例 设 $3(\alpha_1-\alpha)+2(\alpha_2+\alpha)=5(\alpha_3+\alpha)$，其中

$\alpha_1=(2,5,1,3)$，$\alpha_2=(10,1,5,10)$，$\alpha_3=(4,1,-1,1)$

求 α。

解 去括号 $3\alpha_1-3\alpha+2\alpha_2+2\alpha=5\alpha_3+5\alpha$

移项、合并同类项 $6\alpha=3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3$

同除未知量前面的系数

$$\alpha=\frac{1}{6}(3\alpha_1+2\alpha_2-5\alpha_3)=(1,2,3,4)$$

例 n维向量 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$， $\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$， $\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$ 是一组两两正交的单位向量。

例 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ 是两两正交的向量，但它们不是单位向量。

例 设$\alpha=(-1,1,1,1)$，$\beta=(-1,-2,1,0)$，$\gamma=(-1,1,1,0)$

（1）求α与β的夹角φ_1及α与γ的夹角φ_2;

（2）求与α,β,γ都正交的向量。

解 （1）因为$[\alpha,\beta]=1-2+1=0$，所以$\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$；

又有$[\alpha,\gamma]=1+1+1=3$，$\|\alpha\|=\sqrt{4}=2$，$\|\gamma\|=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\varphi_2=\dfrac{[\alpha,\gamma]}{\|\alpha\|\|\gamma\|}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故$\varphi_2=\dfrac{\pi}{6}$。

（2）设与α,β,γ都正交的向量是$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$，

则由正交条件得

$$\begin{cases}[\alpha,\boldsymbol{x}]=-x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ [\beta,\boldsymbol{x}]=-x_1-2x_2+x_3=0\\ [\gamma,\boldsymbol{x}]=-x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

上页 下页 返回

系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=0\\ x_4=0\end{cases}$，通解为 $\begin{cases}x_1=t\\ x_2=0\\ x_3=t\\ x_4=0\end{cases}$

故 $\boldsymbol{x}=t(1,0,1,0)$ （t为任意实数）

例 n维零向量$\mathbf{0}$可由任一组n维向量线性表示：

$$\mathbf{0} = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m$$

例 任一n维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可由n维向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表示：

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

称$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$为$n$维**单位坐标向量**。

问题： ε_1可否由 $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表示？

分析：若有 $\varepsilon_1 = k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n$，即

$$(1,0,\cdots,0) = (0, k_2, \cdots, k_n)$$

上页 下页 返回

这不可能成立。故 ε_1不能由 $\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性表示。

例 已知$\alpha_1=(1,2,-1)$，$\alpha_2=(2,5,3)$，$\alpha_3=(1,3,4)$，$\alpha_4=(3,7,2)$，问$\beta=(3,8,7)$可否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示？

解 设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，比较分量得：

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3+3k_4=3 \\ 2k_1+5k_2+3k_3+7k_4=8 \\ -k_1+3k_2+4k_3+2k_4=7 \end{cases}$$

增广矩阵

上页 下页 返回

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&3&3\\2&5&3&7&8\\-1&3&4&2&7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&3&3\\0&1&1&1&2\\0&5&5&5&10\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&1&-1\\0&1&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

法1 由于 $\operatorname{rank}\hat{A}=\operatorname{rank}A=2$，方程组有解，故 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示。

法2 同解方程组为 $\begin{cases}k_1=-1+k_3-k_4\\k_2=2-k_3-k_4\end{cases}$，取 $k_3=k_4=0$

得 $k_1=-1$，$k_2=2$，故 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3+0\alpha_4$。

例 证明n维单位坐标向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关。

证 设 $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=\mathbf{0}$，即

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(0,0,\cdots,0)$$

这只有 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关。

例 判断向量组 $\alpha_1=(1,1,0,0)$，$\alpha_2=(1,1,1,2)$，$\alpha_3=(2,2,3,6)$ 的线性相关性。

解 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$，即

$$\begin{cases} k_1+k_2+2k_3=0 \\ k_1+k_2+2k_3=0 \\ k_2+3k_3=0 \\ 2k_2+6k_3=0 \end{cases}$$

系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\0&1&3\\0&2&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&0\\0&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

法1 由于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2<3$，齐次方程组有非零解，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

法2 同解方程组为：$\begin{cases}k_1=k_3\\k_2=-3k_3\end{cases}$，取 $k_3=1$ 得 $k_1=1$，$k_2=-3$，即 $\alpha_1-3\alpha_2+\alpha_3=\mathbf{0}$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关。

例 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。设

$$\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\ \beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$$

问 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是线性相关还是线性无关?

解 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=\mathbf{0}$，即

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+k_m(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)=\mathbf{0}$$

整理得

$$(k_1+k_2+\cdots+k_m)\alpha_1+(k_2+\cdots+k_m)\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，知

$$\begin{cases} k_1+k_2+\cdots+k_m=0 \\ \qquad k_2+\cdots+k_m=0 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\quad k_m=0 \end{cases}$$

系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{vmatrix}=1$，故齐次线性方程组只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关。

例　已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，设

$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$

讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的线性相关性。

解　法1　因为　$\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4=\mathbf{0}$，

所以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关。

法2 设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=\mathbf{0}$，即

$$(k_1+k_4)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+(k_3+k_4)\alpha_4=\mathbf{0}$$

为使上式成立，令

$$\begin{cases} k_1 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，该齐次线性方程组有非零解，故 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关。

上页 下页 返回

例 试讨论下列向量组的线性相关性：

1） $\alpha_1=(1,0,3,2,4)$，$\alpha_2=(2,1,4,1,0)$，$\alpha_3=(0,2,-1,4,2)$

解 1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3&2&4\\2&1&4&1&0\\0&2&-1&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&2&4\\0&1&-2&-3&-8\\0&2&-1&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&3&2&4\\0&1&-2&-3&-8\\0&0&3&10&18\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。

2） $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\2\end{pmatrix}$， $\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\3\end{pmatrix}$， $\beta_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\5\end{pmatrix}$。

解　2） $$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&2&0\\-2&-1&1\\2&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-3r_1\\r_3+2r_1}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&2&6\\0&-1&-3\\0&3&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_2]{\substack{r_2\times\frac{1}{2}\\r_3+r_2}}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}B=2$， 故 β_1,β_2,β_3 线性相关。

例　求向量组T：$\alpha_1=(1,2)$，$\alpha_2=(2,4)$，$\alpha_3=(-1,-2)$，$\alpha_4=(0,0)$ 的秩和一个极大无关组。

解　因为 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$，它线性无关。显然T中任意两个向量线性相关，故T的秩为1，且 α_1是T的一个极大无关组。同理 α_2或α_3 都是T的极大无关组。

例　记全体实n维行(或列)向量的集合为 $\mathbf{R}^n$，求 $\mathbf{R}^n$ 的秩与极大无关组。

解　已知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\mathbf{R}^n$，且它们线性无关，又任意$n$+1个$n$维向量线性相关，故 $\mathbf{R}^n$的秩为n，且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$的一个极大无关组。可知，任意n个线性无关的实n维向量都是$\mathbf{R}^n$的极大无关组。

例 求向量组 $\alpha_1=(2,0,-1,3)$，$\alpha_2=(3,-2,1,-1)$，$\alpha_3=(-5,6,-5,9)$，$\alpha_4=(4,-4,3,-5)$ 的秩和一个极大无关组。

解

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1&3\\ 3&-2&1&-1\\ -5&6&-5&9\\ 4&-4&3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-r_1}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&-1&3\\ 1&-2&2&-4\\ -5&6&-5&9\\ 0&-4&5&-11\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+5r_2]{r_1-2r_2}$$

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 & 11 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 5 & -11 \\ 0 & -4 & 5 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\substack{r_3+r_1 \\ r_4+r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$，故向量组的秩为2。

$\boldsymbol{A}$中位于1, 2行的二阶子式

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

故 α_1, α_2 是一个极大无关组。

例 求向量组 $\alpha_1=(2,0,-1,3)$，$\alpha_2=(3,-2,1,-1)$，$\alpha_3=(-5,6,-5,9)$，$\alpha_4=(4,-4,3,-5)$ 的秩和一个极大无关组。

解

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1&3\\3&-2&1&-1\\-5&6&-5&9\\4&-4&3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\;]{\substack{c_1+2c_3\\ c_4+3c_3}}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\5&-2&1&2\\-15&6&-5&-6\\10&-4&-3&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\;]{\substack{c_1+\frac{5}{2}c_2\\ c_4+c_2\\ c_2\times(-\frac{1}{2})\\ c_3\times(-1)}}$$

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

由于 $\operatorname{rank} \boldsymbol{B} = 2$，故向量组的秩为2；又$\boldsymbol{B}$的第1, 2个行向量线性无关，从而$\alpha_1, \alpha_2$ 是一个极大无关组。

上页 下页 返回

例　求向量组

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\5\\-1\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\-1\\3\end{pmatrix},\quad \beta_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\4\\-1\end{pmatrix}$$

的秩和一个极大无关组。

解 $$A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\\1&-1&3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4-2r_1\\r_5-r_1}]{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_5+r_2]{\substack{r_2\times\frac{1}{2} \\ r_3-r_2 \\ r_4-5r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_4+r_3 \\ r_5-r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3$，故向量组的秩为3，且 β_1,β_2,β_4 是一个极大无关组。

例 讨论向量组

T_1：$\alpha_1=(1,0)$，$\alpha_2=(0,1)$；T_2：$\beta=(1,1)$

的线性关系。

解 因为 $\beta=\alpha_1+\alpha_2$，所以T_2可由T_1线性表示；但 $\alpha_1\neq k_1\beta$，故T_1不能由T_2线性表示。

例 讨论向量组

T_1： $\alpha_1=(1,0)$， $\alpha_2=(0,1)$， $\alpha_3=(1,1)$;

T_2： $\beta_1=(3,4)$， $\beta_2=(4,3)$。

的线性关系。

解 因为 $\beta_1=3\alpha_1+4\alpha_2+0\alpha_3$，$\beta_2=4\alpha_1+3\alpha_2+0\alpha_3$，所以$T_2$可由$T_1$线性表示。又因为

$$\alpha_1=-\frac{3}{7}\beta_1+\frac{4}{7}\beta_2,\quad \alpha_2=\frac{4}{7}\beta_1-\frac{3}{7}\beta_2,\quad \alpha_3=\frac{1}{7}\beta_1+\frac{1}{7}\beta_2$$

从而T_1可由T_2线性表示，故T_1与T_2等价。

例　证明：$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \le \min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$。

证　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times r}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{r\times n}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=\boldsymbol{AB}$.

将$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{C}$分块为

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),\quad \boldsymbol{C}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$$

则由

$$\boldsymbol{C}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)=\boldsymbol{AB}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

得

$$\begin{cases} \gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{r1}\alpha_r \\ \gamma_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{r2}\alpha_r \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + b_{2n}\alpha_2 + \cdots + b_{rn}\alpha_r \end{cases}$$

即 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示。

由性质9知，

$$秩\{\gamma_1, \ \gamma_2,\cdots, \ \gamma_n\} \le 秩\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$$

也即 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \le \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$。 又有

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) &= \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \\ &\le \operatorname{rank}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \le \min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$。

例 设A是m阶可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$是$m\times n$矩阵，证明：

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$$

证 由上例得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\le\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$。又有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB})\le\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$。

上页 下页 返回

例 $V_0=\{(0,0,\cdots,0)\}$，即只含一个零向量的集合，是向量空间。

例 n维实的行(或列)向量的全体$\mathbf{R}^n$是向量空间。

解 因为 $\mathbf{0}\in\mathbf{R}^n$，即非空，且对$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}^n$有 $\alpha+\beta\in\mathbf{R}^n$；又对 $\forall\alpha\in\mathbf{R}^n$ 和 $k\in\mathbf{R}$ 有 $k\alpha\in\mathbf{R}^n$，故$\mathbf{R}^n$是向量空间。

例 $V_1=\{(0,\cdots,0,x_n)\mid x_n\in\mathbf{R}\}$ 是向量空间。

解 因为 $\mathbf{0}\in V_1$，即V_1非空。又对 $\forall\alpha=(0,\cdots,0,a_n)\in V_1$，$\forall\beta=(0,\cdots,0,b_n)\in V_1$，$k\in\mathbf{R}$

有
$$\alpha+\beta=(0,\cdots,0,a_n+b_n)\in V_1$$
$$k\alpha=(0,\cdots,0,ka_n)\in V_1$$

故V_1是向量空间。

例 $V_2=\{(0,x_2,\cdots,x_n)\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$ 是向量空间。

例 $V_3=\{(-1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$ 不是向量空间

解 非空条件满足 $(-1,0,\cdots,0)\in V_3$。但对

$\alpha=(-1,a_2,\cdots,a_n)\in V_3$，$\beta=(-1,b_2,\cdots,b_n)\in V_3$

有
$$\alpha+\beta=(-2,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)\notin V_3$$

故V_3不是向量空间。

例 $V_4=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}且x_1+\cdots+x_n=0\}$
是向量空间；

$$V_5=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}且x_1+\cdots+x_n=1\}$$
不是向量空间。

上页 下页 返回

解 因为 $\mathbf{0} \in \mathrm{V}_4$，即$\mathrm{V}_4$非空。又对任意

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathrm{V}_4,\ \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathrm{V}_4$$

其中 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$，$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0$

由于 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$

且 $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) =$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = 0$$

所以$\alpha + \beta \in \mathrm{V}_4$；而对 $\forall k \in \mathbf{R}$，由于

$$k\alpha = (ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$$

且 $(ka_1) + (ka_2) + \cdots + (ka_n) = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$

即 $k\alpha \in \mathrm{V}_4$，故V_4是向量空间。

如取 $\alpha = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathrm{V}_5$，因为 $2\alpha = (2, 0, \cdots, 0) \notin \mathrm{V}_5$，

故V_5不是向量空间。

例 给定n维实的行(或列)向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，集合

$$\mathrm{V}_6=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m \mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in\mathbf{R}\}$$

是向量空间。

解 因为 $\alpha_1\in\mathrm{V}_6$，即V_6非空。又对 $\forall\alpha,\beta\in\mathrm{V}_6$，有

$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m,\quad \beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m$$

其中 $k_i,l_i\in\mathbf{R}$，且

$$\alpha+\beta=(k_1+l_1)\alpha_1+\cdots+(k_m+l_m)\alpha_m\in\mathrm{V}_6$$

而对 $\forall k\in\mathbf{R}$，有

$$k\alpha=kk_1\alpha_1+\cdots+kk_m\alpha_m\in\mathrm{V}_6$$

故V_6是向量空间。

例 在$\mathbf{R}^n$中，已知$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关，而任意$n$维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$均可表为

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

故$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$\mathbf{R}^n$的一个基，且$\dim\mathbf{R}^n=n$。

$\mathbf{R}^n$中任意n个线性无关的向量都是基。

例 在向量空间$\mathrm{V}_1=\{(0,\cdots,0,x_n)\mid x_n\in\mathbf{R}\}$中，取$\varepsilon_n=(0,\cdots,0,1)\in\mathrm{V}_1$，则$\varepsilon_n$线性无关，且对任一$\alpha=(0,\cdots,0,a_n)\in\mathrm{V}_1$，有$\alpha=a_n\varepsilon_n$。故$\varepsilon_n$是$\mathrm{V}_1$的一个基，且$\dim\mathrm{V}_1=1$。

例 求向量空间

$$V_2=\{(0,x_2,\cdots,x_n)\mid x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$$

的基与维数。

解 在V_2中取向量组 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n$, 则它线性无关, 且对任一向量 $\alpha=(0,a_2,\cdots,a_n)\in V_2$, 有

$$\alpha=a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

故 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n$ 是V_2的一个基，且 $\dim V_2=n-1$。

例 求向量空间

$V_4=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R}且x_1+\cdots+x_n=0\}$

的基与维数。

上页 下页 返回

解 在V_4中取向量组 $\alpha_1=(-1,1,0,\cdots,0)$,
$\alpha_2=(-1,0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots$, $\alpha_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1)$

先证$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关。由于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

的秩 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性无关。

又取$\forall\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in V_4$，其中

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$$

下证α可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$线性表示。

法1　设$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1}$，比较分量得：

$$\begin{cases} -k_1 - k_2 - \cdots - k_{n-1} = a_1 \\ k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad = a_2 \\ \qquad k_2 \qquad\qquad\qquad = a_3 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad k_{n-1} = a_n \end{cases}$$

增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc:c} -1 & -1 & \cdots & -1 & a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_n]{\substack{\mathrm{r}_1+\mathrm{r}_2 \\ \mathrm{r}_1+\mathrm{r}_3 \\ \cdots}} \left(\begin{array}{cccc:c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{array}\right)$$

方程组的解为

$$k_1 = a_2,\ \ k_2 = a_3, \cdots,\ \ k_{n-1} = a_n$$

即 α 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示。

法2 构造矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

由于

$$\det \boldsymbol{B} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0$$

所以 $\operatorname{rank} \boldsymbol{B} < n$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha$ 线性相关。但 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，故 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示。从而 $\dim \mathrm{V}_4 = n-1$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是V_4的一个基。

例 求由向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$

所生成的向量空间的基与维数。

解 构造矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-3r_2}$$

$$\begin{pmatrix}0&4&-6&5\\1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=2$，故 $\dim \mathrm{L}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，且 α_1,α_2 是它的一个基。

例 $\mathbf{R}^n$中的向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，这是因为

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

例 在向量空间 $\mathrm{V}_1=\{(0,\cdots,0,x_n)\,|\,x_n\in\mathbf{R}\}$中，向量 $\alpha=(0,\cdots,0,a_n)$ 在基 ε_n 下的坐标为 (a_n)。

例　在$\mathbf{R}^4$中，求向量 $\alpha=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 在基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

下的坐标。

解 设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$。比较分量得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\quad = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad 3x_2 \qquad\quad - x_4 = 0 \\ x_1 + \ x_2 \qquad\quad - x_4 = 1 \end{cases}$$

解得 $x_1 = 1$，$x_2 = 0$，$x_3 = -1$，$x_4 = 0$

故 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标为 $(1,0,-1,0)^T$。

例 在$\mathbf{R}^3$中，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$是一个正交基，但不是标准正交基。如果将其单位化

$$\beta_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \beta_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

即得$\mathbf{R}^3$的一个标准正交基。

例 在$\mathbf{R}^n$中，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是一个标准正交基。

例 已知线性无关向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

试将其正交化。

解 采用**Schmidt**正交化方法:

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix},\qquad \beta_4=\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

例 已知$\mathbf{R}^3$的两个基

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$$

和

$$\beta_1=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$$

试求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵。

解 **法1** 直接法(待定法)。设

$$\begin{cases}\beta_1=c_{11}\alpha_1+c_{21}\alpha_2+c_{31}\alpha_3\\ \beta_2=c_{12}\alpha_1+c_{22}\alpha_2+c_{32}\alpha_3\\ \beta_3=c_{13}\alpha_1+c_{23}\alpha_2+c_{33}\alpha_3\end{cases}$$

解三个线性方程组得

$$\begin{cases} c_{11} = -27 \\ c_{21} = 9 \\ c_{31} = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} c_{12} = -71 \\ c_{22} = 20 \\ c_{32} = 12 \end{cases}, \quad \begin{cases} c_{13} = -41 \\ c_{23} = 9 \\ c_{33} = 8 \end{cases}$$

故由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

法2 间接法(中间基法)。取$\mathbf{R}^3$的基

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$分别到基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的基变换公式为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{A},\ (\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{B}$$

其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&5&1\\1&2&1\\3&1&-6\end{pmatrix}$$

于是

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$$

例　已知$\mathbf{R}^4$的两个基

$$\begin{cases}\alpha_1=(1,2,-1,0)\\ \alpha_2=(1,-1,1,-1)\\ \alpha_3=(-1,2,1,1)\\ \alpha_4=(-1,-1,0,1)\end{cases},\quad \begin{cases}\beta_1=(3,1,0,0)\\ \beta_2=(5,2,0,0)\\ \beta_3=(0,0,2,-5)\\ \beta_4=(0,0-3,8)\end{cases}$$

试求由基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的过渡矩阵。

解　取$\mathbf{R}^4$的基 $\varepsilon_1=(1,0,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1,0)$，$\varepsilon_4=(0,0,0,1)$，则由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$分别到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的基变换公式为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\boldsymbol{A}$$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -5 & 8\end{pmatrix}$

于是 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$

故由基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -5 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -8 & 7 & -12 & 3 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ -8 & 11 & 11 & 3 \\ -5 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

例 设4维向量空间V的两个基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 满足

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2=\beta_3 \\ \alpha_2+2\alpha_3=\beta_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \beta_1+2\beta_2=\alpha_3 \\ \beta_2+2\beta_3=\alpha_4 \end{cases}$$

（1）求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵;

（2）求向量 $\alpha=\beta_1+2\beta_2+3\beta_3+4\beta_4$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标。

解 （1）由所给等式解得

$$\beta_1=\alpha_3-2\beta_2=\alpha_3-2(\alpha_4-2\beta_3)$$
$$=\alpha_3-2\alpha_4+4\beta_3=4\alpha_1+8\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4$$
$$\beta_2=\alpha_4-2\beta_3=\alpha_4-2(\alpha_1+2\alpha_2)=-2\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_4$$
$$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2$$
$$\beta_4=\alpha_2+2\alpha_3$$

即 $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}4&-2&1&0\\8&-4&2&1\\1&0&0&2\\-2&1&0&0\end{pmatrix}$$

故过渡矩阵为 $$C=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1 & 0\\ 8 & -4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（2） $$\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)C\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}3\\10\\9\\0\end{pmatrix}$$

坐标为 $(3,10,9,0)^{\mathrm{T}}$。

例 设 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 是向量 α 在基

$$\alpha_1=(1,3,4,4),\qquad \alpha_2=(2,5,7,7),$$
$$\alpha_3=(-3,-3,-5,2),\quad \alpha_4=(5,5,8,-3)$$

下的坐标，$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 是向量 α 在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标，且

$$y_1=3x_1+5x_2,\quad y_2=x_1+2x_2,$$
$$y_3=2x_3-3x_4,\quad y_4=-5x_3+8x_4$$

（1）求由基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的过渡矩阵；

（2）求基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$。

解 （1）将坐标之间的关系式写成

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

则相应的基变换公式为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\boldsymbol{C}$$

其中

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

是从基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的过渡矩阵;

（2）因为

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boldsymbol{C}^{-1}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}2&-5&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$$

所以

$$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2=(0,1,1,1)$$

$$\beta_2=-5\alpha_1+3\alpha_2=(1,0,1,1)$$

$$\beta_3=8\alpha_3+5\alpha_4=(1,1,0,1)$$

$$\beta_4=3\alpha_3+2\alpha_4=(1,1,1,0)$$

例 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3=0 \\ x_1+3x_2-2x_3=0 \\ 3x_1+7x_2+8x_3=0 \\ x_1+4x_2-9x_3=0 \end{cases}$$

的基础解系与通解。

解 对系数矩阵$\boldsymbol{A}$作初等行变换化为行最简形

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_2]{\substack{r_1-2r_2 \\ r_3-r_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$，基础解系含3-2=1个解向量。同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -19x_3 \\ x_2 = \quad 7x_3 \end{cases}$$

法1　通解为 $\begin{cases} x_1 = -19t \\ x_2 = \quad 7t \\ x_3 = \quad t \end{cases}$，即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t任意)

基础解系为 $$\xi=\begin{pmatrix}-19\\7\\1\end{pmatrix}$$

法2 在同解方程组 $\begin{cases}x_1=-19x_3\\x_2=\quad\ \ 7x_3\end{cases}$ 中取 $x_3=1$得

$x_1=-19$，$x_2=7$， 故基础解系为

$$\xi=\begin{pmatrix}-19\\7\\1\end{pmatrix}$$

通解为 $$\boldsymbol{x}=t\xi \quad (t\text{任意})$$

例　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解。

解　对系数矩阵$\boldsymbol{A}$作初等行变换化为行最简形

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{r}_3 - \mathrm{r}_1]{\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{\substack{r_1+\frac{1}{2}r_2\\ r_3+\frac{1}{2}r_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$，基础解系含4−2=2个解向量。同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = \quad 2x_4 \end{cases}$$

法1　通解为 $\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = \quad 2t_2 \\ x_4 = \quad t_2 \end{cases}$，即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

上页　下页　返回

其中t_1, t_2为任意常数。基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

法2 在同解方程组 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = \quad\quad 2x_4 \end{cases}$ 中取

$x_2 = 1$，$x_4 = 0$ 得 $x_1 = 1$，$x_3 = 0$；再取

$x_2 = 0$，$x_4 = 1$ 得 $x_1 = 1$，$x_3 = 2$；

故基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为 $\boldsymbol{x} = t_1\xi_1 + t_2\xi_2$ （t_1，t_2为任意常数）

例 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

解 对增广矩阵 $\hat{A}$ 施行初等行变换：

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_3 + r_2 \\ r_2 \times (-\frac{1}{4})}]{r_1 + \frac{1}{4} r_2}$$

上页 下页 返回

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} \hat{\boldsymbol{A}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2 < 5$，有无穷多解。同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \end{cases}$$

法1 通解为 $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}t_1 - \frac{3}{4}t_2 - t_3 \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}t_1 + \frac{7}{4}t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$，写成向量形式

上页 下页 返回

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 t_1, t_2, t_3 为任意常数。

法2 在同解方程组 $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \end{cases}$ 中取

$x_3 = x_4 = x_5 = 0$得 $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$, 故特解为

$$\eta^* = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

同解齐次方程组为 $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 \\ x_2 = \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \end{cases}$

基础解系为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

故通解为 $\boldsymbol{x} = \eta^* + t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + t_3\xi_3$

其中 t_1, t_2, t_3 为任意常数。

例 设四元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为3，已知$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是它的三个解向量，且

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

试求$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解。

分析 已知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个特解$\eta_1$，需求出$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系。

解 因为 $A\eta_1 = b$，$A(\eta_2+\eta_3)=2b$，所以

$$A[2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)]=2b-2b=\mathbf{0}$$

即 $$2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}4\\6\\8\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

是$Ax=\mathbf{0}$的解向量。又因为 $\operatorname{rank} A=3$，所以$Ax=\mathbf{0}$的基础解系含4−3=1个解向量，从而 $2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)$ 是$Ax=\mathbf{0}$的基础解系，故$Ax=b$的通解为

$$x=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}+t(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$$ （t为任意常数）

例 设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的线性无关解向量，$\eta$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的特解。试证明向量组 $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_t$ 线性无关。

证 设$k\eta+k_1(\eta+\xi_1)+\cdots+k_t(\eta+\xi_t)=\boldsymbol{0}$，整理得

$$(k+k_1+\cdots+k_t)\eta+k_1\xi_1+\cdots+k_t\xi_t=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

用$\boldsymbol{A}$左乘上式，并利用 $\boldsymbol{A}\eta=\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{A}\xi_i=\boldsymbol{0}\ (i=1,2,\cdots,t)$得 $(k+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$。由 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$得

$$k+k_1+\cdots+k_t=0 \qquad (**)$$

代入式$(*)$得 $k_1\xi_1+\cdots+k_t\xi_t=\boldsymbol{0}$

又由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 线性无关得 $k_1=\cdots=k_t=0$, 代入式$(**)$得 $k=0$，故 $\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_t$ 线性无关。

例 设$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$均为$n$阶方阵，且$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，证明

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B} \le n$$

证 设 $\boldsymbol{B} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$，由 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 可得

$$\boldsymbol{A}\beta_i = \mathbf{0} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

即 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的解向量，于是$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 可由$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$的基础解系线性表出，故

$$秩\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} \le n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$$

即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{B} \le n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$，从而 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B} \le n$。

例 设A为n阶方阵，证明

$$\operatorname{rank} A^{*}=\begin{cases} n, & \operatorname{rank} A=n \\ 1, & \operatorname{rank} A=n-1 \\ 0, & \operatorname{rank} A<n-1 \end{cases}$$

证 当rank$A$= n时，$\det A \neq 0$，由 $AA^{*}=(\det A)E$

得 $(\det A)(\det A^{*})=(\det A)^{n}$，即

$$\det A^{*}=(\det A)^{n-1}\neq 0,$$

于是$\operatorname{rank} A^{*}=n$。

当rank$A$< n−1时，A的所有n−1阶子式全为零，

由 A^{*}的定义知$A^{*}=\boldsymbol{O}$，于是 $\operatorname{rank} A^{*}=0$。

当rank$\boldsymbol{A}$= n−1时，$\boldsymbol{A}$中至少有n−1阶子式不为零，此时 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$，于是 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* \geq 1$；又由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$$

和上例结果知 $$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* \leq n$$

从而 $$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* \leq n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 1$$

故有 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* = 1$。

上页 下页 返回

例 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵，证明

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A};$$

证 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。反之，由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} &\Rightarrow \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\\ &\Rightarrow \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2=0\Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，故它们的基础解系所含线性无关的向量个数相同，于是

$$n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$$

即
$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

而
$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

例　设齐次线性方程组（Ⅰ）为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$，又已知某齐次线性方程组（Ⅱ）的基础解系为

$$\eta_1 = (0,1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \eta_2 = (-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$$

（**1**）求线性方程组（Ⅰ）的基础解系；

（**2**）求线性方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的公共解。

解（**1**）将（Ⅰ）的系数矩阵化为行最简形

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 0x_3 - x_4 \\ x_2 = 0x_3 + x_4 \end{cases}$，故基础解系为

$$\xi_1 = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \xi_2 = (-1,1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

(2) 法1 线性方程组(Ⅱ)的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\eta_1+k_2\eta_2=(-k_2,k_1+2k_2,k_1+2k_2,k_2)^{\mathrm{T}}$$

即 $x_1=-k_2,\ x_2=k_1+2k_2,\ x_3=k_1+2k_2,\ x_4=k_2$

代入线性方程组(Ⅰ)并整理得 $\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1+k_2=0\end{cases}$,通解为

$$k_1=-t,\ k_2=t \quad (t\text{任意})$$

故线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解为

$$\boldsymbol{x}=-t\eta_1+t\eta_2=t(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}} \quad (t\text{任意})$$

法2 令线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的通解相等

$$l_1\xi_1+l_2\xi_2=k_1\eta_1+k_2\eta_2$$

即

$$l_1\xi_1+l_2\xi_2-k_1\eta_1-k_2\eta_2=\mathbf{0}$$

比较分量得
$$\begin{cases} -l_2 + k_2 = 0 \\ l_2 - k_1 - 2k_2 = 0 \\ l_1 - k_1 - 2k_2 = 0 \\ l_2 - k_2 = 0 \end{cases}$$

对系数矩阵$\boldsymbol{A}$作初等行变换化为行最简形

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通解为 $l_1 = t,\ l_2 = t,\ k_1 = -t,\ k_2 = t \quad (t\text{任意})$

故（Ⅰ）与（Ⅱ）的公共解为

$$\boldsymbol{x} = t\xi_1 + t\xi_2 = t(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}} \quad (t\text{任意})$$

上页 下页 返回