§2.2 功与能

主要内容：

1. 功

2. 保守力的功 势能

3. 动能定理

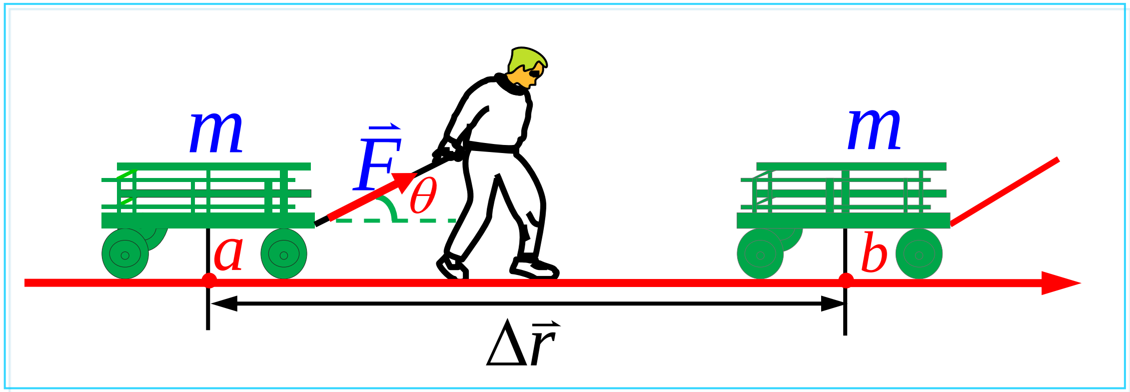
4. 功能原理与机械能守恒定律

2.2.1 功

1.恒力的功

恒力 $\vec{F}$，夹角θ

位移$\Delta\vec{r}$，路程Δs



功

$$A = (F\cos\theta)\Delta s = F\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\theta$$

$$A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

单位：焦耳 J 1J=1N•m

➢ 注意

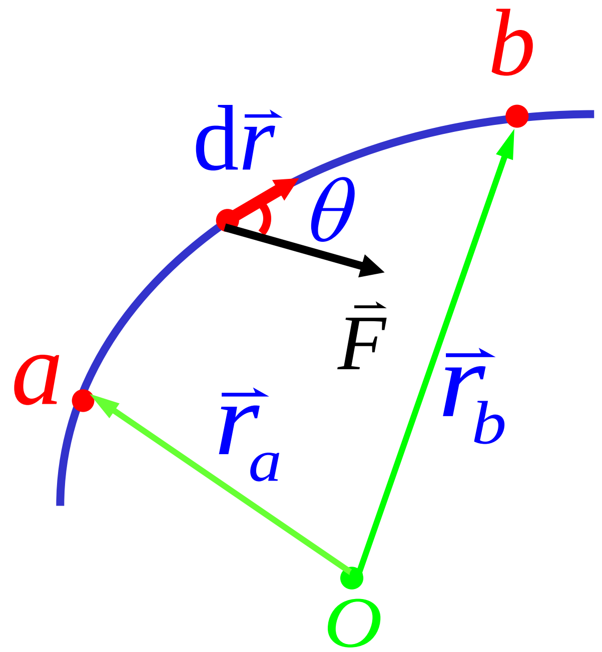
- 功是标量
- 功有正功、负功之分，功的正负功取决于θ。
- 力对物体作负功，也可以说物体反抗外力作功。

2. 变力的功

取元位移$\mathrm{d}\vec{r}$，在$\mathrm{d}\vec{r}$范围内，作用力$\vec{F}$可认为是恒力。

在任一元位移$\mathrm{d}\vec{r}$上，力$\vec{F}$所作的元功

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta$$



元功等于力与元位移的标积

或 $$\mathrm{d}A = F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$

由a点移动到b点，总功

$$A = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b F\cos\theta\,\mathrm{d}s$$

功是过程量，是力的一种空间累积效应

➢ 讨论

(1) 在直角坐标系中

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b (F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z)$$

(2) 合力 $\vec{F}$ 的功 —— **等于各分力沿同一路径所作功的代数和**

$$A=\int_{r_a}^{r_b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_a^b(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_a^b\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_a^b\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\cdots+\int_a^b\vec{F}_n\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

(3) 功率：做功的快慢

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

睡觉	70-80W	闲谈	70-80W
走路	170-380W	听课	70-140W
跑步	700-1000W	踢足球	630-840W

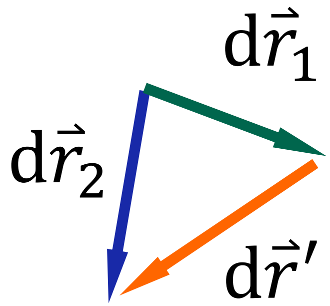
单位：瓦特 W 1W=1N•m/s

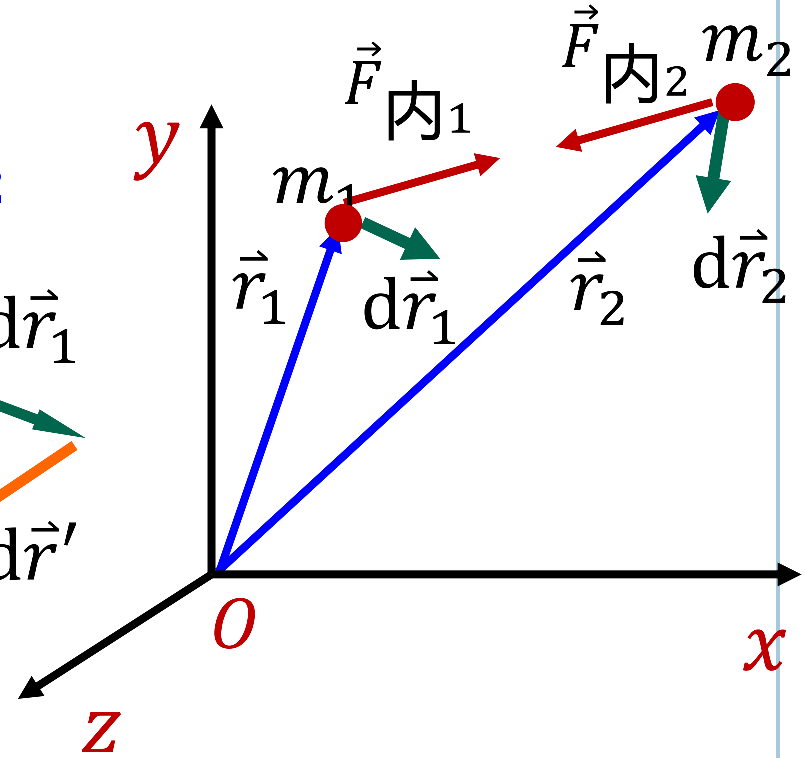
例 成对力的总功

作用力和反作用力：$\vec{F}_{内1}$、$\vec{F}_{内2}$

$$\mathrm{d}A_1 = \vec{F}_{内1} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1$$

$$\mathrm{d}A_2 = \vec{F}_{内2} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$





m_2相对于m_1的位移

$$\mathrm{d}\vec{r}' = \mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1$$

作用力和反作用力的元功之和：

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}A_1 + \mathrm{d}A_2 = \vec{F}_{内2} \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1) = \vec{F}_{内2} \cdot \mathrm{d}\vec{r}'$$

- **成对力的总功只与相互作用力及相对位移有关，而与每个质点各自的运动无关**

----与参考系的选择无关

例 设作用于质量$m = 2\text{kg}$的物体上的力为$F = 6t$，在该力作用下物体由静止出发，沿力的作用方向作直线运动。

求 在前2s时间内，这个力所作的功。

解 列方程

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{m} = \frac{6t}{m}$$

分离变量，并考虑初始条件，积分

$$\int_0^{\upsilon} \mathrm{d}\upsilon = \int_0^t \frac{6t}{m}\mathrm{d}t \Rightarrow \upsilon = \frac{3}{m}t^2$$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{m}t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{3}{m}t^2\mathrm{d}t$$

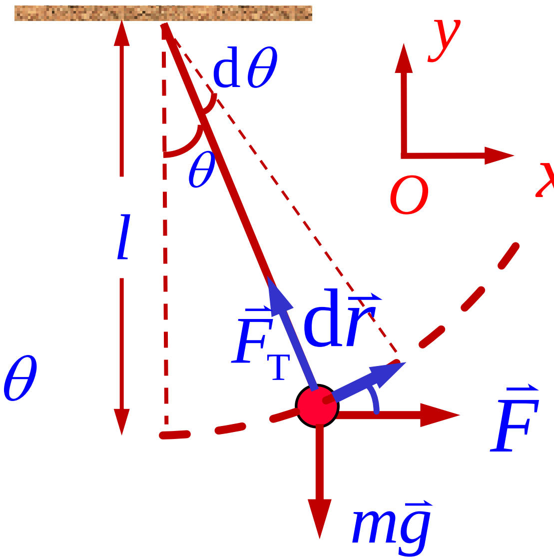
在前2s力所作的功为

$$A = \int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^2 6t\frac{3}{m}t^2\mathrm{d}t = 36\text{J}$$

例 有一长为l、质量为m的单摆，最初处于铅直位置且静止。现用一水平力$\vec{F}$作用于小球上，使单摆非常缓慢的上升（即上升过程中每一位置近似平衡）。用摆球与铅直位置的夹角θ表示单摆的位置。

求 当θ由0增大到θ_0的过程中，此水平力$\vec{F}$所作的功?

解 摆球受力分析，建立坐标系如图。



列方程 $$\begin{cases} F - F_{\mathrm{T}}\sin\theta = 0 \\ F_{\mathrm{T}}\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

得 $$F = mg\tan\theta$$

元功 $$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\theta = F\mathrm{d}s\cos\theta$$

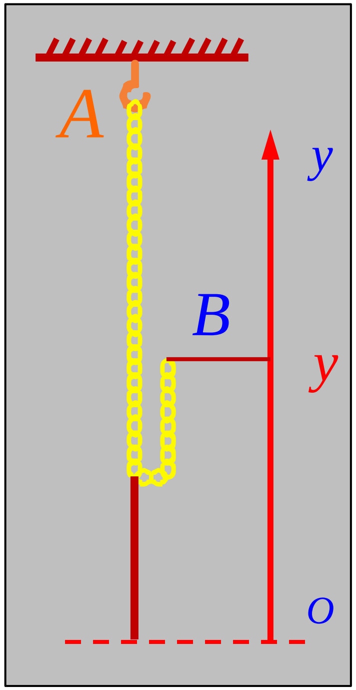
$$= Fl\cos\theta\mathrm{d}\theta = mg\tan\theta l\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

总功 $$A = \int_0^{\theta_0} mgl\sin\theta\mathrm{d}\theta = mgl(1-\cos\theta_0)$$

例 一条长为l、质量为m的均质柔绳AB，A端挂在天花板的钩上，自然下垂。现将B端沿铅垂方向提高到与A端同一高度处。

求 该过程中重力所作的功。

解 取绳自然下垂时B端位置为坐标原点，铅垂向上为Oy轴正方向。



设B 端提升过程中的某一时刻坐标为y

绳提起部分所受重力为 $\frac{1}{2}y\frac{m}{l}g$

取重力元位移dy，则重力在元位移上的元功为

$$dA = F_y dy = -\frac{1}{2}\frac{m}{l}gy dy$$

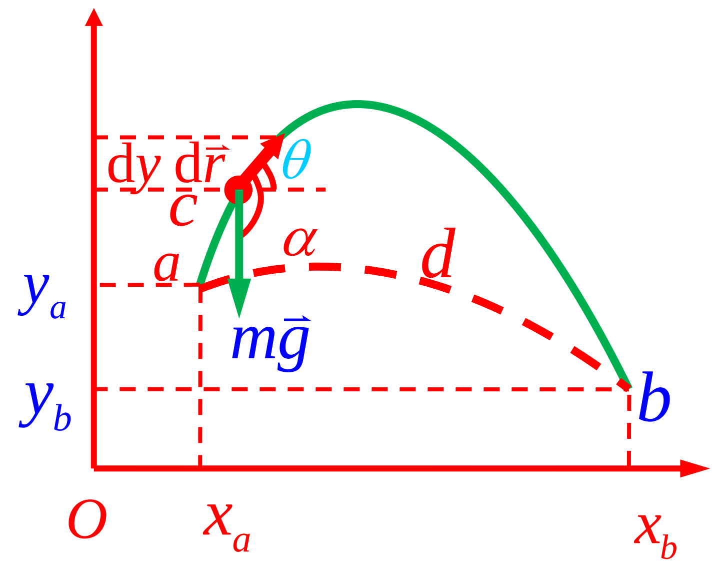
该过程中重力所作的总功为

$$A = \int dA = \int_0^l (-\frac{1}{2}\frac{m}{l}gy)dy = -\frac{1}{4}mgl$$

2.2.2 保守力的功 势能

1.几种常见力的功

◆ 重力的功



元功 $\mathrm{d}A = \vec{F}_{\mathrm{G}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$= mg\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\alpha$$

$$= mg\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$

$$= -mg\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\sin\theta = -mg\mathrm{d}y$$

总功 $A_{ab} = \int \mathrm{d}A = \int_{y_a}^{y_b} -mg\mathrm{d}y = mgy_a - mgy_b$

➢ **结论**

- **重力所作的功仅和物体的始末位置有关，而与路径无关。**
- **物体沿*acbda*闭合路径*L*运动一周，重力的功**

$$A = \oint_L m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

◆ 万有引力的功

$$\mathrm{d}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{r} = 2\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathrm{d}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \mathrm{d}r^2 = 2r\mathrm{d}r$$

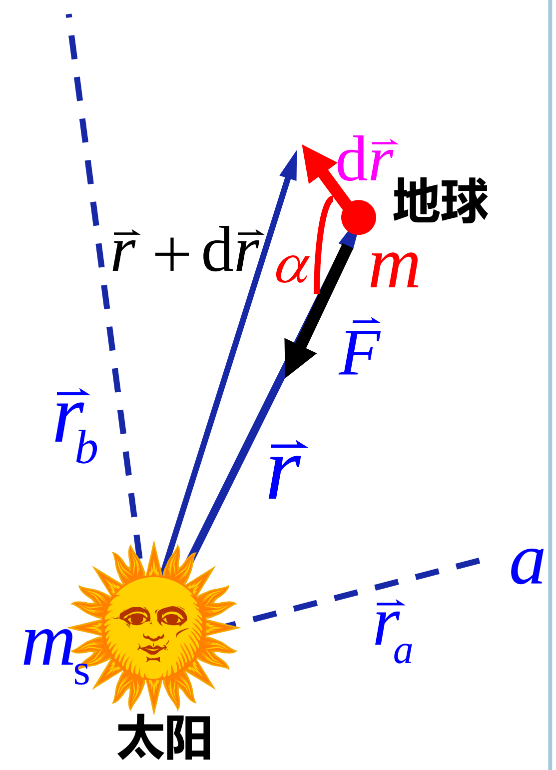
$$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = r\mathrm{d}r$$

元功 $$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= -\frac{Gmm_{\mathrm{s}}}{r^3}\vec{r}\bullet\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{Gmm_{\mathrm{s}}}{r^2}\mathrm{d}r$$

总功 $$A_{ab} = -Gmm_{\mathrm{s}}\int_{r_a}^{r_b}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$= -\left(\frac{Gmm_{\mathrm{s}}}{r_a} - \frac{Gmm_{\mathrm{s}}}{r_b}\right)$$



➢ 结论

- **万有引力的功仅和物体的始末位置有关，而与路径无关。**
- **沿任意闭合路径L运动一周，万有引力的功**

$$A = \oint_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

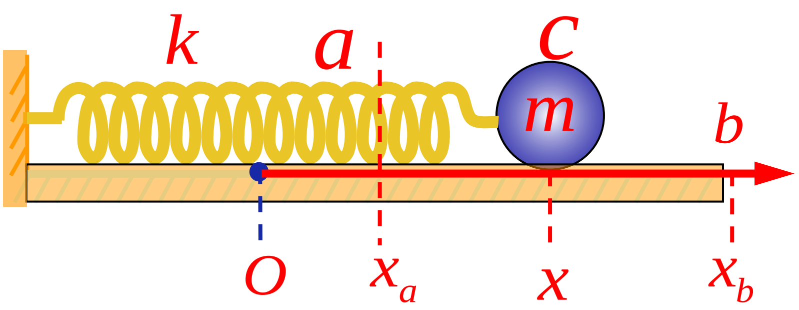
◆ 弹性力的功

元功

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \vec{F}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\pi$$

$$= -kx\mathrm{d}x$$



总功

$$A_{ab} = \int_{x_a}^{x_b} -kx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}k{x_a}^2 - \frac{1}{2}k{x_b}^2$$

➢ 结论

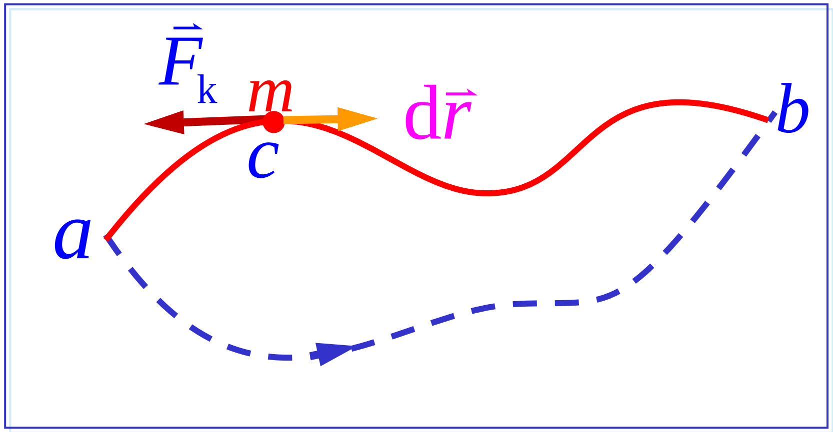
- **弹性力所作的功仅和物体的始末位置有关，而与路径无关。**
- **沿任意闭合路径L运动一周，弹性力所作的功**

$$A = \oint_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

◆ 摩擦力的功

元功 $\mathrm{d}A = \vec{F}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$= F_{\mathrm{k}} \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \cos\pi = -F_{\mathrm{k}} \mathrm{d}s$



总功 $A_{ab} = \int \mathrm{d}A = -F_{\mathrm{k}} \int_a^b \mathrm{d}s$

$= -F_{\mathrm{k}} s_{ab}$ (F_{k}为常量)

➢ **结论:** **摩擦力的功与路径有关。**

2. 保守力

- 保守力: **作功只与物体始末位置有关，而与物体运动路径无关的力。**(重力、万有引力、弹性力都是保守力)(保守力场)
- 非保守力: **作功与物体运动路径有关的力。**(摩擦力是非保守力)
- **保守力沿任意闭合路径一周所作的功为零，即** $\oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$

3. 势能

◆**势能的定义**

重力的功 $A_G = mgy_a - mgy_b = -(mgy_b - mgy_a)$

弹性力的功 $A_T = \frac{1}{2}kx_a^2 - \frac{1}{2}kx_b^2 = -(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2)$

万有引力的功 $A_w = -[(-\frac{Gmm_s}{r_b}) - (-\frac{Gmm_s}{r_a})]$

保守力的功可写成 $A_p = -(E_{pb} - E_{pa})$

➢结论：**位置函数E_p被称为质点的势能，则**

$$E_{pb} - E_{pa} = -A_p$$

在保守力场中，与保守力相关的势能增量等于保守力所作功的负值。

◆ 势能的讨论

- 只有在保守力的情况下才能引入势能的概念；对于非保守力，不存在势能的概念。
- 要确定保守力场中某一点势能，必须首先选定势能零点。

保守场中质点在任一位置时的势能计算公式为

$$E_{pa}=\int_a^{b(\text{势能零点})}\vec{F}_{\text{保}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

质点在任一位置时的势能等于质点从该位置经任意路径移动到势能零点时保守力所作的功。

- 势能的数值只有相对意义，但势能之差有绝对意义（势能的增量与势能零点的选择无关）；
- 势能为系统所有；从场的观点来看，势能属于保守力场。
- 保守力的功与势能的关系： $A_{\text{保}}=-(E_{\mathrm{p}2}-E_{\mathrm{p}1})=-\Delta E_{\mathrm{p}}$

$$A_{保} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

保守力在某一过程所作的功等于该过程的始末两个状态势能增量的负值。

◆ 力学中常见势能的表达式

重力势能 $E_p = mgy$ **取地面为重力势能零点（即$y=0$处）**

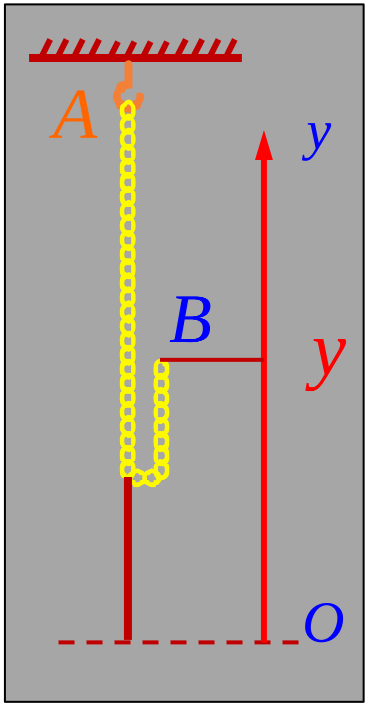
万有引力势能 $E_p = -\dfrac{Gm_s m}{r}$ **取无穷远处为引力势能零点（即$r=\infty$处）**

弹性势能 $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ **取弹簧自然长度时的端点为弹性势能零点（即$x=0$处）**

例 一条长为l、质量为m的均质柔绳AB，A端挂在天花板的钩上，自然下垂。现将B端沿铅垂方向提高到与A端同一高度处。

求 该过程中重力所作的功。

解二 取绳自然下垂时B端位置为势能零点



绳自然下垂时，质心的重力势能为：

$$E_p = mg\frac{l}{2}$$

B端沿铅垂方向提高到与A端同一高度处，质心的重力势能为：

$$E_p = mg\frac{3l}{4}$$

$$A_{保} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -(mg\frac{3l}{4} - mg\frac{l}{2}) = -\frac{mgl}{4}$$

◆ 保守力与势能的关系

$$\mathrm{d}A=\vec{F}_c\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\mathrm{d}E_\mathrm{p} \qquad (1)$$

直角坐标系中，$\mathrm{d}E_\mathrm{p}$的全微分

$$\mathrm{d}E_\mathrm{p}=\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k})\cdot(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k})$$

$$=(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k})\cdot\mathrm{d}\vec{r} \qquad (2)$$

比较(1)和(2)式

$$\vec{F}_c=-(\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\vec{k})=-\nabla E_\mathrm{p}$$

保守力等于相关势能梯度的负值

分量式：

$$F_x=-\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x} \qquad F_y=-\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y} \qquad F_z=-\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}$$

例 有一双原子分子由A、B两原子组成，设A原子位于坐标原点，B原子与A原子的间距为x，这两原子之间的作用力为分子力（分子力是保守力，可用势能来描述），且这两原子相互作用的势能函数可以表示为

$$E_p(x)=\frac{a}{x^{3.4}}-\frac{b}{x^2}$$

式中a和b为正常数，x以m为单位，势能$E_p(x)$以J为单位。

求 (1) 势能 $E_p(x)=0$ 时，$x=?$

(2) 原子间的相互作用力和平衡位置。

解 (1) 由 $\frac{a}{x^{3.4}}-\frac{b}{x^2}=0$ 解得 $x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1.4}}$

当$x\to\infty$时，上述方程也能成立

则 $x\to\infty$ 也是一个解。

(2) 保守力等于相关势能梯度的负值，即

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(x)}{\mathrm{d}x} \quad \Leftarrow \quad E_\mathrm{p}(x) = \frac{a}{x^{3.4}} - \frac{b}{x^2}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a}{x^{3.4}} - \frac{b}{x^2}\right) = \frac{3.4a}{x^{4.4}} - \frac{2b}{x^3}$$

平衡位置，$F_x = 0$

由 $$\frac{3.4a}{x^{4.4}} - \frac{2b}{x^3} = 0$$

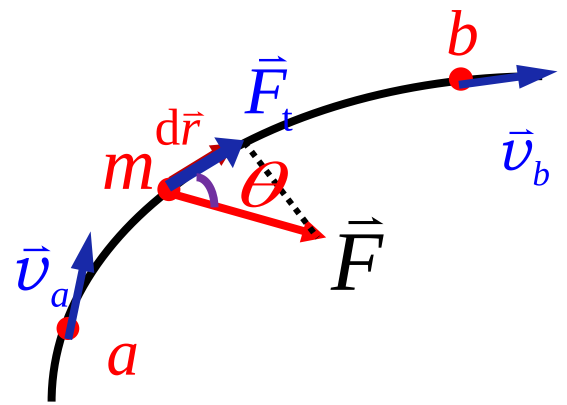
解得 $$x = \left(\frac{1.7a}{b}\right)^{\frac{1}{1.4}}$$ (平衡位置)

$x = \infty$ (舍去)

2.2.3 动能定理

1. 质点的动能定理

力 $\vec{F}$ **在元位移** $\mathrm{d}\vec{r}$ **上所作的元功**



$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\theta\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = F_t\mathrm{d}s$$

F_{t}**为** $\vec{F}$ **切向分力** $\quad F_{\mathrm{t}} = ma_{\mathrm{t}}$

$$\mathrm{d}A = ma_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\upsilon = m\upsilon\mathrm{d}\upsilon$$

m为常量 $\boxed{\mathrm{d}A = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)}$ **(动能定理的微分形式)** 动能 $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

$$A_{ab} = \int_a^b \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right) \Rightarrow \boxed{A_{ab} = \frac{1}{2}m\upsilon_b^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_a^2}$$ **(动能定理)**

$$A_{ab} = \frac{1}{2}m\upsilon_b^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_a^2$$ （动能定理）

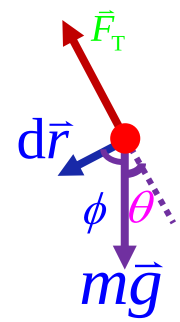
合力对质点所作的功等于质点始、末两状态动能的增量。

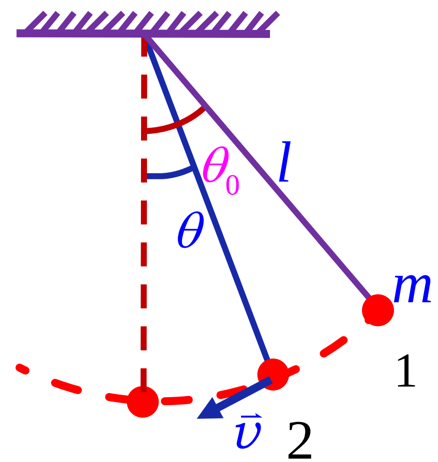
➢ 讨论

- **动能** $E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ **是一个由物体的运动状态所决定的状态量；**
- **外力可以通过作功改变其物体的动能；**
- **外力的功是物体动能变化的量度；**
- **动能定理只适用于惯性系，具有惯性系中的形式不变性。**

例 质量为m的小球，系在长为l的细绳下端，绳的上端固定在天花板上，构成一单摆，如图。开始时，把绳子拉到与铅垂线成θ_0角处，然后放手使小球沿圆弧下落。

求 绳与铅垂线成θ角时小球的速率。





解 受力如图，取元位移 $\mathrm{d}\vec{r}$

由质点的动能定理得

$$A=\int_1^2 \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} =\int_1^2 (\vec{F}_{\mathrm{T}}+m\vec{g})\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_1^2 \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_1^2 m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r} =\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

其中，张力的功 $\int_1^2 \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0$

重力的功 $\int_1^2 m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_1^2 mg\cos\phi \mathrm{d}s =\int_1^2 mg\sin\theta \mathrm{d}s$

按照运动学中对角位移正负的规定，这里$\mathrm{d}\theta$为负，则

$$\mathrm{d}s=-l\mathrm{d}\theta$$

且初始条件为 $\theta=\theta_0$

$$\upsilon_0=0$$

有 $A=\int_1^2 mg\sin\theta\mathrm{d}s=-\int_{\theta_0}^{\theta} mgl\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}m\upsilon^2$

$$mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

故得 $\upsilon=\sqrt{2gl(\cos\theta-\cos\theta_0)}$

例 质量为m的质点，系在一端固定的绳子上且在粗糙水平面上作半径为R的圆周运动。当它运动一周后，由初速v_0减小为$v_0/2$。

求 (1) 摩擦力所作的功；(2) 滑动摩擦系数；(3) 静止前质点运动了多少圈?

解 质点在运动过程中，受重力、支承力和摩擦力，但只有摩擦力作功

(1) 根据质点的动能定理，摩擦力的功

$$A=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m(\frac{v_0}{2})^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{3}{8}mv_0^2$$

(2) 因摩擦力$F_k=\mu mg$ 方向与运动方向相反

$$A=\int_0^{2\pi R}F_k\cos\theta\mathrm{d}s=-\int_0^{2\pi R}\mu mg\mathrm{d}s=-\mu mg\cdot 2\pi R=-\frac{3}{8}mv_0^2$$

可得 $$\mu=\frac{3v_0^2}{16\pi Rg}$$

(3) 设静止前质点运动了n圈

$$A_n=\int_0^{n\cdot 2\pi R}F_{\mathrm{k}}\cos\theta\mathrm{d}s=-\int_0^{n\cdot 2\pi R}\mu mg\mathrm{d}s$$

$$=-n\mu mg\cdot 2\pi R$$

由质点的动能定理有

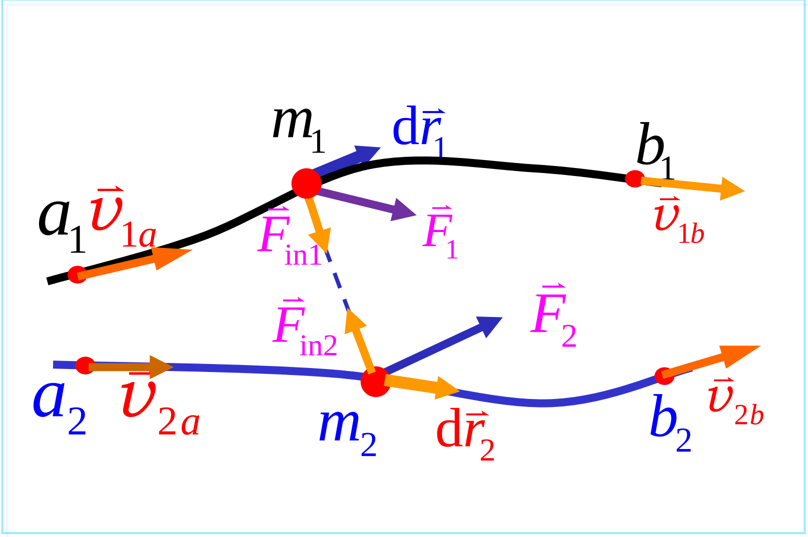
$$A_n=-n\mu mg\cdot 2\pi R=0-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2$$

可得

$$n=\frac{4}{3}\text{(圈)}$$

2. 质点系的动能定理

$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$ **外力，** $\vec{F}_{in1}$、$\vec{F}_{in2}$ **内力**



根据质点的动能定理

对m_1： $$A_1=\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1+\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_{in1}\cdot d\vec{r}_1$$

$$=\frac{1}{2}m_1v_{1b}^2-\frac{1}{2}m_1v_{1a}^2$$

对m_2： $$A_2=\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2+\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_{in2}\cdot d\vec{r}_2=\frac{1}{2}m_2v_{2b}^2-\frac{1}{2}m_2v_{2a}^2$$

两式相加 $$\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1+\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2+\int_{a_1}^{b_1}\vec{F}_{in1}\cdot d\vec{r}_1+\int_{a_2}^{b_2}\vec{F}_{in2}\cdot d\vec{r}_2$$

$$=(\frac{1}{2}m_1v_{1b}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2b}^2)-(\frac{1}{2}m_1v_{1a}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2a}^2)$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \int_{a_1}^{b_1} \vec{F}_{in1} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{a_2}^{b_2} \vec{F}_{in2} \cdot d\vec{r}_2$$

$$= (\frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1b}^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{2b}^2) - (\frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1a}^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{2a}^2)$$

$$A_{外} + A_{内} = (E_{kb1} + E_{kb2}) - (E_{ka1} + E_{ka2}) = E_{kb} - E_{ka}$$

推广到n个质点的质点系

$$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{kb} - E_{ka}}$$ **(质点系的动能定理)**

所有外力和内力对质点系作功的总和等于质点系动能的增量

- **注意**
  - **系统内力的功也可以改变系统的动能。**
  - **质点系各质点无相对位移时内力的功等于零。**

应用动能定理求解力学问题的一般步骤

$$A_{ab}=\frac{1}{2}m\upsilon_b^2-\frac{1}{2}m\upsilon_a^2$$

$$A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}$$

(1) 确定研究对象；

质点或质点系。

(2) 分析研究对象受力情况和各力的作功情况；

质点系必须区分外力和内力。

(3) 选定研究过程；

要确定初、末状态，及其对应的动能。

(4) 列方程；

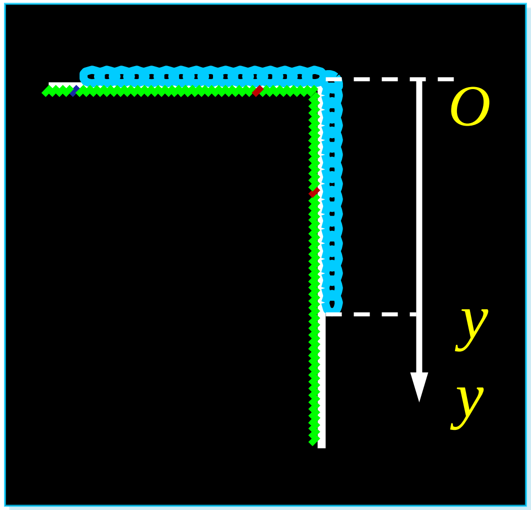
根据动能定理列出方程，并列出必要的辅助性方程。

(5) 解方程，求出结果。并对结果进行必要的讨论。

例 长为l的均质绳索，部分置于水平面上，另一部分自然下垂，如图所示。已知绳索与水平面间的静摩擦系数为μ_S，滑动摩擦系数为μ_k。

求 (1) 满足什么条件时，绳索将开始滑动?

(2) 若下垂长度为b时，绳索自静止开始滑动，当绳索末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少?



解 建立如图所示坐标系，以向下为正方向。

以绳索的水平部分为研究对象，绳索每单位长度的质量为ρ

设当绳索下垂部分的端点坐标为$y=b_0$时，达到下滑临界条件

水平部分受到的摩擦力达到最大静摩擦力

$$F_{S\max} = \mu_S \rho (l - b_0) g$$

受到下垂部分的拉力 $F_1 = \rho b_0 g$

则有： $\rho b_0 g-\mu_S\rho(l-b_0)g=0$ 即 $b_0=\dfrac{\mu_S}{1+\mu_S}l$

当 $y>b_0$，拉力大于最大静摩擦力，绳索将开始滑动。

(2) 若下垂长度为b时，绳索自静止开始滑动，当绳索末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少？

以整个绳索为研究对象，绳索在运动过程中各部分之间相互作用的内力的功之和为零。

重力的功为 $A=\int_b^l \rho yg\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\rho g(l^2-b^2)$

摩擦力的功为 $A'=-\int_b^l \mu_k\rho g(l-y)\mathrm{d}y$

根据动能定理，有 $\dfrac{1}{2}\rho g(l^2-b^2)-\dfrac{1}{2}\mu_k\rho g(l-b)^2=\dfrac{1}{2}\rho l\upsilon^2-0$

解得

$$\upsilon=\sqrt{\frac{g}{l}(l^2-b^2)-\frac{\mu_k g}{l}(l-b)^2}$$

2.3.4 功能原理与机械能守恒定律

1.功能原理

由系统的动能定理有

$$A_{外} + A_{内} = E_{kb} - E_{ka}$$

$$A_{内} = A_{保内} + A_{非保内}$$

$$A_{外} + A_{保内} + A_{非保内} = E_{kb} - E_{ka}$$

$$A_{保内} = -\Delta E_{p} = -(E_{pb} - E_{pa})$$

$$A_{外} + A_{非保内} = (E_{kb} + E_{pb}) - (E_{ka} + E_{pa})$$

$$\boxed{A_{外} + A_{非保内} = E_{b} - E_{a}}$$ **(功能原理)**

作用于质点系内各质点上的所有外力和非保守内力在某一过程中作功的总和，等于质点系机械能的增量。

2. 机械能守恒定律

系统的功能原理

$$A = A_{外} + A_{非保内} = E_b - E_a$$

当 $A = A_{外} + A_{非保内} = 0$

则 $E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = 恒量$ **(质点系的机械能守恒定律)**

如果系统中只有保守内力作功，而其它内力和外力都不作功，或作功的总和始终为零，则系统总机械能保持不变。

◆ 普遍的能量守恒定律

在一个孤立系统（即不受外界作用的系统）内，能量可以有一种形式转换为另一种形式，但系统的总能量保持不变。

应用功能原理或机械能守恒定律解题步骤

$$A_{外}+A_{非保内}=E_b-E_a$$

(1) 选取研究对象。质点系

(2) 分析受力和守恒条件。

判断是否满足机械能守恒条件

如不满足，则应用功能原理求解。

$$A=A_{外}+A_{非保内}=0$$

$$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=恒量$$

(3) 明确过程的始、末状态。

需要选定势能的零势能位置。

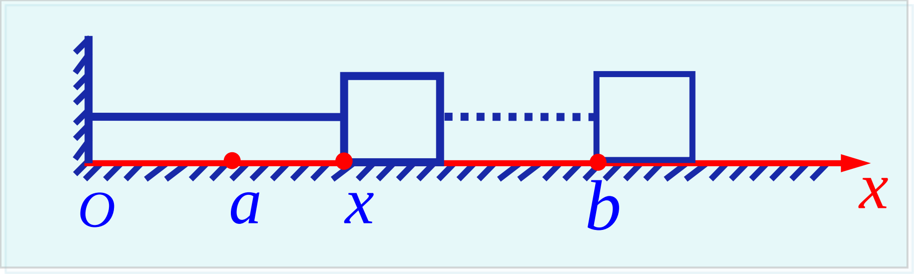
(4) 列方程。

(5) 解方程，求出结果。

(6) 讨论解的物理意义。

例 质量为m的滑块置于粗糙水平桌面上，并系于橡皮绳的一端，橡皮绳的另一端系于墙上。橡皮绳原长为a，处于拉伸状态的橡皮绳相当于劲度系数为k的弹簧。滑块与桌面的摩擦系数为μ。现将滑块向右拉伸至橡皮绳长为b后再由静止释放。

求 滑块撞击墙时的速度多大?



解 取坐标系如图

设滑块撞墙时的速度为υ

受力分析 $b \to a: F = -k(x-a)$ ，$F_k = \mu mg$

$a \to O:\ F_k = \mu mg$

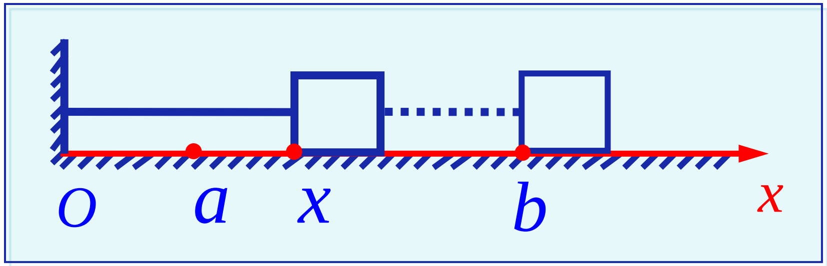
方法1：对全过程应用动能定理

$$A = \int_b^a F\cos\theta \mathrm{d}x + \int_b^O \mu mg \mathrm{d}x = \int_b^a [-k(x-a)]\mathrm{d}x - \mu mgb = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

由此解得

$$\upsilon = \sqrt{\frac{k}{m}(b-a)^2 - 2\mu gb}$$

方法2：



对滑块运动的全过程应用功能原理，取橡皮绳自然长度的a点为势能零点。

则有

$$A_{外}=-\mu mgb=\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{1}{2}k(b-a)^2$$

由此解得

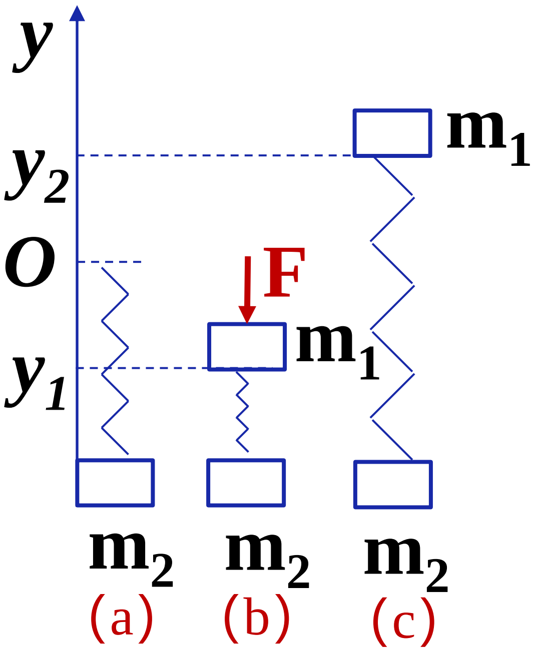
$$\upsilon=\sqrt{\frac{k}{m}(b-a)^2-2\mu gb}$$

在功能原理中，以势能增量的负值来代替弹性力的功，可以避免繁杂的积分运算，使求解过程大为简化。

例 两质量分别为m_1和m_2的木块通过一轻质弹簧连接，当弹簧加上m_1和外力$\vec{F}$后，弹簧被压缩到y_1处，外力$\vec{F}$撤去后，m_1被推到y_2处。弹簧质量忽略不计，劲度系数为k

求 在m_2上需要加多大压力可以使力停止作用后，恰能使m_1在跳起时m_2稍被提起?

解 取弹簧的原长处O为重力势能和弹性势能的零点，并以此点为坐标轴的原点



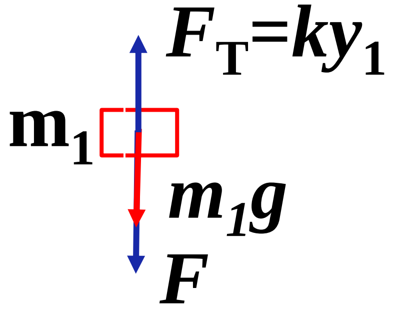
只有重力和弹性力做功，故系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}ky_1^2+m_1gy_1=\frac{1}{2}ky_2^2+m_1gy_2$$

整理得：$$k(y_1+y_2)=-2m_1g$$

即：$$ky_1+m_1g=-(ky_2+m_1g)$$

$$ky_1 + m_1 g = -(ky_2 + m_1 g)$$



对（b）过程分析m_1受力，得：

$$F + m_1 g = -ky_1$$

（c）过程欲使m_2跳离地面，必须满足：

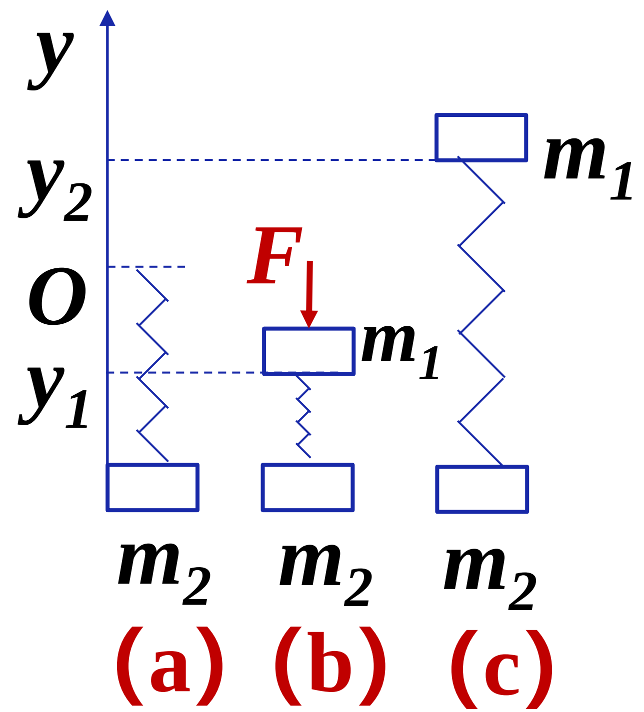
$$ky_2 \geq m_2 g$$

可得：

$$F = -(m_1 g + ky_1)$$

$$= m_1 g + ky_2$$

$$\geq m_1 g + m_2 g$$



1. 以下说法正确的是：

A. 作用力的功恒等于反作用力的功

B. 若某力对物体不做功，则对物体的运动状态不产生影响

C. 甲对乙做正功，则乙必对甲做负功；

D. 合外力对物体做的功等于物体动能的增量，而且其中某一分力的功可以大于动能的增量

答案：D

2．下列说法正确的是（　　）

A．某力对物体没有做功，则物体的位移必为零

B．摩擦力对物体只能做负功

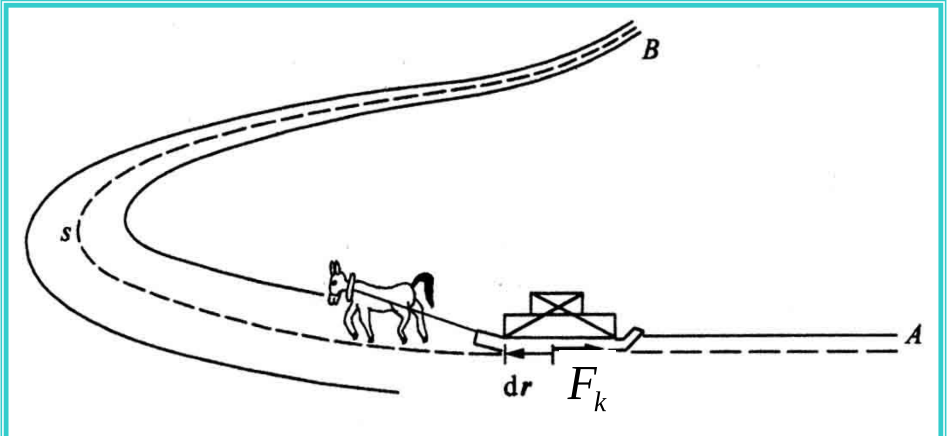
C．如果物体的速度不变，则该物体的动能也一定不变

D．如果物体的动能不变，则该物体的速度也一定不变

答案：C

3 马拉爬犁在水平雪地上沿一弯曲道路上行走。爬犁总质量为3000kg，它和地面的摩擦系数$\mu_k = 0.12$，求马拉爬犁行走2km的过程中，路面摩擦力对爬犁做的功。

3 马拉爬犁在水平雪地上沿一弯曲道路上行走。爬犁总质量为3000kg，它和地面的摩擦系数μ_k= 0.12，求马拉爬犁行走2km的过程中，路面摩擦力对爬犁做的功。



马拉爬犁在雪地上行进

解

$$F_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$$

元功 $\mathrm{d}A = \vec{F}_k \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$= F_k \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| \cos\theta$$

$$= -F_k \left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

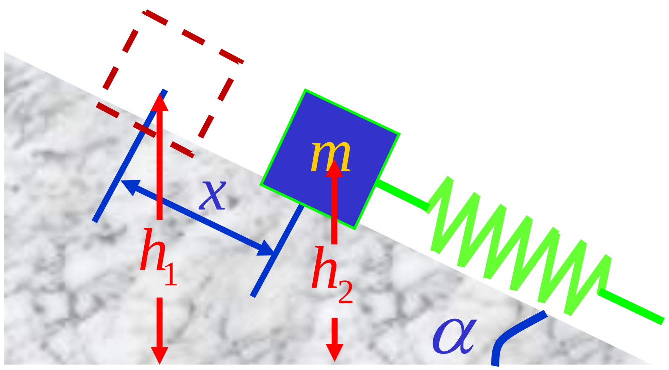
$$= -F_k \mathrm{d}s = -\mu_k mg\mathrm{d}s$$

摩擦力的功 $A_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}A = -\int_A^B \mu_k mg\mathrm{d}s = -\mu_k mg\int_A^B \mathrm{d}s = -\mu_k mgs_{AB}$

$$= -0.12\times 3\times 10^3 \times 9.8\times 2\times 10^3 = -7.06\times 10^6 (\mathrm{J})$$

4. 如图，放在倾角为α的斜面上的质量为m的木块，由静止自由下滑，与劲度系数为k的轻弹簧发生碰撞，木块将弹簧最大压缩了x m。设木块与斜面之间的摩擦系数为μ。

求：开始碰撞时木块速率v为多大?

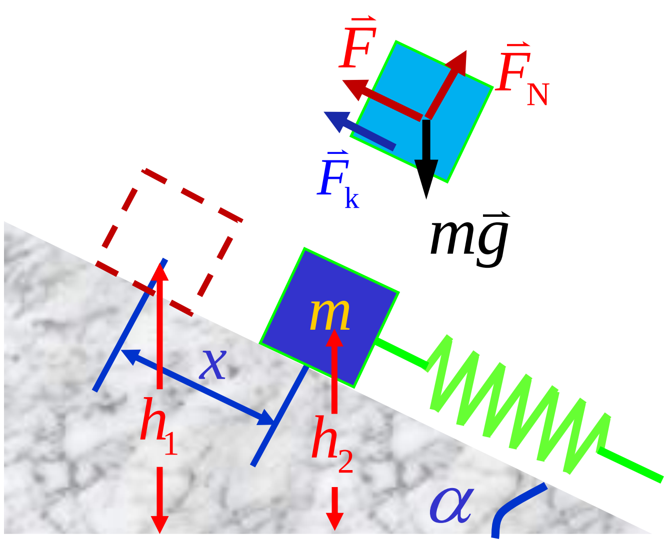


摩擦力做功，木块机械能不守恒，需采用功能原理计算
初态：刚开始碰撞时
末态：弹簧被压缩最大时

4. 如图，放在倾角为α的斜面上的质量为m的木块，由静止自由下滑，与劲度系数为k的轻弹簧发生碰撞，木块将弹簧最大压缩了x m。设木块与斜面之间的摩擦系数为μ。求开始碰撞时木块速率υ为多大?

解 **受力如图，设碰撞时及压缩最大时木块高度分别为h_1、h_2**

选水平面为重力势能零点、选弹簧的自然长度端为弹性势能零点



则

$$A_{摩擦力} = -(\mu mg\cos\alpha)x$$

$$= (mgh_2 + \frac{1}{2}kx^2) - (\frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgh_1)$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{kx^2 + 2\mu mgx\cos\alpha - 2mg(h_2 - h_1)}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{kx^2 + 2\mu mgx\cos\alpha - 2mgx\sin\alpha}{m}}$$