第七章　线性空间与线性变换

§1、线性空间的定义与基本性质

例1　所有n维实向量的集合$\mathbf{R}^n$，对于通常向量的加法与数乘运算构成线性空间。

例2　所有$m\times n$矩阵的集合$\mathbf{R}^{m\times n}$，对于通常矩阵的加法与数乘运算构成线性空间。

例3　全体实系数多项式集合$\mathrm{P}[t]$，按通常多项式的加法和数与多项式的乘法，构成线性空间。

例4　次数不超过n的全体实系数多项式集合$\mathrm{P}_n[t]$，按通常多项式的加法和数与多项式的乘法，构成线性空间。

例5　次数等于n的全体实系数多项式集合，对于多项式的加法与数乘运算是否构成线性空间？

解　不构成。原因：

（1）对加法不封闭，取t^n+5和$-t^n-2$属于该集合，但$(t^n+5)+(-t^n-2)=3$　不属于该集合；

（2）对于数乘运算不封闭，如$0(t^n+5)=0$不属于该集合；

（3）无零元素。

例6　全体实函数的集合，对于通常函数的加法与数与函数的乘法，构成线性空间。

例7　定义在区间$[a,b]$上的连续实函数的全体$C[a,b]$，对于通常函数的加法与数与函数的乘法，构成线性空间。

例8　设$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$，齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解向量集合S，按通常向量的加法与数乘构成线性空间。

例9　设$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$，非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解向量集合$\tilde{\mathrm{S}}$，按通常向量的加法与数乘不构成线性空间。

原因：（1）$\tilde{\mathrm{S}}$可能是空集；

（2）$\tilde{\mathrm{S}}$对加法不封闭；

（3）$\tilde{\mathrm{S}}$对数乘不封闭。

例10　全体正实数集合$\mathbf{R}^+$，加法与数乘规定为

$$m\oplus n=mn,\quad k\circ m=m^k,\ \forall m,n\in\mathbf{R}^+,\quad k\in\mathbf{R}$$

则$\mathbf{R}^+$构成线性空间。

其中1是零元素，$\dfrac{1}{m}$是元素m的负元素。

例11　全体二维实向量的集合V，加法与数乘规定为

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac)$$

$$k\circ(a,b)=(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2)$$

则V构成线性空间。　因为

$$(a,b)\oplus(0,0)=(a+0,b+0+a0)=(a,b)$$

$$(a,b)\oplus(-a,a^2-b)=(a-a,b+(a^2-b)+a(-a))=(0,0)$$

所以$(0,0)$是零元素，$(-a,a^2-b)$是元素(a,a)的负元素。

例12　全体n维实向量的集合V，对于通常向量的加法和如下定义的数乘运算是否构成线性空间？为什么？

1）$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$　　2）$k\circ\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\ \forall\boldsymbol{\alpha}\in V$

解　1) 不构成。因为$(k+l)\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，但

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}+l\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$$

即运算律(7)不成立。

2) 不构成。因为$1\circ\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\alpha}$，即(5)不成立。

例13　实数域$\mathbf{R}$按通常数的加法与乘法运算，构成线性空间。

§2、维数、基与坐标

例 在$\mathbf{R}^{2\times 2}$中，试讨论矩阵组

（1） $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；

（2） $\boldsymbol{G}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{G}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{G}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{G}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$。

的线性相关性。

例 设V是所有实函数构成的线性空间，讨论V中函数组e^{2t},t^2,t 的线性相关性。

解 设 $k_1e^{2t}+k_2t^2+k_3t=0$

对其求导得 $2k_1e^{2t}+2k_2t+k_3=0$

再求导得 $4k_1e^{2t}+2k_2=0$

三式联立求解。由于其系数行列式

$$\begin{vmatrix}e^{2t}&t^2&t\\2e^{2t}&2t&1\\4e^{2t}&2&0\end{vmatrix}=2e^{2t}(-2t^2+2t-1)\neq 0$$

只有$k_1=k_2=k_3=0$，故e^{2t},t^2,t 线性无关。

解 （1）设$k_1\boldsymbol{E}_{11}+k_2\boldsymbol{E}_{12}+k_3\boldsymbol{E}_{21}+k_4\boldsymbol{E}_{22}=\boldsymbol{O}$，即

$$\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

只有$k_1=k_2=k_3=k_4=0$，故$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$线性无关。

（2）设 $k_1\boldsymbol{G}_1+k_2\boldsymbol{G}_2+k_3\boldsymbol{G}_3+k_4\boldsymbol{G}_4=\boldsymbol{O}$，即

$$\begin{cases}k_2+k_3+k_4=0\\k_1+k_3+k_4=0\\k_1+k_2+k_4=0\\k_1+k_2+k_3=0\end{cases}$$

例 判断P[t]中多项式组$1,t,t^2,\cdots,t^N$ 的线性相关性，N为取定的自然数。

解 设 $k_0+k_1t+k_2t^2+\cdots+k_Nt^N=0$

上式分别求1阶、2阶、…、N阶导数得：

$$k_1+2k_2t+\cdots+Nk_Nt^{N-1}=0$$
$$2k_2+\cdots+N(N-1)k_Nt^{N-2}=0$$
$$\cdots\cdots$$
$$N!k_N=0$$

联立求解，得 $k_0=\cdots=k_N=0$，故$1,t,t^2,\cdots,t^N$线性无关。

由于系数行列式$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=-3\neq 0$，所以方程组只有零解，故$\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 线性无关。

例 判断P$_3$[t]中多项式组

$f_1(t)=t^3-2t^2+4t+1$，$f_2(t)=2t^3-3t^2+9t-1$，

$f_3(t)=t^3+6t-5$， $f_4(t)=2t^3-5t^2+7t+5$

的线性相关性。

解 设 $k_1f_1(t)+k_2f_2(t)+k_3f_3(t)+k_4f_4(t)=0$

整理得

$$(k_1+2k_2+k_3+2k_4)t^3+(-2k_1-3k_2-5k_4)t^2+$$
$$(4k_1+9k_2+6k_3+7k_4)t+(k_1-k_2-5k_3+5k_4)=0$$

由$1,t,t^2,t^3$ 线性无关得

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3+2k_4=0 \\ -2k_1-3k_2-5k_4=0 \\ 4k_1+9k_2+6k_3+7k_4=0 \\ k_1-k_2-5k_3+5k_4=0 \end{cases}$$

系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{vmatrix}=0$

齐次方程组有非零解，故 $f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ 线性相关。

例 在$\mathbf{R}^{2\times2}$中，矩阵组

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

线性无关，且任意 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times2}$ 可表为

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+a_{12}\boldsymbol{E}_{12}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+a_{22}\boldsymbol{E}_{22}$$

故 $\dim\mathbf{R}^{2\times2}=4$。又 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 也是$\mathbf{R}^{2\times2}$的一个基。

例 在$\mathbf{R}^{m\times n}$中，矩阵组

例 二维实向量的集合V，按以下规定的加法和数乘

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac)$$
$$k\circ(a,b)=(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2)$$

构成线性空间，试讨论V中向量 $(1,0),(0,1)$ 的线性相关性。

解 设 $k_1,k_2\in\mathbf{R}$ 使

$$k_1\circ(1,0)\oplus k_2\circ(0,1)=(0,0)$$

即
$$(k_1,\frac{k_1(k_1-1)}{2})\oplus(0,k_2)=(0,0)$$

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} i\text{行} \\ j\text{列} \end{array} \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

线性无关，且任意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 可表为

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$$

故 $\dim\mathbf{R}^{m\times n}=mn$，且 $\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 是$\mathbf{R}^{m\times n}$的一个基。

也即
$$(k_1,\frac{k_1(k_1-1)}{2}+k_2)=(0,0)$$

可见 $k_1=0,\ \frac{k_1(k_1-1)}{2}+k_2=0$，这只有 $k_1=k_2=0$，故 $(1,0),(0,1)$ 线性无关。

例 求3阶实对称矩阵构成的线性空间$S\mathbf{R}^{3\times3}$的基与维数。

解 取

$$\boldsymbol{F}_{11}=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_{22}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_{33}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

易证$\boldsymbol{F}_{ij}$线性无关，且对任意

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{S}\mathbf{R}^{3\times 3}$$

有

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{F}_{11}+a_{22}\boldsymbol{F}_{22}+a_{33}\boldsymbol{F}_{33} +a_{12}\boldsymbol{F}_{12}+a_{23}\boldsymbol{F}_{23}+a_{13}\boldsymbol{F}_{13}$$

故 $\dim \mathrm{S}\mathbf{R}^{3\times 3}=6$，且 $\boldsymbol{F}_{11},\boldsymbol{F}_{22},\boldsymbol{F}_{33},\boldsymbol{F}_{12},\boldsymbol{F}_{23},\boldsymbol{F}_{13}$ 是一个基。

例 在$\mathrm{P}_2[t]$中，求多项式$1+2t-t^2$ 在$\mathrm{P}_2[t]$的基 $1,1+t,1+t+t^2$ 下的坐标。

解 设

$$1+2t-t^2=k_1+k_2(1+t)+k_3(1+t+t^2)$$

比较两边同次幂的系数得

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=1 \\ \quad\ \ k_2+k_3=2\ , \\ \qquad\quad\ k_3=-1 \end{cases}$$

解得 $k_3=-1, k_2=3, k_1=-1$

故 $1+2t-t^2$ 在该基下的坐标为 $(-1,3,-1)^{\mathrm{T}}$ 。

例 在$\mathrm{P}_n[t]$中，$1,t,t^2,\cdots,t^n$ 线性无关，且任意

$$f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\in \mathrm{P}_n[t]$$

可由它们线性表出，故 $1,t,t^2,\cdots,t^n$是$\mathrm{P}_n[t]$的一个基，且 $\dim \mathrm{P}_n[t]=n+1$。

例 $\mathrm{P}[t]$是无限维线性空间。因为对任意自然数N，$1,t,t^2,\cdots,t^N$ 线性无关，故 $\dim \mathrm{P}[t]=\infty$。

例 实函数空间$\mathrm{C}[a\,,b]$是无限维线性空间。

例 在$\mathbf{R}^{2\times 2}$中，分别求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$在$\mathbf{R}^{2\times 2}$的基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 和 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 下的坐标。

例 判断 $\mathrm{P}_3[t]$中多项式组

$$f_1(t)=t^3-2t^2+4t+1,\quad f_2(t)=2t^3-3t^2+9t-1,$$
$$f_3(t)=t^3+6t-5,\qquad f_4(t)=2t^3-5t^2+7t+5$$

的线性相关性，并求其秩和极大无关组。

解 直接用定义不太方便。取 $\mathrm{P}_3[t]$ 的简单基 $t^3,t^2,t,1$, 则 $f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ 在该基下的坐标分别为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解 因为 $\boldsymbol{A}=0\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}+2\boldsymbol{E}_{21}-3\boldsymbol{E}_{22}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 在该基下的坐标为 $(0,1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 。

又设 $\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{G}_1+k_2\boldsymbol{G}_2+k_3\boldsymbol{G}_3+k_4\boldsymbol{G}_4$，即

$$\begin{cases} 0= \qquad\ k_2+k_3+k_4 \\ 1=k_1 \qquad\ +k_3+k_4 \\ 2=k_1+k_2 \qquad\ +k_4 \\ -3=k_1+k_2+k_3 \end{cases}$$

解之得 $k_1=0,k_2=-1,k_3=-2,k_4=3$，故 $\boldsymbol{A}$在该基下的坐标为 $(0,-1,-2,3)^{\mathrm{T}}$ 。

可求得该向量组的秩为2，且 $(1,-2,4,1)^{\mathrm{T}}$，$(2,-3,9,-1)^{\mathrm{T}}$为一个极大无关组。故 $f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ 线性相关；该多项式组的秩为2，且 $f_1(t),f_2(t)$ 为一个极大无关组。

例 求 $\mathbf{R}^{2\times 2}$中矩阵组

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

的秩和极大无关组。

解 取 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的简单基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 在该基下的坐标为

$(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$，$(3,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$(1,1,-3,3)^{\mathrm{T}}$

可求得该向量组的秩为2，且 $(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}},(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$ 是一个极大无关组。故 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的秩为2，且 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 是一个极大无关组。

例 已知 $\mathbf{R}^4$ 的两个基

$$\alpha_1=(1,2,-1,0),\quad \alpha_2=(1,-1,1,1),$$
$$\alpha_3=(-1,2,1,1),\quad \alpha_4=(-1,-1,0,1)$$

和

$$\beta_1=(2,1,0,1),\quad \beta_2=(0,1,2,2),$$
$$\beta_3=(-2,1,1,2),\quad \beta_4=(1,3,1,2)$$

(1) 求从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵；

(2) 写出坐标变换公式。

解 (1) **法1(直接法)** 设

$$\beta_i=c_{1i}\alpha_1+c_{2i}\alpha_2+c_{3i}\alpha_3+c_{4i}\alpha_4\ (\ i=1,2,3,4)$$

列四个四元一次方程组求解即得。

法2 (间接法或中间基法) 取 $\mathbf{R}^4$ 的简单基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$，因为

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\boldsymbol{A}$$
$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\boldsymbol{B}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

所以 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

故从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

(2) 设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^4$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标为 $(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$，则坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

例 已知 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的两个基

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{G}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

(1) 求从基 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 到 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 的过渡矩阵；

(2) 求矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 下的坐标。

解 (1) 因为

$$(\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{C}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

故从 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 到 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 的过渡矩阵为

$$C^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&1&1\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}$$

(2) **法1.** 设

$$\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}=k_1\boldsymbol{G}_1+k_2\boldsymbol{G}_2+k_3\boldsymbol{G}_3+k_4\boldsymbol{G}_4$$

解得 $k_1=0$，$k_2=-1$，$k_3=-2$，$k_4=3$

故 $\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}$ 在 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 下的坐标为

$$(0,-1,-2,3)^{\mathrm{T}}$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&&\\&1&-1&\\&&1&-1\\&&&1\end{pmatrix}$$

(2) f 在旧基下的坐标为 $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，从而 f 在新基下的坐标 $(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&&\\&1&-1&\\&&1&-1\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

故 f 在新基下的坐标为 $(-1,-1,-1,4)^{\mathrm{T}}$。

法2. $\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的坐标为 $(0,1,2,-3)^{\mathrm{T}}$，则它在基 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 下的坐标 $(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

例 设 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在基

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&3\\4&4\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&5\\7&7\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}-3&-3\\-5&2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}5&5\\8&-3\end{pmatrix}$$

下的坐标，$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 下的坐标，且

$$y_1=3x_1+5x_2,\quad y_2=x_1+2x_2,$$
$$y_3=2x_3-3x_4,\quad y_4=-5x_3+8x_4$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 到 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的过渡矩阵；

(2) 求基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$。

解 由于

例 在线性空间 $\mathrm{P}_3[t]$ 中，旧基为 $1,t,t^2,t^3$，新基为 $f_1=1$，$f_2=1+t$，$f_3=1+t+t^2$，$f_4=1+t+t^2+t^3$

(1) 求从新基到旧基的过渡矩阵；

(2) 求 $f=1+2t+3t^2+4t^3$ 在新基下的坐标。

解 (1) 因为

$$(f_1,f_2,f_3,f_4)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{C}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

所以从新基到旧基的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

根据基变换公式得

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)\boldsymbol{C}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3&5&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&-3\\0&0&-5&8\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{C}$ 即为由基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 到 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的过渡矩阵。

又由

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\boldsymbol{C}^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\begin{pmatrix}2&-5&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{B}_1=2\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=-5\boldsymbol{A}_1+3\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_3=8\boldsymbol{A}_3+5\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_4=3\boldsymbol{A}_3+2\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

例 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3是3维线性空间V的两个基，且满足

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \beta_1+\beta_2=\alpha_2+\alpha_3\\ \beta_2+\beta_3=\alpha_1+\alpha_3\end{cases}$$

(1) 求从基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵；

(2) 求元素 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标。

解 由所给关系式得

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

于是

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

故从基 β_1,β_2,β_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix};$$

又有

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$$

故α在基β_1,β_2,β_3下的坐标为$(2,-5,1)^{\mathrm{T}}$。

§3、线性子空间

例 在线性空间V中，$\{\theta\}$和V都是V的子空间，称它们是V的平凡(假)子空间，其余的子空间称为非平凡(真)子空间。

例 在2维几何空间$\mathbf{R}^2$中，过原点的任一直线上的向量集合是$\mathbf{R}^2$的子空间；在$\mathbf{R}^3$中，过原点的直线或平面上的向量集合是$\mathbf{R}^3$的子空间。

例 全体实函数组成的线性空间中，P[t]是它的一个子空间；$\mathrm{P}_n[t]$是P[t]的子空间。

例 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量集合S是$\mathbf{R}^n$的子空间，且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是S的基，$\dim S=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$。

例 $\mathrm{S}\mathbf{R}^{3\times3}$是$\mathbf{R}^{3\times3}$的子空间，$\dim\mathrm{S}\mathbf{R}^{3\times3}=6$。更一般地，$\mathrm{S}\mathbf{R}^{n\times n}$是$\mathbf{R}^{n\times n}$的子空间，且

$$\dim\mathrm{S}\mathbf{R}^{n\times n}=\frac{n(n+1)}{2}$$

例 在$\mathbf{R}^{2\times3}$中，下列子集是否构成子空间？如果是子空间，求基和维数。

(1) $\mathrm{W}_1=\left\{\begin{pmatrix}a&b&0\\0&c&d\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$；

(2) $\mathrm{W}_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b&0\\0&c&d\end{pmatrix}\middle| a+b+c+d=0,a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$

解 (1) 设$k\in\mathbf{R}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & 0\\ 0 & c_1 & d_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_2 & b_2 & 0\\ 0 & c_2 & d_2\end{pmatrix}\in \mathrm{W}_1$$

则有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0\\ 0 & c_1+c_2 & d_1+d_2\end{pmatrix}\in \mathrm{W}_1$$

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ka_1 & kb_1 & 0\\ 0 & kc_1 & kd_1\end{pmatrix}\in \mathrm{W}_1$$

故W_1是子空间。

取矩阵组

例 在$\mathrm{P}_3[t]$中，子集

$$\mathrm{W}=\{a+bt+ct^2+dt^3 \mid a+b+c=0, a,b,c,d\in\mathbf{R}\}$$

是否构成子空间？如果是子空间，求基和维数。

解 设$k\in\mathbf{R}$，

$$f(t)=a_1+b_1t+c_1t^2+d_1t^3\in \mathrm{W}$$

$$g(t)=a_2+b_2t+c_2t^2+d_2t^3\in \mathrm{W}$$

则 $a_1+b_1+c_1=0$， $a_2+b_2+c_2=0$

由于

$$f(t)+g(t)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)t+(c_1+c_2)t^2+(d_1+d_2)t^3$$

$$kf(t)=ka_1+kb_1t+kc_1t^2+kd_1t^3$$

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则易知$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23}$线性无关，且$\mathrm{W}_1$中任意矩阵可由它们线性表示。故$\dim\mathrm{W}_1=4$，且$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23}$是$\mathrm{W}_1$的一个基。

(2) 设$k\in\mathbf{R}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & 0\\ 0 & c_1 & d_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_2 & b_2 & 0\\ 0 & c_2 & d_2\end{pmatrix}\in \mathrm{W}_2$$

则 $a_1+b_1+c_1+d_1=0$，$a_2+b_2+c_2+d_2=0$

且 $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=0$

$ka_1+kb_1+kc_1=0$

故 $f(t)+g(t)\in\mathrm{W}$，$kf(t)\in\mathrm{W}$，从而W是子空间。

可知 $\dim\mathrm{W}=3$，且

$f_1(t)=1-t$，$f_2(t)=1-t^2$，$f_3(t)=t^3$

是一个基。

由于

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0\\ 0 & c_1+c_2 & d_1+d_2\end{pmatrix},$$

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ka_1 & kb_1 & 0\\ 0 & kc_1 & kd_1\end{pmatrix}$$

且 $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2)=0$

$ka_1+kb_1+kc_1+kd_1=0$

故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in\mathrm{W}_2$，$k\boldsymbol{A}\in\mathrm{W}_2$，从而 W_2是子空间。

可知 $\dim\mathrm{W}_2=3$，且

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

是一个基。

例 在$\mathbf{R}^{2\times2}$中，求由

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&1\\-3&3\end{pmatrix}$$

生成的子空间的基与维数。

解 取$\mathbf{R}^{2\times2}$的简单基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$，则$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 在该基下的坐标分别为

$(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$，$(3,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$(1,1,-3,3)^{\mathrm{T}}$

可求得该向量组的秩为2，且 $(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$ 是一个极大无关组。

故 A_1,A_2,A_3,A_4 的秩为2，且 A_1,A_2 是一个极大无关组。从而 $L(A_1,A_2,A_3,A_4)$ 的维数为2，且 A_1,A_2 是它的一个基。

例 设 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中

$$\alpha_1=(1,2,1,0),\quad \alpha_2=(-1,1,1,1)$$

$$\beta_1=(2,-1,0,1),\quad \beta_2=(1,-1,3,7)$$

求 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 的基与维数。

解 因为

$$W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$$

所以只要求出向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的秩和极大无关组即可。由于

$$(\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&1&-1&-1\\1&1&0&3\\0&1&1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&1&7\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从而向量组的秩为3，且 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 是一个极大无关组，故 $\dim(W_1+W_2)=3$，基为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$。

对任意 $\alpha\in W_1\cap W_2$，有 $\alpha\in W_1$ 且 $\alpha\in W_2$，即

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2$$

也即 $\quad k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-l_1\beta_1-l_2\beta_2=\mathbf{0}$

比较分量得

$$\begin{cases}k_1-k_2-2l_1-l_2=0\\2k_1+k_2+l_1+l_2=0\\k_1+k_2\qquad-3l_2=0\\\qquad k_2-l_1-7l_2=0\end{cases}$$

因为

$$\begin{pmatrix}1&-1&-2&-1\\2&1&1&1\\1&1&0&-3\\0&1&-1&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases}k_1=-l_2\\k_2=4l_2\\l_1=-3l_2\end{cases}$，通解为 $\begin{cases}k_1=-c\\k_2=4c\\l_1=-3c\\l_2=c\end{cases}$

故 $\quad \alpha=-c\alpha_1+4c\alpha_2=c(-5,2,3,4)$ （c任意）

从而 $\dim(W_1\cap W_2)=1$，且 $(-5,2,3,4)$ 是一个基。

注 本题可做如下修改：

1．设

$$W_1\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1-2x_2+3x_3=0,\ 2x_1-x_2+3x_4=0\}$$

$W_2=L(\beta_1,\beta_2)$，其中 $\beta_1=(2,-1,0,1)$，$\beta_2=(1,-1,3,7)$，

求 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 的基与维数。

可先求出 W_1 的基 $\alpha_1=(1,2,1,0)$，$\alpha_2=(-2,-1,0,1)$，则 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，其余步骤如上题。

2．设 $W_1=L(f_1(t),f_2(t))$，$W_2=L(g_1(t),g_2(t))$，其中

$$f_1(t)=1+2t+t^2,\quad f_2(t)=-1+t+t^2+t^3$$

$$g_1(t)=2-t+t^3,\quad g_2(t)=1-t+3t^2+7t^3$$

求 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 的基与维数。

3．设 $W_1=L(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)$，$W_2=L(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2)$，其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&-1\\3&7\end{pmatrix}$$

求 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 的基与维数。

§4、线性变换

例 设**Z**是全体整数的集合，**Z'**是全体偶数的集合。定义

$$\sigma(n)=2n\qquad \forall n\in\mathbf{Z}$$

这是**Z**到**Z'**的一个映射。

σ是满射，又是单射，即σ是一一对应的。

例 设$\mathbf{R}^{n\times n}$是全体n阶方阵的集合，定义

$$\sigma_1(\boldsymbol{A})=\det\boldsymbol{A}\qquad \forall\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$$

这是$\mathbf{R}^{n\times n}$到**R**的一个映射。

σ_1是满射，但不是单射。

例 定义

$$\sigma_2(a)=aE_n \qquad \forall a\in \mathbf{R}$$

这是$\mathbf{R}$到 $\mathbf{R}^{n\times n}$的一个映射。

σ_2是单射，但不是满射。

例 设P[t]是数域$\mathbf{R}$上全体多项式的集合。定义

$$\sigma_3(f(t))=f'(t), \quad \sigma_4(f(t))=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \qquad \forall f(t)\in \mathrm{P}[t]$$

则σ_3和σ_4是P[t]上的变换。

σ_3是满射，但不是单射。

σ_4不是满射，但是单射。

例 定义在实数集合$\mathbf{R}$上的函数 $y=f(x)$ 是$\mathbf{R}$上的一个变换。

例2 在$\mathbf{R}^n$中，定义变换

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n \text{而 } \boldsymbol{A}\in \mathbf{R}^{n\times n}\text{取定}$$

则T是$\mathbf{R}^n$的线性变换。

例3 在$\mathbf{R}^{n\times n}$中，定义变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB}, \quad \forall \boldsymbol{X}\in \mathbf{R}^{n\times n}$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \mathbf{R}^{n\times n}$ 取定。问T是否线性变换？

解 设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in \mathbf{R}^{n\times n}$，$k\in\mathbf{R}$，则有

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})-(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}\\&=(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB})+(\boldsymbol{AY}-\boldsymbol{YB})\\&=T(\boldsymbol{X})+T(\boldsymbol{Y})\end{aligned}$$

$$T(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})-(k\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB})=kT(\boldsymbol{X})$$

故T是$\mathbf{R}^{n\times n}$的线性变换。

例 对前面例中的σ_1与σ_2，有

$$(\sigma_2\sigma_1)(\boldsymbol{A})=\sigma_2(\sigma_1(\boldsymbol{A}))=\sigma_2(\det \boldsymbol{A})=(\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{E}_n \qquad \forall \boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$$

$$(\sigma_1\sigma_2)(a)=\sigma_1(\sigma_2(a))=\sigma_1(a\boldsymbol{E}_n)=(\det(a\boldsymbol{E}_n))=a^n \qquad \forall a\in\mathbf{R}$$

而对σ_3与σ_4，有 $(\forall f(t)\in \mathrm{P}[t])$

$$(\sigma_3\sigma_4)(f(t))=\sigma_3(\sigma_4(f(t)))=\sigma_3\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)=f(t)$$

$$\begin{aligned}(\sigma_4\sigma_3)(f(t))&=\sigma_4(\sigma_3(f(t)))=\sigma_4(f'(t))\\&=\int_0^t f'(s)\,\mathrm{d}s=f(t)-f(0)\end{aligned}$$

显然，映射的乘法一般不满足交换律。

若取变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB}+\boldsymbol{C}$$

则当$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$时，$T$是线性变换。

例4 在$\mathrm{P}_n[t]$中，求微分

$$D(f(t))=f'(t), \quad \forall f(t)\in \mathrm{P}_n[t]$$

是一个线性变换。

例5 在C[a，b]中，定义变换

(1) $T_1(f(x))=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$；

(2) $T_2(f(x))=\int_a^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$；

(3) $T_3(f(x))=\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$

问 T_1,T_2,T_3是否线性变换？

例1 在$\mathbf{R}^3$中，定义变换

$$T(a,b,c)=(a+1,a+b,c), \quad \forall (a,b,c)\in\mathbf{R}^3$$

问T是否线性变换？

解 取 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,b_1,c_1)$，$\boldsymbol{\beta}=(a_2,b_2,c_2)\in\mathbf{R}^3$，$k\in\mathbf{R}$，则

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=T(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)\\&=(a_1+a_2+1,a_1+a_2+b_1+b_2,c_1+c_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{\alpha})+T(\boldsymbol{\beta})&=(a_1+1,a_1+b_1,c_1)+(a_2+1,a_2+b_2,c_2)\\&=(a_1+a_2+2,a_1+a_2+b_1+b_2,c_1+c_2)\end{aligned}$$

可见$T(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\neq T(\boldsymbol{\alpha})+T(\boldsymbol{\beta})$，故$T$不是线性变换。

解 (1) (2) 是；(3) 不是。因为

$$T_3(2f(x))=\int_a^x 4f^2(t)\,\mathrm{d}t=4T_3(f(x))\neq 2T_3(f(x))$$

例6 设V是线性空间。定义V的变换

(1) $E(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$， (2) $O(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\theta}$， $\forall \boldsymbol{\alpha}\in \mathrm{V}$

分别称之为恒等变换(或单位变换)，零变换。

它们都是V的线性变换。

例 已知$\mathbf{R}^3$的线性变换

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3,x_2+x_3,x_1+x_2-2x_3)$$

（1） 求R(T) 的维数和一个基；

（2） 求N(T) 的维数和一个基。

解 （1） 取$\mathbf{R}^3$的简单基

$$\varepsilon_1=(1,0,0)，\ \varepsilon_2=(0,1,0)，\ \varepsilon_3=(0,0,1)$$

由于

$$T(\varepsilon_1)=(1,0,1)，\ T(\varepsilon_2)=(2,1,1)，\ T(\varepsilon_3)=(-1,1,-2)$$

可求得 $T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2),T(\varepsilon_3)$ 的秩为2，且 $T(\varepsilon_1),T(\varepsilon_2)$ 是一个极大无关组。故 $\dim\mathrm{R}(T)=2$，且 $(1,0,1)$，$(2,1,1)$是R(T) 的一个基。

则有

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix},\quad T(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}2&0\\2&-2\end{pmatrix},\quad T(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$$

显然 $\dim\mathrm{R}(T)=2$，且

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix},\quad T(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}2&0\\2&-2\end{pmatrix},$$

是它的一个基。

（2） 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\in\mathrm{N}(T)$，则由

（2） 设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathrm{N}(T)$，则

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{\alpha})&=T(x_1,x_2,x_3)\\&=(x_1+2x_2-x_3,x_2+x_3,x_1+x_2-2x_3)=(0,0,0)\end{aligned}$$

于是
$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0\\ x_2+x_3=0\\ x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=3x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$，通解为 $\begin{cases}x_1=3k\\x_2=-k\\x_3=k\end{cases}$ （k任意）

于是 $\boldsymbol{\alpha}=k(3,-1,1)$。故 $\dim\mathrm{N}(T)=1$，且$(3,-1,1)$是N(T) 的一个基。

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{X})&=\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{XM}\\&=\begin{pmatrix}2x_{21}&-2x_{11}-2x_{12}+2x_{22}\\2x_{21}&-2x_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

得
$$\begin{cases}2x_{21}=0\\-2x_{11}-2x_{12}+2x_{22}=0\\2x_{21}=0\\-2x_{21}=0\end{cases}$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_{11}=-x_{12}+x_{22}\\x_{21}=0\end{cases}$

例 已知$\mathbf{R}^{2\times2}$的线性变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{XM}\qquad\forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{2\times2},\ \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$$

求T的象子空间与核子空间的维数和基。

解 （1） 取 $\mathbf{R}^{2\times2}$的简单基

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

法1 通解为 $\begin{cases}x_{11}=-k_1+k_2\\x_{12}=k_1\\x_{21}=0\\x_{22}=k_2\end{cases}$ （k_1,k_2任意）

从而 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-k_1+k_2&k_1\\0&k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

故 $\dim\mathrm{N}(T)=2$，且$\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$是它的一个基。

法2 基础解系为

$$(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故 $\dim\mathrm{N}(T)=2$，且$\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$是它的一个基。

§5、线性变换的矩阵表示

例 已知$\mathbf{R}^3$的线性变换

$$T(x_1,x_2,x_3)=(2x_2+x_3,\ x_1-4x_2,\ 3x_1)$$

求T在$\mathbf{R}^3$的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 和基

$$\alpha_1=(1,1,1),\ \alpha_2=(1,1,0),\ \alpha_3=(1,0,0)$$

下的矩阵。

解 （1） 因为

$$\begin{cases}T(\varepsilon_1)=(0,1,3)=0\varepsilon_1+\varepsilon_2+3\varepsilon_3\\ T(\varepsilon_2)=(2,-4,0)=2\varepsilon_1-4\varepsilon_2+0\varepsilon_3\\ T(\varepsilon_3)=(1,0,0)=\varepsilon_1+0\varepsilon_2+0\varepsilon_3\end{cases}$$

所以T在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

例 已知$\mathbf{R}^{2\times2}$的线性变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{XM},\quad \forall \boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{2\times2},\quad \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$$

求T在$\mathbf{R}^{2\times2}$的基$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵。

解 因为

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}=-2\boldsymbol{E}_{12},\quad T(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}=-2\boldsymbol{E}_{12},$$

$$T(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}2&0\\2&-2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{21}-2\boldsymbol{E}_{22}$$

$$T(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}=2\boldsymbol{E}_{12}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&-4&0\\3&0&0\end{pmatrix}$$

（2） **法1** 因为

$$\begin{cases}T(\alpha_1)=(3,-3,3)=3\alpha_1-6\alpha_2+6\alpha_3\\ T(\alpha_2)=(2,-3,3)=3\alpha_1-6\alpha_2+5\alpha_3\\ T(\alpha_3)=(0,1,3)=3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3\end{cases}$$

所以T在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&3&3\\-6&-6&-2\\6&5&-1\end{pmatrix}$$

法2 因为

故T在 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\-2&-2&0&2\\0&0&2&0\\0&0&-2&0\end{pmatrix}$$

例 已知$\mathrm{P}_2[t]$的线性变换

$$T(a+bt+ct^2)=(4a+6b)-(3a+5b)t-(3a+6b-c)t^2$$

$$\forall a+bt+ct^2\in\mathrm{P}_2[t]$$

求T在$\mathrm{P}_2[t]$的基 $1,t,t^2$ 和基

$$f_1(t)=1,\ f_2(t)=1+t,\ f_3(t)=1+t+t^2$$

下的矩阵。

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}3&2&0\\-3&-3&1\\3&3&3\end{pmatrix}$$

又有 $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

从而

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&2&0\\-3&-3&1\\3&3&3\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3&3&3\\-6&-6&-2\\6&5&-1\end{pmatrix}$$

解 由于 $$\begin{cases}T(1)=4-3t-3t^2\\ T(t)=6-5t-6t^2\\ T(t^2)=t^2\end{cases}$$

所以T在基$1,t,t^2$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$

又由于 $$\begin{cases}T(f_1(t))=4-3t-3t^2\\ T(f_2(t))=10-8t-9t^2\\ T(f_3(t))=10-8t-8t^2\end{cases}$$

所以 $T(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)\begin{pmatrix}4 & 10 & 10\\ -3 & -8 & -8\\ -3 & -9 & -8\end{pmatrix}$

又有 $(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

从而

$$T(f_1,f_2,f_3)=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4 & 10 & 10\\ -3 & -8 & -8\\ -3 & -9 & -8\end{pmatrix}$$

$$=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}7 & 18 & 18\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & -9 & -8\end{pmatrix}$$

所以T在基 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7 & 18 & 18\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & -9 & -8\end{pmatrix}$$

例 求$\mathrm{P}_n[t]$的微分变换D在基 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 和 $1,t,\frac{t^2}{2!},\cdots,\frac{t^n}{n!}$ 下的矩阵。

解 因为

$$\begin{cases} D(1)=0=0\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2+\cdots+0\cdot t^n\\ D(t)=1=1\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2+\cdots+0\cdot t^n\\ D(t^2)=2t=0\cdot 1+2\cdot t+0\cdot t^2+\cdots+0\cdot t^n\\ \quad\cdots\cdots\\ D(t^n)=nt^{n-1}=0\cdot 1+\cdots+n\cdot t^{n-1}+0\cdot t^n\end{cases}$$

所以 D在基 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

又因为

$$D(1)=0=0\cdot 1+0\cdot t+0\cdot \tfrac{t^2}{2!}+\cdots+0\cdot \tfrac{t^n}{n!}$$
$$D(t)=1=1\cdot 1+0\cdot t+0\cdot \tfrac{t^2}{2!}+\cdots+0\cdot \tfrac{t^n}{n!}$$
$$D(\tfrac{t^2}{2!})=t=0\cdot 1+1\cdot t+0\cdot \tfrac{t^2}{2!}+\cdots+0\cdot \tfrac{t^n}{n!}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D(\tfrac{t^n}{n!})=\tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}=0\cdot 1+\cdots+1\cdot \tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}+0\cdot \tfrac{t^n}{n!}$$

所以D在基 $1,t,\frac{t^2}{2!},\cdots,\frac{t^n}{n!}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$$

例 n维线性空间V的恒等变换 E 在V的任一基下的矩阵是n阶单位矩阵$\boldsymbol{E}_n$；零变换O在V的任一基下的矩阵是零矩阵$\boldsymbol{O}$。

例 已知$\mathbf{R}^{2\times 2}$的两个线性变换

$$T_1(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XM},\quad T_2(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}k_1x_{11} & 0\\ 0 & k_2x_{22}\end{pmatrix}$$

$$\forall \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times 2},\quad \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

其中 k_1,k_2 为固定数。求 T_1+T_2，T_1T_2 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵。又问 T_1,T_2 是否可逆？若可逆， 求其在同一基下的矩阵。

解 因为

$$T_1(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad T_1(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$T_1(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\quad T_1(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

而

$$T_2(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}k_1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad T_2(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$T_2(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad T_2(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}0&0\\0&k_2\end{pmatrix}$$

所以T_1,T_2在该基下的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}k_1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&k_2\end{pmatrix}$$

例 已知$\mathbf{R}^{2\times 2}$的线性变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{XM},\quad \forall \boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{2\times 2},\quad \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$$

求T的值域与核的维数和基。

解 可求得T在$\mathbf{R}^{2\times 2}$的基$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\-2&-2&0&2\\0&0&2&0\\0&0&-2&0\end{pmatrix}$$

又可求得$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$,且$(0,-2,0,0)^{\mathrm T},(2,0,2,-2)^{\mathrm T}$是$\boldsymbol{A}$的列向量组的一个极大无关组，故$\dim\mathrm{R}(T)=2$,

T_1+T_2在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1+k_1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1+k_2\end{pmatrix}$$

T_1T_2在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}k_1&0&0&0\\k_1&0&0&0\\0&0&0&k_2\\0&0&0&k_2\end{pmatrix}$$

由于$\boldsymbol{A}$可逆，所以T_1可逆，且T_1^{-1}在该基下的矩阵为

且

$$-2\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix},\quad 2\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{21}-2\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}2&0\\2&-2\end{pmatrix}$$

是$\mathrm{R}(T)$的一个基。 又由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系为$(-1,1,0,0)^{\mathrm T}$，$(1,0,0,1)^{\mathrm T}$，故$\dim\mathrm{N}(T)=2$，且

$$-\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

是$\mathrm{N}(T)$的一个基。

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&0&0\\\frac12&-\frac12&0&0\\0&0&\frac12&\frac12\\0&0&\frac12&-\frac12\end{pmatrix}$$

例 设T是4维线性空间V的线性变换，又设T在V的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-2&-2&-2\\2&6&5&2\\0&0&-1&-2\\0&0&2&6\end{pmatrix}$$

求T在基

$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-\alpha_2+\alpha_3,\beta_4=-\alpha_3+\alpha_4$

下的矩阵。

解 **法1.** 因为

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boldsymbol{A}$$

又有 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boldsymbol{P}$，其中

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \text{且}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}T(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)&=T[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boldsymbol{P}]\\&=[T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)]\boldsymbol{P}\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boldsymbol{AP}\\&=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\end{aligned}$$

从而T在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&4&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix}$$

法2. 由 $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\boldsymbol{A}$ 知

$$T(\alpha_1)=-\alpha_1+2\alpha_2,$$
$$T(\alpha_2)=-2\alpha_1+6\alpha_2,$$
$$T(\alpha_3)=-2\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4,$$
$$T(\alpha_4)=-2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3+6\alpha_4$$

于是

$$T(\beta_1)=T(\alpha_1)=-\alpha_1+2\alpha_2=\beta_1+2\beta_2$$

$$\begin{aligned}T(\beta_2)&=-T(\alpha_1)+T(\alpha_2)=-\alpha_1+4\alpha_2\\&=3\beta_1+4\beta_2\\T(\beta_3)&=-T(\alpha_2)+T(\alpha_3)=-\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4\\&=\beta_3+2\beta_4\\T(\beta_4)&=-T(\alpha_3)+T(\alpha_4)=-3\alpha_2-\alpha_3+4\alpha_4\\&=3\beta_3+4\beta_4\end{aligned}$$

例 假定$\mathbf{R}^3$的线性变换T把基

$\alpha_1=(1,0,1)$，$\alpha_2=(2,1,0)$，$\alpha_3=(1,1,1)$

变成基

$\beta_1=(1,2,-1)$，$\beta_2=(2,2,-1)$，$\beta_3=(2,-1,-1)$

即 $T(\alpha_i)=\beta_i\ (i=1,2,3)$。试求$T$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的矩阵。

解 因为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{A}$，
$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\boldsymbol{B}$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

所以

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{C}$$

即由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\1&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

由$T(\alpha_i)=\beta_i\ \ (i=1,2,3)$ 得

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{C}$$

可见T在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为$\boldsymbol{C}$。又因为

$$\begin{aligned}T(\beta_1,\beta_2,\beta_3)&=T[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{C}]\\&=T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\boldsymbol{C}\\&=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

故T在基β_1,β_2,β_3下的矩阵仍为$\boldsymbol{C}$。

例 已知$\mathbf{R}^{2\times2}$的线性变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MXN}\quad \forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{2\times2}$$

其中 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

求T的特征值与特征向量。

解 取$\mathbf{R}^{2\times2}$的简单基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$，可求得

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\quad T(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix},\quad T(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

所以T在 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

又因为 $\det(A-\lambda E)=\lambda^2(\lambda-2)^2$，故$T$的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=\lambda_4=2$$

对于 $\lambda=0$，求解 $Ax=\mathbf{0}$ 得基础解系

$$(1,1,0,0)^{\mathrm T},\quad (0,0,1,1)^{\mathrm T}$$

故T 对应特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的两个线性无关的特征向量为

$$X_1=E_{11}+E_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ X_2=E_{21}+E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

而对于 $\lambda=2$，求解$(A-2E)x=\mathbf{0}$得基础解系

$$(0,0,-1,1)^{\mathrm T}$$

故T 对应特征值 $\lambda_3=\lambda_4=2$ 的特征向量为

$$X_3=-E_{21}+E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

例 已知$P_2[t]$的线性变换

$$T(a+bt+ct^2)=(4a+6b)-(3a+5b)t-(3a+6b-c)t^2$$
$$\forall a+bt+ct^2\in P_2[t]$$

求T 的特征值与特征向量。

解 取$P_2[t]$的简单基 $1,t,t^2$，则由

$$\begin{cases}T(1)=4-3t-3t^2\\T(t)=6-5t-6t^2\\T(t^2)=t^2\end{cases}$$

得T在该基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$

又因为$\det(A-\lambda E)=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，故$T$的特征值为

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$$

对于$\lambda_1=-2$，求解 $(A+2E)x=\mathbf{0}$ 得基础解系

$$(-1,1,1)^{\mathrm T}$$

故T对应特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为

$$f_1=-1+t+t^2$$

对于$\lambda_2=\lambda_3=1$，求解$(A-E)x=\mathbf{0}$ 得基础解系

$$(-2,1,0)^{\mathrm T},\quad (0,0,1)^{\mathrm T}$$

故T对应特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$ 有两个线性无关的特征向量

$$f_2=-2+t,\quad f_3=t^2$$

例 已知$P_2[t]$的线性变换

$$T(a+bt+ct^2)=(4a+6b)-(3a+5b)t-(3a+6b-c)t^2$$
$$\forall a+bt+ct^2\in P_2[t]$$

试求$P_2[t]$的一个基，使T在该基下的矩阵为对角阵。

解 取$P_2[t]$的简单基 $1,t,t^2$，可求得 T在该基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$

又可求得A的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$；

对应 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为 $p_1=(-1,1,1)^{\mathrm T}$；

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关特征向量为

$$p_2=(-2,1,0)^{\mathrm T},\ p_3=(0,0,1)^{\mathrm T}$$

故相似变换阵

$$P=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\ \text{使}\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\Lambda$$

由 $(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)P$ 得$P_2[t]$的基

$$f_1=-1+t+t^2,\ f_2=-2+t,\ f_3=t^2$$

T在该基下的矩阵为Λ。

例 给定V^6的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_6$ 及线性变换

$$T(\alpha_i)=\alpha_i+2\alpha_{7-i}\quad(i=1,2,\cdots,6)$$

1）求T的全部特征值与特征向量；

2）求V的一组基，使T在该基下的矩阵为对角阵。

解 1）由于 $T(\alpha_1,\cdots,\alpha_6)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_6)\boldsymbol{A}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&&&&2\\&1&&&2&\\&&1&2&&\\&&2&1&&\\&2&&&1&\\2&&&&&1\end{pmatrix}$$

可求得 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=[(\lambda-1)^2-4]^3=(\lambda+1)^3(\lambda-3)^3$

故$\boldsymbol{A}$的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1,\quad \lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=3$$

对应特征值-1的线性无关特征向量为

$(-1,0,0,0,0,1)^{\mathrm T}$，$(0,-1,0,0,1,0)^{\mathrm T}$，$(0,0,-1,1,0,0)^{\mathrm T}$

对应特征值3的线性无关特征向量为

$(1,0,0,0,0,1)^{\mathrm T}$， $(0,1,0,0,1,0)^{\mathrm T}$， $(0,0,1,1,0,0)^{\mathrm T}$

故T的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1,\quad \lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=3$$

对应特征值-1的线性无关特征向量为

$$\beta_1=-\alpha_1+\alpha_6,\ \beta_2=-\alpha_2+\alpha_5,\ \beta_3=-\alpha_3+\alpha_4$$

全部特征向量为

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3\quad(k_1,k_2,k_3\text{不全为零})$$

对应特征值3的线性无关特征向量为

$$\beta_4=\alpha_1+\alpha_6,\quad \beta_5=\alpha_2+\alpha_5,\quad \beta_6=\alpha_3+\alpha_4$$

全部特征向量为

$$k_4\beta_4+k_5\beta_5+k_6\beta_6\quad(k_4,k_5,k_6\text{不全为零})$$

2）T在V的一组基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,3,3,3)$$

§6、欧氏空间

例 在n维向量空间$\mathbf{R}^n$中，对任意

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T},\quad \beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^n$$

规定 $$[\alpha,\beta]=\sum_{i=1}^n x_iy_i=\alpha^{\mathrm T}\beta$$

易证它是内积，$\mathbf{R}^n$按上述内积构成欧氏空间。

也称上述内积为$\mathbf{R}^n$的**标准内积**。

如果规定 $$[\alpha,\beta]=\sum_{i=1}^n k_ix_iy_i=\alpha^{\mathrm T}\boldsymbol{\Lambda}\beta$$

其中 $k_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$， 而 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(k_1,\cdots,k_n)$，则它也是内积，$\mathbf{R}^n$按此内积也构成欧氏空间。

更进一步，若规定$[\alpha,\beta]=\alpha^{\mathrm T}\boldsymbol{A}\beta$，其中$\boldsymbol{A}$是$n$阶正定矩阵， 则它也是内积。

例 在mn维矩阵空间$\mathbf{R}^{m\times n}$中，对任意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$， 规定

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}\quad(\text{标准内积})$$

或 $$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n k_{ij}a_{ij}b_{ij}\quad(k_{ij}>0)$$

则它们都是内积，$\mathbf{R}^{m\times n}$按这些内积构成欧氏空间。

例 在实线性空间$C[a,b]$中，规定

$$[f(t),g(t)]=\int_a^b f(\tau)g(\tau)\,\mathrm d\tau$$

或 $$[f(t),g(t)]=\int_a^b w(\tau)f(\tau)g(\tau)\,\mathrm d\tau\qquad \forall f(t),g(t)\in C[a,b]$$

其中 $w(t)\in C[a,b]$ 且 $w(t)>0$。

由定积分性质易知它们是内积。

例 在线性空间$P_n[t]$中，对任意 $f(t),g(t)\in P_n[t]$

规定 $$[f(t),g(t)]=\int_0^1 f(\tau)g(\tau)\,\mathrm d\tau$$

或 $$[f(t),g(t)]=\int_{-1}^1 f(\tau)g(\tau)\,\mathrm d\tau$$

或 $$[f(t),g(t)]=\sum_{i=1}^{n+1}f(i)g(i)$$

它们都是内积。

证 对第三种情形，仅证非负性。显然

$$[f(t),f(t)]=\sum_{i=1}^{n+1}f^2(i)\geq 0$$

若$[f(t),f(t)]=0$，则 $f(1)=f(2)=\cdots=f(n+1)=0$

法1 根据代数学基本定理知，n次多项式在复数域上最多只有n个根，而 $f(x)$ 有n+1个根，故 $f(x)=0$。

法2 设 $f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$，得

如在$\mathbf{R}^n$中

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

或 $$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}k_ix_i^2}\quad(k_i>0)$$

在$\mathbf{R}^{m\times n}$中，$$\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}$$

在C$[a,b]$中，$$\|f(t)\|=\sqrt{\int_a^b f^2(\tau)\mathrm{d}\tau}$$

$$\begin{cases}f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n=0\\ f(2)=a_0+2a_1+\cdots+2^na_n=0\\ \quad\cdots\cdots\\ f(n+1)=a_0+(n+1)a_1+\cdots+(n+1)^na_n=0\end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&n+1&\cdots&(n+1)^n\end{vmatrix}\neq 0$$

所以只有 $a_0=\cdots=a_n=0$，即 $f(t)=0$。

例 给定n维实线性空间V的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，对任意$\alpha\in$V有 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$，即$\alpha$对应列向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，规定

$$\|\alpha\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\ \text{或}\ \|\alpha\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}k_ix_i^2}\quad(k_i>0)$$

则它们是元素α的长度。

由上面例子可见，在同一实线性空间上可以构造不同的内积，因而构成不同的欧氏空间。

例 设V是n维实线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V的一个基，对任意 $\alpha,\beta\in$V 有

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$$
$$\beta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n$$

规定 $$[\alpha,\beta]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

或 $$[\alpha,\beta]=\sum_{i=1}^{n}k_ix_iy_i\quad(k_i>0)$$

则它们是内积。

例 在实线性空间 C$[-\pi,\pi]$中定义内积为

$$[f(t),g(t)]=\int_{-\pi}^{\pi}f(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\qquad\forall f(t),g(t)\in\mathrm{C}[-\pi,\pi]$$

试证明函数组

$$1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,\cdots,\cos nt,\sin nt,\cdots$$

是两两正交的，但它们不是单位元素。

证 可求得

$$[\sin mt,\sin nt]=\int_{-\pi}^{\pi}\sin m\tau\sin n\tau\,\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)\tau-\cos(m+n)\tau]\mathrm{d}\tau=0$$
$$(m\neq n)$$

$$[\cos mt,\cos nt]=\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\tau\cos n\tau\,\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)\tau+\cos(m+n)\tau]\,\mathrm{d}\tau=0 \quad (m\neq n)$$
$$[\sin mt,\cos nt]=\int_{-\pi}^{\pi}\sin m\tau\cos n\tau\,\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)\tau+\sin(m-n)\tau]\,\mathrm{d}\tau=0$$
$$[1,\cos nt]=\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\tau\,\mathrm{d}\tau=0$$
$$[1,\sin nt]=\int_{-\pi}^{\pi}\sin n\tau\,\mathrm{d}\tau=0$$
于是该函数组两两正交。又有

$$\|1\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\tau}=\sqrt{2\pi}$$
$$\|\sin mt\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 m\tau\,\mathrm{d}\tau}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2m\tau)\,\mathrm{d}\tau}=\sqrt{\pi}$$
$$\|\cos nt\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 n\tau\,\mathrm{d}\tau}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2n\tau)\,\mathrm{d}\tau}=\sqrt{\pi}$$
故它们不是单位元素。

例 设欧氏空间V^3的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}$$

则$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$与$\beta_2=\alpha_2+2\alpha_3$的内积$[\beta_1,\beta_2]=$ $\underline{-12}$

分析 法1 由度量矩阵定义知

$[\alpha_1,\alpha_2]$=2，$[\alpha_1,\alpha_3]$=-4，$[\alpha_2,\alpha_2]$=1，$[\alpha_2,\alpha_3]$=-2

从而

$$[\beta_1,\beta_2]=[\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3]$$
$$=[\alpha_1,\alpha_2]+2[\alpha_1,\alpha_3]+2[\alpha_2,\alpha_2]+4[\alpha_2,\alpha_3]$$
$$=2+2\times(-4)+2\times1+4\times(-2)=-12$$

法2 由度量矩阵的性质得

$$[\beta_1,\beta_2]=(1,2,0)A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=(1,2,0)\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$
$$=-12$$

例 已知$\mathbf{R}^{2\times2}$按内积

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}\,,\qquad \forall\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2}\,,\ \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{2\times2}$$

构成欧氏空间。给定$\mathbf{R}^{2\times2}$的一个基

$$\boldsymbol{G}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

试求一个标准正交基。

解 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{G}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{G}_2-\frac{[\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{A}_1]}{[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1]}\boldsymbol{A}_1$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{G}_3-\frac{[\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{A}_1]}{[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1]}\boldsymbol{A}_1-\frac{[\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{A}_2]}{[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2]}\boldsymbol{A}_2$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{G}_4-\frac{[\boldsymbol{G}_4,\boldsymbol{A}_1]}{[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1]}\boldsymbol{A}_1-\frac{[\boldsymbol{G}_4,\boldsymbol{A}_2]}{[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2]}\boldsymbol{A}_2-\frac{[\boldsymbol{G}_4,\boldsymbol{A}_3]}{[\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3]}\boldsymbol{A}_3$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}-\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&\frac{3}{7}\\\frac{3}{7}&-\frac{6}{7}\end{pmatrix}$$

标准正交基为

$$B_1=\frac{1}{\|A_1\|}A_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},$$
$$B_2=\frac{1}{\|A_2\|}A_2=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}$$
$$B_3=\frac{1}{\|A_3\|}A_3=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}3&3\\-4&1\end{pmatrix},$$
$$B_4=\frac{1}{\|A_4\|}A_4=\frac{1}{\sqrt{63}}\begin{pmatrix}3&3\\3&-6\end{pmatrix}$$

例 已知3维欧氏空间V的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，且该基的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&4\end{pmatrix}$$

求V的正交基 β_1,β_2,β_3 和标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$。

解 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\alpha_1]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$$

例 已知$P_2[t]$按内积

$$[f(t),g(t)]=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

构成欧氏空间，试求$P_2[t]$的一个标准正交基。

解 取$P_2[t]$的基 $1,t,t^2$，则

$$f_1=1$$

$$f_2=t-\frac{[t,f_1]}{[f_1,f_1]}f_1=t-\frac{\int_0^1 t\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 1\,\mathrm{d}t}f_1=t-\frac{1}{2}$$

$$f_3=t^2-\frac{[t^2,f_1]}{[f_1,f_1]}f_1-\frac{[t^2,f_2]}{[f_2,f_2]}f_2=t^2-t+\frac{1}{6}$$

$$=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\alpha_1]}{[\alpha_1,\alpha_1]}\alpha_1-\frac{[\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2]}{[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2]}(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=\alpha_3-\alpha_1-(\alpha_1+\alpha_2)=-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$$

单位化得标准正交基

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{[\beta_1,\beta_1]}}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{[\alpha_1,\alpha_1]}}\alpha_1=\alpha_1$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{[\beta_2,\beta_2]}}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2]}}(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$=\alpha_1+\alpha_2$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{[\beta_3,\beta_3]}}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$$

标准正交基为

$$g_1=\frac{1}{\sqrt{[f_1,f_1]}}f_1=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1\,\mathrm{d}t}}f_1=1$$

$$g_2=\frac{1}{\sqrt{[f_2,f_2]}}f_2=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1(t-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}t}}f_2=\sqrt{12}(t-\frac{1}{2})$$

$$g_3=\frac{1}{\sqrt{[f_3,f_3]}}f_3=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1(t^2-t+\frac{1}{6})^2\,\mathrm{d}t}}f_3$$
$$=\sqrt{180}(t^2-t+\frac{1}{6})$$

例 设W_1,W_2是欧氏空间V的子空间，且$W_1\perp W_2$，证明 $W_1\cap W_2=\{\theta\}$。

证 设$\alpha\in W_1\cap W_2$，则$\alpha\in W_1$且$\alpha\in W_2$。又$W_1\perp W_2$，所以$[\alpha,\alpha]=0$，即$\alpha=\theta$，故

$$W_1\cap W_2=\{\theta\}$$

例 设W是欧氏空间$\mathbf{R}^3$中由向量

$$\alpha_1=(1,1,2),\quad \alpha_2=(2,2,3)$$

生成的子空间，求$W^{\perp}$。

解 设$\alpha=(x_1,x_2,x_3)\in W^{\perp}$，则

$$[\alpha,\alpha_1]=[\alpha,\alpha_2]=0$$

即$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0\\2x_1+2x_2+3x_3=0\end{cases}$，同解方程组为$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}$，

通解为$\begin{cases}x_1=-k\\x_2=k\\x_3=0\end{cases}$；故$\alpha=k(-1,1,0)$，从而$W^{\perp}=L(\beta)$，

其中$\beta=(-1,1,0)$。

例 欧氏空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$的内积为

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}$$

子空间$W=L(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)$，其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

求$W^{\perp}$的一个标准正交基。

解 设$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in W^{\perp}$,则

$$\begin{cases}[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{X}]=x_1+x_2=0\\[\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{X}]=x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

其基础解系为 $(1,-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

于是$W^{\perp}$的基为 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

正交化 $\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$

再单位化得$W^{\perp}$的标准正交基

$$\boldsymbol{D}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

例 设$\boldsymbol{Q}$是n阶正交矩阵，对任意$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，规定

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

证明T是$\mathbf{R}^n$的正交变换。

证 对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$有

$$[T(\boldsymbol{x}),T(\boldsymbol{y})]=[\boldsymbol{Qx},\boldsymbol{Qy}]=(\boldsymbol{Qx})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Qy})$$
$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Qy}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$$

从而T是正交变换。

例 已知$\mathbf{R}^n$的线性变换

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$$

其中$\boldsymbol{A}$是n阶实对称矩阵。证明T是$\mathbf{R}^n$的对称变换。

证 对任意$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$有

$$[T(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}]=[\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{y}]=(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ay}]=[\boldsymbol{x},T(\boldsymbol{y})]$$

从而T是对称变换。

例 已知矩阵空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$的子空间

$$W=\left\{\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\,\middle|\,x_3-x_4=0,\quad x_i\in\mathbf{R}\right\}$$

$\mathbf{R}^{2\times 2}$中的内积为

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij},\ \forall\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$$

W中的线性变换为

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XB},\ \forall\boldsymbol{X}\in W,\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$$

（1）求子空间W的一个标准正交基；

（2）验证T是W中的对称变换；

（3）求W的一个标准正交基，使T在该基下的矩阵为对角矩阵。

解（1）W的基为

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

它们已正交，单位化得W的一个标准正交基

$$B_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

（2）可求得

$$T(B_1)=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=B_1+2B_2$$

$$T(B_2)=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix}=2B_1+B_2$$

$$T(B_3)=\begin{pmatrix}0&0\\\frac{3}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=3B_3$$

可见T在标准正交基 B_1,B_2,B_3 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

由于A是实对称矩阵，所以T是W中的对称变换。

（3）可求得$\det(A-\lambda E)=-(\lambda-3)^2(\lambda+1)$，从而$A$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=-1$。

对应 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 的特征向量为

$$p_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad p_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}\quad（已正交）$$

对应 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $p_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$。

故正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}$ 使

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&-1\end{pmatrix}$$

由 $(D_1,D_2,D_3)=(B_1,B_2,B_3)Q$ 得W的标准正交基

$$D_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(B_1+B_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$D_2=B_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$D_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-B_1+B_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

T在该基下的矩阵为Λ。

例 设欧氏空间V^n的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵为G，正交变换T在该基下的矩阵为A，证明：

$$A^{\mathrm{T}}GA=G$$

证 法1 由 $T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$ 知

$$T(\alpha_i)=\alpha_1a_{1i}+\alpha_2a_{2i}+\cdots+\alpha_na_{ni}$$

设 $G=(g_{ij})_{n\times n}$，则有

$$\begin{aligned}g_{ij}&=[\alpha_i,\alpha_j]=[T(\alpha_i),T(\alpha_j)]\\&=[\alpha_1a_{1i}+\cdots+\alpha_na_{ni},\alpha_1a_{1j}+\cdots+\alpha_na_{nj}]\\&=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{si}[\alpha_s,\alpha_t]a_{tj}\end{aligned}$$

$$=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})G\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$$

故 $A^{\mathrm{T}}GA=G$。

法2 由于T是正交变换，从而 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 也是V^n的基（不一定是标准正交基）。又由

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

知，从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 的过渡矩阵为A，故基 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 的度量矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}$$

但

$$\boldsymbol{B} = ([T(\boldsymbol{\alpha}_i), T(\boldsymbol{\alpha}_j)])_{n\times n} = ([\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j])_{n\times n} = \boldsymbol{G}$$

于是 $$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}$$