连续时间系统的时域分析方法 1

柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

连续时间系统的时域分析方法

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 基于奇异函数的信号分解
  - 奇异函数的系统响应
  - 卷积定理
  - 零状态响应求解

连续时间系统的时域分析方法

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 基于奇异函数的信号分解
  - 奇异函数的系统响应
  - 卷积定理
  - 零状态响应求解

奇异函数

奇异函数的引入是由于零状态响应的推导需求

$$e_k(t) \longrightarrow r_{zs,k}(t)$$

$$e(t)=\sum_{k=1}^{N} e_k(t) \longrightarrow r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{N} r_{zs,k}(t)$$

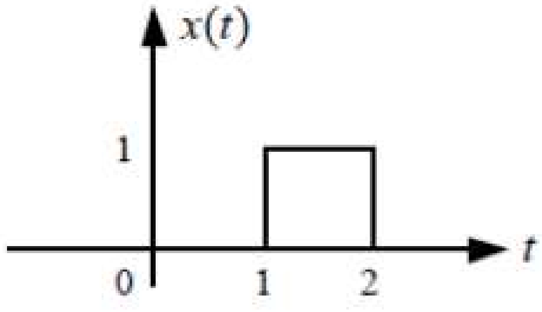
根据信号分解得到零状态响应，介绍用于信号分解的子函数：阶跃函数和冲激函数。由于其存在间断点，其属于奇异函数。

奇异函数

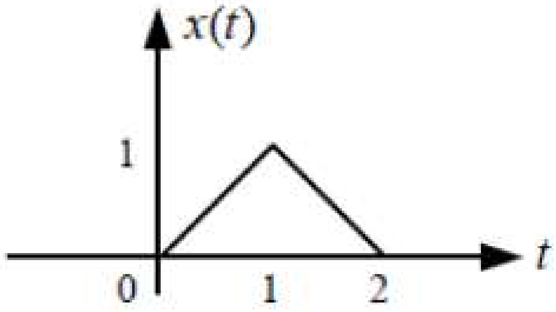
注意：奇异函数不局限于阶跃函数和冲激函数。

定义：

函数本身或其导数或高阶导数具有不连续点（跳变点）。



函数本身具有不连续点



函数的高阶导数具有不连续点

零状态响应

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 奇异函数
    - 阶跃函数
    - 冲激函数

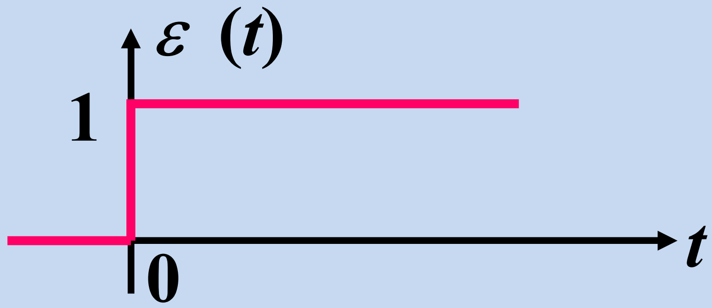
奇异函数：阶跃函数

一　阶跃函数

1. 定义

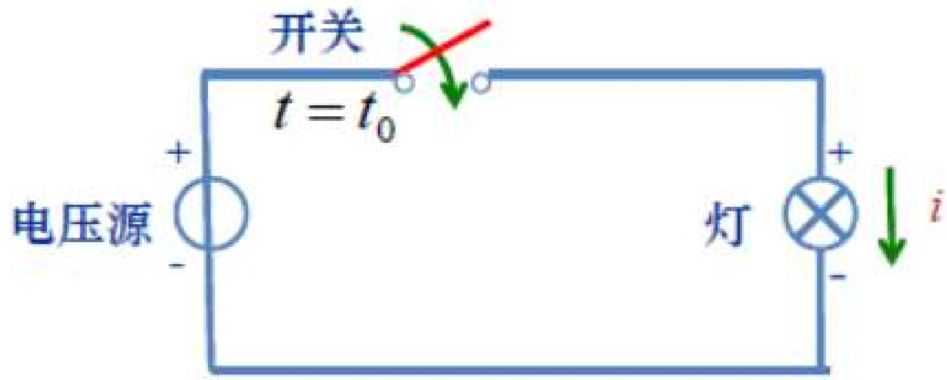
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

注意：在t=0时刻，函数值未定义



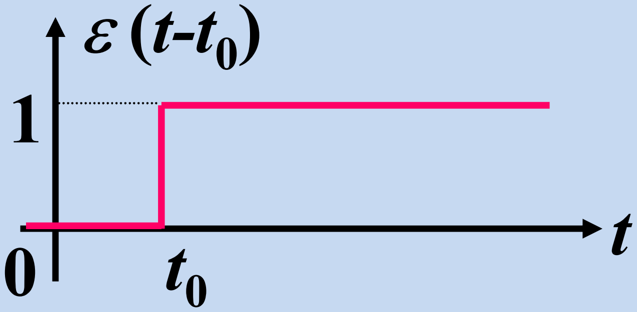
单边性！

- 实际问题：开关电路



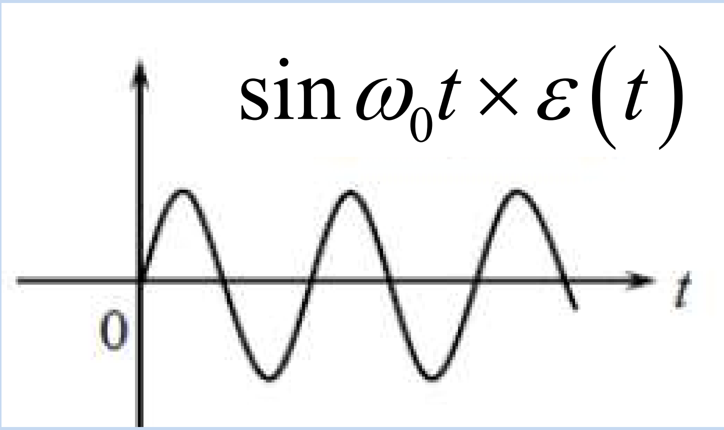
奇异函数：阶跃函数

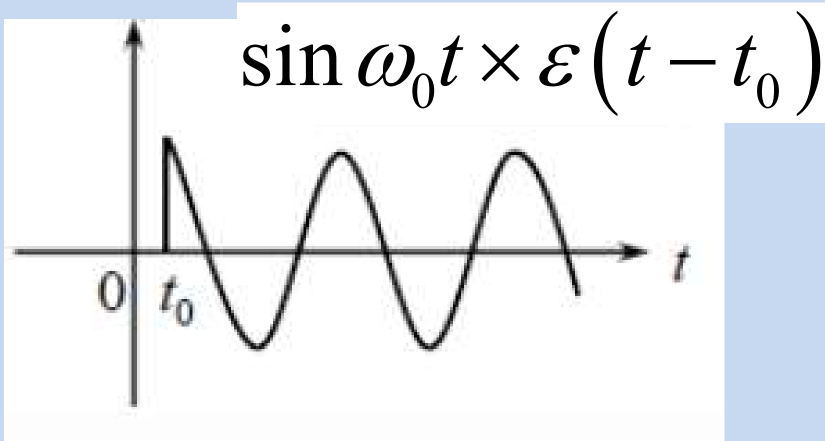
2. 单位阶跃函数的延迟



$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

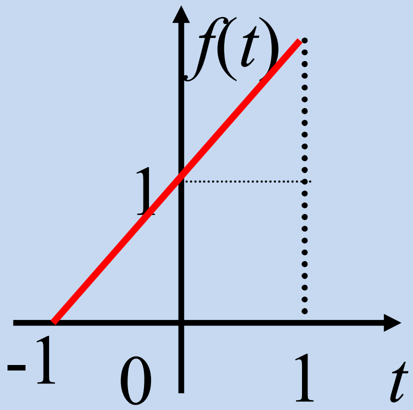
3. 用阶跃函数的单边性表示信号的时间范围



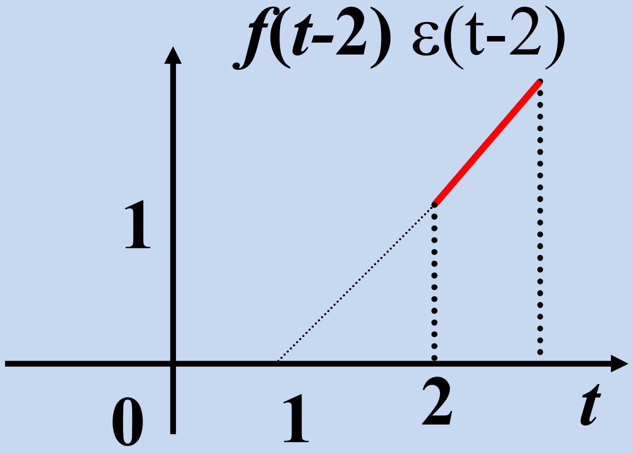


3. 用阶跃函数的单边性表示信号的时间范围

例：画出f(t-2)ε(t-2)的波形



图解！



零状态响应

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 奇异函数
    - 阶跃函数
    - 冲激函数

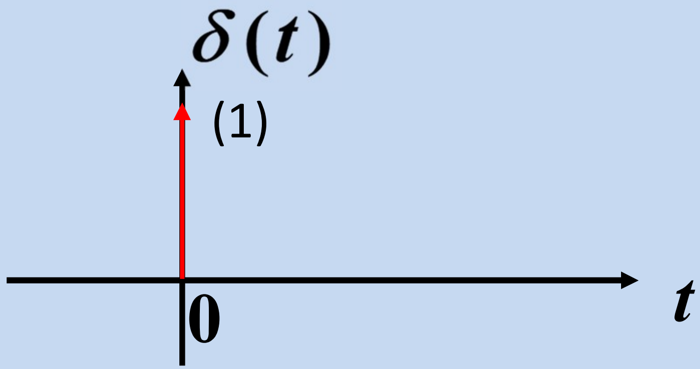
奇异函数：冲激函数

单位冲激函数

◆ 定义

$\boldsymbol{\delta(t)}$: 连续时间冲激信号，持续时间无穷小，瞬间幅度无穷大，涵盖面积(又称作强度)恒为1的一种理想信号。

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty, t = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

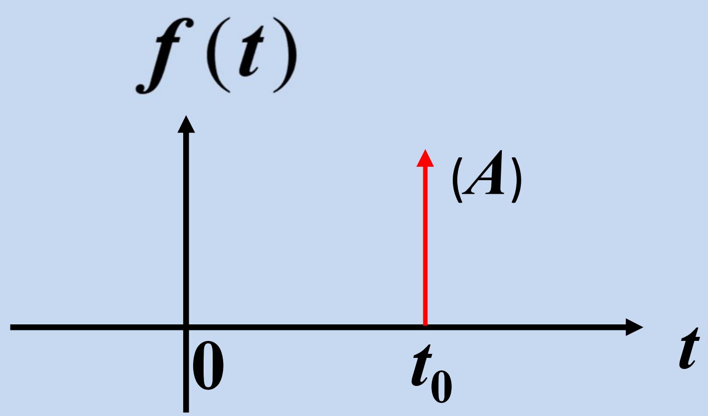


奇异函数：冲激函数

一般冲激函数

◆ 冲激发生时刻与强度

一般化的冲激函数：$f(t) = A\delta(t - t_0)$



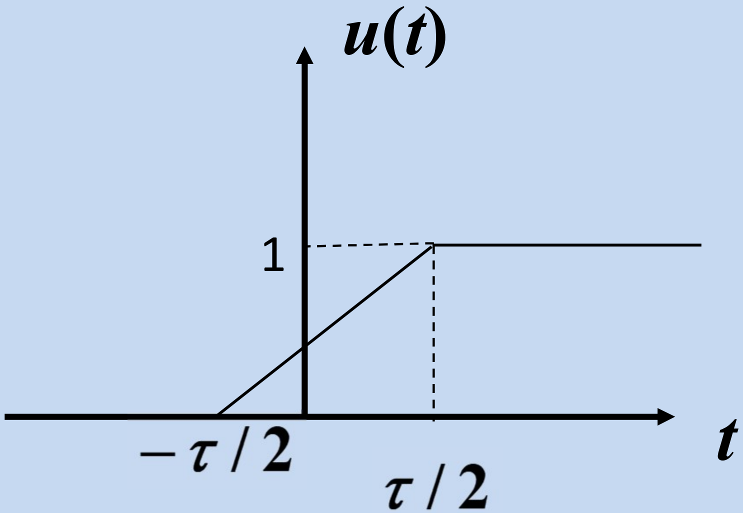
奇异函数：冲激函数

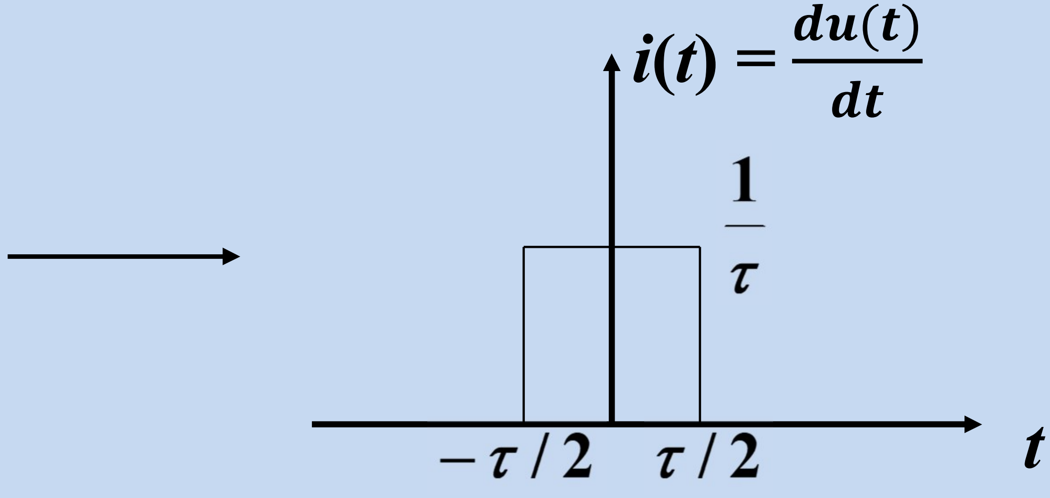
■ 背景（工程模型）1

电容：$i(t) = C\dfrac{du(t)}{dt}$

$$e(t) = u(t)$$
$$r(t) = i(t)$$

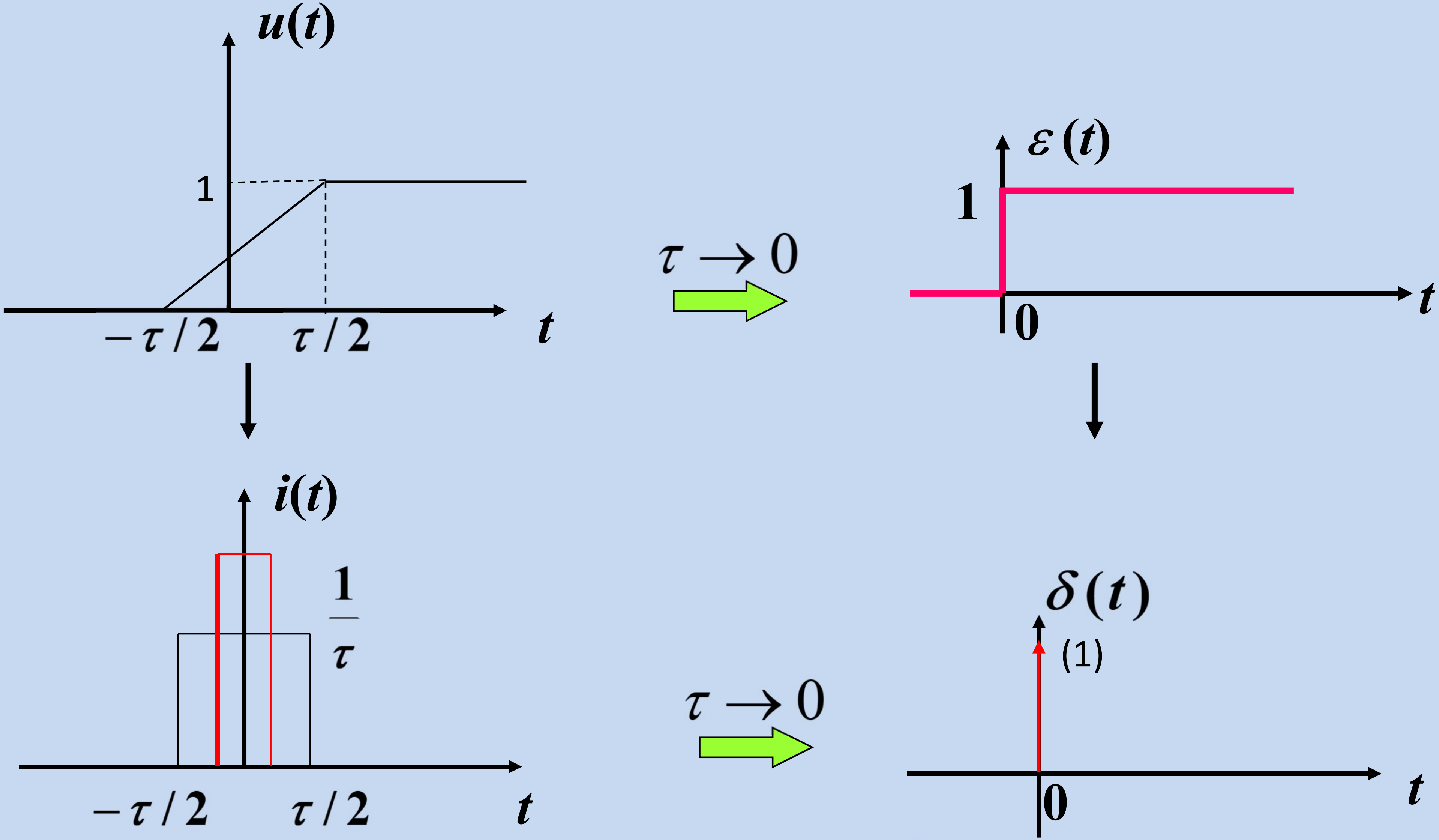
已知 $u(t)$如下图所示， 求$i(t)$?





奇异函数：冲激函数

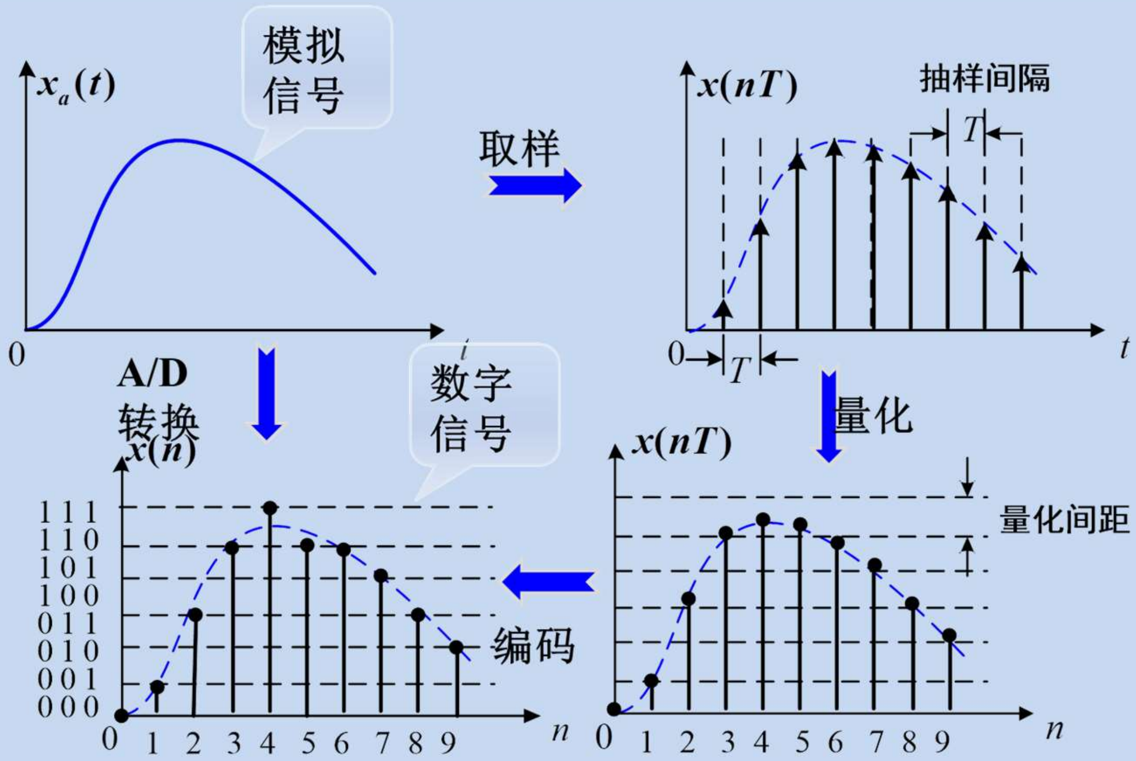
考察$\boldsymbol{\tau} \to \mathbf{0}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) \to ?, \boldsymbol{i}(\boldsymbol{t}) \to ?$



面积恒为1的矩形脉冲信号 $\xrightarrow{\tau \to 0}$ 单位冲激信号

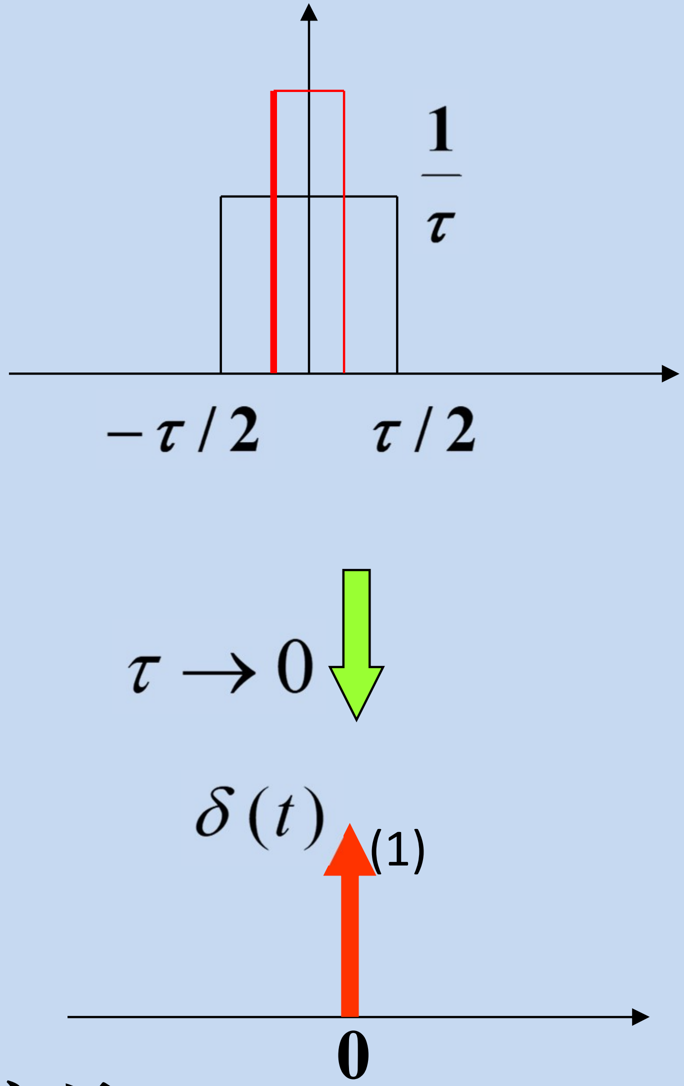
奇异函数：冲激函数

■ 背景（工程模型）2



从模拟信号到数字信号

冲激信号的另外一种理解：

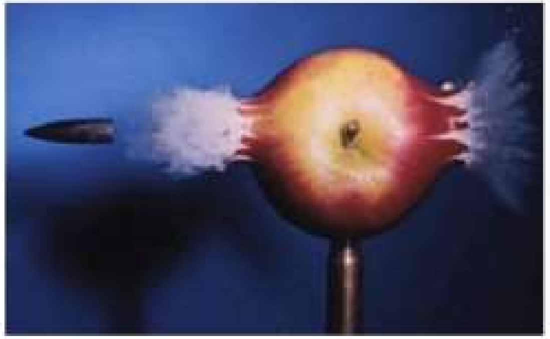


矩形脉冲信号→冲激信号

奇异函数：冲激函数

■ 背景（工程模型）3

➤ 实际问题：力学中瞬间作用的冲击力、自然界中的闪电等



子弹击穿苹果

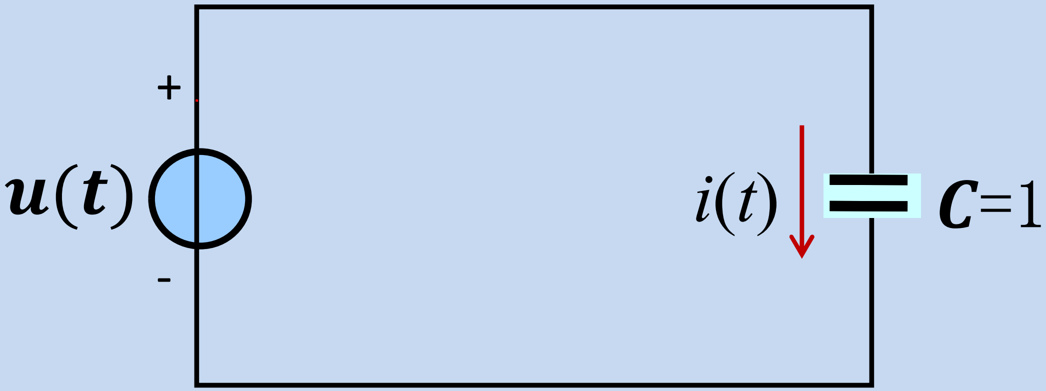
闪电

冲激信号可以
很好地描述这
些实际现象！

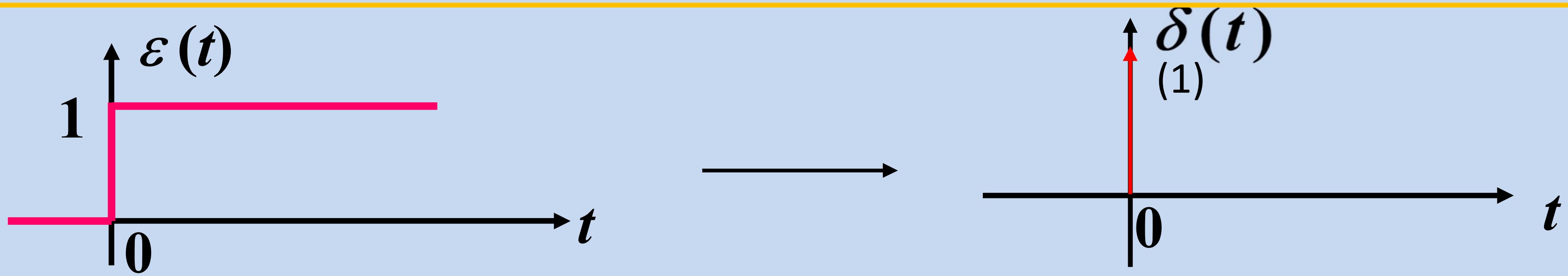
特点：作用时间极短，而幅值极大。

奇异函数：冲激函数

◆ 与阶跃函数的关系



电容：$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$

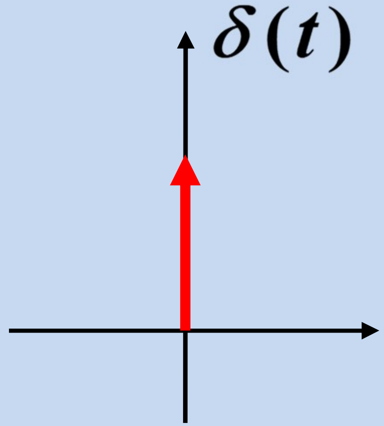


$$\delta(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

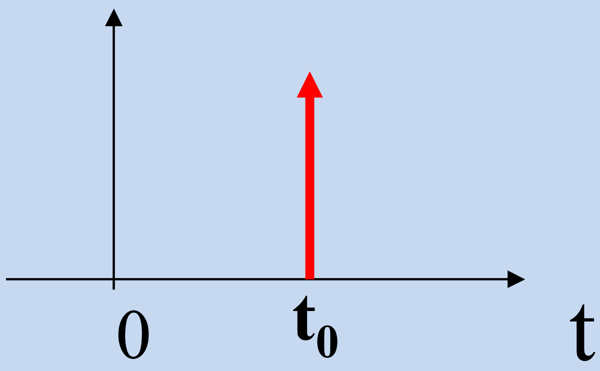
奇异函数：冲激函数性质

1. 时移特性

$$
\begin{cases}
\delta(t) = 0, t \neq 0 \\
\delta(t) = \infty, t = 0 \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1
\end{cases}
$$



$$
\begin{cases}
\delta(t-t_0) = 0 & t \neq t_0 \\
\delta(t-t_0) = \infty & t = t_0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 &
\end{cases}
$$



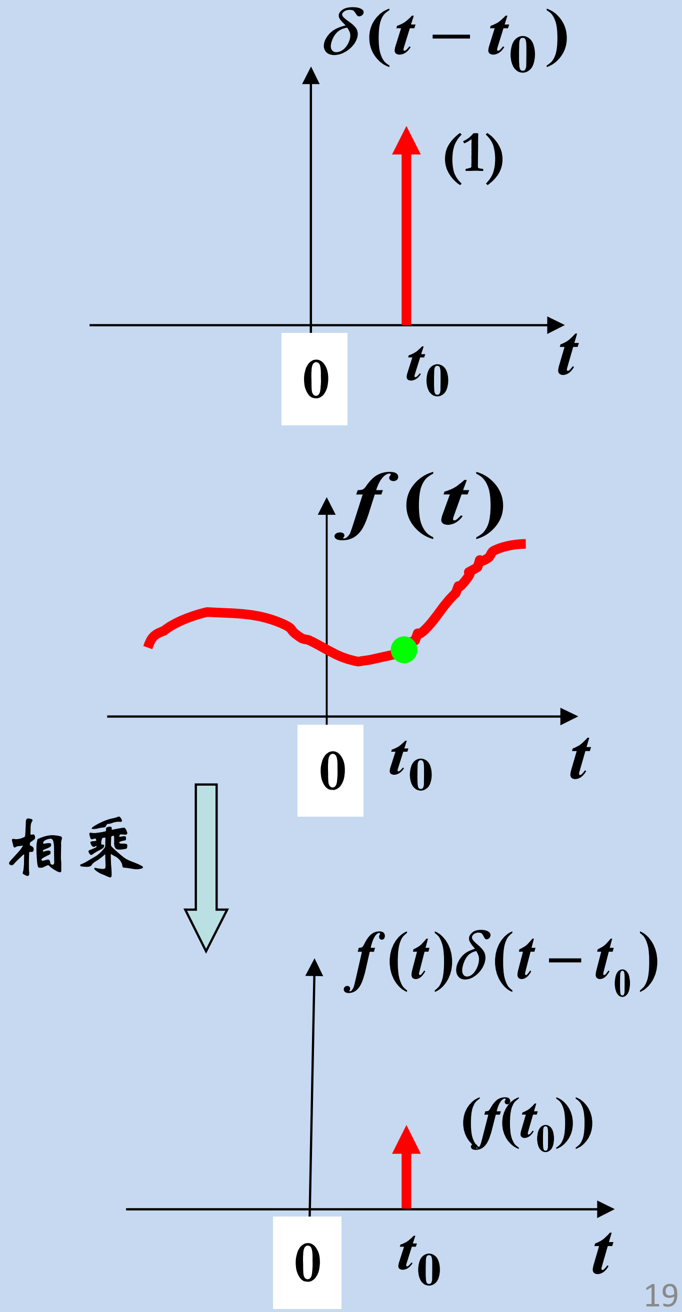
奇异函数：冲激函数性质

❖ 筛选特性[$\delta(t-t_0)$乘以普通函数f(t)]

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

推导！

$t_0=0$时　　$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$



奇异函数：冲激函数性质

❖ 取样特性

推导！

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{\infty}} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

一个函数$f(t)$与冲激函数$\delta(t)$乘积下的面积等于$f(t)$在冲激所在时刻的值。

积分限必须包含发生冲激的时刻.

$$\int_{-1}^{1}\cos(2t)\delta(t)dt = \cos 0 = 1$$

$$\int_{0}^{3}\cos(t)\delta(t-\pi)dt = 0$$

奇异函数：冲激函数

❖ **展缩特性** $$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$$ 推导！

当$a=-1, b=0$时,有$\delta(-t)=\delta(t)$ 对偶性！

对于$\boldsymbol{\delta(at+b)}$, 需要先利用展缩特性将其化为$\frac{1}{|a|}\boldsymbol{\delta}(t+\frac{b}{a})$, 才可以利用冲激函数的抽样特性和筛选特性。

❖ 冲激函数和阶跃函数的关系

证明： $\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\phi(t)dt=\phi(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du(t)}{dt}\cdot\phi(t)dt=u(t)\cdot\phi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\phi'(t)dt$$

$$=\phi(\infty)-0-\int_{0}^{\infty}\phi'(t)dt$$

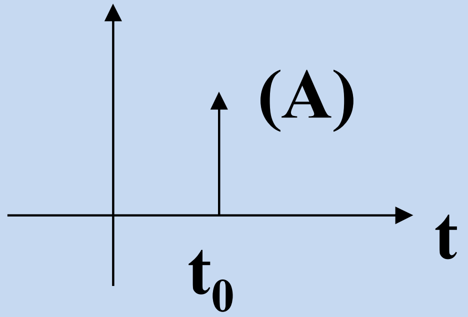
$$=\phi(\infty)-\phi(t)\Big|_{0}^{\infty}=\phi(\infty)-\phi(\infty)+\phi(0)=\phi(0)$$

故有： $\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$ 可得： $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\varepsilon(t)$

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t)=\delta(t)\Rightarrow\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\varepsilon(t)$$

总结：δ(t)

$$f(t) = A\delta(t - t_0)$$



1.冲激函数的图形表示方法：位置，强度。

2.该函数只在**t=0**处为非零值，其它各处都为零；

3. $\delta(t) = \frac{d}{dt}\varepsilon(t) \quad \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$

4.冲激函数是一个偶函数**δ(t)= δ(-t)**

5 筛选：**δ(t)f(t)= δ(t)f(0), δ(t-t_0)f(t)= δ(t- t_0)f(t_0)**

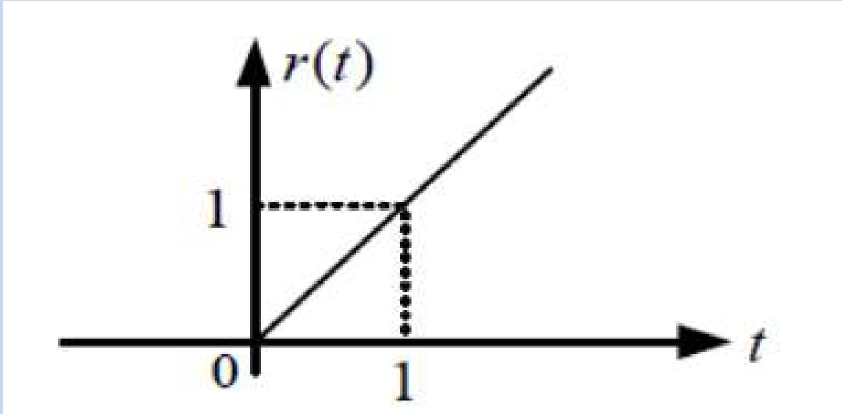
6. 抽样：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$$

奇异函数：单位斜坡信号

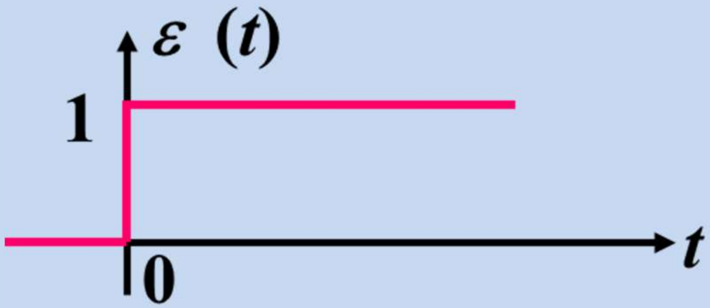
❖ 单位斜坡信号

$$r(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$



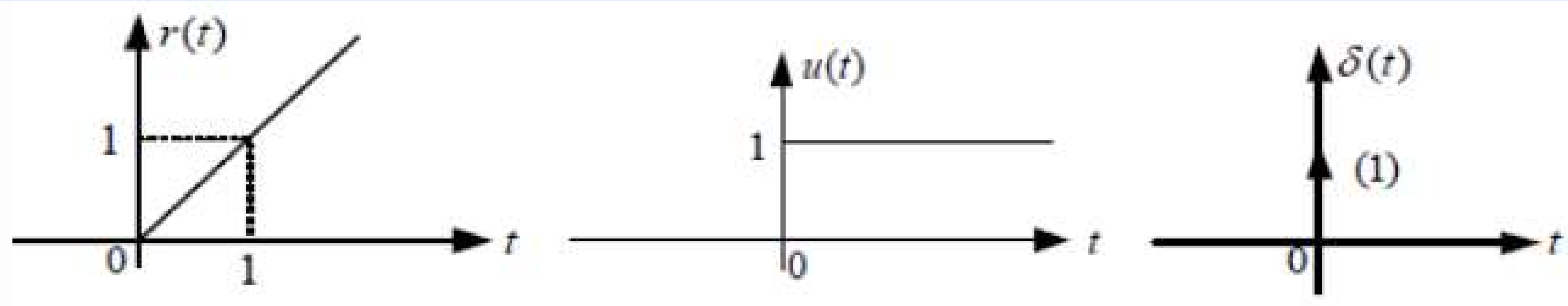
$$\frac{dr(t)}{dt}=\varepsilon(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(\tau)d\tau=r(t)$$



奇异函数

三种奇异信号之间的关系



微分关系 $r(t) \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}()}{\mathrm{d}t}} u(t) \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}()}{\mathrm{d}t}} \delta(t)$

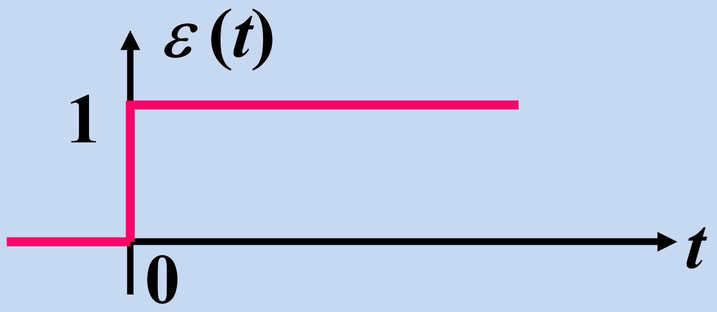
积分关系 $\delta'(t) \xrightarrow[\int_{-\infty}^{t}()\mathrm{d}\tau]{} \delta(t) \xrightarrow[\int_{-\infty}^{t}()\mathrm{d}\tau]{} u(t)$

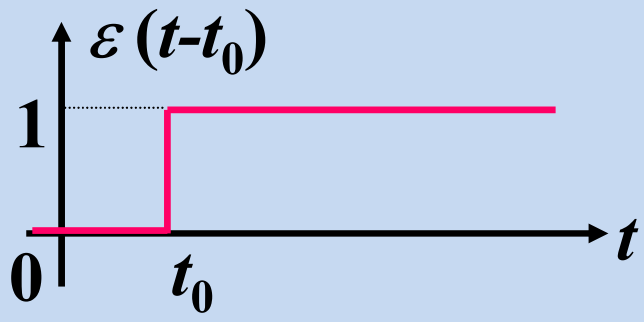
奇异函数：总结

❑ 阶跃函数

1. 工程背景：开关模型

2. 用来限定函数的时间范围

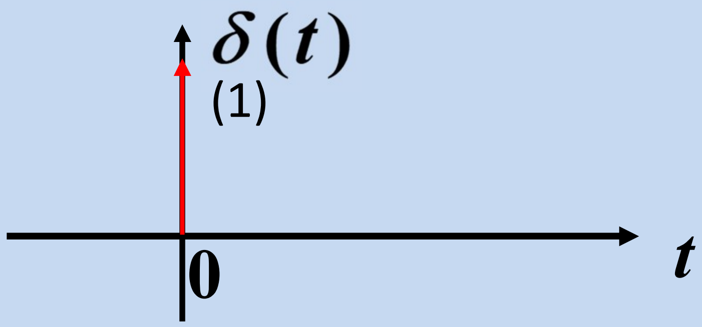


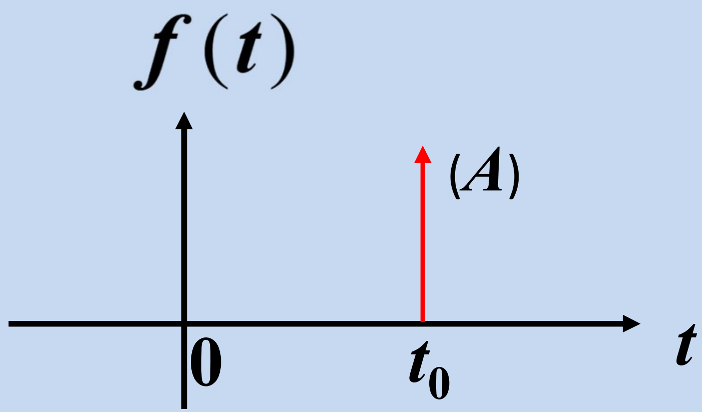


❑ 冲激函数：

1.工程背景：输入为阶跃函数时，电容电路的电流；

2.冲激函数为阶跃函数的导数。





零状态响应

?

信号的时域分解

$$e_k(t) \longrightarrow r_{zs,k}(t)$$

$$e(t)=\sum_{k=1}^{N} e_k(t) \longrightarrow r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{N} r_{zs,k}(t)$$

零状态响应

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 基于奇异函数的信号分解
  - 奇异函数的系统响应
  - 卷积定理
  - 零状态响应求解

零状态响应

- ❑ 系统分析的逻辑
- ❑ 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- ❑ 零状态响应
  - 奇异函数
  - 信号的时域分解
    - 基于阶跃函数的时域分解
    - 基于冲激函数的时域分解

信号的时域分解：基于阶跃函数的时域分解

1. 矩形脉冲信号表示为阶跃函数之和

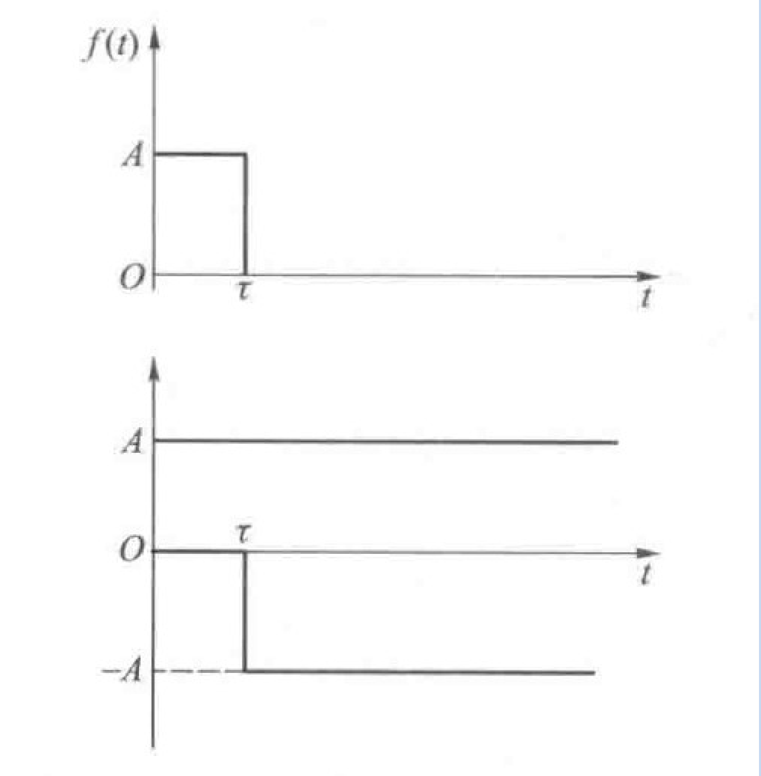


图 2-13　矩形脉冲分解为阶跃函数之和

$$f(t)=A\,\varepsilon(t)-A\,\varepsilon(t-\tau)$$

阶跃函数用来限定函数的时间范围

信号的时域分解：基于阶跃函数的时域分解

2. 矩形脉冲信号串表示为阶跃函数之和

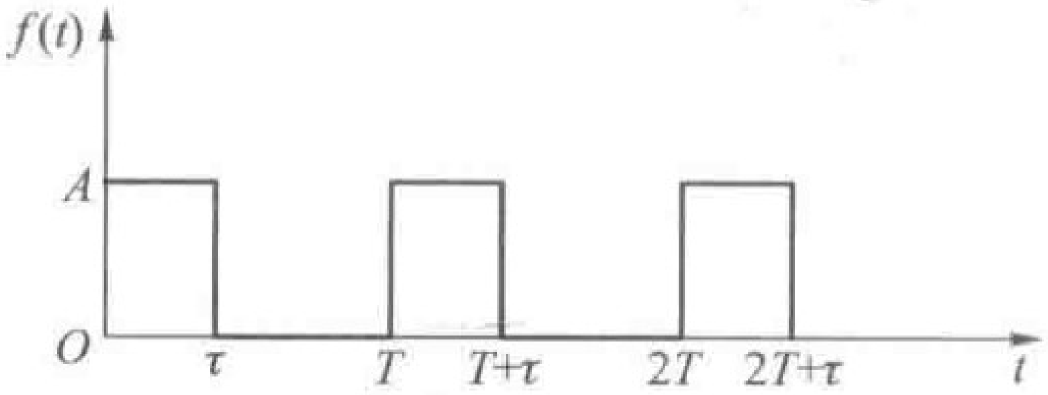


图 2-14　有始周期矩形脉冲信号

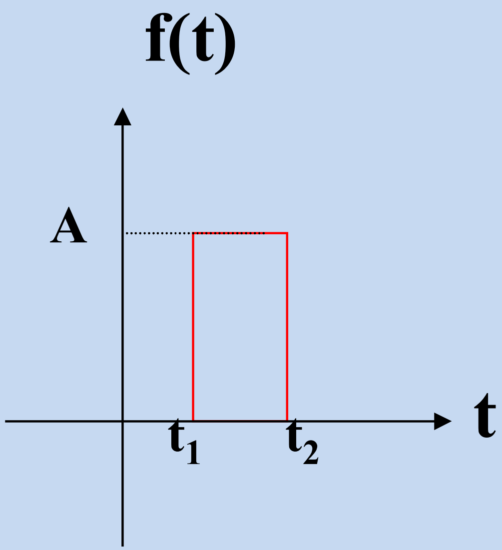
$$f(t) = A\varepsilon(t) - A\varepsilon(t-\tau) + A\varepsilon(t-T) - A\varepsilon(t-T-\tau) + A\varepsilon(t-2T) - A\varepsilon(t-2T-\tau) + \cdots$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty}\left[\varepsilon(t-nT) - \varepsilon(t-nT-\tau)\right]$$

阶跃函数用来限定函数的时间范围

奇异函数：基于阶跃函数的时域分解

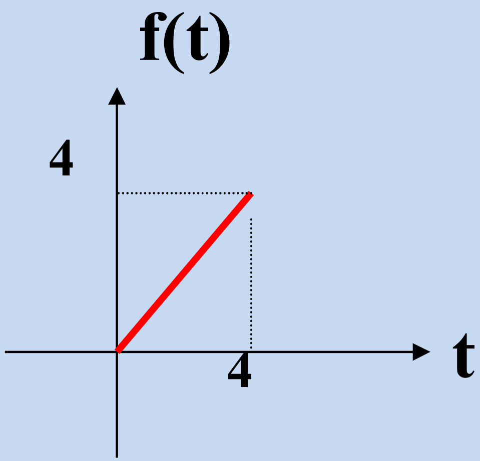
写出所示信号的时域表达式**f(t)**，并画出**f(t)**的导数的波形。



- 阶跃函数用来限定函数的时间范围
- 冲激函数是阶跃函数的导数

奇异函数：基于阶跃函数的时域分解

写出所示信号的时域表达式**f(t)**，并画出**f(t)**的导数的波形。



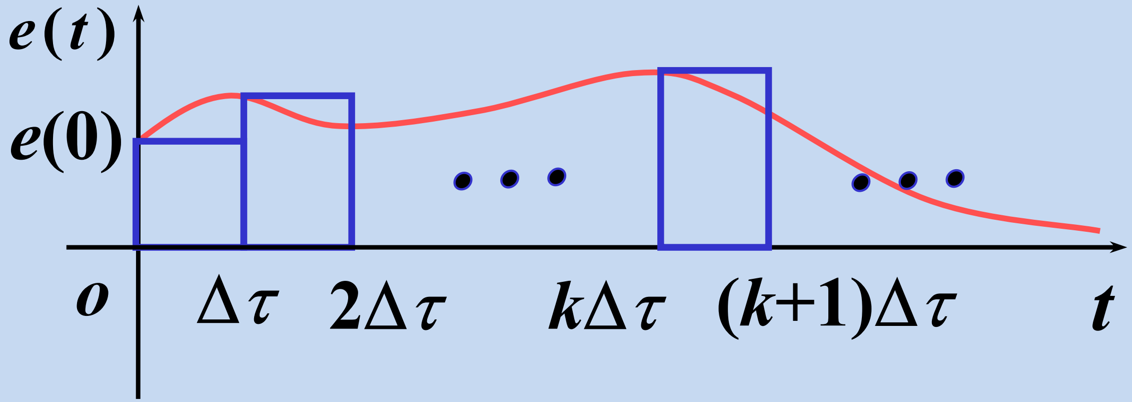
两种推导方式：

1. 用阶跃函数表示
2. 使用**delta**函数表示跳跃处！

- 阶跃函数用来限定函数的时间范围
- 冲激函数是阶跃函数的导数

信号的时域分解：基于冲激函数的时域分解

任意函数表示为冲激函数的积分



$$e(t) \approx e(0)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta\tau)]+e(\Delta\tau)[\varepsilon(t-\Delta\tau)-\varepsilon(t-2\Delta\tau)]+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} e(k\Delta\tau)[\varepsilon(t-k\Delta\tau)-\varepsilon(t-(k+1)\Delta\tau)]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} e(k\Delta\tau)\frac{1}{\Delta\tau}[\varepsilon(t-k\Delta\tau)-\varepsilon(t-(k+1)\Delta\tau)]\Delta\tau$$

当$e(t)$分割得足够细，$\Delta\tau \to d\tau, k\Delta\tau$变成连续变量$\tau$

$$\boxed{\text{激励}\, e(t)=\int_0^{\infty} e(\tau)\,\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau}$$

零状态响应

响应！

$$
\begin{tikzcd}
 & e_k(t) \arrow[r, "?"] & r_{zs,k}(t) \arrow[d] \\
e(t)=\sum_{k=1}^{N} e_k(t) \arrow[ur] \arrow[rr] & & r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{N} r_{zs,k}(t)
\end{tikzcd}
$$

零状态响应

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 基于奇异函数的信号分解
  - 奇异函数的系统响应
  - 卷积定理
  - 零状态响应求解