 $P(\lambda)$ 的一个样本，可以证明 $(-2)^{X_1}$ 是 $e^{-3\lambda}$ 的无偏估计.

但这个无偏估计明显不合理. 当 X_1 取奇数值时，估计值为负数. 用一个负数估计 $e^{-3\lambda}$，明显不合理 .

目 上 下 回 停 续

三、最小方差无偏估计

定义6.3 设$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$均为θ的无偏估计量，若对任意样本容量n有$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$，则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

如果存在θ一个无偏估计量$\hat{\theta}_0$，使对θ的任意无偏估计量$\hat{\theta}$，都有

$$D(\hat{\theta}_0) < D(\hat{\theta})$$

则称$\hat{\theta}_0$是θ的最小方差无偏估计(量).

缩写为*MVUE*.

目 上 下 回 停 续

例3 设总体 X 服从区间 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是总体 X 的一个样本矩 . 估计 $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X}$ 和修正的最大似然估计 $\hat{\theta}_2 = \dfrac{n+1}{n} X_{(n)}$ 均为 θ 的无偏估计, $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 哪个更有效?

解

$$D\left(\hat{\theta}_1\right) = D\left(2\overline{X}\right) = 4D\left(\overline{X}\right) = 4\frac{D(X)}{n} = \frac{4\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$D\left(\hat{\theta}_2\right) = D\left(\frac{n+1}{n} X_{(n)}\right) = \frac{(n+1)^2}{n^2} D\left(X_{(n)}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left[E\left(X_{(n)}^2\right) - (EX_{(n)})^2\right]$$

$$E\left(X_{(n)}\right)=\frac{n}{n+1}\theta$$

$$E\left(X_{(n)}^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 p_{X(n)}(x)dx=\int_0^{\theta}\frac{n}{\theta^n}x^{n+1}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$D\left(\hat{\theta}_2\right)=\frac{(n+1)^2}{n^2}\left[\frac{n}{n+2}\theta^2-\frac{(n+1)^2}{n^2}\theta^2\right]=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2$$

显然当 $n\geq 2$ 时

$$D\left(\hat{\theta}_1\right)=\frac{\theta^2}{3n}>\frac{\theta^2}{n(n+2)}=D\left(\hat{\theta}_2\right)$$

即 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

最小方差无偏估计是一种最优估计．对于最小方差无偏估计，一个自然的问题是：无偏估计的方差是否可以任意小？如果不可以任意小，那么它的下界是什么？

罗-克拉美(**Rao-Cramer**)不等式回答了这个问题.

定理6.1 (**Rao- Cramer不等式**)设Θ是实数轴上的一个开区间,总体X的分布密度为$p(x;\ \theta)$,$\theta\in\Theta$,$(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$是来自总体X的一个样本,$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$是参数$\theta$的一个无偏估计量,且满足条件:

(1) 集合$S\overset{def}{=}\{x\mid p(x;\theta)\neq 0\}$与$\theta$无关;

(2) $\dfrac{\partial p(x;\ \theta)}{\partial\theta}$存在且对中一切有:

目 上 下 回 停 续

$$\frac{\partial}{\partial}\int_{-\infty}^{+\infty} p\left(x;\ \ \theta\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial p(x;\ \ \theta)}{\partial \theta}dx$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\theta}\left(x_1,\ \ x_2,\cdots,\ \ x_n\right)L\left(\theta\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\theta}\left(x_1,\ \ x_2,\cdots,\ \ x_n\right)\frac{\partial}{\partial \theta}L\left(\theta\right)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

其中$L\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n} p\left(x;\ \ \theta\right)$；

(3)$I\left(\theta\right)\underline{\underline{def}}\,E\left(\frac{\partial \ln p\left(x;\theta\right)}{\partial \theta}\right)^2>0$, 则

对一切 $\theta \in \Theta$,有

$$D\left(\hat{\theta}\right) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

上式的右端项称为罗-克拉美下界, $I\left(\theta\right)$称为 Fisher信息量.

可证明$I\left(\theta\right)$的另一表达式为

$$I\left(\theta\right) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln p\left(x;\ \theta\right)}{\partial \theta^2}\right)$$

目 上 下 回 停 续

若无偏估计 $\hat{\theta}$方差$D\left(\hat{\theta}\right)$达到罗-克拉美下界，即

$$D\left(\hat{\theta}\right)=1\Big/\left[nI(\theta)\right]$$

则必为 θ 的最小方差无偏估计.

例4 设X_1，$X_2,\cdots$，X_n 是来自泊松分布$P(\lambda)(\lambda>0)$的一个样本，试证$\bar{X}$是λ 的最小方差无偏估计.

证 X的分布律为

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

$$E(\bar{X})=E(X)=\lambda$$

$$D(\bar{X})=D(X)/n=\lambda/n$$

$$\ln p(x;\ \lambda)=x\ln\lambda-\lambda-\ln x!$$

因此

$$I(\lambda)=E\left(\frac{d\ln p(x;\lambda)}{d\lambda}\right)^2=E\left[\frac{X}{\lambda}-1\right]^2$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}E\left[X-\lambda\right]^2=\frac{1}{\lambda^2}D(X)=\lambda\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}$$

故有

$$D(\overline{X})=\frac{1}{nI(\lambda)}=\frac{\lambda}{n}$$

即 $\overline{X}$的方差达到了罗-克拉美下界, 所以$\overline{X}$是

λ 的最小方差无偏估计.

例5 设总体 X 的分布密度为

$$p(x;\ \theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$\theta>0$ 为未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本,

证明 $\hat{\theta}=\overline{X}$ 是 θ 的最小方差无偏估计.

证

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$$

$$E(X)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-(EX)^2=2\theta^2-\theta^2=\theta^2$$

故 $$D\left(\bar{X}\right)=D(X)/n=\theta^2/n$$

而 $$\ln p(x,\theta)=-\ln\theta-x/\theta$$

$$I(\theta)=P\left[\frac{\partial \ln p(x;\ \ \theta)}{\partial\theta}\right]^2=E\left[-1/\theta+X/\theta^2\right]^2$$

$$=E[X-\theta]^2/\theta^4=1/\theta^2$$

所以

$$D\left(\overline{X}\right)=\frac{1}{nI(\theta)}=\theta^2/n$$

即 $\bar{X}$ 的方差达到罗-克拉美下界，所以 $\bar{X}$ 是

θ 的最小方差无偏估计.

四、 有效估计

定义6.4 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的任一无偏估计量，称

$$e\left(\hat{\theta}\right) \overset{def}{=\!=} \frac{\left(\dfrac{1}{nI(\theta)}\right)}{D\left(\hat{\theta}\right)}$$

为 $\hat{\theta}$ 估计量的效率 .

显然 θ 的任一无偏估计量的效率满足

$$0 < e\left(\hat{\theta}\right) \le 1$$

定义6.5 如果 θ 的无偏估计量 $\hat{\theta}$ 的效率

$$e\left(\hat{\theta}\right)=1$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的有效估计(量).

如果

$$\lim_{n\to\infty} e(\hat{\theta})=1$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的渐近有效估计(量).

如果 $\hat{\theta}$ 为 θ 的有效估计, 则它是最小方差无偏估计，但反之则不一定成立.

例6 设X_1，$X_2,\cdots$，X_n是来自正态总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的一个样本，证明 $\overline{X}$是 μ的有效估计量；S_n^{*2} 是 σ^2 的渐近有效估计量.

证 总体X的分布密度为:

$$p(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln p(x;\mu,\sigma^2)=-\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

所以

$$I(\mu)=E\left[\frac{\partial \ln p(X;\mu,\sigma^2)}{\partial \mu}\right]^2=E\left[\frac{(X-\mu)}{\sigma^2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{\sigma^4}E(X-\mu)^2=\frac{D(X)}{\sigma^4}=\frac{1}{\sigma^2}$$

而

$$D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$$

故有

$$e(\bar{X})=\frac{1/[nI(\mu)]}{D(\bar{X})}=\frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n}=1$$

即 $\bar{X}$ 是 μ 的有效估计.

目 上 下 回 停 续

由于

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln p(x;\mu,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\ln p(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{2\sigma^4}-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^6}$$

则

$$I(\sigma^2)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2}\ln p(x;\mu,\sigma^2)\right]$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^4}+\frac{E(x-\mu)^2}{\sigma^6}=-\frac{1}{2\sigma^4}+\frac{\sigma^2}{\sigma^6}=\frac{1}{2\sigma^4}$$

又由于 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，由 χ^2 分布性质得

$$E\left[\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}\right]=n-1$$

$$D\left[\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}\right]=2(n-1)$$

故

$$ES_n^{*2}=\sigma^2\ ,\quad DS_n^{*2}=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

所以

$$e(S_n^{*2})=\frac{1/[nI(\sigma^2)]}{D(S_n^{*2})}=\frac{2\sigma^4/n}{2\sigma^4/n-1}=\frac{n-1}{n}\to 1$$

S_n^{*2}是 σ^2 的渐近有效估计量.

注 S_n^{*2}不是 σ^2的有效估计，但可以证明，

S_n^{*2}是 σ^2 的最小方差无偏估计 .

例7 设总体$X \sim B(N,p)$,$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本，证明$\hat{p}=\bar{X}/N$是p的有效估计量.

证 总体X的分布律为:

$$P\{X=x\}=C_N^x p^x (1-p)^{N-x} \underline{\underline{def}} P(x,p)$$

$$\ln P(x,p)=\ln C_N^x + x\ln p + (N-x)\ln(1-p)$$

目 上 下 回 停 续

所以

$$I(p)=E\left[\frac{d\ln P(X,p)}{dp}\right]^2=E\left[\frac{X}{p}-\frac{N-X}{1-p}\right]^2$$

$$=\frac{1}{p^2(1-p)^2}E[X-Np]^2=\frac{D(X)}{p^2(1-p)^2}$$

$$=\frac{Np(1-p)}{p^2(1-p)^2}=\frac{N}{p(1-p)}$$

又 $$E(\hat{p}) = E\left(\frac{\bar{X}}{N}\right) = \frac{EX}{N} = \frac{Np}{N} = p$$

$$D(\hat{p}) = D\left(\frac{\bar{X}}{N}\right) = \frac{D(\bar{X})}{N^2} = \frac{D(X)}{N^2 n} = \frac{Np(1-p)}{nN^2} = \frac{p(1-p)}{nN}$$

所以

$$e(\hat{p}) = \frac{1/[nI(p)]}{D(\hat{p})} = \frac{p(1-p)/nN}{p(1-p)/nN} = 1$$

即 $\hat{p} = \bar{X}/N$ 是的 p 有效估计.

目 上 下 回 停 续

例8 设$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2>0$存在，$(X_1,X_2)$是来自总体$X$的样本, 问: 下列三个对 μ 的无偏估计量哪一个最有效?

$$\hat{\mu}_1=\frac{3}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2,$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2,$$

$$\hat{\mu}_3=\frac{2}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2.$$

解 $D(\hat{\mu}_1)=(\frac{9}{16}+\frac{1}{16})\sigma^2=\frac{5}{8}\sigma^2,$

$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{2}\sigma^2, D(\hat{\mu}_3)=\frac{5}{9}\sigma^2,$

可用求条件极值的拉格朗日乘数法证明

$\because \quad D(\hat{\mu}_2)<D(\hat{\mu}_3)<D(\hat{\mu}_1)$

$\therefore \hat{\mu}_2$最有效.

注 一般地，在μ的无偏估计量

$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \ (\sum_{i=1}^{n} C_i = 1)$中，$\overline{X}$最有效.

五、相合估计(一致估计)

定义6.6　设$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数$\hat{\theta}$的估计序列，如果$\hat{\theta}_n$依概率收敛于$\theta$，即对任意$\varepsilon>0$，有：

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\}=1$$

或

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\geq\varepsilon\}=0$$

则称$\hat{\theta}_n$是θ的相合估计(或一致估计).

定理6.2 设 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的一个估计量, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\hat{\theta}_n\right)=\theta$,

且 $\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n)=0$, 则 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计(或一致估计).

证明 由于

$$0 \le P\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right| \ge \varepsilon\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}E(\hat{\theta}_n-\theta)^2$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}E\left[\hat{\theta}_n-E\hat{\theta}_n+E\hat{\theta}_n-\theta\right]^2$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}E[\left(\hat{\theta}_n-E\hat{\theta}_n\right)^2+2\left(\hat{\theta}_n-E\hat{\theta}_n\right)\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)+\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)^2]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}[D\hat{\theta}_n+\left(E\hat{\theta}_n-\theta\right)^2]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\left[D\hat{\theta}_n + \left(E\hat{\theta}_n - \theta \right)^2 \right]$$

令 $n \to \infty$, 由定理的假设得

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\} = 0$$

即 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的相合估计.

目 上 下 回 停 续

例9 若总体 X 的 EX 和 DX 都存在，则 $\overline{X}$ 是总体均值 EX 的相合估计.

证 因为 $E\overline{X}=EX$

$$D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}\to 0 \qquad n\to\infty$$

故 $\overline{X}$ 是总体均值 EX 的相合估计.

一般样本的 k 阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ 是总体 k 阶原点矩的相合估计. 矩估计往往是相合估计.

目 上 下 例 停 续

内容小结

估计量的评选的四个标准，
但要求一下三个标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性

相合性是对估计量的一个基本要求, 不具备相合性的估计量是不予以考虑的.

由最大似然估计法得到的估计量, 在一定条件下也具有相合性.估计量的相合性只有当样本容量相当大时,才能显示出优越性, 这在实际中往往难以做到,因此,在工程中往往使用无偏性和有效性这两个标准.


再见

备用题

例2-1 设总体 X 的方差 $D(X)$ 存在, 且 $D(X) > 0$, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自总体 X 的样本, 试选择适当的常数 C , 使得

$$C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$$

为$D(X)$的无偏估计.

目 上 下 回 停 续

解 $\because E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2] = C\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1}\{D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2\}$$

而 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且与 X 同分布

$\therefore \quad E(X_i)=E(X), \quad D(X_i)=D(X)(i=1,2,\cdots,n)$

$$D(X_{i+1}-X_i)=D(X_{i+1})+D(X_i)=2D(X)$$

$$E(X_{i+1}-X_i)=E(X_{i+1})-E(X_i)=0$$

$$\therefore \quad E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]$$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1}\{D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2\}$$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1}2D(X) = C\cdot 2(n-1)D(X)$$

依题意，$E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2] = D(X)$

即 $C\cdot 2(n-1)D(X) = D(X)$ $\quad \therefore \quad C = \dfrac{1}{2(n-1)}.$

例5-1 设 $\hat{\theta}_1$ 及 $\hat{\theta}_2$ 为 θ 的两个独立的无偏估计量,

且假定 $D(\hat{\theta}_1) = 2D(\hat{\theta}_2)$, 求常数 C_1 及 C_2， 使

$\hat{\theta} = C_1\hat{\theta}_1 + C_2\hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计,并使 $D(\hat{\theta})$ 达到最小.

解 $$E(\hat{\theta}) = E(C_1\hat{\theta}_1 + C_2\hat{\theta}_2) = (C_1 + C_2)\theta$$

由 $E(\hat{\theta}) = \theta$,则 $C_1 + C_2 = 1.$

方差 $$D\hat{\theta} = C_1^2 D\hat{\theta}_1 + C_2^2 D\hat{\theta}_2 = (2C_1^2 + C_2^2)D\hat{\theta}_2$$

要使$D\hat{\theta}$最小，只需 $f=2C_1^2+C_2^2$最小，将$C_2=1-C_1$

代入 f 有

$$f=2C_1^2+(1-C_1)^2=3C_1^2-2C_1+1$$

当f最小时，$C_1=\frac{1}{3}$，则$C_2=\frac{2}{3}$.

目 上 下 回 停 续

例9-1 设总体 X 的二阶矩存在，X_1，$X_2, \cdots$，X_n 是来自总体 X 的一个样本，$n=1,2,\cdots$.

试证 $\hat{\mu}_n = \dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$ 是总体均值 μ 的相合估计.

证 因为

$$E(\hat{\mu}_n) = E\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iEX_i$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\cdot\mu = \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2}\mu = \mu$$

$$D\left(\hat{\mu}_n\right)=D\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 D\left(X_i\right)$$

$$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 D(X)$$

$$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}D(X)$$

$$=\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}D(X)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

故 $\hat{\mu}$ 是μ总体均值的相合估计.

目 上 下 回 停 续