图

8.1图的基本概念

定义8.1 无向图$G = <V,E>$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为顶点

(2) E为边的集合，其元素称为无向边

每条边可用一个结点对表示

1. 图

   ① 可用G泛指图（无向的或有向的）

   ② $V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$

   ③ 顶点数称为图的阶， n个顶点的图称作n阶图

2. 有限图

3. 无边的图称为零图，n 阶零图记为N_n，1阶零图称为平凡图

4. 顶点集为空集称为空图——$\varnothing$

1. 图

   ① 可用G泛指图（无向的或有向的）

   ② $V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$

   ③ 顶点数称为图的阶， n个顶点的图称作n阶图

2. 有限图

3. 无边的图称为零图，n 阶零图记为N_n，1阶零图称为平凡图

4. 顶点集为空集称为空图——$\varnothing$

握手定理

定理8.1 设$G=<V,E>$为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

定理8.2 设$D=<V,E>$为任意有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

推论:

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

通路和回路

定义8.10 给定无向标定图G，G中顶点与边的交替序列

$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_l v_l$，其中$v_{i-1}$, v_i 是 e_i 的端点.

(1) 通路与回路：Γ为通路；若 $v_0=v_l$，Γ为回路. l 为长度.

(2) 简单通路与回路：所有边各异，Γ为简单通路，又若$v_0=v_l$，Γ为简单回路

(3) 基本(初级)通路与基本(初级)回路：Γ中所有顶点各异，所有边也各异，则称Γ为基本(初级)通路(路径)，又若除$v_0=v_l$，则称Γ为基本(初级)回路(圈)（基本回路一定是简单回路）

通路和回路的长度

定理8.3 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的基本通路（路径）.

定理8.4 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于n的基本回路.

联通性

定义8.12 $D=<V,E>$为有向图

D弱连通(连通)——基图为无向连通图

D单向连通——$\forall v_i,v_j \in V$，$v_i \to v_j \vee v_j \to v_i$

D强连通——$\forall v_i,v_j \in V$，$v_i \leftrightarrow v_j$

易知，强连通⇒单向连通⇒弱连通

判别法

定理8.5 D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理8.6 D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

8.2图的表示

邻接矩阵应用

计算通路数

定理 设 A 为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数， $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设 $B_l=A+A^2+\ldots+A^l$（$l\geq1$），则 B_l 中元素 $b_{ij}^{(l)}$ 表示 v_i 到 v_j 长度为1至 l 的通路数目之和, 且有:

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数目之和.

$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数目之和.

可达矩阵

定义8.14 设 $D=\langle V,E\rangle$ 为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & b_{ij}^{(n)}\neq 0\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为 D 的可达矩阵，记作 $P(D)$，简记为 P.

由定义不难看出, D 强连通当且仅当 $P(D)$ 除对角线外，为全1矩阵.

Note:

这里也可以利用 $P_l=B+B^2+\ldots+B^l$ 进行布尔加，布尔乘运算。

将无向图中的边用两条方向相反的有向边替代, 转换成有向图, 这样有向图的邻接矩阵、可达矩阵等均可适用于无向图。

矩阵和图的连通性

- 一无向图为连通图的充要条件是此图的可达矩阵除对角线元素外所有元素均为1;
- 一有向图为强连通图的充要条件是此图的可达矩阵除对角线元素外所有元素均为1;
- 一有向图为单向连通图的充要条件是矩阵 $P'=P\ (+)\ P^T$ 除对角线元素外所有元素均为1，其中P为可达性矩阵.
- 一有向图为弱连通图的充要条件是矩阵 $A'=A\ (+)\ A^T$ 的可达矩阵除对角线元素外所有元素均为1, 其中 A 为邻接矩阵.

欧拉图

欧拉通路：经过每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路

欧拉回路：经过每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路

欧拉图：有欧拉回路的图

半欧拉图：具有欧拉通路的而无欧拉回路

判别：

对于无向图：

欧拉图——当仅当G联通且无奇数度数的顶点

半欧拉图——当仅当G联通且恰有两个奇数度数的顶点

对于有向图：

欧拉图——每个结点的出度 = 入度

半欧拉图——有两个结点一个结点（始点）出度-入度=1；另一个结点（终点）入度-出度=1

8.2无向树

定义：

定理9.1 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且删除 G 中任何边使得G 变得不连通.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

- 树是边数最多的无回路图；树是边数最少的连通图；
- 若m>n-1,则图必含回路;若m<n-1,则图必不连通;

- 树是边数最多的无回路图；树是边数最少的连通图；
- 若m>n-1,则图必含回路;若m<n-1,则图必不连通;

定理

定理9.2 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

证 设T有x片树叶，由握手定理及定理9.1可知，

$$2(n-1)=2m=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$.

例1 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

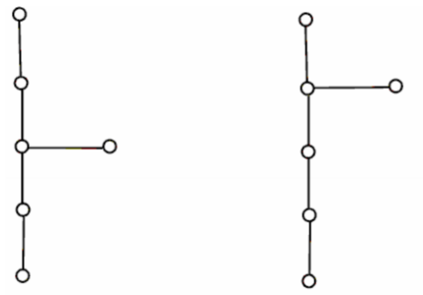
解 解本题用树的性质$m=n-1$，握手定理.
设有x片树叶，于是 $n=1+2+x=3+x$,

$$2m=2(n-1)=2\times(2+x)=1\times 3+2\times 2+x$$

解出$x=3$，故T有3片树叶.

例

⑩T的度数列应为1, 1, 1, 2, 2, 3，
⑩易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.



T_1 T_2