11.6谓词逻辑的永真公式
11.7等式推理
11.9 谓词逻辑范式

- 定义
- 永真公式
- 等式推理演算
- 前束范式

定义

定义1给定任一谓词公式A, 如果在任意论述域上, 对两种指派,

(1) A均为真, 则称A永真。

(2) A至少在一个域上为真, 则称A可满足。

(3) A均为假, 则称A永假。

定义2 设A, B是两个谓词公式, 如果$A\leftrightarrow B$是永真式, 则称其为等价永真式, 记作$A\Leftrightarrow B$或$A=B$

定义3 设A, B是两个谓词公式, 如果$A\rightarrow B$是永真式, 则称其为蕴含永真式, 记作$A\Rightarrow B$

例

- **P(x):x 是质数　　P(x):x 是合数**
- **论述域{3,4}　　论述域{3,5}**

$\forall x P(x) \wedge \exists x P(x)$

永真公式

(1)命题公式的推广

命题演算的永真公式也是谓词演算的永真公式,

例如:（变元用公式替换）

- $\neg\neg\forall xF(x)=\forall xF(x)$,
- $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y) = \neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

（2）量词的否定

- $\neg(\forall x\, P(x)) = \exists x \neg P(x)$
- $\neg(\exists x\, P(x)) = \forall x \neg P(x)$

说明：

否定词可通过量词深入到辖域；

不是所有学生都交作业了

有些学生没有交作业

（3）量词辖域的收缩与扩张

离散数学

- $\forall xA(x) \vee P = \forall x(A(x) \vee P)$
- $\forall xA(x) \wedge P = \forall x(A(x) \wedge P)$
- $\exists xA(x) \vee P = \exists x(A(x) \vee P)$
- $\exists xA(x) \wedge P = \exists x(A(x) \wedge P)$
- $\forall x(A(x)\rightarrow P) = \exists xA(x)\rightarrow P$
- $\forall x(P\rightarrow A(x)) = P\rightarrow\forall xA(x)$

  这里P 是不含自由变元x的谓词。

$$
\begin{aligned}
&\forall x(A(x)\rightarrow P)\\
=\ &\forall x(\neg A(x) \vee P)\\
=\ &\forall x(\neg A(x)) \vee P\\
=\ &\neg\exists xA(x) \vee P\\
=\ &\exists xA(x)\rightarrow P
\end{aligned}
$$

（4）量词的分配形式

① $\forall x(A(x)\wedge B(x))=\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

② $\exists x(A(x)\vee B(x))=\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

③ $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

④ $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow\forall x(A(x)\vee B(x))$

论述域：全班人　A(x)：x会唱歌

B(x): x会跳舞

例

- 说明③④不等价。设论述域为全人类，

  A(X) : x是男人；

  B(x): x是女人。

$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow \exists xA(x)\wedge \exists xB(x)$

$\forall xA(x)\vee \forall xB(x)\Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

证④:

$\exists x \neg (A(x) \vee B(x)) = \exists x(\neg A(x) \wedge \neg B(x))$

$\Rightarrow \exists x \neg A(x) \wedge \exists x \neg B(x)$

$=(\neg \forall xA(x) \wedge \neg \forall xB(x))$

$=\neg (\forall xA(x) \vee \forall xB(x))$

否定两边得

$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$

Q_1	$\forall xP(x) \Rightarrow P(y)$ y是论述域中任一确定元素
Q_2	$P(y) \Rightarrow \exists xP(x)$ y是论述域中某一确定元素
Q_3	$\forall x \neg P(x) \Leftrightarrow \neg \exists xP(x)$
Q_4	$\exists x \neg P(x) \Leftrightarrow \neg \forall xP(x)$
Q_5	$\forall xP(x) \Rightarrow \exists xP(x)$
Q_6	$\forall xA(x) \vee P \Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee P)$
Q_7	$\forall xA(x) \wedge P \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge P)$
Q_8	$\exists xA(x) \vee P \Leftrightarrow \exists x(A(x) \vee P)$
Q_9	$\exists xA(x) \wedge P \Leftrightarrow \exists x(A(x) \wedge P)$
Q_{10}	$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$
Q_{11}	$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$
Q_{12}	$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists xA(x) \wedge \exists xB(x)$
Q_{13}	$\forall xA(x) \vee \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$
Q_{14}	$\forall xA(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B)$
Q_{15}	$\exists xA(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B)$
Q_{16}	$A \rightarrow \forall xB(x) \Leftrightarrow \forall x(A \rightarrow B(x))$
Q_{17}	$A \rightarrow \exists xB(x) \Leftrightarrow \exists x(A \rightarrow B(x))$
Q_{18}	$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$
Q_{19}	$\exists xA(x) \rightarrow \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$

(5) 关于多个量词的永真式:

① $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$

② $\exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y)$

③ $\forall x \forall y P(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$

④ $\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x P(x, y)$

⑤ $\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$

结论: 量词的次序是重要的

③ $\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$

例如:

设$P(x, y)$表$x+y=0$, 论述域是有理数集合。

则$\forall x \exists y(x+y=0)$是真

但$\exists y \forall x(x+y=0)$ 是假

等式推理

等式推理——由已知的等值式推演出新的等值式的过程，包括三部分：

1. 基本等式：推理的基础和前提

2. 推理规则：推理的主要部分

(1) 代入规则

谓词：$F(x)\rightarrow G(x)$, $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$等都是$p\rightarrow q$的代换实例

个体（自由变元）：设A为一公式，将A中某个个体变元的所有自由出现用A中未曾出现过的个体变元符号代替，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A'=A$.

(2) 替(置)换规则

设$\Phi(A)$是含A的公式, 那么, 若$A=B$, 则$\Phi(A)=\Phi(B)$.

(3) 改名规则　（约束变元）

3. 推理过程

例

- 没有不犯错误的人

解 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$　　或　$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$$\begin{aligned}&\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\\ &= \forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))\\ &= \forall x(\neg F(x)\vee G(x))\\ &= \forall x(F(x)\rightarrow G(x))\end{aligned}$$

例

- 不是所有的人都爱看电影

解 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \quad 或 \quad \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\\
&= \exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))\\
&= \exists x\neg(\neg F(x)\vee G(x))\\
&= \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))
\end{aligned}$$

例

证明: $\exists x(P(x)\to Q(x)) = \forall xP(x)\to xQ(x)$

证

$$\exists x(P(x)\to Q(x))$$

$$=\exists x(\neg P(x)\vee Q(x))$$

$$=\exists x\neg P(x)\vee\exists xQ(x)$$

$$=\neg\forall xP(x)\vee\exists xQ(x)$$

$$=\forall xP(x)\to\exists xQ(x)$$

练习

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))=\forall x(F(x)\rightarrow\neg G(x))$

(2) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))=\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

(3) $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

$$=\exists x\exists y\,(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$$

(4) $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge H(x,y))$

$$=\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg H(x,y))$$

(5) $\forall x\forall y(F(x)\rightarrow G(y))=\exists xF(x)\rightarrow\forall yG(y)$

证：(1) $\neg \exists x(F(x) \wedge G(x))$

$\Leftrightarrow \forall x \neg (F(x) \wedge G(x))$ （量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x (\neg F(x) \vee \neg G(x))$ （置换规则）

$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow \neg G(x))$ （置换规则）

证： (3) $\neg\forall x\forall y(F(x)\land G(y)\to H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\neg(\forall y(F(x)\land G(y)\to H(x,y)))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(F(x)\land G(y)\to H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\land G(y))\lor H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y((F(x)\land G(y))\land\neg H(x,y))$

(5)

$\forall x \forall y(F(x) \rightarrow G(y)) \Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg F(x) \vee G(y))$

$\Leftrightarrow \forall x\ (\neg F(x) \vee \forall y G(y))$

$\Leftrightarrow \forall x \neg F(x) \vee \forall y G(y)$

$\Leftrightarrow \neg \exists x\ (F(x) \vee \forall y G(y)$

$\Leftrightarrow \exists x F(x) \rightarrow \forall y G(y)$

谓词逻辑范式

定义 设A为一个谓词逻辑公式，若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kM$$

且公式M中不出现联结词$\rightarrow$和$\leftrightarrow$，则称A为前束范式，其中Q_i $(1\leq i\leq k)$为$\forall$或$\exists$，M为不含量词的公式.

例如， $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x\exists y(F(x)\vee(G(y)\wedge H(x,y)))$ 是前束范式

而 $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$ 不是前束范式

前束范式存在定理

定理（前束范式存在定理）

谓词逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

简称公式的前束范式。

求前束范式的步骤：

(1) 将公式中出现联结词→和↔的地方转化成¬、∨、∧

(2) 利用命题逻辑否定深入等式及谓词逻辑量词转化等式将否定联结词深入谓词前

(3) 利用改名、代入规则使自由变元及约束变元不同

(4) 利用量词辖域收缩与扩张等式扩大量词的辖域至整个公式

例

前束范式不惟一

求下列公式的前束范式

(1) $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$=\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ （量词转化等值式）

$=\forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ （量词分配等值式）

或

$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$=\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ 量词转化等值式

$=\forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ 改名规则

$=\forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ 辖域收缩扩张规则

例

(2) $\forall x F(x) \vee \exists y G(y) \rightarrow \forall x H(x)$

解 $\forall x F(x) \vee \exists y G(y) \rightarrow \forall x H(x)$

$= \neg(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \vee \forall x H(x)$ 除去蕴涵、等价

$= (\exists x(\neg F(x)) \wedge \forall y(\neg G(y))) \vee \forall x H(x)$ 否定深入、量词转换

$= (\exists x(\neg F(x)) \wedge \forall y(\neg G(y))) \vee \forall z H(z)$ 改名

$= \exists x \forall y \forall z((\neg F(x)) \wedge (\neg G(y)) \vee H(z))$ 量词辖域扩张

作业

离散数学

28. 设个体域 $D=\{a,b\}$，消去公式中的量词，则 $\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)\Leftrightarrow$ ______.

29. 设个体域是整数集，命题 $\exists y\forall x(x\times y=0)$ 的真值为______.

30. 设个体域是 $\{1,2\}$，命题 $\forall x\exists y(x+y=3)$ 的真值为______.

31. 将下列命题符号化：

(1) 某些实数是有理数；(2) 所有的人都呼吸；(3) 每个母亲都爱自己的孩子.

32. 设个体域 $D=\{3,5,6\}$，谓词 $F(x)$：x 是素数，求 $\forall xF(x)$ 的真值.

33. 指出公式 $\forall x\forall y(R(x,y)\vee L(y,z))\wedge\exists xH(x,y)$ 中量词每次出现的辖域，并指出变元的每次出现是约束出现还是自由出现，以及公式的约束变元、自由变元.

34. 给定解释 I 如下：

(1) $D=\{2,3\}$；

(2) D 中特定元素 $a=2$；

(3) 函数为 $f(2)=3, f(3)=2$；

(4) 谓词 $F(x)$ 为

$$F(2)=\mathrm{F}, F(3)=\mathrm{T}$$

$G(x,y)$ 为

$$G(2,2)=G(2,3)=G(3,2)=\mathrm{F}, G(3,3)=\mathrm{T}$$

$L(x,y)$ 为

$$L(2,2)=L(3,3)=\mathrm{T}, L(2,3)=L(3,2)=\mathrm{F}$$

求在解释 I 下以下各公式的真值：

(1) $\forall xF(x)\wedge G(x,a)$；

(2) $\forall x\exists yL(x,y)$；

(3) $(F(f(x))\wedge G(x,f(x)))$.

35. 设 P 是二元谓词，给定解释 I 如下：

$$D=\{a,b\}, P(a,a)=P(b,a)=\mathrm{T}, P(a,b)=P(b,b)=\mathrm{F}$$

求下列公式的真值：

(1) $\forall xP(x,x)$；

(2) $\forall x\exists yP(x,y)$；

(3) $\exists x\exists yP(x,y)$.

36. 将公式 $\forall x(A(x)\to B(x,y))\to(\forall y\neg C(y)\vee\exists zD(y,z))$ 化为前束范式.

37. 试用假设推理证明下面的定理：

(3) $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$

(4) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

5. 证明下列关系式：

(1) $\forall x\forall y(P(x)\vee Q(y))\Leftrightarrow\forall xP(x)\vee\forall yQ(y)$

(2) $\exists x\exists y(P(x)\wedge Q(y))\Rightarrow\exists xP(x)$

(3) $\forall x\forall y(P(x)\wedge Q(y))\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge\forall yQ(y)$

(4) $\exists x\exists y(P(x)\to P(y))\Leftrightarrow\forall xP(x)\to\exists yP(y)$

(5) $\forall x\forall y(P(x)\to Q(y))\Leftrightarrow(\exists xP(x)\to\forall yQ(y))$

6. 试证明 $\exists y\forall xP(x,y)$ 的否定等价于 $\forall y\exists x\neg P(x,y)$。

7. 对一个仅含元素 0 和 1 的论述域，试证明：$\forall x(P(x)\leftrightarrow$ (
$\forall xQ(x))$，并证明蕴含式之逆不是有效的。

8. 写出 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=k$ 的定义的符号形式，并用形成定义两边
$\lim\limits_{x\to c}f(x)\neq k$ 的条件。

*9. 一个公式，如果量词都非否定地放在全式的开头，没有括号
们的辖域都延伸到整个公式，则称这样的公式为**前束范式**。应用改
和量词辖域的扩张公式等，可把任一谓词演算公式化成前束范式。
$\neg\forall x(P(x)\to\exists xQ(x))$

徐版227页29，30，35，36

方版48页5