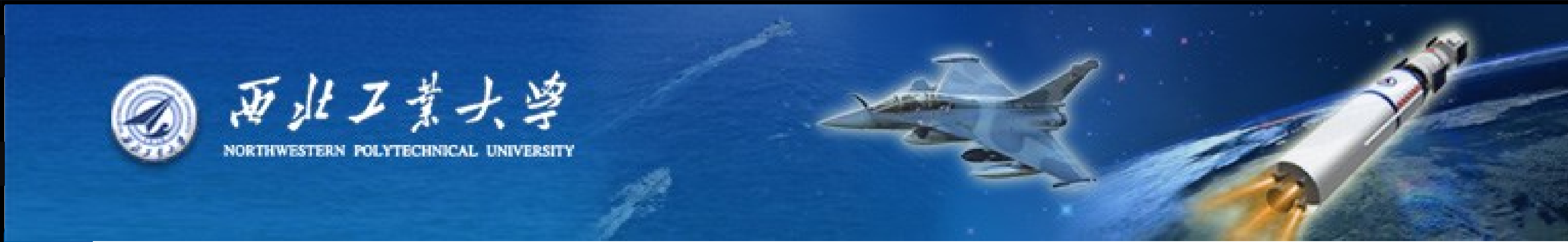


概率论与数理统计

第三节　抽样分布

- 一、问题的提出
- 二、抽样分布定理

一、问题的提出

由于统计量依赖于样本, 而后者又是随机变量故统计量也是随机变量,因而统计量就有一定的概率分布.称这个分布为“抽样分布”. 也即抽样分布就是统计量的分布.

抽样分布 $\begin{cases} \text{精确抽样分布} \\ \text{渐近分布} \end{cases}$

精确抽样分布 (小样本问题中使用)

渐近分布 (大样本问题中使用)

这一节, 我们来讨论**正态总体**的抽样分布.

二、抽样分布定理

定理5.7 设随机变量列$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,且

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

则它们的任一确定的线性函数

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2\right).$$

其中$C_1, C_2, \cdots, C_n$为不全为零的常数.

证　由于$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立且均为正态变量,

故他们的线性函数$\sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i$仍为正态变量,又

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} C_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2\right).$$

1. 样本来自单个正态总体

定理5.8 设样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体X，而

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

则 (1) 样本均值

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \sigma^2 / n),$$

或

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0, 1).$$

标准化样本均值

目的：估计总体数学期望μ.

目 上 下 回 停 续

样本关于$\overline{X}$的平均偏离程度

(2) $V = \dfrac{S_n^2}{\dfrac{\sigma^2}{n}} = \dfrac{nS_n^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}$ $\Longrightarrow$ 目的：估计σ^2.

$$= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$D(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$：样本均值$\overline{X}$关于总体期望的偏离程度

其中S_n^2是样本方差.

(3) $\overline{X}$ 与 S_n^2 独立.

目 上 下 回 停 续

注 1° $V=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$,

自由度减少一个!

减少一个自由度的原因:

$$\left\{\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right\}(i=1,2\cdots,n)\text{不相互独立.}$$

事实上，它们受到一个条件的约束: $\boxed{\sum_{i=1}^{n}X_i=n\overline{X}}$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}=\frac{1}{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\overline{X}\right)=\frac{1}{\sigma}\cdot 0=0.$$

目 上 下 回 停 续

2° 若X不服从正态分布，由中心极限定理知，

当 $n >> 1$ (一般$n \geq 30$)时，

$$U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0, 1),$$

其中 $\mu = E(X),\ \sigma^2 = D(X).$

3° 在实际问题中，总体方差σ^2常常是未知的，若将标准样本均值U中的σ用S_n^*代替，则有如下推论：

目 上 下 回 停 续

推论1 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本, $\overline{X}, S_n^{*2}$ 分别是样本均值和修正样本方差, 则有

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_n^{*}\ /\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S_n/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1).$$

证 $\because$ $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$, $V=\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}\sim \chi^2(n-1)$,

且两者独立, 由 t 分布的定义知

$$T=\frac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{n-1}}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Bigg/\sqrt{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2(n-1)}}\sim t(n-1).$$

例1 某厂生产的灯泡使用寿命$X \sim N(2250, 250^2)$现进行质量检查，方法如下：任意挑选若干个灯泡，如果这些灯泡的平均寿命超过2000h，就认为该厂生产的灯泡质量合格，若要使通过检验的概率超过0.997，问至少检查多少只灯泡.

解 以$\overline{X}$记样本均值，则 $\overline{X} \sim N(2250, \dfrac{250^2}{n})$

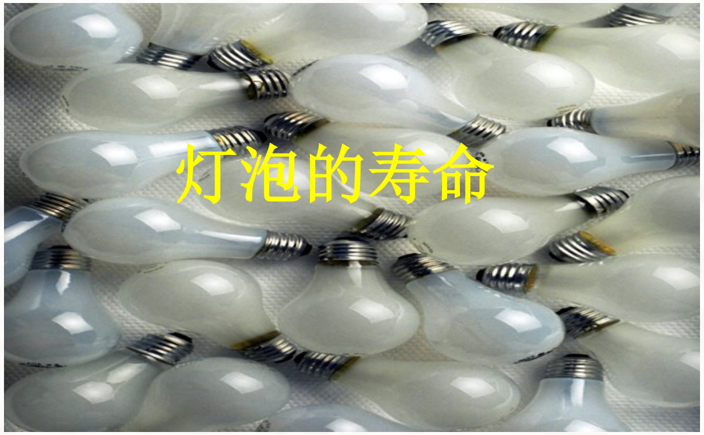
所以

$$P(\overline{X} > 2200) = P(\frac{\sqrt{n}(\overline{X} - 2250)}{250} > \frac{\sqrt{n}(2200 - 2250)}{250})$$

$$= 1 - \Phi(\frac{\sqrt{n}(2200 - 2250)}{250} = 1 - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{5}) > 0.997$$

即 $\Phi(\frac{\sqrt{n}}{5}) > 0.997 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{5} > u_{0.997} \Rightarrow n \geq 190$

所以，要是检查能通过的概率超过0.997，至少应该检查190只灯泡.



2. 样本来自两个正态总体

定理5.9 若$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, X与Y相互独立. 样本$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$分别来自总体$X$和$Y$，则

(1) $$\bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

或 $$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}} \sim N(0,1);$$

目 上 下 回 停 续

(2) 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时,

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^{*2}+(n_2-1)S_2^{*2}}{n_1+n_2-2}$, $S_w=\sqrt{S_w^2}$.

S_1^{*2}和S_2^{*2}分别是来自两个总体样本的修正样本方差;

(3) $$F=\frac{S_1^{*2}/\sigma_1^2}{S_2^{*2}/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

证 (1)、(2) 由定理5.7及定理5.8，知

$$\overline{X}-\overline{Y} \sim N(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1}+\frac{\sigma^2}{n_2})$$

$$\therefore \quad U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1),$$

由 $\frac{(n_1-1)S_1^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\frac{(n_2-1)S_2^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)$,

且它们相互独立, 故由 χ^2 分布的可加性知

目 上 下 回 停 续

$$V=\frac{(n_1-1)S_1^{*2}}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2),$$

由于 U 与 V 相互独立,按 t 分布的定义

$$T=\frac{U}{\sqrt{V/(n_1+n_2-2)}}$$

$$=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2).$$

(3) $\dfrac{(n_1-1)S_1^{*2}}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(n_1-1)$, $\dfrac{(n_2-1)S_2^{*2}}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n_2-1)$,

由假设 S_1^{*2}, S_2^{*2} 独立, 则由 F 分布的定义知

$$\frac{(n_1-1)S_1^{*2}}{(n_1-1)\sigma_1^2}\bigg/\frac{(n_2-1)S_2^{*2}}{(n_2-1)\sigma_2^2}\sim F(n_1-1, n_2-1),$$

即 $$F=\frac{S_1^{*2}/\sigma_1^2}{S_2^{*2}/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1, n_2-1).$$

例2 设X,Y相互独立，$X \sim N(0,4), Y \sim N(2,9)$ 试求正实数a,b,使得$aX + bY \sim N(2,13)$.

解 因为相互独立正态随机变量的线性和仍为正态，且

$$E(aX + bY) = aEX + bY = 2b$$

$$D(aX + bY) = a^2DX + b^2DY = 4a^2 + 9b^2$$

所以 由$a,b > 0$，且

$$\begin{cases} 2b = 2 \\ 4a^2 + 9b^2 = 13 \end{cases}$$

得 $a = 1, b = 1.$

例3 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本

记
$$Y_1=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}X_i,\ Y_2=\frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9}X_i$$

$$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$$

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$$

试证明：$Z\sim t(2)$.

解　因为　$Y_1\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{6}),Y_2\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{3})$

且Y_1,Y_2相互独立

目 上 下 例 停 续

所以 $$Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2})$$

从而有 $$\frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{\sigma} \sim N（0,1）$$

又因为 $\frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$,且 $\frac{2S^2}{\sigma^2}$ 与 $\frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{\sigma}$ 独立

所以 $$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)/\sigma}{\sqrt{2(S^2/2)\cdot\sigma^2}} \sim t(2).$$

例4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ $\bar{X}$ 和 S_n^2 分别为样本均值与方差,又设 $X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且与 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，试求常数 C 使得 $F = C(X_{n+1} - \bar{X})^2 / S_n^2$ 服从 $F(1,n\text{-}1)$.

解 因为 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$

所以，由正态分布的线性性得

$$(X_{n+1} - \bar{X}) \sim N(0, \frac{n+1}{n}\sigma^2)$$

因此

$$\frac{(X_{n+1} - \bar{X})}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim N(0,1)$$

目 上 下 例 停 续

从而有 $$\left[\frac{(X_{n+1}-\overline{X})}{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right]^2\sim\chi^2(1)$$

另一方面，有样本方差的性质知

$$\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

且 $\left[\frac{(X_{n+1}-\overline{X})}{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right]^2$ 与 $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$ 相互独立

所以 C=(*n*-1)/(*n*+1).

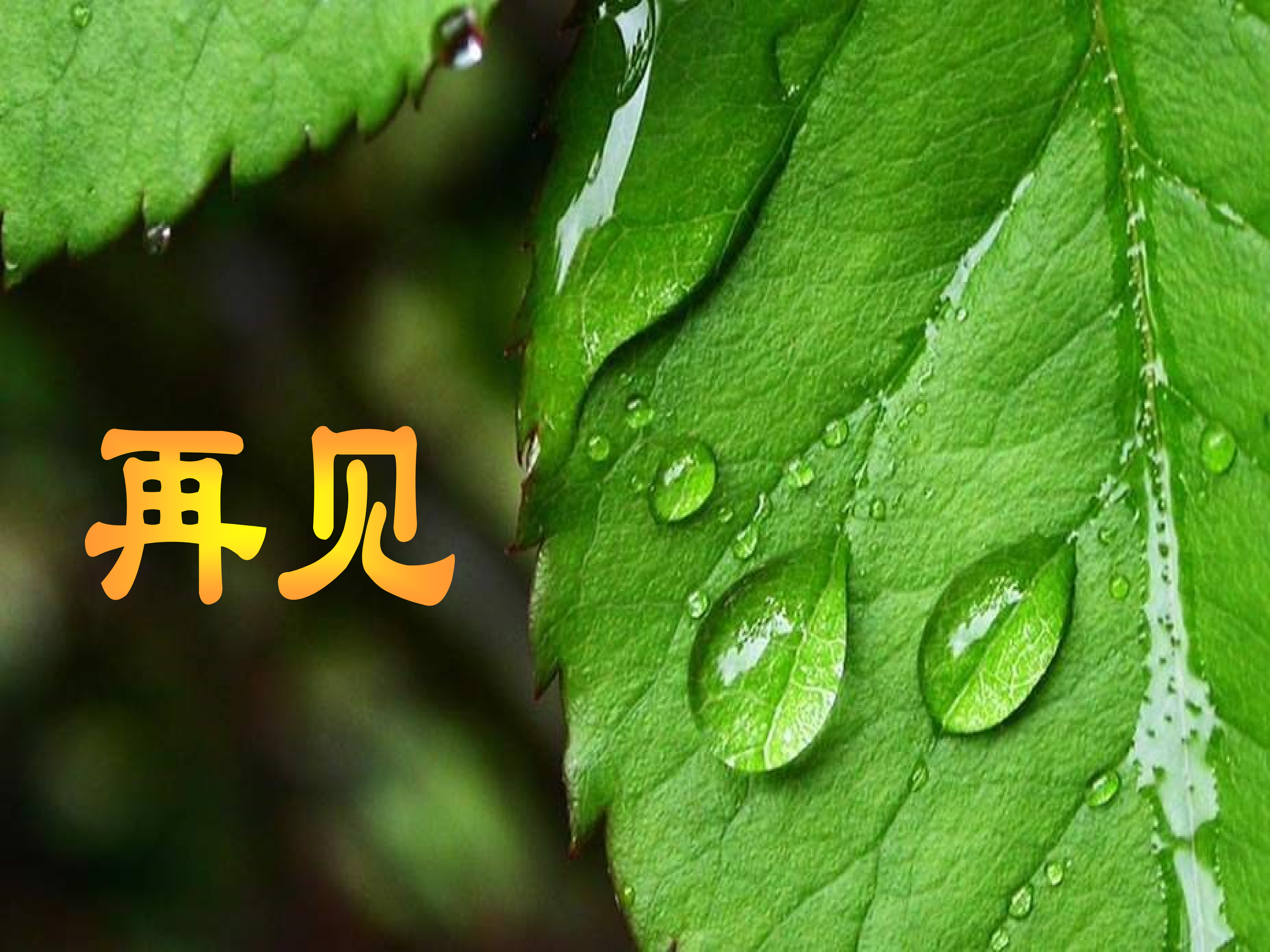
内容小结

抽样分布定理

1 单正态总体的抽样分布定理（定理5.8）

2 两正态总体的抽样分布定理（定理5.9）

目 上 下 回 停 续


再见

备用题

例1-1 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个简单随机样本，则样本均值$\overline{X}$服从________，又若 a_i为常数，则 $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ 服从________.

解 同样

$$E[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \mu\sum_{i=1}^{n} a_i, D[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i] = \sigma^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N(\mu\sum_{i=1}^{n} a_i, \sigma^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

例1-2 从正态总体$N(3.4,36)$中抽取容量为n的样本，若要求样本均值位于区间（1.4,5.4）内的概率不小于0.95，则样本容量至少为多少？

解 以 $\bar{X}$ 表示样本均值，则 $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-3.4)}{6} \sim N(0,1)$

所以 $P(1.4 < \bar{X} < 5.4) = P(|\bar{X}| < 2)$

$$= P\left(\left|\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}-3.4}{6}\right| < \frac{2\sqrt{n}}{6}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1 \ge 0.95$$

$\therefore \quad n \ge 34.57$

因此，样本容量n至少取35.

例1-3 设$X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$为来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$

$$V_i = X_i - \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} X_j (i=1,2,\cdots,n+1),$$则

V_i服从$N(0,\frac{n}{n+1}\sigma^2)$.

解 由于V_i服从正态分布,且 $EV_i = \mu - \sum_{j=1}^{n+1}\mu = 0$

$$DV_i = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\sigma^2 + \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\sigma^2 = \frac{n}{n+1}\sigma^2$$

所以$V_i \sim N(0,\frac{n}{n+1}\sigma^2),i=1,\cdots,n+1.$

目 上 下 回 停 续

例1-4 设$\overline{X}_1$与$\overline{X}_2$是同一正态总体$N(\mu,\sigma^2)$且独立取得的样本容量相同的两个样本均值，试确定样本容量n，使得两样本均值的距离超过σ的概率不超过0.01.

解 由于$\overline{X} \sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}),i=1,2,$且独立，故

$$\overline{X}_1-\overline{X}_2 \sim N(0,\frac{2\sigma^2}{n})$$

于是 $P(\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|>\sigma)=P(\left|\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{2\sigma^2/n}}\right|>\dfrac{\sigma}{\sqrt{2\sigma^2/n}})$

$$=2[1-\Phi(\sqrt{\frac{n}{2}})]\le 0.01$$

等价于

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \geq 0.995 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{2}} \geq u_{0.995} = 2.575 \Rightarrow n \geq 13.26$$

故当样本容量$n \geq 14$时满足条件！

此时样本距离超过标准差的可能性不大于0.01.

例1-5 设总体$X \sim N(80,20^2)$,从中抽取100个样本求样本均值与总体均值之差的绝对值大于3概率.

解 因为$X \sim N(80,20^2)$,所以

$$\frac{\overline{X}-80}{2} \sim N(0,1)$$

因而 $$P(|\overline{X}-80|>3)=P\left(\left|\frac{\overline{X}-80}{2}\right|>\frac{3}{2}\right)$$

$$=2\Phi\left(-\frac{3}{20}\right)\approx 0.1336.$$

目 上 下 回 停 续

例1-6 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自$N(\mu,25)$的样本，那么n取多少时，才能使$P(|\overline{X}-\mu|<1)\geq 0.95.$

解 样本均值$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{25}{n})$,因此

$$P(|\overline{X}-\mu|<1)=P(\frac{|\overline{X}-\mu|}{\sqrt{25/n}}<\frac{1}{\sqrt{25/n}})$$

$$=2\Phi(\sqrt{n}/5)-1\geq 0.95$$

所以 $\Phi(\sqrt{n}/5)\geq 0.975\Rightarrow n\geq 96.04$

因此，当n至少取97时，满足上述条件.

例2-1 设$(X_1, X_2, \cdots, X_{10})$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{15})$是来自总体$N(20,3)$的两个独立的样本，求

$$P\{|\overline{X} - \overline{Y}| > 0.3\}.$$

解 $$\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i \sim N(20, \frac{3}{10}),$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} Y_i \sim N(20, \frac{3}{15}),$$

$$\therefore \quad \overline{X} - \overline{Y} \sim N(0, \frac{3}{10} + \frac{3}{15}) = N(0, \frac{1}{2}),$$

故 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}}} \sim N(0,1)$

从而 $P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>0.3\}=1-P\{|\overline{X}-\overline{Y}|\le 0.3\}$

$$=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right|\le\frac{0.3}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$=2[1-\Phi(0.3\sqrt{2})]\approx 2(1-0.6628)=0.6744.$$

例2-2 设X_1,X_2,X_3,X_4来自总体$N(0,\sigma^2)$,

则统计量 $T=\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$的分布为?

解 $X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)$, 于是$\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2\sigma^2}}\sim N(0,1)$

$\dfrac{X_3}{\sqrt{\sigma^2}}$与$\dfrac{X_4}{\sqrt{\sigma^2}}$独立同分布于$N(0,1)$,于是

$$\frac{X_3^2}{\sigma^2}+\frac{X_4^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$$

由t分布的定义

$$\frac{\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2\sigma^2}}}{\sqrt{\dfrac{X_3^2+X_4^2}{\sigma^2}/2}} \sim t(2)$$

即 $$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}} \sim t(2).$$

例3-1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态$N(0,\sigma^2)$的样本，$\overline{X}$和S_n为样本均值和标准差，试求统计量$U = \overline{X} / S_n$的概率分布.

解 由定理5.8的推论1知

$$\frac{\overline{X}}{S_n / \sqrt{n-1}} = \frac{\overline{X}}{S_n}\sqrt{n-1} \sim t(n-1)$$

先求U的分布函数$F(U)$:

$$F(u) = P\{U \le u\} = P\{\frac{\overline{X}}{S_n} \le u\}$$

$$= P\{\frac{\overline{X}}{S_n}\sqrt{n-1} \le \sqrt{n-1}\,u\} = F_{t(n-1)}(\sqrt{n-1}\,u)$$

所以，U的分布密度为

$$p(u)=F'(u)=F'_{t(n-1)}(\sqrt{n-1}\,u)\cdot\sqrt{n-1}$$

$$=p_{t(n-1)}(\sqrt{n-1}\,u)\cdot\sqrt{n-1}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{(n-1)n}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}\left[1+\frac{(\sqrt{n-1}\,u)^2}{n-1}\right]^{-\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{n-1}$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}(1+u^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

目 上 下 回 停 续

例3-2 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\overline{X}$是样本均值，$S_n^{*^2}$是修正样本方差，n样本容量，则常用统计量

U=__________ 服从 $N(0,1)$, T=__________

服从$t(n-1)$, M=__________ 服从 $\chi^2(n-1)$.

解 由抽样分布的性质知

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{(n-1)S_n^{*^2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

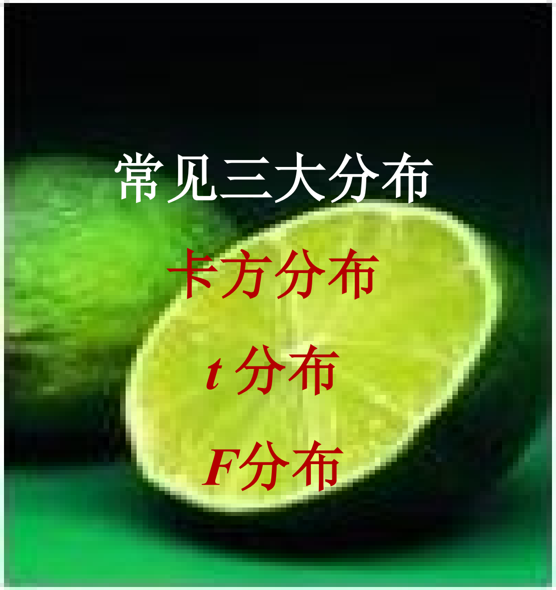
目 上 下 回 停 续

同时 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}$ 相互独立

所以

$$T=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S_n^{*2}}=\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}/(n-1)}}\sim t(n-1).$$

此类问题的关键在于熟练掌握常见分布的构造性质



例4-1

设$X_1,X_2\sim N(0,\sigma^2)$,试求$Y=(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2})^2$的分布.

解 由条件 $X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2),X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$

$$故\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1),\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$$

又 $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,X_1-X_2)=\mathrm{Var}X_1-\mathrm{Var}X_2=0$,且

X_1-X_2,X_1+X_2服从正态分布，故独立，于是

$$Y=(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2})^2=\frac{((X_1+X_2)/\sqrt{2}\sigma)^2}{((X_1-X_2)/\sqrt{2}\sigma)^2}\sim F(1,1).$$

例4-2 设随机变量$X \sim F(1,1)$,证明$P(X<1)=0.5$.

解 由F分布的性质知，若$X \sim F(1,1)$,则

$$Y = 1/X \sim F(1,1)$$

从而 $$P(X<1) = P(Y<1)$$

$$= P(1/X<1) = P(X>1)$$

又因为 $$P(X<1)+P(X>1)=1,$$

所以 $$P(X<1)=0.5.$$

注 本题分布换成具有相同自由度的$F(n,n)$亦有相同的结论!

例4-3 设 $X \sim N(0,1), Y_1, Y_2, Y_3 \sim N(0,4)$且相互独立，试求下列统计量的期望及 T_1方差.

$$T_1 = \frac{X}{S}, T_2 = \frac{X^2}{S^2}, S^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2.$$

解 因为 $X \sim N(0,1), Y_i \sim N(0,4), i = 1,2,3$

所以 $$X^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\frac{Y_i}{2} \sim N(0,1), i = 1,2,3$$

进而有 $$\frac{S^2}{4} \sim \chi^2(3)$$

目 上 下 回 停 续

由抽样分布的性质可知

$$\frac{2\sqrt{3}X}{S}=\frac{X}{\sqrt{(\frac{S^2}{4})/3}}\sim t(3)$$

$$\frac{12X^2}{S^2}=\frac{X^2/1}{\left(\frac{S^2}{4}\right)/3}\sim F(1,3)$$

所以，由T分布的性质知

$$ET_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}E\left(\frac{2\sqrt{3}X}{S}\right)=0$$

$$DT_1 = \frac{1}{12} D[\frac{2\sqrt{3}X}{S}] = 3$$

由F分布的性质知

$$ET_2 = \frac{1}{12} E[\frac{12X}{S^2}] = 3.$$

目 上 下 回 停 续

例4-4 设在总体$N(\mu,\sigma^2)$中取一组容量为n的样本，其中参数未知，求 ES^2和DS^2.

解 因为 $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

故有 $$E(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = n-1, D(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = 2(n-1)$$

于是 $$DS^2 = D(\frac{\sigma^2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2})$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-1} D(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$