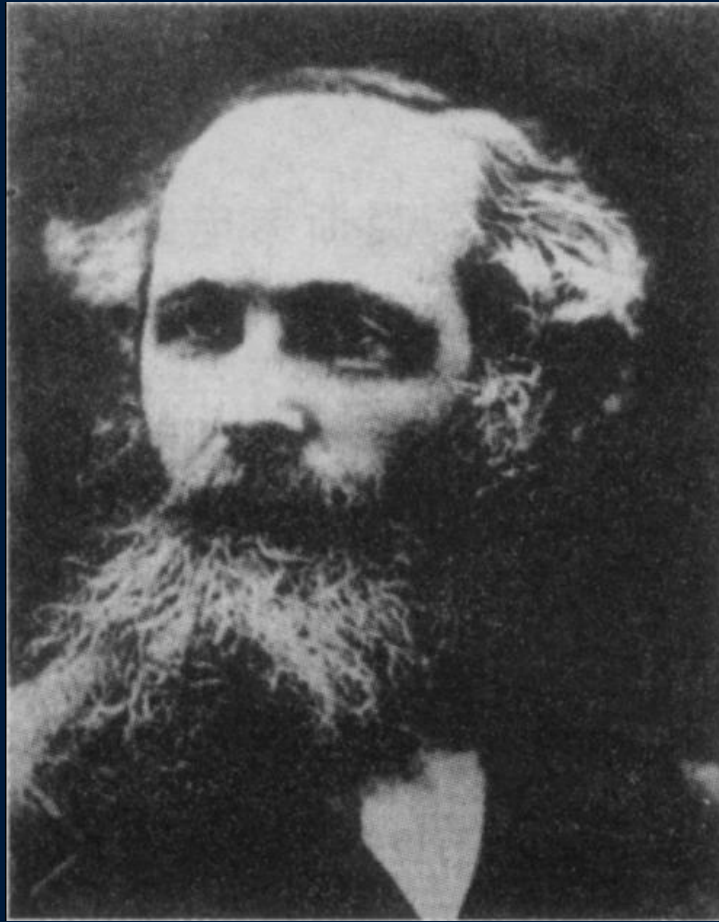


第15章 电磁感应



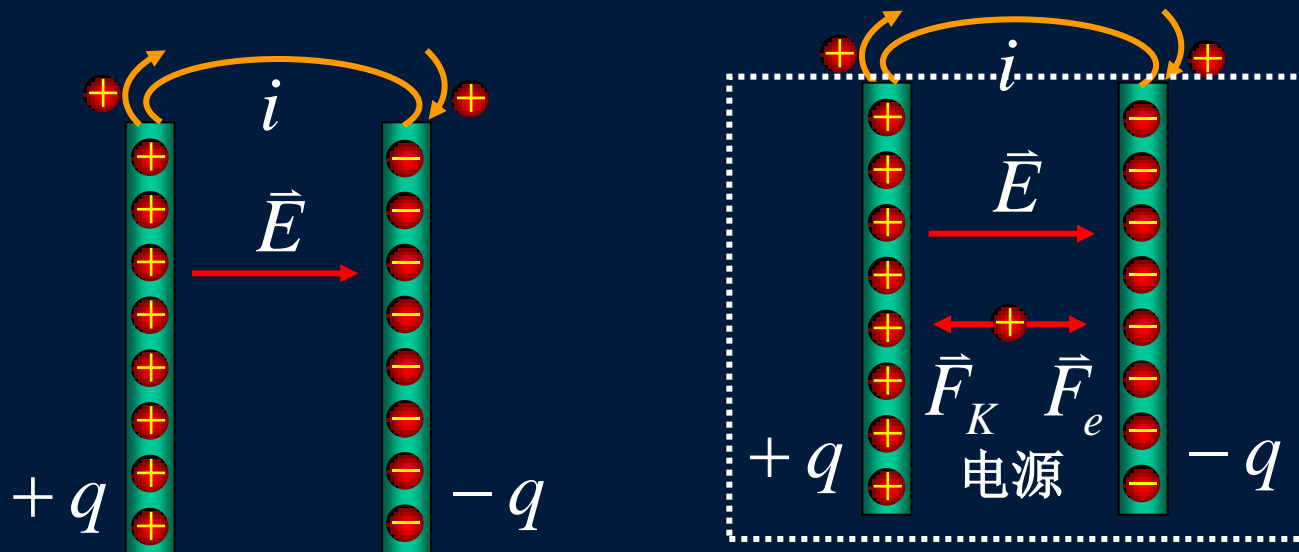
麦克斯韦（J. M. Maxwell 1831-1879），19世纪伟大的英国物理学家

§ 15.1 法拉第电磁感应定律

主要内容:

1. 电源电动势
2. 电磁感应现象
3. 法拉第电磁感应定律

15.1.1 电源电动势



要求在电源内电路中存在一种能反抗静电力、并把正电荷由负极低电势处推向正极高电势处的非静电力 \vec{F}_K

什么装置能提供非静电力——电源

电源——能将其他形式的能量转化为电能的装置

例：干电池、发电机、太阳能电池

电源电动势

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{非}}}{q}$$

电源的电动势等于非静电力把单位正电荷从负极经电源内部移动到正极时所做的功

非静电性场场强

$$\vec{E}_K = \vec{F}_K / q$$

$$A_{\text{非}} = \int_{(-)}^{(+)} \vec{F}_K \cdot d\vec{l} = q \int_{(-)}^{(+)} \vec{E}_K \cdot d\vec{l} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon = \int_{(-)}^{(+)} \vec{E}_K \cdot d\vec{l}$$

对闭合电路

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_K \cdot d\vec{l}$$

➤ 讨论

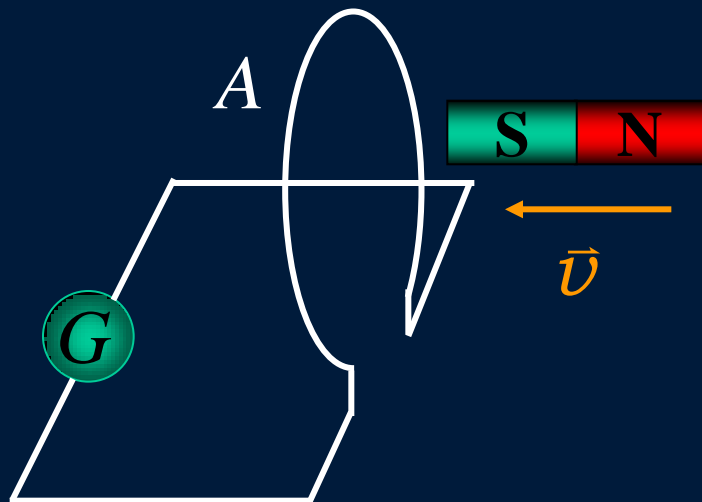
- (1) ε 反映电源作功能力，与外电路无关；
- (2) ε 是标量，规定其方向为电源内部电势升高的方向；

15.1.2 电磁感应现象

电流的磁效应 \rightarrow 电生磁

磁的电效应 \rightarrow 磁生电 ?

➤ 现象



- ❖ 磁铁与线圈有相对运动，线圈中产生电流
- ❖ 一线圈电流变化，在附近其它线圈中产生电流

➤ 结论

当穿过一闭合导体回路所围面积内的磁通量发生变化时, 无论这种变化是何种原因引起的, 该回路中就会产生电流——电磁感应现象

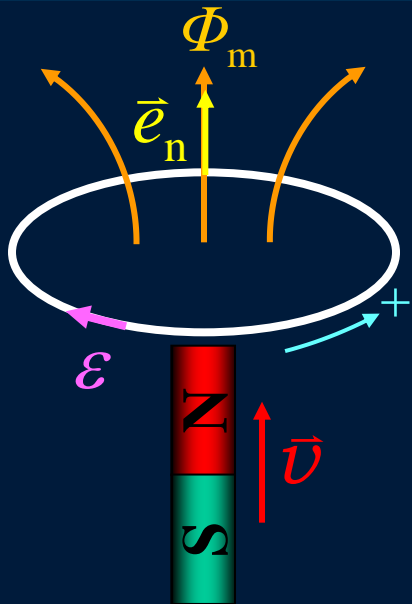
Φ 变化 \longrightarrow 感应电流(感应电动势)

15.1.3 法拉第电磁感应定律

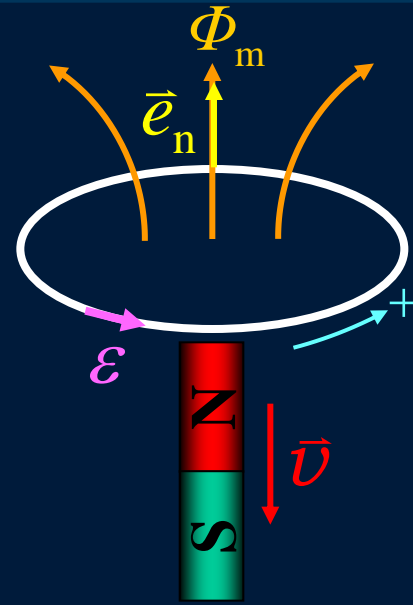
法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

导体回路中产生的感应电动势的大小与穿过导体回路的磁通量的变化率成正比. 负号确定回路中感应电动势的方向



$$\Phi_m > 0 \quad \frac{d\Phi_m}{dt} > 0 \quad \varepsilon < 0$$



$$\Phi_m > 0 \quad \frac{d\Phi_m}{dt} < 0 \quad \varepsilon > 0$$

楞次定律: 闭合回路中，感应电流的方向总是使得它自身所产生的磁通量反抗引起感应电流的磁通量变化

➤ 讨论

(1) 若回路是 N 匝密绕线圈 $\varepsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(N\Phi_m)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$

(2) 若闭合回路中电阻为 R

$$I_i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{d\Phi_m}{Rdt} = \frac{dq_i}{dt}$$

感应电荷 $q_i = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} -\frac{1}{R} d\Phi_m = (\Phi_{m1} - \Phi_{m2}) / R$

按此原理设计的测量磁通的装置称为磁通计。

例 在无限长直载流导线的磁场中，有一运动的导体线框，导体线框与载流导线共面

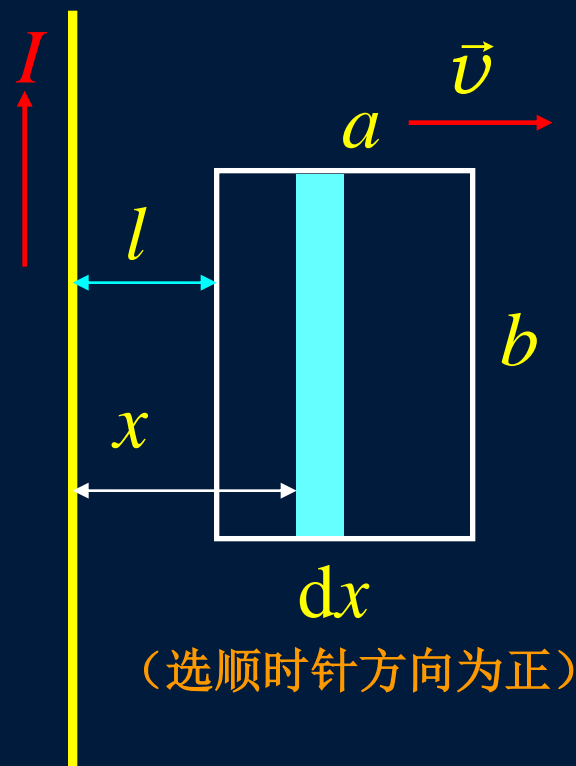
求 线框中的感应电动势

解 通过面积元的磁通量

$$d\Phi_m = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx$$

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int d\Phi_m = \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{l+a}{l}\right)\end{aligned}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \left[\frac{dl/dt}{l+a} - \frac{dl/dt}{l} \right] = \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi l(l+a)}$$



例 两个同心圆环，已知 $r_1 \ll r_2$ ，大圆环中通有电流 I ，当小圆环绕直径以 ω 转动时

求 小圆环中的感应电动势

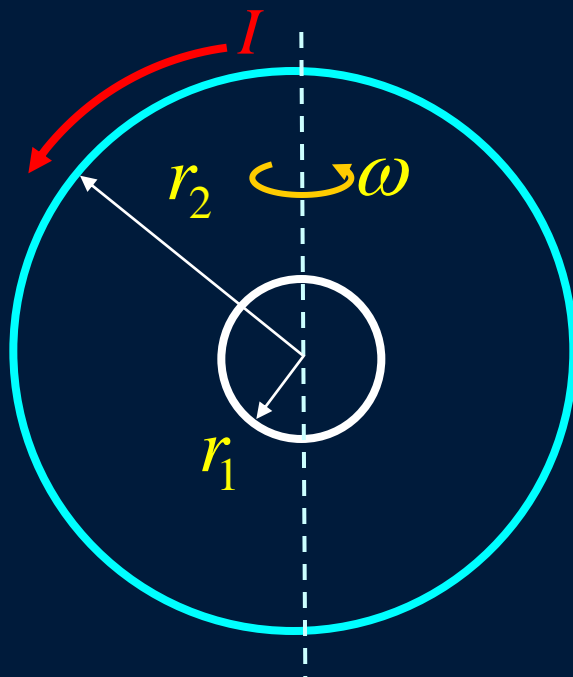
解 大圆环在圆心处产生的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r_2}$$

通过小线圈的磁通量

$$\Phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2r_2} \pi r_1^2 \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{2r_2} \pi r_1^2 \cos \omega t$$

感应电动势 $\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\mu_0 I \pi r_1^2 \omega}{2r_2} \sin \omega t$



§ 15.2 动生电动势

主要内容:

1. 动生电动势
2. 运动导体中的感应电动势
3. 转动线圈的感应电动势

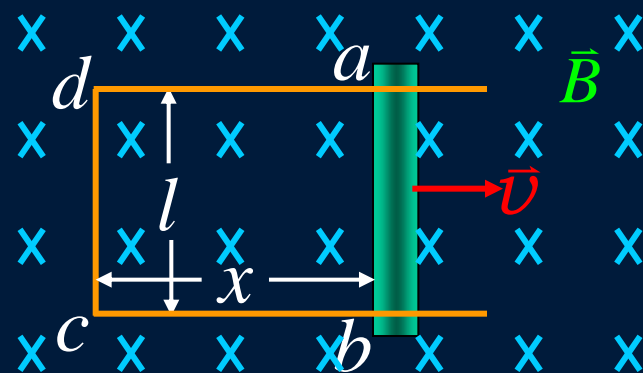
两种不同机制

1. 相对于实验室参照系，磁场不随时间变化，而导体回路运动-----动生电动势
2. 相对于实验室参照系，若导体回路静止，但磁场随时间变化-----感生电动势

15.2.1 运动导体中的感应电动势

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left| -\frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \left| -\frac{d(BS)}{dt} \right| \\ &= Bab \left| -\frac{dx}{dt} \right| = Blv\end{aligned}$$

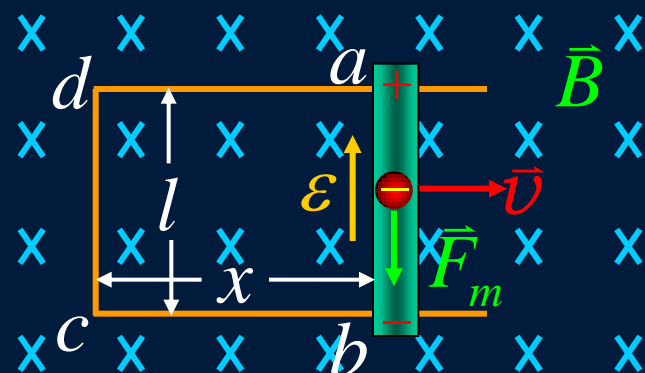
单位时间内导线切割的磁场线数



◆ 动生电动势的非静电力

非静电力 $\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$

非静电场强 $\vec{E}_K = \frac{\vec{F}_m}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$

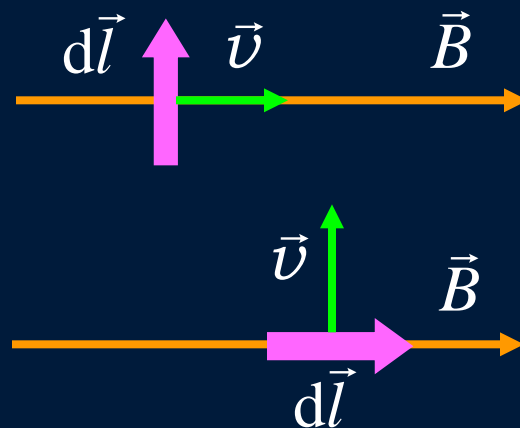


动生电动势 $\varepsilon = \int_b^a \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

➤ 讨论

(1) 注意矢量之间的关系

$$\varepsilon = 0 \begin{cases} \vec{v} \times \vec{B} = 0 \\ \vec{v} \times \vec{B} \neq 0 \quad (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$



(2) 对于运动导线回路，则电动势为

$$\varepsilon = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

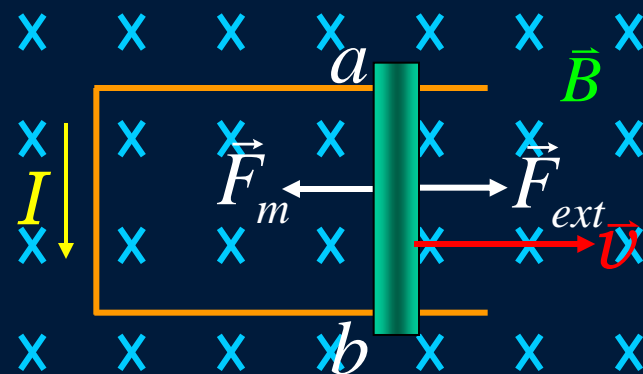
(3) 感应电动势的功率

$$P = I\varepsilon = IBlv$$

导线受安培力 $F_m = IBl$

导线匀速运动 $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_m$

$$P_{ext} = F_{ext}v = IBlv = P$$



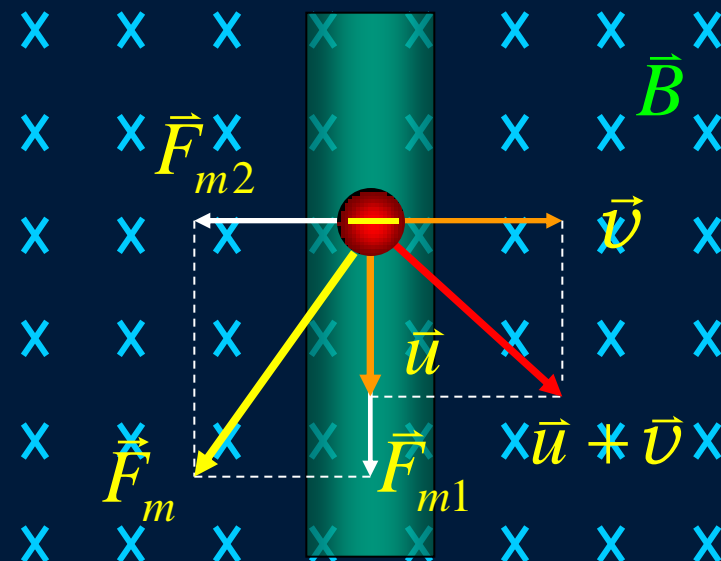
电路中感应电动势提供的电能是由外力做功所消耗的机械能转换而来的

(4) 动生电动势的非静电力是洛伦兹力，这与洛伦兹力不作功是否矛盾？

$$\vec{F}_m = -e(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{B}$$

F_m 与 $(\vec{u} + \vec{v})$ 垂直，
因此它对电子不作功

$$\vec{F}_{m1} = -e(\vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{F}_{m2} = -e(\vec{u} \times \vec{B})$$



$$\vec{F}_{m1} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{F}_{m1} \cdot \vec{u} = (-e\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} = e v B u$$

$$\vec{F}_{m2} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{F}_{m2} \cdot \vec{v} = (-e\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = -e u B v$$

功率为 $\vec{F}_m \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{F}_{m1} + \vec{F}_{m2}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$

例 在空间均匀的磁场中导线 ab 绕 oo' 轴以匀角速度 ω 旋转

求 导线 ab 中的电动势

解 $|\vec{v} \times \vec{B}| = vB = \omega l B \sin \alpha$

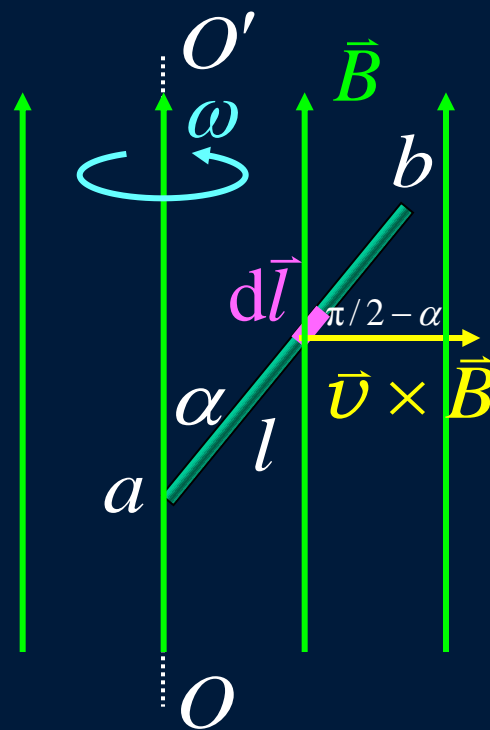
$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= vBdl \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$= B\omega \sin^2 \alpha dl$$

$$\varepsilon = \int d\varepsilon_i = B\omega \sin^2 \alpha \int_0^L dl$$

$$= \frac{1}{2} \omega B l^2 \sin^2 \alpha > 0$$



方向从 $a \longrightarrow b$

例 在匀强磁场 \vec{B} 中，长 R 的铜棒绕其一端 O 在垂直于 \vec{B} 的平面内转动，角速度为 ω

求 棒上的电动势

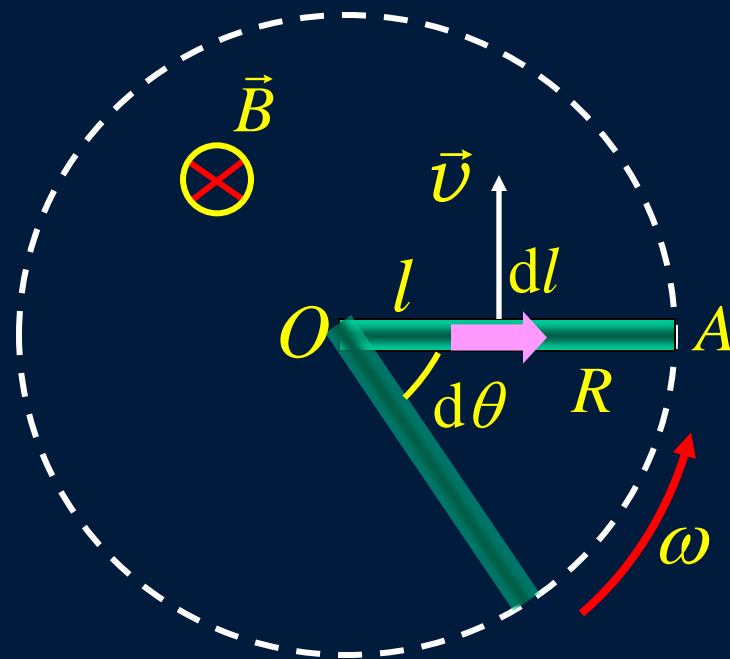
解 方法一（动生电动势）

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \int_O^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_O^R v B dl = - \int_O^R l \omega B dl \\ &= - \frac{BR^2}{2} \omega \quad \text{方向: } A \rightarrow O\end{aligned}$$

方法二（法拉第电磁感应定律）

在 dt 时间内导体棒切割磁场线

$$\varepsilon = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{1}{2} BR^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} BR^2 \omega$$



$$|d\Phi| = \frac{1}{2} R^2 d\theta B$$

方向由楞次定律确定

15.2.2 转动线圈的感应电动势

$abcd$ 是面积为 S 、匝数为 N 的矩形线圈

$$\psi = N\vec{B} \cdot \vec{S} = NBS \cos \theta$$

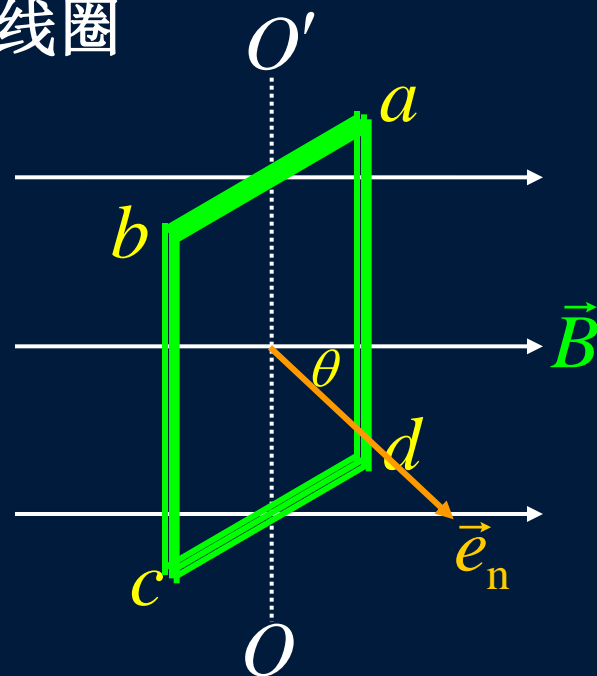
$$= NBS \cos \omega t$$



$$\varepsilon = -N \frac{d\psi}{dt} = NBS \omega \sin \omega t$$

$$= \varepsilon_m \sin \omega t$$

$$\varepsilon_m = NBS \omega \quad (\text{动生电动势最大值})$$



转动线圈中的感应电动势是随时间变化的, 这种随时间按正弦或余弦函数规律变化的电动势和与其相应的电路中的电流称为交流电

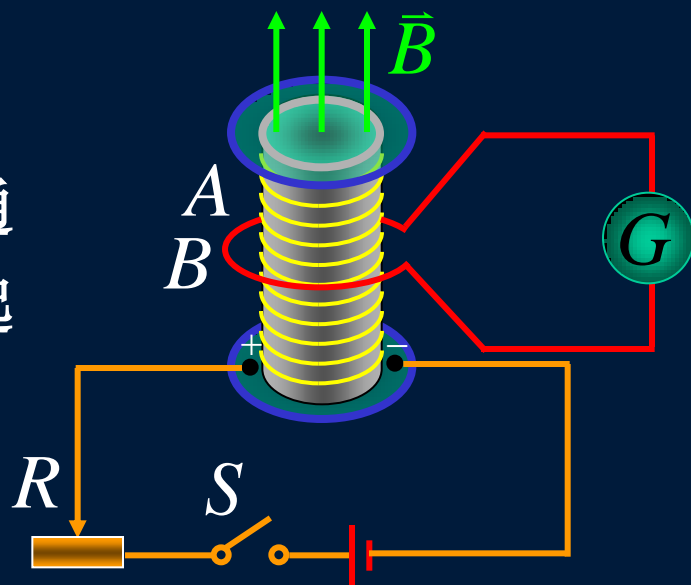
§ 15.3 感生电动势

主要内容:

1. 感生电动势
2. 感生电动势方向的确定
3. 电子感应加速器
4. 涡电流
5. 电磁阻尼

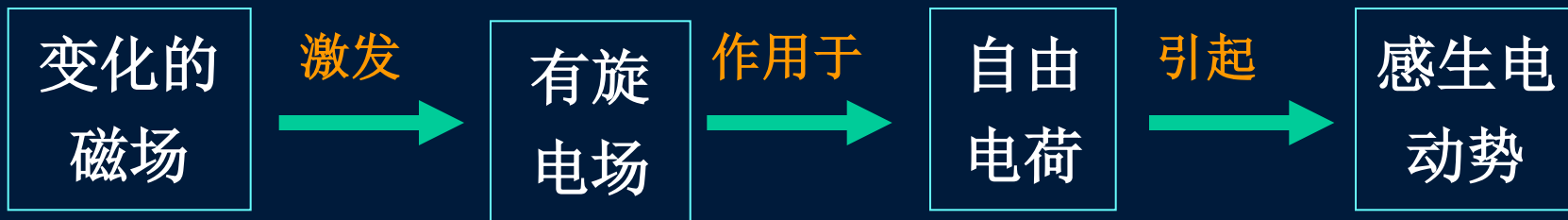
实验证明

导体回路固定不动，穿过回路磁通量的变化仅仅由于磁场变化所引起的感应电动势——感生电动势。



麦克斯韦提出：

无论有无导体或导体回路，变化的磁场都将在其周围空间产生具有闭合电场线的电场，并称此为感生电场或有旋电场，正是这种有旋电场决定了感生电动势。



15.3.1 感生电动势方向的确定

有旋电场力充当非静电力

感生电动势 $\varepsilon = \int_a^b \vec{E}_v \cdot d\vec{l}$ \vec{E}_v 是有旋电场

闭合回路中

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$
$$= -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

有旋电场与变化磁场之间的关系

$$\oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

➤ 讨论

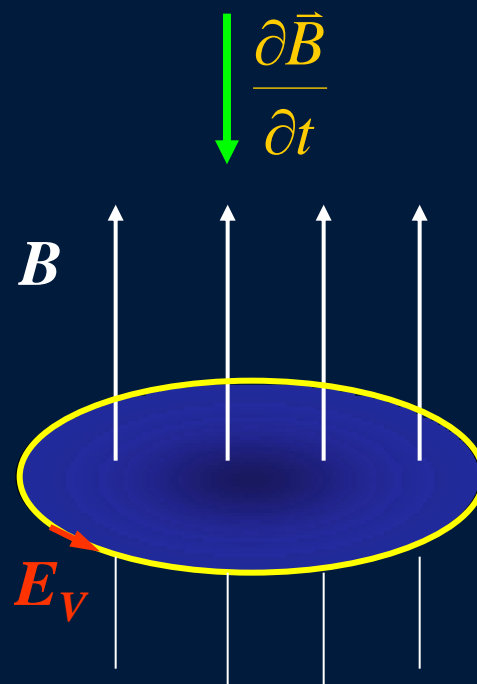
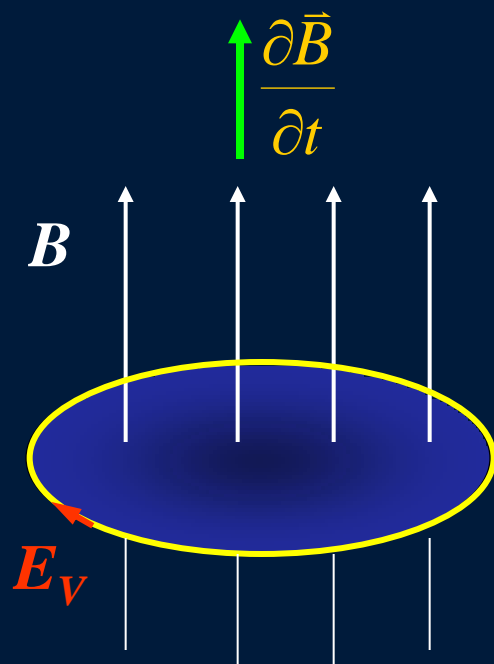
(1) 静电场与有旋电场的性质对比

静电场与有旋电场比较	激发方式	{ 静止的电荷 变化的磁场
	环路定理	{ $\oint_L \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0$ $\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = -\frac{d\psi}{dt} \neq 0$
	电场性质	{ 保守场 非保守场
	高斯定理	{ $\oiint_S \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{内}} q_i$ $\oiint_S \vec{E}_V \cdot d\vec{S} = 0$
	电场线形状	{ 不闭合 闭合

(2) 感生电场与磁场的变化率成左螺旋关系

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

\vec{E}_v 与 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 符合左螺旋法则,此关系满足楞次定律



例 一半径为 R 的长直螺线管中载有变化电流，当磁感应强度以恒定的速率增加时，

求 管内外的 E_V

解 管内： $\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

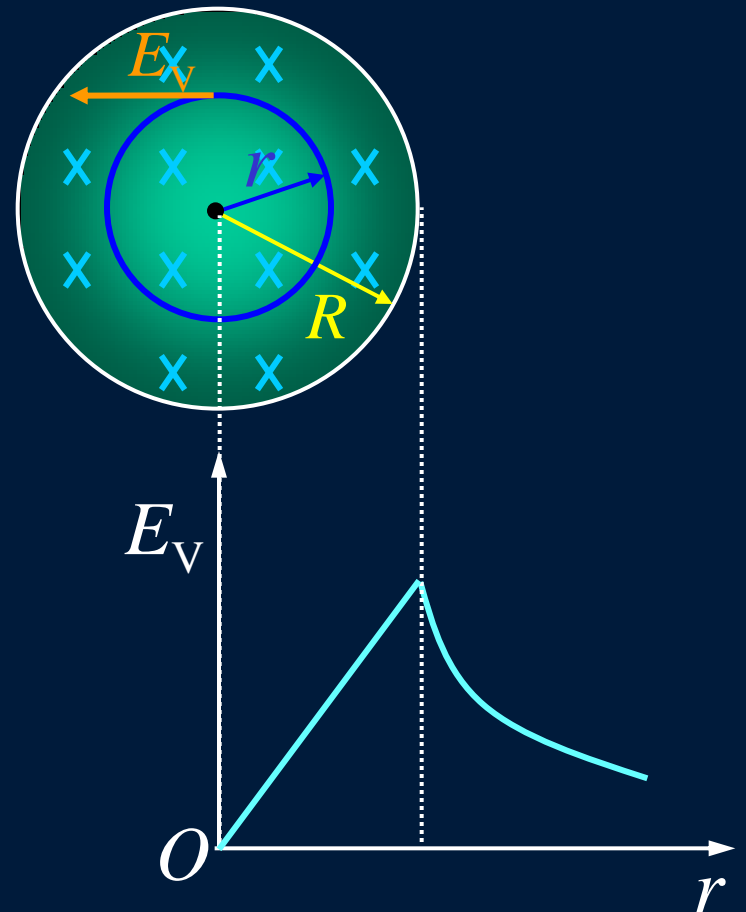
$$E_V \cdot 2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2$$

$$E_V = \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

管外：

$$E_V \cdot 2\pi r = \frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2$$

$$E_V = \frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t}$$



例 一被限制在半径为 R 的无限长圆柱内的均匀磁场 B ， B 均匀增加， B 的方向如图所示。

求 导体棒 MN 、 CD 的感生电动势

解 方法一(用感生电场计算)

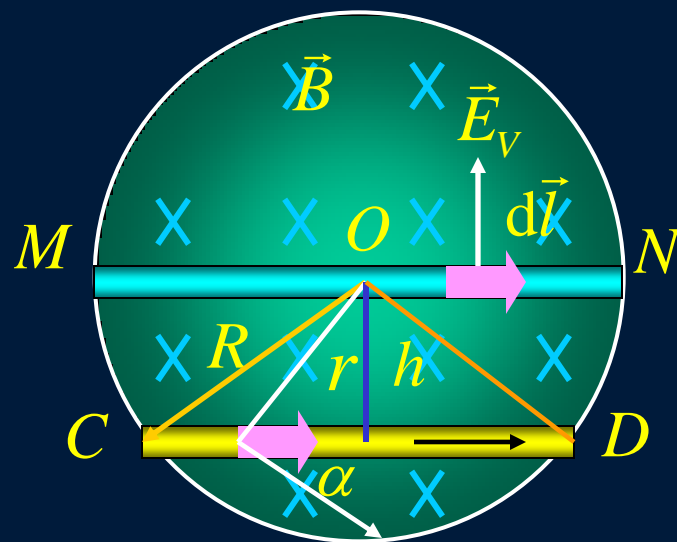
$$E_V = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (r < R)$$

$$\varepsilon_{MN} = \int_M^N \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\varepsilon_{CD} = \int_C^D \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = \int_C^D E_V \cos \alpha dl = \int_0^L \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{h}{r} dl = \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt}$$

方法二(用法拉第电磁感应定律) (补逆时针回路 $OCDO$)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BLh/2)}{dt} = \varepsilon_{OC} + \varepsilon_{CD} + \varepsilon_{DO} = \varepsilon_{CD} = \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt}$$



15.3.2 电子感应加速器

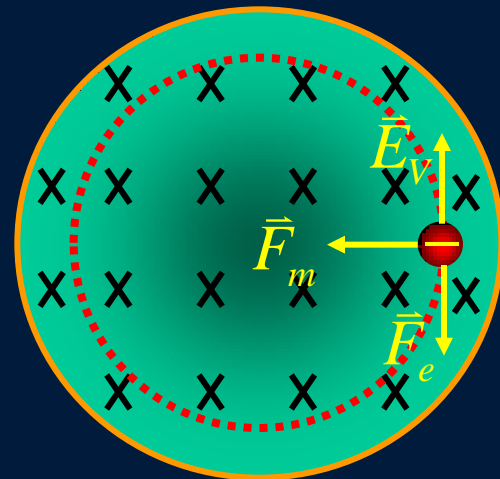
电子进入真空室受到两种力的作用

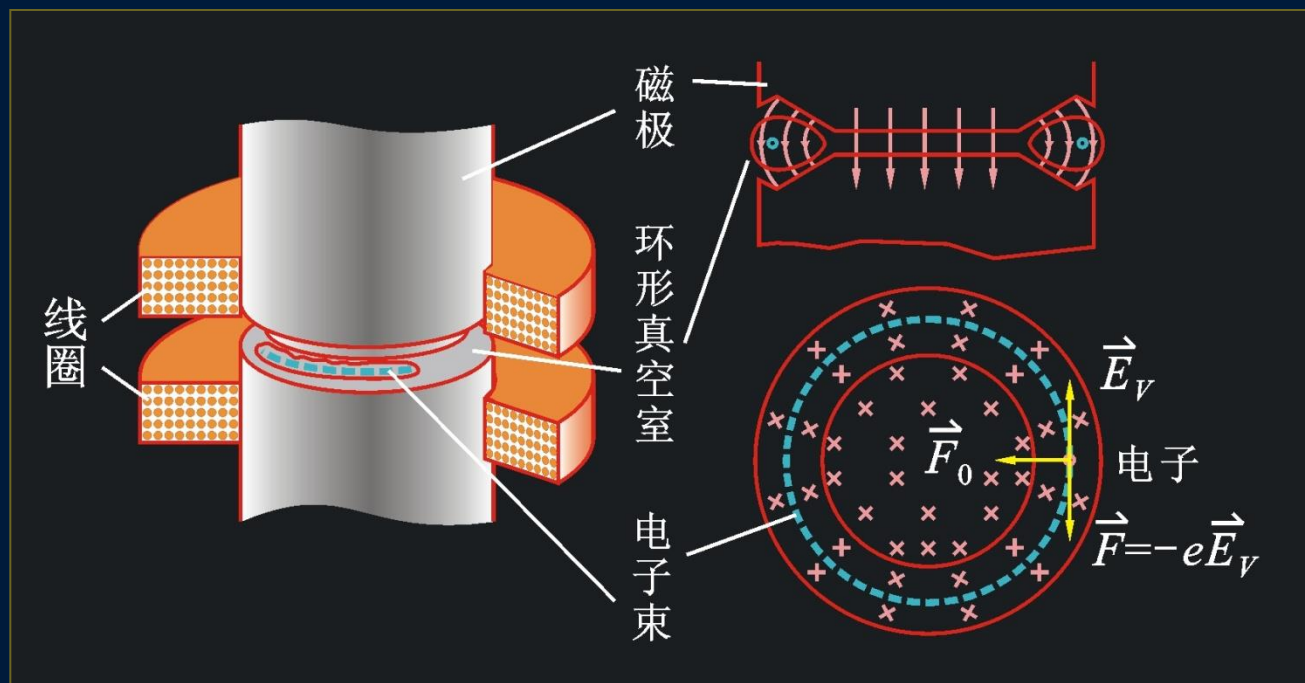
有旋电场力(加速电子)
洛伦兹力(向心力) } 电子加速圆周运动

洛伦兹力
$$e v B_R = m \frac{v^2}{R}$$

有旋电场力
$$e E_v = \frac{d(m v)}{dt}$$

有旋电场
$$E_v = \frac{1}{2\pi R} \left| \frac{d\Phi_m}{dt} \right|$$





电子感应加速器

令 $\Phi_m = \pi R^2 \bar{B}$ \bar{B} 是面积S内的平均磁感应强度

得 $\frac{dB_R}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} \quad \longrightarrow \quad B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$

电子维持在不变的圆形轨道上加速时磁场必须满足的条件

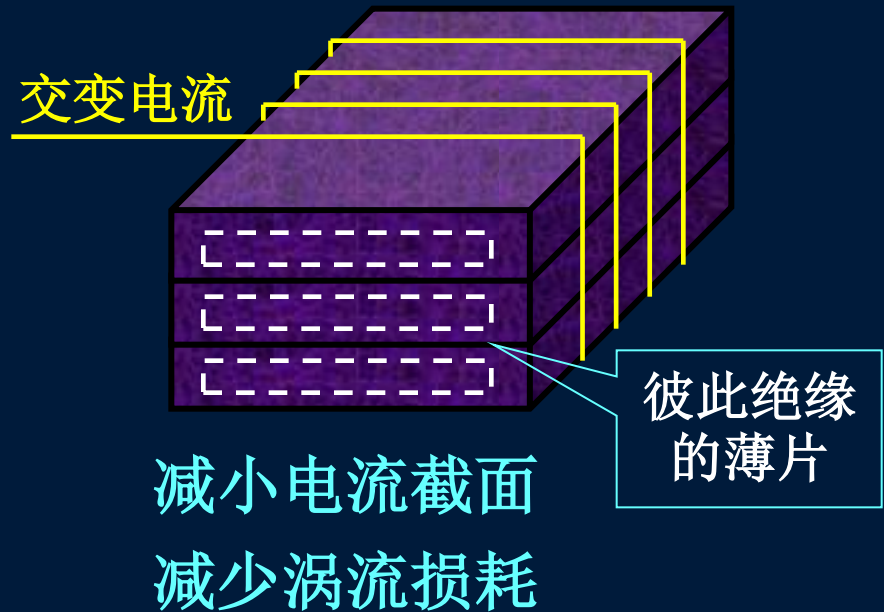
15.3.3 涡流

由于变化磁场激起感生电场，则在导体内产生感应电流。

这些感应电流的流线呈闭合的涡旋状，故称涡电流(涡流)

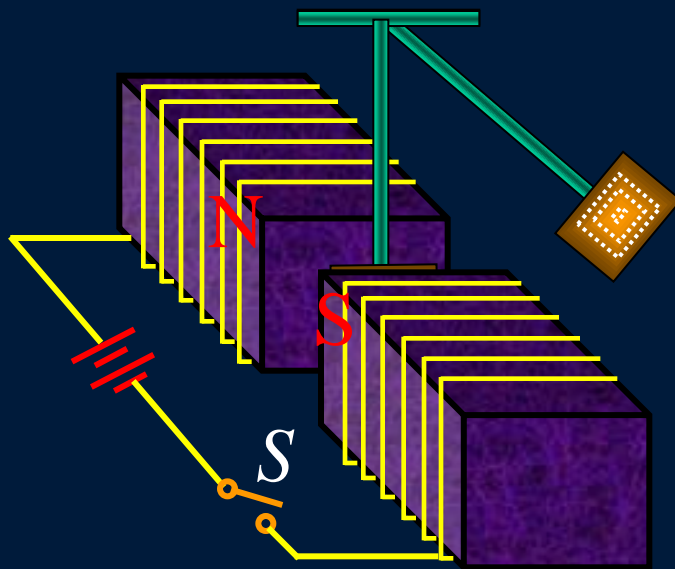


高频感应



15.3.4 电磁阻尼

电磁阻尼——涡流所产生的机械效应



电磁仪表中的指针的摆动能够迅速地稳定下来, 火车中的电磁制动装置等都是根据电磁阻尼的原理设计的.

§ 15.4 自感与互感

主要内容:

1. 自感现象
2. 自感系数、自感电动势
3. 互感现象
4. 互感系数、互感电动势

15.4.1 自感

自感现象

线圈电流变化

→ 穿过自身磁通变化

→ 在线圈中产生感应电动势

自感系数

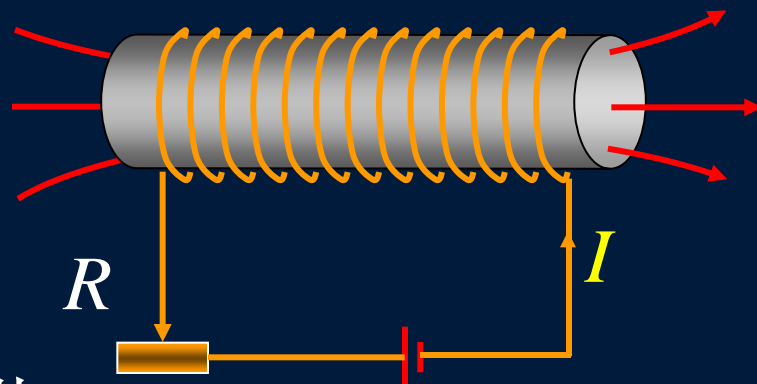
根据毕 — 萨定律:穿过线圈自身的磁通量与电流 I 成正比, 即

$$\Psi = LI$$

(L 是线圈的自感系数)

自感电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}$$



若自感系数是一不变的常量

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

自感系数的另一种表达式

$$L = - \frac{\varepsilon_L}{\frac{dI}{dt}}$$

➤ 讨论

- (1) 自感具有使回路电流保持不变的性质——电磁惯性。
- (2) L 与系统的特性有关，若回路周围无铁磁质，与 I 无关。
- (3) L 的计算一般比较复杂，常采用实验方法测定。

例 空心单层密绕长直螺线管, 匝数为 N , 长为 l , 截面积为 S 。

求 螺线管的自感系数

解 螺线管内的磁感应强度

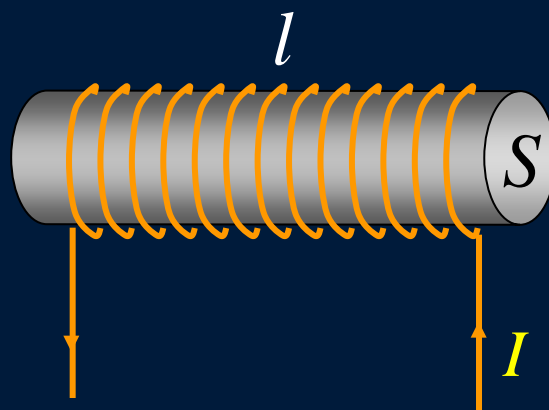
$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

磁通匝链数

$$\psi = NBS = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 l I S$$

螺线管的自感系数

$$L = \frac{\psi}{I} = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 l S = \mu_0 n^2 l S$$



例 同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个无限长同轴导体和柱面组成

求 无限长同轴电缆单位长度上的自感

解 由安培环路定理可知

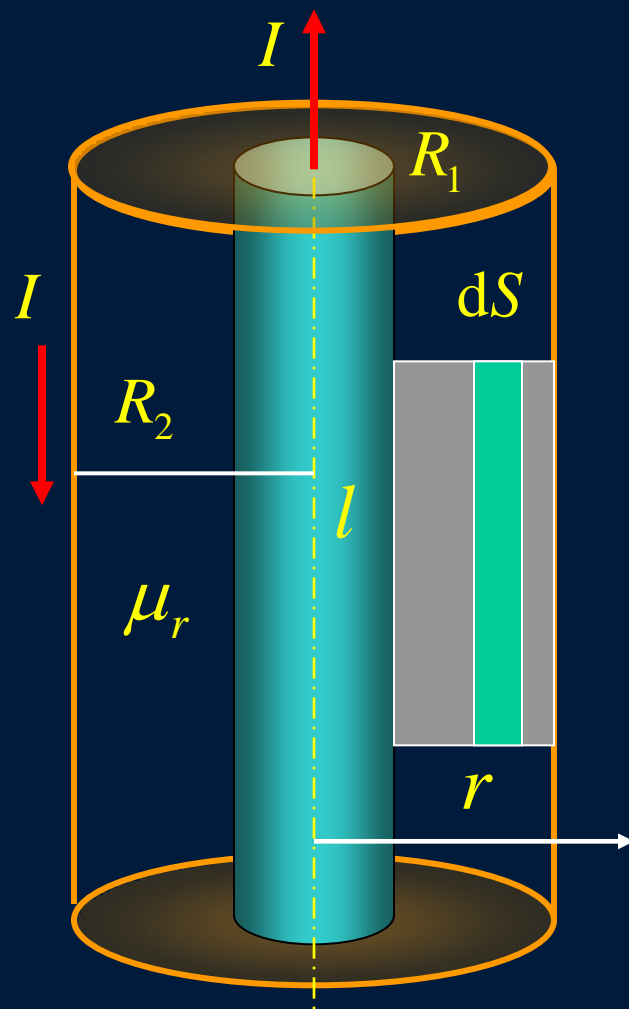
$$R_1 < r < R_2 \quad B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

$$r < R_1, r > R_2 \quad B = 0$$

$$d\phi_m = B dS = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} l dr$$

$$\phi_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 \mu_r I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\longrightarrow L = \frac{\phi_m}{Il} = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



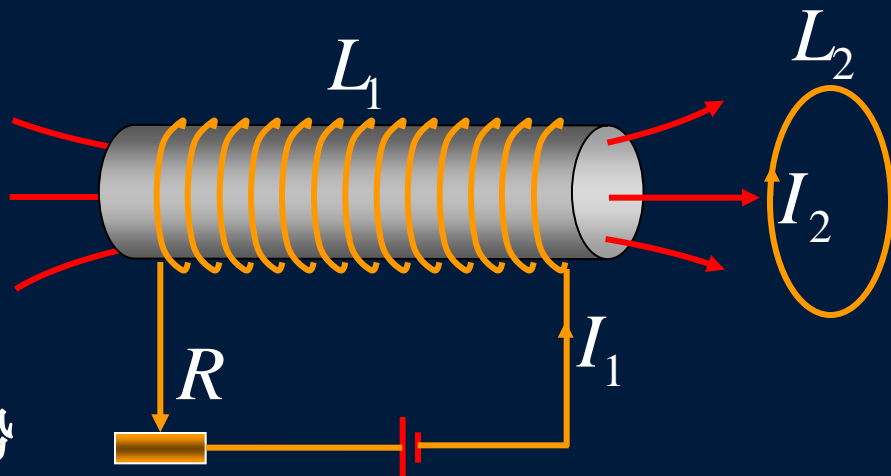
15.4.2 互感

互感现象

回路 1 中的电流变化

→ 引起回路 2 的磁通变化

→ 回路 2 中产生感应电动势



互感系数

根据毕 — 萨定律: 穿过回路 2 的磁通量正比于回路 1 中电流 I 。

$$\Phi_{m21} = M_{21} I_1 \quad (M_{21} \text{ 是回路 1 对回路 2 的互感系数})$$

互感电动势 $\varepsilon_{21} = -\frac{d(M_{21} I_1)}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} - I_1 \frac{dM_{21}}{dt}$

若回路周围不存在铁磁质且两线圈结构、相对位置及其周围介质分布不变时

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \longleftrightarrow \mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

实验和理论都可以证明: $M_{21} = M_{12} = M$

➤ 讨论

(1) 互感同样反映了电磁惯性的性质

(2) 两个线圈的互感与各自的自感有一定的关系

$$\Phi_{m21} = M I_1 \quad \Phi_{m1} = L_1 I_1$$

有漏磁

$$\Phi_{m21} \leq \Phi_{m1} \longrightarrow M \leq L_1$$

$$\Phi_{m12} = M I_2, \quad \Phi_{m2} = L_2 I_2, \quad M \leq L_2$$

$$M^2 \leq L_1 L_2, \quad M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

两线圈的互感不会超过 $\sqrt{L_1 L_2}$

改变两线圈的相对位置, 可以改变它们之间的互感

如它们相距无限远时, $M = 0$

两线圈越近, 互感越大, 但最大为 $\sqrt{L_1 L_2}$

所以可以写为 $M = k \sqrt{L_1 L_2}$ k 为两线圈的耦合系数

k 小于1反映有漏磁存在

例 一无限长导线通有电流 $I = I_0 \sin \omega t$ 现有一矩形线框与长直导线共面。（如图所示）

求 互感系数和互感电动势

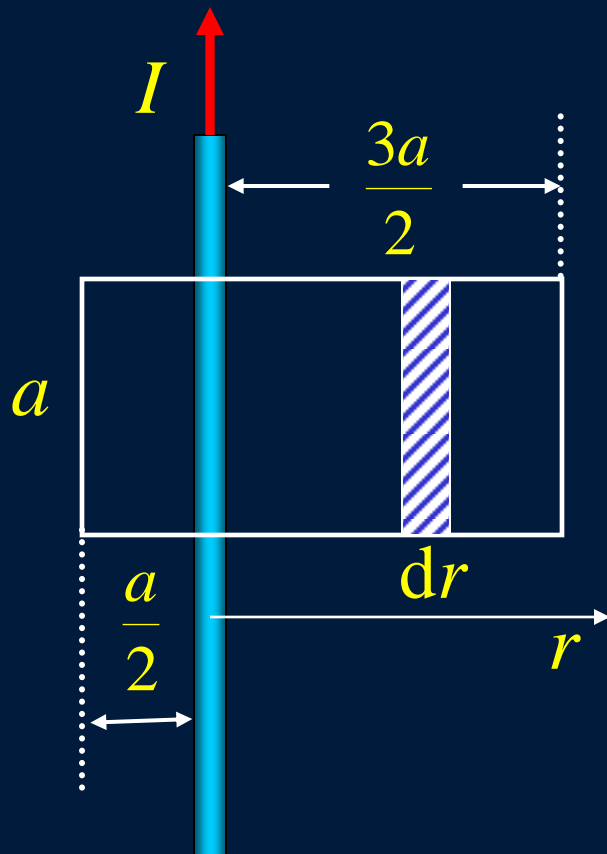
解 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

穿过线框的磁通量

$$\Phi = \int_{a/2}^{3a/2} B dS = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 3$$

互感系数 $M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3$

互感电动势 $\varepsilon = -M \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3 I_0 \omega \cos \omega t$



例 计算共轴的两个长直螺线管之间的互感系数

设两个螺线管的半径、长度、
匝数为 $R_1, R_2, l_1, l_2, N_1, N_2$

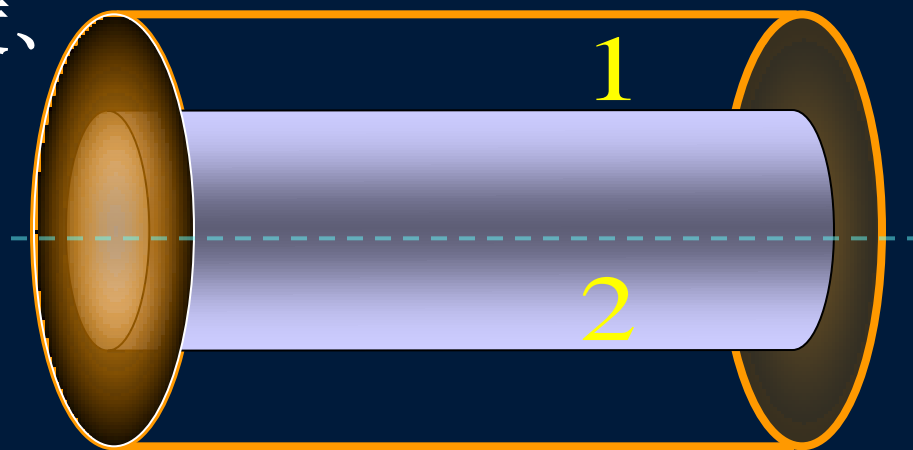
$$l_1 = l_2 = l, R_1 > R_2$$

解 设 $I_1 \longrightarrow B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$

$$\begin{aligned}\Psi_{21} &= N_2 B_1 \pi R_2^2 \\ &= \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^2 I_1\end{aligned}$$

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^2$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$



设 $I_2 \longrightarrow B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$

$$\Psi_{12} = N_1 B_2 \pi R_2^2$$

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} \pi R_2^2$$

例 在相距为 $2a$ 的两根无限长平行导线之间，有一半径为 a 的导体圆环与两者相切并绝缘，

求 互感系数

解 $M_{12} = M_{21} = M$

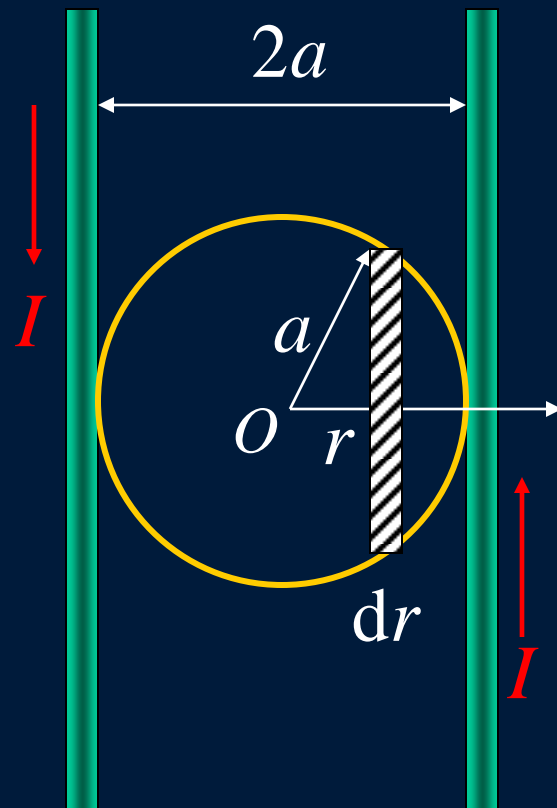
设电流 $I \rightarrow$ $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{a+r} + \frac{1}{a-r} \right)$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS$$

$$= \int_{-a}^a \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{a+r} + \frac{1}{a-r} \right) 2\sqrt{a^2 - r^2} dr$$

$$= 2\mu_0 I a$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = 2\mu_0 a$$



§ 15.5 磁场能量

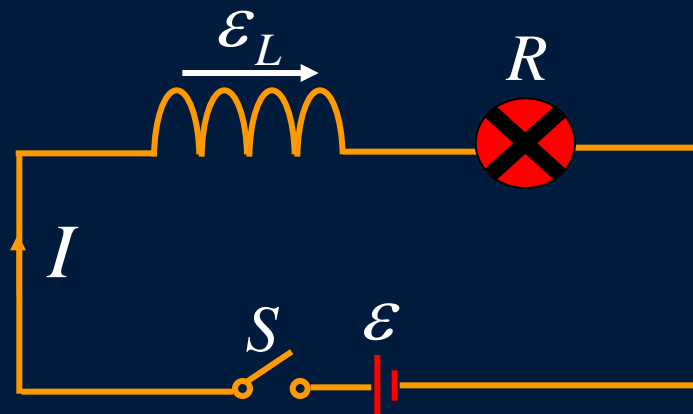
主要内容:

1. 磁场能量
2. 磁场能量密度

15.5.1 磁场能量

◆ 实验分析

在原通有电流的线圈中存在能量 —— 磁能。



克服自感电动势做功所转换的能量就是线圈中电流激发的磁场能量

◆ 自感磁能定量计算

全电路欧姆定律

$$\varepsilon + \varepsilon_L = IR$$

自感电动势

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt} + IR \quad \longrightarrow \quad \varepsilon I dt = L I dI + I^2 R dt$$

$\varepsilon I dt$ 为电源作的功 $I^2 R dt$ 为电阻消耗的焦耳热

$L I dI$ 为自感电动势反抗电流所作的功

$$W_m = \int_0^I L I dI = \frac{1}{2} L I^2$$

自感线圈中电流为 I 时, 储藏在自感线圈中的磁场能量

➤ 讨论

与电容储能比较: $W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad \longleftrightarrow \quad W_e = \frac{1}{2} C U^2$

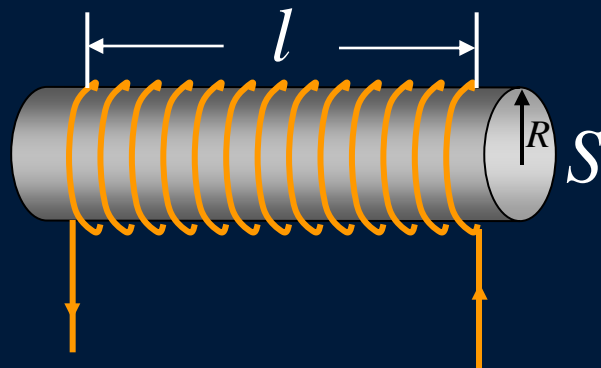
自感线圈也是一个储能元件, 自感系数反映线圈储能的本领。

15.5.2 磁场能量密度

以无限长直螺线管为例

$$L = \mu n^2 l S = \mu n^2 V$$

$$B = \mu n I$$



$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \frac{B^2}{\mu^2 n^2} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = \frac{1}{2} B H V$$

磁场能量密度

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} B H \quad (\text{适用于均匀与非均匀磁场})$$

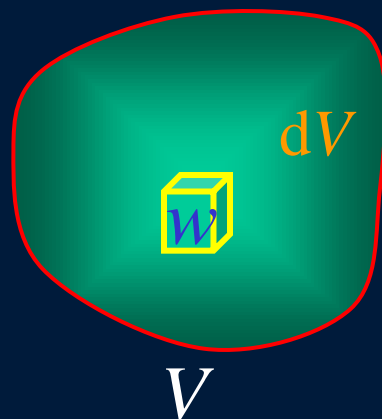
在有限区域内

$$W_m = \int_V \omega_m dV = \int_V \frac{1}{2} B H dV$$

➤ 讨论

磁场能量密度与电场能量密度公式的比较

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}BH \longleftrightarrow w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}ED$$



在有限区域内

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{1}{2}BH dV \longleftrightarrow W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2}ED dV$$

磁场能量公式与电场能量公式具有完全对称的形式。

例 同轴电缆由半径分别为 R_1 和 R_2 的两个无限长同轴导体和柱面组成,其间介质的磁导率为 μ 。

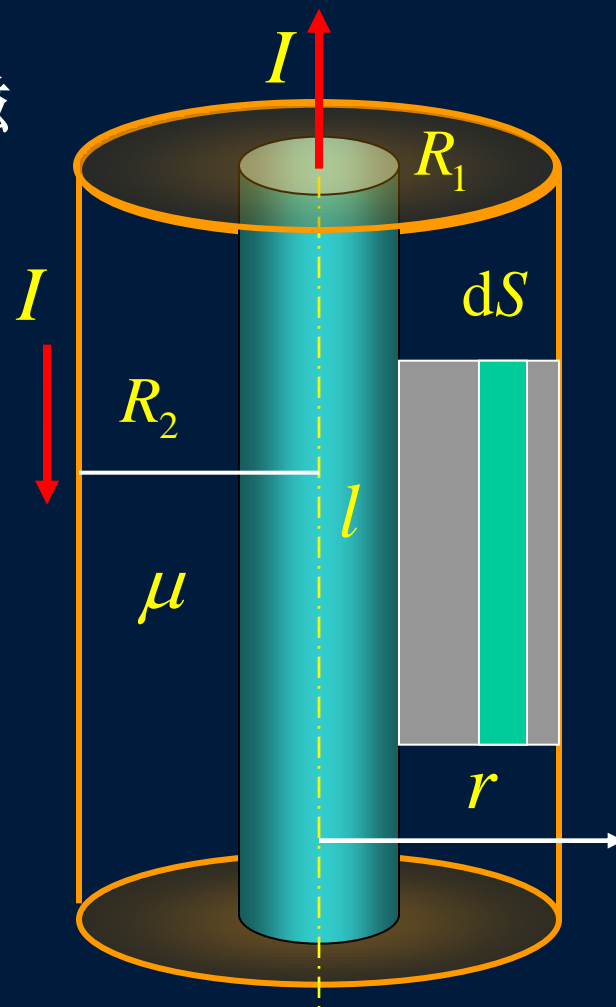
求 无限长同轴电缆长为 l 的一段上的磁场能量和自感系数。

解 由安培环路定理可知

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad R_1 < r < R_2$$

磁能密度

$$\omega_m = \frac{1}{2} BH = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$



磁能

$$dW_m = \omega_m dV = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} \cdot 2\pi r l dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

长为 l 的一段上的磁场能量

$$W_m = \int_V \omega_m dV = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

自感系数

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

例 一由 N 匝线圈绕成的螺绕环，通有电流 I ，其中充有均匀磁介质

求 磁场能量 W_m

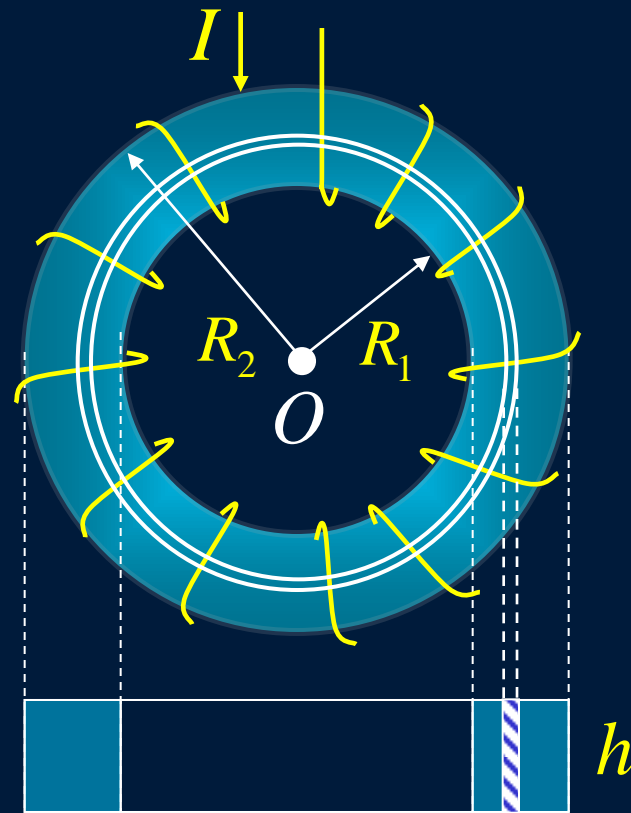
解 根据安培环路定理，螺绕环内

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \longleftrightarrow B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r}$$

$$w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu_r N^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$$

取体积元 $dV = 2\pi r h dr$

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \mu_r N^2 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r h dr = \frac{\mu N^2 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

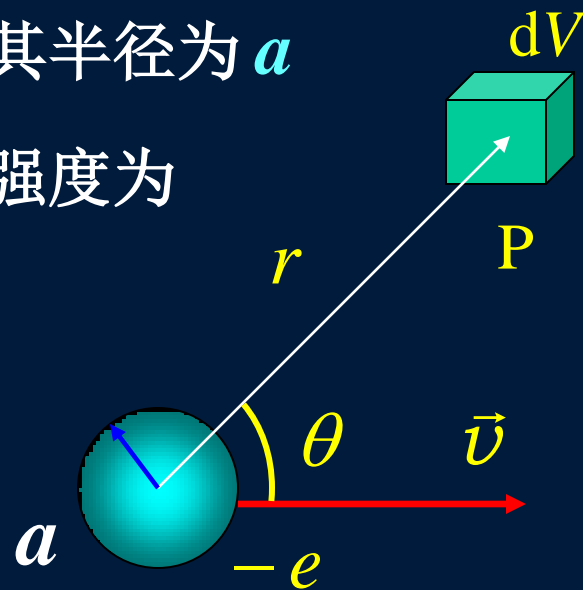


例 计算低速运动的电子的磁场能量，设其半径为 a

解 低速运动的电子在空间产生的磁感应强度为

$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e v \sin \theta}{r^2} \quad \longrightarrow \quad H = -\frac{e v \sin \theta}{4\pi r^2}$$

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 e^2 v^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^4}$$



取体积元 $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ (球坐标)

$$W_m = \int_V w_m dV$$

$$= \int_{R_0}^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{e^2 v^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 r^4} \right) d\varphi = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{12\pi a}$$

整个空间的磁场能量

§ 15.6 麦克斯韦电磁场理论简介

主要内容:

1. 位移电流
2. 麦克斯韦方程组的积分形式

15.6.1 位移电流

1. 问题的提出

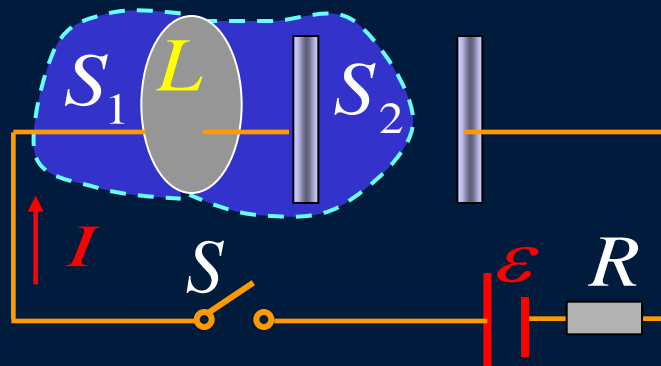
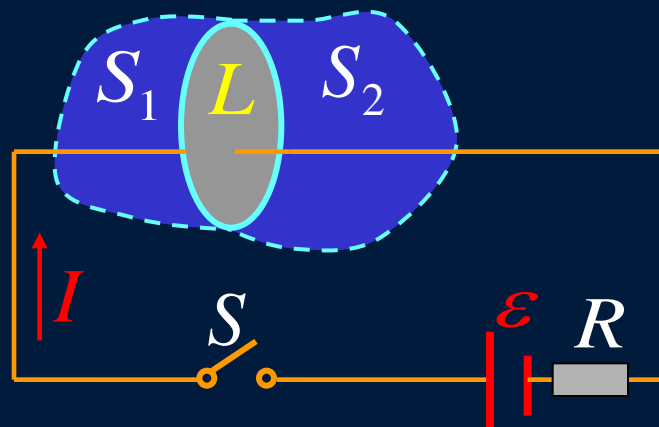
稳恒电流 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$

非稳恒电流

对 S_1 面 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$

对 S_2 面 $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$

矛盾



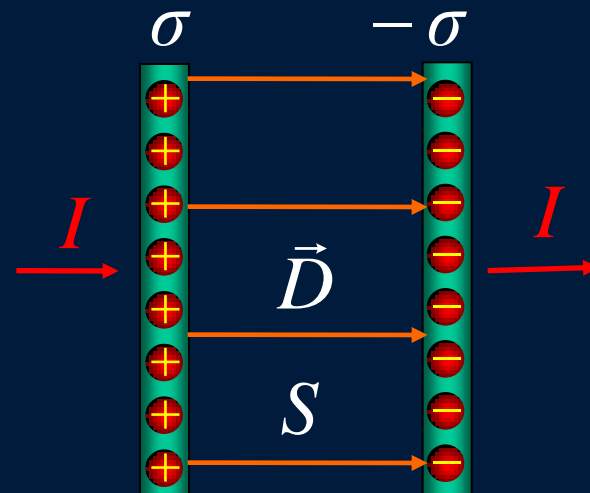
稳恒磁场的安培环路定理已不适用于非稳恒电流的电路。

2. 位移电流

非稳恒电路中，电容器充放电过程中，电容器极板间虽无传导电流，但却存在着不断变化的电场

$$D = \sigma \longrightarrow \Phi_D = DS$$

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma S) = \frac{dq}{dt}$$



电位移通量的变化率等于传导电流强度

定义位移电流(变化电场)

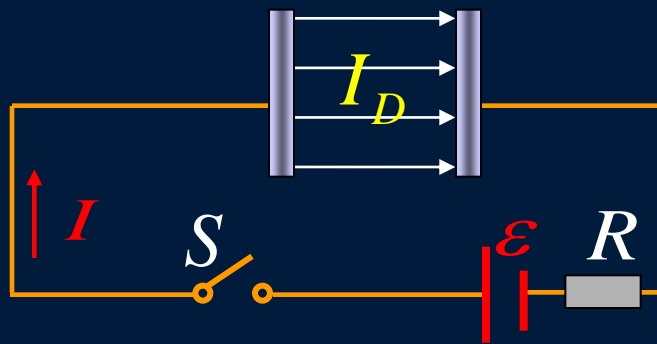
$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

一般情况位移电流

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

麦克斯韦提出全电流的概念

$$I_{\text{全}} = I_{\text{传导}} + I_{\text{位移}}$$



电流在空间永远是连续不中断的，并且构成闭合回路。

麦克斯韦将安培环路定理推广

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{全}} = I_{\text{传导}} + I_{\text{位移}} = I_{\text{传导}} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

(全电流安培环路定理)

位移电流密度 \vec{j}_D

若传导电流为零

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

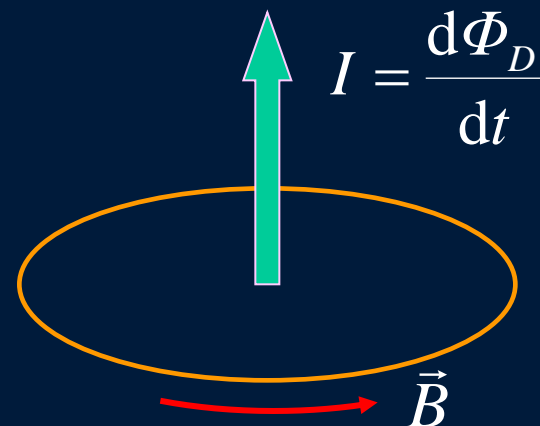
3. 位移电流、传导电流的比较

(1) 位移电流具有磁效应 —— 与传导电流相同。

(2) 位移电流与传导电流不同之处

◆ 产生机理不同

◆ 存在条件不同



位移电流可以存在于真空中、导体中、介质中。

(3) 位移电流不产生焦耳热，传导电流产生焦耳热。

15.6.2 麦克斯韦方程组的积分形式

麦克斯韦认为:

在一般情况下,电场既包括自由电荷产生的静电场 $\vec{D}^{(1)}$ 和 $\vec{E}^{(1)}$, 也包括变化的磁场产生的有旋电场 $\vec{D}^{(2)}$ 和 $\vec{E}^{(2)}$.

同时,磁场既包括传导电流产生的磁场 $\vec{B}^{(1)}$ 和 $\vec{H}^{(1)}$,也包括位移电流产生的磁场 $\vec{B}^{(2)}$ 和 $\vec{H}^{(2)}$.

1. 电场的高斯定理

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{D}^{(1)} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{D}^{(2)} \cdot d\vec{S} = \sum_{S_{\text{内}}} q_{0i} + 0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S_{\text{内}}} q_{0i}$$

静电场是有源场、感应电场是涡旋场

2. 电场的环路定理——法拉第电磁感应定律

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}^{(1)} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}^{(2)} \cdot d\vec{l} = 0 - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

静电场是保守场，变化磁场可以激发涡旋电场。

3. 磁场的高斯定理

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{B}^{(1)} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{B}^{(2)} \cdot d\vec{S} = 0 + 0$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

传导电流、位移电流产生的磁场都是无源场。

4. 全电流安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{H}^{(1)} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{H}^{(2)} \cdot d\vec{l} = \sum I_i + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

传导电流和变化电场均可以激发涡旋磁场。

高斯和斯托克斯公式

散度

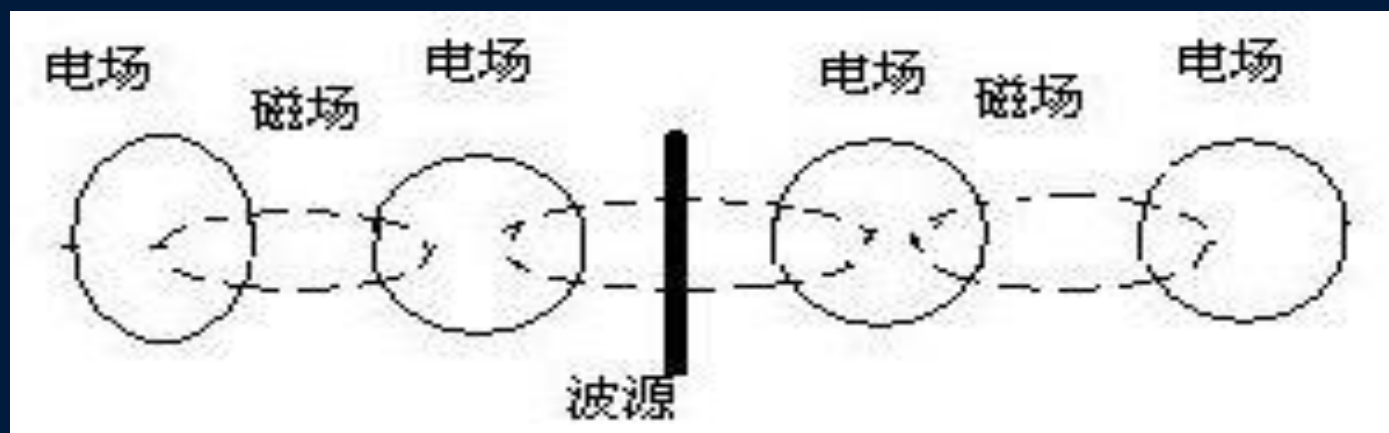
旋度

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{e0} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_r \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j}_0 &= \sigma \vec{E} \end{aligned}$$

以上是麦克斯韦方程组的微分形式。将麦克斯韦方程组再加上三个物质性质的方程就构成了一组完整的说明电磁场性质的方程组，也就是宏观电动力学的基本方程组，应用以上方程，加上场量应满足的边界条件以及它们的起始条件，就可以定量地得出有关电磁场问题的解。

电磁波

由麦克斯韦方程组可以看出，变化的磁场激发涡旋电场，变化的电场（位移电流）激发涡旋磁场。因此空间某一区域存在一变化电场，它将在周围空间产生变化磁场，这变化磁场又在较远处产生一变化电场，这样变化的电场和磁场相互激发，闭合的电力线与磁力线就像链条那样一环套一环，由近及远向外传播，从而形成电磁波。



电磁波不需要媒介

本章小结

1. 法拉第电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

2. 楞次定律

闭合回路中，感应电流的方向总是使得它自身所产生的磁通量反抗引起感应电流的磁通量变化

3. 动生电动势

非静电力

$$\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

动生电动势

$$\mathcal{E} = \int_b^a \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

4. 感生电动势

非静电性场 —— 有旋电场 \vec{E}_V 。

有旋电场与变化磁场之间的关系

$$\oint_L \vec{E}_V \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{感生电场与磁场的变化率成左螺旋关系})$$

感生电动势 $\varepsilon = \int_a^b \vec{E}_V \cdot d\vec{l}$

5. 自感与互感

(1) 自感

$$\Psi = LI \quad L \text{ 自感系数; } \quad \varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{自感电动势}$$

(2) 互感

$$\Psi_{21} = M_{21} I_1 \quad M_{21} \text{ 是回路1对回路2的互感系数}$$

可以证明: $M_{21} = M_{12} = M$

互感电动势

$$\varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \longleftrightarrow \varepsilon_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

6. 磁场能量

磁场能量密度

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} BH$$

在有限区域内

$$W_m = \int_V \omega_m dV = \int_V \frac{1}{2} BH dV$$

7. 麦克斯韦电磁场理论简介

(1) 位移电流

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

(2) 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S \text{ 内}} q_{0i} \\ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$$



三峡电站为世界上最大的水电站，总装机容量为1820万kW，年发电量846.8亿千瓦时。

（本章由田蓬勃编写制作）