



西北工业大学
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY



概率论与数理统计



第一节 一维随机变量 及其分布(3)



五、连续型随机变量



六、典型的连续型

随机变量及其分布



五、连续型随机变量

1. 连续型随机变量及其密度函数

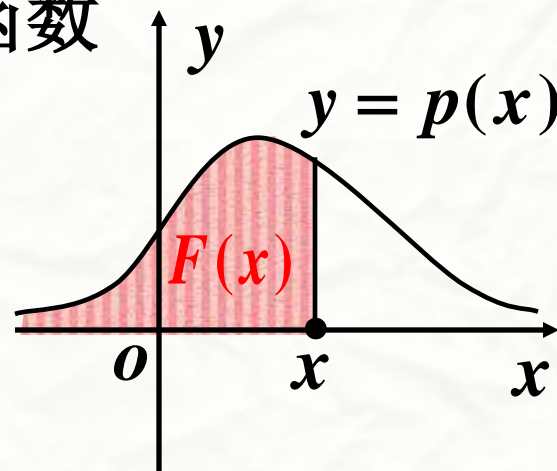
定义 对于随机变量 X , 若存在非负可积函数

$p(x)$ ($x \in \mathbf{R}$), 使得 X 的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy$$

则称 X 为连续型随机变量, 且称

$p(x)$ 为密度函数, 或概率密度.



注 此定义中涉及三个名词: 连续型随机变量, 密度函数, 分布函数.

2. 密度函数的性质

设 X 为连续型随机变量, $p(x)$ 为 X 的密度函数, $F(x)$ 为 X 的分布函数, 则

(1) (非负性) $p(x) \geq 0, x \in R;$

(2) (规范性) $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1;$

(3) $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx;$

(4) $P\{X = c\} = 0.$

(5) 分布函数 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续;

(6) 若 $p(x)$ 在点 x 处连续, 则 $F'(x) = p(x).$

证 下面只给出性质4的证明

$$\because \{X = c\} \subseteq \{c - \varepsilon < X \leq c\}, \varepsilon > 0$$

而 $0 \leq P\{X = c\} \leq P\{c - \varepsilon < X \leq c\}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P\{c - \varepsilon < X \leq c\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c-\varepsilon}^c p(x) dx = 0.$$

$$\therefore P\{X = c\} = 0.$$

注 1° 性质4说明对于任意可能值 c , 连续型随机变量取 c 的概率等于零.

2° 若 X 为连续型随机变量, 则

$$\begin{aligned}P\{a < X \leq b\} &= P\{a < X < b\} \\&= P\{a \leq X < b\} \\&= P\{a \leq X \leq b\}\end{aligned}$$

连续型随机变量的概率与区间的开闭无关

$$3^\circ \quad P(A) = 0 \quad \xleftrightarrow{\quad} \quad A = \emptyset$$

$$P(A) = 1 \quad \xleftrightarrow{\quad} \quad A = \Omega$$

4° 对连续性随机变量 $F(x)$ 一定是连续的, 但是 $p(x)$ 未必连续, 在 $p(x)$ 的连续点处, 有

$$F'(x) = p(x)$$

? 改变连续型随机变量 X 的概率密度 $p(x)$ 在个别点 $x=x_0$ 的值是否影响随机变量的概率分布？

答：不影响。因为随机变量的概率分布完全由分布函数来刻画。对于连续型随机变量 X ，分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(y) dy$$

改变 $p(x)$ 在个别点 $x=x_0$ 的值不影响随分布函数 $F(x)$ 的取值。例如，若 X, Y 的概率密度分别为

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

我们可以认为它们具有相同的概率分布. 即, $X \sim U(a, b)$

我们给大家介绍了密度函数的几条性质？

A 4

B 5

C 3

D 6

提交

回

停

续

例1

设随机变量 X 具有概率密度

$$p(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k ;

(2) 求 X 的分布函数;

(3) 求 $P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$,

$$\text{得 } \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^3 kx dx + \int_3^4 (2 - \frac{x}{2}) dx + \int_4^{+\infty} 0 dx = 1,$$

$$\text{解之得 } k = \frac{1}{6}.$$

由 $k = \frac{1}{6}$ 知 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(2) 由 $F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx$ 得

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x \frac{x}{6} dx, & 0 \leq x < 3, \\ \int_0^3 \frac{x}{6} dx + \int_3^x (2 - \frac{x}{2}) dx, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

$$\text{即 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{12}, & 0 \leq x < 3, \\ -3 + 2x - \frac{x^2}{4}, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

$$(3) P\{1 < X \leq \frac{7}{2}\} = F(\frac{7}{2}) - F(1) = \frac{41}{48}.$$

$$= \int_1^{\frac{7}{2}} p(x) dx = \int_1^3 \frac{x}{6} dx + \int_3^{\frac{7}{2}} (2 - \frac{x}{2}) dx$$

六、典型的连续型随机变量的分布

1.* 均匀分布（规则分布） Uniform distribution

(1) 定义 设连续型随机变量 X 具有概率密度：

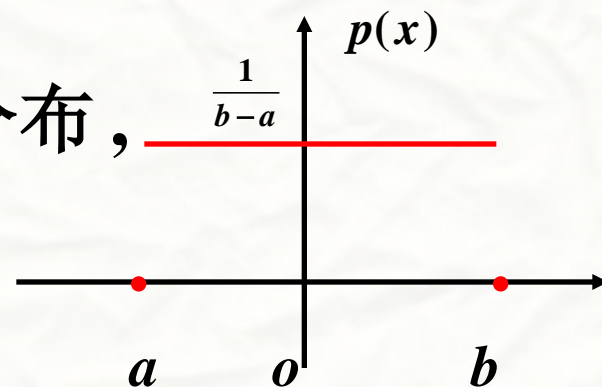
$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

则称 X 在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布，

记为 $X \sim U[a, b]$.

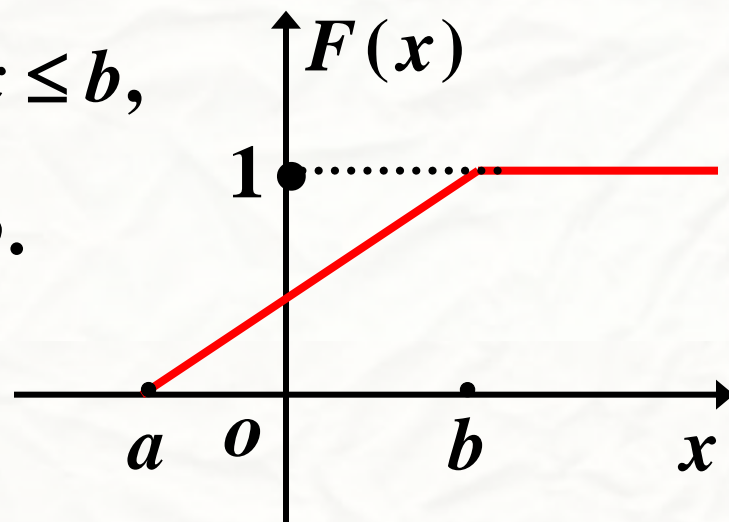
概率密度

函数图形



分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



(2) 均匀分布的性质

如果 $X \sim U[a, b]$, 则

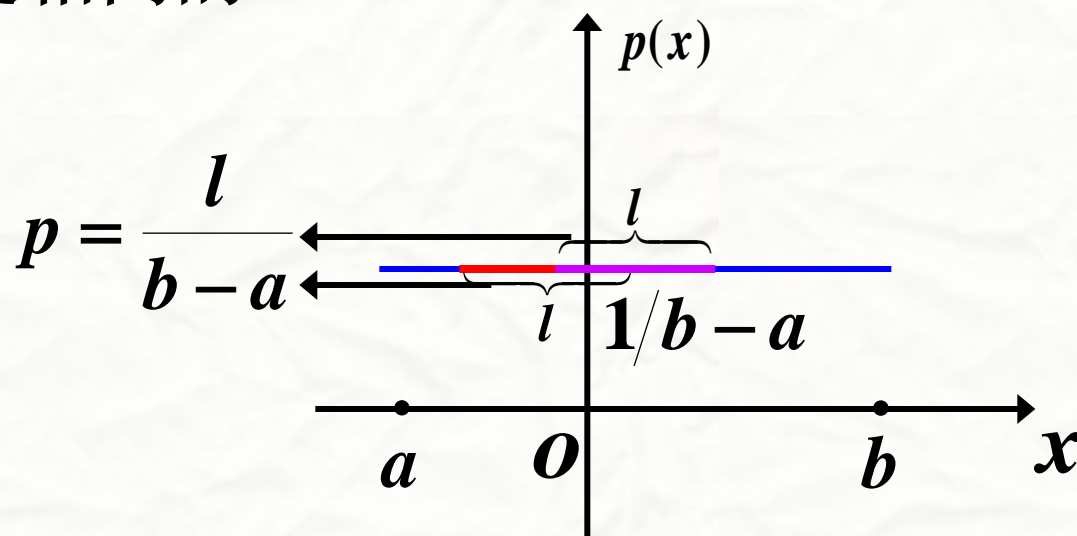
$$1^\circ P\{X < a\} = P\{X > b\} = 0;$$

$$2^\circ \text{ 当 } a \leq c < d \leq b \text{ 时, 有 } P\{c \leq X < d\} = \frac{d-c}{b-a}.$$

(3) 均匀分布的意义

背景：几何概型

在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布的随机变量 X ，落在区间 $[a, b]$ 中任意等长度的子区间内的可能性是相同的。



例2 设随机变量 X 在 $[2, 5]$ 上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测, 试求至少有两观测值大于3 的概率.

解 X 的分布密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 2 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

设 A 表示 “对 X 的观测值大于 3”, 即 $A = \{ X > 3 \}$.

$$P(A) = P\{X > 3\} = \int_3^5 \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3},$$

由于 $P(A) = P\{X > 3\} = \int_3^5 \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3},$

设 Y 表示对 X 进行 3 次独立观测中, 观测值大于 3 的次数,

则 $Y \sim B(3, \frac{2}{3}).$

因而有

$$P\{Y \geq 2\} = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) + C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^0 = \frac{20}{27}.$$

2. *指数分布 Exponential distribution

定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数, 则称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记作 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

相应的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

指数分布也是常用分布之一,常用它来描述各种“寿命”问题,如电子元器件的寿命,生物的寿命.

指数分布应用广泛,在日本的工业标准和美国军用标准中,半导体器件的抽验方案都是采用指数分布。此外,指数分布还用来描述大型复杂系统(如计算机)的平均故障间隔时间MTBF的失效分布。

指数分布具有“无记忆性”的特点.即对于任意的 $s > 0, t > 0$, 若 $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, 则

$$\begin{aligned} P\{X > s + t \mid X > s\} &= P\{X > s + t\} / P\{X > s\} \\ &= e^{-\lambda(s+t)} / e^{-\lambda s} = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

因此

$$P\{X > s + t \mid X > s\} = P\{X > t\}$$

例6 设某类日光灯管的使用寿命 X 服从参数为 $\lambda=1/2000$ 的指数分布(单位:小时)

(1)任取一只这种灯管, 求能正常使用1000小时以上的概率.

(2)有一只这种灯管已经正常使用了1000 小时以上,求还能使用1000小时以上的概率.

解 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2000}x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$(1) P\{X > 1000\} = 1 - P\{X \leq 1000\}$$

$$= 1 - F(1000)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2000}x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$(2) P\{X > 2000 | X > 1000\} = \frac{P\{X > 2000, X > 1000\}}{P\{X > 1000\}}$$

$$= \frac{P\{X > 2000\}}{P\{X > 1000\}} = \frac{1 - P\{X \leq 2000\}}{1 - P\{X \leq 1000\}}$$

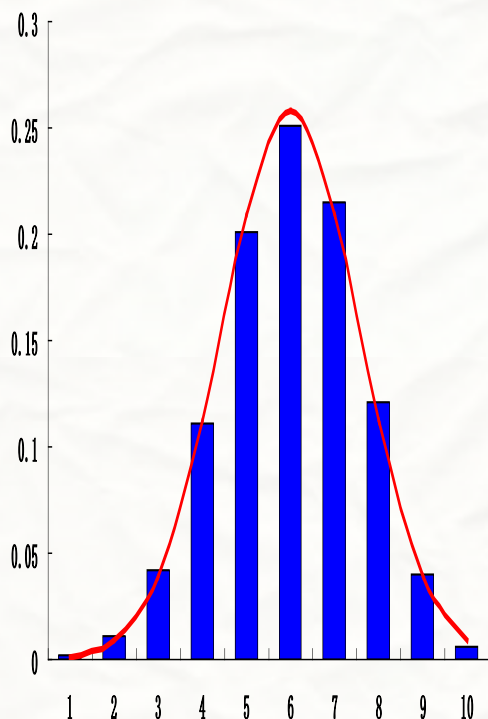
$$= \frac{1 - F(2000)}{1 - F(1000)} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

正是由于指数分布具有缺乏“记忆”的特性. 因而限制了它在机械可靠性研究中的应用, 所谓缺乏“记忆”, 是指某种产品或零件经过一段时间 t_0 的工作后, 仍然如同新的产品一样, 不影响以后的工作寿命值, 或者说, 经过一段时间 t_0 的工作之后, 该产品的寿命分布与原来还未工作时的寿命分布相同, 显然, 指数分布的这种特性, 与机械零件的疲劳、磨损、腐蚀、蠕变等损伤过程的实际情况是完全矛盾的, 它违背了产品损伤累积和老化这一过程。所以, 指数分布不能作为机械零件功能参数的分布形式。

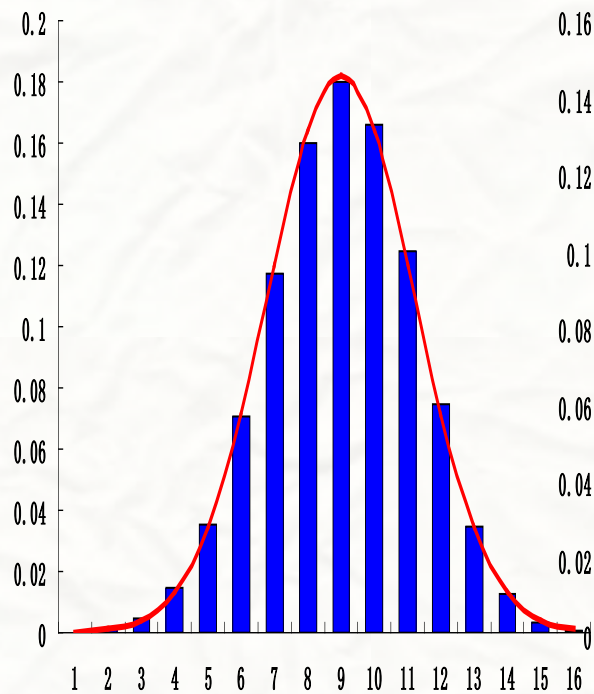
3.*****正态分布(高斯分布) Normal distribution

0) 问题的引入

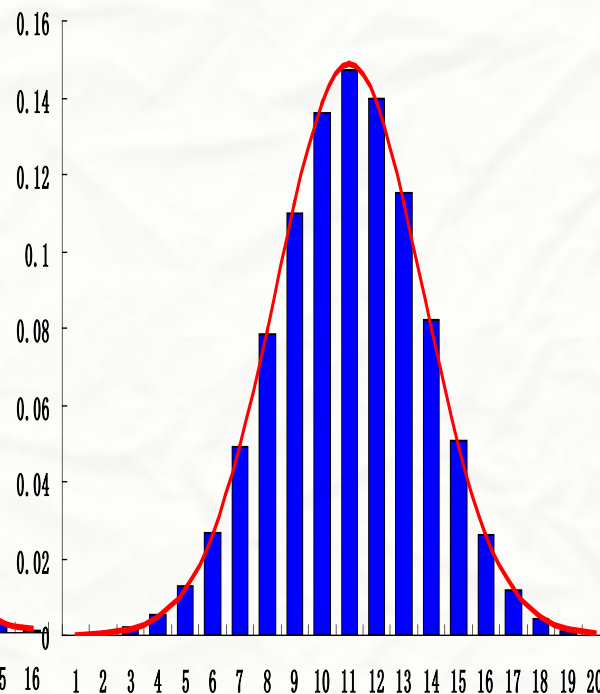
二项分布 $P=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,\dots,n$



$n=10, p=0.6$



$n=20, p=0.6$



$n=30, p=0.6$

随着 n 的增加，近似程度越来越高。而且这条曲线具有中间高两边低的特点

1) 正态分布的历史

1733年，德国数学家和天文学家棣莫佛(De Moivre)在推导二项分布的极限分布时首次提出正态分布。后来拉普拉斯 (Laplace) 将这个结论进一步完善，得到著名的**棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理**。



棣莫佛(De Moivre)



拉普拉斯 (Laplace)

参看<http://songshuhui.net/archives/76501>

1) 正态分布的历史

1809 年，德国数学家高斯（Gauss）率先将正态分布应用于天文学研究。高斯这项工作对后世的影响极大，所以正态分布也被称为高斯分布。



参看<http://songshuhui.net/archives/76501>

2) 正态分布(高斯分布) (Normal distribution)

定义

若r.v X 的概率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

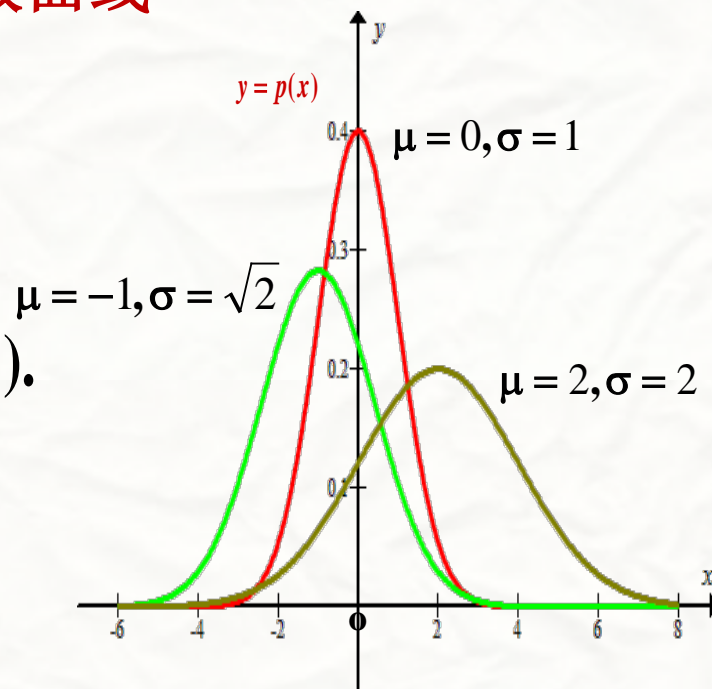
则称 X 服从正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

其中 μ 与 σ ($\sigma > 0$)为常数,

μ 是正态分布的均值,

σ 是其标准差, σ^2 是其方差.

3种不同的正态概率密度函数曲线



曲线呈钟形! 参数不同, 曲线的位置和形状就不同!

3. 正态分布的性质

1) 曲线关于 $x = \mu$ 对称;

2) 当 $x = \mu$ 时, $p(x)$ 取得

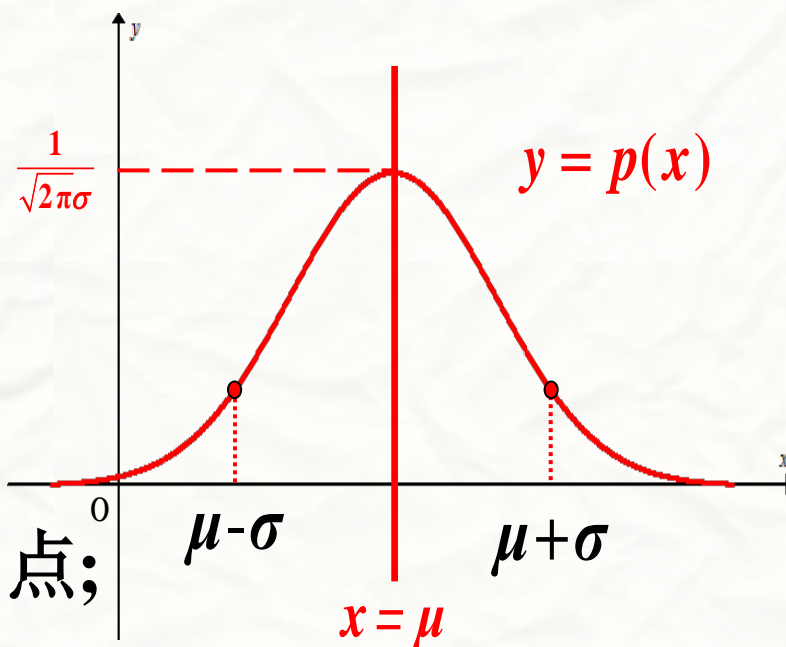
最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$;

3) 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $p(x) \rightarrow 0$,

即曲线以 x 轴为渐近线;

4) 曲线在 $x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点;

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$



3) 正态分布的性质

5) 当固定 σ , 改变 μ 的大小时,
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$p(x)$ 的图形形状不变, 只是沿着 x 轴作平移,

μ 称为位置参数;

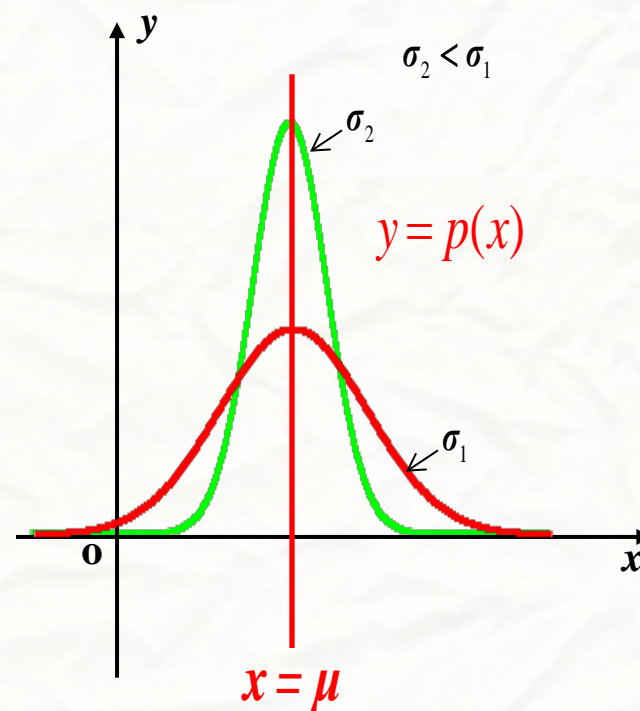
6) 当固定 μ , 改变 σ 的大小时,

$p(x)$ 的图形对称轴不变, 而形状在改变.

σ 越大, 峰值越小, 图形越平缓,

σ 越小, 峰值越大, 图形越陡峭,

σ 称为形状参数.

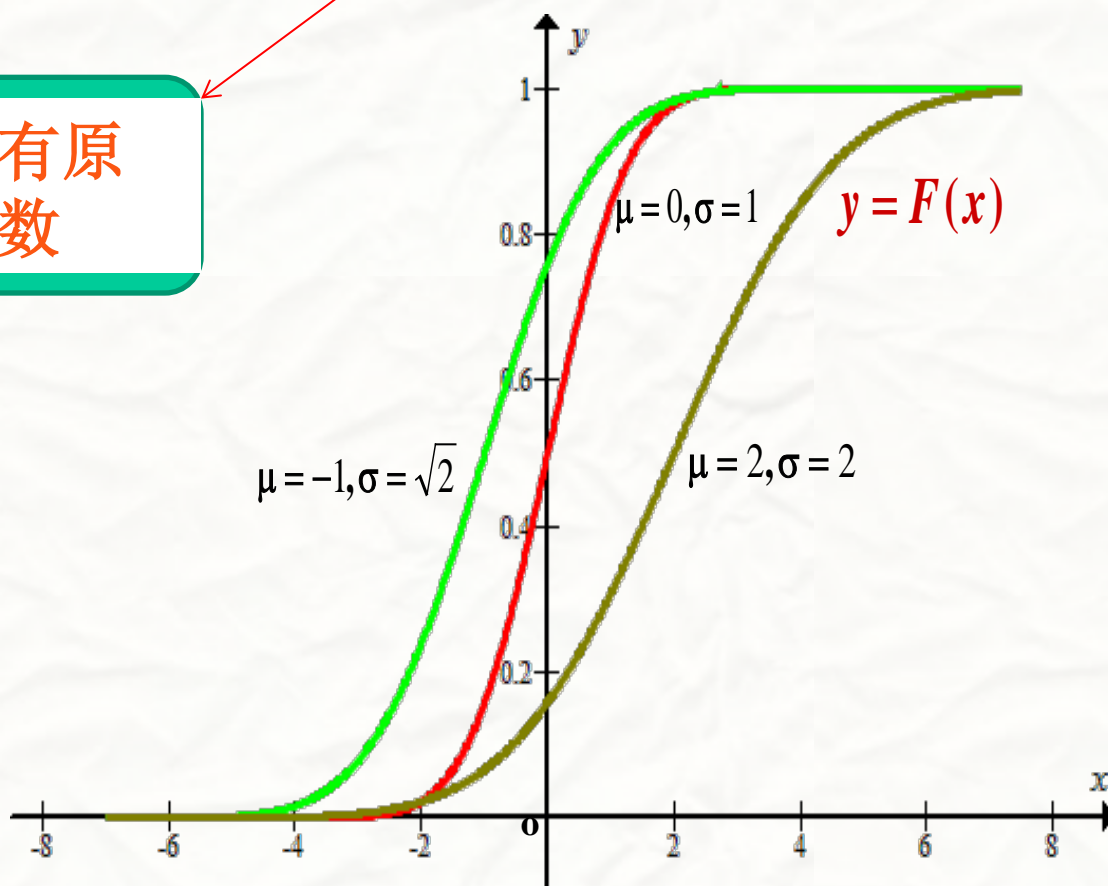


4) 正态分布的分布函数

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad -\infty < x < +\infty$$

? 分布函数有无解析表达式

没有原函数



分布函数没有解析表达式，这是唯一的小遗憾！

5) 标准正态分布 (standard normal distribution)

当正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中 $\mu=0$, $\sigma=1$ 时, 称 X 服从标准正态分布, 记为 $X \sim N(0,1)$, 相应的密度函数记为 $\varphi(x)$,

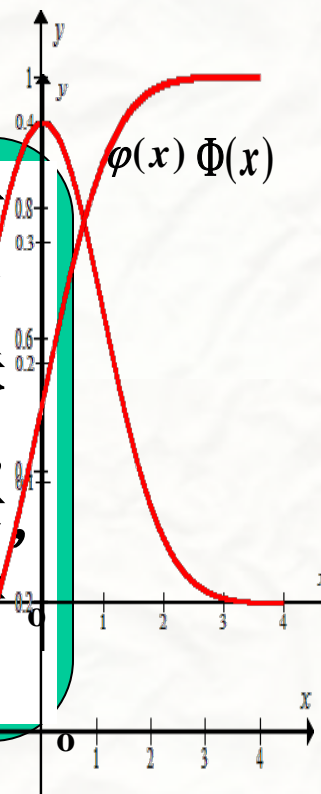
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

相应的分布函数记为 $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < x < \infty$$

标准正态分布
函数也无解析
表达式。

标准正态分布
是正态分布中
最重要最特殊
的一个, 所以
它的待遇很高,
配有专门的符
号!

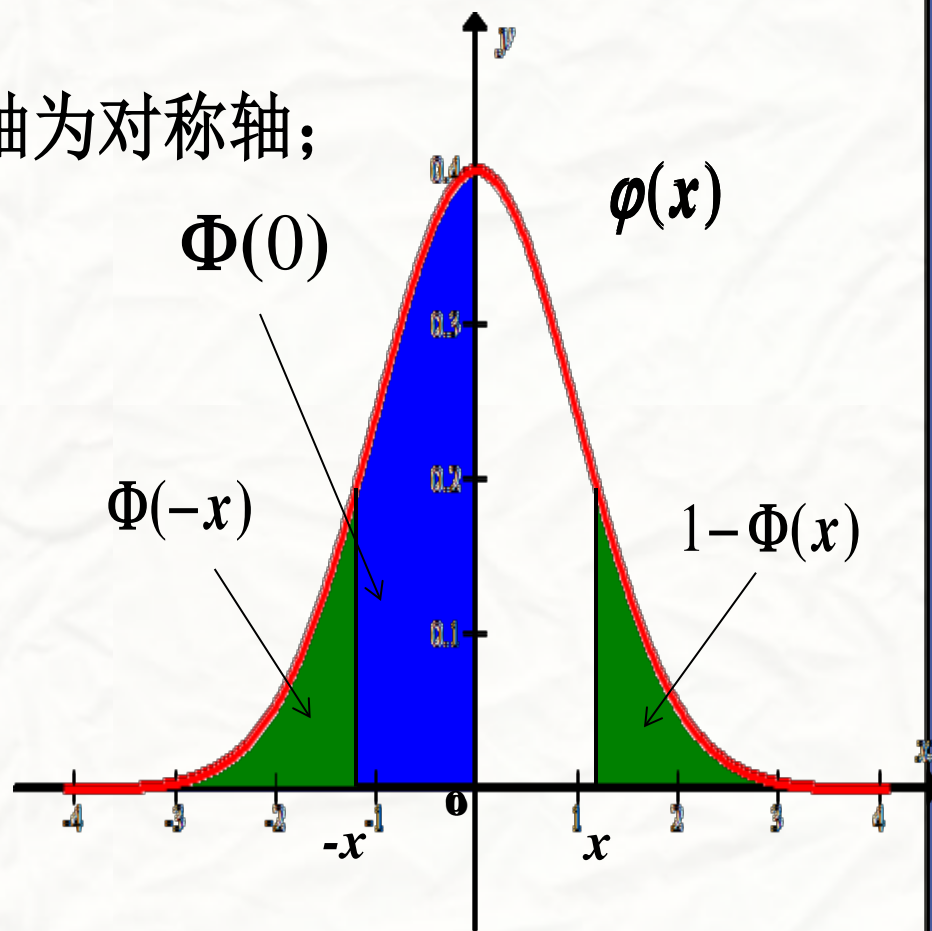


标准正态分布的特有性质：

1) $\varphi(x)$ 为偶函数, 也即以纵轴为对称轴;

2) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$,

$$\Phi(0) = 0.5.$$



3) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

可得 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$

6) 标准正态随机变量落在某个区间的概率计算



由于标准正态分布函数没有解析表达式，如何计算标准正态随机变量落在某个区间的概率

例1 若 $X \sim N(0,1)$, 求 $P\{1 < X \leq 2\}$?

解

$$P\{1 < X \leq 2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= \Phi(2) - \Phi(1)$$

经查标准正态分布表，

知 $\Phi(2) \approx 0.9773$, $\Phi(1) \approx 0.8413$, 则

$$P\{1 < X \leq 2\} \approx 0.9773 - 0.8413 = 0.136.$$

只能借助计算机近似得到！为此，前人利用计算机事先已经制定好标准正态随机变量分布表，我们用时只需查表即得。

🤔 进一步，如何计算一般正态随机变量落在某个区间的概率

例2 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P\{a < X \leq b\} = ?$$



一般正态分布与标准正态分布的关系

重要 结论

如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 令 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$, 那么 $Y \sim N(0, 1)$.

证明: 先求 Y 的分布函数, $\forall y \in R$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq y\right\} \\ &= P\{X \leq \sigma y + \mu\} = \int_{-\infty}^{\sigma y + \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \frac{x - \mu}{\sigma} = t \\ \Downarrow \\ x = \mu + \sigma t \end{array}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

正是标准正态分布函数
所以 $Y \sim N(0, 1)$.

对于任何一般正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 都可通过一个简单线性变换转化成标准正态分布 $N(0, 1)$. 此变换称为标准变换!

例2 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{a < X \leq b\} = ?$

解 由 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 可得

$$\begin{aligned} P\{a < X \leq b\} &= P\left\{\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= P\left\{\frac{a - \mu}{\sigma} < Y \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

本例说明随机变量 X 服从一般正态分布时，如果要计算关于它的概率问题，则可先转化为标准正态分布再进行计算。

例3 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $P\{\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma\}$.

解 由 $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 可得

$$\begin{aligned} P\{\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma\} &= P\{-3 < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 3\} \\ &= P\{-3 < Y \leq 3\} = \Phi(3) - \Phi(-3) \end{aligned}$$

$\Phi(3) = 0.99865$, 则

$$\begin{aligned} P\{\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma\} &= 2\Phi(3) - 1 \\ &= 2 \times 0.99865 - 1 = 0.9973 \end{aligned}$$

由本例可以看出, 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的值落在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的概率为 0.0027, 这就是质量管理上所谓的 6σ 原理.

7) 正态分布的重要性

正态分布是概率统计中最重要的一种概率分布。3个主要原因：

- **应用的广泛性** 统计中的许多统计学方法, 如 χ^2 检验, t 检验, 方差分析, 线性回归等, 都会对数据的正态性有要求;
- **完美性** 正态分布的密度函数图形为光滑钟形曲线, 再加上具有对称性, 使得其很适合当作不少总体的机率模式。当然也有很多其它钟形且对称的分布, 但都不像正态分布, 在分析上如此容易驾驭;
- **奇妙性** 中心极限定理是概率统计中最重要定理 (没有之一)。由于中心极限定理, 使得在很多时候, 正态分布可当做不少大样本的近似分布。

参看<http://health.sohu.com/20160128/n436266142.shtml>

8) 正态分布的重要性的应用



现今德国10马克的钞票上印有高斯(**Gauss**)头像和正态分布概率密度曲线。这也传达一种观点：在高斯的一切科学贡献中，其对人类文明影响最大者，就是这一项。

参看

<http://songshuhui.net/archives/76501>

设 $X \sim N(1, 4)$, 则 $P\{-1 < X \leq 3\} = ?$

- ☐ A $\Phi(3) - \Phi(-1)$
- ☐ B $1 - 2\Phi(1)$
- ☒ C $2\Phi(1) - 1$
- ☐ D $\Phi(3) + 1 - \Phi(1)$

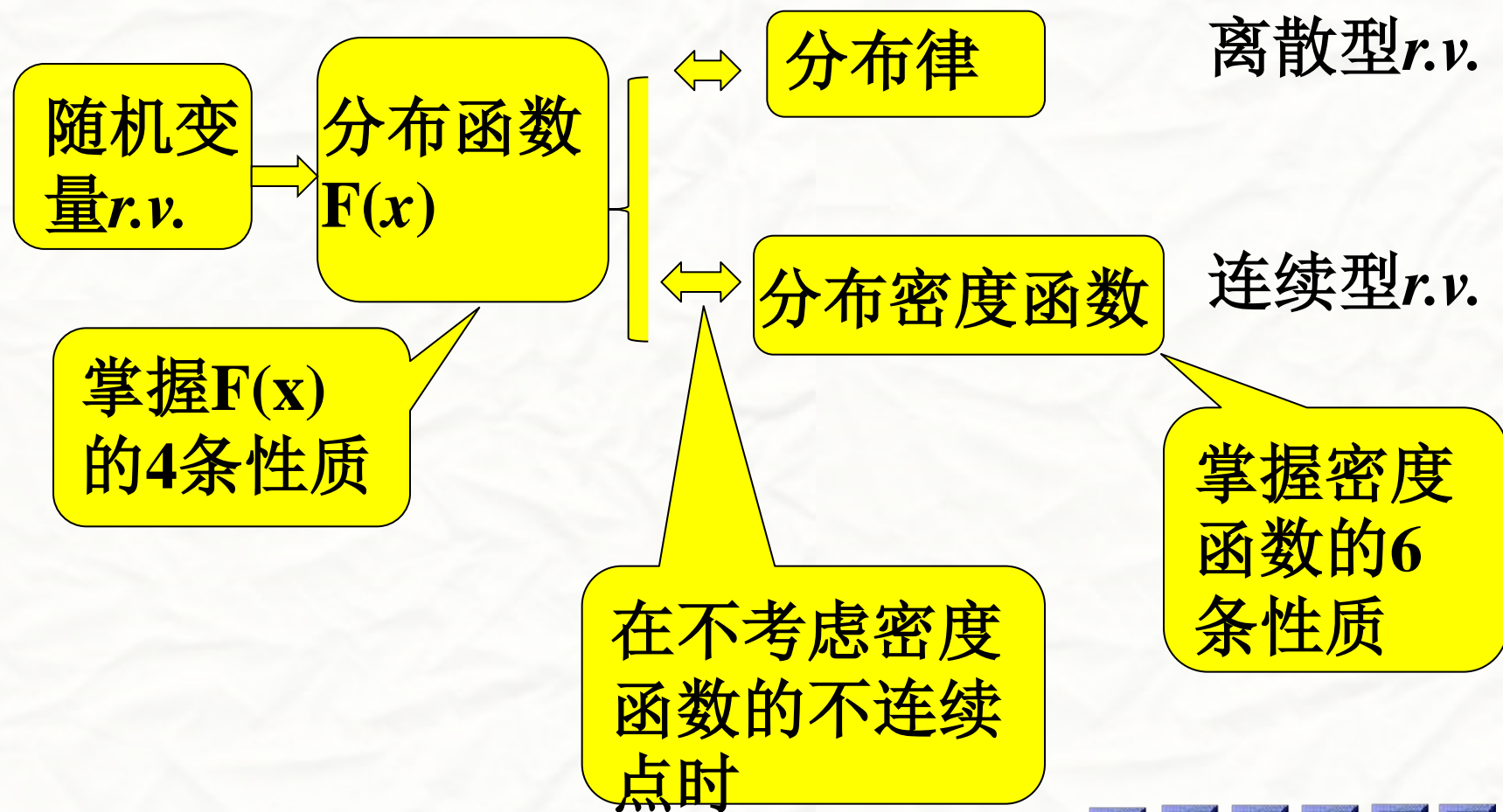
提交

回

停

续

第一节的知识框架



内容小结

1. 连续型随机变量 $F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$

$F(x)$ 为分布函数, $p(x)$ 为概率密度函数.

2. 常见连续型随机变量的分布

{ 均匀分布
正态分布 (高斯分布)
指数分布

再见



备用题

例1-1 设连续型随机变量 X 的分布函数为:

$$F(x) = A + B \arctan x \quad -\infty < x < \infty$$

求(1)常系数 A 及 B ;

(2)随机变量 X 落在 $(-1,1)$ 内的概率;

(3)随机变量 X 的分布密度.

解 (1) $\because F(+\infty) = A + \frac{\pi}{2}B = 1$

$$F(-\infty) = A - \frac{\pi}{2}B = 0$$

$$\text{解之得 } A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi}$$

$$(2) P\{-1 < X < 1\} = F(1) - F(-1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$(3) p(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+x^2}$$

例1-2 设

$$p_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}, & x \geq 0, \quad (a > 0) \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$p_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$p_3(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 上面 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 是否为随机变量 X 的密度函数.

(2) 若是 X 的密度函数,求出 X 的分布函数.

(3)求 $P\{0 \leq X \leq 1\}$.

解 (1)因为在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $p_1(x) \geq 0$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}} dx = -e^{-\frac{x^2}{2a}} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

所以 $p_1(x)$ 为 X 的密度函数.

因为当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $p_2(x) = \frac{1}{2} \cos x < 0$, 所以 $p_2(x)$ 不是 X 的密度函数. 又

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} p_3(x) dx &= \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0 dx \\ &= \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 > 1\end{aligned}$$

所以 $p_3(x)$ 不是 X 的密度函数.

(2) 由(1)知 $p_1(x)$ 为 X 的分布密度, 其分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p_1(t) dt, \text{ 因为}$$

$x < 0$ 时, $p_1(x) = 0$, 所以 $F(x) = 0$

$x \geq 0$ 时

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^x \frac{t}{a} e^{-\frac{t^2}{2a}} dt = -e^{-\frac{t^2}{2a}} \Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}}$$

综上所述

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(3) 求 $P\{0 \leq X \leq 1\}$ 时, 可以使用分布函数 $F(x)$, 也可以使用密度函数 $p_1(x)$. 则

$$P\{0 \leq X \leq 1\} = F(1) - F(0) = 1 - e^{-\frac{1}{2a}} - 0 = 1 - e^{-\frac{1}{2a}}$$

或

$$P\{0 \leq X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}} dx = -e^{-\frac{x^2}{2a}} \Big|_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2a}}$$

例1-3 设随机变量 X 的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} ke^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

试确定常数 k , 并求 $P\{X > 0.1\}$.

解 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} ke^{-3x}dx = 1$

所以 $k = 3$.

$$P\{X > 0.1\} = \int_{0.1}^{+\infty} 3e^{-3x}dx = 0.7408$$

例 2-1 设 k 在 $(0,5)$ 上服从均匀分布, 求方程

$$4x^2 + 4kx + k + 2 = 0$$

有实根的概率.

解 当 $16k^2 - 16(k + 2) \geq 0$ 时,
即 $k^2 - (k + 2) = (k - 2)(k + 1) \geq 0$ 时,
亦即 $k \geq 2$ 或 $k \leq -1$ 时, 有实根,
则有实根的概率为

$$p = \int_2^5 \frac{1}{5} dx = \frac{3}{5}.$$

例 5-1 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩(百分制)，服从正态分布，平均成绩为 **72**分，**96**分以上占考生总数的**2.3**%，试求考生的外语成绩在 **60**分至 **84**分之间的概率。

解 依题意，考生外语成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

其中 $\mu = 72$, 且

$$P\{X > 96\} = 0.023$$

$$\begin{aligned}\text{于是 } P\{X \leq 96\} &= 1 - P\{X > 96\} \\ &= 1 - 0.023 = 0.977\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又} \because P\{X \leq 96\} &= \Phi\left(\frac{96 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{96 - 72}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0.977$$

查表, 知 $\Phi(2) = 0.977$

由 $\Phi(x)$ 的单调增加性, 得 $\frac{24}{\sigma} = 2$

$$\therefore \sigma = 12$$

因而 $X \sim N(72, 12^2)$

故 $P\{60 \leq X \leq 84\}$

$$= \Phi\left(\frac{84-72}{12}\right) - \Phi\left(\frac{60-72}{12}\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1$$

查表，得

$$\Phi(1) = 0.841$$

$$\therefore P\{60 \leq X \leq 84\} = 2 \times 0.841 - 1 = 0.682$$

例5-2 设 X 的密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-(x^2+4x-4)/6}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

求:(1) $P\{1 < x < 3\}$;

(2)使 $\int_C^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^C p(x)dx$ 的 C .

解 因为 $\frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-(x^2+4x-4)/6} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-(x-2)^2/(2 \times 3)}$,

所以, $X \sim N(2,3)$.从而

$$P\{1 < X < 3\} = \Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{3}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1$$

$$= 2\Phi(0.5773) - 1 = 0.438(\text{查表}).$$

(2) 要使 $\int_C^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^C p(x)dx$, 则 C 为概率分布

的对称点. 由正态分布的性质知 $C = \mu = 2$ 为所求.

例5-3 公共汽车车门的高度是按成年男子与门楣碰头的概率不大于0.01设计的,设成年男子身高(单位: 厘米) $X \sim N(170, 6^2)$, 试确定车门应设计的最低高度 h .

解 设车门高度为 h , 则应有 $P\{X > h\} \leq 0.01$.

$$P\{X > h\} = 1 - P\{X \leq h\} = 1 - \Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) \leq 0.01,$$

即 $\Phi\left(\frac{h-170}{6}\right) \geq 0.99$, 查表知 $\frac{h-170}{6} \geq 2.33$, 于是

$$h = 170 + 2.33 \times 6 \approx 184.$$

所以, 车门最低高度应为184厘米.

例5-4 从甲地飞往乙地的航班,每天上午10:10起飞,飞行时间 X 服从均值是4h,标准差是20min的正态分布.

- (1) 该机在下午2:30以后到达乙地的概率是多少?
- (2) 该机在下午2:20以前到达乙地的概率是多少?
- (3) 该机在下午1:50至2:30之间到达乙地的概率是多少?

解 设时间单位为min,则 $X \sim N(240, 20^2)$.

(1) 所求概率为

$$\begin{aligned} P(X \geq 260) &= 1 - \Phi((260 - 240)/20) = 1 - \Phi(1) \\ &= 1 - 0.8413 = 0.1587. \end{aligned}$$

(2) 所求概率为

$$P(X \leq 250) = \Phi((250 - 240)/20) = \Phi(0.5) = 0.6915.$$

(3) 所求概率为

$$\begin{aligned} P(220 \leq X \leq 260) &= 2\Phi(1) - 1 \\ &= 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826. \end{aligned}$$

例6-1 某仪器装有3支独立工作的同型号电子元件,其寿命(单位: h)都服从同一指数分布,密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

试求在仪器使用的最初 $200h$ 内,至少有一个电子元件损坏的概率 α .

解 设 $X_i (i = 1, 2, 3)$ 表示第 i 支元件的使用寿命.

$A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示事件:{在仪器使用最初 $200h$ 内第 i 支电子元件损坏}

$\bar{A}_i (i = 1, 2, 3)$ 表示事件: {在仪器使用最初 200h 内第 i 支电子元件未损坏}

$$P(A_i) = P\{X_i \leq 200\} = \int_0^{200} \frac{1}{600} e^{-\frac{x}{600}} dx = 1 - e^{-\frac{1}{3}}$$

$$\alpha = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - [1 - (1 - e^{-\frac{1}{3}})]^3 = 1 - e^{-1}$$