第二章 非线性方程数值解法

§**1** 引言

§**2** 二分法（对分法）

§**3** 简单迭代法

§**4** **Newton**迭代法

§1 引言

一 研究数值解法的必要性

1 一般方程的根无法用解析表达式给出；

2 三次、四次方程的求根公式较繁。

二 方程的根

方程 $f(x)=0$ （$f(x)$为连续函数）的解α称为方程 $f(x)=0$ 的**根**或称为 $f(x)$ 的**零点**。

若 $f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$ ，其中m为正整数，$g(x)$满足 $g(\alpha)\neq 0$，显然α为 $f(x)$的零点。

这时，称α为$f(x)$的***m*重零点**，或称α为$f(x)=0$的***m*重根**。

说明：为与第一章近似值x^*区分，这里将课本中记为x^*的方程根记为α 。

定理 若$f(x)$具有m阶连续导数，则α是$f(x)$的m重零点之充要条件为：$f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0, \cdots, f^{(m-1)}(\alpha)=0, f^{(m)}(\alpha)\neq 0$

如 $f(x)=4(x-6)^2$，6为$f(x)$二重零点的充要条件为：

$$f(6)=0, f'(6)=0, f^{(2)}(6)\neq 0$$

*** 证明　充分性**　设α使得

$$f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0, \cdots f^{(m-1)}(\alpha)=0, f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

由Taylor公式得

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(x-\alpha)^{m-1}$$

$$+\frac{f^{(m)}(\alpha+\theta(x-\alpha))}{m!}(x-\alpha)^m, 0<\theta<1$$

令　$g(x)=\dfrac{f^{(m)}(\alpha+\theta(x-\alpha))}{m!}$

则有　$f(x)=(x-\alpha)^m g(x)$　且 $g(\alpha)=\dfrac{1}{m!}f^{(m)}(\alpha)\neq 0$

根据定义，α为$f(x)$的m重零点．

必要性 设α是$f(x)$的m重零点，则

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \text{ 且 } g(\alpha)\neq 0$$

由 $$f^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{k} C_k^i[(x-\alpha)^m]^{(i)} g^{(k-i)}(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{k} C_k^i m(m-1)\cdots(m-i+1)(x-\alpha)^{m-i} g^{(k-i)}(x)$$

当$0\leq k\leq m-1$时

$$f^{(k)}(\alpha)=\sum_{i=0}^{k} C_k^i m(m-1)\cdots(m-i+1)(\alpha-\alpha)^{m-i} g^{(k-i)}(\alpha)=0$$

当$k=m$时

$$f^{(k)}(\alpha)=\sum_{i=0}^{m} C_m^i m(m-1)\cdots(m-i+1)(\alpha-\alpha)^{m-i} g^{(m-i)}(\alpha)$$

$$=m!g(\alpha)\neq 0$$

三 根的搜索

求方程根的近似值之前，需要首先确定**隔（有）根区间**$[a,b]$（在$[a,b]$上方程仅有一个根）。

方法:

（1）画图: 对于$f_1(x)-f_2(x)=0$，在同一坐标系中画出$y=f_1(x)$ 及$y=f_2(x)$ 的图形后，由两曲线交点横坐标所在的大致范围求出方程根的近似值。

（2）分析: 根据函数$f(x)$的连续性、介值定理以及单调性等去寻找隔（有）根区间。

§2 二分法（对分法）

基本思想： 通过区间逐次分半，将有根区间逐步缩小。

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$\boxed{f(a)f(b)<0}$，且在$[a,b]$内$f(x)=0$仅有一个实根α。记$[a,b]$为$[a_1,b_1]$

① 计算$[a_1,b_1]$中点 $x_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$ 的函数值 $f(x_1)$

若 $f(x_1)=0$ ，则 $\alpha=x_1$

若 $f(x_1)f(a_1)<0$，则 $\alpha\in[a_1,x_1]$。 令 $a_2=a_1,b_2=x_1$

若 $f(x_1)f(b_1)<0$ ，则 $\alpha\in[x_1,b_1]$。 令 $a_2=x_1,b_2=b_1$

对分一次，新的有根区间$[a_2,b_2]$的长度

$$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{2}(b-a)$$

② 再计算$[a_2,b_2]$中点$x_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}$的函数值$f(x_2)$。

若$f(x_2)=0$， 则 $\alpha=x_2$

若 $f(x_2)f(a_2)<0$， 则 $\alpha\in[a_2,x_2]$。 令 $a_3=a_2, b_3=x_2$

若 $f(x_2)f(b_2)<0$， 则 $\alpha\in[x_2,b_2]$。 令 $a_3=x_2, b_3=b_2$

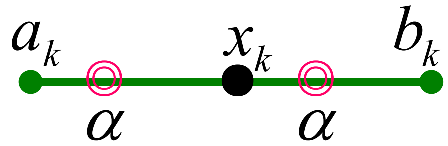
对分两次，新的有根区间$[a_3,b_3]$的长度

$$b_3-a_3=\frac{1}{2}(b_2-a_2)=\frac{1}{2^2}(b-a)$$

如此对分下去，有 $b_k-a_k=\dfrac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})=\cdots=\dfrac{1}{2^{k-1}}(b-a)$

第k次对分，取$[a_k,b_k]$的中点$x_k=a_k+\dfrac{b_k-a_k}{2}=\dfrac{a_k+b_k}{2}$， 有

$$|x_k-\alpha|\le\frac{1}{2}(b_k-a_k)=\frac{1}{2^k}(b-a)\quad k=1,2,\cdots$$



即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\alpha$。 故$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$的极限为方程$f(x)=0$的根。

具体做法

(1) 令$\frac{1}{2^k}(b-a)\le\varepsilon$，先确定对分次数$k$，再计算$x_k$。

(2) 误差估计为 $|x_k-\alpha|\le\frac{b-a}{2^k}$

优点 对函数性质要求不高

（只要函数连续且两端点的函数值异号）；

计算简单，且可达到任意精度。

缺点 收敛速度较慢，计算量大；

不能求复根与偶重根。

一般用该方法求根的初始近似值，然后再用其它的求根方法精确化。

$$|x_k-\alpha|\le\frac{1}{2^k}(b-a)\quad k=1,2,\cdots$$

§3 简单迭代法

一 简单迭代法

1 简单迭代法的基本思想

对方程$f(x)=0$，先将其变为等价的方程 $x=\varphi(x)$ 由$x=\varphi(x)$构造 $x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,\cdots$

$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$称为**迭代序列**，$\varphi(x)$称为**迭代函数**。当$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛，称迭代(格式)**收敛**，否则称迭代(格式)**发散**。当$\varphi(x)$连续时，若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1}=\bar{x}$ 则有

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=\varphi(\lim_{k\to\infty} x_k) \quad 即 \quad \bar{x}=\varphi(\bar{x})$$

故序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$的极限为方程$x=\varphi(x)$(或$f(x)=0$)的根。

若α满足 $\alpha=\varphi(\alpha)$，称α为$\varphi(x)$的**不动点**。

求$f(x)$ 的零点等价求φ的不动点。

注：$f(x)=0$等价变形的方程$x=\varphi(x)$不唯一，**求方程$f(x)=0$根的迭代格式也不唯一。**

如 在一定条件下，$x^3-x^2-1=0$ 可变形为

$$x=\sqrt[3]{x^2+1} \qquad x=\sqrt{x^3-1} \qquad x=1\big/\sqrt{x-1}$$

因此，求方程 $x^3-x^2-1=0$ 根的迭代格式也不唯一。

由迭代序列 $x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,\cdots$求方程根近似值的方法称为简单迭代法。

迭代序列的收敛性及收敛速度依赖于迭代函数、迭代初值的选取。

（1）迭代函数及初值应满足什么条件，才能保证迭代序列收敛?

（2）对于收敛的迭代序列，如何判断其收敛速度的快慢?

（3）对于收敛缓慢的迭代序列，怎样加快其收敛速度?

2 简单迭代的全局收敛性

定理（全局收敛性定理）

已知$x=\varphi(x)$，若$\varphi'(x)$在$[a, b]$上连续，且满足

① 对$\forall x\in[a,b]$，有 $a\le\varphi(x)\le b$；

② 存在常数$0<L<1$,使对$\forall x\in[a,b]$，有$|\varphi'(x)|\le L$

则 ① $x=\varphi(x)$在$[a,b]$上有唯一的实根α;

② 对任意 $x_0\in[a,b]$, $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ $k=0,1,2\cdots$ 产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$必定收敛到α;

③ $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$有误差估计式及误差渐进表达式

$$|x_k-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}| \quad |x_k-\alpha|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \quad \lim_{k\to\infty}\frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}=\varphi'(\alpha)$$

当在$[a, b]$中任意选取初值x_0均能保证某迭代格式收敛，则称该迭代格式具有全局收敛性。

证明 ① 作辅助函数 $g(x)=\varphi(x)-x$

由于$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，则$g(x)$也在$[a,b]$上连续，

且 $\underline{g(a)=\varphi(a)-a\ge 0}$ $\underline{g(b)=\varphi(b)-b\le 0}$

又由于 $\forall x\in(a,b)$, $|\varphi'(x)|\le L$，则有

$$\underline{g'(x)}=\varphi'(x)-1\le L-\underline{1<0}$$

根据连续函数介值定理及$g(x)$的单调性可知，存在唯一的$\alpha\in[a,b]$，使$g(\alpha)=0$。

由于$g(x)=\varphi(x)-x$，故$x=\varphi(x)$在$[a,b]$上有唯一的实根α。

$x=\varphi(x)$在$[a,b]$上有唯一的实根α

② 由微分中值定理及迭代格式

$$|x_k-\alpha| = |\varphi(x_{k-1})-\varphi(\alpha)|$$

$$= |\varphi'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-\alpha)|$$ 其中ξ_{k-1}在x_{k-1}与α之间

因$x\in[a, b]$时，$\varphi(x)\in[a, b]$，

故对任意$x_0\in[a, b]$，有 $x_{k-1}=\varphi(x_{k-2})\in[a, b]$。

所以$\xi_{k-1}\in[a, b]$。

由$x\in[a, b]$时，$|\varphi'(x)|\le L$，得 $\boxed{|x_k-\alpha|\le L|x_{k-1}-\alpha|}$

递推，则 $|x_k-\alpha|\le L^2|x_{k-2}-\alpha| \le\cdots\le L^k|x_0-\alpha|, k=1,2\cdots$

因 $0<L<1$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-\alpha|=0$

即对 $\forall x_0\in[a,b]$ $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\alpha$

对任意 $x_0\in[a,b]$, $x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,2\cdots$ 收敛到α

③ 由②的不等式 $|x_k-\alpha| \le L|x_{k-1}-\alpha|$

得 $|x_k-\alpha| \le L|x_{k-1}-x_k+x_k-\alpha| \le L(|x_{k-1}-x_k|+|x_k-\alpha|)$

故 $\underline{|x_k-\alpha| \le \dfrac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|}$

注意对任意$x_0\in[a, b]$，有 $x_{k-1}\in[a,b], x_{k-2}\in[a,b]$ 故

$|x_k-x_{k-1}| = |\varphi(x_{k-1})-\varphi(x_{k-2})| = |\varphi'(\eta_{k-1})(x_{k-1}-x_{k-2})| \le \underline{L|x_{k-1}-x_{k-2}|}$

带入前面的不等式，即

$$|x_k-\alpha| \le \frac{L^2}{1-L}|x_{k-1}-x_{k-2}| \le \cdots \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$

由 $x_k-\alpha = \varphi(x_{k-1})-\varphi(\alpha) = \varphi'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-\alpha)$， 得 $\dfrac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha} = \varphi'(\xi_{k-1})$

注意 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_{k-1} = \alpha$， 得 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha} = \varphi'(\alpha)$

$$|x_k-\alpha| \le \frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|,\ |x_k-\alpha| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|,\ \lim_{k\to\infty}\frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha} = \varphi'(\alpha)$$

Remarks

① $$|x_k-\alpha|\le\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k-1}|$$ 误差后验估计式

一般用$|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon$作为迭代停止的标准。

② $$|x_k-\alpha|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$$ 误差先验估计式

L越小，收敛越快； $L\approx1$，则应该运用加速收敛的方法。

③ $$\lim_{k\to\infty}\frac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}=\varphi'(\alpha)$$ 误差渐进表达式

当k充分大时，有$|x_k-\alpha|\approx|\varphi'(\alpha)||x_{k-1}-\alpha|$。故迭代收敛时,$|\varphi'(\alpha)|$越小，迭代收敛的速度越快。

定理 设方程$x=\varphi(x)$在区间$[a, b]$内有根α，且当$x\in[a, b]$时，$|\varphi'(x)|\ge 1$，则对任意初值$x_0\in[a, b]$，且$x_0\neq\alpha$，迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,2\cdots$ 发散。

***证明：** 由$x_0\in[a, b]$，且$x_0\neq\alpha$，知

$$|x_1-\alpha|=|\varphi(x_0)-\varphi(\alpha)|=|\varphi'(\xi_0)(x_0-\alpha)|\ge|x_0-\alpha|>0$$

如果$x_1\in[a, b]$，则有

$$|x_2-\alpha|=|\varphi(x_1)-\varphi(\alpha)|=|\varphi'(\xi_1)(x_1-\alpha)|\ge|x_1-\alpha|\ge|x_0-\alpha|>0$$

如此继续下去，或者$x_k\notin[a, b]$，或者$|x_k-\alpha|\ge|x_0-\alpha|>0$

因而迭代序列不可能收敛于α，即迭代格式发散。

例 为求方程$f(x)=x^3+4x^2-10=0$在[1, 1.5]内的单根，可以根据下列迭代函数构造五种迭代格式。分析当初值$x_0\in[1,1.5]$时，下列五种迭代格式的收敛性。

① $\varphi_1(x)=x-x^3-4x^2+10$ $\qquad x=x-f(x)$

② $\varphi_2(x)=(\dfrac{10}{x}-4x)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad x^3=10-4x^2$

③ $\varphi_3(x)=\dfrac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad 4x^2=10-x^3$

④ $\varphi_4(x)=(\dfrac{10}{x+4})^{\frac{1}{2}}$ $\qquad x^2(x+4)=10$

⑤ $\varphi_5(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}=x-\dfrac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$ $\qquad x=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

方程$x=\varphi(x)$是$f(x)=0$的等价变形。

思路 当$x\in[a,b]$时，$|\varphi'(x)|\geq 1$，即$\boxed{|\varphi'(x)|_{\min}\geq 1}$，则对$x_0\in[a,b]$，且$x_0\neq\alpha$，迭代格式发散。

当$x\in[a,b]$时，$|\varphi'(x)|\leq L<1$，即$\boxed{|\varphi'(x)|_{\max}\leq L<1}$，则进而考察$\boxed{a\leq\varphi(x)\leq b}$是否成立？若成立，则对任意$x_0\in[a,b]$，迭代格式收敛。

$|\varphi'(x)|_{\min}\geq 1$或$|\varphi'(x)|_{\max}\leq L<1$是否成立？理论上需求出$\varphi''(x)$，由$\varphi'(x)$在驻点及端点值确定。

$a\leq\varphi(x)\leq b$是否成立？理论上需求出$\varphi'(x)$，由$\varphi(x)$在驻点及端点的值确定。

当$x\in[a,b]$时，

① $a\leq\varphi(x)\leq b,|\varphi'(x)|\leq L<1$，则$x_0\in[a,b]$，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛。

② $|\varphi'(x)|\geq 1$，且$x_0\neq\alpha$，则$x_0\in[a,b]$，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$发散。

全局收敛性

解 ① $\varphi_1(x)=x-x^3-4x^2+10$

$\varphi_1'(x)=1-3x^2-8x \qquad \varphi_1''(x)=-6x-8$

当$x\in[1,\ 1.5]$，$|\varphi_1'(x)|\geq|\varphi_1'(1)|=10>1$

故对任意$x_0\in[1,\ 1.5]$（$x_0\neq\alpha$），由$\varphi_1(x)$构造的迭代格式发散。

② $\varphi_2(x)=(\frac{10}{x}-4x)^{\frac{1}{2}} \qquad \varphi_2'(x)=-\frac{1}{2}(\frac{10}{x^2}+4)(\frac{10}{x}-4x)^{-\frac{1}{2}}$

当$x\in[1,\ 1.5]$，$|\varphi_2'(x)|>\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{10}{1.5^2}+4)}{\sqrt{\frac{10}{1}-4\times 1}}\approx 1.724>1$

故对任意$x_0\in[1,\ 1.5]$（$x_0\neq\alpha$），由$\varphi_2(x)$构造的迭代格式发散。

③ $\varphi_3(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$ $\varphi_3'(x)=-\frac{3}{4}x^2(10-x^3)^{-\frac{1}{2}}$

$\varphi_3''(x)=-\frac{3}{8}x(40-x^3)(10-x^3)^{-\frac{3}{2}}$

当$x\in[1,\ 1.5]$，$\varphi_3''(x)<0$ $\varphi_3'(x)\in[\varphi_3'(1.5),\varphi_3'(1)]\approx[-0.656,-0.25]$

即 $|\varphi_3'(x)|\le|\varphi_3'(1.5)|<1$

当$x\in[1,\ 1.5]$，$\varphi_3'(x)<0$ $\varphi_3(x)\in[\varphi_3(1.5),\varphi_3(1)]\approx[1.287,1.5]\subset[1,1.5]$

故对任意$x_0\in[1,\ 1.5]$， 由$\varphi_3(x)$构造的迭代格式收敛。

④ $\varphi_4(x)=(\frac{10}{x+4})^{\frac{1}{2}}$, $\varphi_4'(x)=-\frac{\sqrt{10}}{2}(x+4)^{-\frac{3}{2}}$, $\varphi_4''(x)=\frac{3\sqrt{10}}{4}(x+4)^{-\frac{5}{2}}$

当$x\in[1,\ 1.5]$，$\varphi_4''(x)>0$ $\varphi_4'(x)\in[\varphi_4'(1),\varphi_4'(1.5)]\approx[-0.141,-0.123]$

即 $|\varphi_4'(x)|\le|\varphi_4'(1.5)|<1$

当$x\in[1,\ 1.5]$，$\varphi_4'(x)<0$ $\varphi_4(x)\in[\varphi_4(1.5),\varphi_4(1)]\approx[1.348,1.414]\subset[1,1.5]$

故对任意$x_0\in[1,\ 1.5]$， 由$\varphi_4(x)$构造的迭代格式收敛。

且与③构造的迭代格式相比，收敛速度更快。

⑤ $\varphi_5(x)=x-\dfrac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$ $\varphi_5'(x)=\dfrac{(x^3+4x^2-10)(6x+8)}{(3x^2+8x)^2}$

当$x\in[1,\ 1.5]$, $|\varphi_5'(x)|\le\dfrac{|1.5^3+4\times1.5^2-10||6\times1.5+8|}{(3\times1^2+8\times1)^2}\approx0.334<1$

令$\varphi_5'(x)=0$，知 $\varphi_5(x)$在$f(x)=0$的根α及$x=-4/3$处取得极值。

因$x=-4/3\notin[1,\ 1.5]$，故当$x\in[1,\ 1.5]$时，可能的最值为

$$\varphi_5(\alpha)=\alpha \qquad \varphi_5(1)=1-\frac{1^3+4\times1^2-10}{3\times1^2+8\times1}=\frac{16}{11}\approx1.4545\cdots$$

$$\varphi_5(1.5)=1.5-\frac{(1.5)^3+4\times(1.5)^2-10}{3\times(1.5)^2+8\times(1.5)}=1.5-\frac{2.375}{18.75}\approx1.37333\cdots$$

注意$\alpha\in[1,\ 1.5]$，则

$$\min\{\varphi_5(\alpha),\varphi_5(1),\varphi_5(1.5)\}\in[1,1.5] \quad \max\{\varphi_5(\alpha),\varphi_5(1),\varphi_5(1.5)\}\in[1,1.5]$$

故对任意$x_0\in[1,\ 1.5]$，由$\varphi_5(x)$构造的迭代格式收敛。

$f(x)=x^3+4x^2-10=0$

3 简单迭代的局部收敛性

全局收敛性定理的条件不易验证，甚至并不成立。下面讨论初值x_0取在根附近的迭代收敛性。

① **定义** 若存在α的闭邻域

$$U(\alpha)=[\alpha-\delta,\alpha+\delta] \quad (\delta>0)$$

使 $x_{k+1}=\varphi(x_k),\ k=0,1,2,\cdots$ 对 $\forall x_0\in U(\alpha)$ 均收敛，则称该迭代格式具有局部收敛性。

② **局部收敛性的判别**

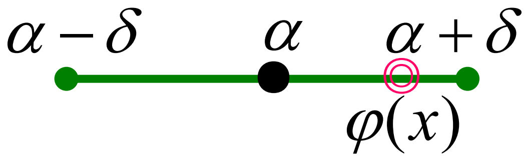
定理 若存在α的闭邻域$U(\alpha)=[\alpha-\delta,\alpha+\delta]\ (\delta>0)$及常数0<$L$<1，使得$\varphi'(x)$在该邻域上连续，

（1）若对$\forall x\in U(\alpha)$，$|\varphi'(x)|\le L<1$，则迭代格式局部收敛。

（2）若对$\forall x\in U(\alpha)$，$|\varphi'(x)|\ge 1$，则迭代格式发散。

证明 $\varphi'(x)$ 在α的闭邻域 $U(\alpha)=[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$上连续。

（1）若对 $\forall x\in U(\alpha),|\varphi'(x)|\le L<1$，



则 $|\varphi(x)-\alpha|=|\varphi(x)-\varphi(\alpha)|$

$=|\varphi'(\xi)(x-\alpha)|\le L|x-\alpha|<\delta$ 其中ξ介于x与α之间

即对 $\forall x\in U(\alpha)$，有 $\alpha-\delta<\varphi(x)<\alpha+\delta$

将全局收敛性定理中的$[a,b]$取为$[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$，

则对 $\forall x_0\in U(\alpha)$，简单迭代（局部）收敛。

（2）若对 $\forall x\in U(\alpha),|\varphi'(x)|\ge 1$，则由前述定理知迭代格式发散。

当 $x\in[a,b]$ 时，

① $a\le\varphi(x)\le b,|\varphi'(x)|\le L<1$，则 $x_0\in[a,b]$, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛。

② $|\varphi'(x)|\ge 1$，且$x_0\ne\alpha$，则 $x_0\in[a,b],\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 发散。

全局收敛性

Remarks

定理 若$\varphi'(x)$在α处连续，则

（1）当$|\varphi'(\alpha)|<1$时，迭代格式局部收敛；

（2）当$|\varphi'(\alpha)|>1$时，迭代格式发散。

在α的邻域中，$|\varphi'(x)|\le L<1$ 或 $|\varphi'(x)|>1$不恒成立，则迭代的收敛性不能断定。

当$x\in U(\alpha)$时，

① $|\varphi'(x)|\le L<1$，则 $x_0\in U(\alpha)$，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛。

② $|\varphi'(x)|\ge 1$，则 $x_0\in U(\alpha)$，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$发散。

局部收敛性

当$x\in[a,b]$时，

① $a\le\varphi(x)\le b, |\varphi'(x)|\le L<1$，则 $x_0\in[a,b]$，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛。

② $|\varphi'(x)|\ge 1$，且$x_0\neq\alpha$，则 $x_0\in[a,b]$，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$发散。

全局收敛性

二 迭代法的收敛阶

对收敛的迭代格式，收敛速度有快慢之分。

设 $x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,\cdots$ 收敛于$x=\varphi(x)$的根α。

记第k次迭代误差$e_k=x_k-\alpha, x_k\neq\alpha$，如果存在$p\geq 1$及$c>0$（$p=1$要求$0<c<1$），使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c$

则称序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$或产生$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$的迭代格式 **p阶收敛**。

对p阶收敛格式，k充分大时有 $|e_{k+1}|\approx c|e_k|^p$，故$p$越大，收敛越快。

$p=1$ 称为**线性收敛**；$p>1$称为**超线性收敛**；$p=2$ 称为**平方收敛（二次收敛）**。

若 $0<|\varphi'(\alpha)|<1$ 由 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_k-\alpha}{x_{k-1}-\alpha}=\varphi'(\alpha)$ 知 $0<\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|}<1$

即 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 局部收敛，且**为线性收敛**。

若 $\varphi'(\alpha)=0$ 则 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 局部收敛，且**为超线性收敛**。

若要构造超线性收敛的迭代格式，必须要求 $\varphi'(\alpha)=0$

p阶收敛的的判别*

定理 设$x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,\cdots$ 中迭代函数的高阶导数 $\varphi^{(p)}(x)$（$p\geq1$，p为正整数 ）在点α的邻域里连续，则迭代格式**p阶收敛**的充要条件是

$$\varphi(\alpha)=\alpha, \varphi'(\alpha)=\varphi''(\alpha)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(\alpha)=0, \varphi^{(p)}(\alpha)\neq0$$

若p=1，要求 $0<|\varphi'(\alpha)|<1$ 。

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c$$

三 迭代法的加速

1 线性收敛序列的Aitken加速法

设α是$x=\varphi(x)$的根。对于线性收敛的迭代序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$，有正数 c（0<c<1），使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=c \qquad 即 \qquad \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}\right|=c$$

对充分大的k，有 $\dfrac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}\approx\bar{c}$ $\quad \dfrac{x_{k+2}-\alpha}{x_{k+1}-\alpha}\approx\bar{c}$ $\quad |\bar{c}|<1$

消去常数 $\bar{c}$，得 $\dfrac{x_{k+2}-\alpha}{x_{k+1}-\alpha}\approx\dfrac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}$

即 $\alpha\approx\dfrac{x_{k+2}x_k-x_{k+1}^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}=x_k-\dfrac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$，$k=0,1,\ldots.$

知第二项是对 x_k 的一种补偿。

定义新的序列 $\{y_k\}_{k=0}^{+\infty}$，即

$$y_k = x_k - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k}$$ **Aitken迭代格式**

对于Aitken迭代有如下的定理：

定理 若序列$\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 满足：

（1）收敛于根α；

（2）$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = c\ (0<c<1),\ e_k = |x_k-\alpha| \neq 0,\ \mathrm{k} = 0,1,2,\cdots$

则由Aitken加速公式产生的序列$\{y_k\}_{k=0}^{+\infty}$比序列$\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$更快地收敛于根α。 （证明略）

$$\alpha \approx x_k - \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{x_{k+2}-2x_{k+1}+x_k},\quad k = 0,\ 1,\ \ldots.$$

2 Steffensen迭代法

在Aitken迭代格式中，$\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 是线性收敛的序列，但并不限定 $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 如何获得。若$\{x_k\}_{k=0}^{+\infty}$由简单迭代获得，所得迭代格式称为**Steffensen迭代格式：**

给出 x_0 $\qquad x_{k+1} = x_k - \dfrac{(\varphi(x_k) - x_k)^2}{\varphi(\varphi(x_k)) - 2\varphi(x_k) + x_k} \qquad k = 0,1,2,\cdots$

可以证明：在一定条件下，

（1） Steffensen迭代序列的极限是$x=\varphi(x)$的根；

（2）若 $\varphi'(\alpha) = A \neq 1,\ A \neq 0$， 则Steffensen迭代局部收敛，且至少为二阶收敛。

$$y_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

Remarks

① 当 $0<|\varphi'(\alpha)|<1$，$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 线性收敛。

当 $|\varphi'(\alpha)|>1$，$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 发散。

但Steffensen迭代不仅能加速收敛，而且在一定条件下也能将发散的迭代格式改进为收敛的迭代格式。

② Steffensen迭代加速技术一般不对高阶收敛的迭代法进行。

§4 Newton迭代法

一 Newton迭代格式的构造

设 x_k 是 $f(x)=0$ 的一个近似根。用

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(x_k)}{2!}(x-x_k)^2+\cdots$$

前两项代替$f(x)$，得近似$f(x)=0$的线性方程

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

设 $f'(x_k)\neq 0$，得上述近似方程的解 $\overline{\alpha}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

取近似解 $\overline{\alpha}$ 作为原方程$f(x)=0$的新近似根，

即 $\quad x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k=0,1,2,\cdots$ **Newton迭代格式**

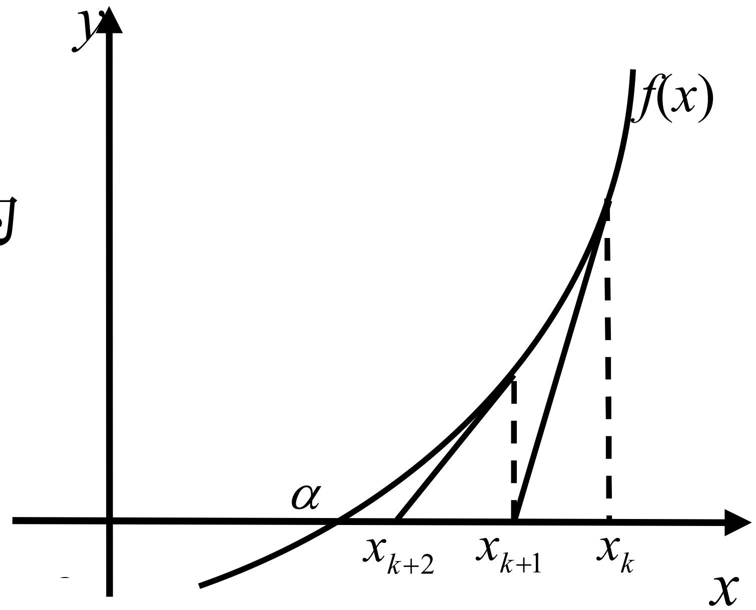
Newton迭代格式可看作**非线性方程线性化**后所构造的迭代方法；也是取$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$的简单迭代法。

若$f'(x_k)\neq 0$， 过$(x_k,f(x_k))$处的切线方程为

$$\frac{y-f(x_k)}{x-x_k}=f'(x_k)$$

该切线与X轴交点的横坐标为

$$x=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



Newton迭代法的几何意义

Newton迭代的几何意义

逐次用切线与X轴的交点逼近曲线与X轴的交点。

Newton法亦称为切线法。

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\qquad k=0,1,2,\cdots$$

二 Newton迭代格式的收敛性

1 局部收敛性

定理（Newton迭代法局部收敛性定理）

设α为$f(x)=0$的根，如果

（1）函数$f(x)$在α的邻域具有连续的二阶导数；

（2）$f'(\alpha)\neq 0$。　　　　（α为方程的单根）

则存在α的某个邻域$U(\alpha)=[\alpha-\delta,\alpha+\delta]\ (\delta>0)$，使对任意初始值$x_0\in U(\alpha)$，由Newton迭代公式产生的序列至少二阶收敛于$\alpha$。

证明：思路

先证明Newton迭代满足简单迭代法局部收敛定理条件，得到局部收敛性；再用定义考察收敛阶。

（1）由Newton迭代 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

得 $\varphi'(x)=1-\dfrac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

由于$f(x)$在α的邻域具有连续的二阶导数，可知： $\varphi(x)$在α的邻域可导，且$\varphi'(x)$连续。

显然 $\varphi'(\alpha)=0$

根据连续函数的性质，一定存在α的某个邻域$U(\alpha)=[\alpha-\delta,\alpha+\delta]$ $(\delta>0)$，对于任意的$x\in U(\alpha)$，有 $|\varphi'(x)|\le L<1$

故Newton迭代满足简单迭代法局部收敛定理的条件，即Newton迭代法局部收敛。**(超线性收敛)**

（2）将$f(x)$在x_k处作Taylor展开式：

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{1}{2!}f''(\xi_k)(x-x_k)^2 \qquad \text{(a)}$$

由Newton迭代公式，有 $0=f(x_k)+f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)$ (b)

(a)式减去(b)式，有 $f(x)=f'(x_k)(x-x_{k+1})+\frac{1}{2!}f''(\xi_k)(x-x_k)^2$

取$x=\alpha$，则 $x_{k+1}-\alpha=\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}(\alpha-x_k)^2$ ξ_k介于x_k与α之间

由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\lim\limits_{k\to\infty}\xi_k=\alpha$，得 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2}\right|=\left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$

当$f''(\alpha)\neq 0$时，Newton迭代序列二阶收敛于α。

当$f''(\alpha)=0$时，Newton迭代序列超二阶收敛于α。

即由Newton迭代公式产生的序列至少二阶收敛于α。

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2}\right|=c$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Remarks

在Newton迭代中，通常当初值选得充分接近根时，才能保证迭代序列收敛。初值选取的苛刻性，是Newton法的主要缺陷。

若要求初值在较大范围内取值时，Newton迭代仍具有收敛性，但其判断一般需要增加一些条件。

2 大范围收敛性

定理 设α是方程$f(x)=0$在隔根区间$[a,b]$内的根，如果 $f''(x)$ 连续，且

（1）对于$x\in[a,b]$, $f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$；

（2）取$x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)f''(x_0)>0$ 。

则由初值x_0按Newton迭代格式产生的序列单调收敛于α。并有

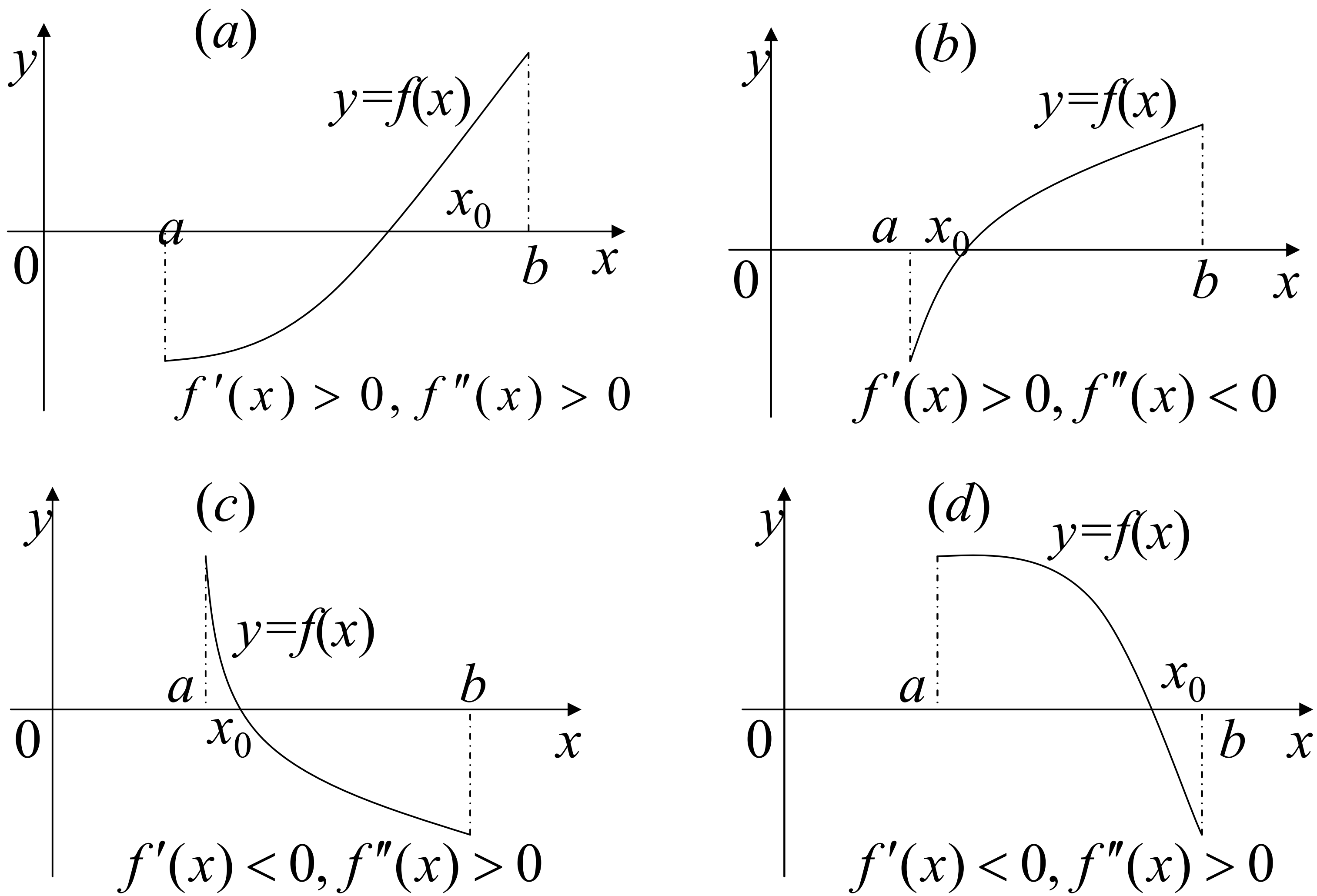
$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2}=\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

即Newton迭代具有二阶收敛性。

该定理表明：对初值的选取赋予一定的强制性条件（充分条件），可使Newton迭代收敛。。

Remark：

满足定理条件的情况有4种（见下图）。



定理条件示意图（$[a,b]$为隔根区间，则$f(a)f(b)<0$）

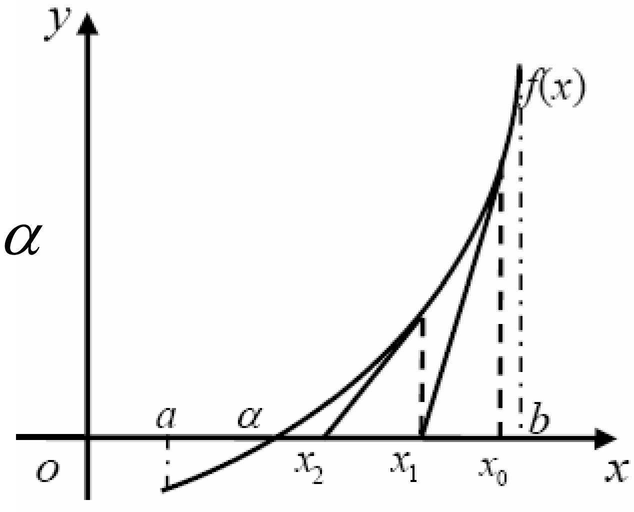
证明： 由于$[a,b]$为隔根区间，则$f(a)f(b)<0$。

仅就图(a)的情况进行证明。此时有

$$f(a)<0,\ f(b)>0,\ f'(x)>0,\ f''(x)>0$$

由 $f(x_0)f''(x_0)>0$，知 $f(x_0)>0$，即 $x_0>\alpha$

而 $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}<x_0$，得 $\begin{cases}\alpha<x_0\\ x_1<x_0\end{cases}$



情形 1°的示意图

又由$f(x)$在x_0的Taylor展开式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_0)(x-x_0)^2$$

其中 ξ_0 在x与x_0之间

得 $$f(\alpha)=f(x_0)+f'(x_0)(\alpha-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_0)(\alpha-x_0)^2=0$$

（1）对于$x\in[a,b]$, $f'(x), f''(x)$ 连续且不变号；

（2）取$x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)f''(x_0)>0$ 。

即 $$\alpha - x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_0)}{f'(x_0)}(\alpha - x_0)^2 < 0$$

故 $$\alpha - [x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}] = \alpha - x_1 < 0$$ 即 $\alpha < x_1 < x_0$

一般地，设 $\alpha < x_k$ ，类似可得 $f(x_k) > 0$，

且 $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k$$

$$\underline{\alpha - x_{k+1}} = \alpha - [x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}] = \underline{-\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}(\alpha - x_k)^2} < 0$$

即有 $\alpha < x_{k+1} < x_k \ (k = 0,1,2,\cdots)$

因$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$单调递减且有下界，则必有极限$\bar{x}$ 。

对$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$取极限，得 $f(\bar{x}) = 0$。

故**Newton迭代序列单调收敛**于$\bar{x} = \alpha$。

$$f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_0)(\alpha - x_0)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha < x_0 \\ x_1 < x_0 \end{cases}$$

注意 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = \alpha$ 和 $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$

得
$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \neq 0$$

即**Newton迭代具有二阶收敛性**。

该定理表明：**对初值的选取赋予一定的强制性条件（充分条件），可使Newton迭代收敛。**

$$\alpha - x_{k+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}(\alpha - x_k)^2 < 0$$

例：试建立求解方程

$$e^x + x = 2$$

根的近似值的迭代公式。要求

（1）写出隔根区间；

（2）给出迭代法收敛的初始 x_0 的范围，并证明迭代法的收敛性；

（3）取 $x_0 = 0.5$，求根的近似值。误差小于 10^{-2} 时迭代结束。

解（1）设 $f(x) = e^x + x - 2$ 则 $f(0) < 0, f(1) > 0$

由 $f'(x) = e^x + 1 > 0$，知 $f(x)$ 单调递增，

故得到隔根区间为[0,1] (或[0,0.8]等）。

（2）**方法1** 若取 $\varphi(x)=2-e^x$

则 $|\varphi'(x)|=|-e^x|\ge 1 \quad \forall x\in[0,1]\ or\ \forall x\in[0,0.8]$

这时迭代格式 $x_{k+1}=2-e^{x_k},\ k=0,1,\cdots$ 发散

若取 $\varphi(x)=\ln(2-x) \quad \varphi'(x)=\dfrac{1}{x-2}$

对 $\forall x\in[0,0.8]$(隔根区间) (不能包含 x=1)

$$|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{2-x}\right|\le\left|\frac{1}{2-0.8}\right|=\frac{1}{1.2}<1$$

同时 $\varphi(x)$ 在[0,0.8]上单调，且

$$0<0.182321556=\varphi(0.8)\le\varphi(x)\le\varphi(0)=0.69314718<0.8$$

（求 x_0 的范围，需要运用全局性收敛定理）

故迭代格式 $x_{k+1}=\ln(2-x_k),\ k=0,1,\cdots$

对任意 $x_0\in[0,0.8]$ 收敛。

$e^x+x=2$

方法2 设 $f(x)=e^x+x-2$ 则在隔根区间[0,1]内

$f'(x)=e^x+1>0$ $f''(x)=e^x>0$ $f'(x)$ $f''(x)$ 连续，

且取$x_0\in[0.5,1]$，则有 $f(x_0)f''(x_0)>0$

故牛顿迭代

$$x_{k+1}=x_k-\frac{e^{x_k}+x_k-2}{e^{x_k}+1}=\frac{e^{x_k}(x_k-1)+2}{e^{x_k}+1}\quad k=0,1,\cdots$$

对任意 $x_0\in[0.5,1]$收敛。

$e^x+x=2$

（3）方法1

用简单迭代公式 $x_{k+1}=\ln(2-x_k), k=0,1,\cdots$ 计算迭代结果如下

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	0.5	
1	0.405465108	0.094534891
2	0.466582089	0.061116981
3	0.427499172	0.039082917
4	0.452667236	0.025168064
5	0.436532651	0.016134584
6	0.446906014	0.010373363
7	0.440249061	0.006656953

计算中小数点后保留多少位？

因 $\lvert x_7 - x_6\rvert < 0.01$ ，故 $\alpha \approx x_7 \approx 0.440249061$

方法2

用Newton迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{e^{x_k}(x_k-1)+2}{e^{x_k}+1}, k=0,1,\cdots$ 计算迭代结果如下

k	x_k	$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$
0	0.5	
1	0.443851672	0.056148328
2	0.442854703	0.000996968

因 $\lvert x_2-x_1\rvert<0.01$，故 $\alpha\approx x_2\approx 0.442854703$

Remarks

二阶收敛格式的迭代次数小于一阶收敛格式的迭代次数；但二阶收敛格式每次迭代所用的计算量会大于一阶收敛格式所用的计算量。

例　建立Newton法求平方根$\sqrt{c}$ $(c>0)$的迭代公式。

证明：对于任意初值$x_0>0$，该Newton迭代格式收

解：令$\alpha=\sqrt{c}$，则开平方根问题可转化为求方程

$f(x)=x^2-c=0$的正根α。

Newton迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-c}{2x_k}=\dfrac{1}{2}(x_k+\dfrac{c}{x_k}),\ k=0,1,2,\cdots$

注意对任意$x>0$，$f'(x),f''(x)$连续且大于零。

若取$x_0>\sqrt{c}$，则$f(x_0)f''(x_0)>0$，Newton迭代收敛。

若取$0<x_0<\sqrt{c}$，则 $x_1=\dfrac{1}{2}(x_0+\dfrac{c}{x_0})=\dfrac{1}{2}(\sqrt{x_0}-\sqrt{\dfrac{c}{x_0}})^2+\sqrt{c}>\sqrt{c}$

此时$x_1>\sqrt{c}$, $f(x_1)f''(x_1)>0$，Newton迭代收敛。

若取$x_0=\sqrt{c}$，则 $x_1=\dfrac{1}{2}(x_0+\dfrac{c}{x_0})=\dfrac{1}{2}(\sqrt{c}+\sqrt{c})=\sqrt{c}$

此时$x_k=x_{k-1}=\cdots=x_1=x_0=\sqrt{c}$，Newton迭代收敛。

故取任意$x_0>0$，均可保证Newton迭代格式收敛。

三 Newton迭代格式的变形

1 Newton下山法*

初值选取不合适，Newton迭代可能不收敛。

实际计算中，初值选取比较困难。

将Newton法的计算结果与前一步的近似值做加权平均后得到的结果作为新的近似值，即

$$x_{k+1}=(1-\lambda)x_k+\lambda\bar{x}_{k+1}=(1-\lambda)x_k+\lambda\left(x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right)$$

$$=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,\cdots$$

λ（$0<\lambda<1$）称为**下山因子**。

基本思想： 基于 Newton迭代，并要求迭代后，得到以0为下界的严格单调递减的函数序列 $\{|f(x_k)|\}_{k=0}^{\infty}$。这样当$k\to\infty$时，$|f(x_{k+1})|\to 0$。从而易于保证迭代序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 的收敛性。

2 求重根的修正Newton法

Newton迭代收敛性?

设α为m重根，即 $f(x)=(x-\alpha)^m g(x),\ g(\alpha)\neq 0$

由Newton迭代 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\varphi(x)=x-\frac{(x-\alpha)^m g(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x)}$$

$$=x-\frac{(x-\alpha)g(x)}{mg(x)+(x-\alpha)g'(x)}$$

直接求导数麻烦

根据导数定义

$$\varphi'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{x-\alpha}\left[x-\alpha-\frac{(x-\alpha)g(x)}{mg(x)+(x-\alpha)g'(x)}\right]=1-\frac{1}{m}$$

即 $0<\varphi'(\alpha)<1\quad(m>1)$

由 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{e_{k+1}}{e_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha}=\varphi'(\alpha)$ ，知：

（1）求重根的Newton迭代局部收敛。

（2）尽管Newton迭代对**单根至少二阶收敛**；但**对重根却只有一阶收敛**。

方法一

若取 $\varphi(x)=x-m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 设 $f(x)=(x-\alpha)^m g(x),\ g(\alpha)\neq 0$ 有

$$\varphi'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{x-\alpha}\left[x-\alpha-\frac{\boxed{m}(x-\alpha)g(x)}{mg(x)+(x-\alpha)g'(x)}\right]$$

$$=0$$

$x_{k+1}=x_k-m\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad k=0,1,\cdots$ 称为**修正的Newton迭代**。

可以证明：修正的Newton迭代求*m*重根时局部收敛，且至少为二阶收敛。

方法二

因m未知，修正的Newton法使用比较困难。

若α是$f(x)$的m 重零点，则

$$f(x)=g(x)(x-\alpha)^m \qquad g(\alpha)\neq 0$$

$$f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m g'(x)$$

令 $$\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{g(x)(x-\alpha)}{mg(x)+(x-\alpha)g'(x)}$$

并设 $$h(x)=\frac{g(x)}{mg(x)+(x-\alpha)g'(x)}$$

则 $\mu(x)=h(x)(x-\alpha)$ 且 $h(\alpha)=\dfrac{1}{m}\neq 0$

改进：将求$f(x)$的重零点问题转化为求$\mu(x)$单重零点的问题。

取迭代函数 $\mu(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\boxed{\varphi(x)=x-\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}}=x-\frac{\dfrac{f(x)}{f'(x)}}{\dfrac{f'(x)f'(x)-f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}}$$

即 $$\varphi(x)=x-\frac{f(x)f'(x)}{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}$$

迭代格式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)}\quad k=0,1,\cdots$$

具有**局部收敛，且至少为二阶收敛**。

缺点：需要计算 $f''(x_k)$，计算量稍大。

3 弦割法

目的：构造超线性收敛且避免导数计算的格式。

由 $$f(x_{k-1})=f(x_k)+f'(x_k)(x_{k-1}-x_k)+\frac{1}{2}f''(\xi_k)(x_{k-1}-x_k)^2$$

得 $$f'(x_k)\approx\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

用函数增量与自变量增量之比近似替代 Newton迭代格式中的$f'(x_k)$。

得 $$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}),\ k=0,1,\ldots$$

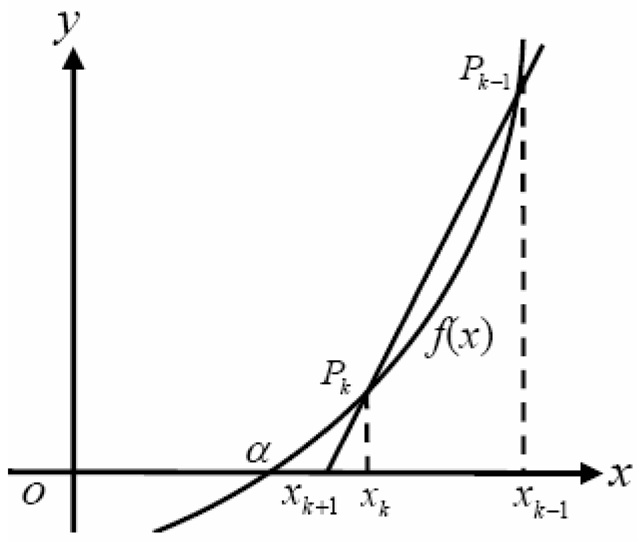
此迭代过程称为**弦割法**。

弦割法因其几何意义而得名。

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad k=0,1,2,\cdots$$

几何意义

过点$P_{k-1}(x_{k-1},f(x_{k-1})),P_k(x_k,f(x_k))$做直线。



弦割法的几何意义

方程 $$\frac{y-f(x_k)}{x-x_k}=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

该直线与X轴的交点为

$$x=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

弦割法是用弦$P_{k-1}P_k$ 与X轴交点的横坐标 x_{k+1} 作为$f(x)$=0的近似根。

弦割法求x_{k+1} 用到x_k,x_{k-1}，开始需给出x_0,x_1。

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}),\ \ k=0,1,\ldots$$

弦割法的局部收敛性（超线性）

定理 设 $f(\alpha)=0, f'(\alpha)\neq 0, f''(x)$在$\alpha$的某邻域内连续，则存在$\alpha$的一个邻域 $N(\alpha)=[\alpha-\delta,\alpha+\delta]\,(\delta>0)$，使得当 $x_0,x_1\in N(\alpha)$时，由弦割法产生的序列$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$按阶 $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ 收敛于α。

总结

1. 简单迭代格式

- 简单迭代格式的构造、计算
- 全局收敛性判断
- 局部收敛性与收敛阶判断

2. Newton迭代

- 格式、计算及几何意义
- 局部收敛性及收敛阶(单、重根)
- 非局部(大范围)收敛性判断

3. 二分法

- 计算
- 预先估计对分次数

4. Newton迭代的变形

- 求重根的迭代法（两种方法）
- 避免导数计算的弦割法

5. 迭代法的加速

- Steffensen迭代格式及计算
- Steffensen迭代的局部收敛性及收敛阶