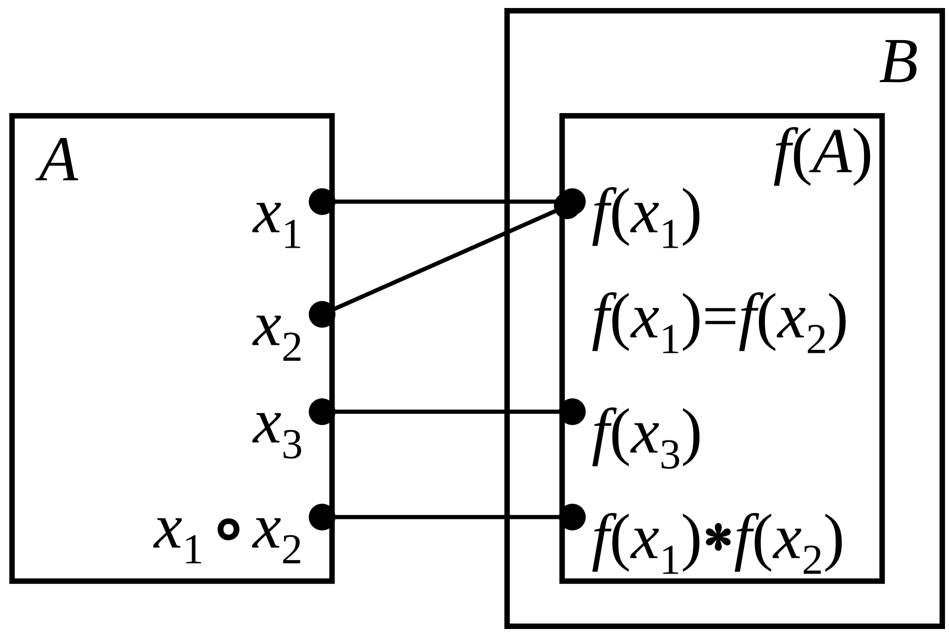
同态

定义5.11 设V_1=<A,∘>和V_2=<B,∗>是同类型的代数系统，若存在函数f:A→B，使得$\forall x_1, x_2 \in A$ 都有 $f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$, 则称$f$ 是V_1到V_2的同态映射（函数）. 或称V_1和V_2同态.

与同构的差异：

(1)同态映射不限制必须双射映射

(2)同态映射的像允许$f(A) \subset B$以及$f(A) = B$



同态

如果$f(A) = B$，即f是一个从A到 B的满射，则有

定义5.12 设$V_1=\langle A,\circ\rangle$和$V_2=\langle B,*\rangle$是同类型的代数系统，若存在满(单)射函数$f:A\to B$, 使得$\forall x_1, x_2\in A$ 都有 $f(x_1\circ x_2) = f(x_1)*f(x_2)$, 则称 f 是V_1到V_2的满(单)同态映射（函数）. 或称V_1和V_2满(单)同态.

同构、满（单）同态、同态条件依次减弱

实例

(1) 设V_1=<Z^+,+>, V_2=<Z_n,⊕>．其中Z^+为非负整数集，+为普通加法；Z_n={0,1,…,n−1}，⊕为模n加. 令

$$f: Z^+ \to Z_n,\ f(x)=(x)\bmod n$$

那么 f 是V_1到V_2的满同态.

(2) 设V_1=<R,+>, V_2=<R*, ·>，其中R和R*分别为实数集与非零实数集，+ 和 ·分别表示普通加法与乘法．令

$$f: R \to R^*,\ f(x)=e^x$$

则 f 是V_1到V_2的单同态.

(3) 设V=<Z,+>，其中Z为整数集，+为普通加法. ∀a∈Z，令

$$f_a: Z \to Z,\ f_a(x)=ax,$$

那么 f_a 是V的自同态. 当a=0时称 f_0 为零同态；当a=±1时，称 f_a 为自同构；除此之外其他的 f_a 都是单自同态.

总结

(1) 满同态仍能保持结合律、交换率、分配率，存在单位元、零元和逆元，但对保持性质是单向的

(2) 同构对保持性质是双向的

原因：同构映射是对称的；满同态映射规则不一定满足对称性

(3) 对同态而言，性质能够单向地对一个子系统保持，即若$<A,\circ>$和$<B,*>$同态，则$<A,\circ>$所具有的性质单向地对$<B,*>$的一个子系统$<B',*>$($B'=f(A)$)保持

原因：A到B的映射不一定满射，而是从A到B'的同态映射是满同态映射，可单向保持性质

同余关系

考虑例子

<Z,+>上的关系*R* = {(*x*,*y*)|*x*,*y*∈*Z*, *x*-*y*能被3整除}，是一个等价关系，它将Z划分成三个等价类：

[0]={…,-6,-3,0,3,6,…}　　[1]={…,-5,-2,1,4,7,…}

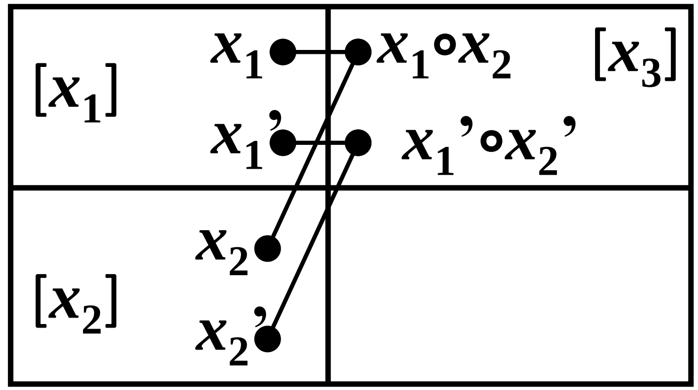
[2]={…,-4,-1,2,5,8,…}

关系*R*使[0], [1], [2]中任意两个类的元素+运算后所得的结果均在同一个类内，如[1]和[2]中元素相加后结果在[0]中。*R*为同余关系。

定义5.13 设代数系统$<A,\circ>$上有等价关系E，若对$\forall x_1, x_2 \in A$ 有 $x_1 E x_1'$，$x_2 E x_2'$必有：$(x_1 \circ x_2) E (x_1' \circ x_2')$，则称$E$是$<A,\circ>$上的**同余关系**.

实例

Note：一个等价关系若为$\langle A,\circ\rangle$上的同余关系，则$\langle A,\circ\rangle$的运算“$\circ$”按**等价类**保持



例：给定代数$A=\langle I, +\rangle$和I上的模$k(k\in I_+)$关系~, 即

$x\sim y$当且仅当$x\equiv y \bmod (k)$，则~是关于运算+的同余关系。

设$a\sim b$, 那么$a-b=nk(n\in I)$；$c\sim d$, 那么$c-d=nk(n\in I)$。

于是$(a+c)-(b+d)=nk$, 因此$a+c\sim b+c$。

所以, ~是关于+的同余关系。

商代数

定义:

设有代数系统$<A,\circ>$及其上的同余关系E，可以按E对A分类，而形成一个商集A/E. 再定义一个A/E上的运算“$*$”, 对任意$[x_1],[x_2] \in A/E$, $x_1, x_2 \in A$有

$$[x_1]*[x_2]=[x_1\circ x_2]$$

这样$< A/E, * >$构成了一个代数系统, 称为$<A,\circ>$的商代数

自然同态

定理5.10 代数系统$<A,\circ>$与其上的商代数$<A/E, *>$同态.

证明: 建立一个函数$f_E:A\rightarrow A/E$,

$$f_E(x) = [x]$$

其中$x\in A$，且有

$$f_E(x_1\circ x_2) = [x_1\circ x_2]= [x_1]*[x_2]= f_E(x_1) * f_E(x_2)$$

得证.

Note:

(1) 把这种同态称为对于同余关系E的自然同态.

(2) 任何一个代数系统总可以找到一个与其同态的代数系统, 这个同态的代数系统就是它的商代数.

(3) 自然同态中的映射是一个满同态映射, 故$<A,\circ>$与其上的商代数$<A/E, *>$不仅同态, 而且满同态, 自然同态是一个满同态

(4) 同余可以诱导出同态

性质

定理5.11 代数系统$<A,\circ>$与$<B,*>$同态, $f:A\to B$是它们之间的一个同态映射, 在$<A,\circ>$上建立一个关系E_f: 对$\forall x_1, x_2\in A$, $f(x_1)=f(x_2)$, 记为$x_1 E_f x_2$. 则E_f是同余关系.

证明: 显然, E_f是等价关系.

即要证如果$x_1 E_f x_1'$, $x_2 E_f x_2'$必有: $(x_1\circ x_2) E_f (x_1'\circ x_2')$ 即,

$$f(x_1\circ x_2)=f(x_1'\circ x_2')$$

由f是同态映射, 可知

$$f(x_1\circ x_2)=f(x_1)*f(x_2)$$

$$f(x_1'\circ x_2')=f(x_1')*f(x_2')$$

由于$f(x_1)=f(x_1')$, $f(x_2)=f(x_2')$, 则有:

$$f(x_1\circ x_2)=f(x_1'\circ x_2')$$

同态可以诱导出同余

性质

定理5.12 设f是从$<A,\circ>$到$<B,\otimes>$的满同态映射, 则$<A/E_f, *>$与$<B,\otimes>$同构.

（同态→同余关系→商代数）

证明 $h: A/E_f \to B$， $h([x])=f(x)$

(1)证明h是双射函数。$h: A/E_f \to B$是单射:对任意x_1、$x_2 \in B$, 若$f(x_1)=f(x_2)$, 则$x_1 \sim x_2$, $[x_1]=[x_2]$。

h是满射: B上的任一元素均可写成$f(x)$,于是存在$[x] \in A/E_f$使$h([x])=f(x)$。

(2)证明h保持运算。

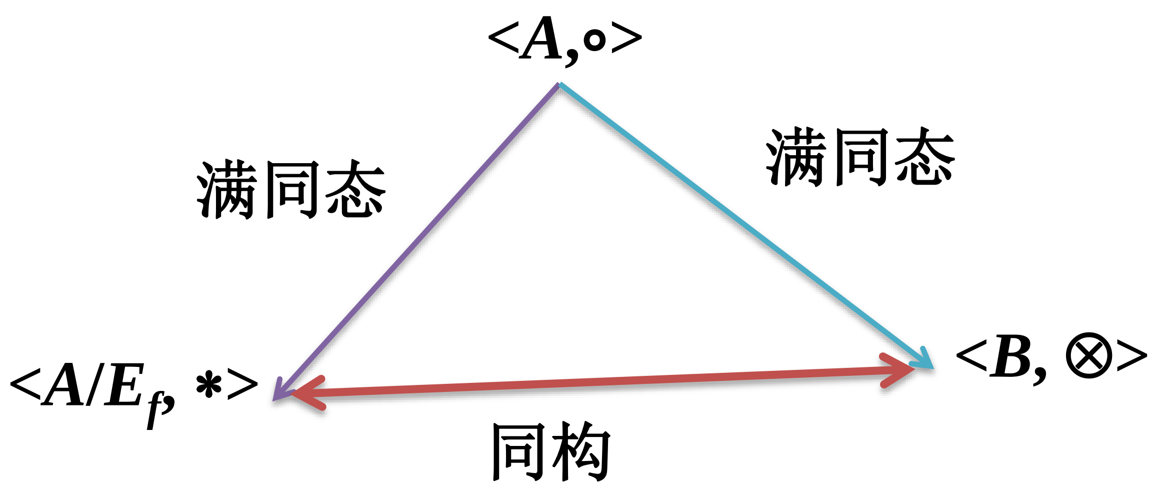
$h([x]*[y])=h([x\circ y])=f(x\circ y)=f(x)\otimes f(y)=h([x])\otimes h([y])$

说明

Note:

(1) 对一个代数系统$<A,\circ>$, 任一与它满同态的代数系统$<B, \otimes>$, 总可以找到$<A,\circ>$的商代数$<A/E_f, *>$与之同构.

(2) 若有从$<A,\circ>$到$<B, \otimes>$的满同态, 则必有从$<A,\circ>$到$<A/E_f, *>$的满同态, 以及$<A/E_f, *>$与$<B, \otimes>$同构.



实例

设V_1=<Z$^+$,+>, V_2=<Z$_n$,⊕>．其中Z$^+$为非负整数集，+为普通加法；Z$_n$={0,1,…,n−1}，⊕为模n加. 令

$$f: Z^+ \to Z_n，f(x)=(x)\bmod n$$

那么 f 是V_1到V_2的满同态.

商集Z^+/E_f={[0],[1],[2],[3]......[n-1]}，　V_3=<Z^+/E_f,*>

运算为[x][y]=[x+y]

h：$Z^+/E_f \to Z_n$，$h([x])=f(x)$

$h([x]*[y])=h([x+y])=f(x+y)=(x+y)\bmod n= (x)\bmod n \oplus (y)\bmod n$

$=f(x)\oplus f(y)=h([x])\oplus h([y])$

故有：$V_2 \simeq V_3$

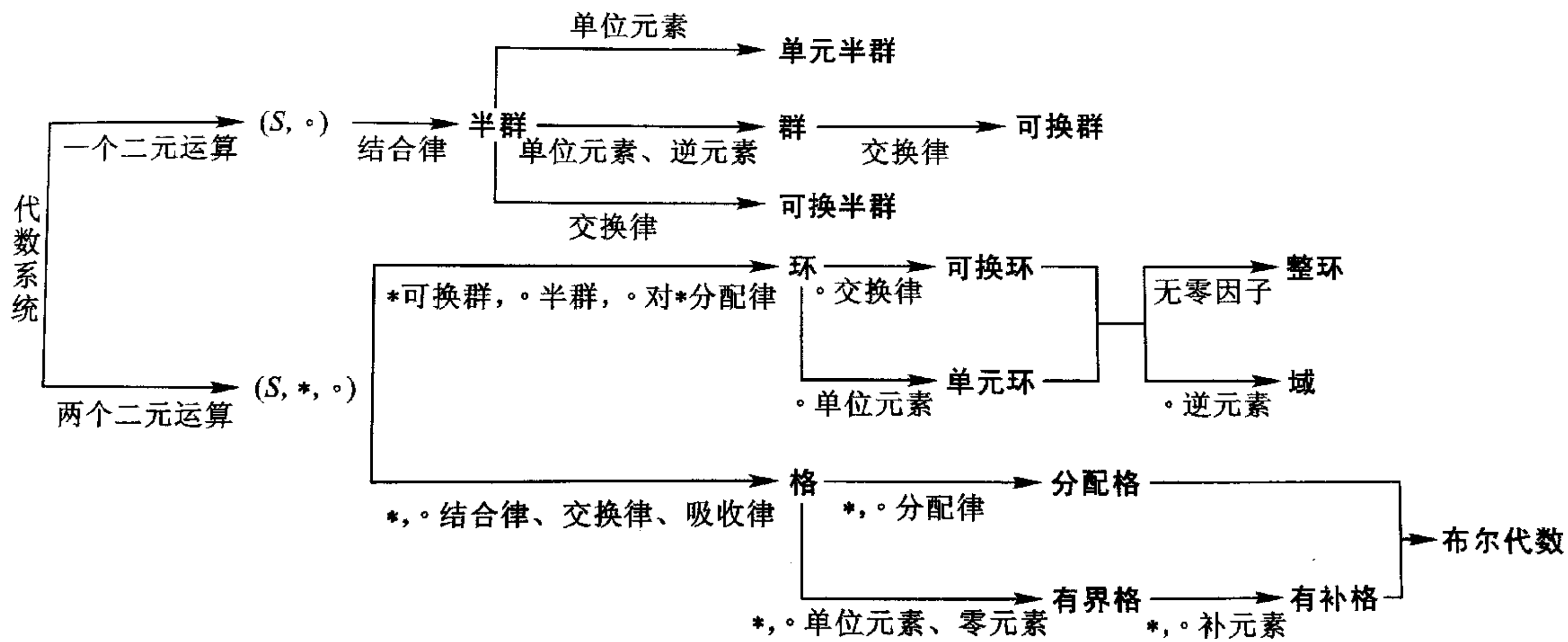
5.4 常用代数系统分类

思路:

(1) 对性质相同的代数系统进行集中, 统一的研究, 将某种(些)性质看成此代数系统的固有属性

(2) 按照某些共同性质分类, 构成了各种特定的代数系统

(3) 常用的代数系统划分成3大类15小类



作业

方版：P183　　8，9，10

P187　　6

(3) 描述从〈$\mathbf{N}_2$，$+_2$，0〉到〈$\mathbf{N}_3$，$+_3$，0〉的所有同态集合。

8. 设 h 是从 $A=\langle S, *, k\rangle$ 到 $A'=\langle S', *', k'\rangle$ 的同态，证明如果〈T，$*'$，k'〉是 A' 的子代数，那么〈$h^{-1}(T)$，$*$，k〉是 A 的子代数。

9. 设 f_1 和 f_2 都是从代数〈S，$*$〉到〈S'，$*'$〉的同态，$*$ 和 $*'$ 都是二元运算，且 $*'$ 是可交换和可结合的，证明函数

$$h: S \to S'$$

$$h(x) = f_1(x) *' f_2(x)$$

是从〈S，$*$〉到〈S'，$*'$〉的同态。

10. 如果 h_1 是从代数〈S，$*$，$\triangle$，k〉到〈S'，$*'$，$\triangle'$，k'〉的同态；h_2 是从代数〈S'，$*'$，$\triangle'$，k'〉到〈S''，$*''$，$\triangle''$，k''〉的同态。试证明 $h_2 \circ h_1$ 是从代数〈S，$*$，$\triangle$，k〉到〈S''，$*''$，$\triangle''$，k''〉的同态。

6. 设代数 $A=\langle \mathbf{I}, +, \times\rangle$，$\mathbf{I}$ 是整数集合，$+$、$\times$ 是一般加法和乘法，定义 $\mathbf{I}$ 上的关系 $\sim$ 为

$$x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

对运算 $+$，$\sim$ 是同余关系吗？对运算 $\times$，$\sim$ 是同余关系吗？