

第14章 稳恒电流的磁场



磁悬浮列车以电磁力将列车浮起，使列车在高速行驶中始终与轨道保持1厘米左右的距离，由于避免了与轨道的直接接触，行驶速度也大大提高，可达到550km/h或更高。

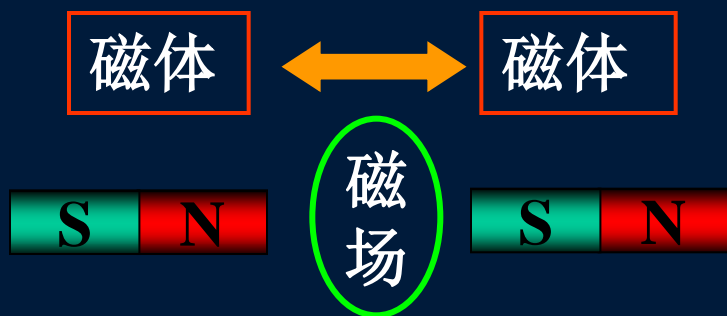
§ 14.1 磁场 磁感应强度

主要内容:

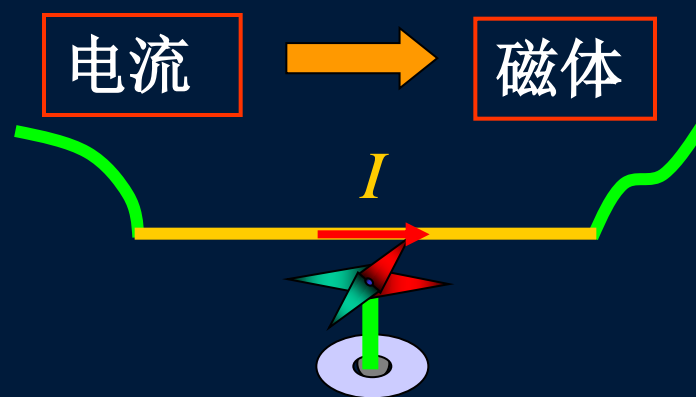
1. 基本磁现象
2. 磁场
3. 磁感应强度

14.1.1 基本磁现象

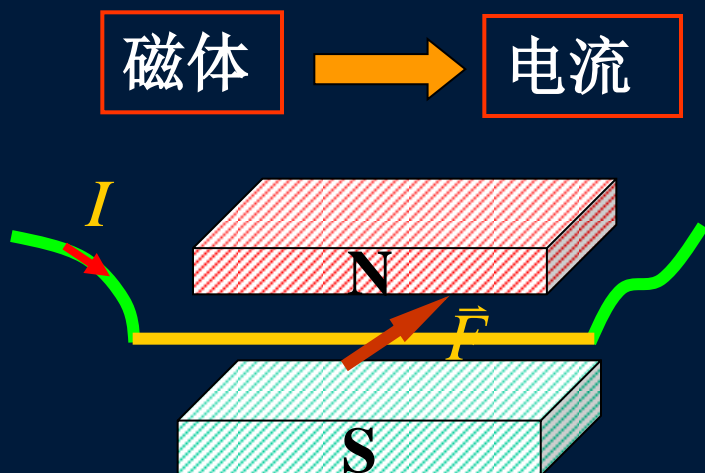
• 磁现象(1)



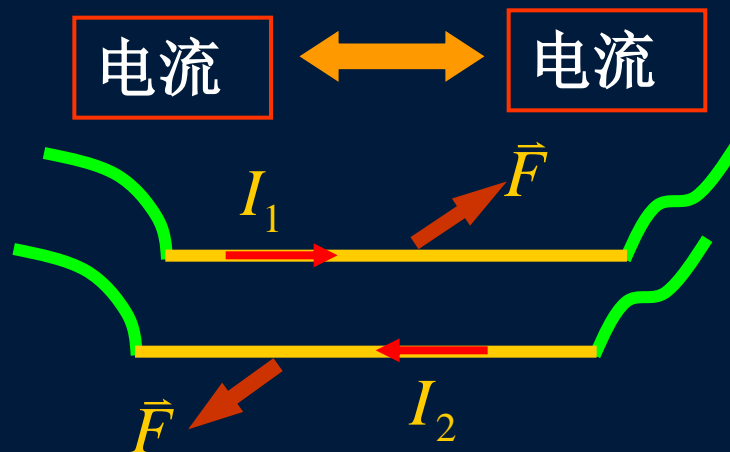
• 磁现象(2)



• 磁现象(3)



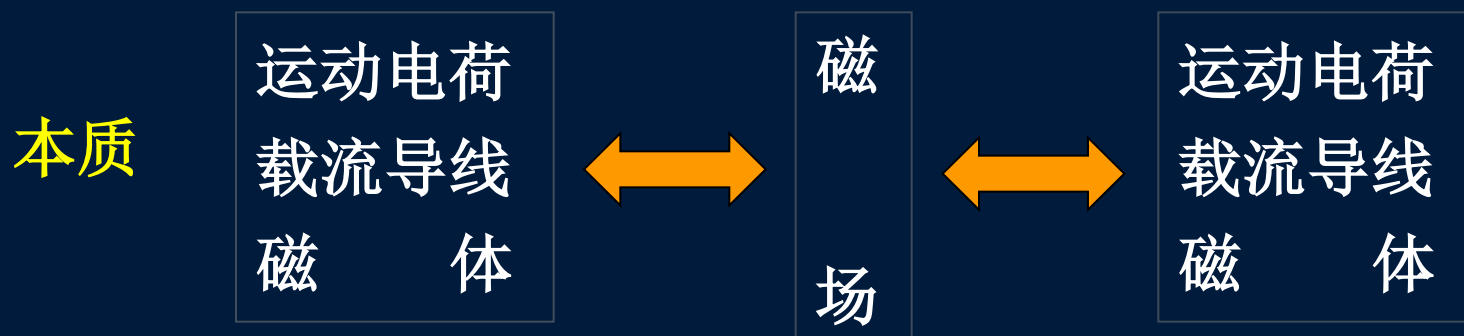
• 磁现象(4)



14.1.2 磁场 磁感应强度

1. 磁场

安培提出：一切磁现象起源于电荷运动



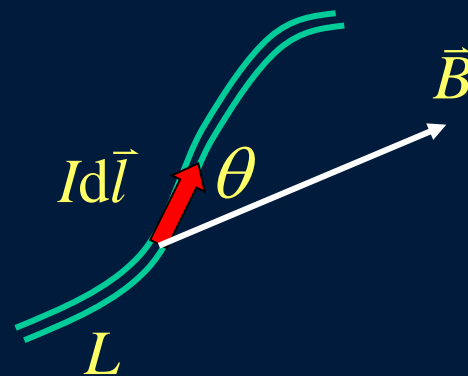
磁场的性质

- (1) 对运动电荷(或电流)有力的作用
- (2) 磁场有能量

2. 磁感应强度

描述恒定磁场引入电流元模型 $Id\vec{l}$

$$dF \propto Idl \sin \theta$$



定义磁感应强度的方向: 沿该点处静止小磁针的N极指向

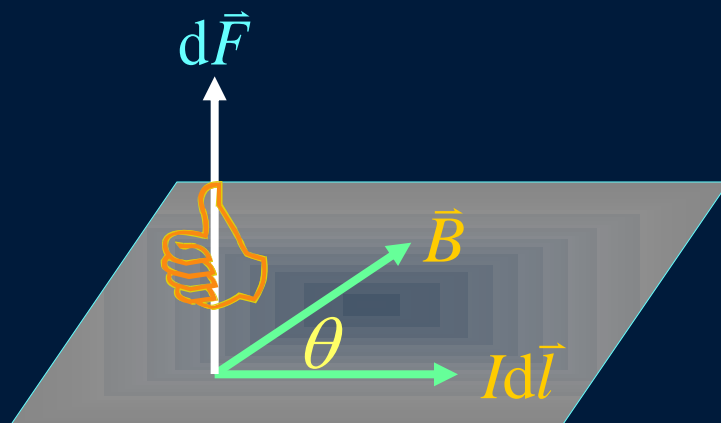
或 $dF = 0$ 的方向

定义磁感应强度的大小: $B = \frac{dF}{Idl \sin \theta}$

磁场力 $d\vec{F}$ 与电流元 $I d\vec{l}$ 和磁感应强度 \vec{B} 满足右手螺旋关系

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

——安培力公式



➤ 说明

磁感应强度有各种定义方法, 除上述方法外, 我们还可以用运动电荷在磁场中的受力来定义。

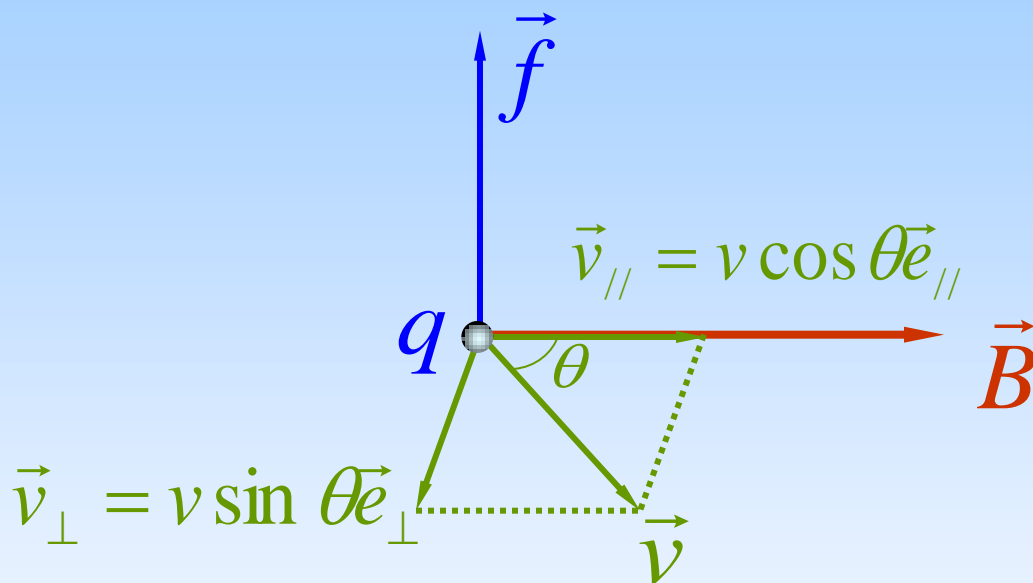
从对运动电荷作用力的角度来描述磁场的性质。

磁场对运动电荷作用的规律：

- (1) 在磁场中任意一点都存在一个特定的方向，当电荷沿着这个方向运动时受力为0；
- (2) 在磁场中电荷沿其它方向运动时，电荷受磁场力的作用，其大小除与电量 q 和电荷运动速度成正比外，还与速度和上述特定方向的夹角的正弦成正比。

$$f \propto qv \sin \theta$$

(3) 作用力的方向与速度和特定方向构成的平面垂直。可由右手定则确定。



由运动电荷作用的规律规定：

(1) 上述特定方向是由磁场决定的，与运动电荷无关，规定它为描述磁场作用性质的物理量**磁感应强度** \vec{B} 的方向。

(2) 由于 $f \propto qv \sin \theta$

在任意场点: $\frac{f}{qv \sin \theta}$

是与运动电荷无关, 只与场点的性质有关的数值。

故定义磁感应强度的大小为:

$$B = \frac{f}{qv \sin \theta} = \frac{f}{qv_{\perp}}$$

单位: 特斯拉 (T) , $1\text{T} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{S}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$

高斯 (G) , $1\text{G} = 10^{-4}\text{T}$

$$f = Bqv \sin \theta = Bqv_{\perp}$$

磁力的大小仅取决于电荷的大小和其运动速度在磁感应强度方向的垂直分量。

(3) \vec{B} 的方向与受力 \vec{f} 和电荷速度 \vec{v} 的方向满足右手螺旋关系。

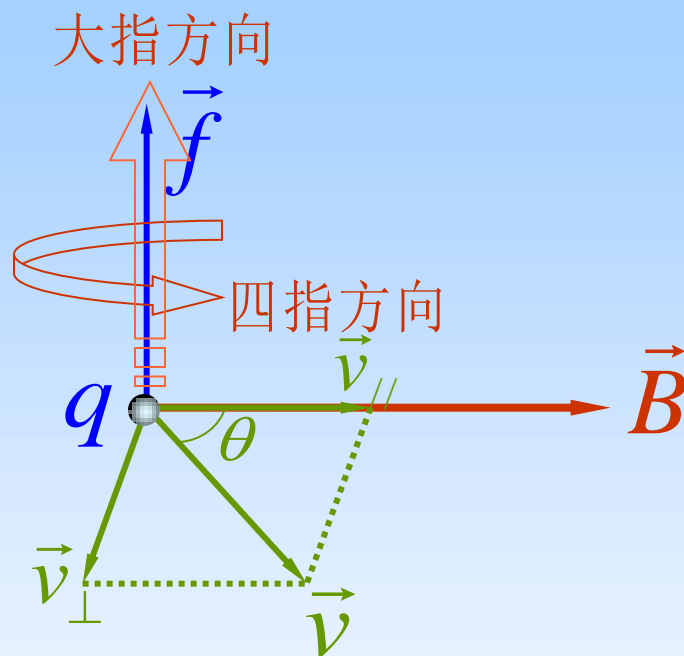
$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

q : 运动电荷的带电量;

\vec{f} : 运动电荷在磁场中的受力;

\vec{v} : 运动电荷的速度;

\vec{B} : 磁场的磁感应强度。



磁感应强度：单位正电荷在磁场方向上具有单位垂直速度分量时，所受到的磁场力。其方向与力和运动电荷速度方向构成右手螺旋关系。

讨论：

(1) 磁感应强度是从作用力的角度反映磁场特性的物理量，它只与产生磁场的运动电荷有关。

(2) 对于在场中不同的运动电荷，磁力的大小仅取决于电荷的大小和其运动速度在磁感应强度方向的垂直分量。

(3) 磁场力与电场力比较有着不同的特点：电场力对于静止和运动的电荷产生同样的作用力，与电荷速度无关。磁场只对运动电荷产生作用力，磁力是一种与电荷速度有关的作用力。

(4) 电场力的方向与电场强度 \vec{E} 方向一致，而磁场力的方向与磁感应强度垂直，且涉及2个矢量 \vec{v} 和 \vec{B} 。

(5) 磁感应强度也服从叠加原理—磁场具有叠加特性。

§ 14.2 毕奥—萨伐尔定律

主要内容:

1. 毕奥—萨伐尔定律
2. 毕奥—萨伐尔定律应用举例
 - 载流直导线的磁场
 - 载流圆线圈轴线上的磁场
 - 绕轴旋转的带电圆盘轴线上的磁场和圆盘的磁矩
 - 载流螺线管轴线上的磁场
3. 运动电荷的磁场

14.2.1 毕奥—萨伐尔定律

基本思路: $I \longrightarrow Id\vec{l} \xrightarrow{?} d\vec{B} \longrightarrow \vec{B} = \int d\vec{B}$

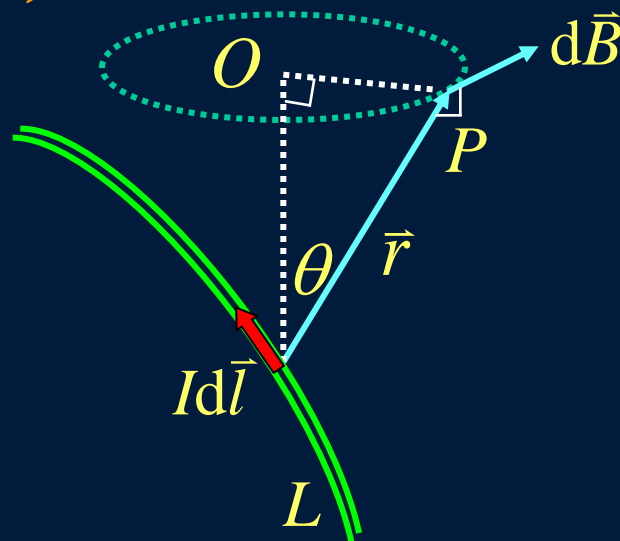
毕—萨定律:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ (真空磁导率)

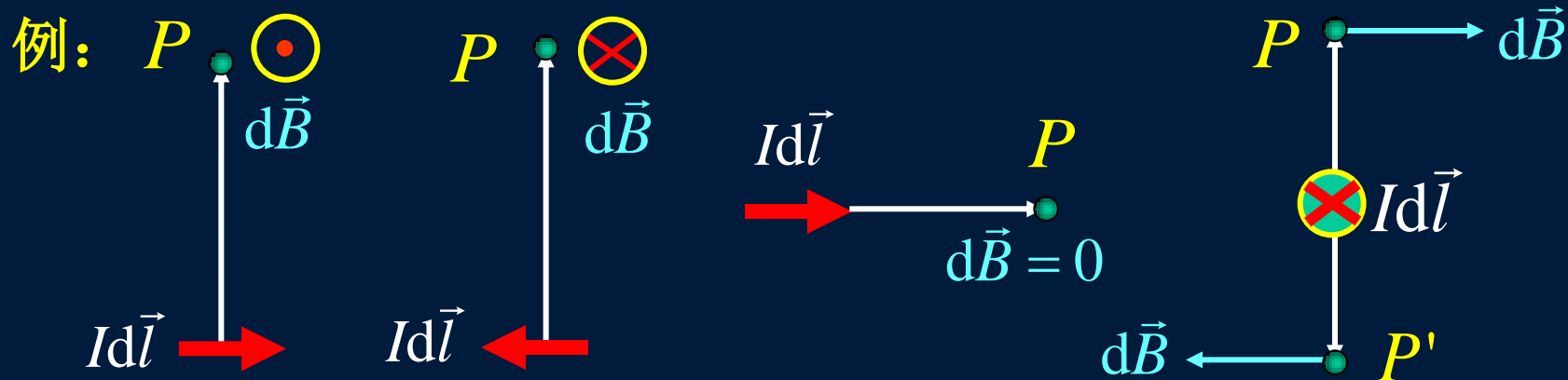
大小: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$

方向: 右螺旋法则



➤ 讨论

(1) 注意 $d\vec{B}$ 的方向 —— 右手法则



(2) 对任意一段有限电流，其产生的磁感应强度

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = \int dB_x \\ B_y = \int dB_y \\ B_z = \int dB_z \end{array} \right.$$

14.2.2 毕奥—萨伐尔定律应用举例

例 在长为 L 的一段直导线中，通有稳恒电流 I

求 距离载流直导线为 a 处 P 点的磁感应强度

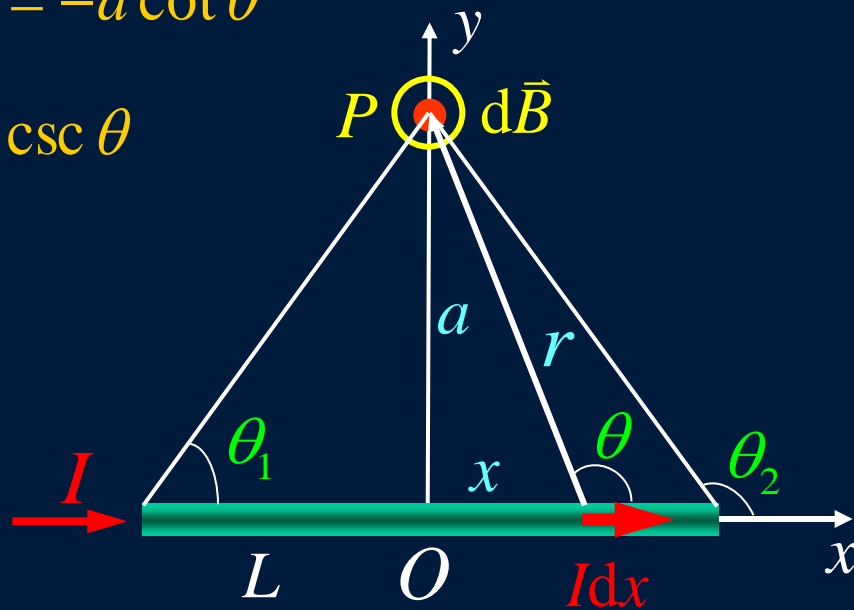
解
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idx \sin \theta}{r^2} \quad B = \int dB = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idx \sin \theta}{r^2}$$

根据几何关系 $x = a \cot(\pi - \theta) = -a \cot \theta$

$$dx = a \csc^2 \theta d\theta$$

$$r = a \csc \theta$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

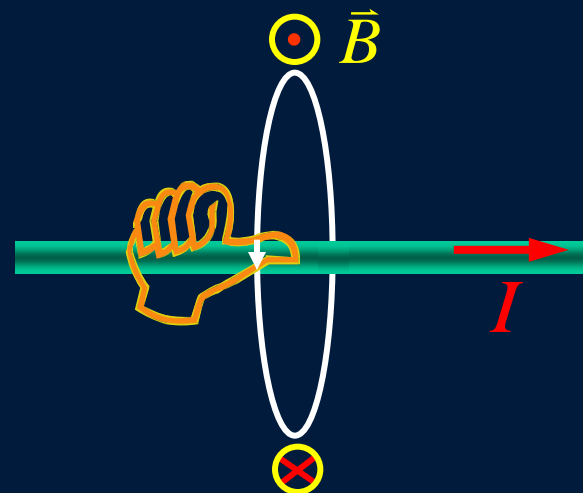


➤ 讨论

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

(1) 无限长直导线 $\theta_1 \rightarrow 0$ $\theta_2 \rightarrow \pi$

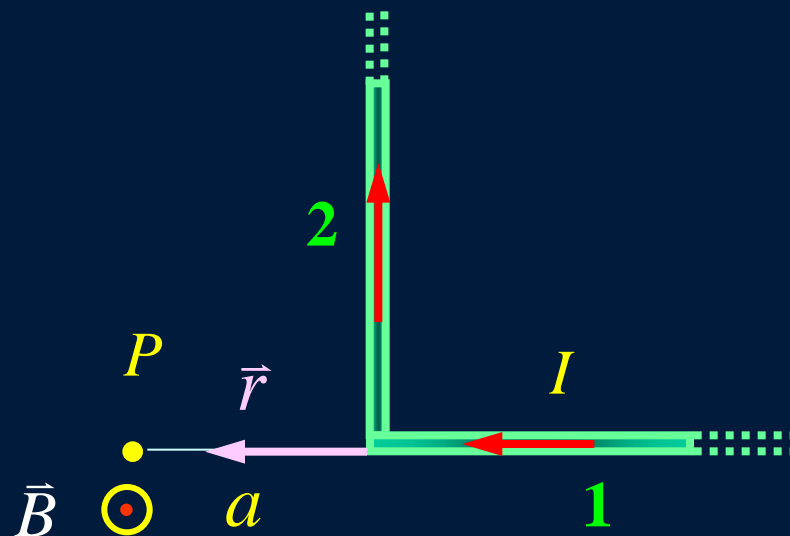
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \text{ 方向: 右螺旋法则}$$



(2) 任意形状直导线

$$B_1 = 0$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos 90^\circ - \cos 180^\circ) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \end{aligned}$$

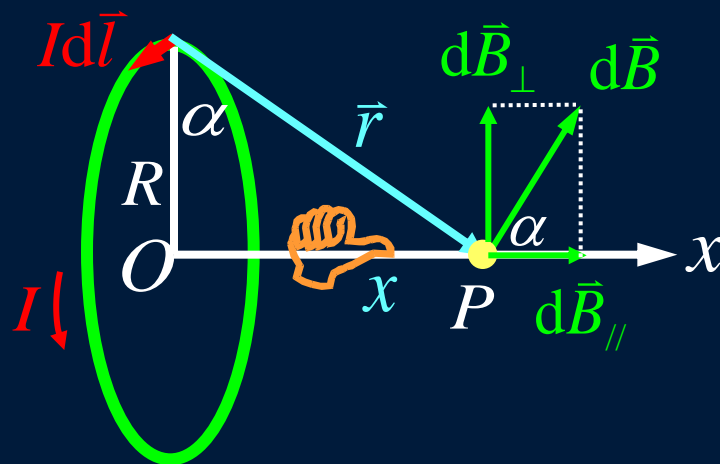


例 有一半径为 R 的圆线圈，通有电流 I

求 轴线上一点 P 的磁感应强度

解
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2}$$

根据对称性 $B_{\perp} = 0$



$$B = \int dB_{\parallel} = \int dB \cos \alpha = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \cos \alpha = \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{4\pi r^2} 2\pi R$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} \quad r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad \text{方向满足右螺旋法则}$$

➤ 讨论 $B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$

(1) $x = 0$ 载流圆线圈的圆心处 $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

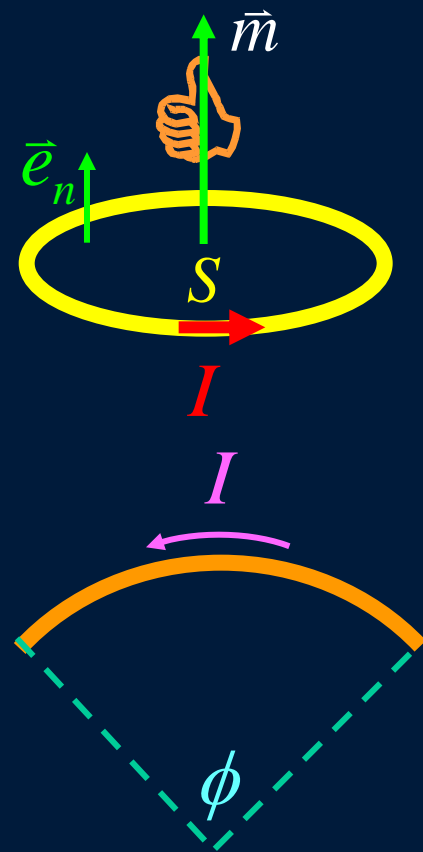
(2) $x \gg R$ 轴线上的磁感应强度

$$B \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} = \frac{\mu_0 I S}{2\pi x^3} \quad \text{定义} \quad \vec{m} = IS\vec{e}_n \quad \text{磁矩}$$

磁感应强度 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{x^3}$

(3) 一段圆弧在圆心处产生的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR\phi}{R^2}$$



例 半径为 R 的均匀带电圆盘, 带电为 $+q$, 圆盘以匀角速度 ω 绕通过圆心垂直于圆盘的轴转动.

求 圆盘轴线上的磁场和圆盘的磁矩

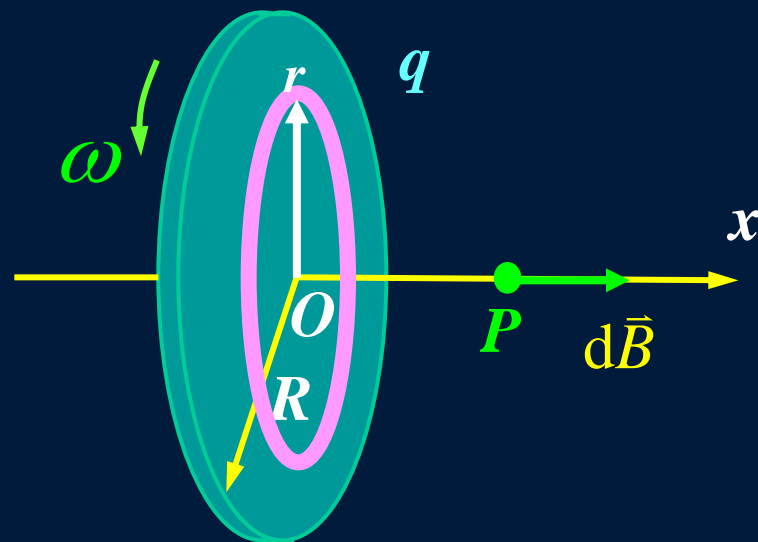
解 $\sigma = q / \pi R^2$

$$dq = \sigma \cdot 2\pi r dr = \omega \sigma r dr$$

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} dq$$

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 dI}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3 dr}{2(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right]$$



圆盘圆心处, $x = 0$

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} R$$

圆盘的磁矩 $dm = \pi r^2 dI \vec{n} = \pi r^3 \omega \sigma dr$

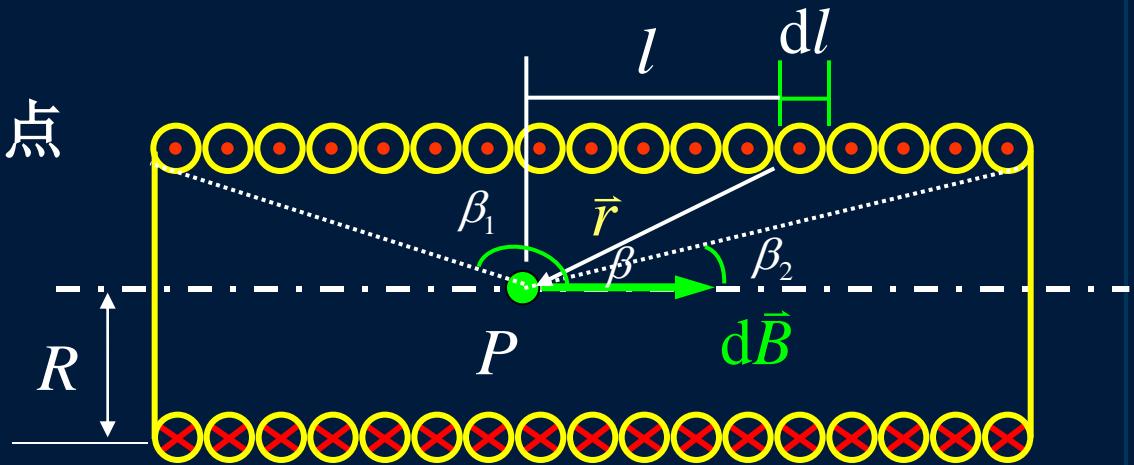
$$m = \int dm = \int_0^R \pi r^3 \omega \sigma dr = \frac{\pi \omega \sigma R^4}{4}$$

方向沿 x 轴正向

例 设有一均匀密绕螺线管, 半径为 R , 单位长度上的匝数为 n , 螺线管通有电流 I

求 载流螺线管轴线上一点 P 的磁感应强度 B

解 $dI' = Indl$



$$dB = \frac{\mu_0 R^2 dI'}{2(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 R^2 Indl}{2(R^2 + l^2)^{3/2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} l = R \cot \beta \\ R^2 + l^2 = R^2 \csc^2 \beta \end{array} \right.$$

$$dB = -\frac{\mu_0}{2} nI \sin \beta d\beta$$

$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0}{2} nI \sin \beta d\beta = \frac{\mu_0 nI}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1)$$

➤ 讨论

(1) 无限长载流螺线管

$$\beta_1 \rightarrow \pi, \quad \beta_2 \rightarrow 0 \quad \longrightarrow \quad B = \mu_0 n I$$

(2) 半无限长载流螺线管

$$\beta_1 \rightarrow \pi/2, \quad \beta_2 \rightarrow 0 \quad \longrightarrow \quad B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

14.2.3 运动电荷的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

电荷密度

电流强度 $I = nqvs$

电流元中包含的载流子数 $dN = nsdl$

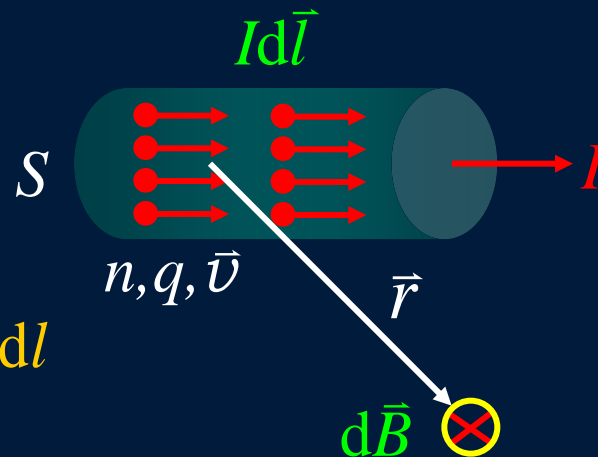
$$Idl = nqvSdl = qvdN$$

$$Id\vec{l} = q\vec{v}dN$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} dN$$

一个电荷产生的磁场

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$



例 如图的导线，已知电荷线密度为 λ ，当绕 O 点以 ω 转动时
求 O 点的磁感应强度

解 线段1:

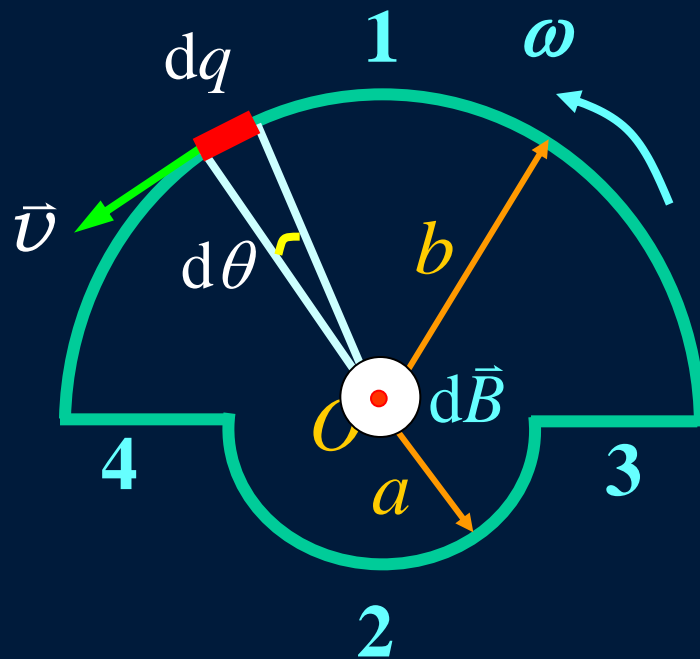
$$dq = \lambda dl = \lambda b d\theta$$

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \cdot \omega b}{b^2}$$

$$= \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} d\theta$$

$$B_1 = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} d\theta = \frac{1}{4} \mu_0 \lambda \omega$$

线段2: 同理 $B_2 = \frac{1}{4} \mu_0 \lambda \omega$



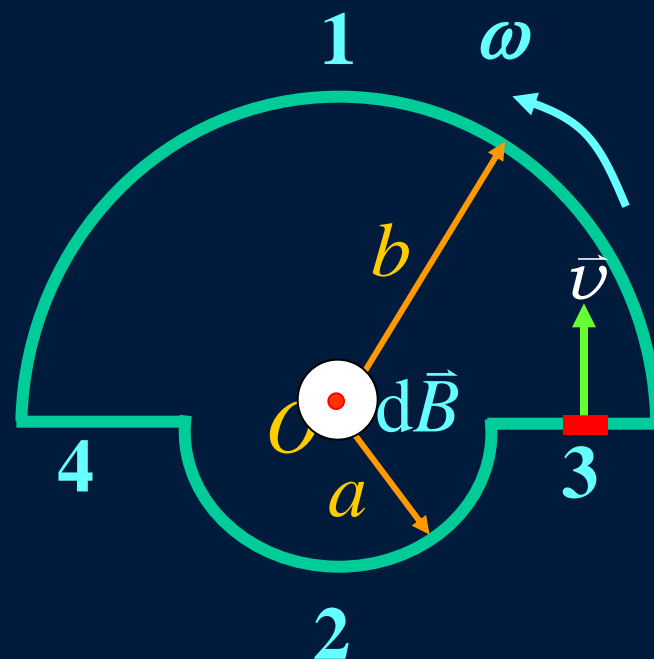
线段3: $dq = \lambda dr$

$$dB_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\lambda dr \cdot \omega r}{r^2} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi r} dr$$

$$B_3 = \int_a^b \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi r} dr = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

线段4: 同理 $B_4 = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{b}{a} \right) \mu_0 \lambda \omega$$



§ 14.3 磁通量 磁场的高斯定理

主要内容:

1. 磁场线
2. 磁场线的特征
3. 磁通量
4. 磁场的高斯定理

14.3.1 磁通量

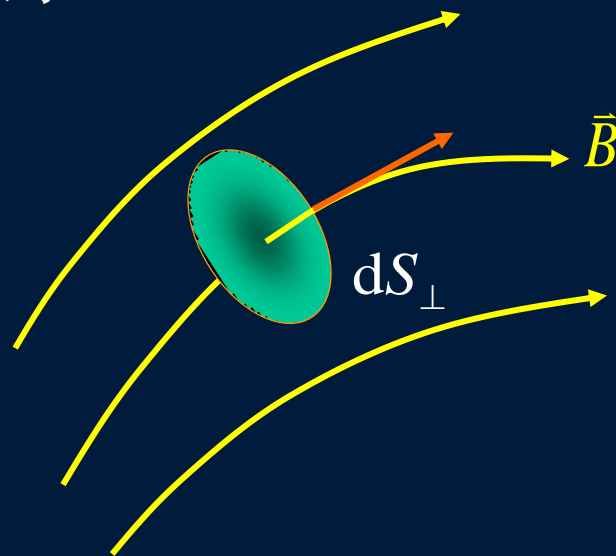
1. 磁场线

- (1) 在磁场中画出一簇曲线,让曲线上每一点的切线方向代表该点处磁感应强度 \vec{B} 的方向
- (2) 磁场的强弱由磁场线的疏密来表示

$$B = \frac{d\Phi_m}{dS_{\perp}}$$

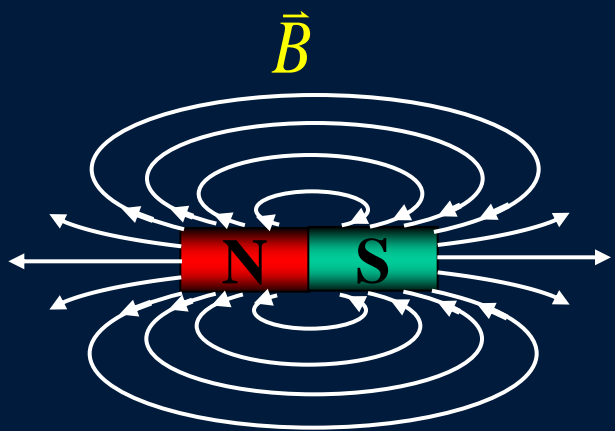
穿过面元的
磁场线条数

垂直磁感应强
度的面元面积

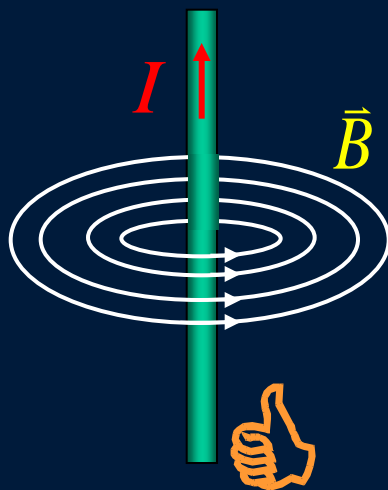


2. 磁场线的特征

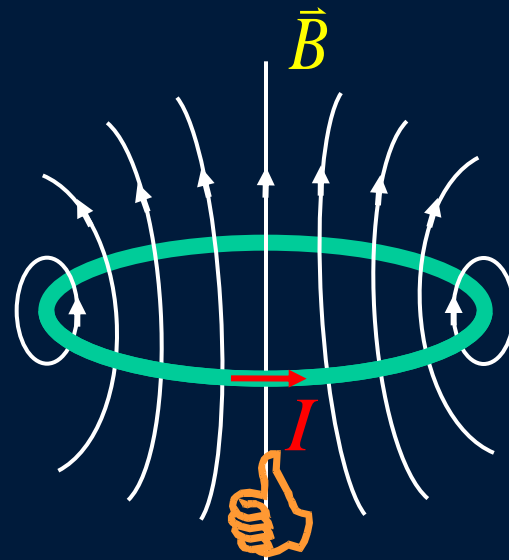
- (1) 无头无尾的闭合曲线。
- (2) 与电流相互套连，服从右手螺旋定则。
- (3) 磁场线不相交。



磁棒的磁场线



载流长直导线
的磁场线



载流圆线圈的磁场线

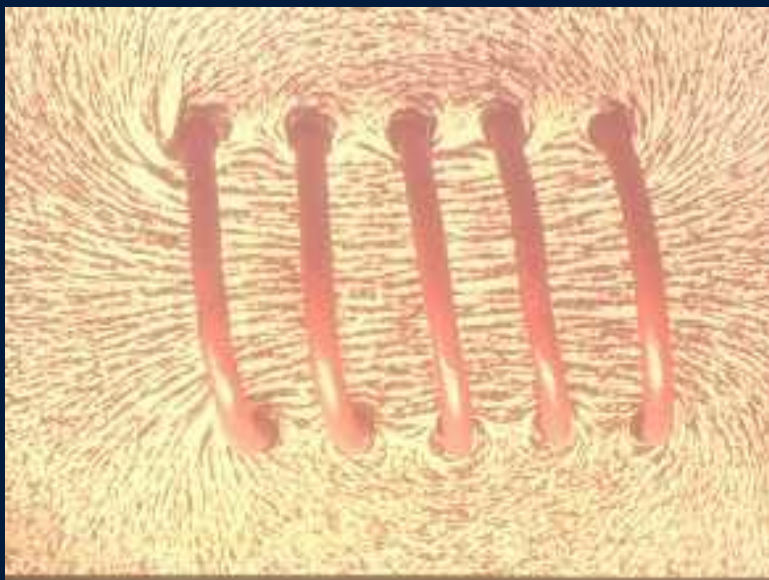
一些典型的磁感应线的分布：



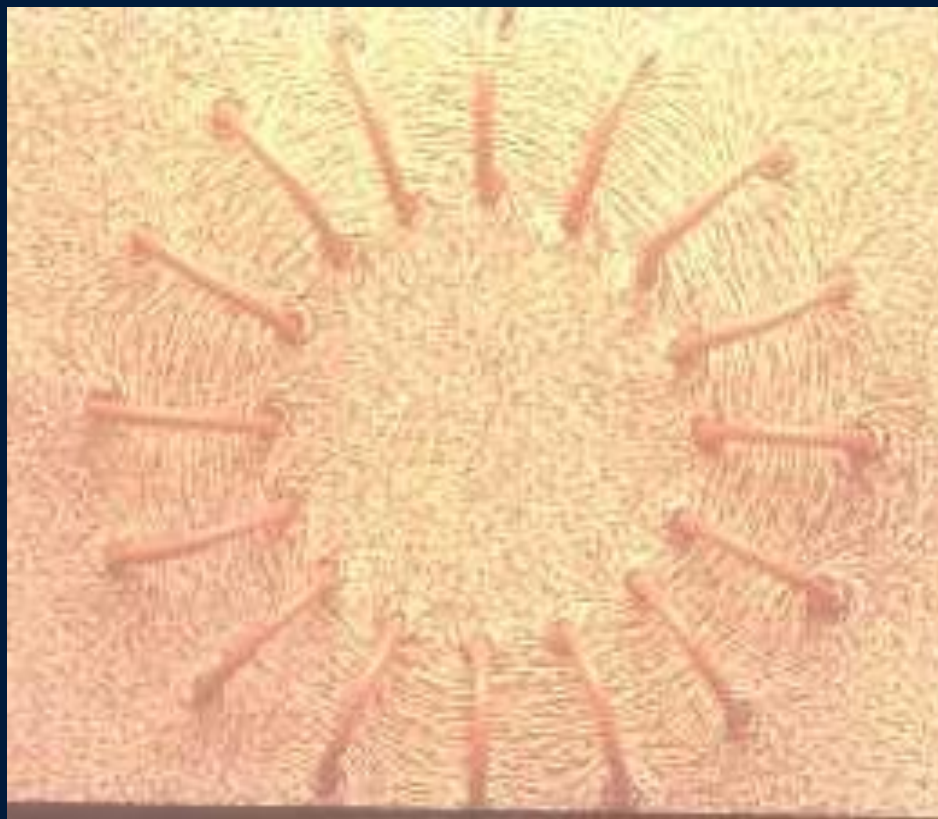
直线电流的磁感线



圆形电流的磁感线



直螺线管电流的磁感线

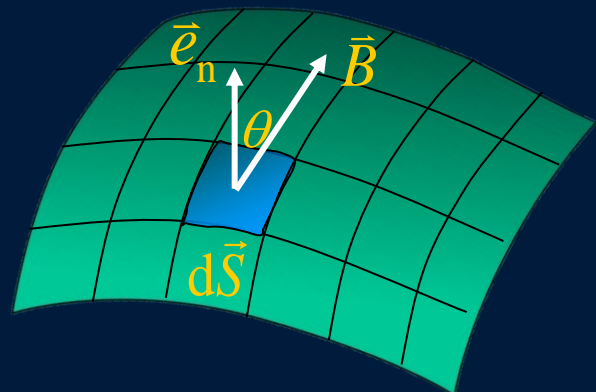


环形螺线管电流的磁感线

3. 磁通量

通过面元的磁场线条数 —— 通过该面元的磁通量

$$B = \frac{d\Phi_m}{dS_{\perp}} \quad \longrightarrow \quad d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



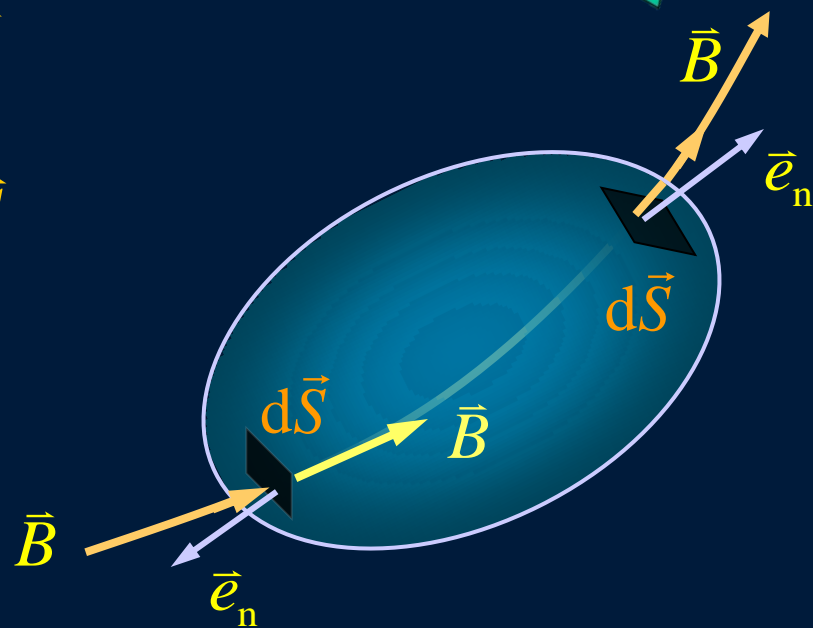
对于有限曲面 $\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$

对于闭合曲面 $\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

规定

磁场线穿入 $\Phi_m < 0$

磁场线穿出 $\Phi_m > 0$



14.3.2 磁场的高斯定理

磁场线都是闭合曲线

$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{磁高斯定理})$$

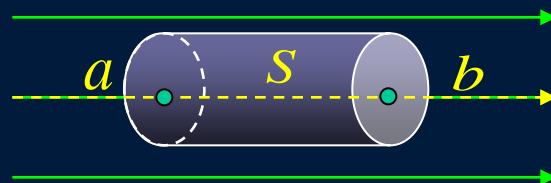
电流产生的磁感应线既没有起始点，也没有终止点，即磁场线既没有源头，也没有尾闾——**磁场是无源场（涡旋场）**。

例 证明在磁场线为平行直线的空间中，同一根磁场线上各点的磁感应强度值相等。

解

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= -B_a \Delta S + B_b \Delta S = 0\end{aligned}$$

$$B_a = B_b$$



§ 14.4 安培环路定理

主要内容:

1. 安培环路定理

2. 安培环路定理的应用

- 无限长均匀载流空心圆柱导体的磁场
- 无限长载流密绕螺线管的磁场
- 螺绕环电流的磁场分布
- 无限大平面电流的磁场

14.4.1 安培环路定理

静电场: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 静电场是保守场

磁 场: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = ?$

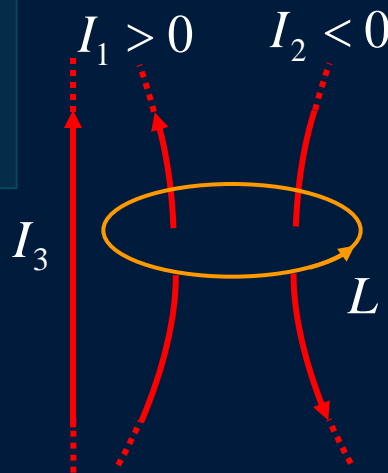
安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_L I_i$$

真空中,稳恒磁场的磁感应强度 \vec{B} 沿任意闭合路径 L 的线积分等于真空磁导率 μ_0 乘以穿过该闭合路径所有电流的代数和。

➤ 讨论

- (1) 积分回路方向与电流方向呈右螺旋关系
满足右螺旋关系时 $I_i > 0$, 反之 $I_i < 0$ 。



(2) 磁场是有旋场 —— 电流是磁场涡旋的轴心。

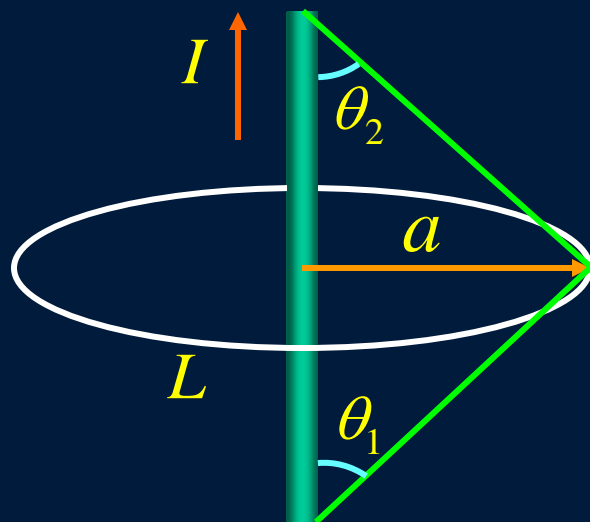
$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ —— 不代表磁场力的功，仅是磁场与电流的关系。

(3) 环路上各点的磁场为所有电流的贡献。

(4) 安培环路定理只适用于闭合的载流导线，对于任意设想的一段载流导线不成立。

例 图中载流直导线，设 $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$
则 L 的环流为：

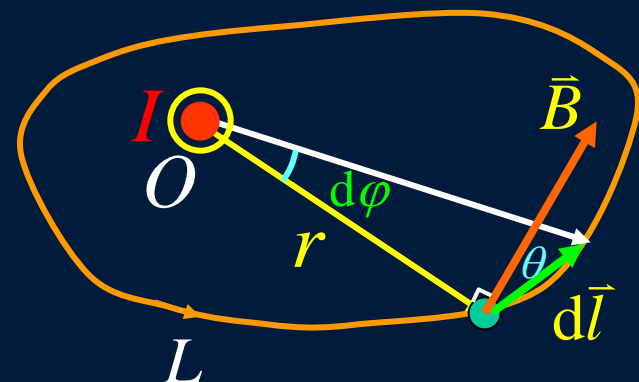
$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_L \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) dl \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} 2\pi a = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{2} \neq \mu_0 I\end{aligned}$$



- ◆ 以无限长载流直导线的磁场为例, 并限定所选绕行回路位于和直导线垂直的平面内, 分几种情况验证安培环路定理

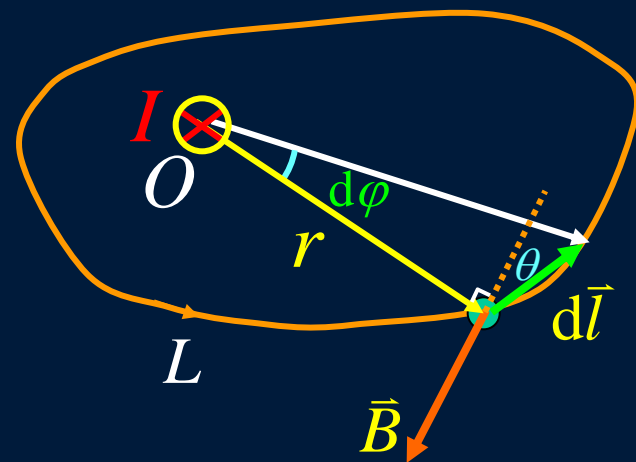
(1) 闭合路径包围电流

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_L B \cos \theta dl \\ &= \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \mu_0 I\end{aligned}$$



若路径绕行方向不变, 电流反向

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_L B \cos(\pi - \theta) dl \\ &= \oint_L \frac{-\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = -\mu_0 I\end{aligned}$$



磁场的环流与环路中所包围的电流有关

(2) 闭合路径不包围电流

对路径 L_1 和 L_3

$$\int_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{L_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

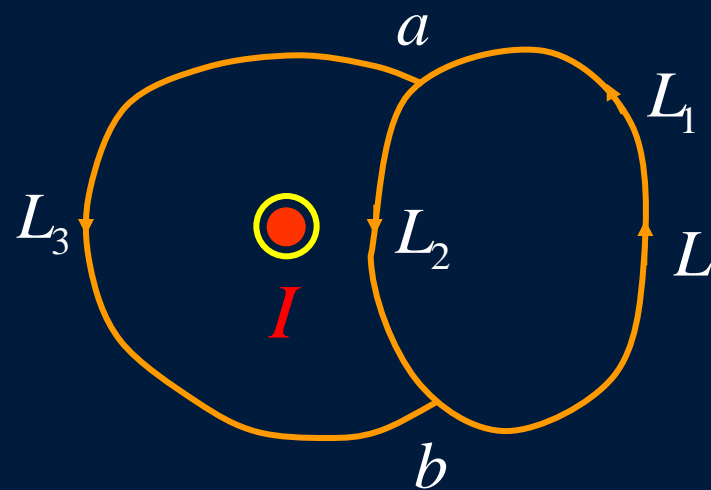
对路径 L_2 和 $(-L_3)$

$$\int_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{(-L_3)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$$

将上面两式相加

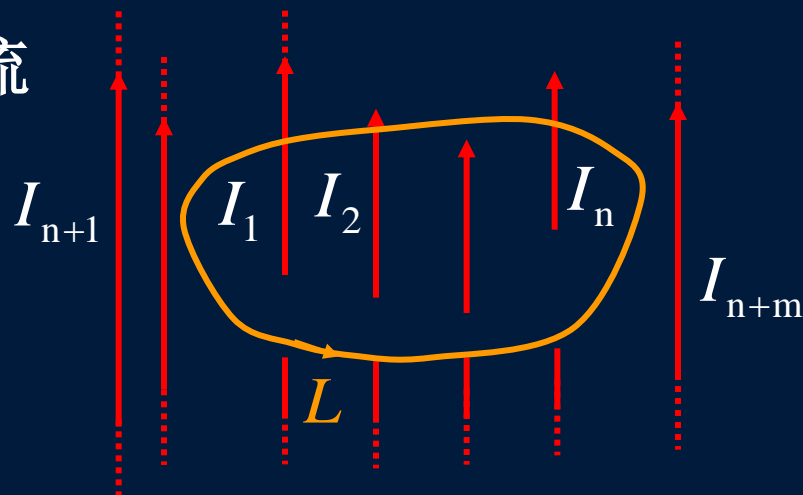
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

环路不包围电流，则磁场环流为零。



(3) 闭合回路内外有多个直线电流

$$\begin{cases} I_1 \sim I_n & \text{—— 在环路 } L \text{ 中} \\ I_{n+1} \sim I_{n+m} & \text{—— 在环路 } L \text{ 外} \end{cases}$$



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n + \vec{B}_{n+1} + \cdots + \vec{B}_{n+m}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \cdots + \vec{B}_n + \vec{B}_{n+1} + \cdots + \vec{B}_{n+m}) \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_n \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{B}_{n+1} \cdot d\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_{n+m} \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 I_1 + \cdots + \mu_0 I_n + 0 + \cdots + 0 = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

➤ 说明 安培环路定理可以从毕—萨定律严格证明。

14.4.2 安培环路定理的应用

例 设无限长均匀载流空心圆柱导体的内外半径分别为 R_1 、 R_2 ，
电流沿轴向流动

求 圆柱导体内外的磁感应强度

解 $r > R_2$

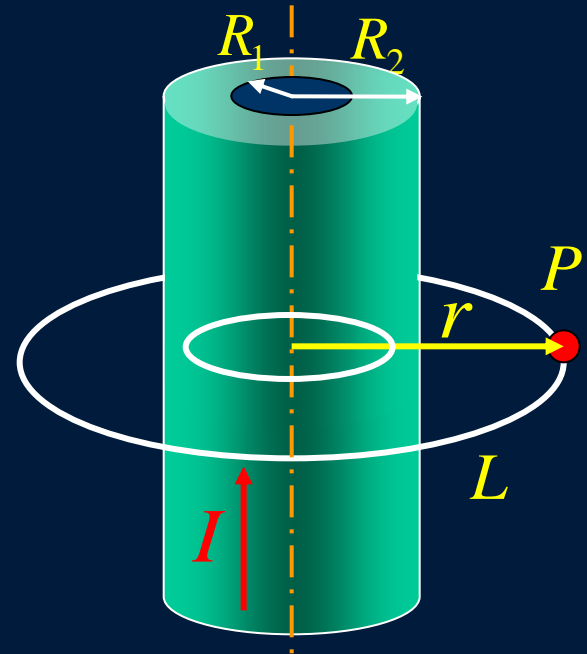
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos 0 dl = B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$R_1 < r < R_2$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos 0 dl = B 2\pi r = \mu_0 \frac{I(r^2 - R_1^2)}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r}$$



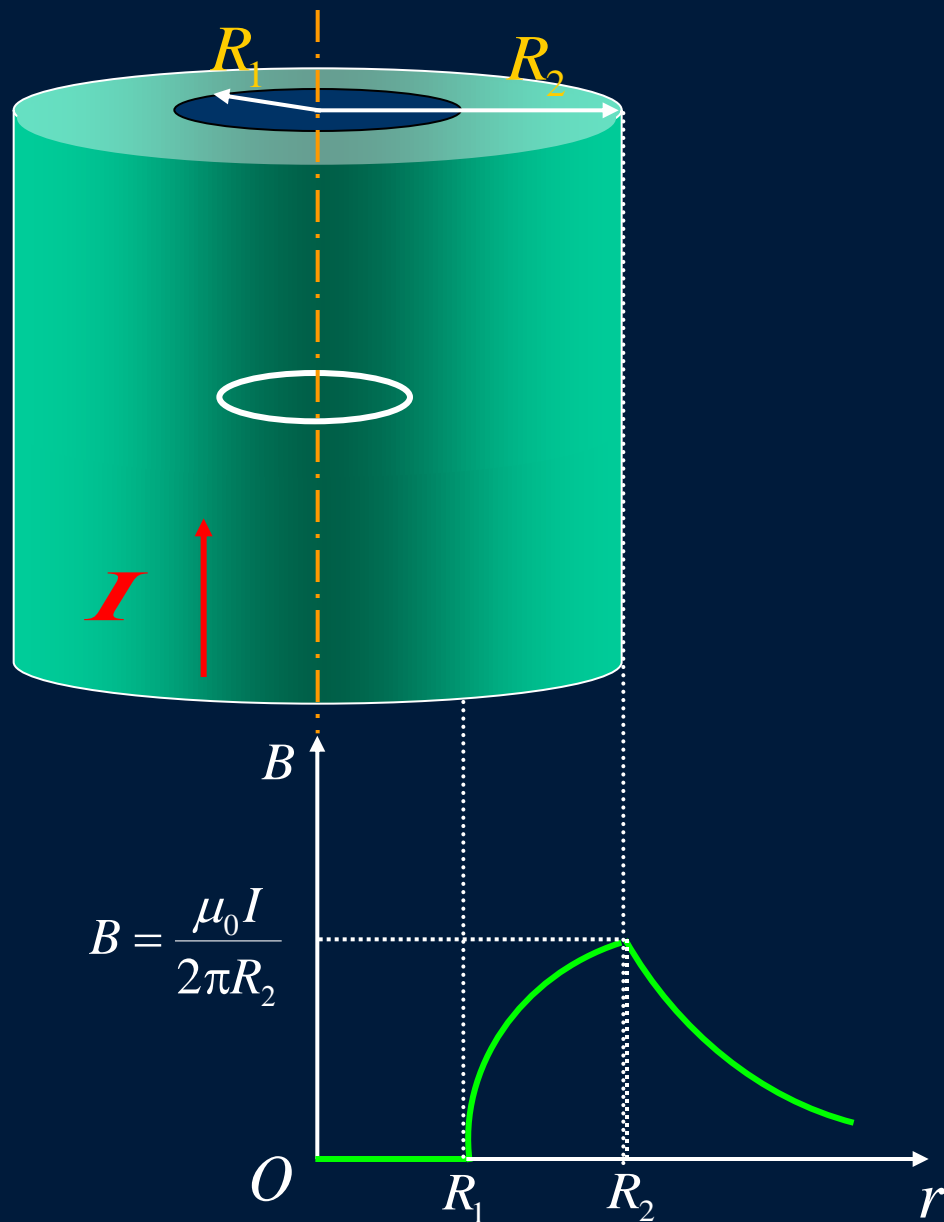
$$r < R_1$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos 0 dl$$

$$= B 2\pi r$$

$$= 0$$

$$B = 0$$

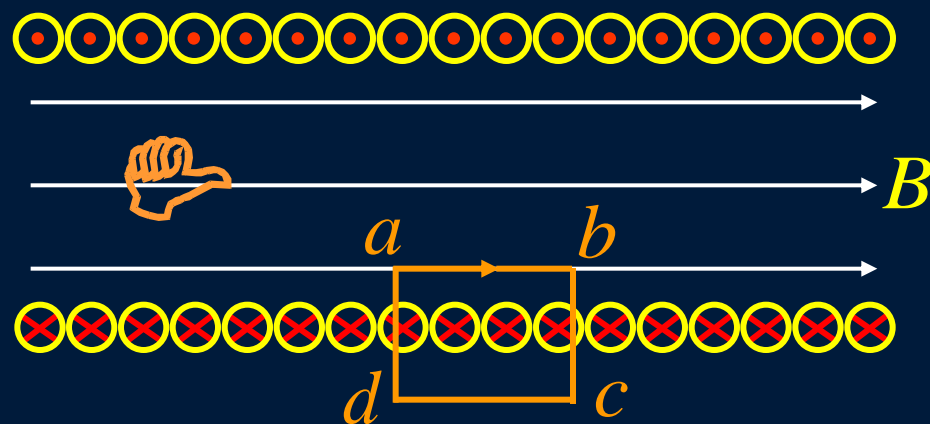


磁场分布曲线

例 无限长密绕螺线管导线中通有电流 I ，单位长度上的线圈匝数为 n

求 螺线管内的磁场

解



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b B \cos 0 dl + \int_b^c B \cos \frac{\pi}{2} dl + \int_c^d B \cos \pi dl + \int_d^a B \cos \frac{\pi}{2} dl$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B ab$$

$$B ab = \mu_0 n a b I \quad \longrightarrow \quad B = \mu_0 n I$$

例 设有一螺绕环，环的平均半径为 \bar{r} ，共绕有 N 匝线圈，导线中电流强度为 I ，

求 载流螺绕环的磁场

解 在螺绕环内部做一个环路，可得

$$\oint_L B \cos \theta dl = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 NI / 2\pi r$$

若螺绕环的截面很小， $r = \bar{r}$

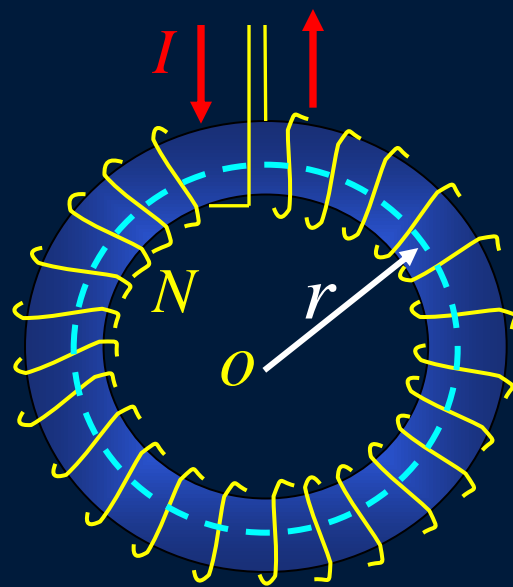
$$B_{\text{内}} = \mu_0 \frac{N}{2\pi \bar{r}} I = \mu_0 n I$$

内部为均匀磁场

若在外部再做一个环路，可得

$$\sum I_i = 0 \Rightarrow B_{\text{外}} = 0$$

螺绕环与无限长螺线管一样，磁场全部集中在管内部



例 设有一无限大均匀载流平面，流过单位宽度的电流强度为 α
求 载流平面周围的磁感应强度

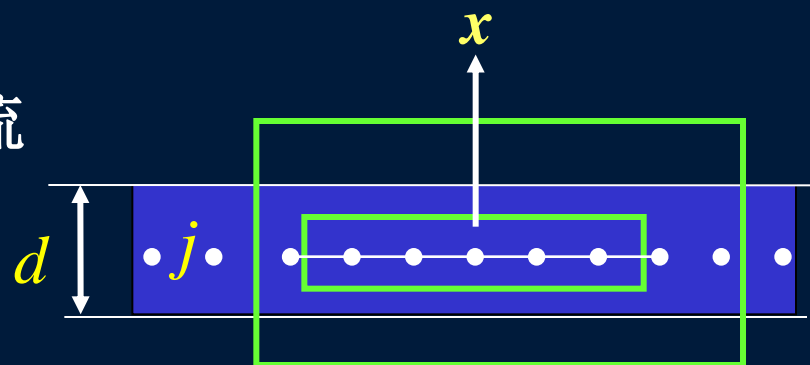
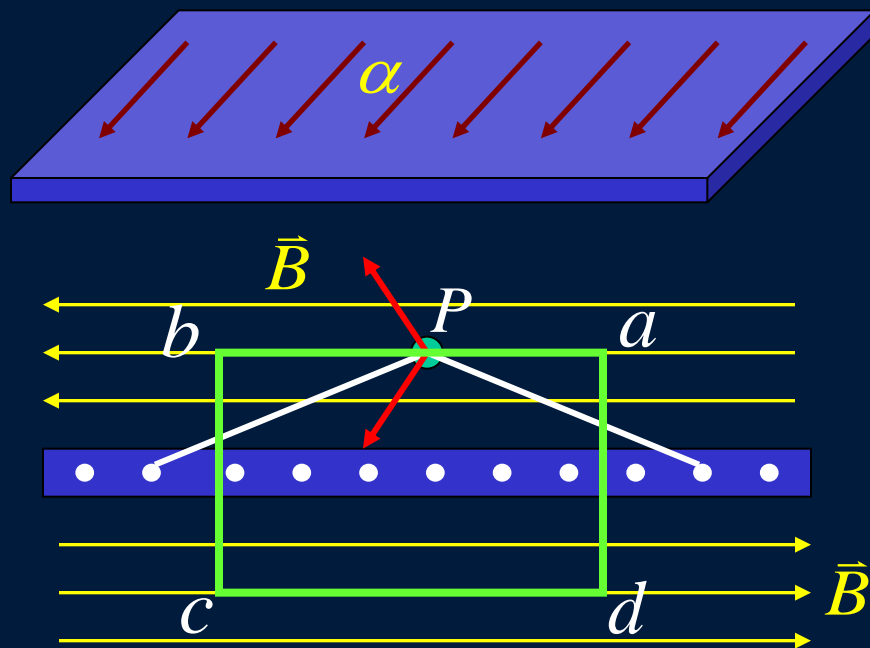
解 面对称

$$\begin{aligned}\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{bc} \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &\quad + \int_{cd} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{da} \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= B \int_a^b dl + B \int_c^d dl \\ &= 2Bab = \mu_0 ab \alpha\end{aligned}$$

$$B = \mu_0 \alpha / 2$$

推广： 有厚度的无限大平面电流

- 在外部 $B = \mu_0 jd / 2$
- 在内部 $B = \mu_0 jx$



§ 14.5 磁场对电流的作用

主要内容:

1. 磁场对载流导线的作用
- *2. 电流强度的单位——安培
3. 均匀磁场对平面载流线圈的作用
4. 磁力的功

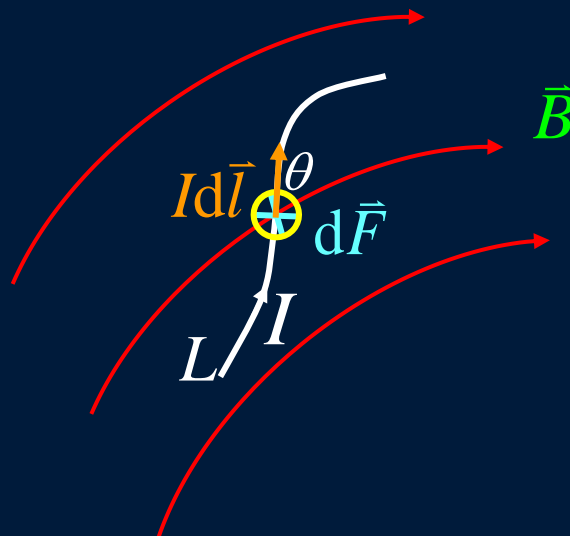
14.5.1 磁场对载流导线的作用

载流导体产生磁场 \longrightarrow 磁场对电流有作用

安培力

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{大小: } dF = IdlB \sin \theta \\ \text{方向: } Id\vec{l} \times \vec{B} \end{array} \right.$$



任意形状载流导线在外磁场中受到的安培力

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_L Id\vec{l} \times \vec{B}$$

➤ 讨论

(1) 安培定理是矢量表述式

$$d\vec{F} \Rightarrow dF_x, dF_y, dF_z$$

(2) 若磁场为匀强场

$$\vec{F} = \left(\int I d\vec{l} \right) \times \vec{B} \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = \left(\oint I d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0$$

在匀强磁场中的闭合电流受力为零

例 在均匀磁场中放置一任意形状的导线，电流强度为 I

求 此段载流导线受的磁力。

解 在电流上任取电流元 $I d\vec{l}$

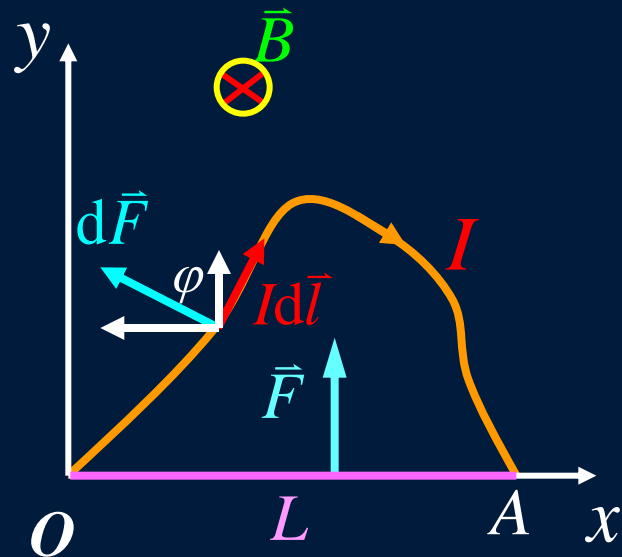
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = IB dl$$

$$dF_x = IB dl \sin \varphi = IB dy$$

$$dF_y = IB dl \cos \varphi = IB dx$$

$$F_x = \int_0^0 IB dy = 0$$

$$F_y = \int_0^L IB dx = IBL$$



相当于载流直导线 \overline{OA} 在匀强磁场中受的力，方向沿 y 向。

例 载流为 I_1 的无限长直导线,沿一半径为 R 的圆电流 I_2 的直径 AB 放置

求 (1) 半圆弧 ACB 受到的安培力;

(2) 整个圆电流受到的安培力.

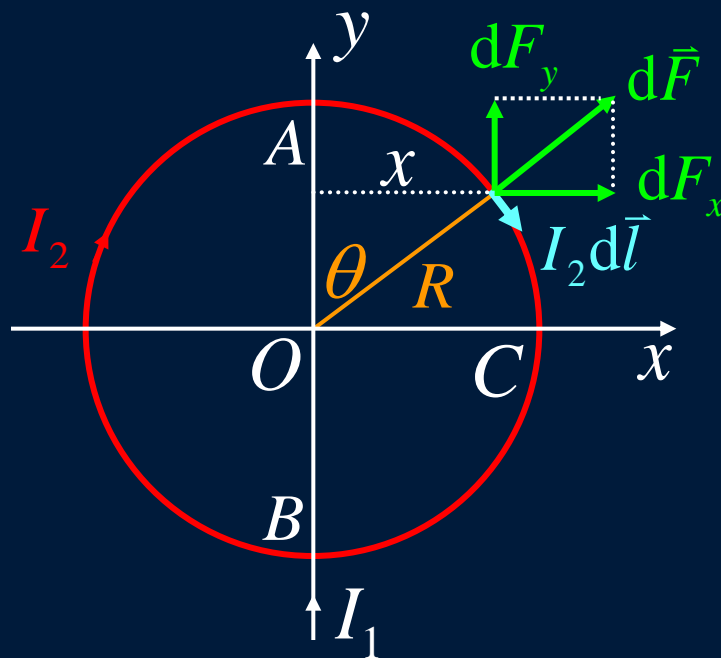
解 (1) 在半圆弧 ACB 上任取一电流元 $I_2 d\vec{l}$

$$dF = BI_2 dl \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R \sin \theta} dl$$

$$\begin{cases} dF_x = dF \sin \theta \\ dF_y = dF \cos \theta \end{cases}$$

由对称性

$$F_y = \int_{ACB} dF_y = 0$$



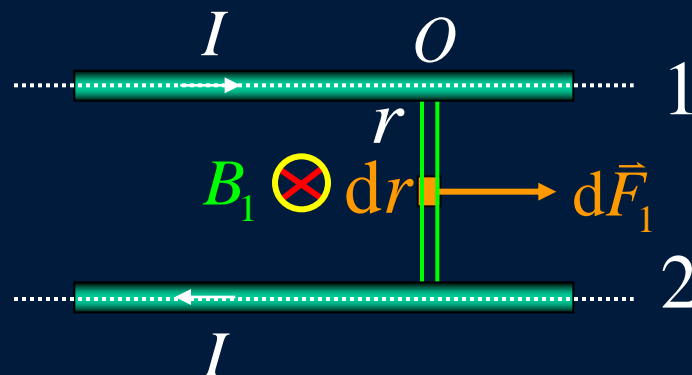
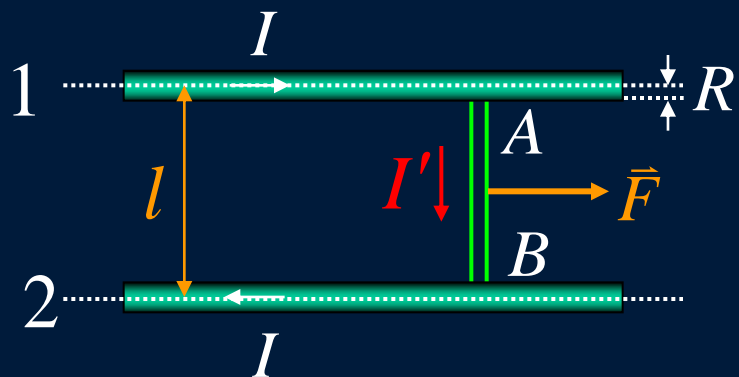
半圆弧 ACB 受到的安培力

$$F_{ACB} = F_x = \int_{ACB} dF_x = \int_0^{\pi R} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dl = \frac{1}{2} \mu_0 I_1 I_2$$

(2)整个圆电流受到的安培力

$$F = \mu_0 I_1 I_2$$

例 如图给出了电磁推进器的原理图。



求 导线AB受到的安培力

解 导轨1中电流的磁场对导线AB的作用力

$$F_1 = \int_R^{l-R} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} I' dr = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi} \ln \frac{l-R}{R}$$

导轨2中电流对导线AB的作用力 $F_2 = F_1$

导线AB受到的安培力 $F = \frac{\mu_0 I I'}{\pi} \ln \frac{l-R}{R}$

例 求一载流导线框在无限长直导线磁场中的受力和运动趋势

解 \overline{CD} $f_1 = I_2 b B_1 = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$
方向向左

\overline{EF} $f_3 = I_2 b B_3 = I_2 b \frac{\mu_0 I_1}{4\pi a}$
方向向右

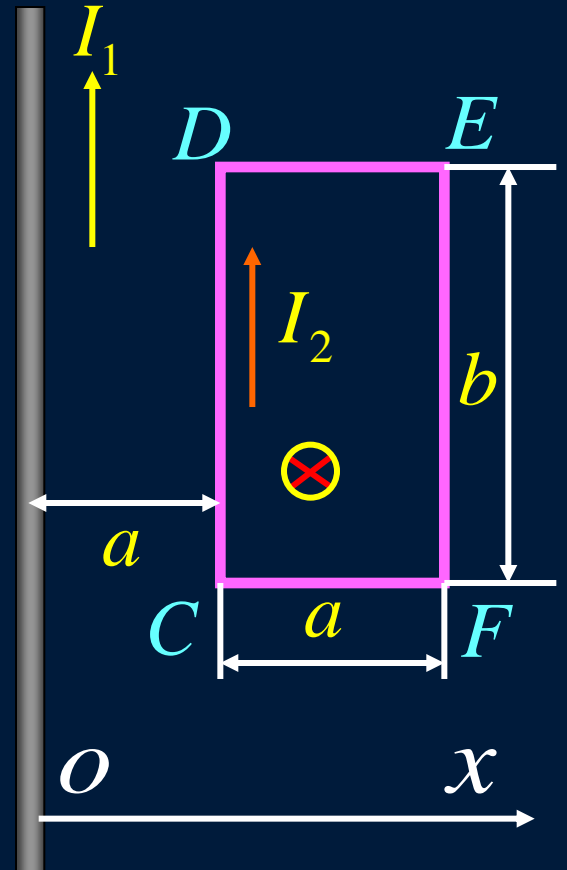
\overline{CF} $f_2 = \int_a^{2a} I_2 dl B_1 \sin \frac{\pi}{2}$
 $= \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} I_2 dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln 2$

\overline{DE} $f_4 = f_2$

整个线圈所受的合力:

$$\vec{F} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \vec{f}_4 = \vec{f}_1 + \vec{f}_3$$

$|\vec{f}_1| > |\vec{f}_3| \rightarrow$ 线圈向左做平动



*14.5.2 电流强度的单位——安培

两平行无限长直导线之间的相互作用力？

导线1在导线2的电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 处的磁场为

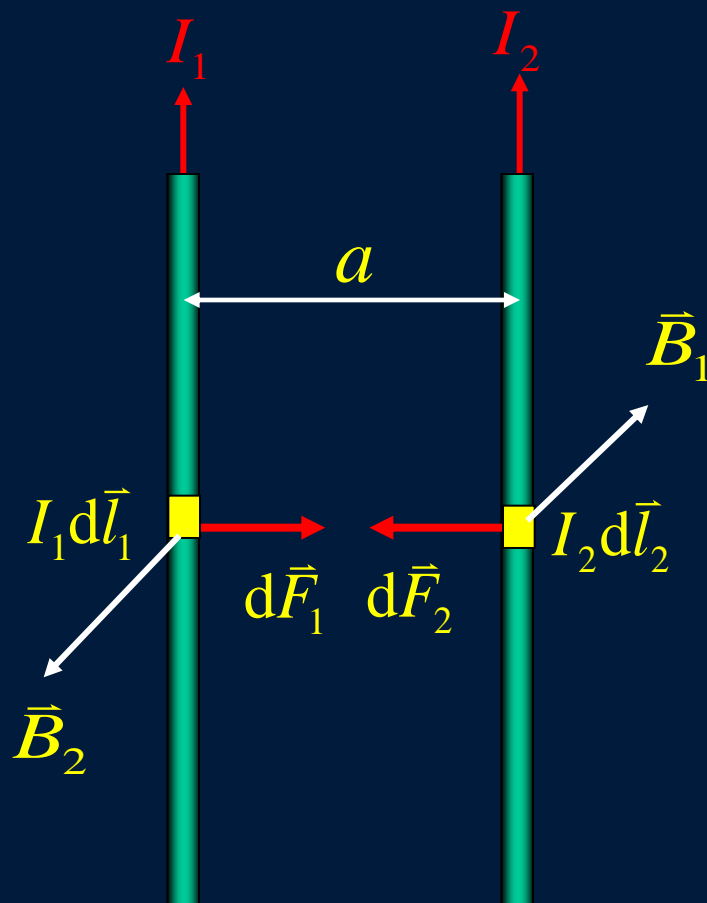
$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 受的安培力

$$dF_2 = B_1 I_2 dl_2 \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2$$

导线 2 上单位长度上受的安培力

$$f_2 = \frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$



同样,导线 1 上单位长度上受的安培力

$$f_1 = \frac{dF_1}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} = f_2$$

当两电流同方向时,两导线之间的相互作用力表现为引力;当两电流反方向时,两导线之间的相互作用力表现为斥力;

两导线之间的距离为 1 m, 电流强度为1A

$$f_1 = f_2 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 1}{2\pi} \text{N} \cdot \text{m}^{-1} = 2 \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

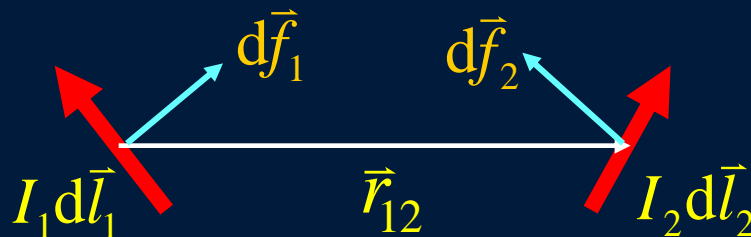
定义: 真空中通有同值电流的两无限长平行直导线, 若相距 1 米, 单位长度受力 $2 \times 10^{-7} \text{N}$, 则电流为1 安培。

➤ 讨论

(1) 电流之间的磁力符合牛顿第三定律: $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$

(2) 分析两电流元之间的相互作用力

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$



$$d\vec{f}_2 = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

同理

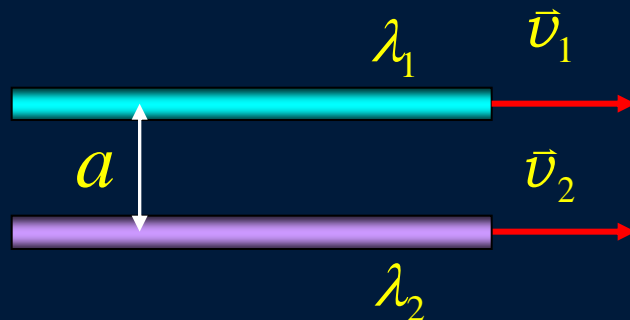
$$d\vec{f}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

两电流元之间的相互作用力，一般不遵守牛顿第三定律

(3) 分析两根带电长直线沿长度方向运动时，带电线之间的作用力。

两带电电线上的电流为

$$I_1 = \lambda_1 v_1 \quad I_2 = \lambda_2 v_2$$



$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \longrightarrow f_m = \frac{\mu_0 \lambda_1 v_1 \lambda_2 v_2}{2\pi a}$$

两带电线单位长度上的电荷之间的库仑力

$$f_e = E_1 \lambda_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi \epsilon_0 a}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\frac{f_m}{f_e} = \frac{\mu_0 \lambda_1 v_1 \lambda_2 v_2}{2\pi a} \frac{2\pi \epsilon_0 a}{\lambda_1 \lambda_2} = \epsilon_0 \mu_0 v_1 v_2 = \frac{v_1 v_2}{c^2}$$

在一般情况下，磁场力远小于电场力

14.5.3 均匀磁场对平面载流线圈的作用

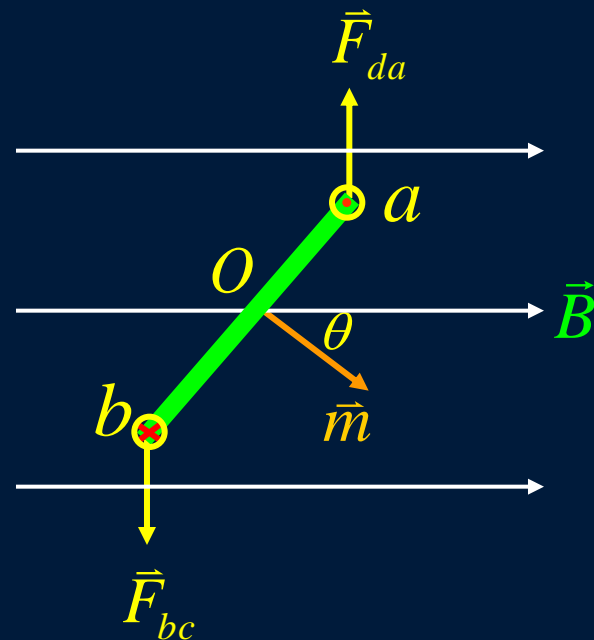
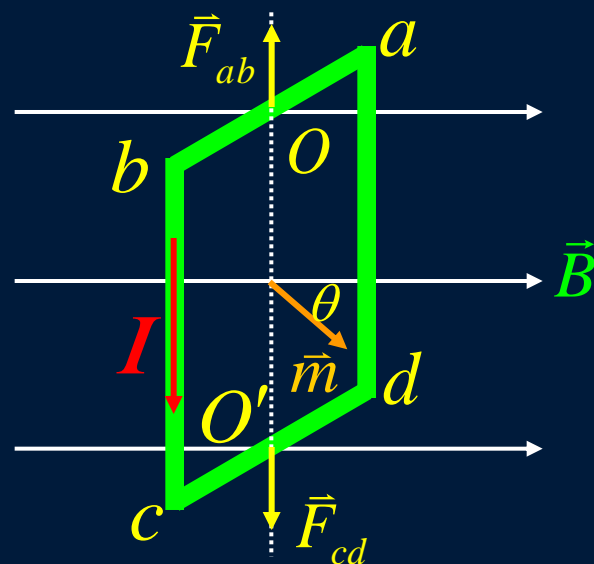
在均匀磁场中的刚性矩形载流线圈

载流线圈受的合力为零

$$\left. \begin{aligned} F_{ab} &= IabB \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ F_{cd} &= IcdB \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{大小相} \\ \text{等, 方} \\ \text{向相反} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} F_{bc} &= IbcB \\ F_{da} &= IdaB \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{大小相} \\ \text{等, 方} \\ \text{向相反} \end{array}$$

$$F_{bc} = F_{da} \quad \text{—— 形成力偶}$$



线圈所受的磁力矩

$$M = F_{da} ab \sin \theta = I da B ab \sin \theta = I S B \sin \theta = m B \sin \theta$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

在匀强磁场中，平面线圈所受的安培力为零，仅受磁力矩的作用——只发生转动，不会发生平动。

➤ 讨论

(1) 线圈所受的力矩——运动趋势

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \theta = 0 \Rightarrow M = 0 & \text{稳定平衡} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow M = M_{\max} & \text{力矩最大} \\ \theta = \pi \Rightarrow M = 0 & \text{非稳定平衡} \end{array} \right.$$

(2) 匀强磁场中任意形状的平面载流线圈的磁力矩

载流矩形小线圈受的磁力矩 $d\vec{M} = IdS\vec{e}_n \times \vec{B}$

$$\vec{M} = \int d\vec{M} = I\vec{e}_n \times \vec{B} \int dS = IS\vec{e}_n \times \vec{B}$$

$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ 适用于任意形状的平面载流线圈

(3) 磁力矩总是力图使线圈的磁矩转到和外磁场一致的方向上

14.5.4 磁力的功

1. 磁场对载流导线的功

$$F = IlB \quad \text{方向向右}$$

在有限过程中，磁力所作的功

$$A = Faa' = IlBaa'$$

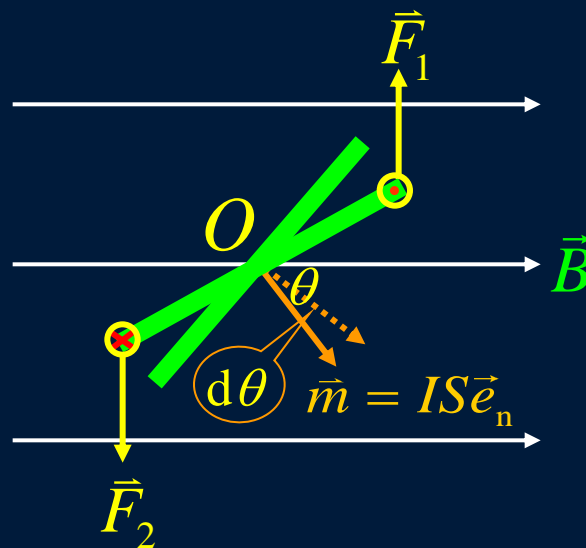
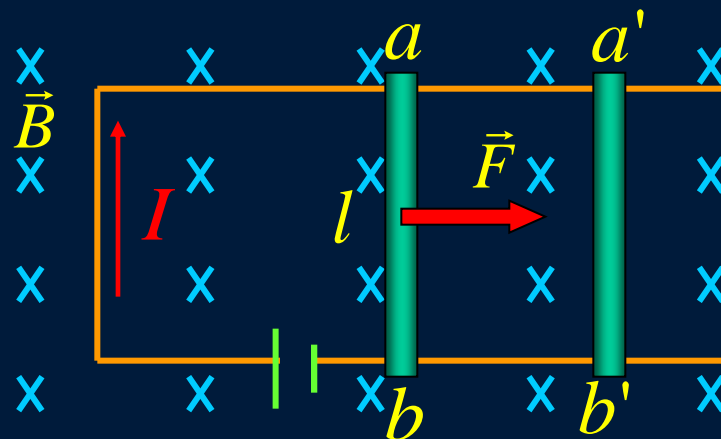
$$= BI\Delta S = I\Delta\phi_m$$

磁力的功等于电流强度乘以穿过回路磁通量的增量

2. 磁场对载流线圈的功

$$M = mB \sin \theta$$

在一元过程中，磁力矩所作的功



$$dA = -M d\theta = -ISB \sin \theta d\theta = Id(BS \cos \theta) = Id\Phi_m$$

在一有限过程中，磁力的功

$$A = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} Id\Phi_m = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = I\Delta\Phi_m$$

上述公式是磁力做功的一般表达式

3. 磁偶极子的势能

设磁矩与磁感应强度 \mathbf{B} 相互垂直时为势能零点

$$V = A = -\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} M d\theta = -\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} mB \sin \theta d\theta = -mB \cos \theta$$

磁偶极子的势能

$$V = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

§ 14.6 磁场对运动电荷的作用

主要内容:

1. 洛伦兹力
2. 带电粒子在均匀磁场中的运动
3. 霍耳效应

14.6.1. 磁场对运动电荷的作用

1. 洛伦兹力

电流元受到的安培力

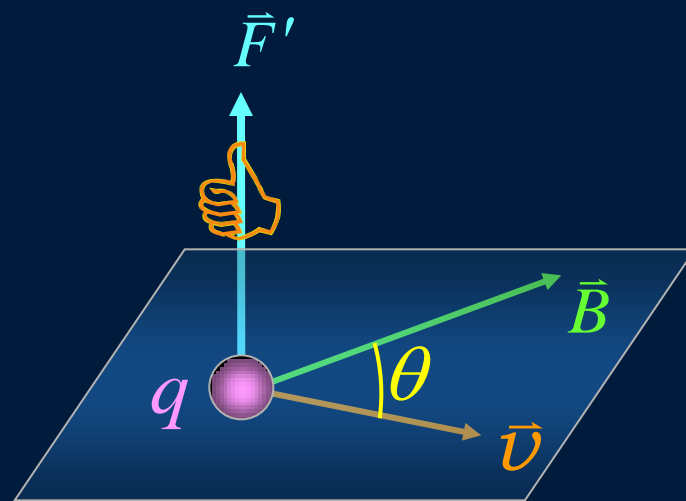
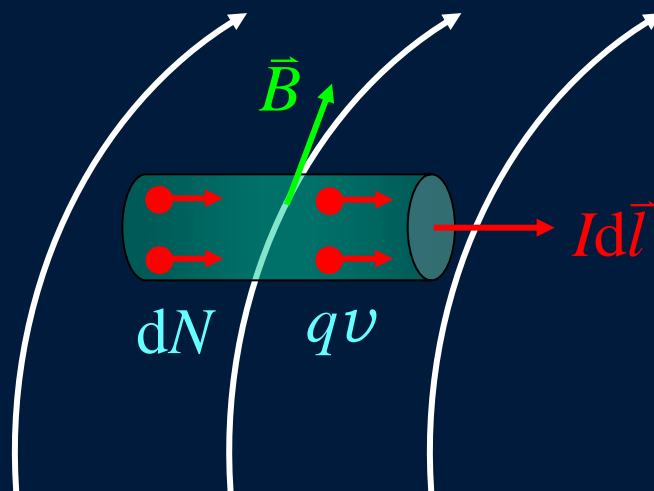
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

电流元 $I d\vec{l} = q \vec{v} dN$

$$d\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} dN$$

洛伦兹力

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{F}}{dN} = q \vec{v} \times \vec{B}$$



➤ 讨论

- (1) 洛伦兹力始终与电荷运动方向垂直，故 \vec{F}' 对电荷不作功。
- (2) 在一般情况下，空间中电场和磁场同时存在

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = d\vec{p} / dt$$

- (3) 安培力是大量带电粒子洛伦兹力的叠加

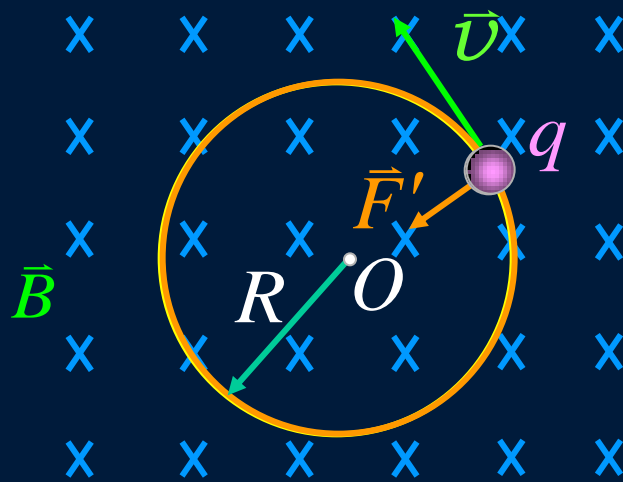
2. 带电粒子在匀强磁场中的运动

(1) \vec{v} 和 \vec{B} 垂直

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$



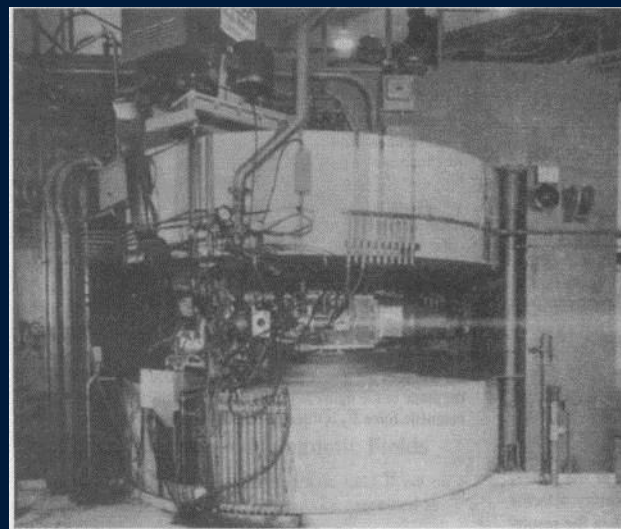
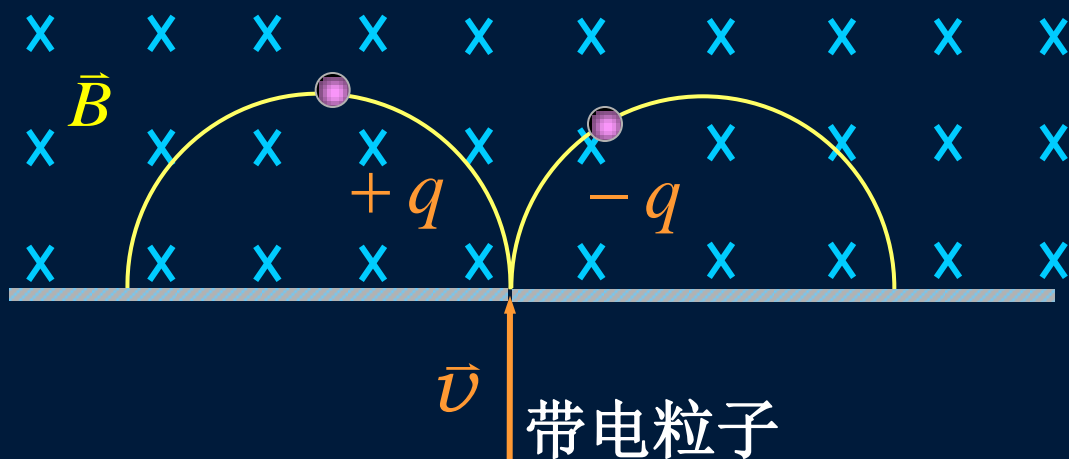
➤ 讨论

1) 确定粒子的速度和能量。

$$R = \frac{mv}{qB} \quad W = \frac{1}{2}mv^2$$

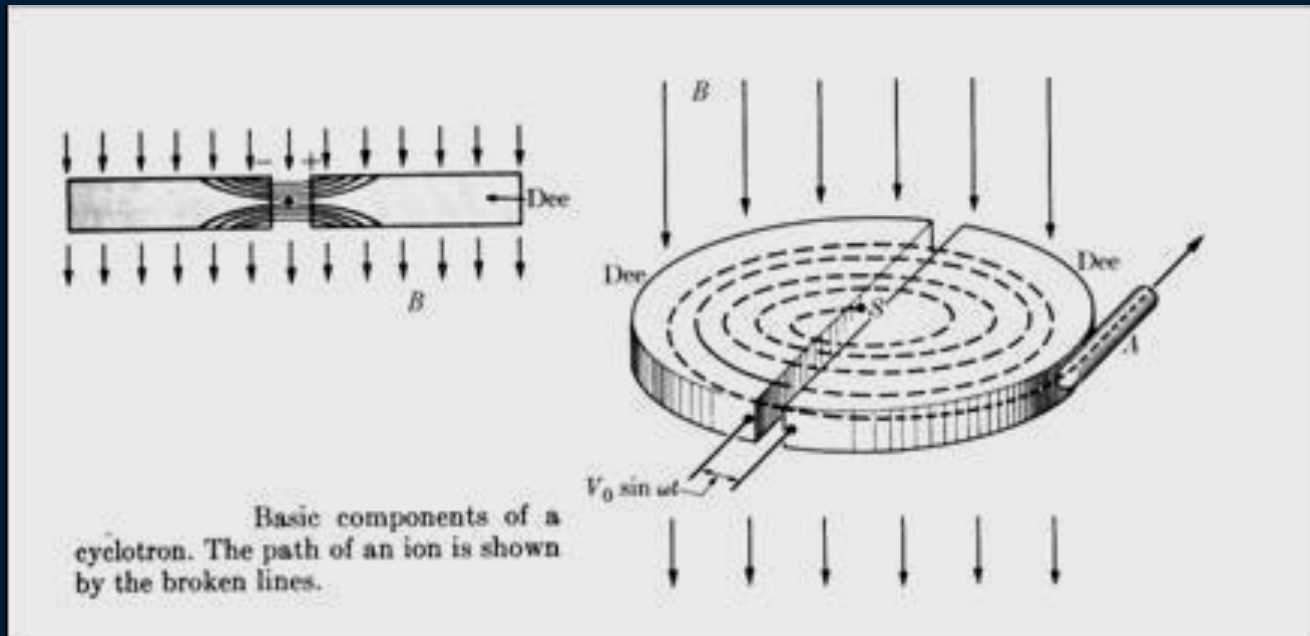
2) 判别粒子所带电荷的正负

根据带电粒子的偏转方向来判断 $\vec{F}' = q\vec{v} \times \vec{B}$



根据宇宙射线轰击铅板所产生的粒子轨迹, 发现了正电子

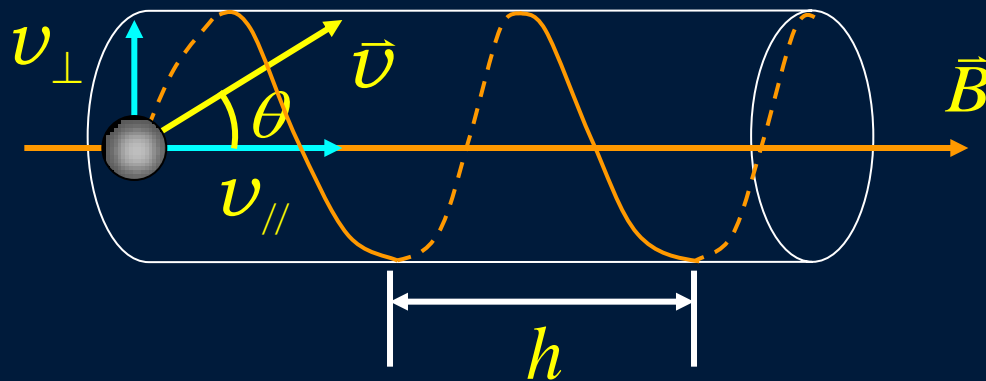
3) T 与 v 无关, 回旋加速器的基本理论依据



$$R = \frac{mv}{qB} \quad T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

(2) \vec{v} 和 \vec{B} 成 θ 角

$$\begin{cases} v_{//} = v \cos \theta \\ v_{\perp} = v \sin \theta \end{cases}$$



带电粒子作螺旋线运动

$$\begin{cases} R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB} & \text{回转半径} \\ T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB} & \text{旋转周期} \\ h = v_{//} T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB} & \text{螺距} \end{cases}$$

➤ 讨论

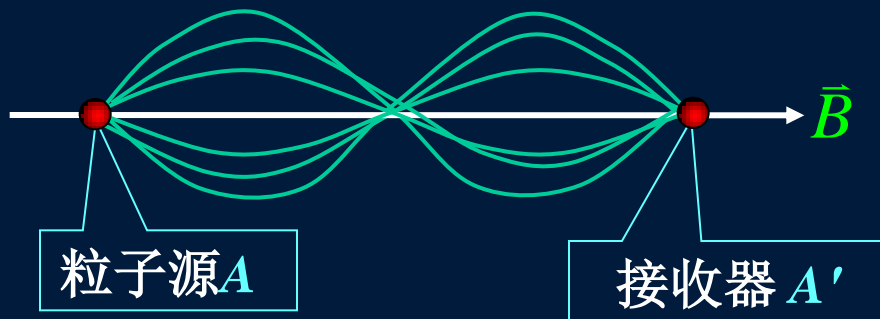
1) 磁聚焦原理

θ 很小时

$$v_{\parallel} \approx v, \quad v_{\perp} \approx v\theta$$

$$h = v_{\parallel} T \approx \frac{2\pi m v}{qB}$$

发散角不太大的带电粒子束，经过一个周期后，重新会聚。



2) 磁约束效应

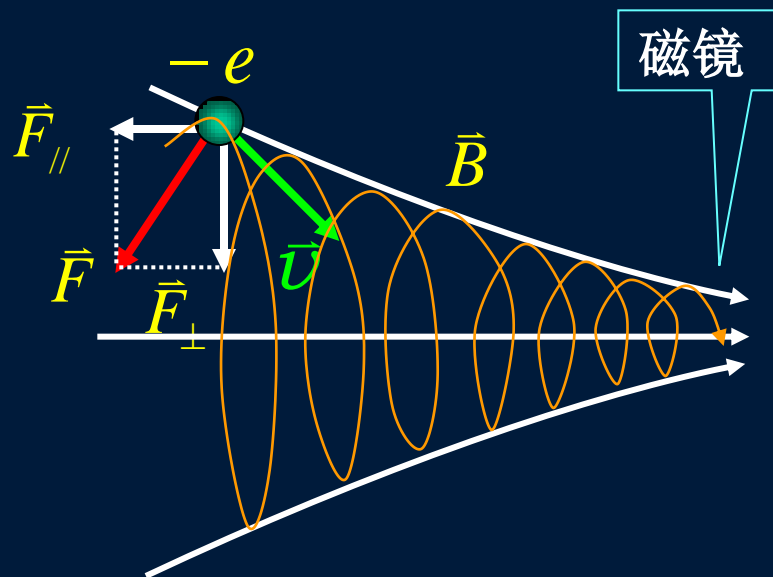
$$R = \frac{mv \sin \theta}{qB} \propto \frac{1}{B} \quad \text{磁场增强, 运动半径减少}$$

强磁场可约束带电粒子在一根磁场线附近 —— 磁约束效应。

3) 磁镜效应

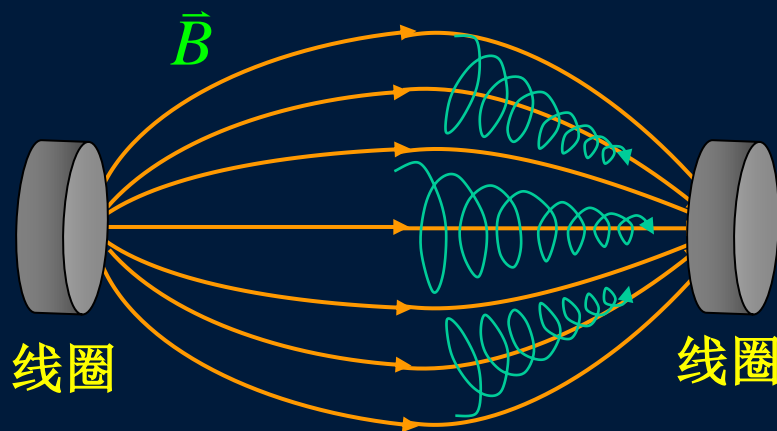
$$\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$$

$\vec{F}_{//}$ 减少粒子的纵向前进速度，使粒子运动发生“反射”——磁镜效应



◆ 磁镜效应的典型应用

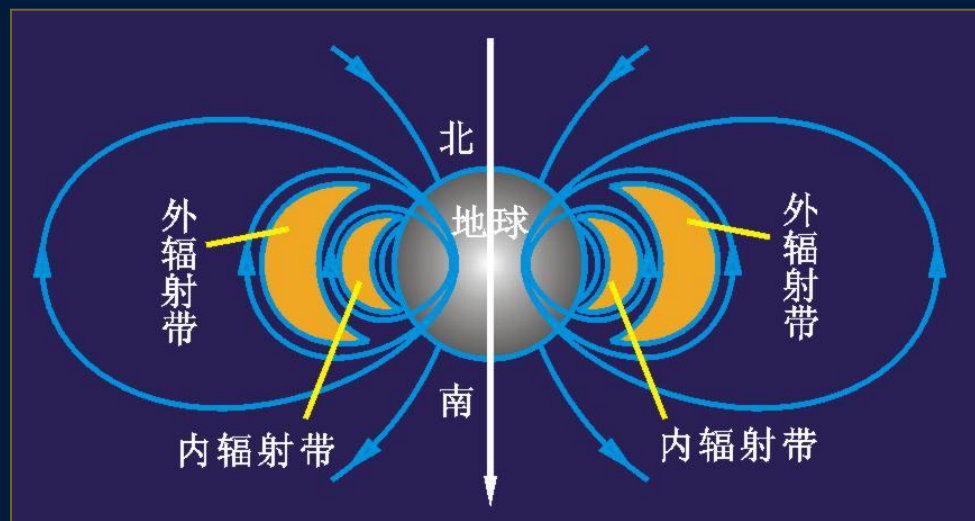
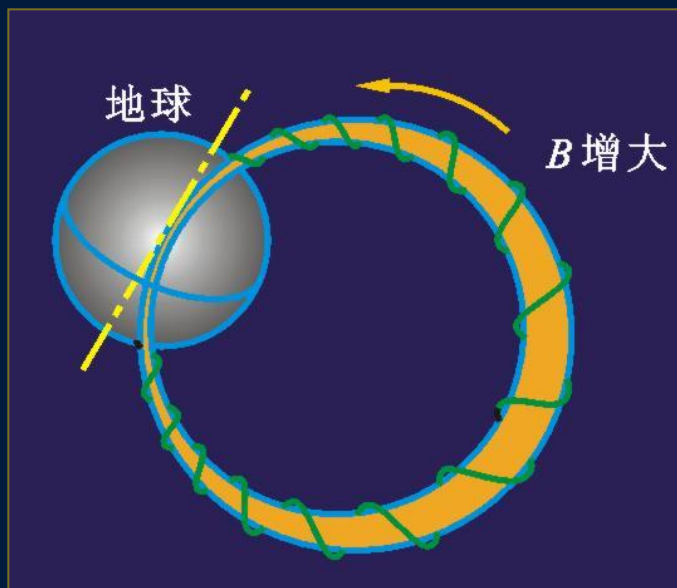
受控热核聚变实验研究
将带电粒子约束在一定
范围内作往返运动而无
法逃逸出去——磁瓶



高温等离子体

◆地球的磁约束效应 —— 天然磁瓶

由于地球磁场是一个两极强、中间弱的非匀强磁场。这就形成了一个天然磁瓶



14.6.2 霍尔效应

1879年, 霍尔发现在一个通有电流的导体板上, 若垂直于板面施加一磁场, 则板面两侧会出现微弱电势差(霍尔效应)。

1. 实验结果

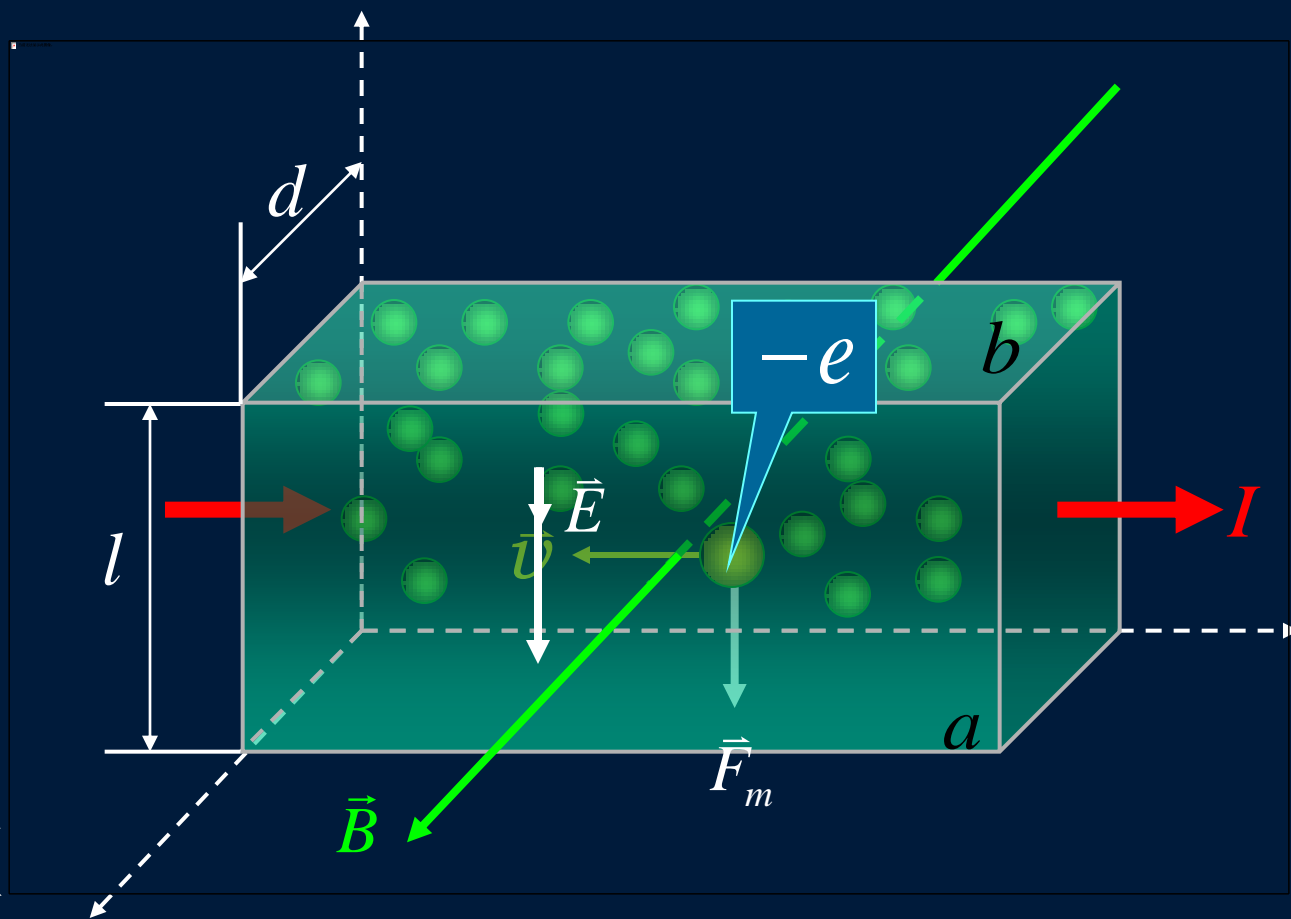
$$U_{ab} = R_H \frac{IB}{d}$$

R_H 霍尔系数

2. 物理机制

(1) 洛伦兹力使电子偏转

(2) 霍尔电场阻碍电子偏转



3. 定量分析

达到动态平衡时 $\vec{F}_e = \vec{F}_m \longrightarrow qE = qvB$

$$E = vB$$

$$U_{ab} = El = vBl$$

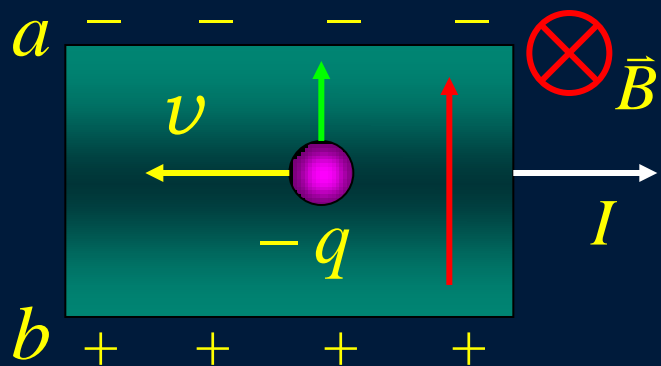
$$I = nqvS = nqvld$$

$$\left. \begin{array}{l} E = vB \\ U_{ab} = El = vBl \\ I = nqvS = nqvld \end{array} \right\} U_{ab} = \frac{1}{nq} \frac{IB}{d} \longrightarrow R_H = \frac{1}{nq} \text{ (霍耳系数)}$$

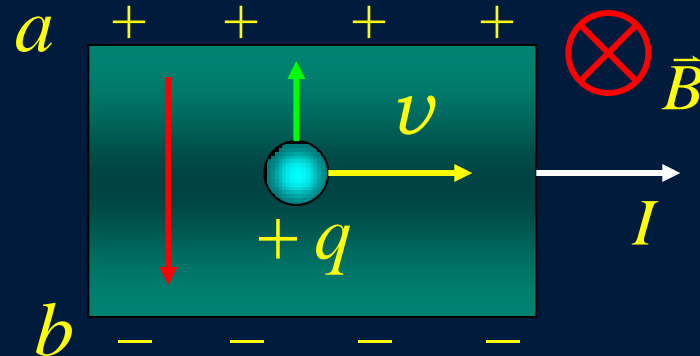
➤ 讨论

- (1) 通过测量霍耳系数可以确定导电体中载流子浓度;这是研究 半导体材料性质的有效方法 (浓度随杂质、温度等变化)。

(2) 区分半导体材料类型——霍尔系数的正负与载流子电荷性质有关



N 型半导体: $u_a < u_b$, $R_H < 0$

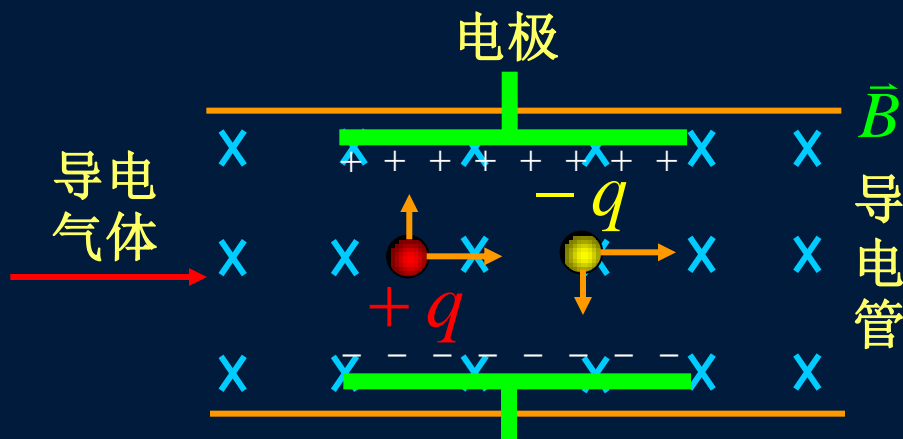


P 型半导体: $u_a > u_b$, $R_H > 0$

(3) 磁流体发电

没有机械转动部分

——可提高发电效率。



本章小结

1. 磁场

描述磁场的物理量磁感应强度 \vec{B} 是一矢量, 其方向沿该点处静止小磁针的N极指向, 其大小等于单位电流元在该点处受到的最大磁场力。

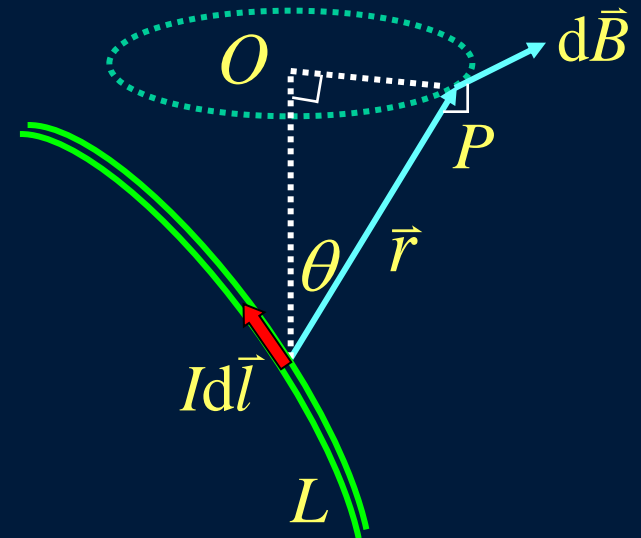
2. 毕奥—萨伐尔定律

(1) 毕奥—萨伐尔定律

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

$$\text{大小: } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

方向: 右螺旋法则



对任意一段有限电流，其产生的磁感应强度

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

(2) 运动电荷的磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

3. 磁通量和磁场的高斯定理

(1) 磁通量

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

(2) 磁场的高斯定理

$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

4. 安培环路定理

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_L I_i \quad (\text{磁场是有旋场})$$

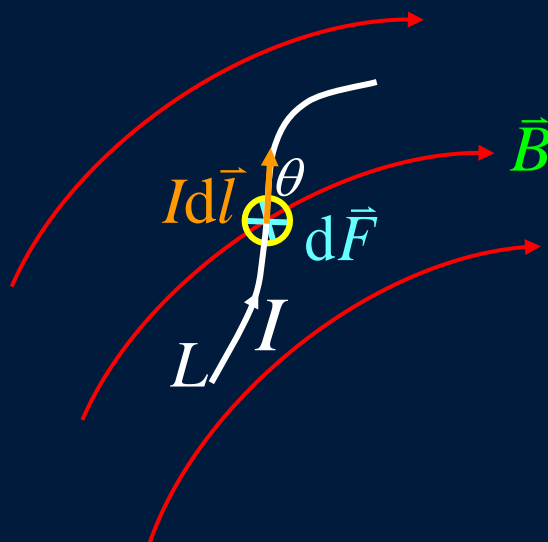
积分回路方向与电流方向满足右螺旋关系时 $I_i > 0$ 反之 $I_i < 0$

5. 磁场对电流的作用

(1) 安培力

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{大小: } dF = IdlB \sin \theta \\ \text{方向: } Id\vec{l} \times \vec{B} \end{array} \right.$$



(2) 电流强度的单位——安培

定义: 真空中通有同值电流的两无限长平行直导线, 若相距 1 米, 单位长度受力 $2 \times 10^{-7} \text{ N}$, 则电流为 1 安培。

(3) 匀强磁场对平面载流线圈的作用

合力:
$$\sum \vec{F} = 0$$

磁力矩:
$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad \vec{m} = IS\vec{e}_n \text{ (磁矩)}$$

(4) 磁力的功

$$A = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I d\Phi_m = I \Delta \Phi_m$$

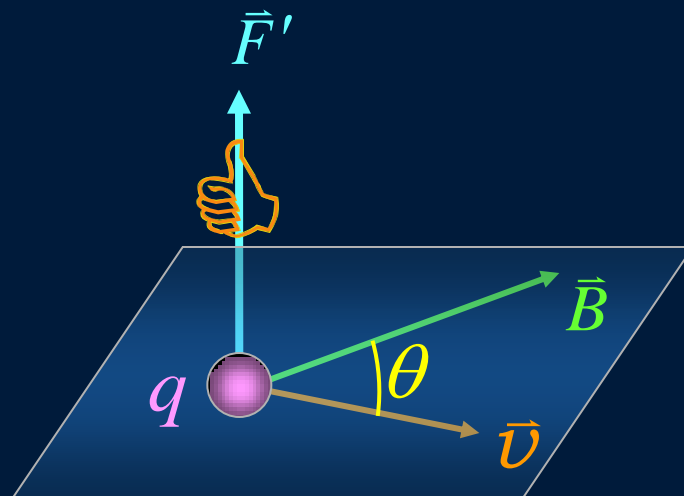
(5) 磁偶极子在外磁场中的势能

$$V = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

6. 磁场对运动电荷的作用

(1) 磁场对运动电荷的作用

洛伦兹力 $\vec{F}' = q\vec{v} \times \vec{B}$



洛伦兹力始终与电荷运动方向垂直，对电荷不作功。

(2) 霍耳效应

霍尔电压 $U_{ab} = R_H \frac{IB}{d}$

霍耳系数 $R_H = \frac{1}{nq}$

磁现象

运动电荷

电流强度
电流密度

稳恒电流

磁性材料

分子环流
右手定则

磁场

毕奥·沙伐尔定律
安培定律
场叠加原理

实验基础

物质属性

力：对运动电荷施加作用
能量：对载流导线作用且可以移动其做功
与物质作用-磁介质的磁化

场的分布特性与规律

运动电荷产生磁场

磁感应强度 $\vec{f} = q (\vec{v} \times \vec{B})$

场的几何描述：磁感应线

已知电流和运动电荷求 $\vec{B}(x, y, z)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{电流元 } d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} \\ \text{电流回路 } \vec{B} = \int_l \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} \\ \text{运动电荷 } \vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \vec{e}_r}{4\pi r^2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

磁场给运动电荷以作用力

磁场力 $\vec{f} = q (\vec{v} \times \vec{B})$

洛伦兹力 $\vec{f} = q\vec{E} + q (\vec{v} \times \vec{B})$

安培力：

电流元 $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

整段导线 $\vec{F} = \int_l I d\vec{l} \times \vec{B}$


无限长平行导线 $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$

磁场

场的分布特性与规律

运动电荷产生磁场

分布规律: 高斯定理 $\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

环路定理 $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$ 

磁场给运动电荷以作用力

磁场对载流线圈的磁力矩

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = NIS\vec{e}_n \times \vec{B}$$



北京正负电子对撞机1988年10月建成，是世界上
一个重要的高能物理实验研究基地，

（本章由田蓬勃编写制作）