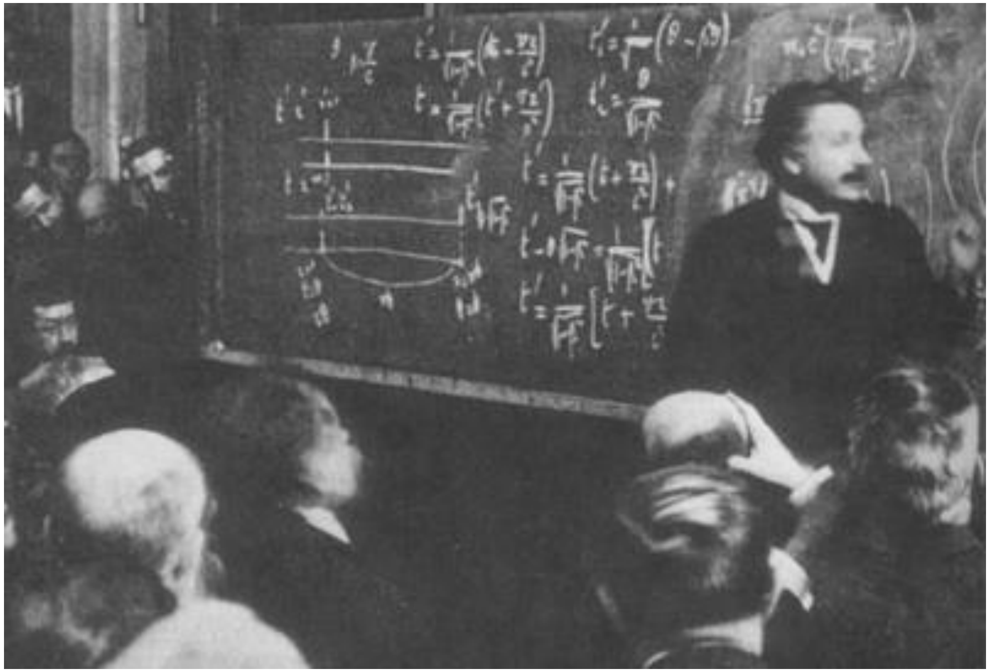
第四篇 近代物理学

(I)

第10章 狭义相对论基础



爱因斯坦（A.Einstein,1879-1955）是20世纪最伟大的物理学家之一，生于德国，1900年毕业于瑞士苏黎世联邦工业大学. 爱因斯坦1905年和1915年分别创立了狭义相对论和广义相对论。1905年提出光量子假说，获1921年诺贝尔物理学奖。

◆ 狭义相对论建立的历史背景

十九世纪末期，经典物理学各个分支的发展都已日臻完善并不断取得新的成就。它们紧紧地结合在一块儿，构筑起了一座华丽而雄伟的殿堂。

力　学	建立分析力学、发现海王星
热　学	建立经典统计物理学
电磁学	建立经典电动力学
光　学	实现了与电磁学的统一

“……似乎可以说，物理学宏大的基本原则已经牢固确立……一位著名的物理学家说，未来物理科学的真理应当从六位小数中寻找”

——阿尔伯特·迈克耳孙(1894年)

“动力学理论断言，热和光都是运动的方式。但现在这一理论的优美性和明晰性却被两朵乌云遮蔽，显得黯然失色了……”

The beauty and clearness of the dynamical theory, which asserts heat and light to be modes of motion, is at present obscured by two clouds.’

——开尔文勋爵

《在热和光动力理论上空的19世纪乌云》

(1900年)

两朵乌云

迈克耳逊-莫雷实验的零结果 ⟶ **相对论**

黑体热辐射实验的“紫外灾难” ⟶ **量子力学**

§ 10.1 伽利略相对性原理和伽利略变换

主要内容：

1. 力学相对性原理
2. 伽利略变换
3. 经典力学的绝对时空观
4. 经典力学的局限性

本节要求：

理解力学相对性原理、伽俐略变换和经典时空观

10.1.1 力学相对性原理

惯性系: 凡是牛顿运动定律适用的参考系。相对已知惯性系作匀速直线运动的参考系也都是惯性系.

力学相对性原理 (经典力学的相对性原理)

力学规律对于一切惯性系都是等价的.

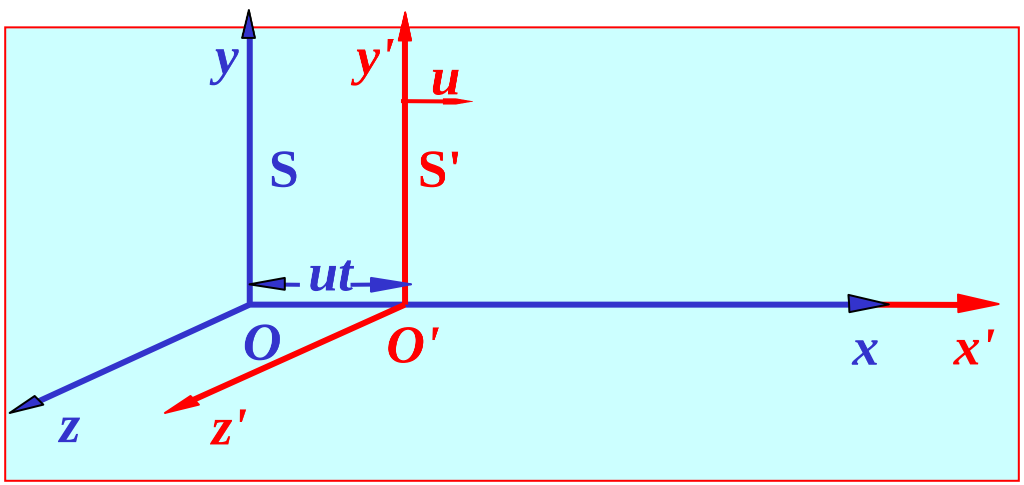
物质的运动是绝对的,但对运动的的描述是相对的,观测者所选参考系不同时对运动的描述也不同.

——伽利略变换

10.1.2 伽利略变换

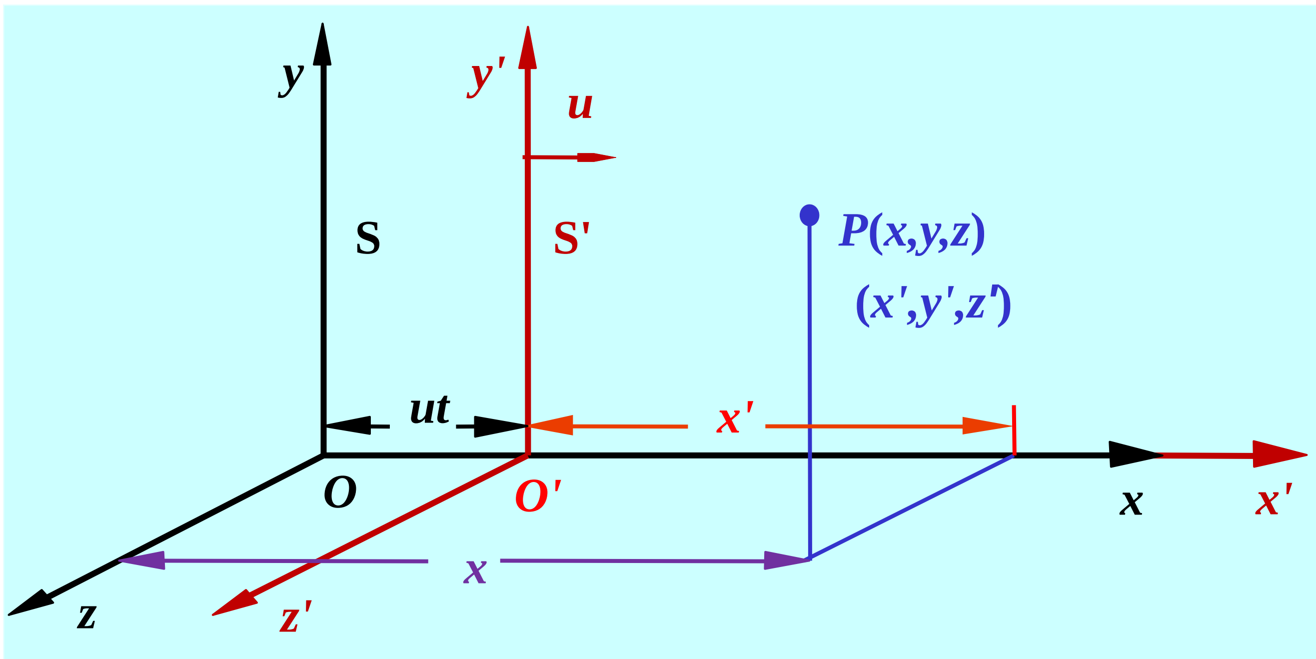
设有两个惯性系S系和S′系，各对应轴相互平行， S′系相对于S系以速度u沿x轴方向作匀速直线运动.

当S系和S′系的坐标原点O与O'重合时，两个惯性系中的时钟开始计时 ($t = t' = 0$).



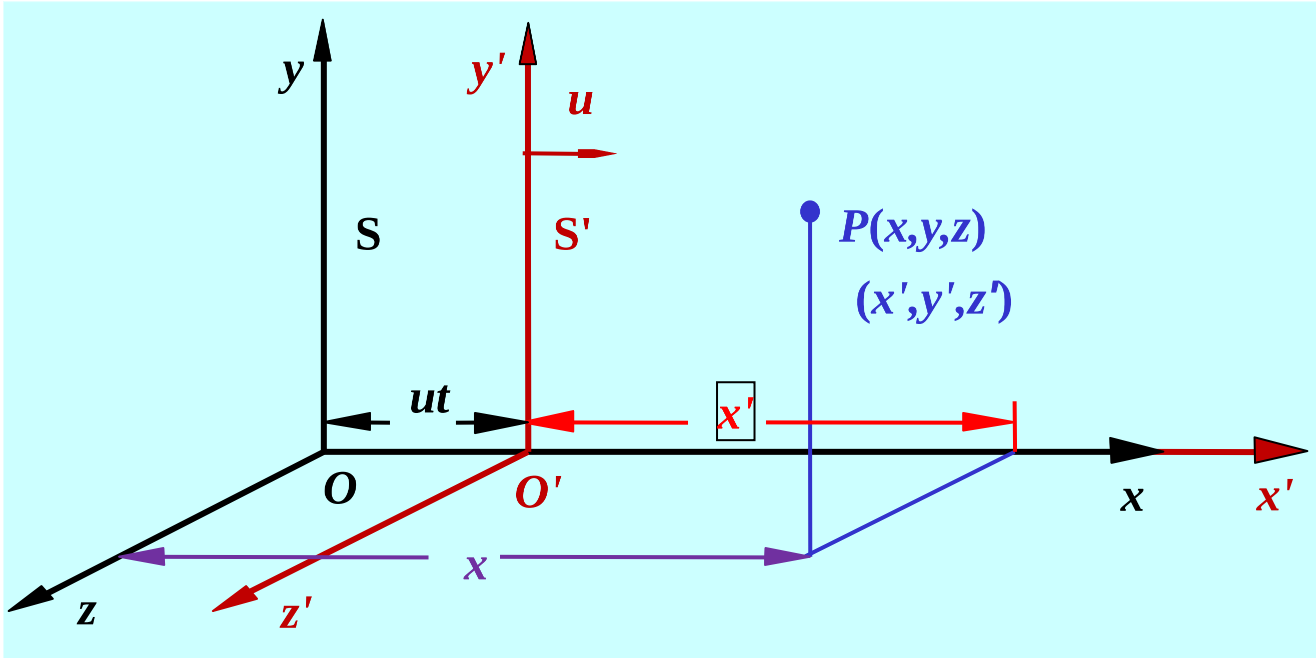
事件: 某一时刻发生在空间某一点上的一个事例.

如果某时刻在空间某一点P发生了一个事件，S系和S′系的观测者分别观测这一事件.



S 系中的时空坐标描述（x,y,z,t）.

S′系中的时空坐标描述（x',y',z',t'）.



该事件在两个惯性系中时空坐标间的变换关系为（伽利略坐标变换）

从S系到S′系：

（正变换）

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

绝对时间

从S ′系到S系：

（逆变换）

$$\begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

对伽利略时空坐标变换式求导可得伽利略速度变换式

$$\begin{cases} \upsilon'_x = \upsilon_x - u \\ \upsilon_z' = \upsilon_z \\ \upsilon_y' = \upsilon_y \end{cases}$$

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u}$$

矢量式

对伽利略速度变换式求导可得伽利略加速度变换式

$$\begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

矢量式

牛顿定律具有伽利略变换不变性

- 力与参考系无关 $\vec{F}' = \vec{F}$ (S系) (S ′系)
- 质量与运动无关 $m' = m$ $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}' = m'\vec{a}'$

10.1.3 经典力学的绝对时空观

从S系到S′系：

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

1. 时间间隔 (时间间隔与惯性系的选择无关)

若有两事件先后发生，在两惯性系中的观测者测得的时间间隔相同 $\Delta t = \Delta t'$

2. 空间间隔 (空间间隔与惯性系的选择无关)

如果在空间有任意两点，在S系和S′系中的观测者测得的空间间隔相同 $|\Delta \vec{r}| = |\Delta \vec{r}\,'|$

3. 经典力学的时空观 **绝对时空观**

时间、长度、质量是绝对的,同时性是绝对的；

坐标、速度等是相对的.

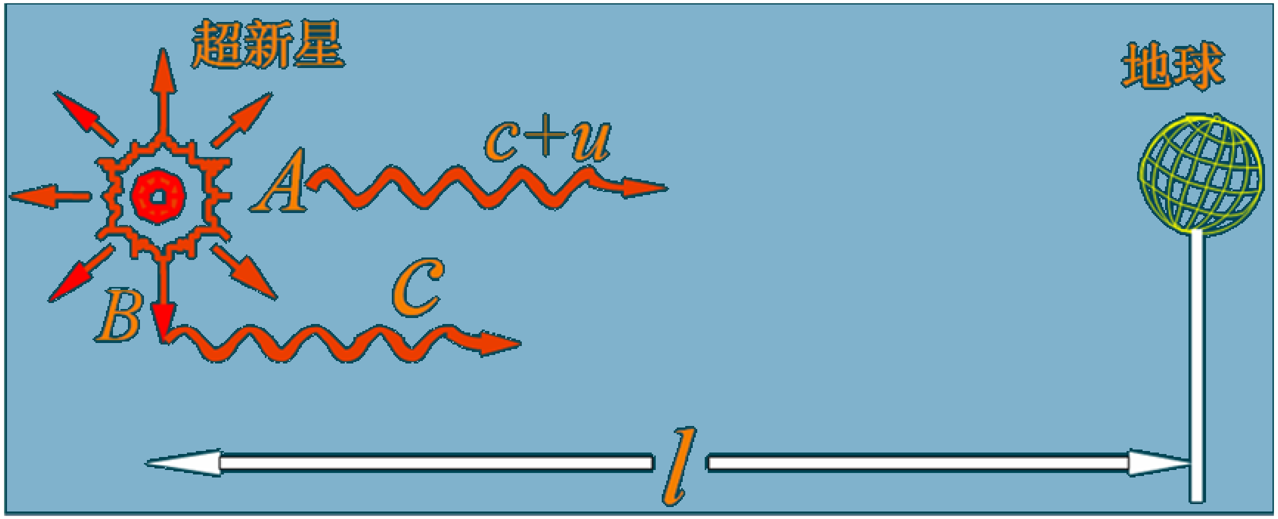
蟹状星云(中心为脉冲星)

超新星爆发和光速

九百多年前，有一次非常著名的超新星爆发事件，当时北宋王朝的天文学家做了详细的记载。据史书称：爆发出现在宋仁宗至和元年五月(即1054年)。在开始的二十三天中这颗超新星非常之亮，白天也能在天空上看得到它，随后逐渐变暗，直到嘉祐元年(公元1056年)三月，才不能为肉眼看见，前后历时二十二个月。这次爆发的残骸就形成了著名的金牛座中的星云，叫做蟹状星云。中心为中子星。

10.1.4 经典力学的局限性

1. 超新星爆发疑问：据史书称，公元1054年5月，出现超新星爆发，前后历时22个月 .



由A点发出的光到达地球的时间是 $$t_A = \frac{l}{c+u}$$

而点B发出的光到达地球的时间是 $$t_B = \frac{l}{c}$$

蟹状星云与地球距离 $l \approx 5000$ **光年**

爆发中抛射物的速度 $u = 1500 \mathrm{km \cdot s^{-1}}$

$$t_B - t_A \approx 25$$

岁余稍没

光速不服从经典力学的速度变换定理

2. 投球疑难

c

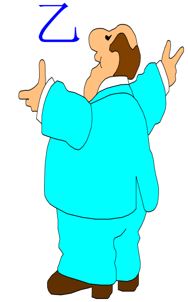
击前瞬间

光传到乙的时间： $\Delta t = l/c$

$c + \upsilon$

击后瞬间

$\Delta t' = l/(c+\upsilon)$



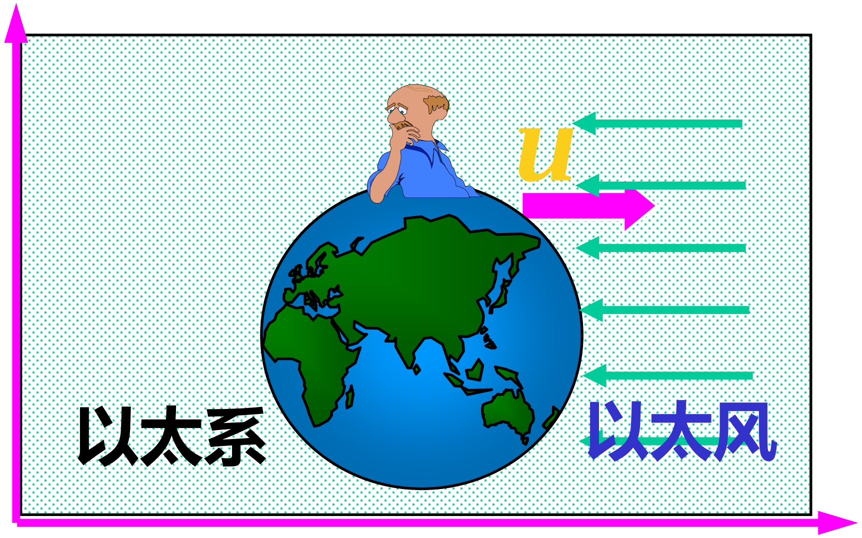
$\Delta t' < \Delta t$ **先出球，后击球 ---- 先后顺序颠倒**

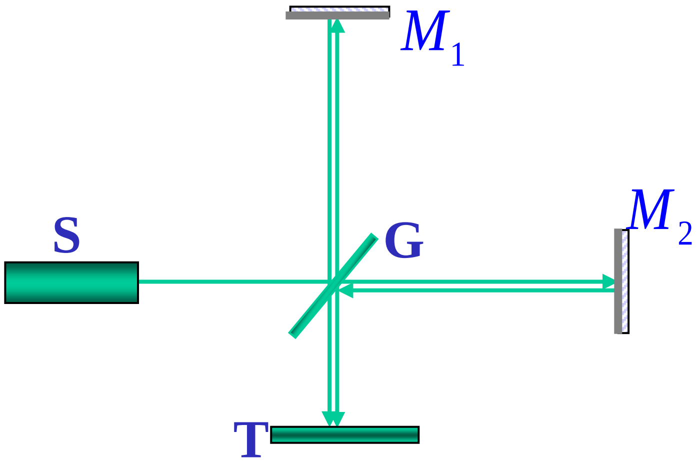
光速不服从经典力学的速度变换定理

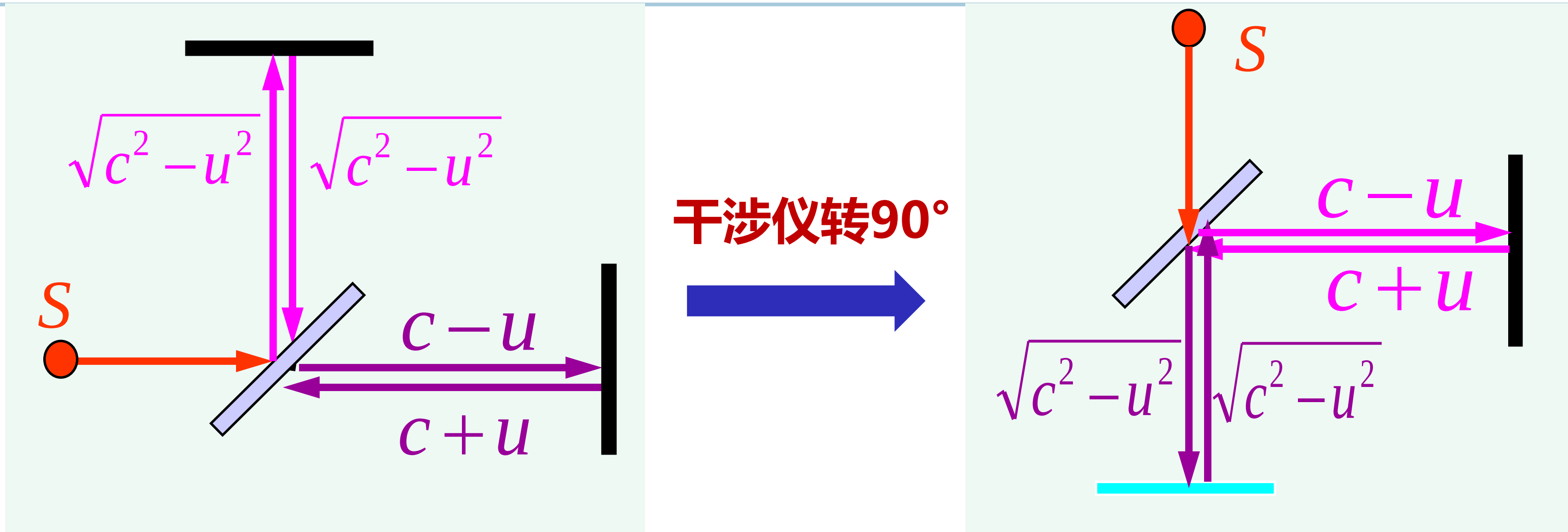
3 “以太”的观点

◆ **经典理论：光在介质“以太”中传播。“以太”为静止的参考系，相对于静止的“以太”，光的传播速度各向同性，恒为*c***

◆ **迈克尔逊—莫雷实验** ------测地球相对“以太”的速度u







由于光程差发生变化，应该能观察到干涉条纹的的移动数目：

$$\boxed{\Delta N = \frac{2lu^2}{\lambda c^2}}$$

推导

- 1881年实验，预期 $\Delta N \sim 0.04$
- 1887年改进实验，预期 $\Delta N \sim 0.4$

$\Delta N = 0$ “零结果”

实验装置

不论地球运动的方向同光的射向一致或相反，光速都相同

“以太”这个绝对参考系是不存在的

§ 10.2 狭义相对论的基本假设与洛伦兹变换

主要内容：

1. 狭义相对论的两个基本假设

2. 洛伦兹变换

本节要求：

1. 理解爱因斯坦狭义相对论的两个基本假设

2. 理解洛仑兹坐标变换。

10.2.1 狭义相对论的两个基本假设

1. 相对性原理

物理定律在所有惯性系中都具有相同的形式.

2. 光速不变原理

在所有惯性系中，光在真空中的传播速率具有相同的值c .

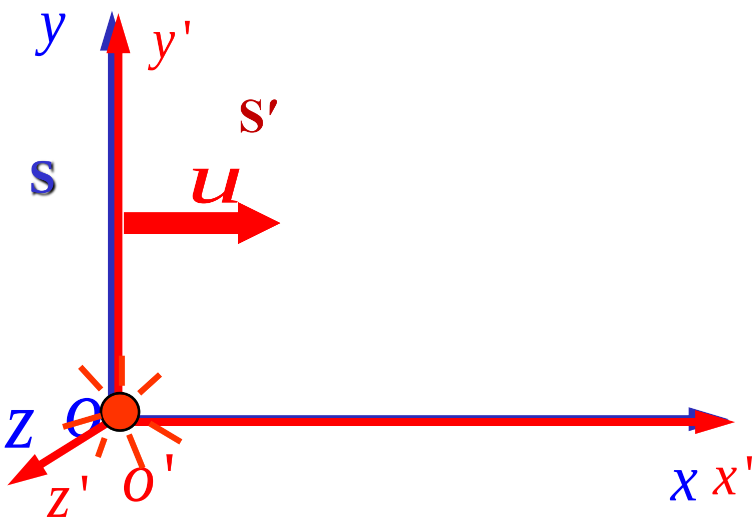
4.2.2 洛伦兹变换

$t = t' = 0$**时S 和S′系重合， 并在O点发一闪光**

在S、S′中光的波前都为一球面，球面方程分别为

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

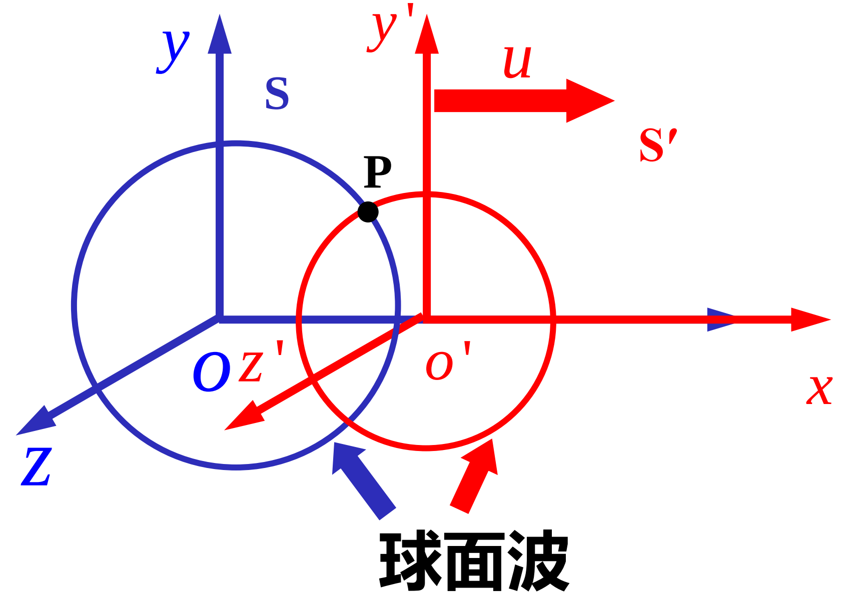


$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

同时 $y=y'$ $z=z'$

则 $x^2-c^2t^2\equiv x'^2-c^2t'^2$ **(1)**



变换关系应满足两个条件

（1）时空变换必须是线性关系（相对性原理，时空坐标一一对应）

（2）低速时变换必须化为伽利略变换

即: $x'=k(x-ut)$ **(2)** $x=k'(x'+ut')$ **(3)**

联立(1)(2)(3)得 $$k=k'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

洛仑兹坐标变换

从S系变换到S′系 (正变换)

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

从S′系变换到S系 (逆变换)

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \dfrac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

➢ 说明

(1) 洛仑兹变换中x'是 x 和 t 的函数，t'是 x 和 t 的函数，而且都与 S 系和 S′ 系的相对运动速度 u 有关,揭示出时间、空间、物质运动之间的关系.

(2) 否定了 $t=t'$的绝对时间概念。在相对论中，**时间和空间的测量互相不能分离.**

(3) 时间和空间坐标都是实数，要求 $u<c$，即**宇宙中任何物体的运动速度不可能等于或超过真空中的光速.**

4) 当 $u \ll c$ 时，洛仑兹变换转化为伽里略变换，相对论力学规律转化为经典力学规律.

洛仑兹速度变换

（正变换）

从S系变换到S'系

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - u}{1 - u\upsilon_x / c^2}$$

$$\upsilon'_y = \frac{\upsilon_y \sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 - u\upsilon_x / c^2}$$

$$\upsilon'_z = \frac{\upsilon_z \sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 - u\upsilon_x / c^2}$$

（逆变换）

从S'系变换到S系

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + u}{1 + u\upsilon'_x / c^2}$$

$$\upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 + u\upsilon_x / c^2}$$

$$\upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 + u\upsilon'_x / c^2}$$

➢ 说明

(1) 当u和v 远小于光速时，相对论速度变换定理又回到伽利略变换，因此伽利略变换是相对论速度变换的低速近似.

(2) 相对论速度变换定理与光速不变原理在逻辑上必然自洽

$$v_x = \frac{c+u}{1+uc/c^2} = \frac{c+u}{c(c+u)}c^2 = c$$

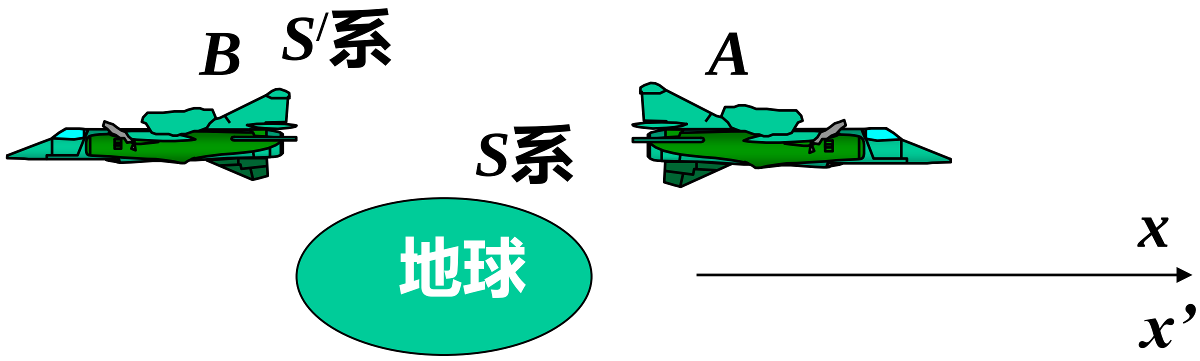
(3) 由相对论速度变换公式，不可能得出大于光速的物体运动速度. 即使在极端情况下，令 $v_x' = c$ ， $u = c$

$$v_x = \frac{c+c}{1+c\cdot c/c^2} = c$$

真空中的光速c是物体运动速度的极限.

例 设飞船A和飞船B相背运动，在地面上测得A和B的速度沿x轴方向，各为v_A= 0.9c，v_B= - 0.8c，试求它们相对运动的速度。

解



- 以地球为静止参考系S系，飞船B为运动参考系S´系
- S´系沿x轴及x´轴正向以速度 u = - 0.8c 相对于S系运动，所以在B上观测到飞船A的速度为

$$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}\upsilon_x} = \frac{0.9c - (-0.8c)}{1 - \dfrac{(-0.8c)}{c^2}\times 0.9\mathrm{c}} = 0.9884c$$

§ 10.3 狭义相对论的时空观

主要内容：

1. 同时性的相对性

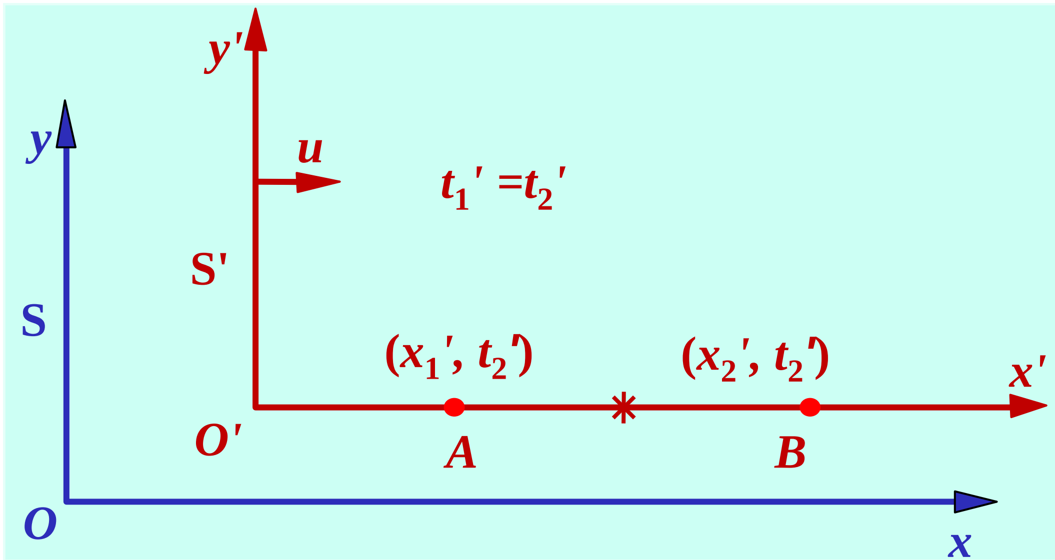
2. 长度的相对性

3. 时间的相对性

本节要求：

理解狭义相对论中同时性的相对性、长度收缩和时间膨胀概念。

10.3.1 同时性的相对性



S'系中A、B中点发出一个光信号，在S'系中A、B将同时接收到光信号， 这两个事件的时空坐标分别为：

S'系 (x_1',t_1'), (x_2',t_2')，$t_1'=t_2'$, 即两事件同时不同地.

S系中两事件时空坐标为 (x_1,t_1), (x_2,t_2)，两事件同时吗?

利用洛仑兹变换可得

$$t_1=\frac{t_1'+\frac{u}{c^2}x_1'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\ ,\qquad t_2=\frac{t_2'+\frac{u}{c^2}x_2'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

于是S系中时间间隔为

$$t_2-t_1=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left[(t_2'-t_1')+\frac{u}{c^2}(x_2'-x_1')\right]$$

$$t_2'-t_1'=0 \quad\Rightarrow\quad t_2-t_1=\frac{\frac{u}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\neq 0$$

> 结论

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

1. 若两个事件在某一惯性系中为同时异地事件，即

$$t_2' - t_1' = 0 \qquad x_2' - x_1' \neq 0$$

则在其他惯性系中必定不是同时发生的，这就是**同时性的相对性.**

2. 在一个惯性系中同时同地发生的事件，即

$$t_2' - t_1' = 0 \qquad x_2' - x_1' = 0$$

在其它惯性系也必同时同地发生，因此同时性的相对性只是对两个同时事件发生在不同地点而言，当两个同时事件发生于同一地点时，**同时性是绝对的.**

问题：有因果律联系的两事件时序是否会颠倒？

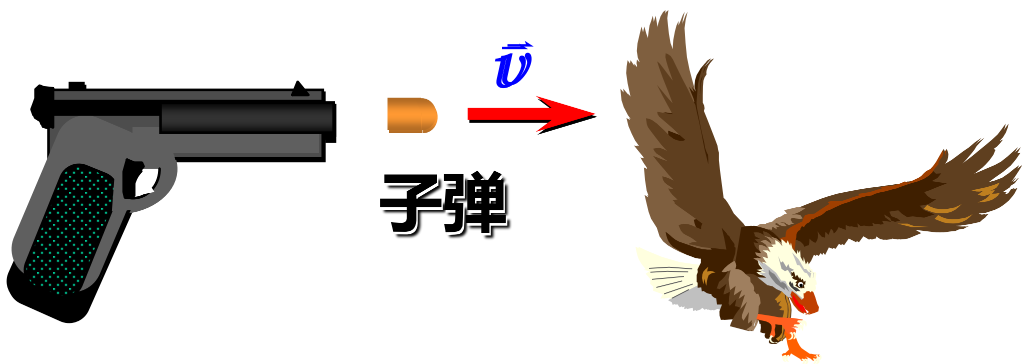
$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

在S中： 先开枪，后鸟死

在S'中：是否能发生先鸟死，后开枪？

开枪 事件1

(x_1, t_1) 前



鸟死 事件2

(x_2, t_2) 后

$$\because \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\Delta t(1-\frac{u\upsilon}{c^2})}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$u < c$

$\upsilon < c$

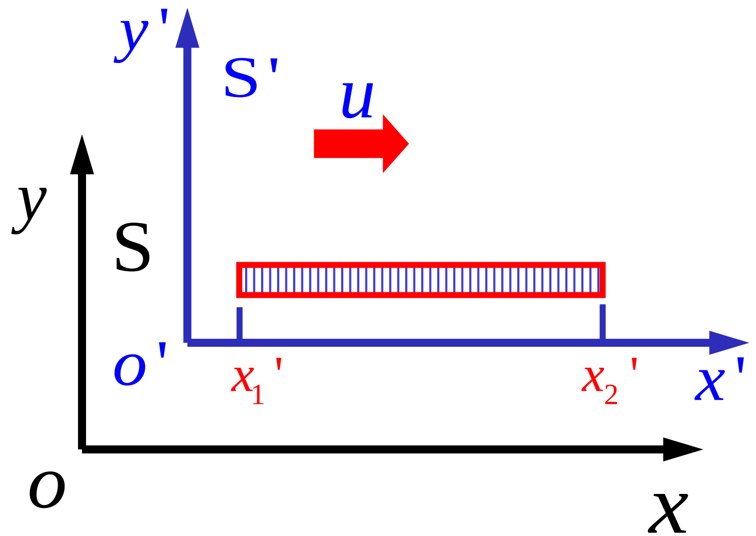
$\therefore \Delta t'$ 与 Δt 同号 —— 事件的因果顺序不变

10.3.2 长度的相对性

一刚性直杆沿 x' 轴静止放置于 S′ 中, 端点坐标为 x'_1, x'_2

S′ 系测量杆长

$L_0 = x_2' - x_1'$ **(固有长度,静止长度)**



S系同时测得首尾坐标为 x_1 和 x_2

即 $t_1 = t_2 = t$

$L = x_2 - x_1$ **(运动长度)**

$$L_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

即 $\boxed{L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2}}$ **(运动长度缩短)**

➢ 总结

$$L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

(1) 在相对物体为静止的惯性系测得物体的长度最长

——固有长度

(2)相对论长度收缩只发生在运动方向上，在与运动方向垂直的方向上不发生长度收缩.

(3)相对论长度收缩效应是时空的属性，与物体的具体组成和结构及物质间的相互作用无关.

(4)运动物体的长度收缩是相对的.

(5)对运动物体长度的测量必须同时测量其两端点的坐标。相对论长度收缩效应可以“观测”或者“测量”，却不能“看到”.

宇宙飞船相对于地面以速度v作匀速直线飞行，某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光讯号，经过t（飞船上的钟）时间后，被尾部的接收器收到，则由此可知飞船的固有长度为

固有长度:在相对物体为**静止**的惯性系测得物体的长度

$$L_0=ct$$

思考题

设有一接近于光速相对于地球飞行的宇宙火箭，在地球上的观测者将观测到火箭上物体的长度缩短。有人进一步推论说，在火箭上的观测者将观测到相对于地球静止的物体的长度伸长。他的根据是这样的，在地球上的 S系中，物体两端坐标是 x_1，x_2，在宇宙火箭上的 S′系中同一物体两端的坐标是x_1'，x_2'.

由洛仑兹变换

$$x_1' = \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad x_2' = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

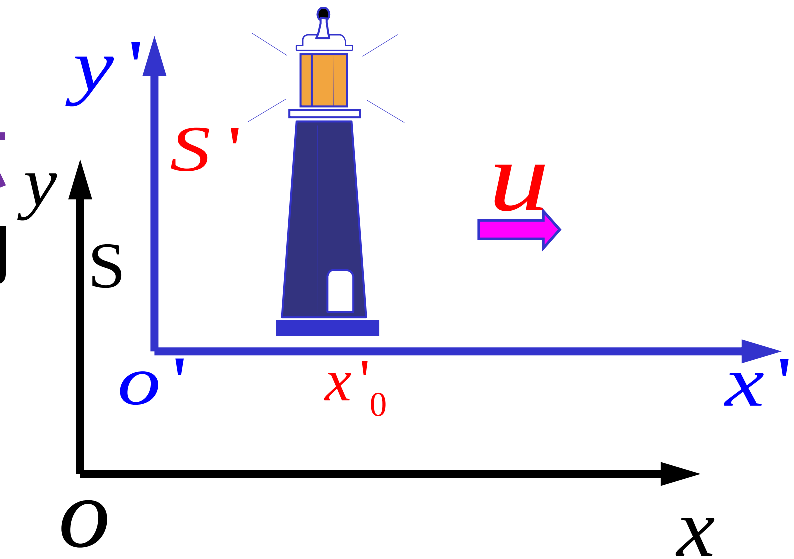
$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow x_2' - x_1' > x_2 - x_1$$

- **这个推论对不对? 为什么?**

长度测量必须同时测量两端坐标，要注意同时的相对性

10.3.3 时间的相对性

固有时间 τ_0：惯性系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔。



S′系 $x'_1 = x'_2$ $\tau_0 = t'_2 - t'_1$

在S系观测到的时间间隔 $\tau = t_2 - t_1 = ?$

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{u}{c^2}x'_2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{u}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

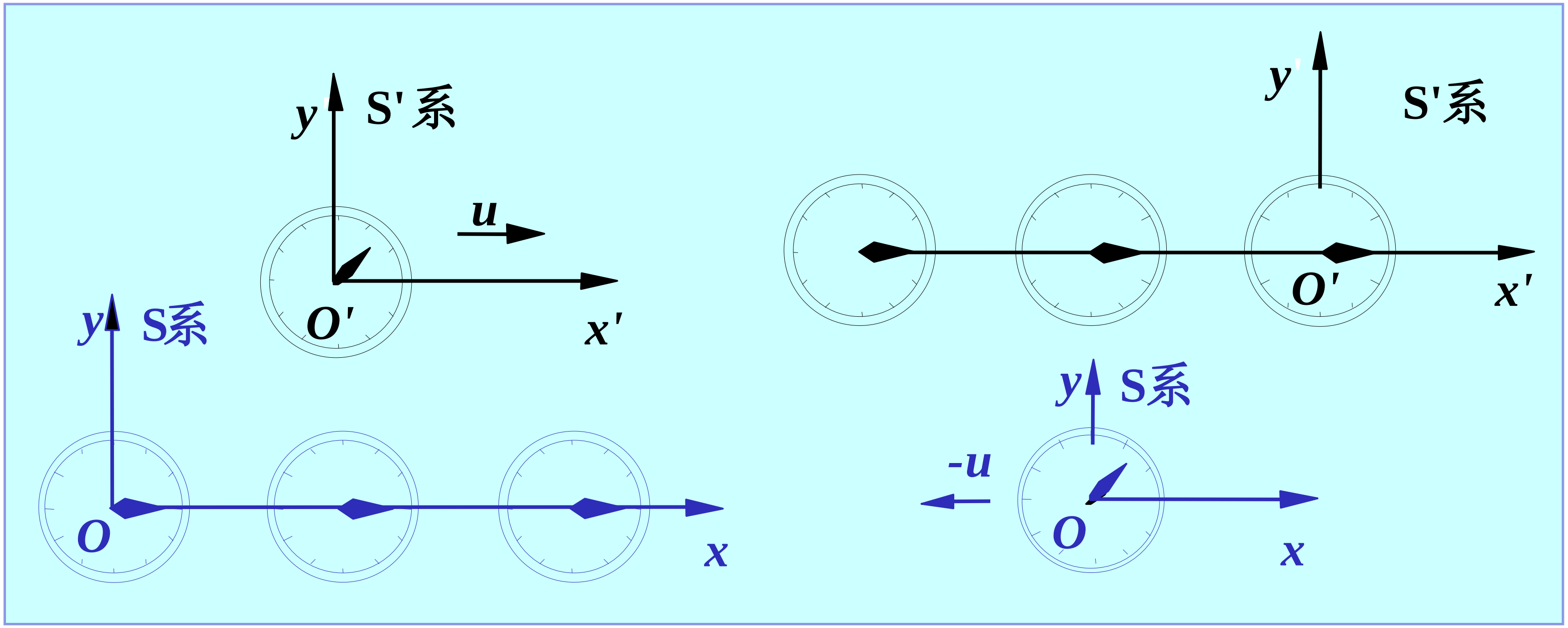
时间间隔 $$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ **（时间膨胀）**

➢ 说明

(1)在相对发生事件地点运动的参考系中测得的时间间隔（运动时间），比相对发生事件地点静止的参考系中测得的时间间隔（固有时间）要长些，即固有时间最短。

要切实掌握“固有时间”的定义和概念。当发生的两个事件在一个参考系中是同地的，则在该参考系中测得的这两个事件间的时间间隔τ_0——固有时间。

(2) 时间是相对的，到底谁的钟慢，要看对哪个惯性系而言。不同惯性系的共同结论是：对本惯性系作相对运动的时钟变慢.



(a) S系的观察者观测，S'系的钟较自己的钟走得慢

(b) S′的观察者观测，S系的钟较自己的钟走得慢

(3) 运动的时钟变慢是光速不变原理的直接推论，是时空的属性，不涉及时钟的任何机械原因和原子内部的任何过程.

(4) 运动时钟变慢，不仅限于任何计时装置变慢，也是指一切发生在运动物体上的过程相对静止的观测者来说都变慢了，运动参考系中的一切物理、化学过程，乃至观测者的生命节奏都变慢了.

(5) 运动时钟变慢效应，已被许多实验所证实.

例　μ介子是一种不稳定的粒子。静止参考系中μ介子的平均寿命为$\tau_0 = 2.2\times10^{-6}$s。在高能物理实验中，加速器产生的μ介子以速率$u = 0.9966c$相对实验室运动，试求μ介子所通过的平均距离为多少?

解：　按经典力学

$$L = u\tau_0 = 0.9966\times3\times10^8\times2.2\times10^{-6} = 660(m)$$

按相对论力学

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2.2\times10^{-6}}{\sqrt{1-0.9966^2}} = 26.9\times10^{-6}(s)$$

$$d = u\tau \ = 0.9966\times3\times10^8\times26.9\times10^{-6} = 8043m$$

📖 解题思路

学习狭义相对论，正确理解和掌握相对论的时空观是最重要的，要理解同时性的相对性，时空量度的相对性，处理实际问题时要注意：

明确两个参考系S系和S′系．一般情况下选地面为S系,运动物体为S′系.

明确固有长度，固有时间的概念．相对物体静止的惯性系测量的长度为固有长度，惯性系中同一地点测量的两个事件的时间间隔为固有时间.

洛仑兹变换式是求解有关相对论时空观问题的依据.处理实际问题时要根据题设条件与待求量设定不同事件在不同惯性系中的时空坐标，选用洛仑兹变换中正变换或逆变换的公式，还要注意同时性的相对性.

(4)注意时空量度相对性的两个公式的适用范围.

- 如果待测长度相对于一惯性系静止，计算相对其运动惯性系中的长度

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

- 如果已知一个惯性系中同一地点发生的两个事件的时间间隔，计算这两个事件在另一惯性系中的时间间隔

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

- 如果不是这两种情况，要用洛仑兹变换求解.

10.3.4 两种时空观的比较

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

（1） 经典力学时空观：

- **时空彼此独立；**
- **同时性、绝对时间、绝对空间。**

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

（2）相对论时空观：

- **时间与空间相互影响、不可分割；**
- **同时的相对性、长度收缩、时间膨胀。**

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \qquad \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

§ 10.4 狭义相对论动力学

主要内容:

1. 相对论质量
2. 相对论动力学基本方程
3. 相对论能量
4. 相对论能量与动量的关系

本节要求:

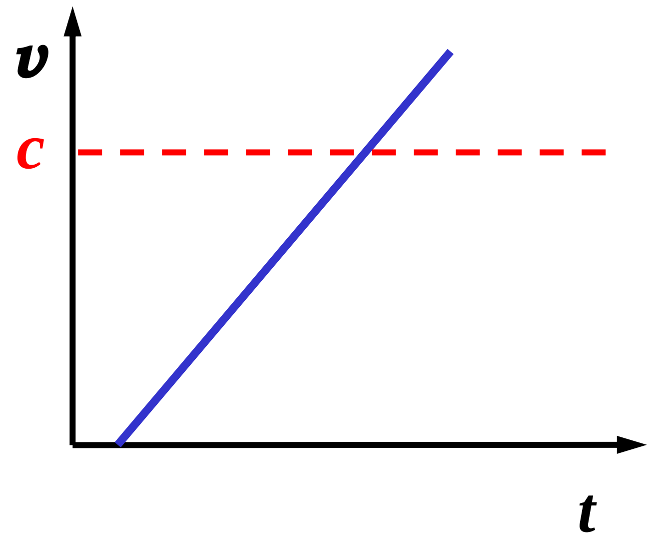
理解相对论动力学基本方程、质量和速度的关系、能量和质量的关系以及能量和动量的关系

10.4.1 相对论质量

经典力学中：物体质量恒定.

恒力下：$v \propto t$ 没有上限.

实验证明,电子在恒力作用下被加速到接近光速时,速度不再线性增加,且不能超越光速.

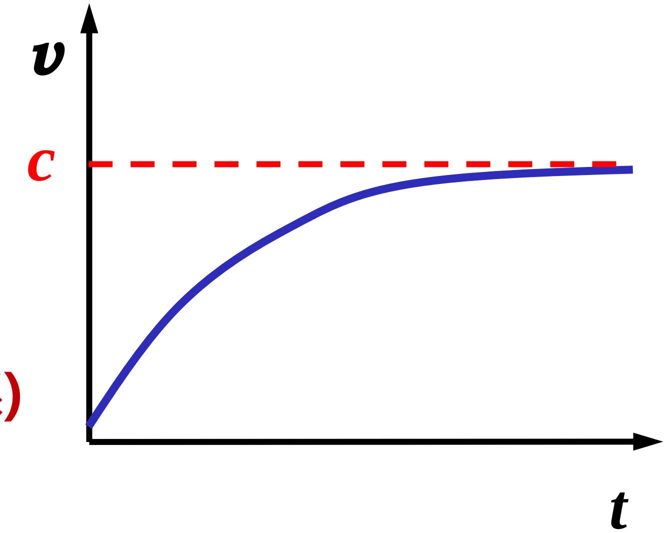


动能定理成立 ⟶ 质量不是恒量

狭义相对论从理论上可以证明

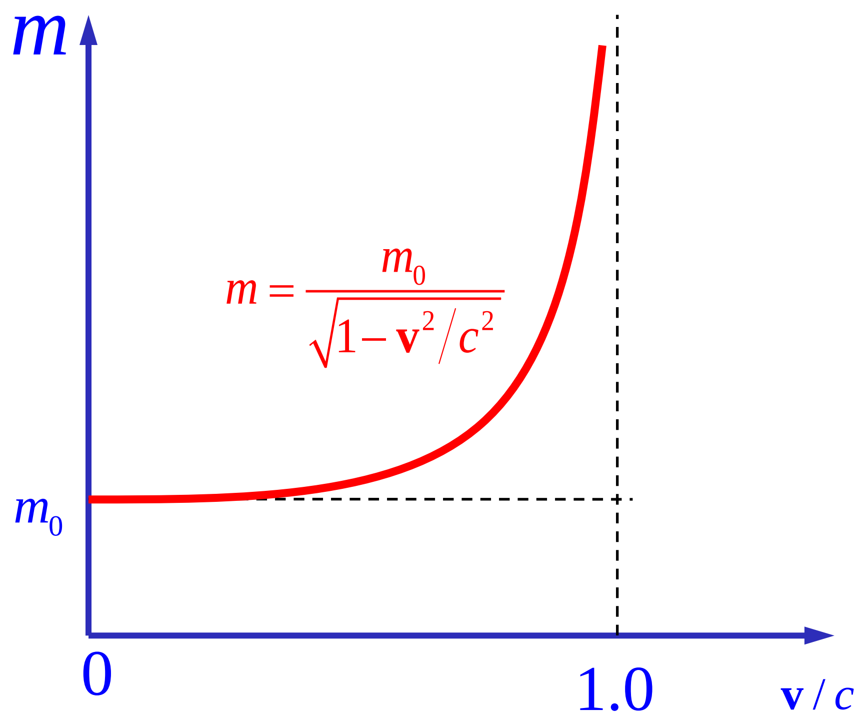
$$m(\mathbf{v})=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$$

(相对论质速关系)



m_0：物体静止时质量; $m(v)$：物体以速率 v 运动时的质量.

$$m(\mathbf{v})=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$$



➢ **讨论:**

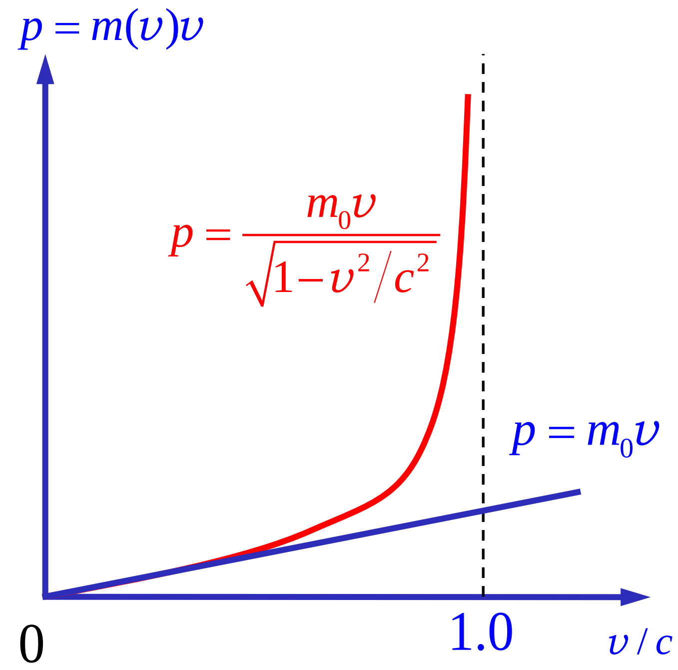
- **当** $\upsilon \ll c$ **时:** $m(\upsilon) \longrightarrow m_0$
- **当** $m_0 \neq 0,\ \upsilon \rightarrow c$ **时:** $m(\upsilon) \longrightarrow \infty$ ⇒ $a \longrightarrow 0$

物体运动速度不能大于c, 只有$m_0=0$的物体才能以光速运动.

10.4.2 狭义相对论动力学基本方程

1.动量

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$



2.动力学方程

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

当 v 远小于光速时，相对论动力学方程又回到牛顿第二定律，因此牛顿第二定律是相对论动力学方程的低速近似.

10.4.3 相对论能量

1. 相对论动能

假定经典力学中的动能定理仍然成立.

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}\mathrm{d}t = \vec{\upsilon}\cdot(\vec{F}\mathrm{d}t) = \vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})$$

$$E_{\mathrm{k}} = \int_0^{\upsilon}\vec{\upsilon}\cdot\mathrm{d}(m\vec{\upsilon})$$ **(假设质点运动方向与受力方向相同)**

$$= \int_0^{\upsilon}\upsilon\,\mathrm{d}(m\upsilon) = \int_0^{\upsilon}\underline{(m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon + \upsilon^2\mathrm{d}m)}$$

将 $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ **改写为** $m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0{}^2c^2$

两边微分 $2mc^2\mathrm{d}m - m^2 2\upsilon\mathrm{d}\upsilon - \upsilon^2 2m\mathrm{d}m = 0$

同除以2*m*，并移项有 $\underline{c^2\,\mathrm{d}m = m\upsilon\,\mathrm{d}\upsilon + \upsilon^2\,\mathrm{d}m}$

于是 $E_k = \int_{m_0}^{m} c^2 \,\mathrm{d}\, m$

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2$$ **(相对论动能公式)**

➢ **讨论:**

当$\upsilon << c$时，可将 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$ **作泰勒展开，得**

$$(1-\frac{\upsilon^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \cdots$$

取前两项，代入 $E_k = mc^2 - m_0 c^2$ **可得**

$$E_k = m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} - 1) = \frac{1}{2} m_0 \upsilon^2$$

表明经典力学的动能表达式是相对论动能表达式的低速近似.

2. 相对论能量

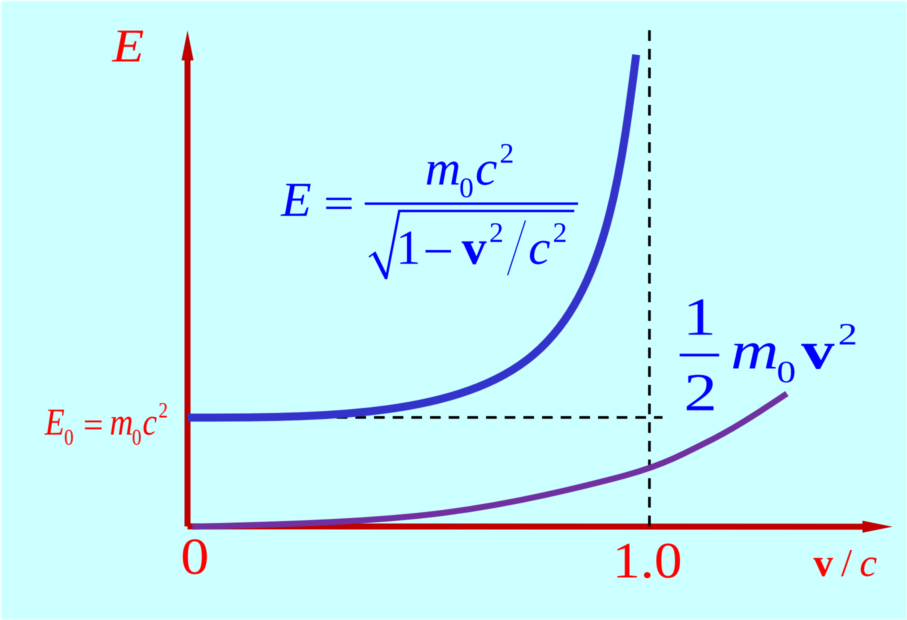
相对论动能： $E_k = mc^2 - m_0c^2$ **，可以改写为：** $mc^2 = E_k + m_0c^2$

爱因斯坦定义： $E_0 = m_0c^2$ **物体静止时的能量 ——静能**

$E = mc^2$ **物体相对论能量 ——总能量**

$$\boxed{E = mc^2} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(相对论质能公式)



多个粒子相互作用时

$$\sum E_i = \sum m_i c^2$$ **=常量** **(相对论能量守恒)**

$$\sum m_i$$ **=常量** **(相对论质量守恒)**

在相对论中能量守恒与质量守恒两个定律统一.

由质能关系有: $\Delta E = \Delta m c^2$

相对论的质量变化必然伴随能量的变化

——原子能(核能)利用的理论依据.

例 试比较原子核裂变和聚变过程中所释放出的能量.

解 用中子轰击铀一类重原子核可分裂成两个中等质量的原子核的现象称为**原子核的裂变**，在裂变反应中放出巨大能量. 例如反应

$$\mathrm{n} + {}^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\mathrm{n}$$

反应物和生成物静质量之差(质量亏损)，为

$$\Delta m = m_0 - m_0'$$

$$m_0 = m_\mathrm{n} + m({}^{235}_{92}\mathrm{U})$$ (反应物静止质量之和)

m_0' 生成物的静止质量之和

$$m_0' = m({}^{141}_{56}\mathrm{Ba}) + m({}^{92}_{36}\mathrm{Kr}) + 3m_\mathrm{n}$$

u：原子质量单位

其中中子的静止质量 $m_{n} = 10087\text{u}$

$^{235}_{92}\text{U}$ **的静止质量** $m(^{235}_{92}\text{U}) = 235.043\ 9\text{u}$

$^{141}_{56}\text{Ba}$ **的静止质量** $m(^{141}_{56}\text{Ba}) = 140.913\ 9\text{u}$

$^{92}_{36}\text{Kr}$ **的静止质量** $m(^{92}_{36}\text{Kr}) = 91.897\ 3\text{u}$

则反应物的静止质量之和为

$$m_{0} = 1.008\ 7\text{u} + 235.043\ 9\text{u} = 236.052\ 6\text{u}$$

生成物的静止质量之和为

$$m_{0}' = 140.913\ 9\text{u} + 91.897\ 3\text{u} + 3\times 1.008\ 7\text{u}$$

$$= 235.8373\text{u}$$

反应前后质量亏损为

$$\Delta m = m_0 - m_0'$$

$$= 236.0526u - 235.8373u$$

$$\mathbf{= 0.2153u = 0.357\ 4 \times 10^{-27}kg}$$

其中原子质量单位 $1\mathrm{u} = 1.66 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$

释放的能量 $\Delta E = \Delta mc^2 = 0.357\ 4 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \mathrm{J}$

$$= 3.216\ 6 \times 10^{-11}\mathrm{J}$$

$$= 2.01 \times 10^8 \mathrm{eV} = 201\mathrm{MeV}$$

一千克铀-235全部裂变，所放出的可利用的核能相当于约2500t标准煤燃料所放出的热能.

聚变反应: 轻原子核聚合成较重原子核的核反应。

例如反应 $${}_{1}^{2}\mathrm{H}+{}_{1}^{3}\mathrm{H}\to{}_{2}^{4}\mathrm{He}+\mathrm{n}$$

反应之前静止质量之和为

$$m_0 = m(\mathrm{D}) + m(\mathrm{T})$$

$$= 2.014\ 1\mathrm{u} + 3.016\ 0\mathrm{u}$$

$$= 5.030\ 1\mathrm{u}$$

反应之后静止质量之和为

$$m_0' = m({}^{4}\mathrm{He}) + m_{\mathrm{n}}$$

$$= 4.002\ 6\mathrm{u} + 1.008\ 7\mathrm{u}$$

$$= 5.011\ 3\mathrm{u}$$

反应前后静止质量差为

$$\Delta m = m_0 - m_0' = 0.018\,8\text{u} = 0.3127\times10^{-28}\text{kg}$$

释放出能量

$$\Delta E = \Delta mc^2 = 0.3127\times10^{-28}\times(3\times10^8)^2\text{J}$$

$$= 2.814\,3\times10^{-12}\text{J} = 17.6\text{MeV}$$

上述聚变反应可以表示为

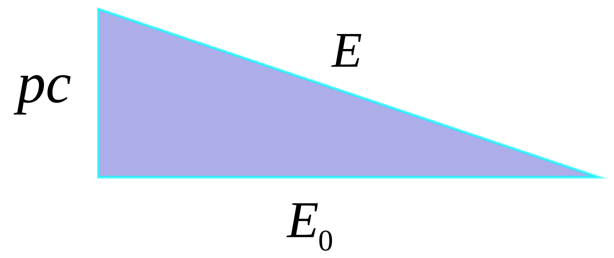
$$\text{D} + \text{T} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \text{n} + 17.6\text{MeV}$$

聚变反应平均每个核子放出的能量(约 17.6MeV)要比裂变反应平均每核子所放出的能量(约 1MeV)大得多.

10.4.4 相对论能量和动量的关系

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$$

$$p = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$$



(记忆图示)

平方后消去υ可得

$$E^2 = m_0{}^2 c^4 + p^2 c^2 \quad = E_0{}^2 + p^2 c^2$$

(相对论能量动量关系)

对于静止质量为零的粒子，如光子，能量和动量关系为

$$E = pc$$

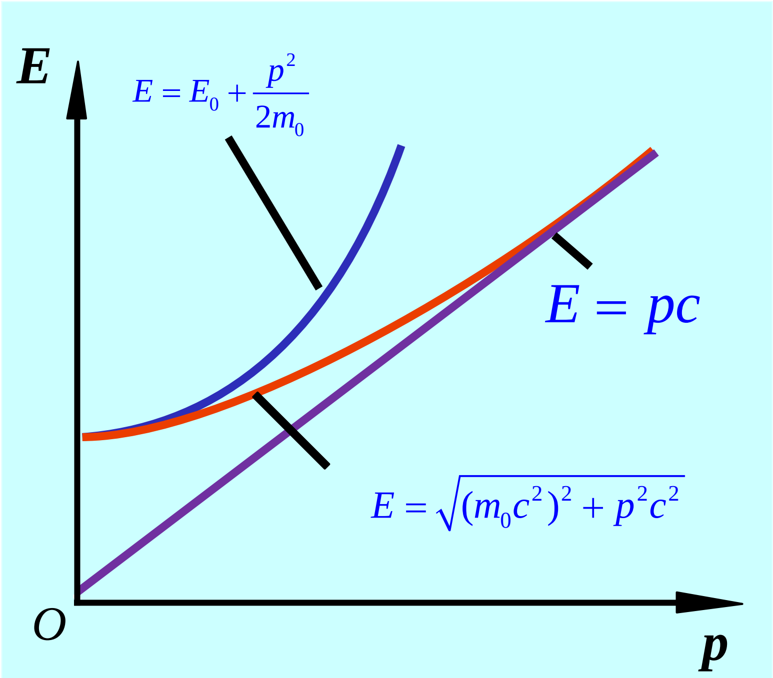
$$p = \frac{E}{c} = \frac{mc^2}{c} = mc$$

$$p = mc$$

对于动能是E_k的粒子，总能量为

$$E = E_k + m_0c^2$$

$$E_k^{\ 2} + 2E_km_0c^2 = p^2c^2$$



当$v \ll c$时，$E_k^{\ 2} \ll 2m_0c^2$

上式的第一项可以忽略,即

$$2E_km_0c^2 = p^2c^2$$

于是有

$$\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m_0}} \qquad \boxed{E = E_0 + \frac{p^2}{2m_0}}$$

(物体低速运动时能量动量关系)

例 已知激光器发生的光脉冲所具有的能量为 $E = 2\times10^{3}\,\mathrm{J}$

求 (1)它所携带的动量；

(2)如果这光脉冲是在1ms内被物体吸收的，物体所受到的光压是多少？

解 (1)能量为E的光子所具有的动量

$$p = \frac{E}{c} = \frac{2\times10^{3}}{3\times10^{8}}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}} = 6.67\times10^{-6}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

(2)光具有动量，所以光射到物体表面上时会对表面产生压力，这个压力叫辐射压力或光压。由于光脉冲是在1毫秒内被物体吸收的，则物体所受的压力为

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{6.67\times10^{-6}}{1\times10^{-3}}\,\mathrm{N} = 6.67\times10^{-3}\,\mathrm{N}$$

2018诺贝尔物理学奖 “光镊”

解题思路

实际问题中当物体作趋近于光速的高速运动时，一定要用相对论动力学的公式，求解相对论动力学问题的关键在于理解和掌握下列几个最重要的结论：

- **相对论质量** $$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$
- **相对论动量** $$\boldsymbol{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$
- **相对论能量** $$E=mc^2$$
- **相对论动能** $$E_{\mathrm{k}}=mc^2-m_0c^2$$
- **相对论能量和动量的关系** $$E^2=p^2c^2+E_0^2$$

本章小结

1. 狭义相对论的基本假设

(1) **相对性原理**: 物理定律在所有惯性系中具有相同的形式。

(2) **光速不变原理**: 在所有惯性系中，光在真空中的传播速率具有相同的值c.

2. 洛伦兹变换

时空坐标变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

速度变换

$$\begin{cases} \upsilon_x' = \dfrac{\upsilon_x - u}{1 - u\upsilon_x/c^2} \\ \upsilon_y' = \dfrac{\upsilon_y\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u\upsilon_x/c^2} \\ \upsilon_z' = \dfrac{\upsilon_z\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u\upsilon_x/c^2} \end{cases}$$

3. 狭义相对论的时空观

(1) 同时性的相对性

在一惯性系中同时而不同地发生的事件，在另一惯性系中必不同时。

(2) 时间膨胀

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > \tau_0$$

(3) 长度收缩

$$L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2}$$

4. 狭义相对论的动力学基础

(1) 相对论质量

$$m(\upsilon) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

(2) 相对论动量

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

(3) 相对论能量

总能量: $E = mc^2$

静止能量: $E_0 = m_0 c^2$

相对论动能: $E_\mathrm{k} = mc^2 - m_0 c^2$

能量和动量关系 $E^2 = E_0^{\ 2} + p^2 c^2$

(4) 相对论动力学基本方程:

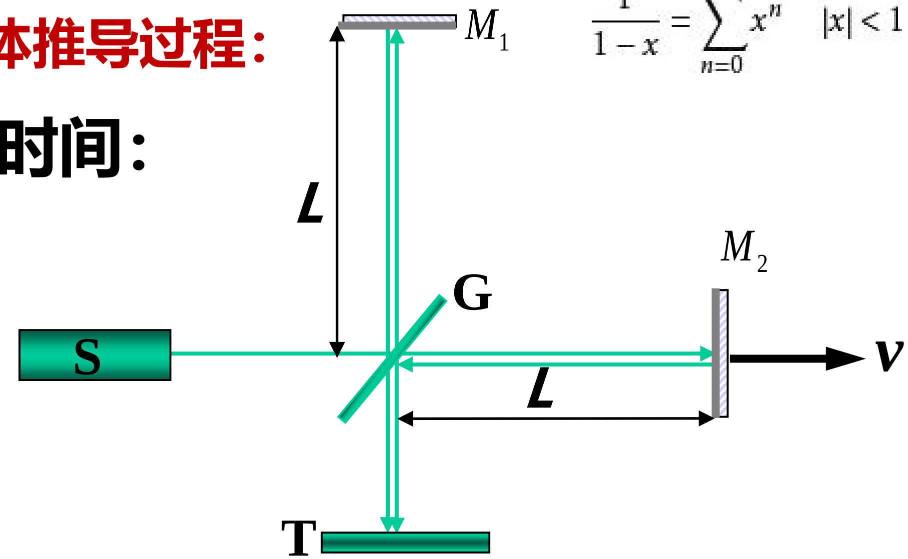
$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right)$$

(5) 相对论动力学能量守恒:

$$\sum E_i = \sum m_i c^2 = \text{常量}$$

迈克尔逊-莫雷实验条纹移动数目具体推导过程：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad |x|<1$$



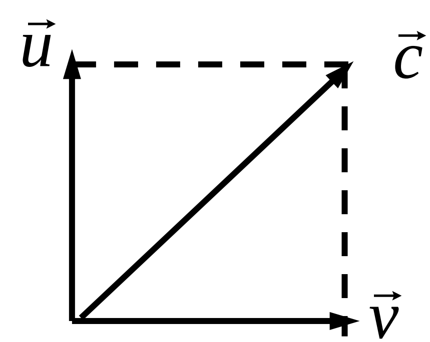
对平面镜M$_2$光反射一来回的时间：

$$t_2=\frac{L}{c-v}+\frac{L}{c+v}=\frac{2cL}{c^2-v^2}$$

$$=\frac{2L}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}\approx\frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)$$

对平面镜M$_1$光相对于干涉仪的速度：

$$u=\sqrt{c^2-v^2}$$



对平面镜M$_1$光反射一来回的时间：

$$t_1=\frac{L}{u}=\frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}}\approx\frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

两臂光的时间差： $\Delta t = t_1 - t_2 = \dfrac{Lv^2}{c^3}$

两臂光的光程差： $\delta_0 = c\Delta t$

产生干涉条纹后，把干涉仪旋转90°，引起干涉条纹的移动。

和旋转前的光程差： $\delta = 2\delta_0 = 2c\Delta t$

干涉条纹的移动数目： $N = \dfrac{\delta}{\lambda} = \dfrac{2c\Delta t}{\lambda} = \dfrac{2Lv^2}{\lambda c^2}$

$$\boxed{N = \frac{2Lv^2}{\lambda c^2}}$$

1881年迈克尔逊实验装置

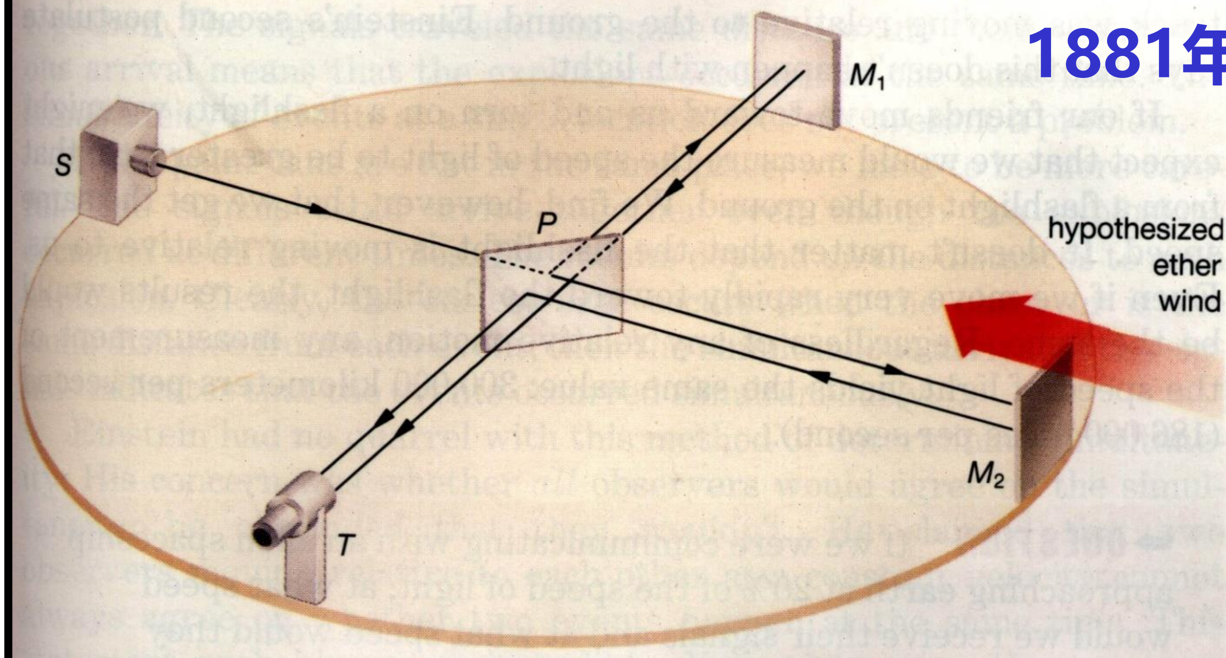


Figure 12-1 A race between two light beams in perpendicular directions was supposed to detect the hypothesized ether. In this experiment, a light beam from the source S is split by the partially silvered mirror P and travels two different paths to the telescope T.

光速： $c = 3\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

光波长： $\lambda \approx 5.9\times10^{-7}\,\mathrm{m}$

地球绕太阳的公转速度： $v = 3\times10^{4}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

干涉仪臂长约： $L = 1.2\,\mathrm{m}$

$\Delta N = 0.04$ 条

未观察到条纹移动

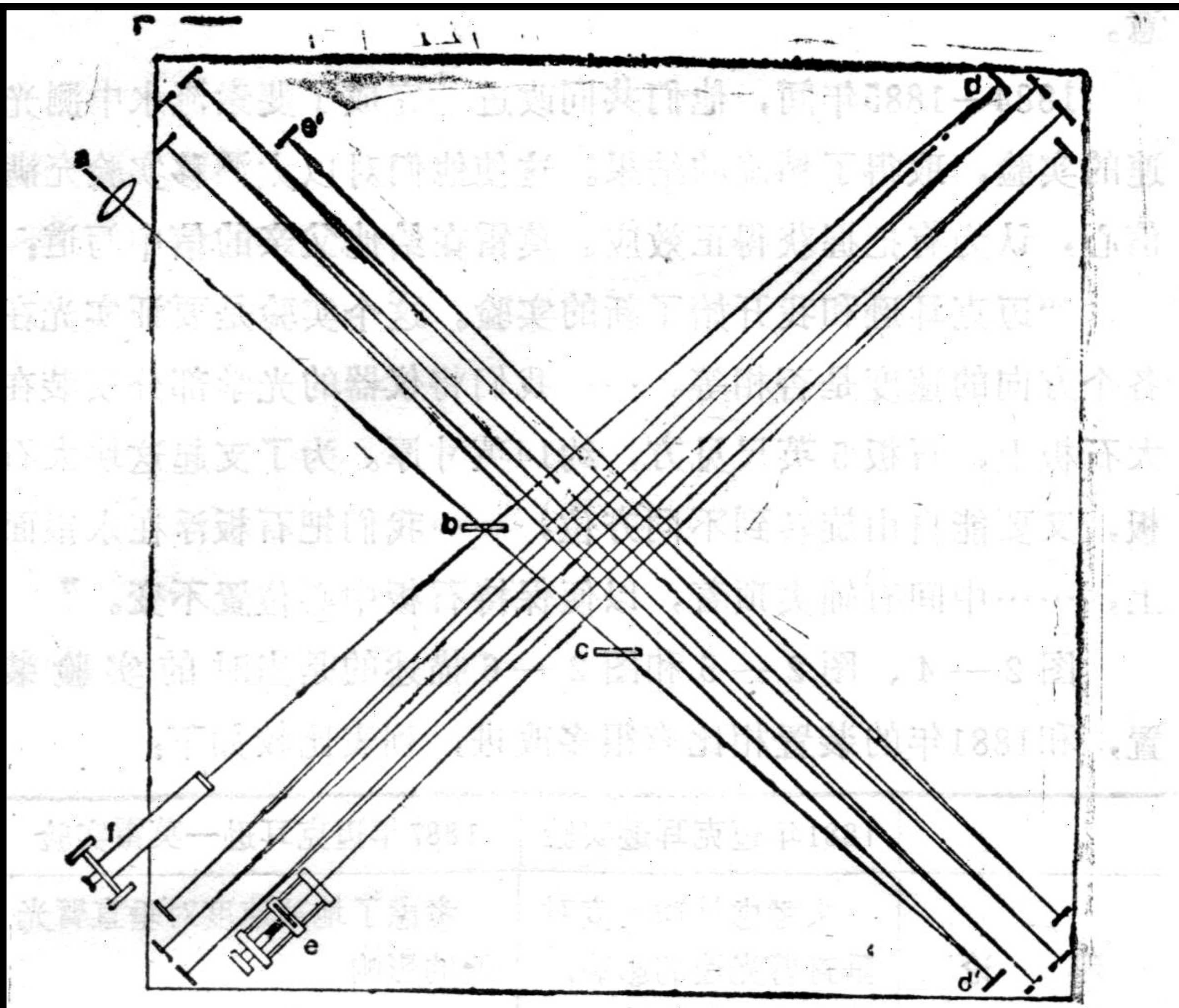


图 2—4　1887年的装置（采用多次反射的光路）

1887年迈克尔逊-莫雷实验装置

与1881年实验比较

	1881年迈克耳逊实验	1887年迈克耳逊—莫雷实验
理　论	未考虑地球速度对垂直臂光速的影响，理论分析有缺陷	考虑了地球速度对垂直臂光速的影响
光　路	臂长约120厘米	经多次来回反射，光路长达11米
光学面	镀银工艺差	镀银工艺改进，条纹清晰度大大提高
底　座	铸铁支架，转动不灵活，影响干涉条纹	用大石台做底座，浮在水银面上
仪器转90°角，期望得到的条纹移动	0.04个条纹	0.4个条纹
仪器转90°角，实际观测到的条纹移动	实际上等于0	<0.01个条纹

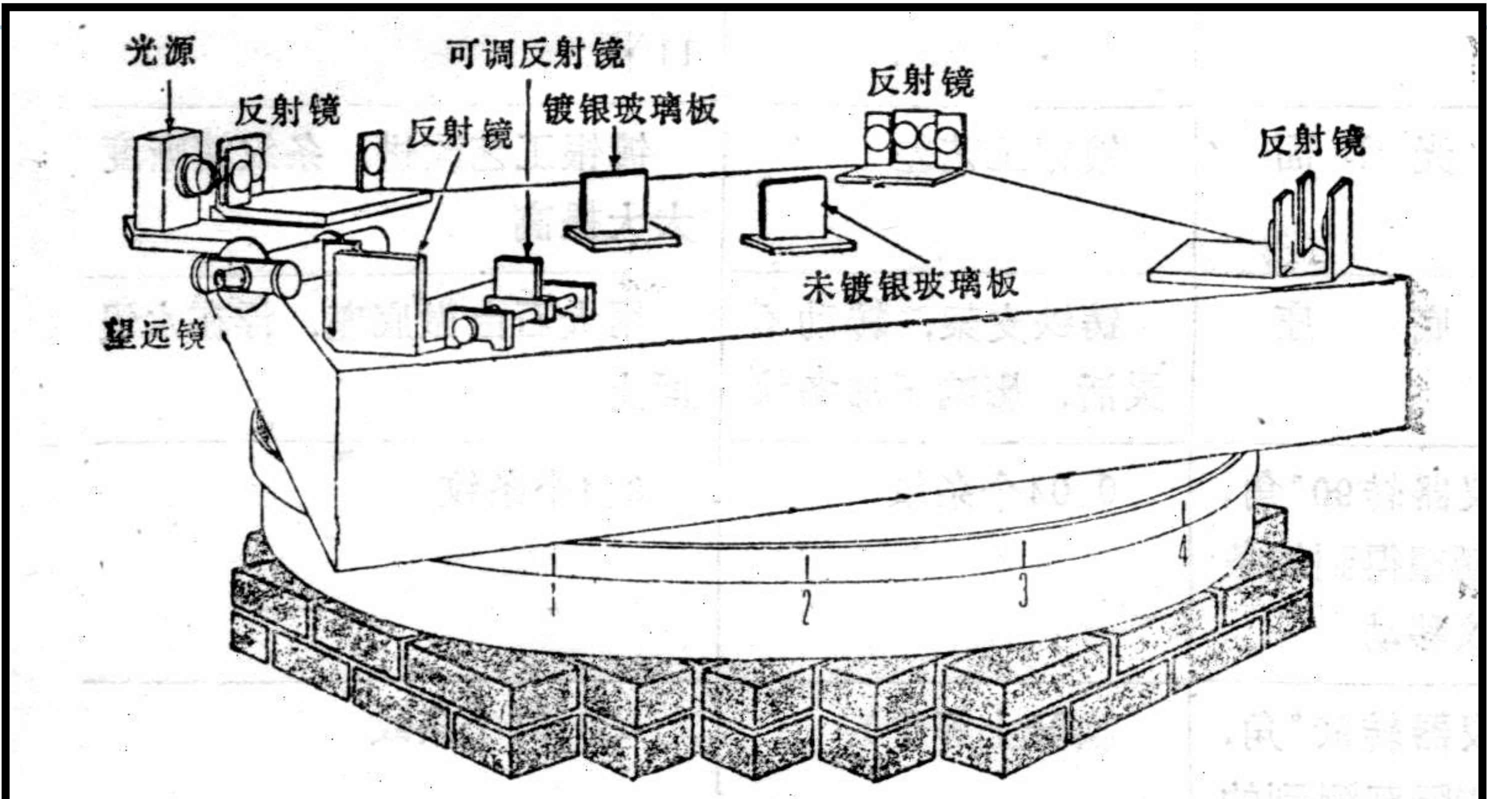


图 2—5　迈克耳逊—莫雷实验装置之一

干涉仪臂长约：　　$L = 11\text{m}$

$\Delta N = 0.4$ 条　　**未观察到条纹移动**