第四章 有限集与无限集

- 有限集元素的计数
- 无限集
- 无限集的性质

有限集合元素的计数

定义 集合S元素的个数称为其基数，记为$|S|$。

有限集计数的方法

1. 文氏图法

例 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个？

解 方法一：文氏图

定义以下集合：

$S=\{x \mid x\in Z \wedge 1\le x\le 1000\}$

$A=\{x \mid x\in S \wedge x$可被5整除$\}$

$B=\{x \mid x\in S \wedge x$可被6整除$\}$

$C=\{x \mid x\in S \wedge x$可被8整除$\}$

实例

$|S| = 1000$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$, $|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$, $|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$

$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

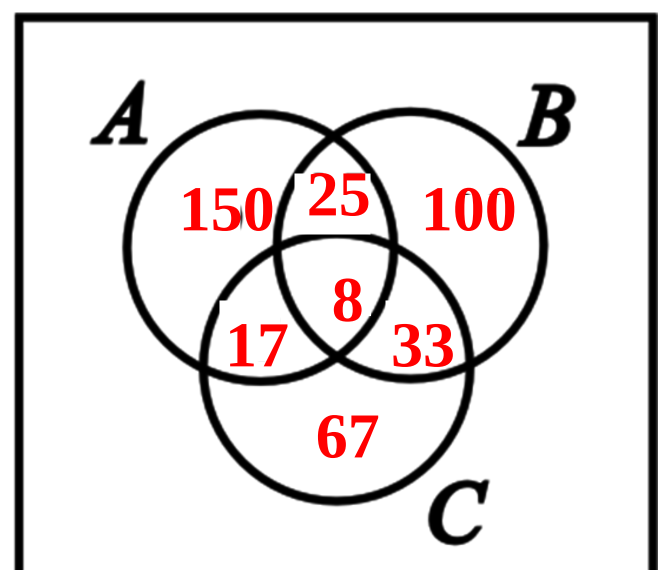
$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

$\lfloor x \rfloor$表示小于等于x的最大整数，lcm( )表示求最小公倍数

画出文氏图，然后填入相应的数字

解得 N=1000－(200+100+33+67)

=600



文氏图法

对文氏图的直观认识：

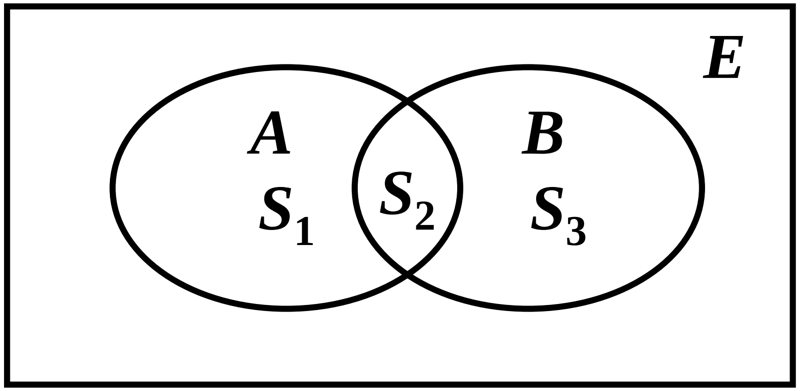
设A和B是有限集合，则

- 若A和B分离，则有：$|A \cup B| = |A|+|B|$
- 一般地， $|A \cup B| = |S_1| + |S_2| + |S_3|$

$$= (|S_1| + |S_2|) + (|S_2| + |S_3|) - |S_2|$$

$$= |A|+|B| - |A \cap B|$$

特别地： $|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|B \cap C|-|A \cap C|+|A \cap B \cap C|$



包含排斥原理

2. 包含排斥原理

定理 设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

推论 S中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum_{1 \le i \le n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

实例

方法二

$|S| = 1000$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$, $|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$, $|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A \cap B| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/33 \rfloor = 33$

$|A \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|B \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$$

$$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$

无限集

原始人：

先学会比较多少，后才有的计数，学会计数；

如何比较多少？（一一对应）

伽利略：

1638年，提出对于每个自然数，都有且只有一个平方数与之对应；

困扰：自然数和自然数的平方哪个多？

部分和全体哪个多？

康托：

1874-1894， 解决了此问题，思想是“一一对应”

基本概念

定义

如果存在双射函数***f***: ***S*** → ***S***使得***f***(***S***) ⊂ ***S***, 则称***S***是无限的，否则是有限的。

例：

- 自然数集合**N**是无限集

（证明思路，通过一个双射函数验证，例如***f***(***x***)=**2*x***）

- 整数集是无限的
- 实数集是无限的

$$f:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{R},\quad f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$$

无限集的性质

定义 设A, B是集合, 如果存在着从A到B的双射函数, 就称A和B是**等势**的, 记作$A\approx B$. 如果A不与B 等势, 则记作$A\not\approx B$.

集合等势的实例

例 (1) Z≈N.

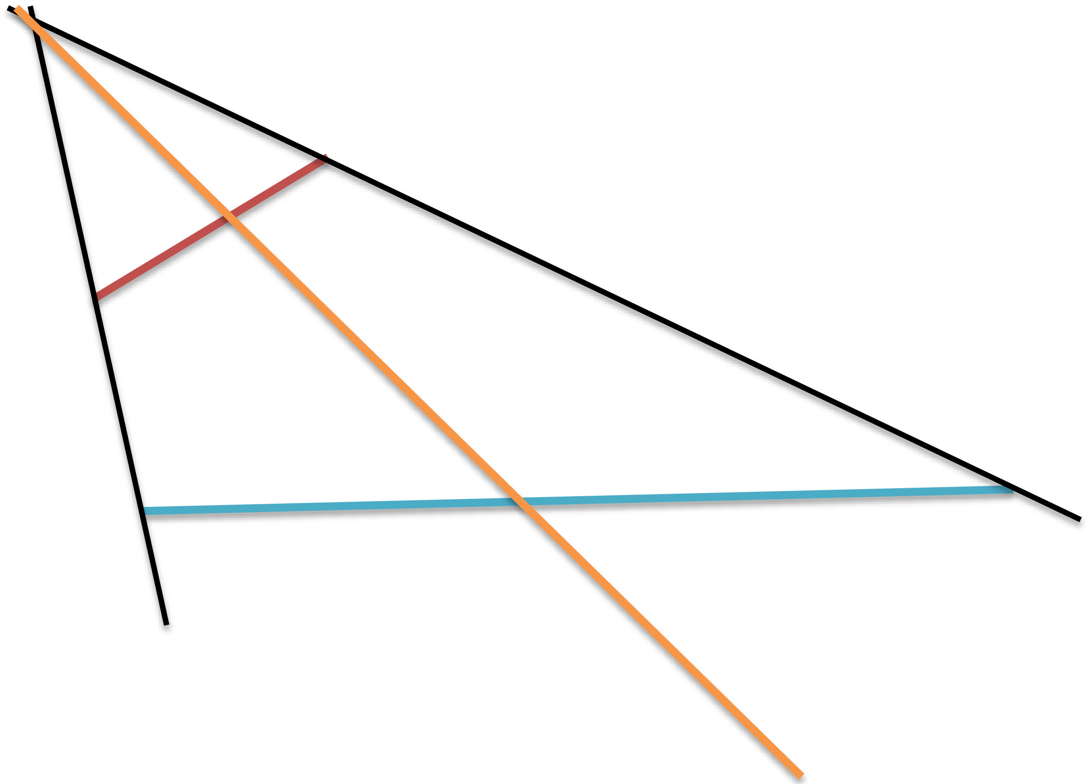
$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N}, \quad f(x)=\begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$$

则 f 是Z到N的双射函数. 从而证明了Z≈N.

实例

哪个线段的点多？

（等势）



实数集合的等势

(1) 对任何$a, b\in$R, $a<b$, $[0,1]\approx[a,b]$，双射函数 $f:[0,1]\to[a,b]$, 找一个过点$(0, a)$和$(1, b)$的单调函数即可.

$$f(x)=(b-a)x+a$$

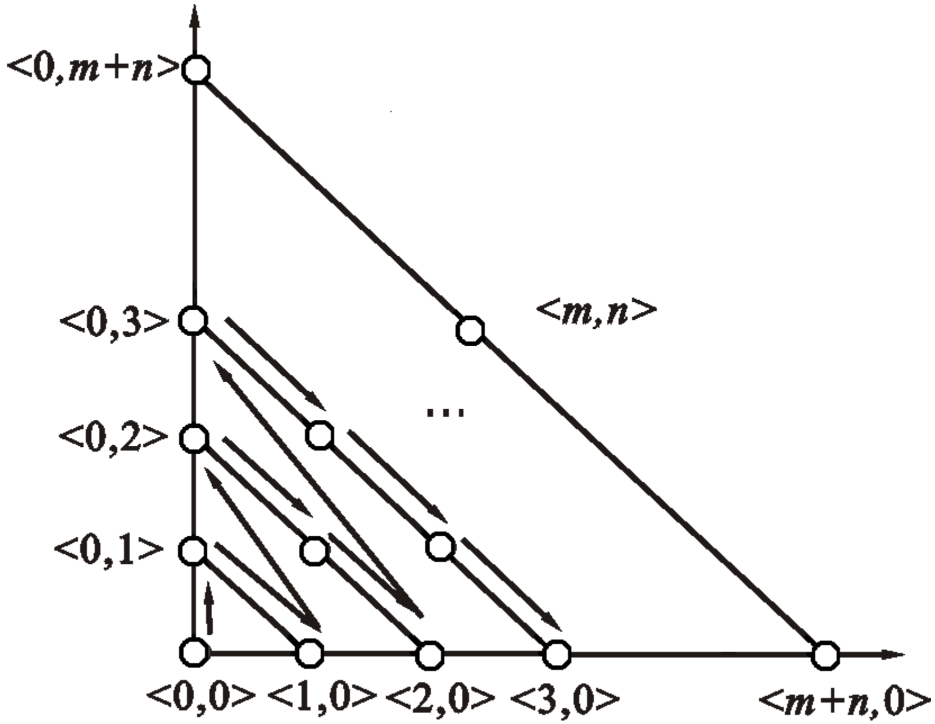
类似地可以证明, 对任何$a, b\in R$, $a<b$, 有$(0,1)\approx(a,b)$.

(2) $(0,1)\approx$R. 其中实数区间 $(0,1)=\{x \mid x\in R\wedge 0<x<1\}$. 令

$$f:(0,1)\to \mathrm{R}, \quad f(x)=\tan\pi\frac{2x-1}{2}$$

集合等势的实例

(3) N×N中所有的元素排成有序图形 （N×N≈N）



(4) 开区间(0,1)与(0,1)×(0,1)等势。

开线段与开正方形上点的个数一样。

可列集与不可列集

集合族上的等势关系式一个等价关系。

定义　与自然数N等势的集合叫做可列集（可数无限集）$|N| = \aleph_0$

(1) 整数集Z是可列集 $|Z| = \aleph_0$

(2) 有理数Q是可列集 $|Q| = \aleph_0$

(3) 实数集R是不可列的 $|R| = \aleph = C$

结论

定理 若一集合为无限集，则它必含有与其等势的真子集

推论 一个集合为无限集的充要条件是它必含有与其等势的真子集

定义 一个集合若存在与其等势的真子集, 则称为无限集，否则称为有限集

定理 一无限集必包含一可列集，可列集的无限子集仍为可列集

- 可列集是最小的无限集
- 对于任何一个集合A, 它的幂集的基数一定比A的基数大

作业讲解

试证"~"是一个等价关系.

证明: 根据条件,若 $ad=bc$,则 $(a,b)\sim(c,d)$,有:

(1) 因为 $ab=ba$,所以 $(a,b)\sim(a,b)$ 是自反的;

(2) 因为若有 $(a,b)\sim(c,d)$,则 $ad=bc$,所以 $cb=da$,所以 $(c,d)\sim(a,b)$,满足对称性;

(3) 因为若有 $(a,b)\sim(c,d)$,$(c,d)\sim(e,f)$,则 $ad=bc$,$cf=de$,可得 $c=\frac{ad}{b}$,$c=\frac{de}{f}$,$\frac{ad}{b}=\frac{de}{f}$,所以 $af=be$,所以有 $(a,b)\sim(e,f)$,满足传递性.

由(1)、(2)、(3)可知"~"是一个等价关系.

10. (2.15)设 R 是集合 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的等价关系,$R=\{(1,1),(1,5),(2,2),(2,3),(2,6),(3,2),(3,3),(3,6),(4,4),(5,1),(5,5),(6,2),(6,3),(6,6)\}$,求 R 的等价类.

解: 等价类是:$[1]=\{1,5\}$,$[2]=\{2,3,6\}$,$[3]=\{3,2,6\}$,$[4]=\{4\}$,$[5]=\{5,1\}$,$[6]=\{6,2,3\}$.

作业

徐　P52　4.1　4.10

P60　　37