复习

(1) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的.

(2) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x\rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

(3) 若$\forall x\forall y(x\in A \wedge y\in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$, 则称 R 为 A上对称的关系.

(4) 若$\forall x\forall y(x\in A \wedge y\in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$或
$\forall x\forall y(x\in A \wedge y\in A \wedge xRy \wedge x\neq y \rightarrow \neg yRx)$,则称R 为A
上的反对称关系.

(5)$\forall x\forall y\forall z(x,y,z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow yRz)$,则称 R 是A上的传递关系.

2.5 关系的闭包

主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示
- 闭包的性质

实例引入

一个关系不具有某一特殊性质，但是，如果希望它具这一性质，如何操作？

$A=\{1,2,3\}$

$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

（唯一，序偶最少）

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

闭包定义

定义 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有 $R' \subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$, 对称闭包记作$s(R)$, 传递闭包记作$t(R)$.

reflexive closure　　**symmetric closure**

transitive closure

求法

定理 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup I$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

例：A={a,b,c}; R={<a,b>,<b,c>,<c,a>}

R^2= {<a,c>,<b,a>,<c,b>}

(1) 由$I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$知 $R\cup R^0$是自反的, 且满足$R\subseteq R\cup R^0$

设R''是A上包含R的自反关系, 则有$R\subseteq R''$和$I_A\subseteq R''$. 从而有$R\cup R^0\subseteq R''$. $R\cup R^0$满足闭包定义, 所以$r(R)=R\cup R^0$.

证明

(3) 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

用归纳法证明对任意正整数n 有$R^n\subseteq t(R)$.

$n=1$时有$R^1=R\subseteq t(R)$. 假设$R^n\subseteq t(R)$成立,

那么对任意的$<x,y>$

$$<x,y>\in R^{n+1}=R^n\circ R \Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R^n \wedge <t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in t(R) \wedge <t,y>\in t(R)) \Rightarrow <x,y>\in t(R)$$

这就证明了$R^{n+1}\subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.

证明

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$成立, 为此只须证明 $R \cup R^2 \cup \ldots$传递.

任取$<x,y>,<y,z>$, 则

$$<x,y> \in R \cup R^2 \cup \ldots \wedge <y,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,y> \in R^t) \wedge \exists s(<y,z> \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z> \in R^t \circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z> \in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow <x,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

从而证明了$R \cup R^2 \cup \ldots$是传递的.

闭包的矩阵表示和图表示

- 设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r , M_s 和 M_t 则 $M_r=M+E$ $M_s=M+M'$ $M_t=M+M^2+M^3+\ldots$ E 是单位矩阵, M'是 转置矩阵，相加时使用逻辑加.
- 设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则G_r , G_s , G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新的边：

(1) 考察G 的每个顶点, 若没环就加一个环，得到G_r

(2) 考察G 的每条边, 若有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i≠j$, 则在G 中加一条 x_j 到 x_i 的反向边, 得到G_s

(3) 考察G 的每个顶点 x_i, 找 x_i 可达的所有顶点 x_j (允许$i=j$)，如果没有从 x_i 到 x_j 的边, 就加上这条边, 得到图G_t

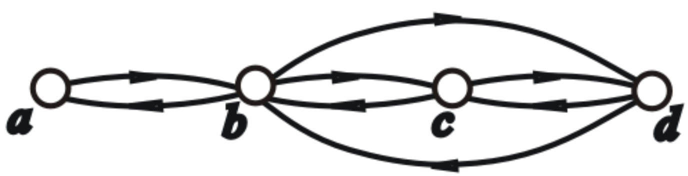
说明：对有穷集$A(|A|=n)$上的关系，$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$
这里n指集合A的元素个数

实例

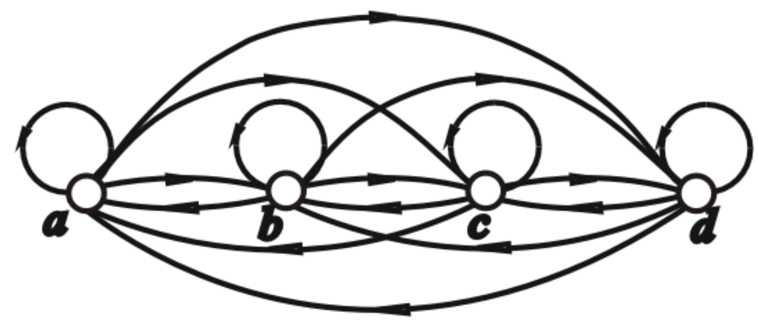
例 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

实例

程序集$P=\{P_1,P_2,P_3,P_4\}$

$R=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_3>,<P_2,P_4>\}$

$r(R)=R\cup I=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_3>,<P_2,P_4>,$

$<P_1,P_1>,<P_2,P_2>,<P_3,P_3>,<P_4,P_4>\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_3>,<P_2,P_4>,$

$\{<P_2,P_1>,<P_3,P_1>,<P_3,P_2>,<P_4,P_2>\}$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4$

$=\{<P_1,P_2>,<P_1,P_3>,<P_2,P_3>,<P_2,P_4>,<P_1,P_4>\}$

这里$R^2=\{<P_1,P_3>,<P_1,P_4>\}\quad R^3=R^4=\emptyset$

闭包的性质

定理 设R是非空集合A上的关系, 则

(1) R是自反的当且仅当 $r(R)=R$.

(2) R是对称的当且仅当 $s(R)=R$.

(3) R是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

定理 设R_1和R_2是非空集合A上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$,则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 略

实例

(a)整数集合I上的关系$<$的自反闭包是$\le$,对称闭包是关系$\neq$,传递闭包是关系$<$自身

(b)整数集合I上的关系$\le$的自反闭包是自身,对称闭包是全域关系,传递闭包是自身

(c)E的自反闭包,对称闭包和传递闭包都是E

(d)$\neq$的自反闭包是全域关系,对称闭包是$\neq$,$\neq$的传递闭包是全域关系

(e)空关系的自反闭包是相等关系,对称闭包和传递闭包是自身

实例

$A=\{a,b,c\}$; $R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$

$r(R)=R\cup I=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<b,a>,<c,b>,<a,c>\}$

$R^2=\{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$

$R^3=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}=I$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3=$

$\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<a,c>,<b,a>,<c,b>,<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

作业解答（特性）

3.2.8 设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的任意关系，证明或否定下列断言：

(a) 如果 R_1 和 R_2 都是自反的，那么 R_1R_2 是自反的。

(b) 如果 R_1 和 R_2 都是反自反的，那么 R_1R_2 是反自反的。

(c) 如果 R_1 和 R_2 都是对称的，那么 R_1R_2 是对称的。

(d) 如果 R_1 和 R_2 都是反对称的，那么 R_1R_2 是反对称的。

(e) 如果 R_1 和 R_2 都是传递的，那么 R_1R_2 是传递的。

解 (*a*) 结论成立。因为，对于任意 $x\in A$ 有

$$\langle x, x\rangle\in R_1, \langle x, x\rangle\in R_2\Rightarrow \langle x, x\rangle\in R_1R_2$$

所以 R_1R_2 是自反的。

(*b*) 结论不成立。

例如令 $A=\{0, 1\}$，$R_1=\{\langle 0, 1\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1, 0\rangle\}$，则 $R_1R_2=\{\langle 0, 0\rangle\}$，$R_1$，$R_2$ 是反自反的，但 R_1R_2 不是反自反的。

(*c*) 结论不成立。

例如令 $A=\{0, 1, 2\}$

$R_1=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$R_1R_2=\{\langle 0, 2\rangle\}$

易见 R_1、R_2 是对称的，但 R_1R_2 不是对称的。

(*d*) 结论不成立。

例如令 $A=\{0, 1\}$

$R_1=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

则 R_1，R_2 是反对称的。但是

$R_1R_2=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$

$\langle 0, 1\rangle\in R_1R_2$，$\langle 1, 0\rangle\in R_1R_2$

因此 R_1R_2 不是反对称的。

(*e*) 结论不成立。

例如令 $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$

$R_1=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$

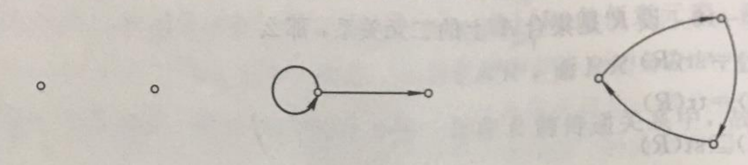
则 R_1，R_2 是传递的，但 $R_1R_2=\{\langle 0, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle$是不可传递的。

作业

徐 P38 2.10 、 2.12

方 P110 7、8 （见图片）

7. 找出图 3.3－2 中每个关系的自反、对称和传递闭包。



(a) (b) (c)

图 3.3－2

8. 设 R 是 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ 上的二元关系，其关系矩阵是

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

试求出：(1) $M_{r(R)}$；(2) $M_{s(R)}$；(3) M_{R^2}、M_{R^3}、M_{R^4} 和 $M_{t(R)}$。