数理逻辑

命题逻辑

10.1命题

命题：判断结果**唯一**的陈述句

命题的真值：判断的结果

真值的取值：真或假

注：**感叹句，祈使句，疑问句都不是命题**，**陈述句中的悖论，判断结果不唯一确定的不是命题**

命题的分类：

原子命题：不能再分解的最简单陈述句

复合命题：由原子命题通过联结词合成的陈述句

命题和原子命题常用大写字母P，Q，R表示，用“1”，“0”表示命题的真假

命题联结词

¬:否定联结词（非）

∧:合取联结词（且）

∨:析取联结词（或）

→：蕴含联结词

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

↔:等值联结词

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

优先级为┐ > ∧ >∨>→> ←→

例题：

例：P:天冷　Q:小王穿羽绒服

- 只要天冷，小王就穿羽绒服。$P \to Q$
- 只有天冷，小王才穿羽绒服。
  $Q \to P$ （$\neg P \to \neg Q$）
- 除非天冷，小王才穿羽绒服。$Q \to P$
- 除非天冷，否则小王不穿羽绒服。$Q \to P$

命题公式和命题变元

简单命题/命题常元：确指的或具体的命题

命题变元：以真，假为其变域的变元

T，F也是命题常元

原子公式：单个命题变元和命题常元

命题公式：

1.单个原子公式是命题公式

2.有限个原子公式通过命题联结词形成

10.2重言式、推理

设$A(P_1, P_2, P_3....P_n)$是任一命题公式

1）若A在各种赋值下都是真，则称A是重言式或永真式

2）若A在各种赋值下都是假，则称A是矛盾式或永假式

3）若既不是重言式也不是矛盾式，则称为偶然式

定义：

若如果$A \leftrightarrow B$是重言式, A与B对任何指派都有相同的真值,叫做逻辑恒等式（等价重言式）记为$A = B$

蕴涵式$P \to Q$ 若为永真，则称为蕴涵重言式，记为：$P \Rightarrow Q$（永真蕴含）

蕴含重言式

证明方法：

1.真值表法

2.推理法

假设前件是真，推出后件是真

假设后件是假，推出前件是假

基本等式：

交换律 $A \vee B = B \vee A$，$A \wedge B = B \wedge A$，$A \leftrightarrow B = B \leftrightarrow A$

结合律 $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

分配律 $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

∨对∧的分配律

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

∧对∨的分配律

双重否定律 $\neg\neg A = A$ (否定深入)

德摩根律

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

幂等律 $A \vee A = A$，$A \wedge A = A$

排中律 $A \vee \neg A = 1$

矛盾律 $A \wedge \neg A = 0$

零律

$A \vee 1 = 1$，$A \wedge 0 = 0$

同一律

$A \vee 0 = A$，$A \wedge 1 = A$

吸收律

$A \vee (A \wedge B) = A$

$A \wedge (A \vee B) = A$

蕴涵等价式

$A \rightarrow B = \neg(A \wedge \neg B)$

$= \neg A \vee B$

等值等价式

$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$= (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$= (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

假言易位 $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$

等价否定等值式 $A \leftrightarrow B = \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬律 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) = \neg A$

10.3推理

前提1, 前提2, …,前提n $\vdash$ 结论

1）符号 $\vdash$ 表示推出的意思

2）通过前提进行证明得到定理

常用推理规则：

简化式：$P \wedge Q \vdash P$；

简化式：$P \wedge Q \vdash Q$； 或可写为 $(P,Q)\vdash Q$ i.e. A,

附加式：$P \vdash P \vee Q$；

附加式：$Q \vdash P \vee Q$；

合取引入规则：$P, Q \vdash P \wedge Q$；

析取三段论：$\neg P, P \vee Q \vdash Q$；

假言推论——分离规则：$P, P \to Q \vdash Q$；

拒取式：$\neg Q, P \to Q \vdash \neg P$；

假言三段论：$P \to Q, Q \to R \vdash P \to R$；

合取推理：$P \to Q, R \to S \vdash P \wedge R \to Q \wedge S$；

两难推论：$P \vee Q, P \to R, Q \to R \vdash R$；

归谬推理：$P \to Q, P \to \neg Q \vdash \neg P$；

简单合取推理：$P \to Q \vdash P \wedge R \to Q \wedge R$.

规范描述

证明过程可以化形为一组公式序列$C_1, C_2, C_3 \ldots\ldots C_n$,在该序列中仅允许按下面三种方法所引入的公式

1）前提引入P：在C_i中允许出现前提

2）推理引入T：根据P推理得到的公式

3）附加前提引入CP：若带证定理中含有类似$A \to B$形式，则可以将A作为附加前提而特别允许在C_i中

反证法

前提：$A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$

结论：B

可以在前提中加入$\neg B$为真推出矛盾

- 推理过程中要使用推理规则；
- 推理规则包括逻辑等价式、蕴涵重言式、**P**、**T**、**CP**等；
- 结论是**P→Q**形式的，用**CP**规则；
- 前提条件不好推导，尝试用间接证明法（反证法）

10.4范式

(1) 文字——命题变元及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

$p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

$p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$p, \neg p\wedge q, p\vee\neg q, (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$p, p\vee\neg q, \neg p\wedge q, (p\vee q\wedge\neg p)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

性质：

定理10.1 (1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变元和它的否定式.
(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变元和它的否定式.

定理10.2 (1) 一个析取范式是矛盾式当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式.
(2) 一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

求范式：

1.消去公式中的蕴含和等值

2.否定联结词要深入到命题变元前

3.使用分配率等

范式的不足——不唯一

主析取范式

在含有n个命题变元的简单合取式中，若每个命题变元和他的否定恰好只出现一次，称这样的简单合取式为极小项

相对的，对于主合取范式来说，其简单析取式就是极大项

几点说明：

- n个命题变元有2^n个最小项和2^n个最大项
- 2^n个最小项（最大项）均互不等价
- 每个最小项（最大项）都有且只有一个成真（成假）赋值
- 用m_i表示第i个最小项，其中i是该最小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个最大项，其中i是该最大项成假赋值的十进制表示. m_i（M_i）称为最小项（最大项）的名称.

例

- $m_0 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ ——0 0 0——0
- $m_1 \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge R$ ——0 0 1——1
- $m_2 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge \neg R$ ——0 1 0——2
- $m_3 \Leftrightarrow \neg P \wedge Q \wedge R$ ——0 1 1——3
- $m_4 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ ——1 0 0——4
- $m_5 \Leftrightarrow P \wedge \neg Q \wedge R$ ——1 0 1——5
- $m_6 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \neg R$ ——1 1 0——6
- $m_7 \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$ ——1 1 1——7

求法：

①

步骤：

- 先求得析取范式
- 将简单合取式中没有出现的变元P所在的位置合取上 $(P \vee \neg P)$，再用分配律展开
- 最后将求得的极小项按下标从小到大的顺序排列

②真值表法

- 定理10.4 一公式的真值表中，使其为T的指派所对应的最小项组成的析取式即为此公式的主析取范式。
- 极小项 指派

$P \wedge \neg Q \wedge R$ 1 , 0 , 1

当且仅当将对应的指派代入该极小项, 该极小项的值才为 1。

例:

- 求$\neg P\wedge(Q\to R)$的主析取范式

解：$\neg P\wedge(Q\to R) \Leftrightarrow \neg P\wedge(\neg Q\vee R)$ （合取范式）

$\Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\vee\neg P\wedge R$ （析取范式）

$\Leftrightarrow \neg P\wedge\neg Q\wedge(\neg R\vee R)\vee\neg P\wedge R\wedge(\neg Q\vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3$

P	Q	R	$\neg P\wedge(Q\to R)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$\neg P\wedge(Q\to R)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_3$

主合取范式

和主析取范式相近，只不过其中的每个简单析取式都要为假

等价替换法步骤：

1、先求得合取范式

① 2、将简单析取项中没有出现的变元P所在的位置析取上 $(P\wedge\neg P)$，再用分配律展开 ②

3、最后将求得的极大项按下标从小到大的顺序排列

- 定理10.5 一公式的真值表中，使其为F的指派所对应的最大项组成的合取式即为此公式的主合取范式。

(P → Q) ↔ R
⇔(P ∨Q ∨R)Λ(P∨┐Q∨R)Λ(┐P∨┐Q∨ R) Λ (┐P∨Q ∨┐R)

P	Q	R	P → Q	(P → Q) ↔ R
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

- **求 (P → Q) ↔ R 的主合取范式**
- **(P → Q) ↔ R ⇔ ((P → Q) → R) Λ(R→ (P → Q))**

⇔ ((┐P ∨Q) → R) Λ(┐R ∨ ┐P ∨Q)
⇔(┐(┐P ∨Q)∨ R) Λ (┐R ∨ ┐P ∨Q)
⇔((P Λ┐Q)∨ R) Λ (┐R ∨ ┐P ∨Q)
⇔ (P ∨R)Λ(┐Q∨ R) Λ (┐R ∨ ┐P ∨Q) (合取范式)
⇔(P ∨R ∨ (QΛ┐Q))Λ((PΛ┐P)┐Q∨ R) Λ (┐R ∨ ┐P ∨Q)
⇔(P ∨R ∨ Q)Λ(P∨┐Q∨R)Λ(┐P∨┐Q∨ R) Λ (┐P∨Q ∨┐R)
⇔M0ΛM2 ΛM6 ΛM5 (主合取范式)
主析取范式为 m1 ∨ m3 ∨ m4 ∨ m7

比较图:

表 2.11

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

表 2.12

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	m_0	$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

一个公式的极大项和极小项是互补的

主范式的应用

1.求公式的成真成假赋值

可以根据主析取范式的极小项求得成真赋值，根据主合取范式的极大项求得成假赋值

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变元.

A为重言式 ⇔ A的主析取范式含全部2^n个最小项

⇔ A的主合取范式不含任何最大项, 记为1.

A为矛盾式 ⇔ A的主合析取范式含全部2^n个最大项

⇔ A的主析取范式不含任何最小项, 记为0.

A为非重言式的可满足式

⇔ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部最小项

⇔ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部最大项.

3. 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判以下每一组公式是否等价

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\land q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\lor m_1\lor m_2\lor m_3\lor m_4\lor m_5\lor m_7$

$(p\land q)\to r = m_0\lor m_1\lor m_2\lor m_3\lor m_4\lor m_5\lor m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\lor m_3\lor m_4\lor m_5\lor m_7$

显见，(1)中的两公式等价，而(2)的不等价.

4. 解决实际问题

某单位要从A, B, C三人中选派若干人出国考察, 选派要同时满足以下条件：

（1）若A去，则C同去；

（2）若B去，则C不能去；

（3）若C不去，则A或B可以去。

问所里要如何选派他们？

设： P: A去； Q: B去； R: C去；

则三个条件符号化为

$P\to R$； $Q\to\lnot R$； $\lnot R\to P\lor Q$；

故得到下面公式

$(P\to R)\land(Q\to\lnot R)\land(\lnot R\to P\lor Q)$

$\Leftrightarrow(\lnot P\land\lnot Q\land R)\lor(\lnot P\land Q\land\lnot R)\lor(P\land\lnot Q\land R)$

$\Leftrightarrow m_1\lor m_2\lor m_5$

10.5联结词的扩充

$$P \oplus Q = \neg(P \leftrightarrow Q)$$

$$P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$$

$$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$$

$$P \nrightarrow Q = \neg(P \rightarrow Q)$$

谓词逻辑

11.1基本概念

个体常元：具体或特定的个体，通常用a,b,c表示

个体变元：抽象或者泛指的，通常用x,y,z表示

个体域：个体变项的取值范围

全总个体域：由宇宙的一切事物组成

谓词：用来表示个体词性质或个体词之间的联系

注意：

只有给个体特定的值以后，才能成为命题

11.2量词

∀：全称量词，表示“一切”，“所有”，“任意”

∃：存在量词，表示“有一个”，“有的”，“至少有个”

谓词转命题的方法：

1.将x取定为一个值

　如，$F(x)$表示为x是质数，那么$F(4)$就是假命题

2.把谓词量化

(1) 人总是要死的；　(2)有些人不怕死

设F(x):x是不怕死的; D(x): x是要死的; M(x):x是人。

若论述域是全人类, 则 ;

例

(1)符号化为　$\forall xD(x)$

(2)符号化为　$\exists xF(x)$

如果是全总个体域, 则分别为

$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))$

$\exists x(M(x)\wedge F(x))$

注：∀用蕴含；∃用合取

(1) 对全称量词, 特性谓词作为蕴含式之前件而加入

(2) 对存在量词, 特性谓词作为合取项而加入

(1)所有的人都长头发。

(2)有的人吸烟。

(3)没有人登上过木星。

令M(x)是人

例

(1)　令F(x)：x长头发，则有

$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$

(2)　令S(x)：x吸烟，则有

$\exists x(M(x)\wedge S(x))$

(3)　令D(x)：x登上过木星，则有

$\neg\exists x(M(x)\wedge D(x))$

多元谓词：

(c) 每个人都有些缺点。

例

设F(x, y): x有y, M(x)：x是人, G(x)：x是缺点。符号化为:

$\forall x(M(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge F(x,y)))$

11.3函数

函数是谓词逻辑中个体和个体的关系，函数有一元，二元，三元，是个体到个体的映射

例6 将下述语句表达为函数

张三和他父亲及祖父三人一起去看演出。

解 设$F(x, y, z)$为某人x与某人y及某人z一起看演出，$f(x)$为x的父亲，又设a为张三，则此语句可写成：

$$F(a, f(a), f(f(a)))$$

11.4自由变元和约束变元

在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都为约束出现，A中不是约束出现的其他变元均称为是自由出现的.

一公式中的约束变元是可以更改的，规则如下:

(1) 若要改名，则该变元在量词及其辖域中的所有出现均须一起更改，其余部分不变。

(2) 改名时所选用的符号，必须是量词辖域内未出现的符号，最好是公式中未出现的符号。

在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都为约束出现，A中不是约束出现的其他变元均称为是自由出现的.

一公式中的约束变元是可以更改的，规则如下：

(1) 若要改名，则该变元在量词及其辖域中的所有出现均须一起更改，其余部分不变。

(2) 改名时所选用的符号，必须是量词辖域内未出现的符号，最好是公式中未出现的符号。

11.5命题公式的推广

- $\neg\neg\forall xF(x)=\forall xF(x)$,
- $\forall xF(x)\to\exists yG(y) = \neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$
- $\neg(\forall x P(x)) = \exists x \neg P(x)$
- $\neg(\exists x P(x)) = \forall x \neg P(x)$

否定词可以深入到辖域内部

例：不是所有学生都交了作业 = 有的学生没有交作业

量词辖域的收缩和扩张

- $\forall xA(x) \vee P = \forall x(A(x) \vee P)$
- $\forall xA(x) \wedge P = \forall x(A(x) \wedge P)$
- $\exists xA(x) \vee P = \exists x(A(x) \vee P)$
- $\exists xA(x) \wedge P = \exists x(A(x) \wedge P)$
- $\forall x(A(x)\to P) = \exists xA(x)\to P$
- $\forall x(P\to A(x)) = P\to\forall xA(x)$

  这里P 是不含自由变元x的谓词。

$$
\begin{aligned}
&\forall x(A(x)\to P)\\
=\ &\forall x(\neg A(x) \vee P)\\
=\ &\forall x(\neg A(x)) \vee P\\
=\ &\neg\exists xA(x) \vee P\\
=\ &\exists xA(x)\to P
\end{aligned}
$$

量词的分配

① $\forall x(A(x)\wedge B(x))=\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x))=\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

③ $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

④ $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

多个量词永真式

① $\forall x\forall yP(x, y)=\forall y\forall xP(x, y)$

② $\exists x\exists yP(x, y)=\exists y\exists xP(x, y)$

③ $\forall x\forall yP(x, y)\Rightarrow\exists y\forall xP(x, y)$

④ $\forall x\exists yP(x, y)\Rightarrow\exists y\exists xP(x, y)$

⑤ $\exists y\forall xP(x, y)\Rightarrow\forall x\exists yP(x, y)$

前束范式

求前束范式的步骤：

(1) 将公式中出现联结词→和↔的地方转化成¬、∨、∧

(2) 利用命题逻辑否定深入等式及谓词逻辑量词转化等式将否定联结词深入谓词前

(3) 利用改名、代入规则使自由变元及约束变元不同

(4) 利用量词辖域收缩与扩张等式扩大量词的辖域至整个公式

11.6推理

US：全称指定规则 $\forall xA(x)\vdash A(y)$ $\forall xA(x)\vdash A(c)$

ES：存在指定规则 $\exists xA(x)\vdash A(e)$ $\exists xA(x)\vdash A(c)$

EG：存在推广规则 $A(x)\vdash\exists yA(y)$ $A(c)\vdash\exists yA(y)$

UG：全称推广规则 $A(x)\vdash\forall yA(y)$

- US和ES同时使用时，应先进行存在指定，再全称指定。
- US和ES用于推导过程中删除量词,删去了量词, 就可像命题演算一样进行推导；
- UG和EG主要用于使结论呈量化形式；
- ES而产生的额外变元不能保留在结论中,在推导结束之前使用EG使之成为约束变元。