第一节 随机事件的概念

- 一、概率论的诞生及应用
- 二、随机现象
- 三、随机试验
- 四、样本空间 样本点
- 五、随机事件的概念

一、概率论(Probability)发展及应用

1. 发展历史（3个阶段)

古典概率论

(17-18世纪)

现代概率论

(20世纪-至今)

近代概率论

(19世纪)

First：古典概率论

17世纪中叶，在误差、人口统计、人寿保险等范畴中，需要整理和研究大量的随机数据资料，于是孕育出一种专门研究大量随机现象的规律性的数学学科．但当时刺激数学家们首先思考概率论的问题，却是来自赌博者的问题．

1654年, 法国, **帕斯卡**向**费马**提出下列的问题:

"有两个赌徒相约赌若干局，谁先赢 s 局就算赢, 当赌徒A赢a局($a < s$)，而赌徒B赢b局($b < s$)时, 赌博中止, 赌本应怎样分才合理?"

两人一起对此问题进行深入探讨, 最后他们从不同理由出发, 各自给出了正确的解法。

3年后，即1657年, 荷兰数学家惠根斯亦用自己的方法解决了这一问题, 更写成了《论赌博中的计算》---概率论最早的论著。

他们3人提出的解法中, 都涉及了同样一个概念：

数学期望

(mathematical expectation)

并由此奠定了古典概率论的基础.

之后，对概率论这一学科做出贡献的是数学家族——伯努利家族。 雅可布·伯努利花了20年时光,将全部心血倾注到数学研究中，终于将“大数定律”这个定理证实。

Jacob Bernoulli
1654-1705

瑞士数学家

Second：近代概率论

19世纪，法国数学家**拉普拉斯**

古典概率论 → 近代概率论

《概率的分析理论》*Analytic Theory of Probability*（1812）

--- 一部继往开来的作品

概率论在20世纪迅速发展起来。

Third：现代概率论

20世纪,苏联数学家柯尔莫哥洛夫

《概率论基础》（1933）

首次给出概率的严密公理化体系。

成为现代概率论的基础，使概率论成为严谨的数学分支。

柯尔莫哥洛夫，A. H.

(А. Н. Колмогоров 1903-1987)

2. 概率论的应用

现在，概率论与以它为基础的数理统计一起，在自然科学，社会科学，工程技术，军事科学及工农业生产等诸多领域都起着重要的作用。

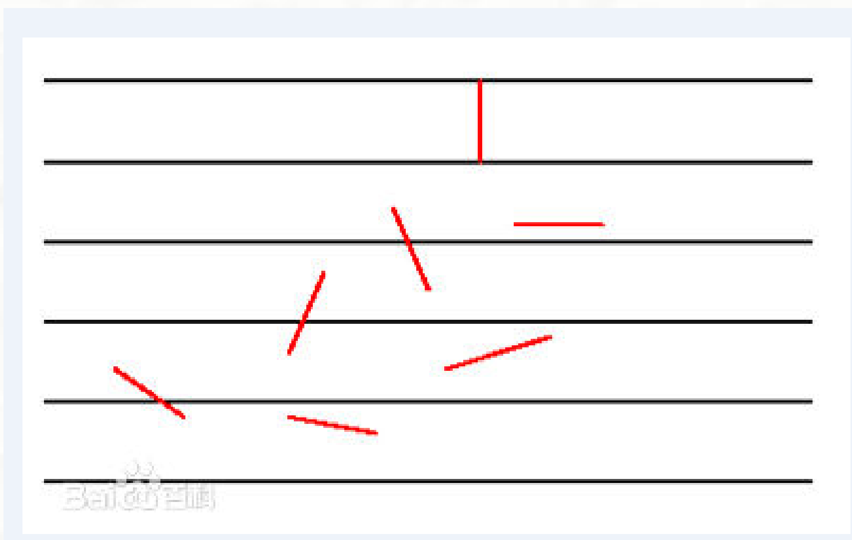
卫星上天，导弹巡航，飞机制造，宇宙飞船遨游太空等都有概率论的一份功劳；

海洋探险，考古研究等离不开概率统计；

电子技术发展，影视文化的进步等同概率统计也是密不可分的。

一个具体例子

根据概率论中用**投针试验估计π值**的思想产生的**蒙特卡罗方法**，是一种建立在概率论与数理统计基础上的计算方法。借助于计算机，使这种方法在各个学科的研究中起着重要的作用。



二、随机现象

自然界所观察到的现象主要有:

确定性现象,

随机现象.

1.确定性现象

在一定条件下可以准确预言结果的现象. 又称必然现象.

实例 “在1个标准大气压下100度的水必定沸腾”；

“没有外力作用下，向上抛一颗石子必然下落”；

“恒定外力作用下，作匀速直线运动的物体仍然作匀速直线运动”；

“函数在间断点处不存在导数” 等.

特征 **条件完全决定结果.**

自然科学的很多学科就是专门研究和认识这种必然性的，寻求这类必然现象的因果关系，把握它们之间的数量规律.

2. 随机现象

在基本条件完全相同的情况下，可能发生也可能不发生的现象.

实例1 “在相同条件下掷一枚均匀的硬币,观察正反两面出现的情况”.

结果有可能**出现正面（数字面）**也可能**出现反面.**

实例2 “在相同条件下生产同一种零件，观察它们的尺寸”.

结果: “**它们的尺寸总会有一点差异** ”.

实例3 “抛掷一枚骰子,观察出现的点数”.

结果有可能为:

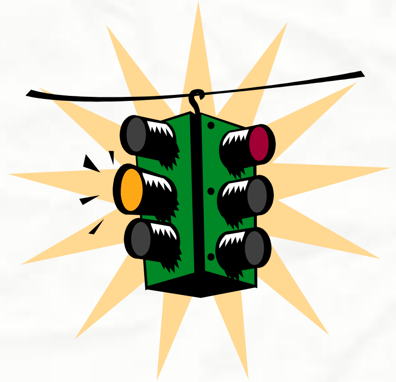
“1”, “2”, “3”, “4”, “5” 或 “6”.

实例4 “从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品”.

其结果可能为:

正品 、次品.

实例5 “过马路交叉口时，可能遇上各种颜色的交通指挥灯”.



实例6 “一只灯泡的寿命” 可长可短.

特征 条件不能完全决定结果.

3. 随机现象的分类

个别随机现象

- 原则上不能在相同条件下重复出现（例6）

大量随机现象

- 在相同条件下可以重复出现（例1-5）

注

1

- 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述

2

- 随机现象从表面上看，似乎杂乱无章，没有规律. 但实践证明，如果同类随机现象大量重复出现，结果就呈现出一定的规律性

这种规律性是由大量同类随机现象呈现出来的一种集体规律性，随着观察次数的增多而愈加明显. 称之为**统计规律性**.

概率论

---研究随机现象数量规律的数学学科.

数理统计

---以概率论为基础，研究大量随机现象的统计规律性.

三、随机试验

1.问题的提出 如何来研究随机现象?

随机现象是通过随机试验来研究的.

2.定义 在概率论中, 把具有以下**2个特征**的试验称为**随机试验**.

1. 允许在相同的条件下重复地进行;
2. 每次试验的结果具有随机性，即结果不一定相同. 试验之前不能确定哪一个结果会出现，但能事先明确试验的所有可能结果.

实例 “抛掷一枚硬币, 观察正面, 反面出现的情况”.

分析 (1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果:

正面，反面;

进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

故为随机试验.

同理可知下列试验都为随机试验

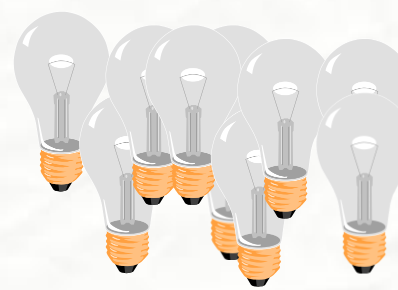
1.“抛掷一枚骰子,观察出现的点数”.

2.“从一批产品中, 依次任选三件, 记录出现正品与次品的件数”.

3. 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人 数.

4. 考察某地区 10 月份的平均气温.

5. 从一批灯泡中任取一只, 测试其寿命.



注

1° 随机试验简称试验, 是一个广泛的术语.它包括各种各样的科学实验, 也包括对客观事物进行的 “调查”、“观察”、或 “测量” 等.

2° 随机试验通常用 E 来表示.

四、样本空间 样本点

1. 问题 如何去表述随机试验的所有可能结果?

现代集合论为表述随机试验的所有可能结果提供了方便的工具.

2. 定义 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 记为 Ω .

样本空间的元素 , 即试验E 的每一个(最简单的不能再分解的)可能结果, 称为样本点, 记作ω.

例1 写出下列随机试验的样本空间.

1) 将一枚硬币连抛N次, 观察正面出现的次数.

$$\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3, \cdots, N\}$$

2) 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

3) 从一批产品中,依次任选三件,记录出现正品与次品的情况.

记 $Z \to$ 正品, $C \to$ 次品.

则 $\Omega_3 = \{ ZZZ, ZZC, ZCZ, CZZ, ZCC, CCZ, CZC, CCC \}.$

4) 记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数.

$\Omega_4 = \{0, 1, 2, \cdots\}.$

5) 考察某地区 12月份的平均 气温.

$$\Omega_5 = \{t \mid T_1 < t < T_2\}.$$

其中 t 为平均温度.

6) 从一批灯泡中任取一只, 测试其寿命.

$$\Omega_6 = \{t \mid t \geq 0\}.$$

其中 t 为灯泡的寿命 .

注　1°　试验不同, 对应的样本空间也不同.

　　2°　同一试验，若试验目的不同, 则对应的样本空间也不同.

如：对于同一试验: “将一枚硬币抛掷三次”．

若观察正面 H、反面 T 出现的情况，则样本空间为

$$\Omega=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT, TTT\}.$$

若观察出现正面的次数，则样本空间为

$$\Omega=\{0,\quad 1,\quad 2,\quad 3\}.$$

3° 建立样本空间,事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此, 一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

如: 只包含两个样本点的样本空间,

$$\Omega = \{H, T\}$$

它既可以作为抛掷硬币出现 正面 或出现 反面的模型, 也可以作为产品检验中合格与不合格的模型, 又能用于排队现象中有人排队与无人排队的模型等.

所以在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间.

五、随机事件（random event）的概念

1. 问题　如何描述满足某些条件的样本点?

在随机试验中，我们往往会关心某个或某些结果是否会出现. 这就是**随机事件**.

2. 基本概念

(1) 随机事件　随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件, 简称事件.即随机事件**是满足某些条件的样本点所组成的集合**.

目 上 下 回 停 续

实例 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

试验中,骰子“出现1点”, “出现2点”, … ,

“点数不大于4”, “点数为偶数” 等都为随机事件.

随机事件发生 —— **组成随机事件的其中一个样点本出现**

(2) **基本事件** **仅由一个样本点组成的单点集. 它是随机试验的直接结果, 每次试验必定发生且只可能发生一个基本事件.**

如: “出现1点”, “出现2点”, … , “出现6点”.

(3) **复合事件** 由若干个样本点组成的点集.

如: “点数不大于4”, “点数为偶数”.

(4) **必然事件** 随机试验中必然会出现的结果.

如: 上述试验中 “点数不大于6” 就是必然事件.

(5) 不可能事件 随机试验中不可能出现的结果.

记为 $\varnothing$.

如: 上述试验中 “点数大于6” 就是不可能事件.

> 必然事件的对立面是不可能事件, 不可能事件的对立面是必然事件, 它们互称为对立事件.

3. 几点说明

1° 随机事件可简称为事件, 并以大写英文字母 A, B, C, … 来表示事件.

例如 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数.

可设 A = “点数不大于4”, B = “点数为奇数” 等等.

2° 随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间, 样本空间的子集就是随机事件.

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

随机事件 $\left\{ \begin{array}{l} \text{基本事件} \\ \text{复合事件} \\ \left. \begin{array}{l} \text{必然事件} \\ \text{不可能事件} \end{array} \right\} \text{互为对立事件} \end{array} \right.$

内容小结

1. 随机现象的特征：条件不能完全决定结果.

2. 随机现象是通过随机试验来研究的.

随机试验
(1) 允许在相同的条件下重复地进行;
(2) 每次试验的结果具有随机性，即结果会不一定相同，试验之前不能确定哪一个结果出现，但能事先明确试验的所有可能结果.

3. 随机试验、样本空间与随机事件的关系.

备用题

例1-1 写出下列随机试验的样本空间.

1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

2) 生产产品直到得到10件正品,记录生产产品的总件数.

答案:

1) $\Omega = \{\frac{i}{n},\ i = 0,1,\cdots,100n\}$.(其中$n$小班人数)

2) $\Omega = \{10,\ 11,\ 12,\ \cdots\}$.