第一章 行列式

1.2 排列及其逆序数

定义 全排列、标准排列（自然排列）、逆序、逆序数、奇排列、偶排列、对换

定理 1.1 排列经过一次对换，其奇偶性改变

推论：把一个奇排列调成标准排列须作奇数次对换

把一个偶排列调成标准排列须作偶数次对换

1.3 n 阶行列式的定义

定义 1.5 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|=\sum\limits_{(p_1,\cdots,p_n)}(-1)^{\tau(p_1,\cdots,p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{np_n}$

定理 1.2 $D_n=|a_{ij}|=\sum\limits_{(q_1,\cdots,q_n)}(-1)^{\tau(q_1,\cdots,q_n)}a_{q_11}\cdots a_{q_nn}$

1.4 行列式的性质

性质 1： $D=D^T$

性质 2：互换行列式的任意两行（列），行列式变号

推论：行列式有两行（列）对应元素完全相同，行列式等于 0

性质 3：可以把行列式某一行的公因子 k 提到行列式记号外面

推论：用一个数乘以行列式，等于用这个数乘以行列式的某一行（列）

推论：若行列式两行（列）成比例，则行列式为 0

推论：若行列式某一行（列）元素全为零，则行列式为 0

性质 4：若行列式某一行（列）元素均为两数之和，则可将行列式拆分为两个行列式之和

性质 5：把行列式某一行（列）的 k 倍加到另一行（列）上，行列式的值不变

会利用行列式性质，将行列式化简，结合按行展开，计算行列式

1.5 行列式按行（列）展开

定义 1.7 余子式、代数余子式

定理 1.3 行列式按一行（列）展开法则

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik},\quad D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$$

三对角行列式计算、行列式行（列）和相等、箭形行列式计算、范德蒙德行列式计算

定理 1.4 行列式任一行（列）元素与其他行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于 0

1.7 克拉默法则

定理 1.6 若线性方程组 Ax=b 的系数行列式 $D=|A|\neq 0$，则方程组有唯一解 $x_j=\dfrac{D^{(j)}}{D}$

定理 1.7 齐次线性方程组 Ax=0 的系数行列式 $D=|A|\neq 0$，则方程组只有零解

推论：齐次线性方程组有非零解，则系数行列式等于 0（充分必要条件）

第二章 矩阵及其计算

2.1 矩阵的概念

- 定义：数表
- 特殊的矩阵：零矩阵、单位阵、对角阵、增广矩阵
- 线性变换：与矩阵之间存在一一对应的关系

1. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 3y_2 - 5y_3 \\ x_2 = -y_1 + y_2 + 2y_3 \\ x_3 = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 + 3z_3 \\ y_2 = z_1 - z_2 + 4z_3 \\ y_3 = z_1 + 6z_2 - 3z_3 \end{cases}$$

1) 分别写出它们所对应的矩阵；

2) 求从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换.

2.2 矩阵的基本运算

- 矩阵相等：
- 线性运算：加法、数乘（负矩阵、减法）；8 条运算规律
- 矩阵乘法，以及运算规律（结合律、分配律、交换律）
- 方阵的幂运算，以及运算规律
- 矩阵的转置，以及运算规律
- 对称矩阵、反对称矩阵
- 方阵的行列式，以及运算规律
- 伴随矩阵

4) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$

4. 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$，计算行列式 $\det \boldsymbol{B}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是实方阵，证明：若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

2.3 逆矩阵

- 定义
- 判定定理
- 矩阵逆的运算规律

10. 求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&4&3\\0&0&1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&1&0\\1&2&2&4\end{pmatrix}$.

13. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

2.4 分块矩阵

- 分块矩阵的运算（加法、数乘、乘法）
- 分块对角矩阵

14. 已知 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶可逆矩阵，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{pmatrix}^{-1}$.

第三章 矩阵的初等变换

3.1 矩阵的秩

- 秩的定义：（k 阶子式）
- 满秩=可逆=非奇异=行列式不为零

3.2 矩阵的初等变换

- 初等行（列）变换定义：（三种变换）
- 矩阵等价：

  矩阵等价=秩相等
- 矩阵都等价于一个行阶梯形矩阵，也等价于一个行最简形矩阵，也等价于一个等价标准形

2. 求下列矩阵的秩.

1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

3.3 求解线性方程组的消元法

- Ax=0 齐次线性方程组只有零解（有非零解） 充分必要条件
- Ax=b 非齐次线性方程组有（无）解 充分必要条件

  有唯一解 充分必要条件

  有无穷解 充分必要条件

3. 求解下列线性方程组.

1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12\end{cases}$

4. λ，μ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+\lambda x_2+x_3=3\\ x_1+2\lambda x_2+x_3=4\\ \mu x_1+x_2+x_3=4\end{cases}$ 有唯一解、无穷多解、无解？

   在有无穷多解时，求通解.

5. 已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=-1\end{cases}$．讨论其可解性，并在有解时，任选其一求解.

3.4 初等矩阵

- 三类初等矩阵及逆矩阵
- 定理：对矩阵 A 进行一次初等行变换 等价于 。。。

  对矩阵 A 进行一次初等列变换 等价于。。。
- 定理：方阵 A 可逆 等价于 A 可以表示为一系列初等矩阵的乘积

  利用初等变换求逆矩阵（判定是否可逆）
- 两个矩阵等价 等价于 存在可逆矩阵 P, Q, 使得 PAQ=B

7. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 可以表示为两个初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的乘积，试求 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$.

2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\1&3&3\end{pmatrix}$

10. 是非、选择、填空题.

1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行和第 3 行得单位矩阵．记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$___

(a) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$； (b) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$； (c) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$； (d) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.

3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有解.（　）

4) 若齐次线性方程组中未知数的个数多于方程的个数，则它必有非零解.（　）

第四章 向量组的线性相关性

4.1 向量及其运算

- 向量的线性运算，及运算规律（8 条）
- 向量的内积，及运算规律（对称性、齐次性、分配性、非负性、不等式$[\alpha,\beta]^2 \le [\alpha,\alpha][\beta,\beta]$）
- 向量的范数，及性质（非负性、正齐次性、三角不等式$\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$）
- 向量的正交
- 单位化向量

4.2 线性相关与线性无关

- 定义 4.6：线性组合
  - 如何求一个向量可以被一组向量线性表示的系数
- 定义 4.7：线性相关，线性无关
  - 与齐次线性方程组的关系
- 定理 4.1：线性相关的充分必要条件是存在一个向量可由其余的向量线性表示
- 定理 4.2：一个向量组线性无关，加一个向量进来变为线性相关，则加进来的向量可由原来的向量组线性表示，且表示系数唯一
- 定理 4.3：向量组的部分向量线性相关，则这个向量组……
  - 一个向量组中包含零向量，则这个向量组……
  - 推论：若一个向量组线性无关，则其任意部分组……
- 定理 4.4：矩阵 A 的行向量组线性相关的充分必要条件是秩小于行数

  矩阵 A 的列向量组线性相关的充分必要条件是秩小于列数
  - 推论：向量个数大于向量维数（若有 n 维向量组包含 m 个向量，且 m 大于 n），则其一定线性相关
  - 推论：若一个向量组线性无关，则将其每个向量均作相应加长，则新的向量组也线性无关（逆否命题）
- 定理 4.5：设 A 为 m by n 矩阵，则：

（1） 若 A 的某个 r 阶子式不等于 0，则包含这子式的 r 行或者 r 列向量线性无关

（2） 若 A 的所有 r+1 阶子式等于 0，则 A 的任意 r+1 个行向量或者任意 r+1 个列向量线性相关

第四章习题一，1-5

4.3 向量组的秩与极大无关组

- 定义 4.9：极大线性无关组（极大无关组），向量组的秩
- 定理 4.6：设矩阵 A 的秩为 r，则 A 的行（列）向量组的秩等于 r

  若 A 中某个 r 阶子式 Dr 不等于 0，则 A 中包含 Dr 的 r 个行（或列）向量是其行（或

列）向量组的极大无关组

- 定理 4.7：对矩阵进行初等行变换，不会改变矩阵列向量组的相关性

  对矩阵进行初等列变换，不会改变矩阵行向量组的相关性

  - 求一个向量组的极大无关组
- 定义 4.10：向量组 T1 与向量组 T2 可以互相线性表示，两个向量组等价
- 定理 4.8：向量组与它的任意一个极大无关组等价
  - 推论：向量组的任意两个极大无关组等价
- 定理 4.9：若向量组 T1 可由 T2 线性表示，并且 T1 线性无关，则 T1 的个数不多于 T2 的个数（逆否命题）
  - 推论：设 T1 的秩为 r，T2 的秩为 s，如果 T1 可由 T2 线性表示，则 r 小于等于 s
  - 推论：等价向量组的秩相同

第四章习题一，6-11

4.4 向量空间

- 定义：向量空间、子空间、基、向量空间的维数、坐标
  - 生成的向量空间
  - 等价的两个向量组生成的向量空间相同
  - 向量空间 V 等于它的一组基生成的向量空间
  - 设 V1 为 V 的子空间，则 dim V1 小于等于 dim V
  - 任一向量在确定基下的坐标是唯一的
- 定义：正交基、标准正交基
  - 任一组基的标准正交化（施密特正交化方法）
- 过渡矩阵、基变换公式、坐标变换公式
  - 会求过渡矩阵
- 定理 4.10：过渡矩阵是可逆的

第四章习题二，1-5

4.5 线性方程组解的结构

- 齐次线性方程组：解空间
  - 解空间的维数
  - 解空间的基即为其次线性方程组的基础解系
  - 如何求基础解系
- 非齐次线性方程组：通解=特解+对应齐次的通解

第四章习题二，6-11

第五章 矩阵的相似变换

5.1 方阵的特征值与特征向量

定义 5.1 特征值、特征向量、特征方程、特征多项式

- 特征值、特征向量的求法

定理 5.1 n 阶方阵 A，所有特征值之和等于……

所有特征值之积等于……

- 0 是矩阵 A 的特征值的充分必要条件为……
- 矩阵 A 可逆的充分必要条件为……

定义 5.2 矩阵多项式

定理 5.2 设 λ 为 A 的一个特征值，对应的特征向量为 x，则矩阵多项式 $f(A)$ 的特征值为……

对应的特正向量为……；

若有 $f(A)=O$，则 A 的任一特征值 λ 满足 $f(\lambda)=0$

定理 5.3 方阵 A 的不同特征值对应的特征向量线性无关

定理 5.4 $\begin{matrix} \lambda_1 \to p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1r_1} \\ \lambda_2 \to p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2r_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_m \to p_{m1}, p_{m2}, \cdots, p_{mr_m} \end{matrix} \Rightarrow p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1r_1}, p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2r_2}, \cdots\cdots, p_{m1}, p_{m2}, \cdots, p_{mr_m}$ 线性无关。

5.2 相似对角化

定义 5.3 矩阵相似 $A \sim B$，性质（反身性、对称性、传递性）

行列式相等、逆矩阵相似、矩阵多项式相似（数乘矩阵相似、幂运算矩阵相似）、特征多项式相同

定义 5.4 可对角化

定理 5.5 n 阶方阵 A 可对角化的**充分必要条件**是 A 有 n 个线性无关的特征向量

- **推论 1**：方阵 A 的 n 个特征值互不相同，则 A 可相似对角化
- **推论 2**：方阵 A 的特征值 λ_i 对应的线性无关的特征向量的个数等于它的重数，则 A 可对角化
- **推论 3**：如果 A 可对角化，则 rank(A)等于 A 的非零特征值的个数

5.3 实对称矩阵的相似矩阵

定理 5.6 实对称矩阵的特征值为实数

定理 5.7 实对称矩阵的，属于不同特征值的特征向量正交

定义 5.5 正交矩阵，及其性质（$|A|=\pm1$； A^T, A^{-1}, A^* 也是正交矩阵； AB 也是正交矩阵）

- 实方阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是 A 的列（行）向量组是单位正交向量组

定理 5.8 实对称矩阵一定可以正交相似对角化

- 推论：实对称矩阵 A 的 r_i 重特征值 λ_i 必有 r_i 个线性无关的特征向量
- 实对称矩阵相似对角化的步骤

第六章 二次型

6.1 二次型及其矩阵表示

定义 6.1 n 元二次型、标准形、二次型的矩阵形式、二次型的矩阵、二次型的秩

定义 6.2 合同 $A \simeq B$，及其性质（反身性、对称性、传递性）

定理 6.1 若 $A \sim B$，且 $A^T = A$，则 $B^T = B$，且 $rank(A) = rank(B)$

- 将二次型化为标准形，即对二次型的矩阵（实对称矩阵），找一可逆矩阵 C，使得 $C^T AC$ 为对角矩阵

6.2 化二次型为标准形

定理 6.2（主轴定理） 任意一个 n 元二次型 $f = x^T Ax$ 都可以通过正交变换 $x = Qy$ 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 为实对称矩阵 A 的特征值，Q 的列向量是 A 的 n 个特征值对应的 n 个单位正交的特征向量。

- **会用正交变换，将二次型化为标准形。**

定理 6.3 秩为 r 的任意 n 元实二次型 $f = x^T Ax$ 都可通过可逆线性变换 $x = Cy$ 化为标准形

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2, d_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, r$$

定理 6.4 秩为 r 的任一实对称矩阵 A 都合同与对角矩阵。

- 会用配方法，将二次型化为标准形。

6.3 正定二次型

定义：实二次型的规范形

定理 6.5（惯性定理） 秩为 r 的 n 元实二次型 $f = x^T Ax$，在其任一标准形中：

- 系数非零的平方项个数= r ;
- 正项个数唯一，记为 p，称为正惯性指数；
- 负项个数唯一，为 r-p，称为负惯性指数；
- 任实二次型总可用实可逆线性变换，化为规范形，且唯一。

定理 6.6 秩为 r 的 n 阶实对称矩阵 A 合同于形式为 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{pmatrix}$ 的对角矩阵，其中 p 由 A 唯一确定。

定义 6.3 正定二次型、负定二次型、半正定二次型、半负定二次型、不定二次型

正定矩阵、负定矩阵、半正定矩阵、半负定矩阵、不定矩阵

定理 6.7 n 元实二次型 $f = x^T Ax$ 为正定二次型的充分必要条件是，它的标准形中 n 个系数全为正，即其正惯性指数为 n

- 推论 1：实对称矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是 A 的特征值全为正数
- 推论 2：实对称矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是 A 合同于单位矩阵 E
- 推论 3：实对称矩阵 A 为正定矩阵的必要条件是 A 的行列式为正数

定理 6.8 实对称矩阵 A 为正定矩阵的充分必要条件是 A 的各阶顺序主子式均大于零。

定理 6.9 n 元实二次型 $f = x^T Ax$ 为负定二次型的充分必要条件是

- 负惯性指数
- 特征值
- 合同于
- 顺序主子式