概率论与数理统计
复习

第一章 随机事件及其概率

- 随机事件的概念 （随机现象-随机试验-随机事件）；
- 事件的关系（包含、和、积、差、逆）和运算（交换、结合、分配、对偶）；
- 随机事件的概率（统计定义、古典概型、几何概型、公理化定义）；
- 条件概率，全概率公式，Bayes公式；
- 事件的独立性。

第二章 随机变量及其分布

- 一维随机变量及其分布（随机变量、分布函数、离散型<分布律：两点、离散型均匀、二项、泊松、几何、超几何>、连续性<概率密度：均匀分布、**正态分布**、指数分布>）；
- 多维随机变量及其分布（n维随机向量、二维离散型、二维连续型<正态>、边缘分布、随机变量的独立性、条件分布）；
- 随机变量的函数及其分布（离散型、连续性<分布函数法>、两个随机变量和与商的分布、极值分布）；

第三章 随机变量的数字特征

- 随机变量的数学期望（定义、随机变量函数的期望、期望的性质<线性性、独立随机变量的期望>、常见分布的期望）；
- 随机变量的方差和矩（定义<一种函数的期望>、方差的性质<类似线性的性质、独立>、原点矩中心距的定义、常见分布的方差）；
- 协方差与相关系数（协方差的定义和性质、相关系数的定义和性质、独立与不相关、二维正态独立与不相关）；

第四章 极限定理

- 随机变量序列的收敛性（依分布、依概率<连续函数变化>、r阶、以概率1几乎处处）；
- 大数定理（定义、车比雪夫不等式、车比雪夫、伯努利<频率的稳定性>、辛钦<独立同分布>）；
- 中心极限定理（林德贝格-列维<独立同分布>、棣莫佛-拉普拉斯<二项分布>）；

第五章 数理统计的基本概念与抽样分布

- 基本概念（总体、样本<独立同分布>、样本的联合分布、统计量、常用统计量<矩、次序>、样本矩的期望与方差、样本矩与总体矩的关系、次序统计量的分布、经验分布函数）；
- 常用统计分布（卡方、t、F的结构和性质、卡方分布的可加性、t分布的对称性、F分布的倒数、分位数<对称与非对称的求法>）；
- 抽样分布（单总体样本均值与样本方差<修正>的分布、双总体均值差与方差比的分布）；

第六章 参数估计

- 参数的点估计（**矩估计、最大似然估计<求解步骤与特殊情况的处理>**）；
- 估计量的优良性准则（无偏<期望>、有效<方差>、相合性<依概率收敛、从期望与方差判定>）；
- 参数的区间估计（概念、单总体均值的区间估计<方差已知和未知>、单总体方差的区间估计、双总体均值差<方差已知和未知>和方差比的区间估计）；

第七章 假设检验

- 假设检验的基本概念（基本原理、显著性水平、检验统计量、拒绝域、两类错误）；
- 正态总体参数的假设检验（单总体均值的假设检验<方差已知和方差未知>、单总体方差的假设检验、双总体均值是否相等的检验<方差已知和方差未知>、双总体方差是否相等的检验）。

一些典型题目

1. 离散型随机变量 X 可以取的值是 0，1，2，3，已知取 1，2 和 3 的概率相同，取 0 的概率是取 1 的概率的两倍，则 $P\{X=0\}=$ __2/5__。
若 $Y=(X-2)^2$，则 $E(Y)=$ __2__。

2. 随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,2)$，且 X 和 Y 独立，$U=X+Y, V=X-Y$，则 $cov(U,V)=$ __-1__

3. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布,

且有相同的方差 σ^2，记 $Y = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，

则 $D(X_1 - Y) =$ $\underline{\dfrac{n-1}{n}\sigma^2}$，$X_1$ 与 Y 的相关系数 $\rho =$ $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.

4. 设总体 $X \sim U(\theta_1, \theta_2)$，来自 X 的样本为 (1.2, 0.3, 2.8, 3.5, 4.9, 0.5, 1.8)，则 θ_1 的最大似然估计为 $\underline{0.3}$，θ_2 的最大似然估计为 $\underline{4.9}$。

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，$\sigma_0^2$ 已知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 **X** 的样本，若 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间长度至多为 L，则 n 至少为

$\frac{4u_{\alpha/2}^2 . \sigma_0^2}{L^2}$

________。

6. 设总体 **X** 服从参数为 4 的指数分布，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 **X** 的简单随机样本，则当 $n \to \infty$ 时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于________ $EX^2 = (EX)^2 + D(X) = (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{8}$

7.设$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是来自总体服从$\chi^2(10)$的样本，$\bar{X}$为样本均值，

则$D(\bar{X})=$ $D(\bar{X})=\dfrac{20}{n}$ ________

8、设$X_1,X_2,\dots,X_n,X_{n+1},\dots,X_{2n}$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，记

$$Y_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n},Y_2=\frac{\sum_{i=n+1}^{2n}X_i}{n}\quad S^2=\frac{\sum_{i=n+1}^{2n}(X_i-Y_2)^2}{n},$$

并令统计量 $Z=K.\dfrac{Y_1-Y_2}{S}$，统计量$U=C.\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sum_{i=n+1}^{2n}(X_i-Y_2)^2}$

（1）当K为何值时，统计量Z服从t分布，并给出自由度。

（2）当C为何值时，统计量U服从F分布，并给出自由度。

解：（1） $Y_1-Y_2\sim N(0,\frac{2}{n}\sigma^2)$ $\frac{nS^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

Y_1-Y_2 与 S 独立， $\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{\frac{2}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$

$$Z=\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{\frac{2}{n}}\sigma}/\sqrt{\frac{nS^2}{(n-1)\sigma^2}}=\frac{Y_1-Y_2}{S}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{2}}\sim t(n-1)$$

则 $\sqrt{\frac{n-1}{2}}$， $Z\sim t(n-1)$

（2）$U_1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$ $U_2=\dfrac{\sum\limits_{i=n+1}^{2n}(X_i-Y_2)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

U_1与U_2独立。

则$$U=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2/n}{\sum\limits_{i=n+1}^{2n}(X_i-Y_2)^2/(n-1)}=\frac{n-1}{n}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sum\limits_{i=n+1}^{2n}(X_i-Y_2)^2}\sim F(n,n-1)$$

故$C=\dfrac{n-1}{n}$， $U\sim F(n,n-1)$

9、设总体X的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$ $-\infty < x < +\infty$

(1) 求参数θ的矩估计

(2) 求参数θ的最大似然估计，并判断其是否为无偏估计，是否为相合估计。

解 (1) $EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\theta}.e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\theta^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2.e^{-\frac{x}{\theta}}.d\left(\frac{x}{\theta}\right)=2\theta^2$

令 $EX^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $2\theta^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

则 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$

(2) 似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta}.e^{-\frac{|x_i|}{\theta}}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{\theta^n}.e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$

$$\ln L(\theta)=-n\ln 2-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$$

故θ的最大似然估计$\hat{\theta}_{ML}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$

因为$E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\theta}.e^{-\frac{|x|}{\theta}}.dx=\theta\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\theta}.e^{-\frac{x}{\theta}}.d\left(\frac{x}{\theta}\right)=\theta$

则$E\hat{\theta}_{ML}=\frac{\sum_{i=1}^{n}E|X_i|}{n}=\theta$，故$\hat{\theta}_{ML}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$为$\theta$的无偏估计。

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\theta}.e^{-\frac{|x|}{\theta}}.dx=\theta^2\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2.e^{-\frac{x}{\theta}}.d\left(\frac{x}{\theta}\right)=2\theta^2$$

$$D(|X|)=EX^2-(E|X|)^2=\theta^2$$

$D\hat{\theta}_{ML}=\frac{\sum_{i=1}^{n}D(|X_i|)}{n^2}=\frac{\theta^2}{n}\to 0$，相合估计

10、对两批同类电子元件的电阻进行测试,各抽 6 件,测得结果如下(单位：Ω)

A 批：0.14， 0.138， 0.143， 0.141， 0.144， 0.137

B 批：0.135 , 0.140， 0.142， 0.136 ， 0.138， 0.142

已知元件电阻服从正态分布，设 $\alpha=0.05$, 问两批元件的电阻是否有显著差异。

$$F_{0.025}(5,5)=7.15, t_{0.025}(10)=2.2281, F_{0.05}(5,5)=5.05, t_{0.05}(10)=1.8125$$

$$\bar{x}=0.1405, \bar{y}=0.1388, \sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=3.75\times10^{-5}, \sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2=4.48\times10^{-5}$$

解：(1) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \qquad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

$$F=\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}=\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2/5}{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2/5}=\frac{3.37\times10^{-5}}{4.48\times10^{-5}}=0.837<F_{0.025}(5,5)=7.15$$

故接受原假设，认为$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

(2) $H_0:\mu_1=\mu_2 \qquad H_1:\mu_1\neq\mu_2$

$$T=\frac{\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{0.1405-0.1388}{0.0029\sqrt{1/3}}=1.0153<T_{0.025}(10)=2.2281$$

其中 $S_w^2=\frac{n_1S_1^2+n_2S_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{4.48\times10^{-5}+3.75\times10^{-5}}{10}=8.23\times10^{-6}$

故接受原假设，认为$\mu_1=\mu_2$，两批元件的电阻无显著差异。

谢谢大家！