连续时间系统的时域分析方法
-全响应求解

柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

连续时间系统的时域分析

- ❑ 系统分析的逻辑
- ❑ 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- ❑ 零状态响应
  - 奇异函数
  - 信号的时域分解
  - 奇异函数的响应
  - 卷积定理
- ❑ 系统的全响应

系统方程的算子表示法

一般的微分方程：

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\ldots+a_1\frac{d}{dt}r(t)+a_0 r(t)$$

$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}e(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\ldots+b_1\frac{d}{dt}e(t)+b_0 e(t)$$

微分算子：$p=\frac{d}{dt};\ p^n=\frac{d^n}{dt^n};\ \frac{1}{p}=\int_{-\infty}^{t}(\quad)d\tau;$

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1 p+a_0)r(t)=$$

$$(b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1 p+b_0)e(t)$$

系统的定义

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)r(t) =$$
$$(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)e(t)$$

微分方程求解

1. 零输入响应：$e(t) = 0$;状态 $\neq 0$

齐次微分方程:$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)r(t) = 0$

多项式分解；指数函数；利用初始状态求系数

2. 零状态响应：$e(t) \neq 0$;状态=0

齐次微分方程:$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)r(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)e(t)$

卷积；卷积特性；冲激函数特性

系统的全响应

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)r(t) =$$
$$(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)e(t)$$

$$D(p)r(t) = N(p)e(t)$$

$$r(t) = H(P)e(t) = \frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$

系统的全响应

$$D(p)r(t) = N(p)e(t)$$

◆ 零输入响应 $D(p)r(t) = 0$

特征方程$D(\lambda) = 0$,求出特征根λ_i

$$\boxed{r_{zi} = \sum_{i=1}^{N} C_i e^{\lambda_i t}}$$

◆ 零状态响应

冲激响应 $D(p)h(t) = N(p)\delta(t)$

n>m, $h(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t} \varepsilon(t)$

卷积 $\boxed{r_{zs} = e(t) * h(t)}$

系统的全响应

LTIC系统： $e(t) \rightarrow r_{zi}(t) = e(t) * h(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau \overset{\Delta}{=} e(t) * h(t)$$

利用卷积积分零状态响应

改变输入只需要重新计算卷积积分！

若连续系统为因果系统，即 $h(t)=0$ ，$t<0$，且输入信号为因果信号，则有

$$r(t) = \int_{0}^{t} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

系统的全响应

例1.一线性系统：$\dfrac{d^2}{dt^2}r(t)+5\dfrac{d}{dt}r(t)+6r(t)=e(t)$,

$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t), r(0\_)=3.5, r'(0\_)=-8.5$, 求$r(t)$

解：1：零输入响应：$\boxed{r_{zi}=(2e^{-2t}+1.5e^{-3t})\varepsilon(t)}$

$$H(p)=\frac{1}{(p+2)(p+3)} \qquad \lambda_1=-2;\lambda_2=-3$$

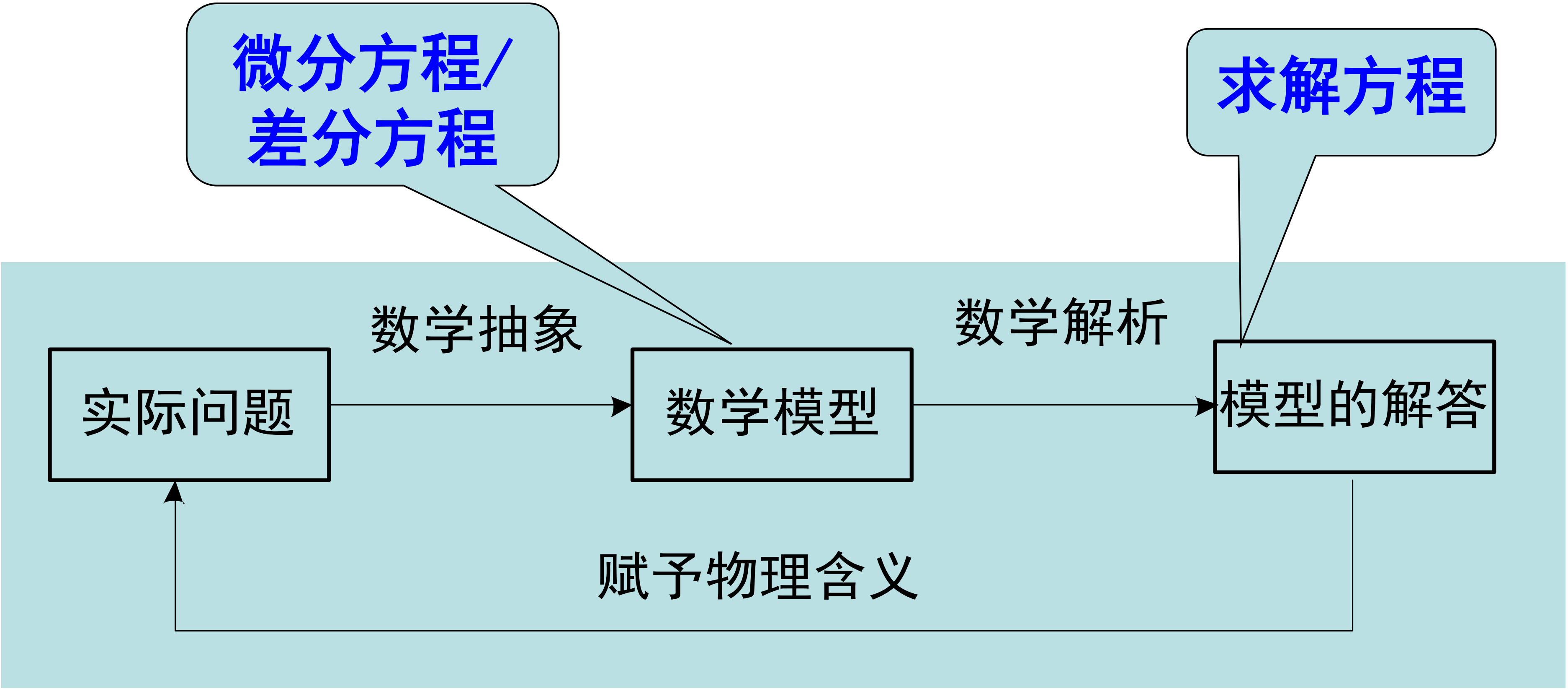
$$r_{zi}=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$[e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)]*[e^{\lambda_2 t}\varepsilon(t)]$$
$$=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}]\varepsilon(t)$$

2：零状态响应：$h(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$

$$r_{zs}=e^{-t}\varepsilon(t)*(e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)\boxed{=(0.5e^{-t}-e^{-2t}+0.5e^{-3t})\varepsilon(t)}$$

系统的定义



系统的全响应

例2 .一线性系统：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+5\frac{d}{dt}r(t)+6r(t)=e(t)$,

$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t), r(0\_)=3.5, r'(0\_)=-8.5$, 求$r(t)$

$\boxed{r_{zi}=(2e^{-2t}+1.5e^{-3t})\varepsilon(t)}$ $\boxed{r_{zs}=(0.5e^{-t}-e^{-2t}+0.5e^{-3t})\varepsilon(t)}$

自由响应　　受迫响应　　自由响应

零输入响应只包含自由响应。

零状态响应包含自由响应和受迫响应。

系统全响应=零输入响应+零状态响应

系统全响应 = 自然响应 + 强迫响应

系统的全响应

系统全响应 = 瞬态响应 + 稳态响应

瞬态响应：系统响应中那些随着时间的增加而衰减，并且最终完全消失的分量称为瞬态响应。

稳态响应：系统响应中那些随着时间的增加一直保留的分量称为稳态响应。

系统的全响应

例1 已知某LTIC系统为 $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$

试求当输入$e(t)=10e^{-3t}\varepsilon(t)$, $r(0^-)=0$，$r'(0^-)=-5$**的响应**

$$r(t)=\underbrace{\overbrace{\underbrace{-5e^{-t}+5e^{-2t}}_{\text{零输入响应}}\;\underbrace{-5e^{-t}+20e^{-2t}}_{\text{零状态响应}\ (\text{part})}}^{\text{自然响应}}\;\overbrace{-15e^{-3t}}^{\text{强迫响应}}}_{\text{瞬态响应}}\qquad t\geq 0$$

充要条件

一般来说稳定系统 $\Leftrightarrow$ **自然响应全部是瞬态响应**

LTIC系统小结:

数学模型:用常系数微分方程来描述

系统全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

零输入响应: 系统特征模式的线性组合

单位冲激响应: $h(t)=b_m\delta(t)+$[特征模式项]$\varepsilon(t)$

零状态响应: $e(t)\rightarrow r_{zi}(t)=e(t)*h(t)$

系统全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

= 自然响应 + 强迫响应

= 瞬态响应 + 稳态响应

系统的特征根及特征模式对系统特性的影响

◈系统特性对特征模式的依赖

假设一个一阶系统，单一的特征模式$e^{\lambda t}$

定性分析 设 $h(t)=Ae^{\lambda t}u(t)$，输入 $f(t)=e^{\xi t}u(t)$

$$y(t)=f(t)*h(t)=\frac{A}{\xi-\lambda}[e^{\xi t}-e^{\lambda t}]u(t)$$

◈谐振现象

当输入信号与系统某个特征模式一致或非常相似，就会出现谐振现象。

线性系统响应的时域求解法

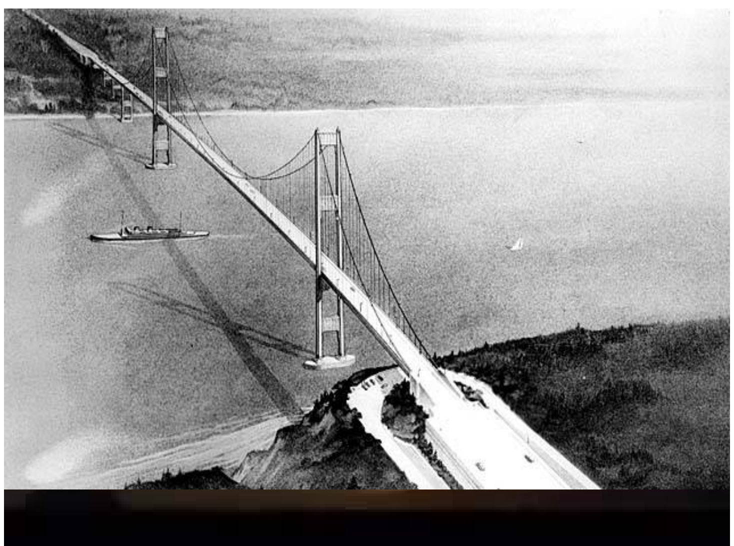
◈谐振现象

假设一个一阶系统，单一的特征模式

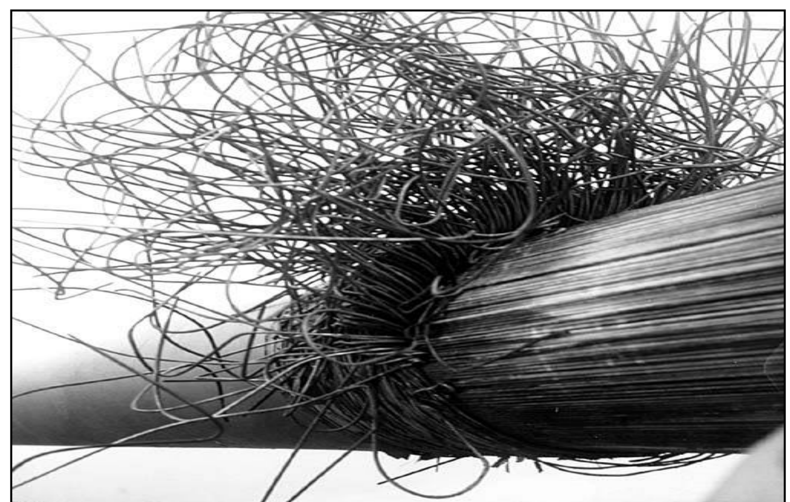
定性分析设 $h(t)=Ae^{\lambda t}$ **，输入** $f(t)=e^{(\lambda-\varepsilon)t}$

$$y(t)=f(t)*h(t)=\frac{A}{\varepsilon}[e^{\lambda t}-e^{(\lambda-\varepsilon)t}]=\frac{A}{\varepsilon}e^{\lambda t}[1-e^{-\varepsilon t}]$$

利用洛必达法则： $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y(t)=Ate^{\lambda t}$



非常著名的*Tacoma*大桥垮塌事件



大桥钢缆绳

MATLAB在LTI系统的应用

已知某LTIC系统为 $$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+3\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=\frac{d}{dt}x(t)$$

试求当输入$f(t)=10e^{-3t}\varepsilon(t)$时的零状态响应。已知其单位冲激响应$h(t)=(-e^{-t}+2e^{-2t})\varepsilon(t)$。

解：零状态响应为： $y_f(t)=f(t)*h(t)$

$$=(-5e^{-t}+20e^{-2t}-15e^{-3t})\varepsilon(t)$$

2.8 线性系统响应的时域求解法

```
% LTI连续系统的响应实现程序
    a=[1 3 2];     b=[1,0];
    t=0:0.01:5
    f=10*exp(-3*t);    %定义激励信号f
    plot(t,f,'R');
    hold on;                %当前图上重画开关
    y=lsim(b,a,f,t);      %用f激励系统，输出为y
    plot(t,y);
    grid on;                % 画分格线
    xlabel('Time(sec)');     ylabel('Amplitude');
```

MALTAB在LTI系统的应用

输入信号： $f(t)=10e^{-3t}\varepsilon(t)$

零状态响应为： $r_{zi}(t)=(-5e^{-t}+20e^{-2t}-15e^{-3t})\varepsilon(t)$