2.4 关系的特性

定义 设 R 为A上的关系($R \subseteq A \times A$)

(1) R在A上是自反的$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x \rangle \in R)$

(2) R在A上是反自反的$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow \langle x,x \rangle \notin R)$

实例:

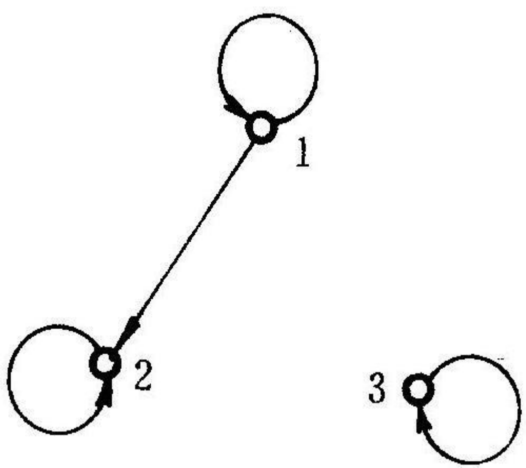
自反：全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

实例（自反）

A={1,2,3}

R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>}



每结点上有自回路

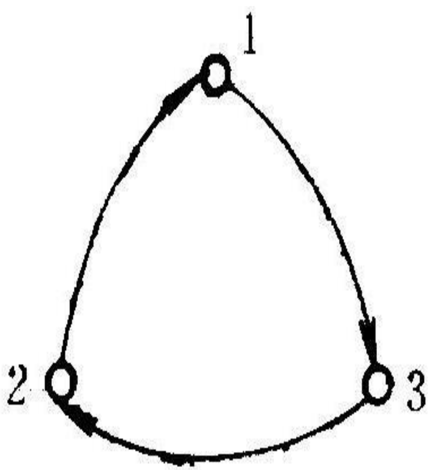
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

主对角线上元素均为 1

实例（反自反）

$A=\{1,2,3\}$

$R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$



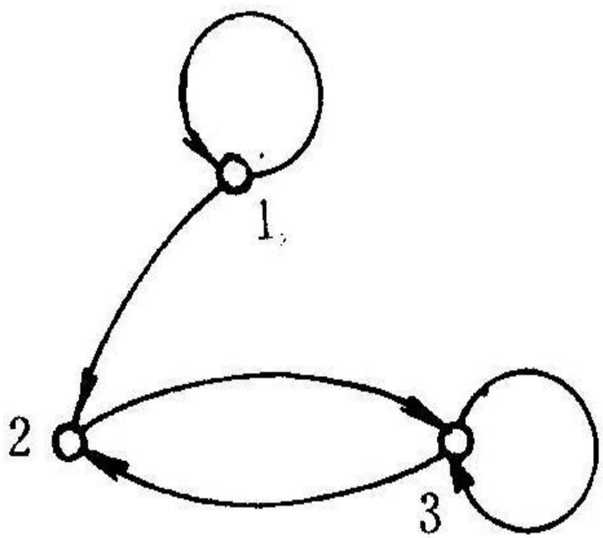
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

每结点上都无自回路

主对角线上元素全为 0

实例

R={<1,1>,<1,2>,<3,2>,<2,3>,<3,3>}



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

既不是自反的也不是反自反的

对称性与反对称性

定义2.12 设 R 为 A上的关系,

(1) R为A上对称的关系

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x,y \in A \wedge \langle x,y \rangle \in R \rightarrow \langle y,x \rangle \in R)$$

(2) R 为A上的反对称关系

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge x \neq y \rightarrow \neg yRx)$$

反对称

$\forall x \forall y(x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \rightarrow x = y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg(x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx) \lor x = y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg(x \in A \land y \in A \land xRy) \lor \neg yRx \lor x = y)$

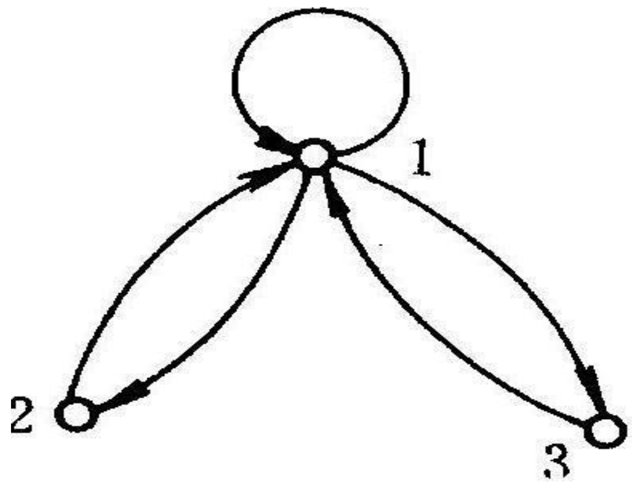
$\Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg(x \in A \land y \in A \land xRy \land x \neq y) \lor \neg yRx)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in A \land y \in A \land xRy \land x \neq y \rightarrow \neg yRx)$

实例（对称）

$A=\{1,2,3\}$

$R=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>,<1,1>\}$



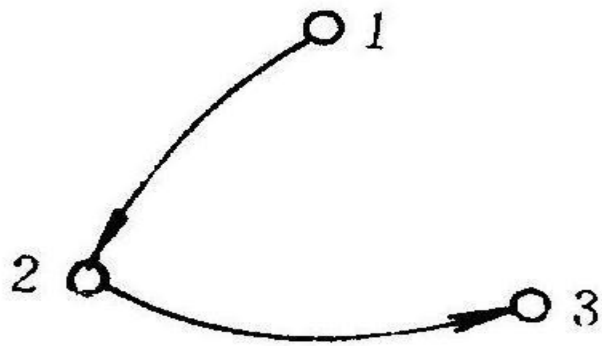
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果有 a 到 b 的弧，
一定有 b 到 a 的弧

关于主对角线对称

实例（反对称）

$A=\{1,2,3\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果存在 a 到 b 的弧，
就不存在 b 到 a 的弧
（注意逆命题不成立）

如果 $a_{ji}=1$，则 $a_{ij}=0$，这里 $i\neq j$
（注意 $a_{ji}=0$，不一定 $a_{ij}=1$）

实例

对称关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

反对称关系：恒等关系I_A和空关系也是A上的反对称关系.

设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$， $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$， $R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1： 对称和反对称；

R_2： 只有对称；

R_3： 只有反对称；

R_4： 不对称、不反对称

传递性

定义 R 是A上的传递关系

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \land <x,y> \in R \land <y,z> \in R \rightarrow <x,z> \in R)$$

实例： A上的全域关系 E_A,恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$，小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$

$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$

$R_3=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$　　　R={<1,3>,<2,3>} (传递)

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

关系性质成立的充要条件

定理 设R为A上的关系, 则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明：略

关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边,是一条有向边	点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则x_i到x_k也有边

非空集合上的空关系是反自反的，对称的，反对称的和传递的，但不是自反的.

空集合上的空关系则是自反的，反自反的，对称的，反对称的和可传递的.

$A=\{1,2,3\}$ $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

反对称 传递

作业

徐 P37　　2.6　2.8

P58　　22　24　30　31