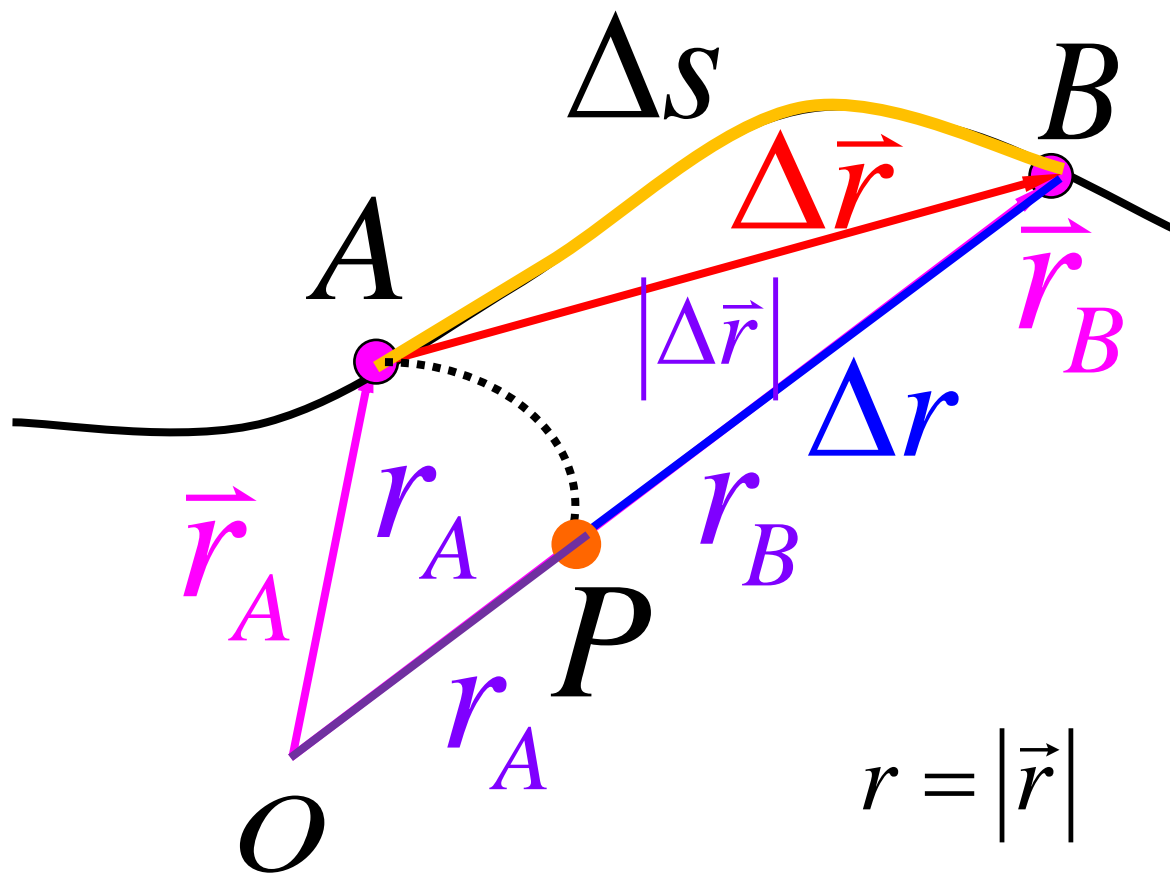


第1章 质点运动学

物体在运动过程中空间位置随时间的变化规律



$$|d\vec{r}| = ds$$

$$dr \neq ds$$

$$r = |\vec{r}|$$

$$\Delta r = |\vec{r}_B| - |\vec{r}_A| = r_B - r_A$$

$$|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A|$$

$$|\Delta \vec{r}| \neq \Delta s$$

$$|d\vec{r}| = ds$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r} = d\vec{r}$$

$$|\Delta \vec{r}| \neq \Delta r$$

$$|d\vec{r}| \neq dr$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s = ds$$

$$\Delta r \neq \Delta s$$

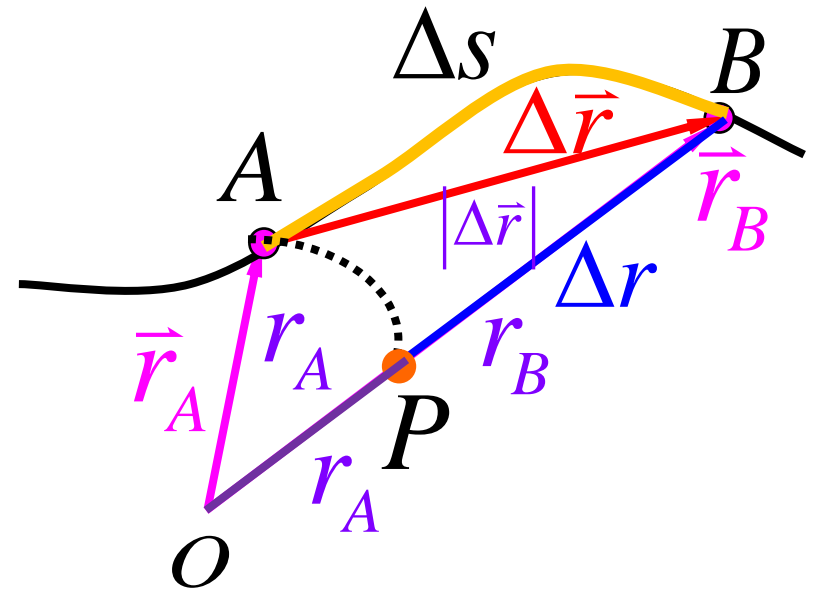
$$dr \neq ds$$

$$\Delta |\vec{r}| = \Delta r$$

$$d|\vec{r}| = dr$$

$$v = |\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \neq \frac{dr}{dt} = \frac{d|\vec{r}|}{dt}$$

$$a = |\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| \neq \frac{dv}{dt}$$



练习1: 质点作匀速率圆周运动, 下列各量中恒定不变的量

位矢大小的变化率

$$(A) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

速度

$$(B) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

速率

$$(C) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

$$(D) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

速度大小的变化率

$$(E) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

加速度

$$(F) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$

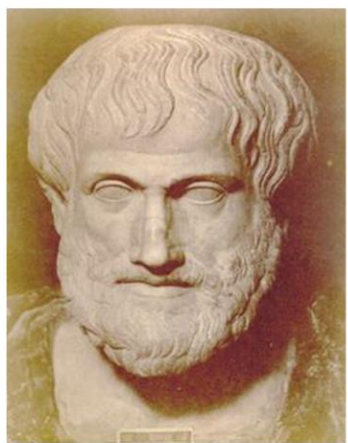
切向加速度

答案: **A C D F**

第2章 质点动力学

物体间的相互作用及其对物体运动的影响

物体间的相互作用对物体运动的影响



凡运动着的物体都必然有推动者在推动它运动

亚里士多德

(约公元前384年-前322年)

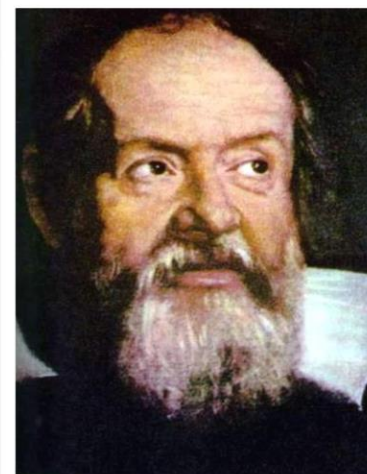
古希腊哲学家、科学家和教育家



对接斜面实验

只要除去加速或减速的外因，在水平面上运动物体的速度就可以保持不变

——《关于力学和局部运动两门新科学的谈话和数学证明》 (1638)

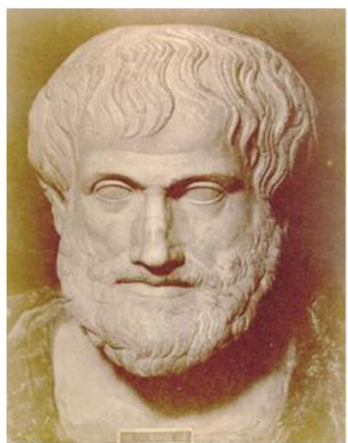


伽利略

(1564——1642)

意大利物理学家

物体间的相互作用对物体运动的影响



凡运动着的物体都必然有推动者在推动它运动

亚里士多德

(约公元前384年-前322年)

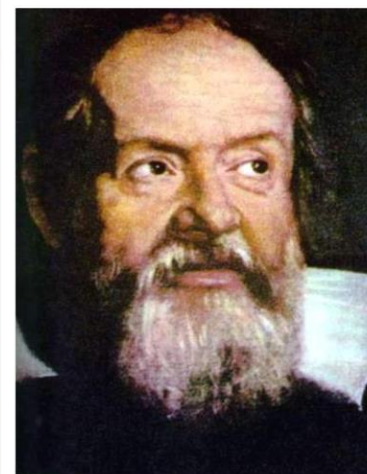
古希腊哲学家、科学家和教育家



对接斜面实验

只要除去加速或减速的外因，在水平面上运动物体的速度就可以保持不变

——《关于力学和局部运动两门新科学的谈话和数学证明》 (1638)



伽利略

(1564——1642)

意大利物理学家



笛卡尔
(1596-1650)

法国哲学家 物理学家 数学家

如果运动中的物体没有受到除原来的力更多外力的作用，它将继续以同一速度沿同一直线运动，既不停下来也不偏离原来的方向。

任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态，直到外力迫使它改变为止。

——《自然哲学的数学原理》 (1686)



牛顿
(英国物理学家 数学家)
(1643 - 1727)

§2.1 牛顿运动定律及其应用

主要内容:

1. 牛顿运动定律
2. 力学中常见的几种力
3. 牛顿第二定律的微分形式
4. 质点动力学的两类问题

学习要求:

掌握动力学两类问题的计算。

2.1.1 牛顿运动定律

第一定律：

Every body remains in a state of rest or in a state of uniform motion (constant speed in a straight line) unless it is compelled by impressed forces to change that state.

任何物体都保持静止或作匀速直线运动状态，直到其它物体的作用迫使它改变这种状态为止。

说明：

- 1、牛顿第一定律不能用实验直接验证；**
- 2、牛顿第一定律是经典力学体系的前提与基础。**

- 牛顿运动定律中的物体指的是**质点**或作**平动的物体**。

平动：任意两点所连成的直线，在整个运动过程中，**始终保持平行**

- 牛顿第一定律提出了两个重要概念。

- 惯性：**物体保持运动状态不变的性质**

—— 物体的固有属性（惯性定律）

- 力：**物体与物体之间的相互作用**

—— 使物体改变运动状态的原因

质点处于静止或匀速直线运动状态时：

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{—— 静力学基本方程}$$

第二定律:

Change of motion is proportional to the impressed force and takes place in the direction of the straight line in which that force is impressed.

物体运动的变化和物体上的合外力的大小成正比，方向与合外力的方向相同。

- 牛顿将运动定义为**动量** $\vec{p} = m\vec{v}$
- 牛顿第二定律的另一种表示方法：**某时刻物体动量对时间的变化率等于该时刻作用在质点上的合力。**

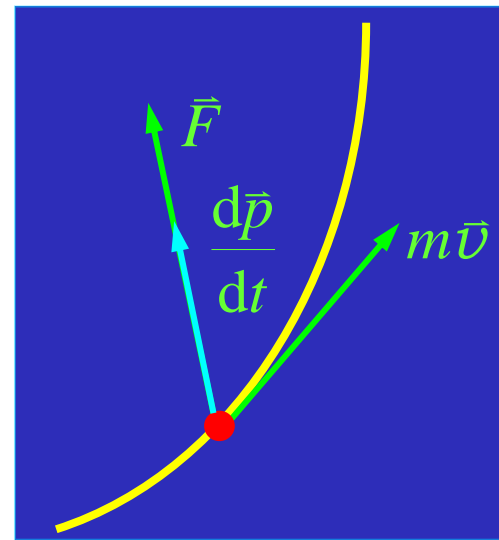
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

某时刻物体动量对时间的变化率等于该时刻作用在质点上的合力。即

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

m 为常量时，牛顿第二定律可表示为

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$



- **瞬时性** —— 第二定律是一个瞬时关系式
- **矢量性** —— (矢量叠加定理)
- **对应性** —— $\vec{F}_i \Rightarrow \vec{a}_i$
- **质量是物体惯性大小的量度** —— **惯性质量**

第三定律：

Action and reaction are equal and opposite.

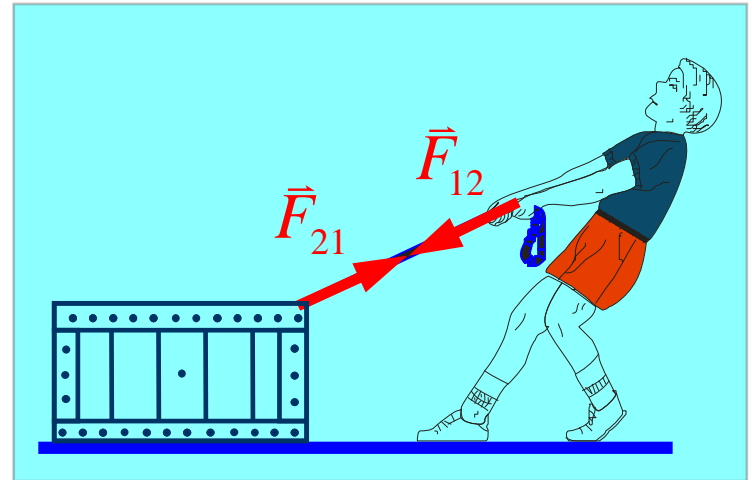
两个物体间的相互作用力总是等值反向且沿着同一直线

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

➤ 注意

第三定律揭示了力的特性

- **成对性** —— 物体之间的作用是相互的；
- **一致性** —— 作用力与反作用力性质一致；
- **同时性** —— 相互作用之间是相互依存，同生同灭。



2.1.2 力学中常见的力

常见力主要有三种力

(1) **万有引力**: 任意两个物体之间的相互吸引力

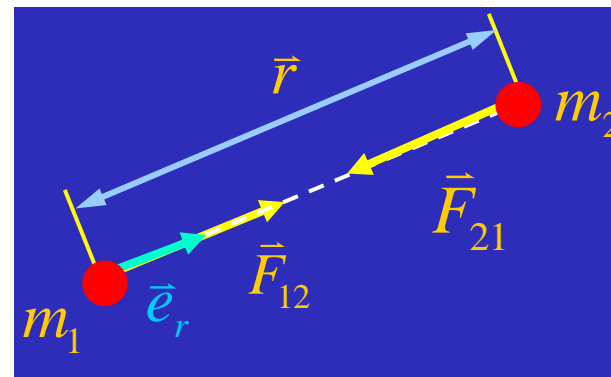
万有引力的大小 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

万有引力常量

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

万有引力定律的矢量式

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$



◆ 说明

- 万有引力定律式适用于**两个质点**;
- 对于两个**质量均匀的球体**之间的引力, 可以直接用万有引力定律式计算, 此时 r 为两球心间的距离。

- **重力**：地球对其表面附近物体的万有引力

设地球的质量为 m_E ，地球的半径为 R ，物体的质量为 m

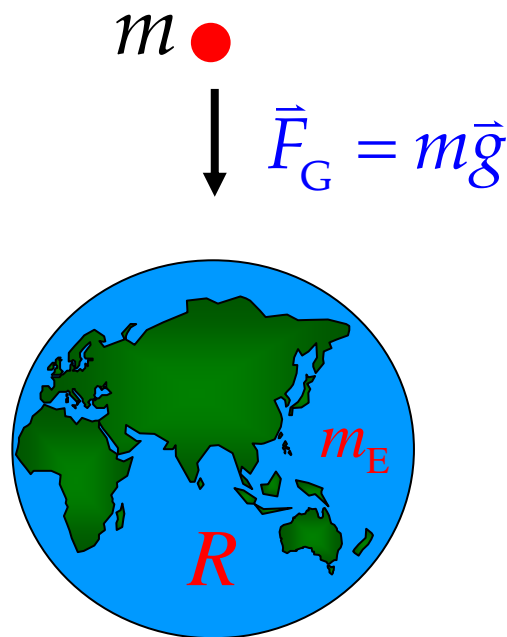
$$F_G = G \frac{mm_E}{R^2}$$

$$g = \frac{Gm_E}{R^2}$$

质量为 m 的物体所受重力为

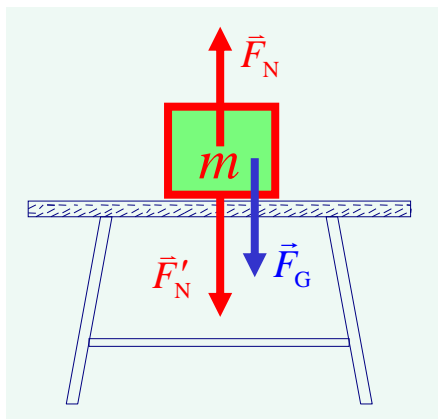
$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

重力加速度 $g \approx 9.8 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

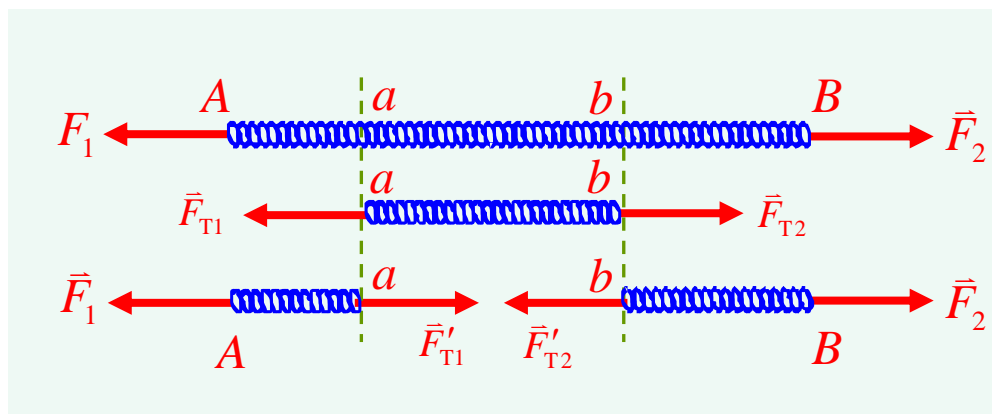


(2) 弹性力： 因形变而产生的恢复力

● 支承面的支承力



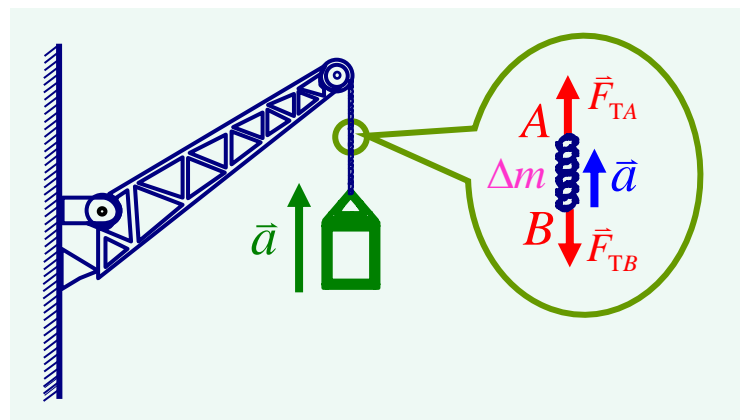
● 绳索的（拉力）张力



① **张力**：绳索中各部分之间的相互作用力； $F = F(r)$

② **质量忽略不计**的轻绳，绳中各点处的**张力相等**；

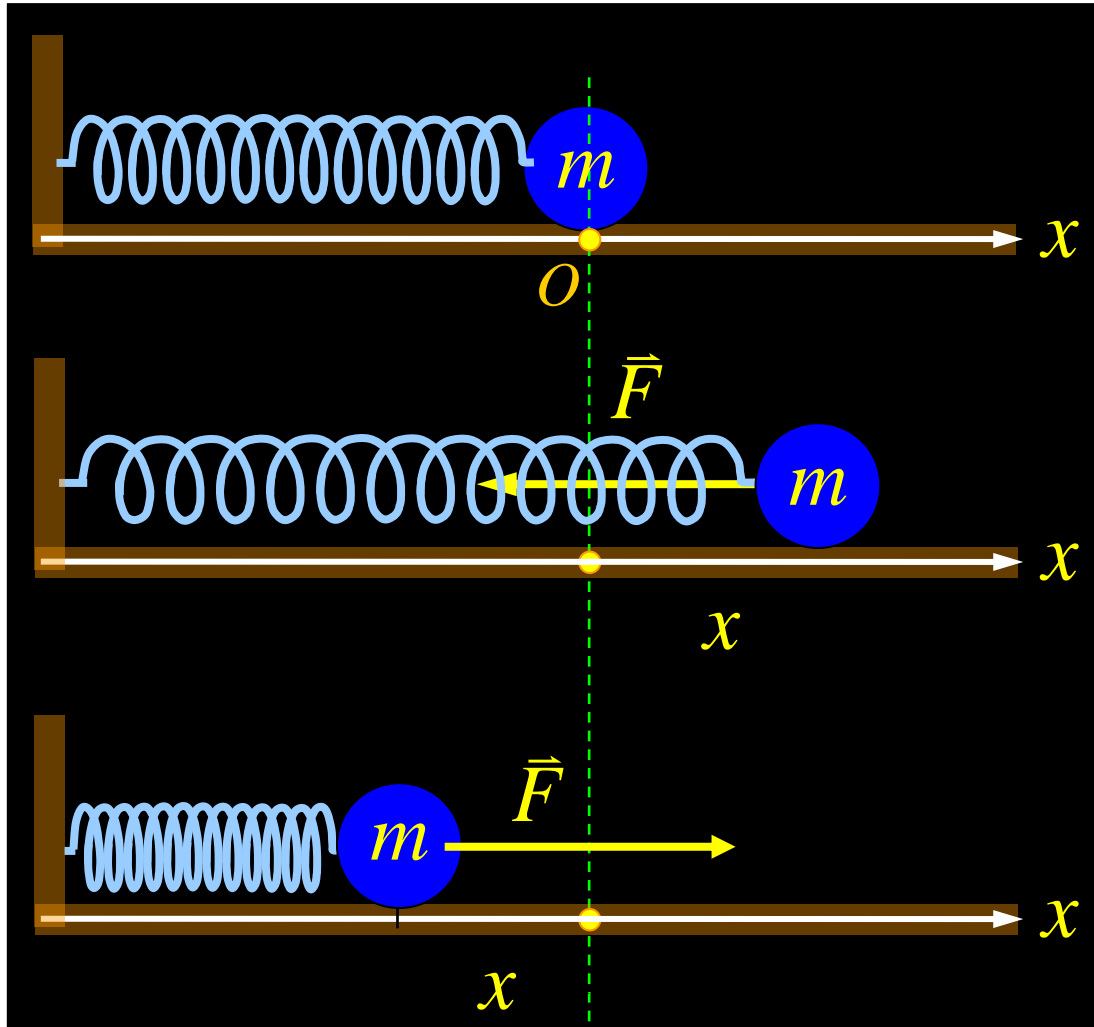
③ **质量不能忽略**的绳索，且处于**加速运动状态**时，绳中各点处的**张力不同**。



彈簧的彈性力

胡克定律

$$F = -kx$$



$$F = 0$$

$$F = -kx$$

$$F = -kx$$

(3) 摩擦力：阻碍彼此接触的物体相对运动或相对运动趋势的力

- 静摩擦力：彼此接触的物体有相对运动趋势时，接触面间出现的摩擦力

- ① 静摩擦力的大小随外力的变化而变化；

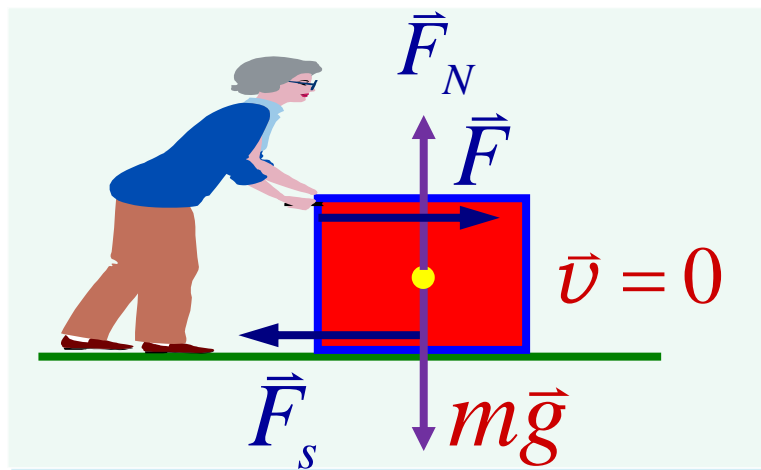
$$\vec{F}_S = -\vec{F}$$

- ② 静摩擦力的方向与接触面相对滑动趋势的指向相反；

- ③ 最大静摩擦力

$$F_{S\max} = \mu_S F_N$$

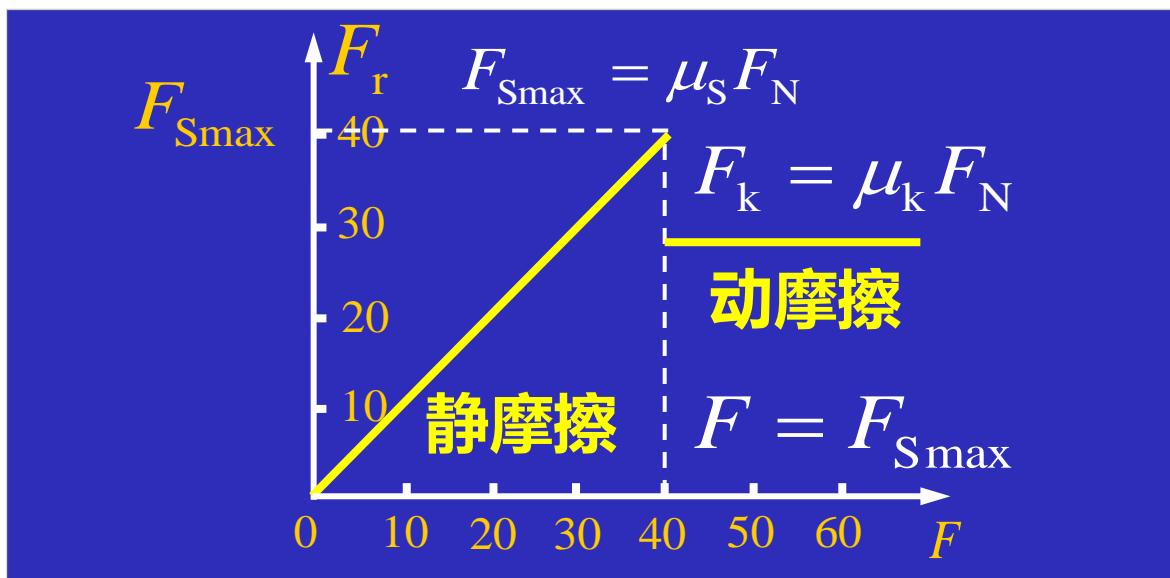
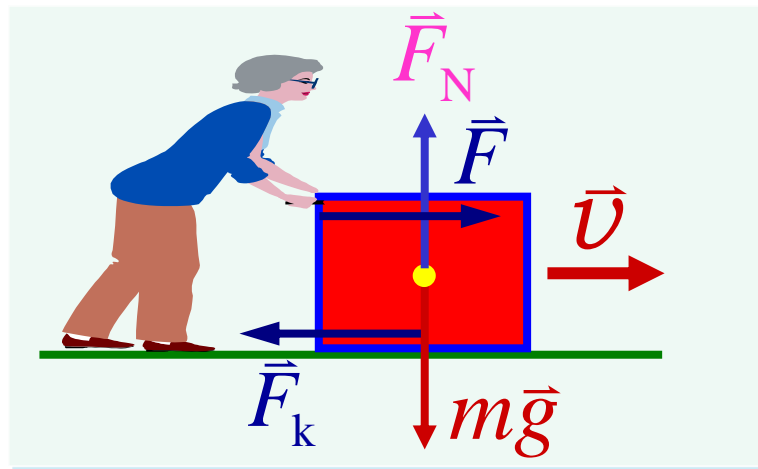
μ_S :静摩擦系数



- **滑动摩擦力**：相互接触的物体有相对滑动时，接触处出现的摩擦力

$$F_k = \mu_k F_N$$

- ① μ_k 为滑动摩擦系数，
且 $\mu_k < \mu_s$ ；
- ② 滑动摩擦力的方向总是
与相对运动的方向相反。



干摩擦力随作用力的变化规律

- **湿摩擦力:** 固体在流体中运动时, 沿着接触面出现的摩擦力

① 在固体与流体相对运动速率不大时

$$\vec{F}_d = -k\vec{v}$$

② 在固体与流体相对运动速率较大时

$$\vec{F}_d = -k'\nu\vec{v}$$

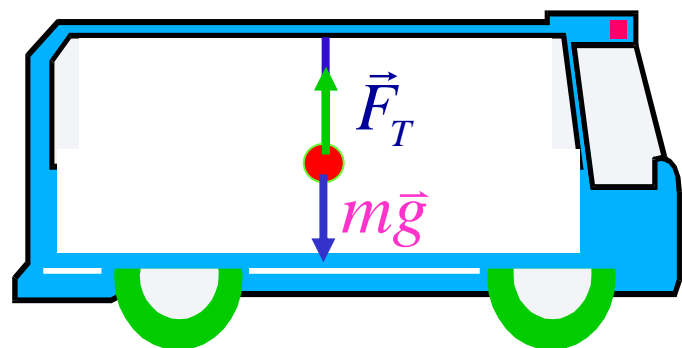
注意: 湿摩擦力远小于干摩擦力

●力的分类

- 物体通过相互接触才能产生的力称为**接触力**
- 两物体间不接触而存在的相互作用力称为**非接触力**或“**场力**”
- 大小和方向不受其它作用力的影响称为**主动力**
- 随外力不同而被动调节其大小乃至方向的作用力称为**被动力**。
- **注意：**
受力分析中，要注意物体的运动状态对被动力的影响

2.1.3 牛顿运动定律的适用范围

- 牛顿运动定律中的物体是指**质点**
- 牛顿运动定律适用于**低速**领域的**宏观**物体
- 牛顿运动定律适用于**惯性系**



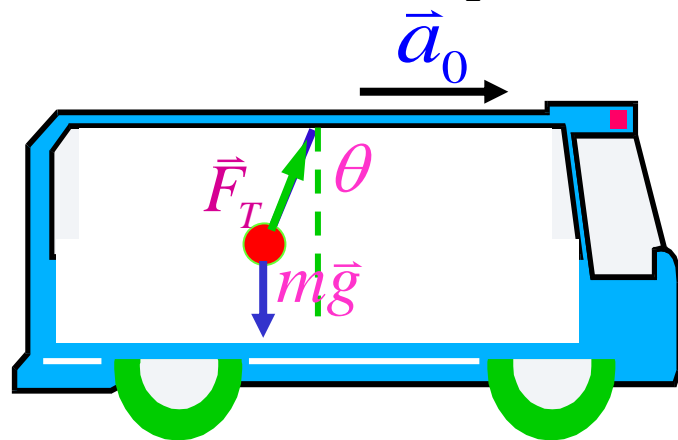
对地参考系 $m\vec{g} + \vec{F}_T = 0$

对车厢参考系 $m\vec{g} + \vec{F}_T = 0$

对地参考系 $m\vec{g} + \vec{F}_T = m\vec{a}_0$

对车厢参考系 $\vec{a} = 0$

而 $m\vec{g} + \vec{F}_T \neq 0$



牛顿运动定律在加速运动的车厢参考系中不成立!

➤ **惯性系**: 牛顿定律适用的参考系。反之, 称为非惯性系。

- 一个参考系是否是惯性系, 要依赖观测和实验的结果来判断。
- 相对于惯性系作匀速直线运动的参考系都是惯性系, 作变速运动的参考系为非惯性系。

➤ **几种实用的惯性系**

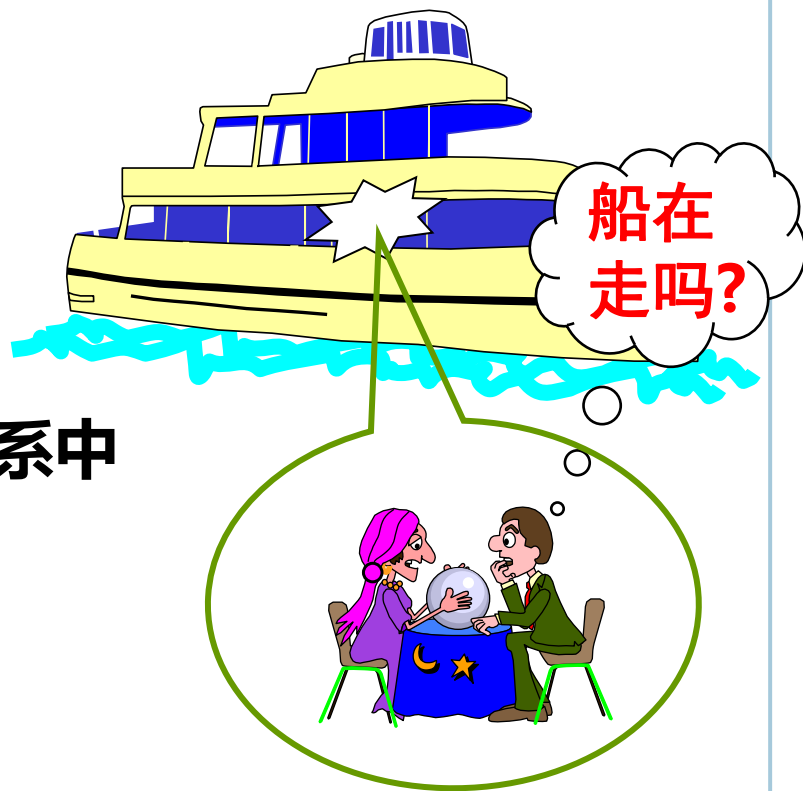
- **太阳参考系**是一个实验精度相当高的惯性系。
- **地心参考系**也是一个实验精度很高的惯性系。
- **地面参考系**是一个近似程度很高的惯性系。

力学相对性原理

不可能利用在惯性系内部进行的任何力学实验来确定该系作匀速直线运动的速度；

在一切惯性系中，力学定律具有完全相同的表达形式；

物理量可以是相对的，但不同惯性系中力学定律的表达式则是绝对的。



2.1.4 牛顿第二定律的微分形式及其应用

1. 牛顿第二定律的微分形式

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

直角坐标系中的分量式

$$F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

自然坐标中的分量式

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

$$F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

2. 质点动力学的两类问题

- (1) 已知质点的运动方程，或任一时刻的速度或加速度，求质点所受的力； ——微分法
- (2) 已知质点受到的力，求质点的运动方程等，包括任意时刻质点的位置、速度或加速度。 ——积分法

应用牛顿第二定律时应注意 $(\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2})$

- (1) 这是一个瞬时关系式，即等式两边的各物理量都是同一时刻的物理量；
- (2) \vec{F} 是作用在质点上作用力的矢量和；
- (3) 在一般情况下力 \vec{F} 是一个变力；
- (4) 实际应用时常采用其分量式。

例 将一质量为 m_1 的三角形劈，放在光滑的水平桌面上，另一质量为 m_2 的立方体木块，沿三角形劈的光滑斜面自由下滑，如图所示。

- 求** (1) 劈 m_1 相对地面的加速度和木块 m_2 相对劈的加速度；
(2) 欲使木块与劈之间无相对滑动，应该沿水平方向给劈多大的作用力？

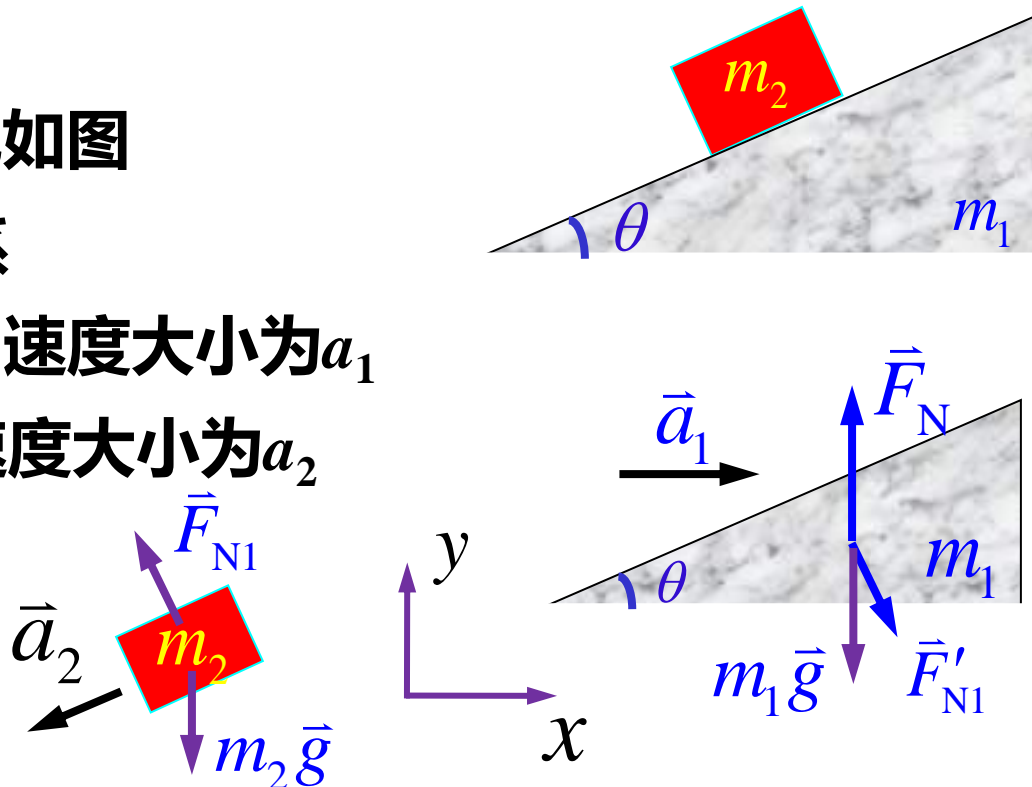
解 (1) m_1 、 m_2 受力情况如图

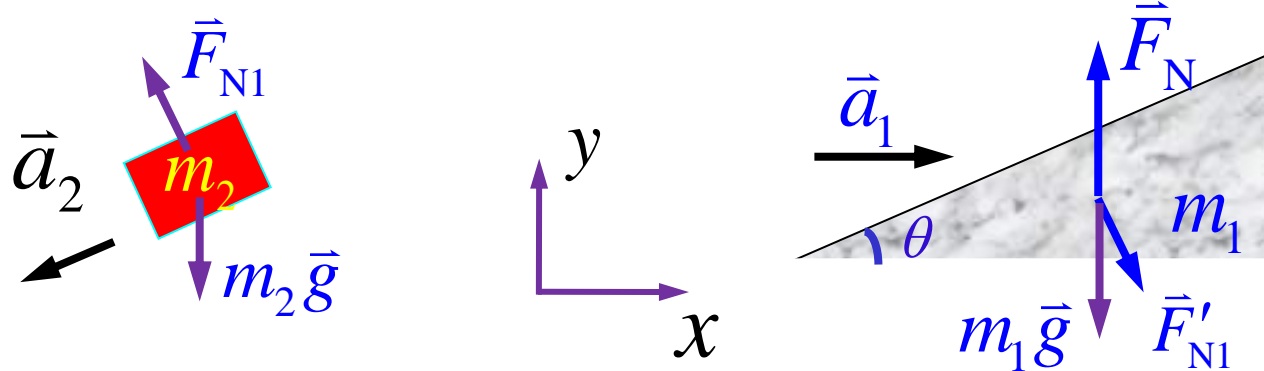
建立如图的坐标系

设劈相对地面的加速度大小为 a_1

木块相对劈的加速度大小为 a_2

方向如图





对劈 m_1 有 $F'_{N1} \sin \theta = m_1 a_1$ (1)

$$F_N - F'_{N1} \cos \theta - m_1 g = 0 \quad (2)$$

对木块 m_2 有 $-F_{N1} \sin \theta = m_2 (-a_2 \cos \theta + a_1)$ (3)

$$F_{N1} \cos \theta - m_2 g = m_2 (-a_2 \sin \theta) \quad (4)$$

且 $F'_{N1} = F_{N1}$ (5)

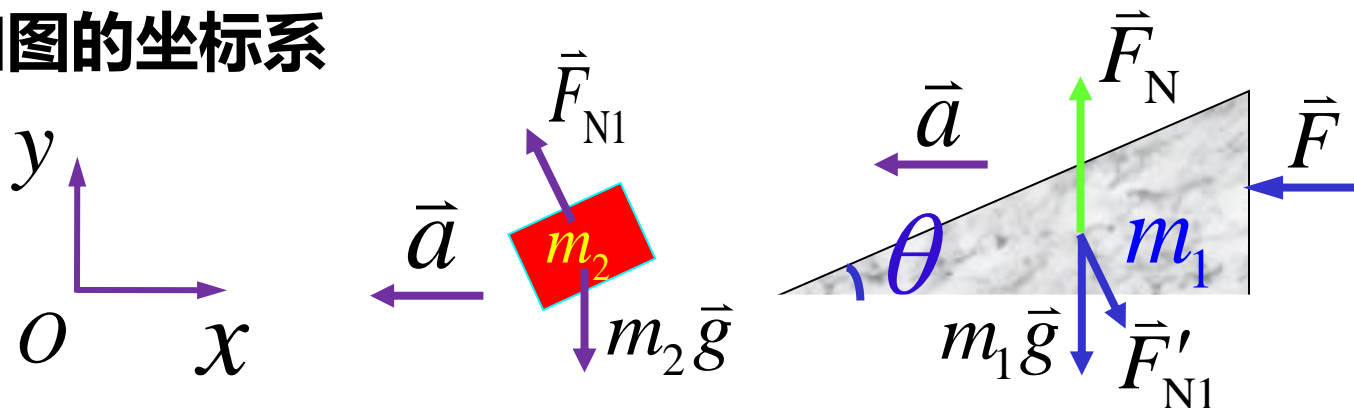
解以上方程组，可得

$$a_1 = \frac{m_2 g \sin \theta \cos \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta} \quad a_2 = \frac{(m_1 + m_2) g \sin \theta}{m_1 + m_2 \sin^2 \theta}$$

(2) 欲使木块与劈之间无相对滑动，应该沿水平方向给劈多大的作用力？

设沿水平方向给劈施加力 F ，且木块与劈以相同的加速度 a 沿水平方向运动，方向如图所示。

建立如图的坐标系



对劈 m_1 有

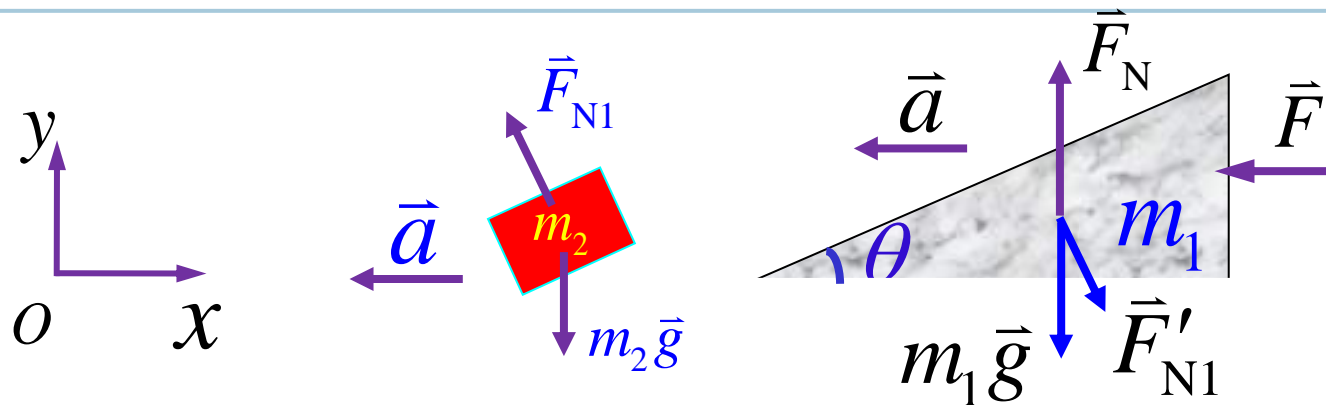
$$F'_{N1}\sin\theta - F = m_1(-a) \quad (1)$$

$$F_N - F'_{N1}\cos\theta - m_1g = 0 \quad (2)$$

对木块 m_2 有

$$-F_{N1}\sin\theta = m_2(-a) \quad (3)$$

$$F_{N1}\cos\theta - m_2g = 0 \quad (4)$$



且
$$F'_{N1} = F_{N1} \quad (5)$$

解以上方程组，可得在劈上所加的水平力为

$$F = (m_1 + m_2)g \tan \theta$$

劈和木块共同运动的加速度为

$$a = g \tan \theta$$

水平力 F 和加速度 a 的方向均为水平向左。

应用牛顿运动定律求解质点动力学问题的一般步骤

- (1) 选取研究对象，隔离物体；
- (2) 分析受力，画出受力图；
- (3) 选取坐标系；
- (4) 列牛顿运动微分方程求解（通常取分量式）；
- (5) 讨论结果的物理意义，判断其是否合理和正确。

例 试问竖直上抛的物体最小应具有多大的初速度 v_0 才不再回到地球上来？不计空气阻力及其它作用力。

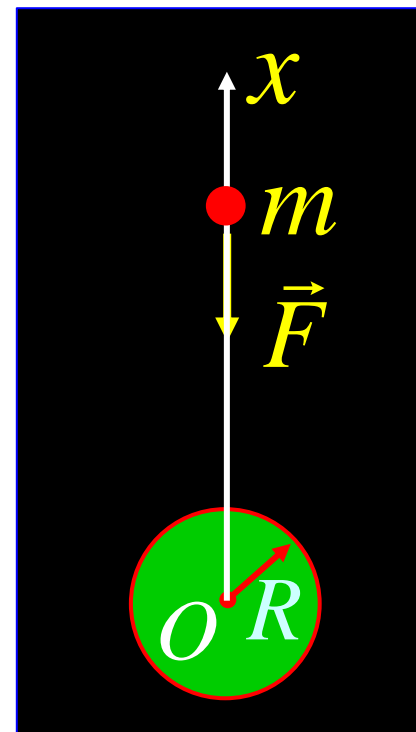
解 设上抛物体质量为 m , 地球质量为 m_E , 半径为 R 受力如图，建立如图所示坐标。

地球对物体的万有引力为 $F = G \frac{mm_E}{x^2}$

$$\text{又 } G = \frac{gR^2}{m_E} \quad \text{则 } F = \frac{mgR^2}{x^2}$$

根据质点运动微分方程，有 $-\frac{mgR^2}{x^2} = m \frac{dv}{dt}$

$$\text{变量代换，得 } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$



所以 $-\frac{mgR^2}{x^2} = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$

分离变量,得 $v dv = -gR^2 \frac{dx}{x^2}$

初始条件为 $x_0 = R \quad v = v_0$

积分, 有 $\int_{v_0}^v v dv = -gR^2 \int_R^x \frac{dx}{x^2}$

由此解得 $v^2 = v_0^2 - 2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x} \right)$

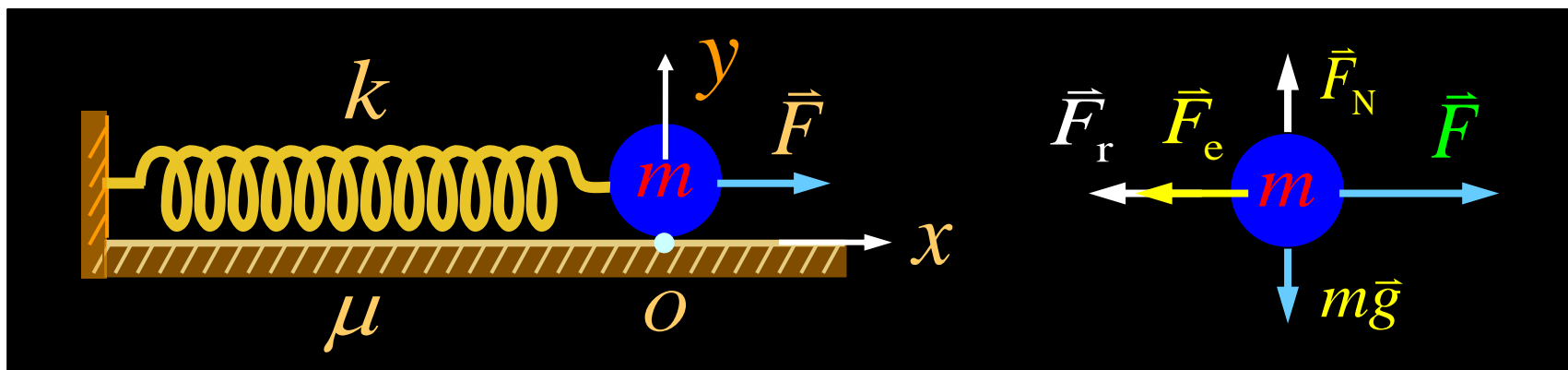
即 $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x}}$

所以 $v_0 = \sqrt{2gR} = 11.2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (第二宇宙速度)

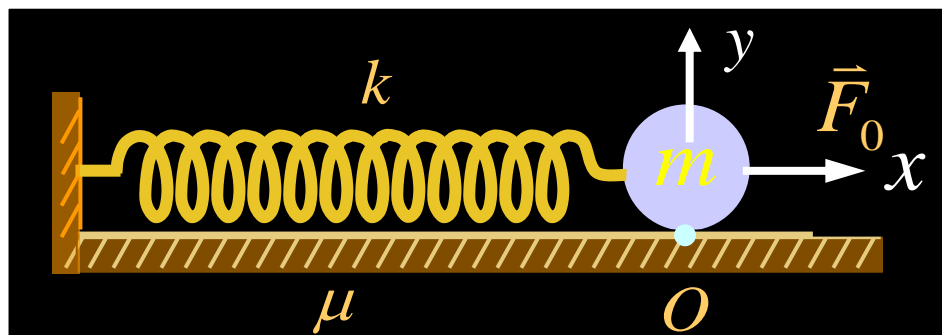
例 如图所示，质量为 m 的小球与劲度系数为 k 的轻弹簧构成弹簧振子系统。开始时，弹簧处于原长，小球静止，现以恒力 F 向右拉小球，设小球与水平面间的摩擦系数为 μ 。

求 小球向右运动的最大距离。

变力



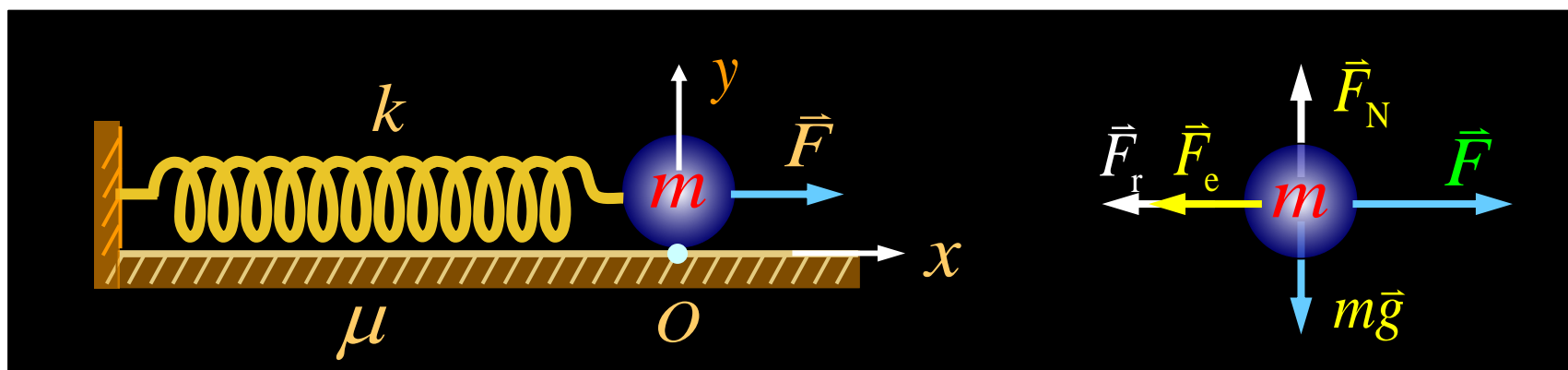
◆ 过程分析



- 小球在 F 作用下, 当 $F_0 > kx + \mu mg$ 偏离 O 点向 x 轴正方向加速运动; 随着 x 增大, 合力会减小, 加速度减小, 但速度还在增加!
- 当 $F_0 = kx + \mu mg$ 时, 合力为零, 加速度也为零, 此时, 小球达到最大速度, 但此时小球仍继续沿 x 轴正方向向右运动。
- 此后, 当 $F_0 < kx + \mu mg$ 时, 小球所受合力的方向沿 x 轴负方向, 加速度也沿 x 轴负方向, 但此时小球的速度仍为正, 随着 x 的继续增加而减小, 最后减小到零。
- 当小球的速度减小到零时, 小球运动到距原点最远的位置。
- 注意本题所求的 x_{max} , 并不是合力为零时的 x , 因为小球还将继续沿 x 轴方向向右运动; x_{max} 应是速度为零时的 x 。

例 如图所示，质量为 m 的小球与劲度系数为 k 的轻弹簧构成弹簧振子系统。开始时，弹簧处于原长，小球静止，现以恒力 F 向右拉小球，设小球与水平面间的摩擦系数为 μ 。

求 小球向右运动的最大距离。 **变力**



解 受力如图所示，以 O 点为原点建立坐标系

列运动微分方程为
$$F - kx - \mu F_N = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

$$F_N - mg = 0 \quad (2)$$

(2)式代入(1)式, 变量代换, 有

$$F - kx - \mu mg = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

分离变量,得 $(F - kx - \mu mg)dx = mv dv$

初始条件 $t = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$

小球向右运动到最大距离时 $x = x_{\max}$, $v = 0$

积分 $\int_0^{x_{\max}} (F - kx - \mu mg)dx = \int_0^0 mv dv$

即 $Fx_{\max} - \frac{1}{2}kx_{\max}^2 - \mu mgx_{\max} = 0$

由此可得 $x_{\max} = \frac{2(F - \mu mg)}{k}$

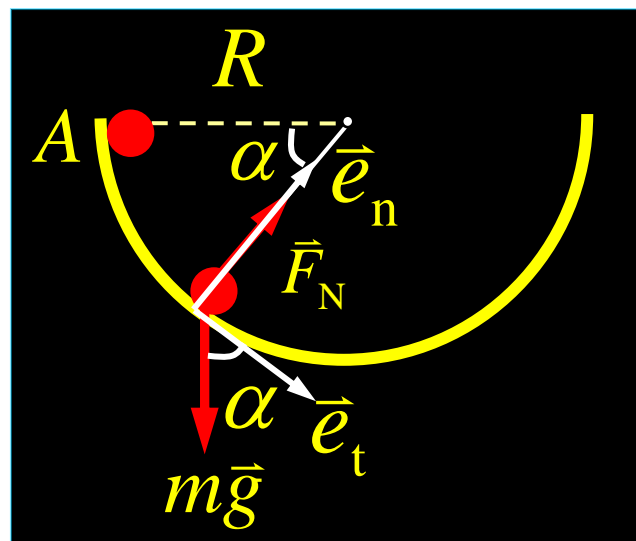
例 质量为 m 的小球最初位于半径为 R 的光滑圆弧面的顶端A点，然后小球沿光滑圆弧面从静止开始下滑。

求 小球在任一位置时的速度和对圆弧面的作用力。

解 受力如图所示 建立自然坐标

列方程 $mg\cos\alpha = m\frac{dv}{dt}$ (1)

$$F_N - mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \quad (2)$$



变量代换 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \frac{dv}{d\alpha} = \frac{v}{R} \frac{dv}{d\alpha}$

分离变量 $v dv = Rg\cos\alpha d\alpha$

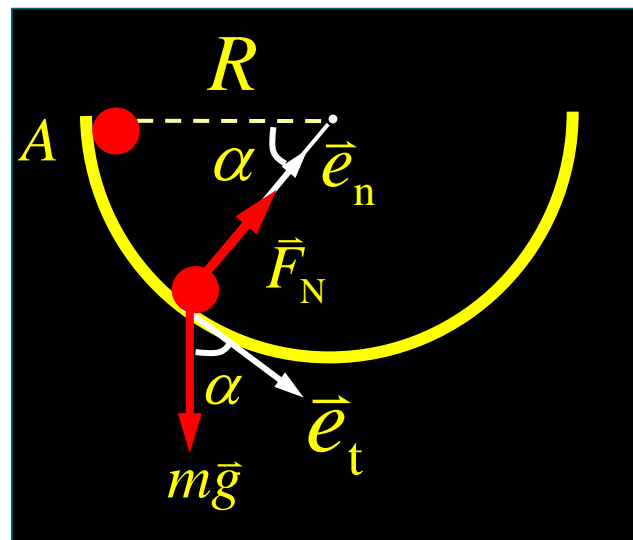
利用初始条件，积分

$$\int_0^v v dv = \int_0^\alpha Rg \cos \alpha d\alpha$$

即 $\frac{1}{2}v^2 = Rg \sin \alpha$

由此可得 $v = \sqrt{2Rg \sin \alpha}$

由(2)式有 $F_N = mg \sin \alpha + m \frac{2Rg \sin \alpha}{R}$
 $= 3mg \sin \alpha$



例 有一质量为 m 的均匀细棒长为 l ，将其一端固定并作为转轴，另一端绕转轴在光滑水平面上以匀角速度 ω 旋转。

求 距离固定端为 $l/2$ 、 $l/4$ 处的张力。

解 选微元 dx ，对其受力分析,如图

建立如图自然坐标

列方程

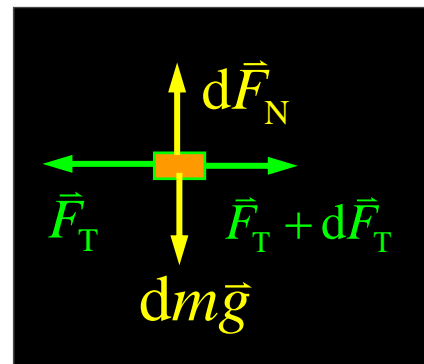
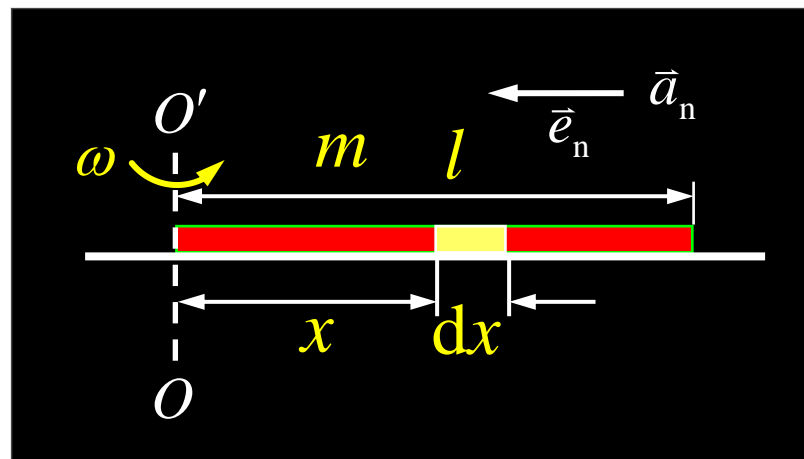
$$F_T - (F_T + dF_T) = dm a_n$$

$$dm = \rho dx = \frac{m}{l} dx$$

$$a_n = \omega^2 x$$

$$dF_T = -\frac{m}{l} \omega^2 x dx$$

$$\int_{F_{T0}}^{F_T} dF_T = \int_0^x -\frac{m}{l} \omega^2 x dx$$



即
$$F_T - F_{T0} = -\frac{m}{l} \omega^2 \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

考虑到 $x = l$ 时, $F_T(l) = 0$, 则代入(1)式

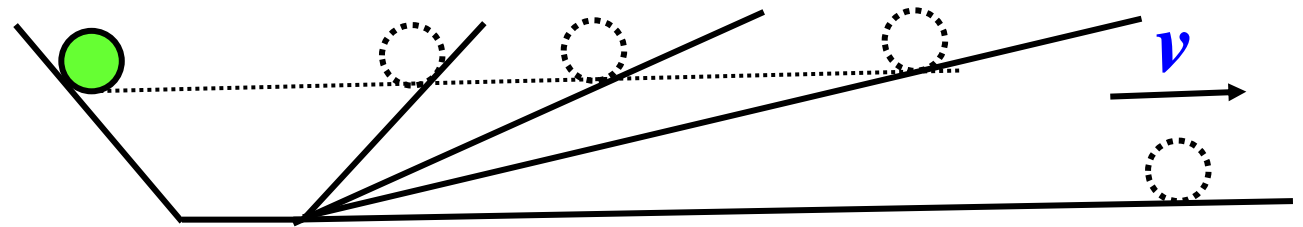
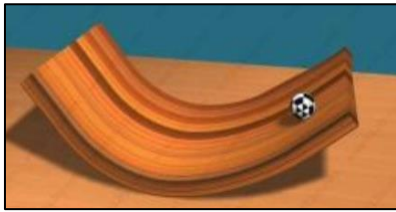
则
$$F_{T0} = \frac{m}{2} l \omega^2 \quad (2)$$

距固定端 x 处棒中的张力为
$$F_T = \frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - x^2)$$

距固定端为 $l/2$ 处的张力
$$x = \frac{l}{2}, \quad F_T\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3m\omega^2 l}{8l}$$

距固定端为 $l/4$ 处的张力
$$x = \frac{l}{4}, \quad F_T\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{15m\omega^2 l}{32l}$$

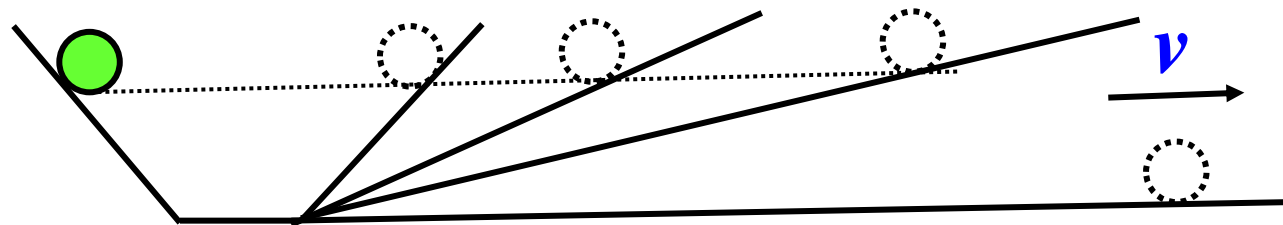
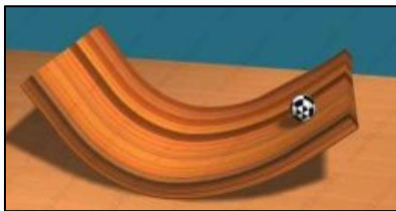
伽利略的对接斜面实验（理想实验）



- 在轨道的一边释放一颗钢珠，如果忽略摩擦力带来的影响，钢珠从左边滚下后，再从右边的斜面滚上，钢珠将上升到与左边释放高度相同的点。若将右边的倾斜角减小，钢珠还是上升到原来的高度，但通过的路程比原来更长
- 假设右边的轨道为水平，钢珠想要达到原来的高度，但是钢珠无法达到原来的高度，钢珠将永远运动下去



伽利略的对接斜面实验（理想实验）



在部分实验的基础上，以“理论推理”的方式作出“理想实验”，得到“物体的运动不需要力去维持”的结论

“伽利略的发现以及他所应用的科学推理方法是人类思想史上最伟大的成就之一，而且标志着物理学的真正开端。”

——爱因斯坦

