



西北工业大学  
NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY

# 连续时间系统的时域分析方法 1

柳艾飞，副教授  
西北工业大学软件学院

Email: [liuaifei@nwpu.edu.cn](mailto:liuaifei@nwpu.edu.cn)



# 信号与系统：连续时间系统的时域分析 1

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 时域信号的分解
  - 卷积定理
  - 零状态响应求解

# 信号与系统：连续时间系统的时域分析 1

## □ 系统分析的逻辑

## □ 零输入响应

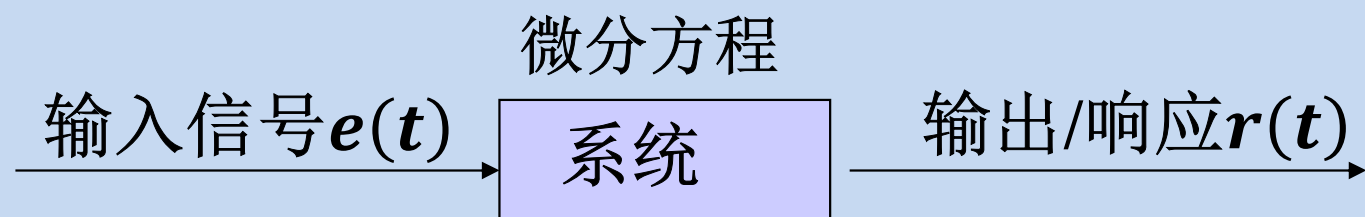
- 系统的算子表示法
- 输入响应求解

## □ 零状态响应

- 奇异函数
- 时域信号的分解
- 卷积定理
- 零状态响应求解

# 系统响应的分析逻辑

已知激励/输入信号和系统，求解系统响应！



$$r(t) = \underline{a \times e(t)} + b$$

系统的全响应  $r(t)$  = 零状态响应  $r_{zs}(t)$  + 零输入响应  $r_{zi}(t)$

LTI系统

# 系统分析的逻辑

例1：一线性时不变系统在相同的初始条件下，在有始激励 $\mathbf{f}(t)$ 作用时，全响应为 $r_1(t) = (2e^{-t} + \cos 2t)\varepsilon(t)$ ；当激励为 $2\mathbf{f}(t)$ 时，全响应  $r_2(t) = (e^{-t} + 2\cos 2t)\varepsilon(t)$  。

求在相同初始条件下，当激励为 $4\mathbf{f}(t)$ ,系统的全响应。

分析：全响应= $\mathbf{r}_{zi}$ (零输入响应)+  $\mathbf{r}_{zs}$ (零状态响应)

# 系统分析的逻辑

**例1：**一线性时不变系统在相同的初始条件下，在有始激励 $\mathbf{f(t)}$ 作用时，全响应为 $r_1(t) = (2e^{-t} + \cos 2t)\varepsilon(t)$ ；当激励为 $2\mathbf{f(t)}$ 时，全响应  $r_2(t) = (e^{-t} + 2\cos 2t)\varepsilon(t)$  。求在相同初始条件下，当激励为 $4\mathbf{f(t)}$ ,系统的全响应。

解：

$$r_1(t) = r_{zi} + r_{zs} = (2e^{-t} + \cos 2t)\varepsilon(t)$$

$$r_2(t) = r_{zi} + 2r_{zs} = (e^{-t} + 2\cos 2t)\varepsilon(t)$$

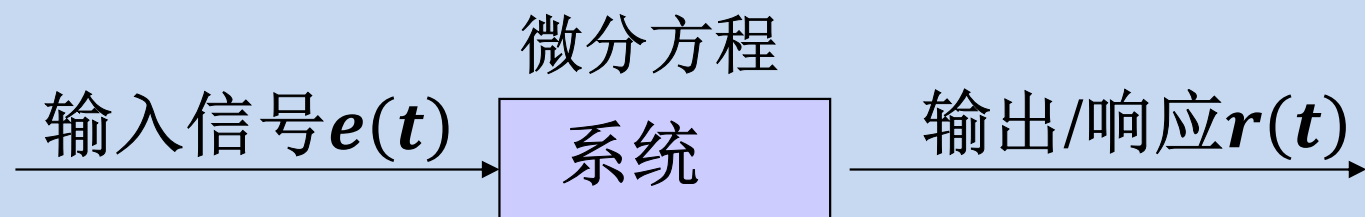
$$r_{zs} = (-e^{-t} + \cos 2t)\varepsilon(t)$$

$$r_{zi} = 3e^{-t}\varepsilon(t)$$

当激励为 $4\mathbf{f(t)}$ 时，全响应  $r(t) = r_{zi} + 4r_{zs}$

# 系统响应的分析逻辑

已知激励/输入信号和系统，求解系统响应！



举例：

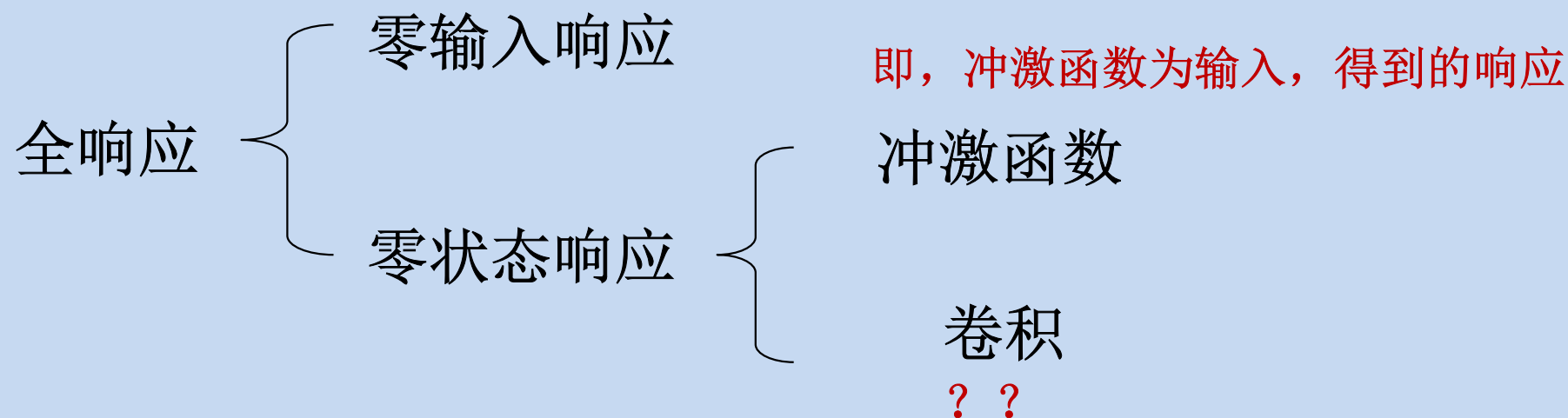
$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dr(t)}{dt} + a_0 r(t) = e(t) \quad \Rightarrow \quad r(t)$$

$$r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$$

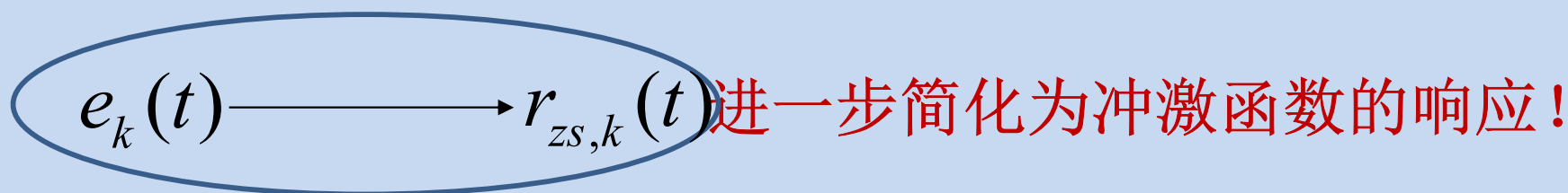
推导！



# 系统响应的分析逻辑



## LTI系统



$$e(t) = \sum_{k=1}^N e_k(t) \longrightarrow r_{zs}(t) = \sum_{k=1}^N r_{zs,k}(t)$$

分而治之的思想！



# 信号与系统：连续时间系统的时域分析 1

## □ 系统分析的逻辑

## □ 零输入响应

- 系统的算子表示法
- 求解输入响应

## □ 零状态响应

- 奇异函数
- 时域信号的分解
- 卷积定理
- 求解零状态响应

# 信号与系统：连续时间系统的时域分析 1

## □ 系统分析的逻辑

## □ 零输入响应

- 系统的算子表示法

- 输入响应求解

## □ 零状态响应

- 冲激函数

- 时域信号的分解

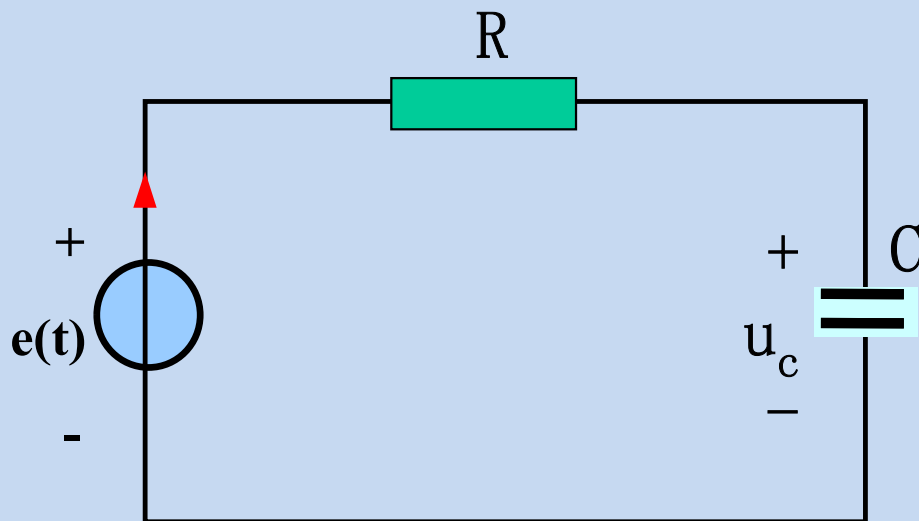
- 卷积定理

- 零状态响应求解

# 系统的算子表示法

$$\text{电容: } i = C \frac{du_c}{dt}$$

$$\text{电阻: } i = u/R$$



$$r(t) = u_c$$

$$C \frac{du_c}{dt} \cdot R + u_c = e(t)$$

# 系统的算子表示法

$$C \frac{du_C}{dt} \cdot R + u_C = e(t)$$

- 如上面所示，描写线性系统的激励函数和响应函数间关系的微分方程形式看起来很复杂，为了方便起见，把微分算子用符号 $p$ 来代表，如令  $\frac{d}{dt} = p$ ，通过引入算子符号，可以把微积分方程在形式上变成代数方程。它的优点一是简化方程的表达符号，一是通过引入系统转移算子 $H(p)$ 的概念，便于形成系统分析的统一的方法。
- 先引入算子的定义，再由定义导出其“运算”规则，最后介绍如何用算子法列写微分方程。

# 系统的算子表示法

$$C \frac{du_C}{dt} \cdot R + u_C = e(t) \quad \xrightarrow{\text{高阶项系数归一化}} \quad \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{1}{RC} e(t)}$$

微分算子:  $p = \frac{d}{dt}; p^n = \frac{d^n}{dt^n};$

$$p u_C + \frac{u_C}{RC} = \frac{1}{RC} e(t) \quad \longrightarrow \quad \left(p + \frac{1}{RC}\right) u_C = \frac{1}{RC} e(t)$$

转移算子:  $H(p) = \frac{u_C}{e(t)} = \frac{\frac{1}{RC}}{p + \frac{1}{RC}}$

$$\boxed{u_C = H(p) e(t)}$$

$$\boxed{\text{转移算子} = \frac{\text{输出}}{\text{输入}}}$$

# 系统方程的算子表示法

$$(p + \frac{1}{RC})r(t) = \frac{1}{RC}e(t)$$

一般的微分方程:

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} r(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} r(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} r(t) + a_0 r(t) \\ &= b_m \frac{d^m}{dt^m} e(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} e(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} e(t) + b_0 e(t) \end{aligned}$$

$$\text{微分算子: } p = \frac{d}{dt}; p^n = \frac{d^n}{dt^n}; \frac{1}{p} = \int_{-\infty}^t ( ) d\tau;$$

$$\begin{aligned} & (p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) r(t) = \\ & (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) e(t) \end{aligned}$$

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

# 系统的算子表示法

- 用算子法表示下面的微分方程。

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = f(t)$$

$$\begin{cases} e(t) = i(t) \\ r(t) = f(t) \end{cases}$$

- 解:根据微分算子与积分算子的定义, 上式可表示为

$$Lp i(t) + Ri(t) + \frac{1}{Cp} i(t) = f(t)$$

- 还可以将上式改写为

$$\left( Lp + R + \frac{1}{Cp} \right) i(t) = f(t)$$



$$H(p) = \frac{i(t)}{f(t)} = \frac{1}{Lp + R + \frac{1}{Cp}}$$

# 系统方程的算子表示法

- 求下面微分方程的转移算子 $H(p)$

$$L \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} i(t) = \frac{d}{dt} f(t)$$

解：可将上述方程改写为

$$\left( Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) i(t) = pf(t)$$

根据转移算子的定义，上式可进一步表示为

$$i(t) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} f(t)$$

$$H(p) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}$$



# 系统的算子表示法

- 代数量的运算规则对于算子符号一般也可以用

$$1: mp + np = (m + n)p$$

$$2: p^m p^n = p^{m+n} \quad m, n \text{ 同为正数或负数}$$

- 在分子分母中或在等式两边中的算子符号不能随便消去。

$$p \frac{1}{p} = \frac{1}{p} p \quad \times$$

微分和积分的次序不能交换，除非函数在 $-\infty$ 处的值为零

$$px(t) = py(t) \implies x(t) = y(t) \quad \times$$

- 代数量的运算规则对于算子符号一般也可以用，只是在分子分母中或在等式两边中的算子符号不能随便消去。

# 小结

## □ 系统响应的分析逻辑:

### ➤ 零输入响应

- 求解齐次微分方程

### ➤ 零状态响应

- 求解非齐次微分方程
- 冲激函数和卷积

## □ 微分方程的算子表示

微分算子:  $p = \frac{d}{dt}; p^n = \frac{d^n}{dt^n}; \frac{1}{p} = \int_{-\infty}^t ( ) d\tau;$



# 信号与系统：连续时间系统的时域分析 1

## □ 系统分析的逻辑

## □ 零输入响应

### ■ 系统的算子表示法

### ■ 输入响应求解

## □ 零状态响应

### ■ 冲激函数

### ■ 时域信号的分解

### ■ 卷积定理

### ■ 零状态响应求解

# 零输入响应求解

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)r(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1p + b_0)e(t) \quad \text{零输入响应!}$$

## 经典法

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)r_{zi}(t) = 0$$

特征方程是  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

也代表系统的特征方程，用

$\lambda_i, i = 1, \dots, n$  为特征方程的根，

也称系统的特征根或极点或自然频率

$e^{\lambda_i t}, i = 1, \dots, n$  称为系统的特征响应模式或模式或固有模式或自然响应，每个特征根可对应一个模式

# 零输入响应求解

(1)  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$  , 即单根

$$r_{zi}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + k_n e^{\lambda_n t}, \quad t \geq 0$$

(2)  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_{n-r}$ ,  $\lambda_0$ 是 $r$ 个重根

$$r_{zi}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + k_{n-r} e^{\lambda_{n-r} t} \\ + k_{n-r+1} e^{\lambda_0 t} + k_{n-r+2} t e^{\lambda_0 t} + \dots + k_n t^{r-1} e^{\lambda_0 t}, \quad t \geq 0$$

(3) 特征根全部是成对的共轭复根

$$\lambda_1 = \sigma_1 \pm j\omega_1, \dots, \lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i, i = n/2$$

$$r_{zi}(t) = k_1 e^{(\sigma_1 + j\omega_1)t} + k_2 e^{(\sigma_1 - j\omega_1)t} + \dots + \\ k_{n-1} e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + k_n e^{(\sigma_i - j\omega_i)t}, \quad t \geq 0$$

## 零输入响应求解

(1)  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$  , 即单根

$$r_{zi}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_n e^{\lambda_n t}, \quad t \geq 0$$

系统的零输入响应就是系统特征模式的线性组合

系数  $k_i$  可由初始状态  $r_{zi}(0^-)$ ,  $r'_{zi}(0^-)$ ,  $\cdots$ ,  $r_{zi}^{(n-1)}(0^-)$  确定

# 零输入响应求解

例1: 已知一系统 $H(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2}$ , 且 $r_{zi}(0) = 1, r'_{zi}(0) = 2$ ,

求系统零输入响应

分析: 系统的特征方程就是转移算子的分母 $D(p)$

解: 第一步 求微分方程的特征根

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -2\end{aligned}$$

$$r(t) = (C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}) \varepsilon(t)$$

第二步 代入初始条件

$$\begin{aligned}C_1 + C_2 &= 1 & C_1 &= 4 \\ -C_1 - 2C_2 &= 2 & C_2 &= -3\end{aligned}$$

$$r_{zi}(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t}) \varepsilon(t)$$

# 信号与系统：连续时间系统的时域分析 1

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 冲激函数
  - 时域信号的分解
  - 卷积定理
  - 零状态响应求解