信号与系统：连续信号的正交分解

柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

本章内容：

◈分析周期信号（利用傅里叶级数）

——谐波分析法

◈分析非周期信号（$T\to\infty$）

——傅里叶变换

延拓目的：

◈分析系统的I/O特性，并用频率方法求$r_{zi}(t)$

时域分析中：

信号的分解： 以冲激信号为基本信号，将信号分解成不同延迟的冲激信号的线性加权。

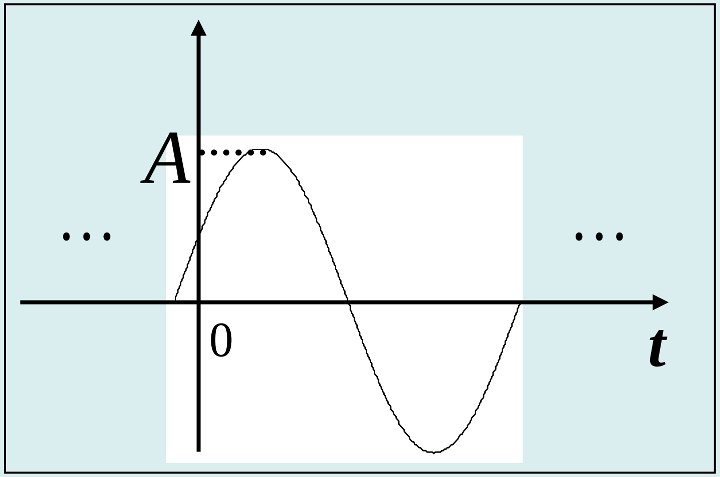
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

响应的合成： 以$h(t)$或$h(n)$为基本响应，将系统的响应（零状态响应）表示为不同延迟的冲激响应的线性加权。

$$r_{zi}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad y_x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

时域分析 $\xrightarrow{?}$ 频域分析

$$A\cos(\omega_i t + \phi_i)$$

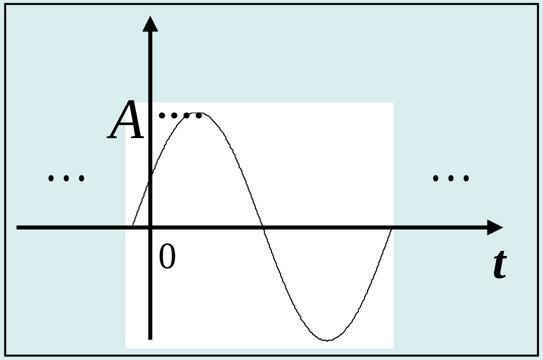


交流电

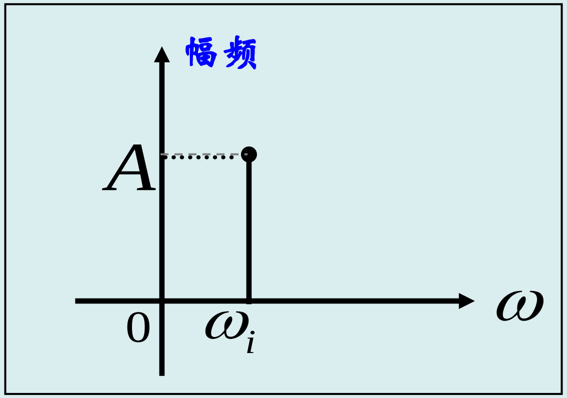
健身房战绳

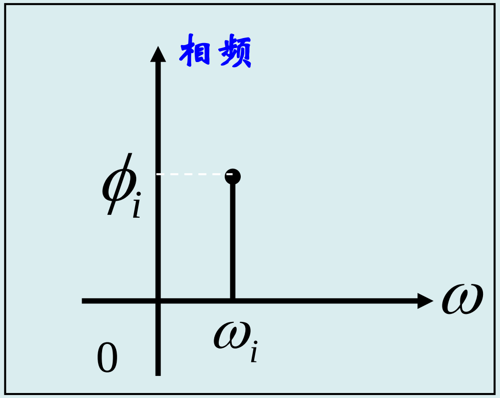
信号分解的意义

$$A\cos(\omega_i t + \phi_i)$$



时域表示





频域表示

单频率振荡信号的时、频域表示

信号分解的意义

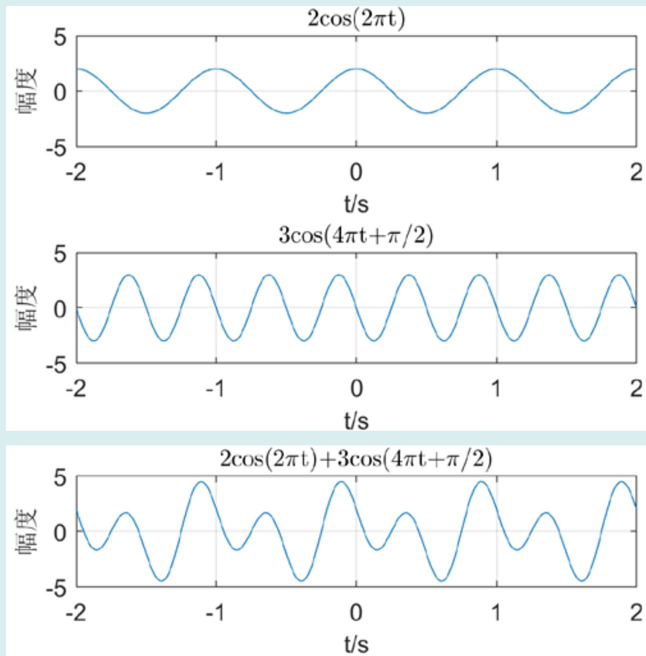
$$A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$$

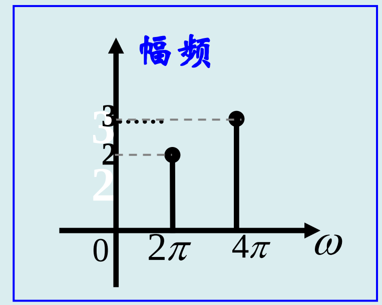
$$A_1=2,\omega_1=2\pi,\phi_1=0;\quad A_2=3,\omega_2=4\pi,\phi_2=\pi/2$$

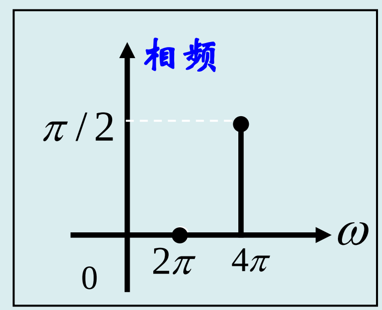
$2\cos(2\pi t)$

$3\cos(4\pi t+\frac{\pi}{2})$

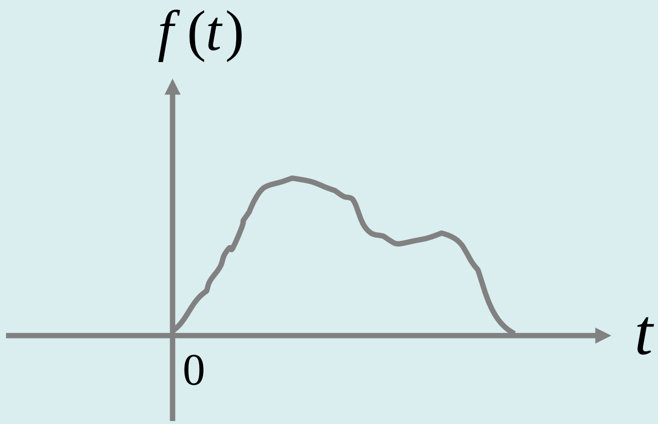
加相

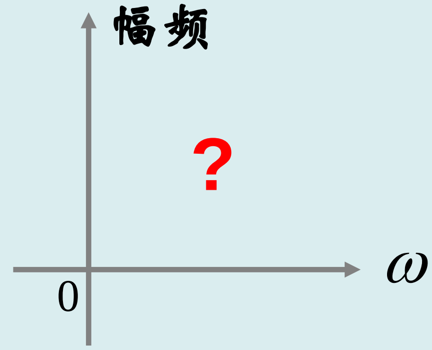


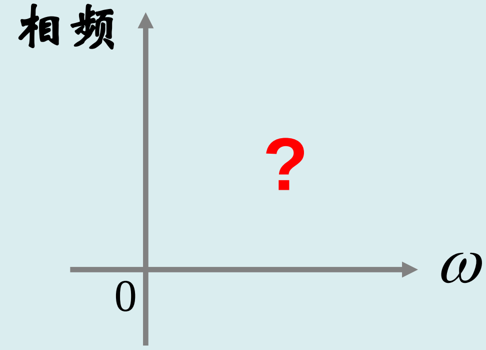




‘山不转路转’ ‘遇到问题灵活处理，不钻牛角尖，多换个角度看问题’







一般信号与单频振荡信号有关系吗？
如何由时域转换到频域表示？

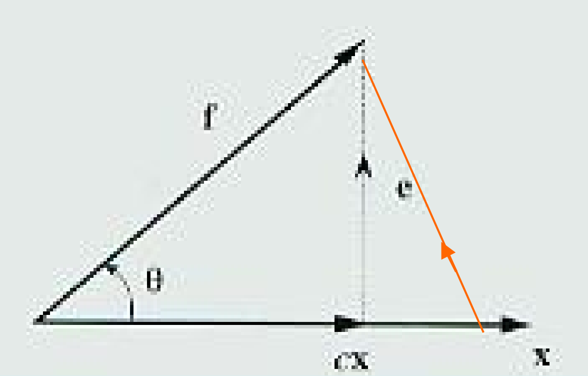
上述问题涉及信号的时频域转换，

即傅里叶变换（简称为傅氏变换）

傅里叶生平 Fourier

- 1768年生于法国
- 1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件 Dirichlet
- 拉格朗日反对发表
- 1822年首次发表在“热的分析理论”一书中

1 矢量的正交



$$f \cdot x = |f||x|\cos\theta$$ 向量内积

$$f = cx + e$$ e称为误差矢量

$$c|x| = |f|\cos\theta \qquad c = \frac{f \cdot x}{|x|^2}$$

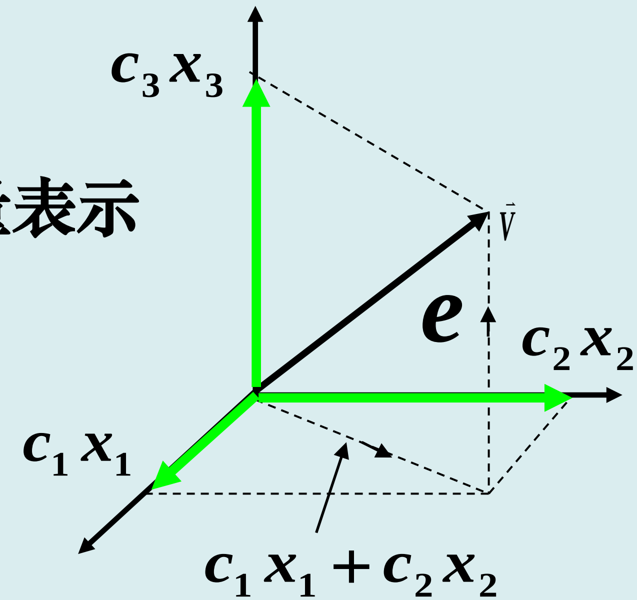
如果 c=0，则$f \cdot x = 0$，则称f与x正交　　夹角theta？

正交矢量集：由两两相互正交的矢量构成的集合。

完备正交矢量集：除了正交矢量集中元素，不存在其它元素与此中每个元素正交。

2 矢量的正交分解

一个三维矢量 $\vec{V}$ 用不同正交的矢量表示



$$\vec{V} \approx c_1 x_1 + c_2 x_2$$

误差：$e = \vec{V} - (c_1 x_1 + c_2 x_2)$

$$\vec{V} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

n维： 正交矢量集$\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n\}$ $\vec{V} = [k_1\ , k_2\ , \ldots, k_n] = \sum_{i=1}^{n} k_i \vec{V}_i$

一个 n 维的矢量，可以用 n 维的正交矢量集中各基底矢量的线性组合来精确表示。（结合线性代数中的向量[1 0 … 0]）

3 信号的正交与正交分解

信号正交

与内积的联系，内积为对应元素相乘，然后求和！

两个信号$\phi_1(t)$和$\phi_2(t)$ 在区间(t_1,t_2)上满足：$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\phi_1(t)\phi_2^*(t)dt=0}$

正交信号集

如果n个信号 $\{\phi_1(t),\phi_2(t),...,\phi_n(t)\}$ 在(t_1,t_2)上满足两两正交。

则此信号集为正交信号集，各$\phi_i(t)$为基底信号。

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\phi_i(t)\phi_j^*(t)dt=0, \qquad i\neq j\\&\int_{t_1}^{t_2}\left|\phi_i(t)\right|^2dt=K_i, \qquad \text{信号能量}\end{aligned}}$$

完备的正交信号集

如果在正交信号集 $\{\phi_i(t),i=1,2,...,n\}$之外，不存在任何能量有限信号与各$\phi_i(t)$正交，则该信号集为完备的正交信号集。

信号的正交分解

使误差的能量最小

若 $\{\phi_i(t), i=1,2,...n\}$ 是在$[t_1,t_2]$上的正交信号集，则[illegible]在$[t_1,t_2]$上的信号$f(t)$进行正交分解，得到：

$$f(t)\approx c_1\phi_1(t)+c_2\phi_2(t)+c_3\phi_3(t)+\cdots=\sum_i c_i\phi_i(t)+f_e(t)$$

误差能量：

$$E_e=\int_{t_1}^{t_2} f_e^{\,2}(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}[f(t)-\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i(t)]^2dt$$

哪个是自变量？

$$=\int_{t_1}^{t_2} f^{\,2}(t)dt+\sum_{i=1}^{n}c_i^2\int_{t_1}^{t_2}\phi_i^2(t)dt-2\sum_{i=1}^{n}c_i\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_i(t)dt$$

当 $c_i=\dfrac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_i(t)dt$， $K_i=\int_{t_1}^{t_2}\phi_i^2(t)dt$ 时，E_e为最小

$$E_e=\int_{t_1}^{t_2} f_e^{\,2}(t)dt=\int_{t_1}^{t_2} f^{\,2}(t)dt-\sum_{i=1}^{n}c_i^2K_i$$

联系Schmitt 分解！

信号的正交分解

完备的正交信号集$\{\phi_i(t), i=1,2,...n\}$，且误差信号的能量为零，则

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 K_i = 0 \qquad \int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 K_i$$

Parseval's theorem

——此式称为广义的帕塞瓦尔定理

此时有：

$$f(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(t) \qquad t_1 \le t \le t_2$$

——此式称为广义的傅里叶级数

常用的完备正交信号集　区间(t_0, t_0+T)

虚指数信号集：$\left\{e^{jn\omega_0 t}, n = 0, \pm1, \pm2, ...\right\}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

正余弦信号集：$\{\sin n\omega_0 t, 1, \cos n\omega_0 t, n = 1,2,...\}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

信号的正交分解

为什么$\left\{e^{jn\omega_0 t}, n=0,\pm1,\pm2,\ldots\right\}$，$\omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$在$\left(t_0, t_0+T\right)$上是正交信号集？

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t}\left(e^{jm\omega_0 t}\right)^* dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$$

K_i

当$n=m$时，上式$=\int_{t_0}^{t_0+T} dt = T$

当$n\neq m$时，上式$=\dfrac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\Big|_{t_0}^{t_0+T}$

$$= \frac{1}{j(n-m)\omega_0}\left[e^{j(n-m)\omega_0(t_0+T)} - e^{j(n-m)\omega_0 t_0}\right]$$

$$= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_0}\left[\underbrace{e^{j(n-m)\omega_0 T}}_{e^{j(n-m)2\pi}} - 1\right] = 0$$

傅里叶级数展开式

精确正交分解的信号$f(t)$应满足狄利克雷 (Dirichlet)条件，即(t_0, t_0+T)区间有定义，即：

（1） $f(t)$绝对可积，即 $\int_{t_0}^{t_0+T}|f(t)|dt<\infty$

（2） $f(t)$的极大值和极小值的数目应有限；

（3） $f(t)$如有间断点，间断点的数目应有限。

周期信号展开成傅里叶级数的条件

周期信号三角式的FS（Fourier Series）

$$\int_{t_1}^{t_2} |\phi_i(t)|^2 dt = K_i,$$

$$c_i = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_i(t)dt$$

周期为T的信号$f(t)$,可以在任意(t_0,t_0+T)

正余弦信号集 $\{\sin n\Omega t, 1, \cos n\Omega t, n =$

精确分解为三角形式的傅里叶级数：

$$f(t) = \underbrace{a_0}_{\text{直流分量}} + \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{a_n \cos n\Omega t}_{\text{余弦分量}} + \underbrace{b_n \sin n\Omega t}_{\text{正弦分量}})$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$ 直流幅度

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega t dt$$ 余弦分量的振荡幅度

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\Omega t dt$$ 正弦分量的振荡幅度

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

周期信号三角式的FS（Fourier Series）

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$f(t)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin(n\Omega t+\theta_n)$$

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt \\ a_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\Omega t dt \\ b_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\Omega t dt \end{cases}$$

$$a_0=c_0=d_0 \qquad c_n=\sqrt{a_n^{\,2}+b_n^{\,2}}$$

$$a_n=c_n\cos\varphi_n=d_n\sin\theta_n \qquad b_n=-c_n\sin\varphi_n=d_n\cos\theta_n$$

$$tg\varphi_n=-\frac{b_n}{a_n} \qquad tg\theta_n=\frac{a_n}{b_n}$$

c_n，φ_n与频率的关系，其图形称为频谱图

$c_n\sim\omega=n\Omega$的关系图——幅度频谱图

$\varphi_n\sim\omega=n\Omega$的关系图——相位频谱图

周期信号三角式的FS（Fourier Series）

正余弦信号集 $\{\sin n\Omega t, 1, \cos n\Omega t, n=1,2,\ldots\}$，$\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)], \quad t_0 < t < t_0 + T$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \qquad f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\Omega t + \theta_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(n\Omega t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(n\Omega t)dt$$

不同角频率

$$a_0 = c_0 = d_0$$

$$c_n = d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$tg(\varphi_n) = \frac{-b_n}{a_n}, \quad tg(\theta_n) = \frac{a_n}{b_n}$$

结论: (1) 任何周期信号只要满足Dirichlet条件，就可以分解成直流分量和许多简谐振荡分量的叠加；

(2) 简谐振荡分量的最低角频率为Ω=2π/ T 。基频 基波 谐波

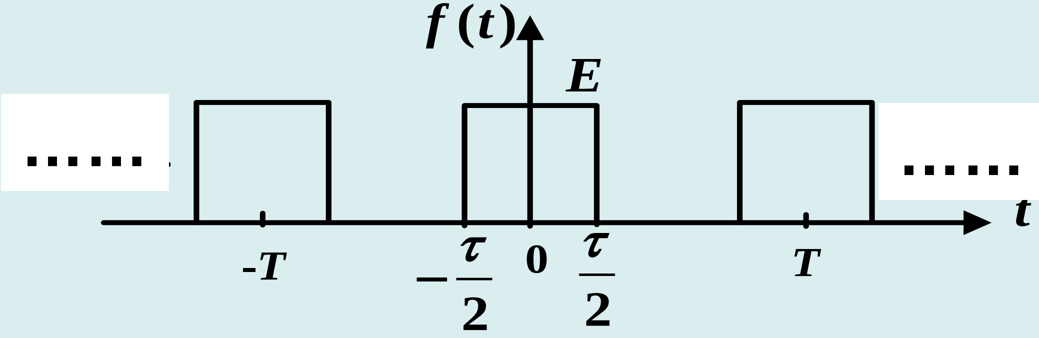
(3) 各个参数a_n,b_n,c_n,d_n, ϕ_n,θ_n是n Ω的函数。

以频率(n Ω)为横轴，幅度频谱图 相位频谱图 合称为频谱图

(4) 周期信号的频谱具有离散性、谐波性。

周期信号三角式的FS（Fourier Series）

❖ 有限项傅里叶级数逼近周期信号$f(t)$



推导！

$E=1, T=2, \tau=1, \Omega=\pi$时

$$a_0=\frac{1}{2} \qquad a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad b_n=0$$

$$f(t)=\underbrace{\frac{1}{2}}_{f_0}+\underbrace{\frac{2}{\pi}\cos(\pi t)}_{f_1}-\underbrace{\frac{2}{3\pi}\cos(3\pi t)}_{f_3}+\underbrace{\frac{2}{5\pi}\cos(5\pi t)}_{f_5}-\underbrace{\frac{2}{7\pi}\cos(7\pi t)}_{f_7}+\ldots$$

周期信号三角式的FS（Fourier Series）

$f(t)=1,\ mT-\frac{\tau}{2}\le t<mT+\frac{\tau}{2},\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots$

分解 $f(t)$ 为:

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

正交信号集: $\{1,\ \cos(n\Omega t),\ \sin(n\Omega t),\ \cdots\}$

求系数: $a_0=\dfrac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot 1\,dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}1\,dt}=\dfrac{\tau}{T}$,

注意:上面是内积,下面是能量

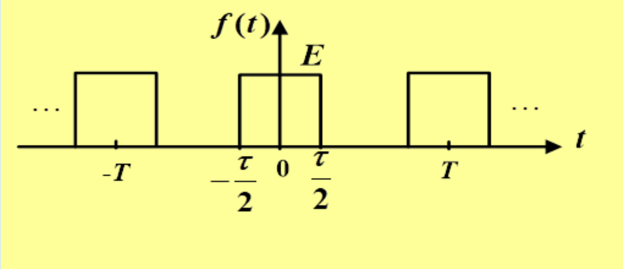
$$a_n=\frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos^2(n\Omega t)dt}=\frac{\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos(n\Omega t)}{\frac{T}{2}}=\frac{\frac{1}{n\Omega}\sin(n\Omega t)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{\frac{T}{2}}$$

$\Omega=\frac{2\pi}{T}$

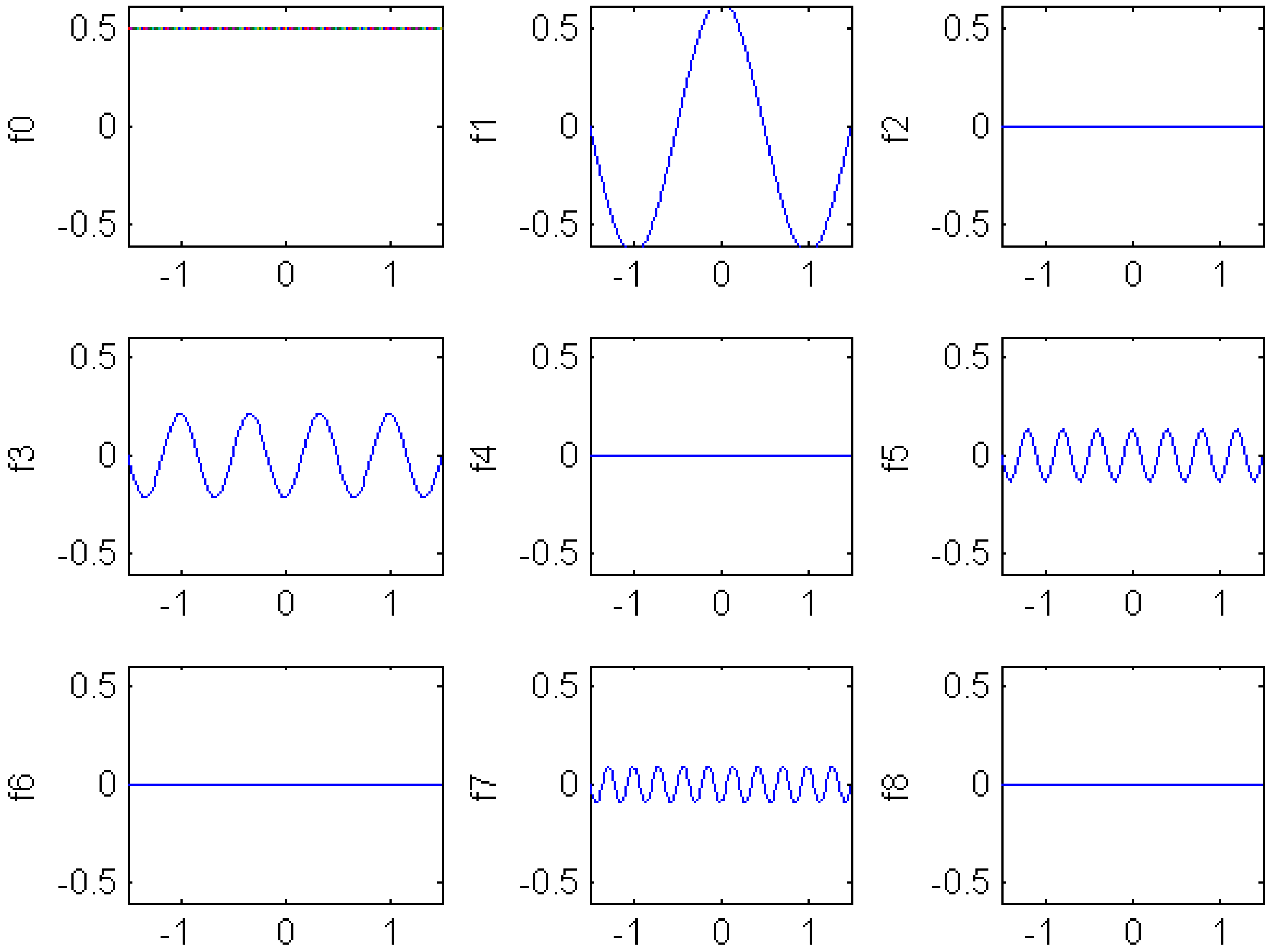
$$=\frac{2}{n\Omega T}\cdot\left[\sin\left(n\Omega\frac{\tau}{2}\right)+\sin\left(n\Omega\frac{\tau}{2}\right)\right]=\frac{2}{n\Omega T}\cdot 2\sin\left(n\Omega\frac{\tau}{2}\right)$$

$$\boxed{=\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\left(n\pi\cdot\frac{\tau}{T}\right)}$$

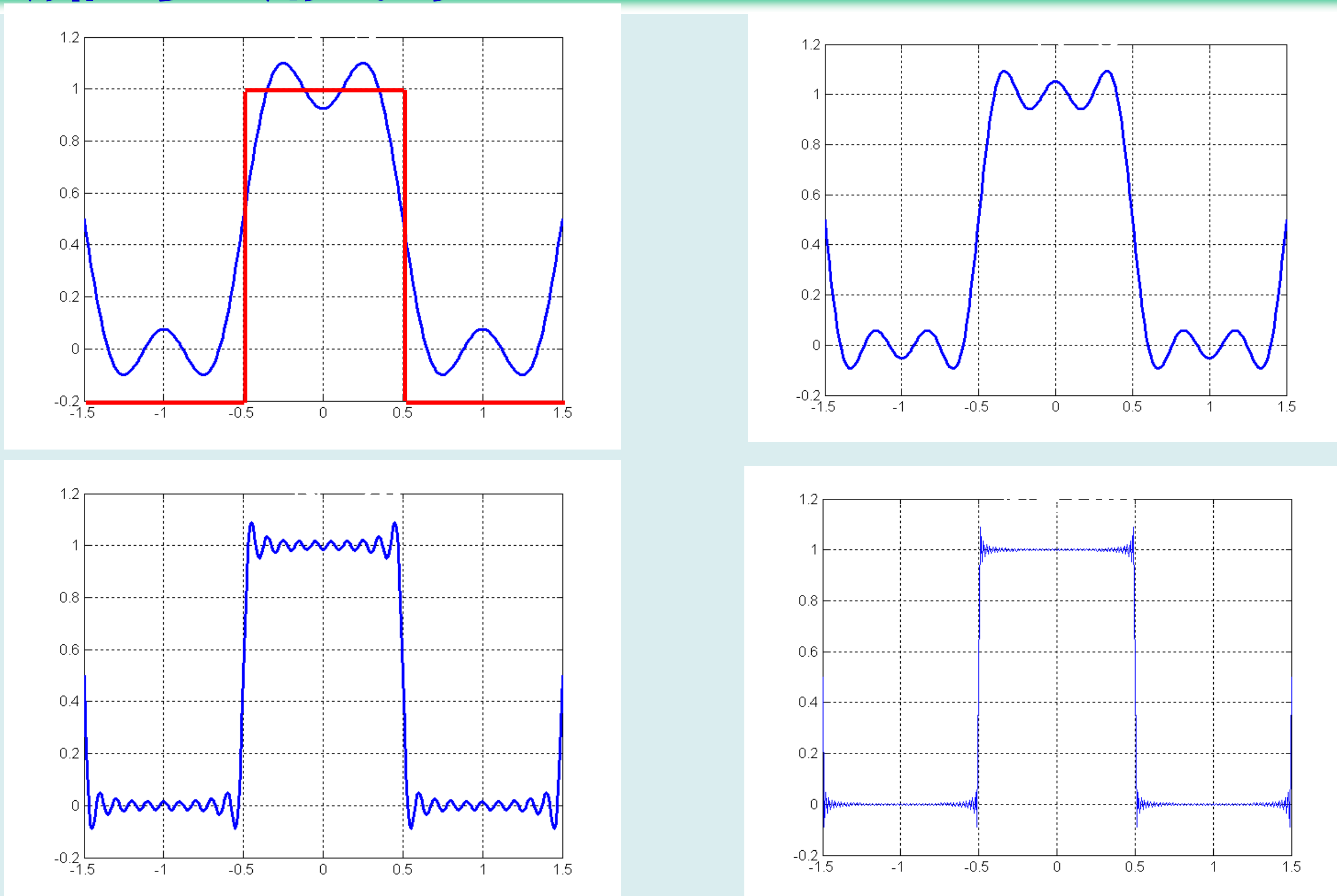
$$b_n=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\Omega t)dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin^2(n\Omega t)dt}=\frac{\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\sin n\Omega t\,dt}{T/2}=0$$



周期信号三角式的FS（Fourier Series）



周期信号三角式的FS（Fourier Series）



周期信号都可表示为成谐波关系的正弦信号的加权和。

周期信号指数形式的FS（Fourier Series）

周期为T的信号$f(t)$,可以在任意(t_0,t_0+T)区间，用虚指数信号集 $\left\{e^{jn\Omega t},\Omega=\frac{2\pi}{T},n=0,\pm1,\pm2,\ldots\right\}$

精确分解为指数形式的的FS：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

周期信号指数形式的FS（Fourier Series）

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

$$c_i=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\phi_i^*(t)dt$$

$$K_i=\int_{t_1}^{t_2}\left|\phi_i(t)\right|^2 dt$$

$$\because \int_{t_0}^{t_0+T}e^{j(n-m)\Omega t}dt=\begin{cases}T & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

周期信号指数形式的FS（Fourier Series）

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}$$

$|F_n|$—振幅（绝对大小）

φ_n—振幅的初相位

不同角频率

结论：

(1)周期信号可以分解成直流分量和许多简谐振荡分量的叠加；

(2)最低角频率为 $\Omega=2\pi/T$。 基频 基波 谐波

(3) 系数F_n是 $n\Omega$ 的函数。 频谱图

$|F_n|\sim\omega=n\Omega$的关系图——幅度频谱图

$\varphi_n\sim\omega=n\Omega$的关系图——相位频谱图

周期信号两种形式的FS之间的关系

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$a_0=c_0=d_0$$

$$a_n=c_n\cos\varphi_n=d_n\sin\theta_n$$

$$tg\varphi_n=-\frac{b_n}{a_n}$$

$$f(t)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin(n\Omega t+\theta_n)$$

$$c_n=d_n=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}$$

$$b_n=-c_n\sin\varphi_n=d_n\cos\theta_n$$

$$tg\theta_n=\frac{a_n}{b_n}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}\qquad F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

$$=F_0+\sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}+\sum_{n=-1}^{-\infty} F_n e^{jn\Omega t}=F_0+\sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}+\sum_{n=1}^{\infty} F_{-n} e^{-jn\Omega t}$$

$$=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(F_n+F_{-n})\cos n\Omega t+j(F_n-F_{-n})\sin n\Omega t]$$

$$F_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt=a_0$$

$$F_n+F_{-n}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\Omega t}dt+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{jn\Omega t}dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\frac{e^{-jn\Omega t}+e^{jn\Omega t}}{2}dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega\ tdt=a_n$$

$$F_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt=a_0$$

$$F_n+F_{-n}=a_n$$

$$j(F_n-F_{-n})=j[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt-\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{jn\Omega t}dt]$$

$$=j\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\frac{e^{-jn\Omega t}-e^{jn\Omega t}}{2}dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\Omega\, tdt=b_n$$

$$F_0=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt=a_0 \qquad \boxed{F_n+F_{-n}=a_n} \qquad \boxed{j(F_n-F_{-n})=b_n}$$

$$F_0=c_0=a_0 \qquad F_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n) \qquad F_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)$$

$$\begin{cases} |F_n|=|F_{-n}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\frac{1}{2}c_n \\ tg\varphi_n=\frac{-b_n}{a_n} \qquad tg\varphi_{-n}=\frac{b_n}{a_n} \qquad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

$$\boxed{f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)}$$

周期信号两种形式的FS之间的关系

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)\\&a_0=c_0=d_0\\&a_n=c_n\cos\varphi_n=d_n\sin\theta_n\\&tg\varphi_n=-\frac{b_n}{a_n}\end{aligned}}$$

$$\begin{cases}F_0=c_0=a_0\\ |F_n|=|F_{-n}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\dfrac{1}{2}c_n\\ tg\varphi_n=\dfrac{-b_n}{a_n}\qquad tg\varphi_{-n}=\dfrac{b_n}{a_n}\end{cases}$$

对于实信号： $F_0 = c_0 = a_0$

$$\left|F_n\right| = \left|F_{-n}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}} = \frac{c_n}{2}$$

幅度谱是偶函数

$n = 1, 2, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &= -arctg\frac{b_n}{a_n} \\ \varphi_{-n} &= arctg\frac{b_n}{a_n} \end{aligned}\right\} \varphi_n = -\varphi_{-n}$$

相位谱是奇函数

一个周期信号，既可以展开成三角形式的傅氏级数，又可以展开成指数形式的傅氏级数，二者形式虽不同，但实质是完全一致的。

指数形式FS的频谱为双边谱，三角形式的FS的频谱为单边谱。

例：求 $f(t) = 2\cos(2\pi t) - 3\sin(4\pi t)$

两种形式的傅里叶级数展开系数，并画出频谱图。

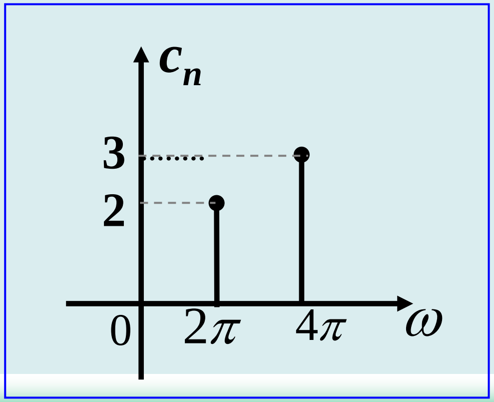
解： 周期 $T=1$，基频

(1) 三角形式的傅里叶级数

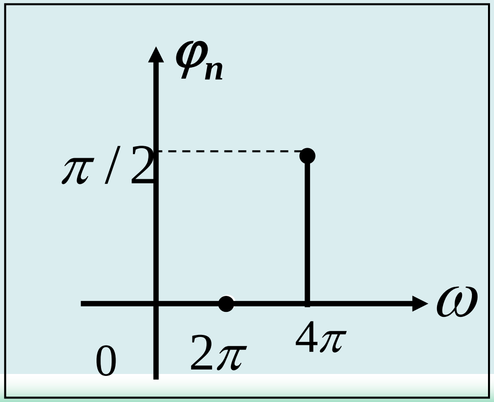
$$\boxed{f(t) = 2\cos(2\pi t) + 3\cos(4\pi t + \pi/2)}$$

$$c_0 = 0, c_1 = 2, c_2 = 3;\text{其余}\ c_n = 0$$

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2};\text{其余}\ \varphi_n = 0$$



幅度谱



相位谱

(2) 指数形式的傅里叶级数

$$c_0 = 0, c_1 = 2, c_2 = 3; \text{其余} c_n = 0$$

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}; \text{其余} \varphi_n = 0$$

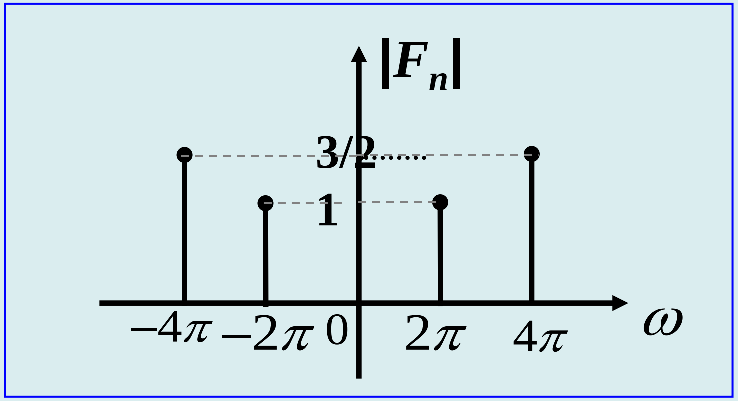
$$F_0 = 0,$$

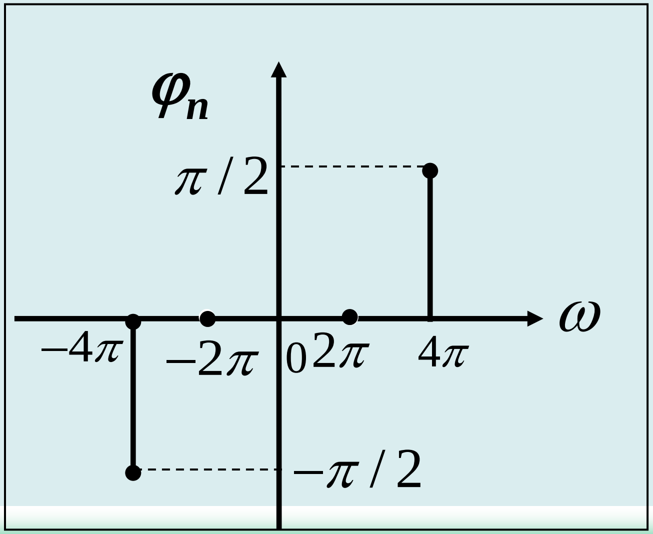
$$F_1 = 1, F_{-1} = 1$$

$$F_2 = \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}, F_{-2} = \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$|F_1| = |F_{-1}| = 1; \varphi_1 = 0, \varphi_{-1} = 0$$

$$|F_2| = |F_{-2}| = \frac{3}{2}; \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \varphi_{-2} = -\frac{\pi}{2}$$





周期信号三角式的FS（Fourier Series）

$$f(t)=1,\quad mT-\frac{\tau}{2}\le t<mT+\frac{\tau}{2},\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

分解 $f(t)$ 为：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

正交信号集：$\{1,\ \cos(n\Omega t),\ \sin(n\Omega t),\ \cdots\}$

求系数：$a_0=\dfrac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot 1\,dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}1\,dt}=\dfrac{\tau}{T}$，

记住：上面是内积，下面是能量

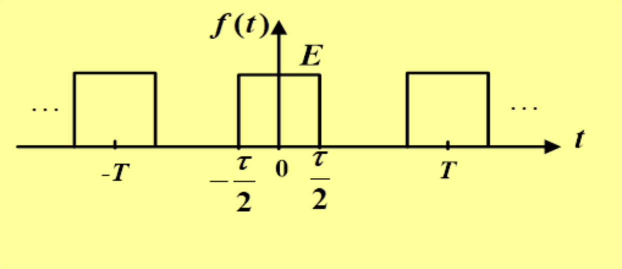
$$a_n=\frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos^2(n\Omega t)dt}=\frac{\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\cos(n\Omega t)}{\frac{T}{2}}=\frac{\frac{1}{n\Omega}\sin(n\Omega t)\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{\frac{T}{2}}$$

$\Omega=\frac{2\pi}{T}$

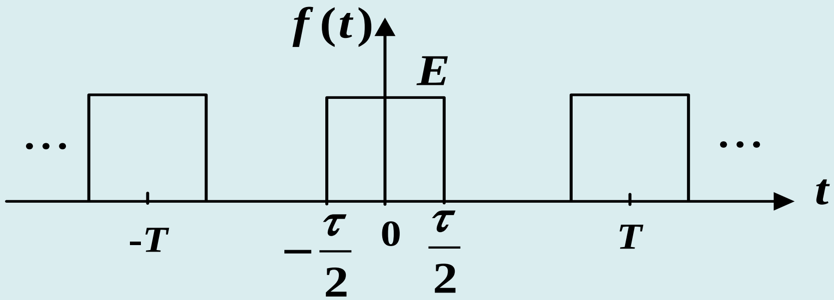
$$=\frac{2}{n\Omega T}\cdot\left[\sin\left(n\Omega\frac{\tau}{2}\right)+\sin\left(n\Omega\frac{\tau}{2}\right)\right]=\frac{2}{n\Omega T}\cdot 2\sin\left(n\Omega\frac{\tau}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\left(n\pi\cdot\frac{\tau}{T}\right)$$

$$b_n=\frac{\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\Omega t)dt}{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sin^2(n\Omega t)dt}=\frac{\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\sin n\Omega t\,dt}{T/2}=0$$



傅里叶级数展开式

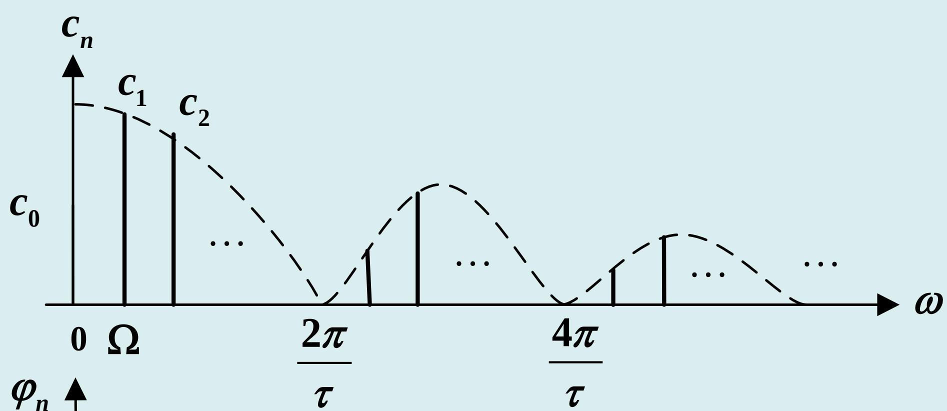


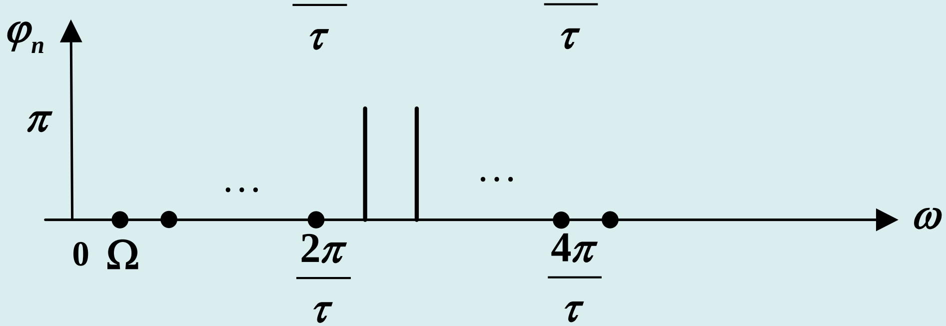
$$f(t)=\frac{E\tau}{T}+\frac{2E\tau}{T}\sum_{n=1}^{\infty}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\cos n\Omega t$$

$$a_0=\frac{E\tau}{T}$$

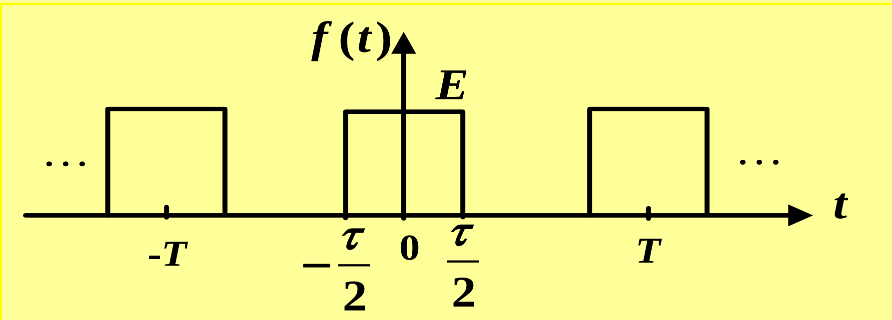
$$a_n=\frac{2E\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

$$b_n=0$$



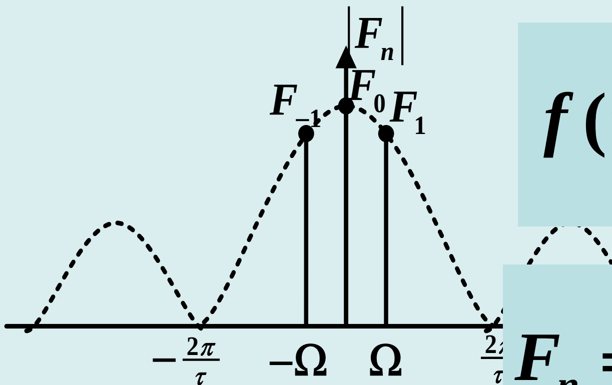


例4.2.2 求图所示周期为T的矩形脉冲信号的FS和频谱



$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{E\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)e^{jn\Omega t}$$

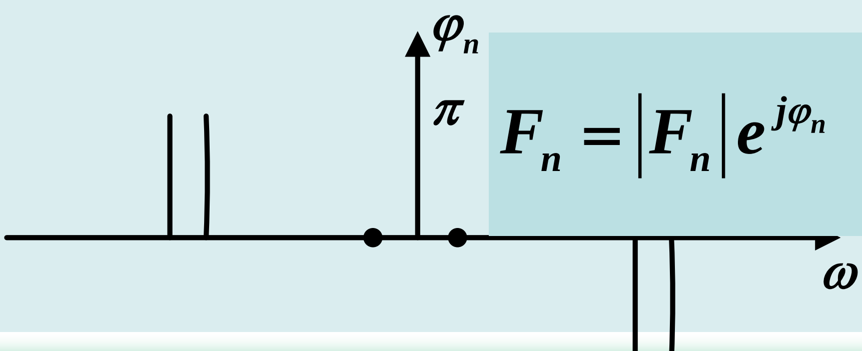
$$F_n=\frac{E\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)$$

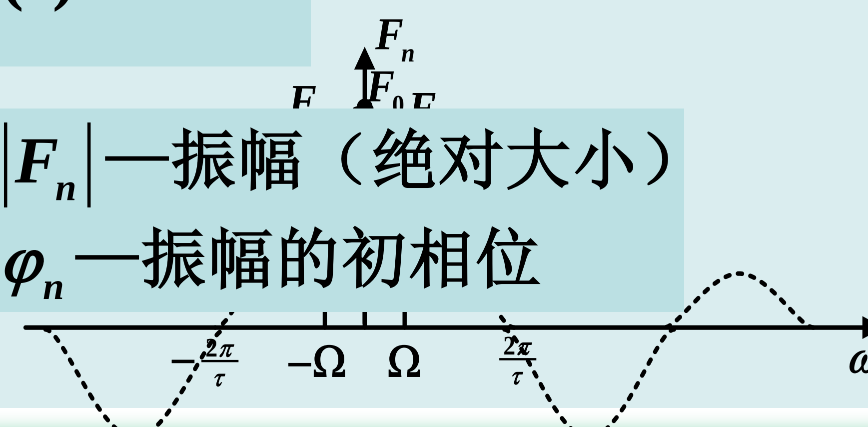


$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}$$

$$|F_n|=\frac{E\tau}{T}\left|Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\right|$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-jn\Omega t}dt$$



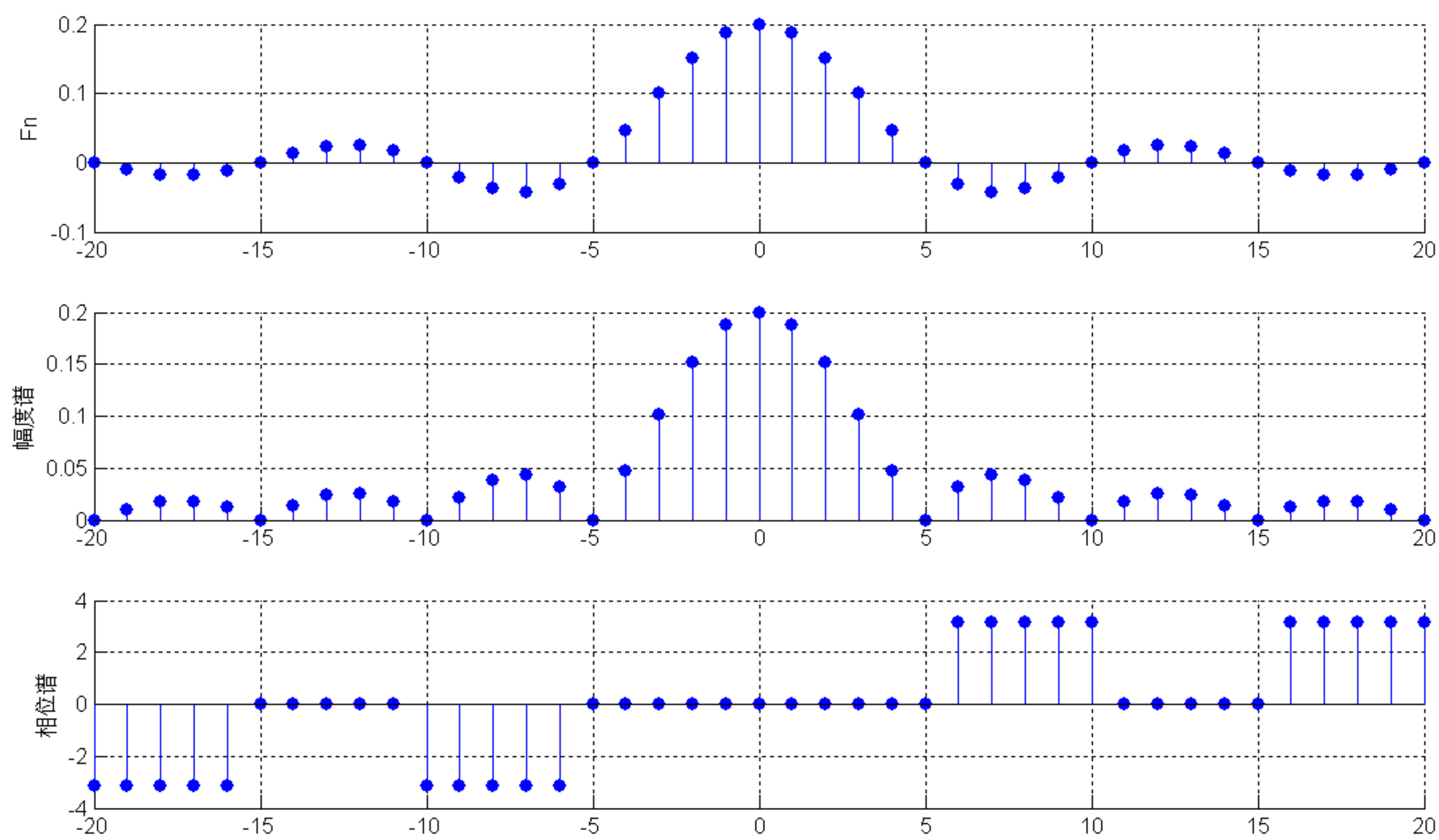


$$F_n=|F_n|e^{j\varphi_n}$$

$|F_n|$—振幅（绝对大小）

φ_n—振幅的初相位

傅里叶级数展开式



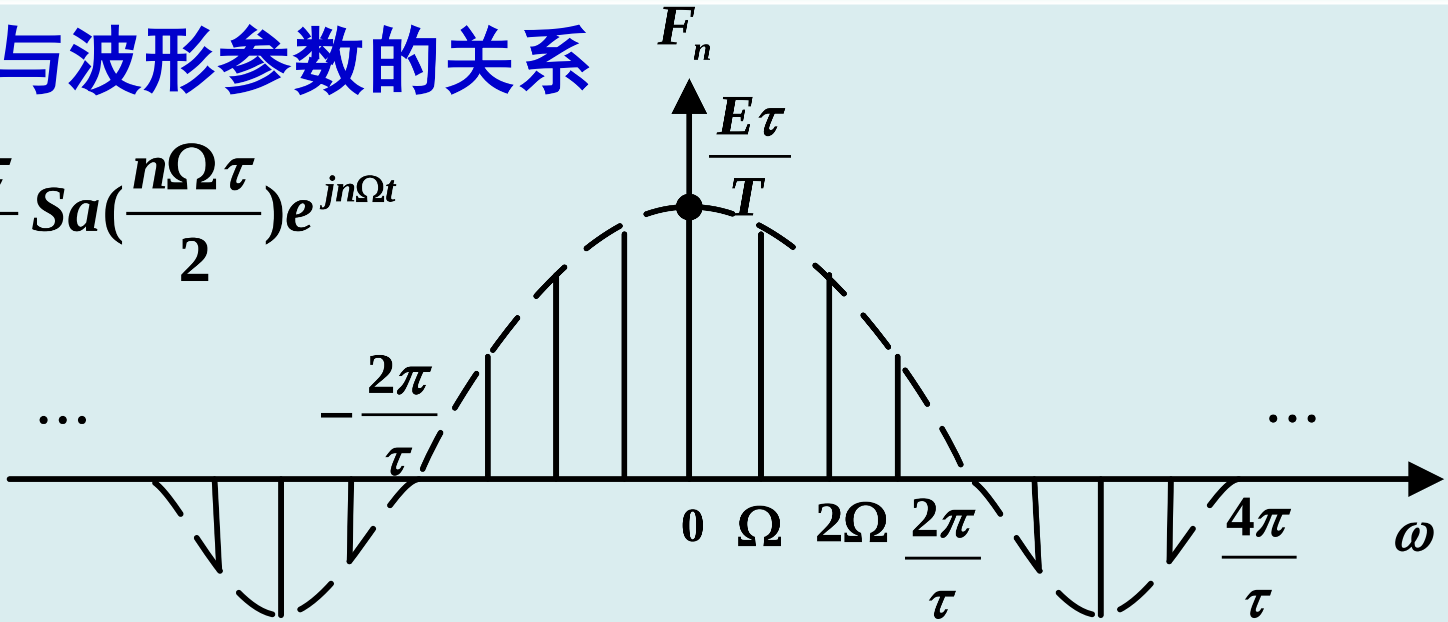
说明：图中横轴为n(未乘以Ω)

周期信号频谱的特点： ① 离散性 ② 谐波性 ③ 收敛性

2. 频谱结构与波形参数的关系

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{E\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)e^{jn\Omega t}$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}$$



(1) 当信号幅度E、宽度τ保持不变 $T\uparrow$ →各条谱线高度↓

$\Omega=\frac{2\pi}{T}\downarrow\rightarrow$ 谱线变密,第一零点$\pm\frac{2\pi}{\tau}$不变

(2) 当信号幅度E、周期T保持不变，宽度τ变化

$\tau\downarrow\rightarrow$ 各条谱线高度↓→第一零点$\pm\frac{2\pi}{\tau}\uparrow$→谱线宽度不变

周期信号的频谱分析

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\Omega t}\qquad \Omega=\frac{2\pi}{T}$$

$f_T(t)=$直流分量+许多简谐振荡分量

1. 周期信号波形对称性与谐波特性关系

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t+b_n\sin n\Omega t)$$

$$t\in[-\frac{T}{2},\quad \frac{T}{2}]\qquad \Omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\Omega t dt$$

1. 周期信号波形对称性与谐波特性关系

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\Omega t dt$$

(1) 偶信号↔ 余弦级数

$$f(-t) = f(t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$b_n = 0$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t$$

(2) 奇信号↔ 正弦级数

$$f(-t) = -f(t)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$$

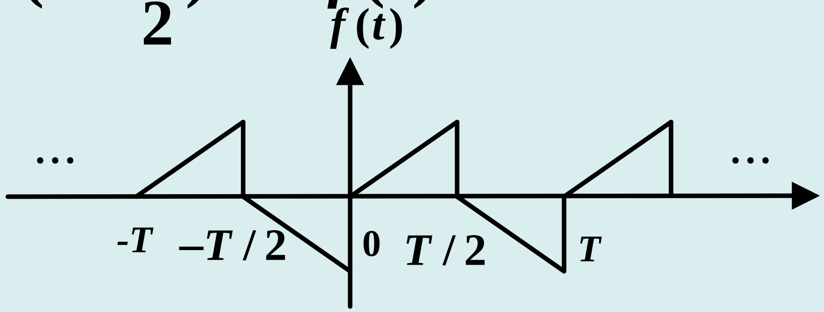
$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\Omega t dt$$

(3) 半波像对称信号↔ 奇谐信号

$$f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\Omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\Omega t dt$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t dt & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\sin n\Omega t dt & n = 1,3,5,\cdots \\ 0 & n = 2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \qquad n\text{为奇数}$$

(4) 半波对称信号↔ 偶谐信号

$$f(t \pm \frac{T}{2}) = f(t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\Omega t dt & n = 2,4,6,\cdots \\ 0 & n = 1,3,5,\cdots \end{cases}$$

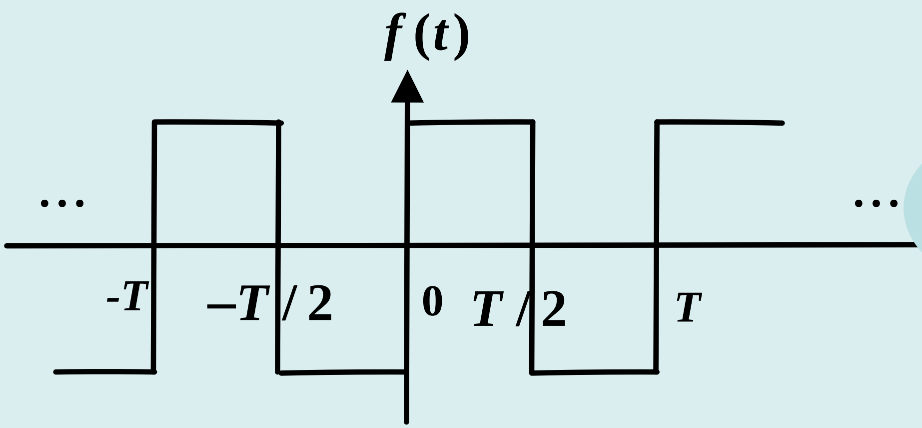
$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\Omega t dt & n = 2,4,6,\cdots \\ 0 & n = 1,3,5,\cdots \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \qquad n\text{为偶数}$$

讨论波形对称性与谐波特性关系有何意义：

① 加快求解FS系数a_0、a_n、b_n的速度

② 可迅速判断周期信号含有的谐波成分



偶信号↔ 余弦级数

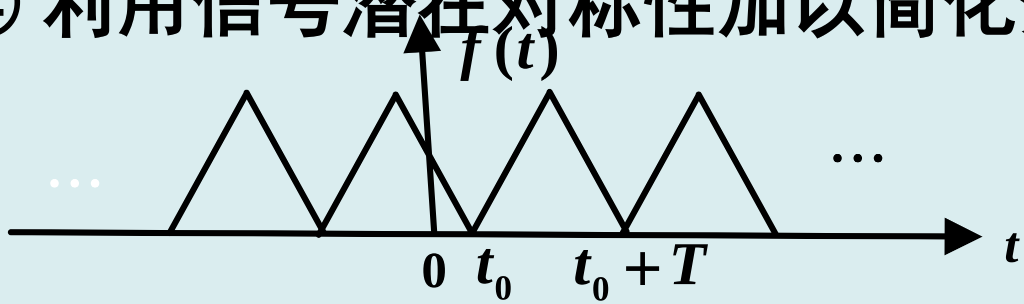
奇信号↔ 正弦级数

半波像对称信号↔ 奇谐信号

半波对称信号↔ 偶谐信号

③ 判断$f(t)$的FS的求解的正误

④ 利用信号潜在对称性加以简化分析



功率谱

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)f^*(t)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n^*e^{-jn\Omega t}]dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n^*[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\Omega t}dt]$$

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n^*F_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

$$P=|F_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|^2\quad=c_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{c_n}{\sqrt{2}})^2$$

——功率有限信号的Parseval's theorem

功率谱

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n^*F_n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

$$P=|F_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|^2\quad=c_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$

周期信号的平均功率等于直流分量及各次谐波分量功率之和。

$|F_n|^2\sim n\Omega$关系——称为周期信号的双边功率谱，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$(c_n/\sqrt{2})^2\sim n\Omega$关系——称为周期信号的单边功率谱，$n=0,1,2,\cdots$

$$\because P<\infty\qquad\Rightarrow\qquad\lim_{n\to\infty}|F_n|=0,\quad\lim_{n\to\infty}C_n=0$$

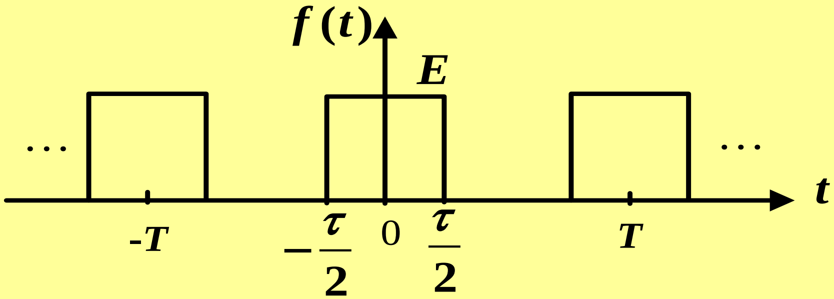
功率谱

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|f(t)\right|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|F_n\right|^2=c_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right)^2$$

功率谱的意义：

- 反映了周期信号功率按各次谐波分量的振幅大小分配给各个分量（正比关系）。
- 根据功率谱，可以确定信号**有效频带宽度**。

例4.3.1 设图所示的周期矩形脉冲信号中 E=1,T=1/4s,τ=1/20s, 求频带[−2π/τ，2π/τ]内各谐波功率之和占信号总平均功率的比例。



解：

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,dt$$

$$=4\int_{-1/40}^{1/40}1dt \quad =0.2$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}=8\pi$$

$$[0,\frac{2\pi}{\tau}]=[0,40\pi]$$

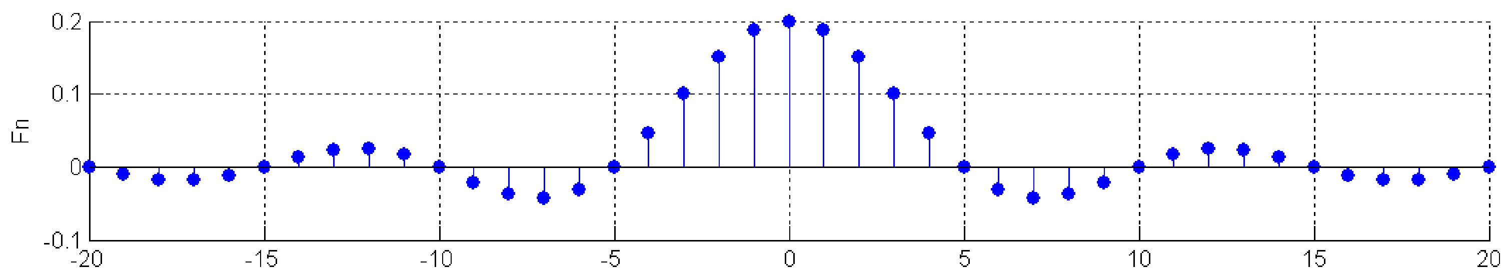
$$F_n=\frac{E\tau}{T}Sa(\frac{n\Omega\tau}{2})=\frac{1}{5}Sa(\frac{n\pi}{5})$$

$$P'=|F_0|^2+2[|F_1|^2+|F_2|^2+|F_3|^2+|F_4|^2] \quad =0.1806$$

$$\frac{P'}{P}=\frac{0.1806}{0.2}=90\%$$

$$=(\frac{1}{5})^2+2(\frac{1}{5})^2[Sa^2(\frac{\pi}{5})+Sa^2(\frac{2\pi}{5})+Sa^2(\frac{3\pi}{5})+Sa^2(\frac{4\pi}{5})]$$

功率谱



说明：图中横轴为*n*(未乘以Ω)

总结：

1.一般周期信号的FS是时域的表达式，是连续信号，具有周期性；

2.它的频谱是频域的表达式，是离散的，不具有周期性——离散性；谱线在频率轴上的位置刻度一定是基频的整数倍——谐波性；

3.实信号的振幅谱是频率$n\Omega$的偶函数，相位谱是频率的$n\Omega$奇函数；

4.时频功率守恒性——从时域求得的信号平均功率等于其频域中直流分量与各次谐波分量的功率之和；