例 求矩阵X，使得$2(A+5X)=E-X$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

解 去括号 $2A+10X=E-X$

移项、合并同类项 $11X=E-2A$

两边同除未知量前面的系数

$$X=\frac{1}{11}(E-2A)=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

例　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则

$$AB=\begin{pmatrix} 1\times0+(-1)\times(-1)+0\times1 & 1\times1+(-1)\times2+0\times0 \\ 2\times0+1\times(-1)+(-1)\times1 & 2\times1+1\times2+(-1)\times0 \\ (-1)\times0+0\times(-1)+1\times1 & (-1)\times1+0\times2+1\times0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

而 BA 无意义。

例 设 $A=(1,3,8,2)$，$B=\begin{pmatrix}7\\0\\4\\-1\end{pmatrix}$，则

$$AB=(37)，\quad BA=\begin{pmatrix}7\\0\\4\\-1\end{pmatrix}(1,3,8,2)=\begin{pmatrix}7&21&56&14\\0&0&0&0\\4&12&32&8\\-1&-3&-8&-2\end{pmatrix}$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix}$，则

$$AB=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&-16\\4&8\end{pmatrix}$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$，试确定满足$AX=XA$的矩阵$X$。

解 由题设AX与XA均有意义，故X应是2阶方阵。

设 $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则由$AX=XA$，得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $$\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ c-d & 0 \end{pmatrix}$$

由矩阵相等的定义知

$$\begin{cases} a=a-b \\ b=0 \\ -a=c-d \\ -b=0 \end{cases}, \quad \text{解得} \begin{cases} b=0 \\ a=d-c \end{cases}$$

故 $$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} d-c & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad (c, d\text{为任意常数})$$

例 已知两个线性变换

$$(\text{I})\ \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ x_2 = -3y_1 \qquad + y_3 \end{cases};\quad (\text{II})\ \begin{cases} y_1 = 5z_1 - 2z_2 \\ y_2 = -z_1 + z_2 \\ y_3 = \qquad 4z_2 \end{cases}$$

求从z_1, z_2到x_1, x_2的线性变换。

(将两个线性变换合成一个，称之为**线性变换的复合**)。

解 **法1** 将(II)代入(I)并整理得

$$\begin{cases} x_1 = (5z_1 - 2z_2) + 2(-z_1 + z_2) - 4z_2 = 3z_1 - 4z_2 \\ x_2 = -3(5z_1 - 2z_2) + 4z_2 = -15z_1 + 10z_2 \end{cases}$$

法2　将线性变换（Ⅰ）与（Ⅱ）写成矩阵形式，得

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&-2\\-1&1\\0&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}3&-4\\-15&10\end{pmatrix}\boldsymbol{z}$$

故

$$\begin{cases}x_1=3z_1-4z_2\\x_2=-15z_1+10z_2\end{cases}$$

例 已知对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^k$。

解 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix}$。猜想 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$

可用归纳法证之。

上页 下页 返回

例　已知 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，　求 A^n。

解　法1

$$A^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

$$A^3=\begin{pmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{pmatrix},\quad A^4=\begin{pmatrix}\lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2\\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3\\ 0 & 0 & \lambda^4\end{pmatrix}$$

设
$$A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}$$

则
$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \frac{(k+1)k}{2}\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k\\ 0 & 0 & \lambda^{k+1}\end{pmatrix}$$

法2 $$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}$$

注意到 $(\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(\lambda\boldsymbol{E})$，且

$$\boldsymbol{H}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}^3=\boldsymbol{O}$$

故有 $\boldsymbol{A}^n=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H})^n=$

$$=(\lambda\boldsymbol{E})^n+\mathrm{C}_n^1(\lambda\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{H}+\mathrm{C}_n^2(\lambda\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{H}^2$$

$$=\lambda^n\boldsymbol{E}+n\lambda^{n-1}\boldsymbol{H}+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\boldsymbol{H}^2$$

$$
=\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}
$$

例　设 $\boldsymbol{A}=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{B}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$，求 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{n}$。

分析　如果先求出

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

再求 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{n}$ 不太容易。

解　$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{n}=\overbrace{(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\cdots(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})}^{n\text{个}}$$

$$=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overbrace{(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}^{n-1\text{个}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{B}$$

可求得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=(4)$，于是

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}(4^{n-1})(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})=4^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{4}\\2&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{2}\\3&\frac{3}{2}&1&\frac{3}{4}\\4&2&\frac{4}{3}&1\end{pmatrix}$$

例 已知A和B为n阶对称矩阵，问

$$A+B\text{，}\lambda A\text{，}A^k\text{，}AB$$

是否对称矩阵？为什么？

解 因为$A^T=A$，$B^T=B$，且有

$$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$$

知$A+B$为对称矩阵。由

$$(\lambda A)^T=\lambda A^T=\lambda A$$

知 λA为对称矩阵。由

$$(A^k)^T=(A^T)^k=A^k$$

知A^k为对称矩阵。

由于$(AB)^T=B^TA^T=BA$，而一般$BA\neq AB$，所以AB不一定是对称矩阵。

例 已知A和B均为n阶反对称矩阵，问

$$A+B\text{，}\lambda A\text{，}A^k\text{，}AB$$

是否对称矩阵或反对称矩阵？为什么？

解 由$A^{T}=-A$和$B^{T}=-B$，易知$A+B$，λA为反对称矩阵

当k为奇数时，A^k为反对称矩阵；当k为偶数时，A^k为对称矩阵。当$AB=BA$时，

$$(AB)^{T}=B^{T}A^{T}=(-B)(-A)=BA=AB$$

即AB是对称矩阵；当$AB\neq BA$时，AB既不是对称的，也不是反对称的。

例 若$A=(a_{11})$且$a_{11}\neq 0$，则 $A^{-1}=(\frac{1}{a_{11}})$。

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$的逆矩阵，其中

$$\lambda_i \neq 0 \ \ (i=1,2,\cdots,n)$$

解　设$B=(b_{ij})_{n\times n}$是A的逆矩阵，则

$$AB=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn}\end{pmatrix}$$

由$AB=E$得　$\lambda_i b_{ij}=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$

从而 $b_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_i}, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，即 $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$

可以验证$BA=E$，故

$$A^{-1}=B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

注 $$\begin{pmatrix} & & \lambda_1\\ & ⋰ & \\ \lambda_n & & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & & \frac{1}{\lambda_n}\\ & ⋰ & \\ \frac{1}{\lambda_1} & & \end{pmatrix}$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}^*$。

解 可求得

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=-10,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-6,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=5,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=1$$

所以 $$A^* = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 5 \\ -6 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

特别地，对2阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，有

$$A_{11} = a_{22}，A_{12} = -a_{21}，A_{21} = -a_{12}，A_{22} = a_{11}$$

故 $$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

例 判断下列矩阵是否可逆？若可逆，求其逆矩阵：

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$； 2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$。

解 1）因为

$$\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}=0$$

所以$\boldsymbol{A}$不可逆；

例 判断下列矩阵是否可逆？若可逆，求其逆矩阵：

$$1)\quad A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 5\end{pmatrix};\qquad 2)\quad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}。$$

解 2）因为

$$\det B=\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 1 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 21 & 0 & 13\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}21 & 13\\ 3 & 2\end{vmatrix}=3$$

所以B可逆；又可求得

$$B^*=\begin{pmatrix}8 & 2 & -13\\ 1 & 1 & -2\\ -12 & -3 & 21\end{pmatrix}$$

故 $$B^{-1}=\frac{1}{\det B}B^{*}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{13}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -4 & -1 & 7\end{pmatrix}$$

例 求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$的逆矩阵。

解 $$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

例　已知n阶方阵A可逆，U是$n\times m$矩阵而V是$m\times n$矩阵，且矩阵$E+VA^{-1}U$可逆。证明矩阵$A+UV$可逆，且

$$(A+UV)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(E+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

证　因为

$$
\begin{aligned}
&(A+UV)[A^{-1}-A^{-1}U(E+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}]\\
&=E-U(E+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}+UVA^{-1}-\\
&\qquad -UVA^{-1}U(E+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}\\
&=E-U(E+VA^{-1}U)(E+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}+UVA^{-1}\\
&=E-UEVA^{-1}+UVA^{-1}=E
\end{aligned}
$$

所以$A+UV$可逆，且

$$(A+UV)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(E+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

例 若方阵A满足$A^2+2A+3E=O$，证明A与$A-E$均可逆，并求A^{-1}和$(A-E)^{-1}$。

分析 只要利用 $A^2+2A+3E=O$得出$AB=E$及$(A-E)C=E$，即知A与$A-E$均可逆，且$A^{-1}=B$和$(A-E)^{-1}=C$。

证 由$A^2+2A+3E=O$得

$$A(A+2E)=-3E \qquad \text{即} \quad A[-\frac{1}{3}(A+2E)]=E$$

故A可逆，且 $A^{-1}=-\frac{1}{3}(A+2E)$

又由$A^2+2A+3E=O$得

$$(A-E)(A+3E)=-6E$$

即

$$(A-E)[-\frac{1}{6}(A+3E)]=E$$

上页 下页 返回

故$A-E$可逆，且 $$(A-E)^{-1}=-\frac{1}{6}(A+3E)$$

例 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&3&3\end{pmatrix}$，则$(A^*)^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$。

分析 由$AA^*=(\det A)E$ 及$\det A=6$得

$$\left(\frac{1}{\det A}A\right)A^*=E$$

故 $$(A^*)^{-1}=\frac{1}{\det A}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

例 设A为n阶方阵，且$\det A=5$，则

$$\det(A^* - (\frac{1}{10}A)^{-1}) = \underline{(-1)^n 5^{n-1}}。$$

分析 $A^* = (\det A)A^{-1} = 5A^{-1}$， $(\frac{1}{10}A)^{-1} = 10A^{-1}$

于是

$$\det(A^* - (\frac{1}{10}A)^{-1}) = \det(5A^{-1} - 10A^{-1}) = \det(-5A^{-1})$$

$$= (-5)^n \det(A^{-1}) = (-5)^n \frac{1}{\det A} = (-1)^n 5^{n-1}$$

上页 下页 返回

例 用逆矩阵方法求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 = -10 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 19 \end{cases}$$

解 化线性方程组为矩阵形式$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$， 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 19 \end{pmatrix}$$

因为det$\boldsymbol{A}$=1，所以$\boldsymbol{A}$可逆, 可求得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -2 & -5 & -2 \\ -2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

故 $$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3 & 9 & 4\\ -2 & -5 & -2\\ -2 & -7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ -10\\ 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

即 $$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3$$

例 求线性变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = -2y_1 - y_2 - 2y_3 \\ x_3 = 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 \end{cases}$ 的逆变换。

解 化线性变换为矩阵形式$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

可求得 $$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ -2 & -5 & -2 \\ -2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

故逆变换为 $$\begin{cases} y_1 = 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 \\ y_2 = -2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \\ y_3 = -2x_1 - 7x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

例 求解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

解 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$。可求得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

故 $$X=A^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}B^{-1}=\begin{pmatrix}4&-1\\6&-1\\-3&1\end{pmatrix}$$

例 已知 $A^{*}BA=2BA-12E$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

求矩阵B。

解 由于det$A$=−2，所以A可逆。给已知等式 $A^{*}BA=2BA-12E$ 两边左乘A，得

$$AA^{*}BA=2ABA-12A$$

即 $$-2BA=2ABA-12A$$

上页 下页 返回

再右乘A^{-1}得 $$-2B=2AB-12E$$

整理得 $$(A+E)B=6E$$

由于 $\det(A+E)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=-4$，所以$A+E$可逆。

于是 $$B=6(A+E)^{-1}$$

可求得 $$(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故 $$B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-6&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

例

设 $$A=\left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{ccc} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 10 & 11 & 12 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

求AB。

解　将A, B分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & O & O \\ A_{21} & E & O \\ O & O & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$A_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_{33}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$B_1=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2=\begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_1 \\ A_{21}B_1+B_2 \\ A_{33}B_3 \end{pmatrix}$$

但 $$A_{11}B_1=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-3&1\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&7\\-5&5&3\end{pmatrix}$$

$$A_{21}B_1+B_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-3&1\\0&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&11&12\\-1&2&5\\6&7&8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10&11&12\\4&-1&6\\6&7&8\end{pmatrix}$$

$$A_{33}B_3=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&12&15\\-6&7&9\end{pmatrix}$$

故

$$AB=\left(\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 7 \\ -5 & 5 & 3 \\ \hline 10 & 11 & 12 \\ 4 & -1 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \\ \hline 10 & 12 & 15 \\ -6 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

例　已知 $A=\left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$，求$A^{-1}$。

解　A是分块对角矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & E & \\ & & A_3 \end{pmatrix}$，其中

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

上页　下页　返回

可求得 $A_1^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$A_3^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1} & & \\ & E & \\ & & A_3^{-1}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc|ccc|cc}\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2\end{array}\right)$$

例 已知 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 7 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)$，求$A^{-1}$。

解 **法1** 直接用公式法，要求出16个三阶子式来确定伴随矩阵，比较麻烦。

法2 将A分块为 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，其中

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad A_{21}=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\quad A_{22}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

可求得

$$A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix},\quad A_{22}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$$

而 $$-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

故 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}&O\\-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}&A_{22}^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&1&0&0\\-1&1&2&-3\\1&-2&-1&2\end{pmatrix}$$

例 设3阶方阵$\boldsymbol{A}$按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$

(其中$\boldsymbol{A}_i$是$\boldsymbol{A}$的第i列)，且$\det \boldsymbol{A}=5$； 又设

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_1+2\boldsymbol{A}_2,3\boldsymbol{A}_1+4\boldsymbol{A}_3,5\boldsymbol{A}_2)$$

则 $\det \boldsymbol{B}=\underline{-100}$ 。

分析 法1

$$\det \boldsymbol{B} \xlongequal{c_1-\frac{2}{5}c_3} \det(\boldsymbol{A}_1,3\boldsymbol{A}_1+4\boldsymbol{A}_3,5\boldsymbol{A}_2)$$

$$\xlongequal{c_2-3c_1} \det(\boldsymbol{A}_1,4\boldsymbol{A}_3,5\boldsymbol{A}_2)$$

$$\overset{c_2\div 4}{}$$

$$\xlongequal[c_2\leftrightarrow c_3]{c_3\div 5} -20\det(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$$

$$=-20\det \boldsymbol{A}=-100$$

例 设3阶方阵A按列分块为 $A=(A_1,A_2,A_3)$（其中A_i是A的第i列），且$\det A=5$； 又设

$$B=(A_1+2A_2,3A_1+4A_3,5A_2)$$

则 $\det B=\underline{-100}$ 。

分析 法2

$$\det B \overset{\text{性质4}}{=\!=} \det(A_1,3A_1+4A_3,5A_2) + \det(2A_2,3A_1+4A_3,5A_2)$$

$$\overset{\text{性质4}}{=\!=} \det(A_1,3A_1,5A_2) + \det(A_1,4A_3,5A_2)+0$$

$$\underset{c_2\leftrightarrow c_3}{\overset{\substack{c_2\div 4\\ c_3\div 5}}{=\!=}} 0-20\det A=-100$$

上页 下页 返回

例 设3阶方阵A按列分块为 $A=(A_1,A_2,A_3)$（其中A_i是A的第i列），且$\det A=5$； 又设

$$B=(A_1+2A_2,3A_1+4A_3,5A_2)$$

则 $\det B=$ $\underline{-100}$ 。

分析 **法3** 由于

$$B=(A_1+2A_2,3A_1+4A_3,5A_2)$$

$$=(A_1,A_2,A_3)\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $$\det B=\det A\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 0\end{vmatrix}=-20\det A=-100$$

例　设4阶方阵

$$A=(2\gamma_1,3\gamma_2,4\gamma_3,\alpha)，\ B=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\beta)$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$均为4维列向量，且已知det A=8，det B=1，则 $\det(A-B)=$ __-4__。

分析

$$\det(A-B)=\det(\gamma_1,2\gamma_2,3\gamma_3,\alpha-\beta)$$

$$=\det(\gamma_1,2\gamma_2,3\gamma_3,\alpha)-\det(\gamma_1,2\gamma_2,3\gamma_3,\beta)$$

$$=\frac{6}{24}\det(2\gamma_1,3\gamma_2,4\gamma_3,\alpha)-6\det(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\beta)$$

$$=\frac{1}{4}\det A-6\det B=-4$$

例　设A为3阶方阵且det$A$=−1，将A按列分块为$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中$\alpha_j$为$A$的第$j$列。令

$$\boldsymbol{B}=(\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3)$$

则 $\det \boldsymbol{B}^* =$ __36__ 。

分析　$$\det \boldsymbol{B}^* = \det((\det \boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1})$$

$$= (\det \boldsymbol{B})^3 \det \boldsymbol{B}^{-1} = (\det \boldsymbol{B})^2$$

又有　$$\det \boldsymbol{B} = 6\det \boldsymbol{A} = -6$$

故　$\det \boldsymbol{B}^* = 36$。

上页　下页　返回