§1.2 质点运动学的基本问题

主要内容：

1. 运动学第一类问题

2. 运动学第二类问题

学习要求：

掌握直角坐标系下两类运动学问题的计算。

1. 第一类问题

已知质点的运动方程，求质点在任意时刻的位置，速度和加速度。 ——微分法

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \Rightarrow \vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

- **只要知道运动方程，就可以确定质点在任意时刻的位置、速度和加速度。**
- **从运动方程中消去时间参数** t**，还可得质点运动的轨迹方程。**

* 直接根据定义计算

例 已知一质点的运动方程为：$\vec{r} = a\cos 2\pi t\vec{i} + b\sin 2\pi t\vec{j}$

式中a, b均为正常数。

求 证明质点的加速度恒指向椭圆中心。

证 本题属于运动学第一类问题:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -2\pi a\sin 2\pi t\vec{i} + 2\pi b\cos 2\pi t\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -4\pi^2 a\cos 2\pi t\vec{i} - 4\pi^2 b\sin 2\pi t\vec{j}$$

$$= -4\pi^2(a\cos 2\pi t\vec{i} + b\sin 2\pi t\vec{j}) = -4\pi^2\vec{r}$$

加速度矢量$\vec{a}$与位矢$\vec{r}$方向相反，说明加速度恒指向椭圆中心。

例 **已知质点运动方程为** $\vec{r} = R(1/2 + \cos\omega t)\vec{i} + R\sin\omega t\vec{j}$

($\boldsymbol{\omega}$**,** $\boldsymbol{R}$ **为常数)。**

求证 **该质点运动时的速度始终与加速度垂直。**

证 **两矢量相互垂直时应有** $\vec{v} \cdot \vec{a} = va\cos\theta = 0$

$$\because \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -\omega R\sin\omega t\vec{i} + \omega R\cos\omega t\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 R\cos\omega t\vec{i} - \omega^2 R\sin\omega t\vec{j}$$

$$\therefore \vec{v} \cdot \vec{a} = \omega^3 R^2 \sin\omega\cos\omega t^2 - \omega^3 R^2 \sin\omega\cos\omega t^2$$

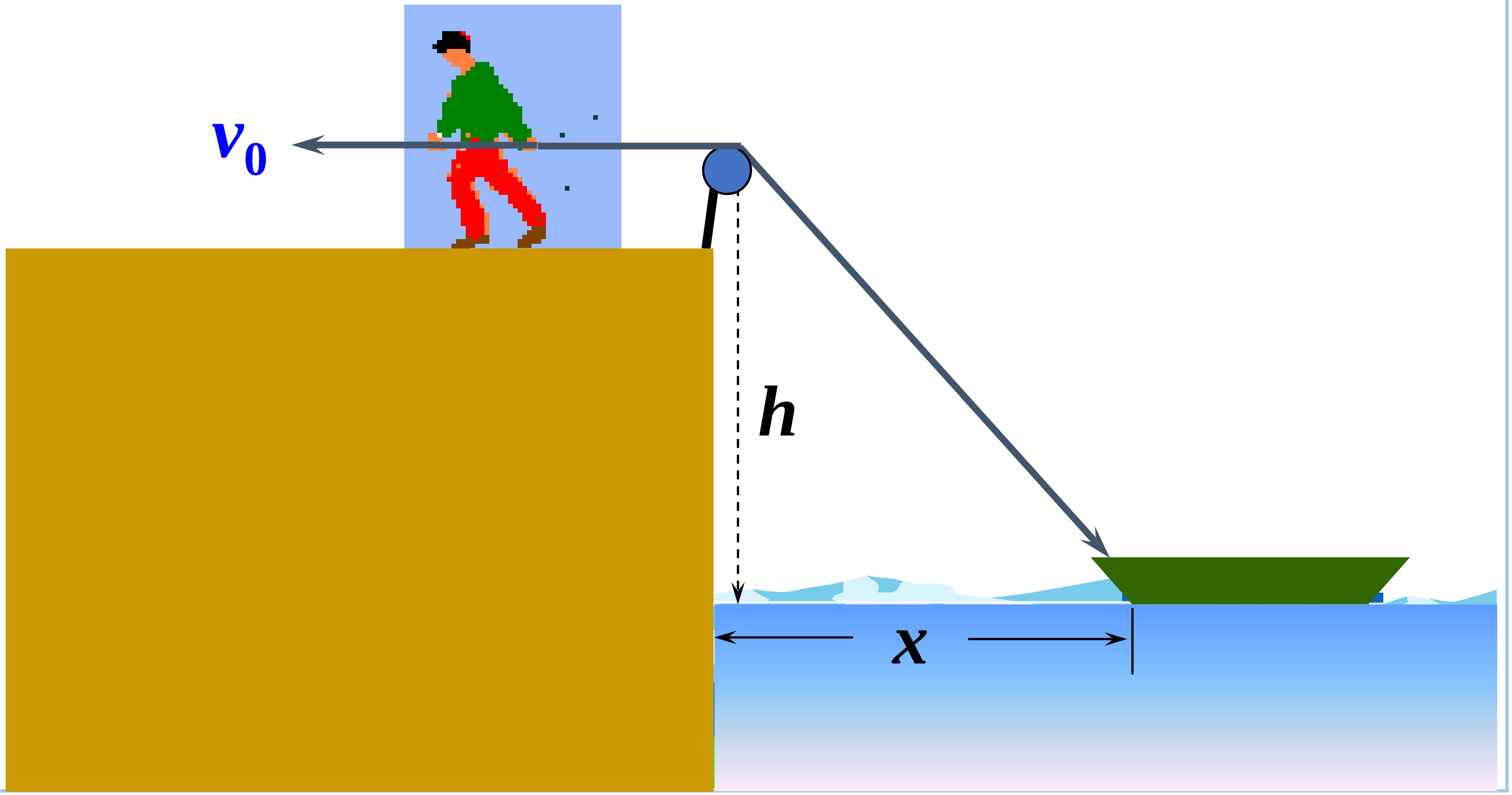
$$= 0$$

$$\therefore \vec{v} \perp \vec{a}$$

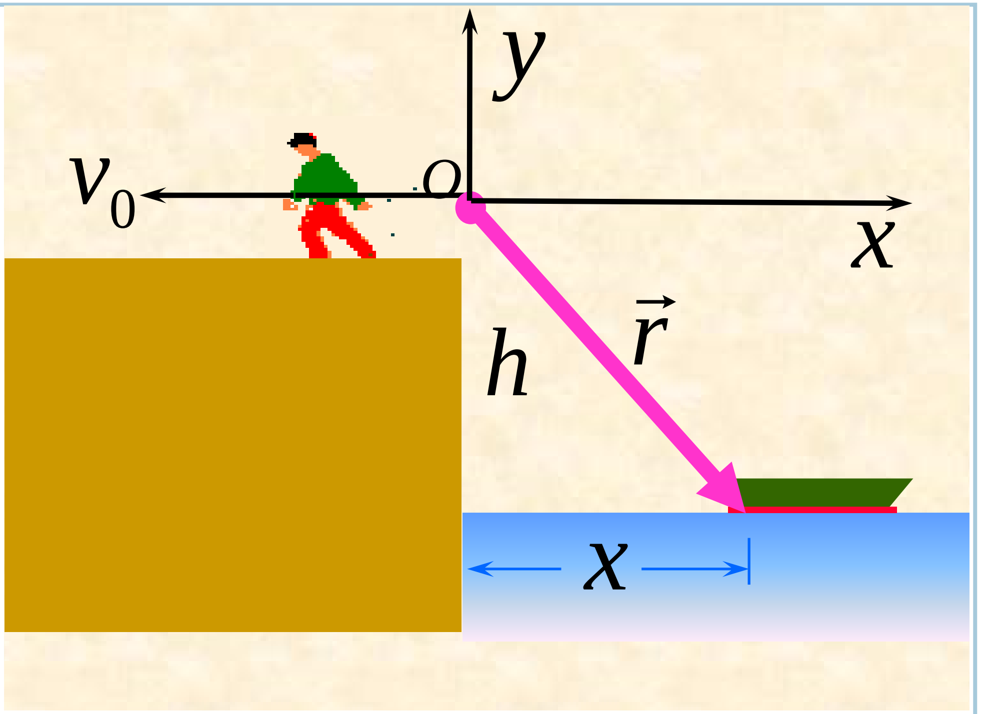
* 未直接给出运动方程——运用几何关系

例 在离水面高 h 的岸边，有人用绳子拉一小船，并以恒定的速率 v_0 收绳，船的初速为零。

求 当船离岸距离为 x 时，船的速度、加速度。



解　**建立如图直角坐标系**



船的位矢 $\vec{r} = x\vec{i} - h\vec{j}$

绳长 $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + h^2}$

收绳速率 $v_0 = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

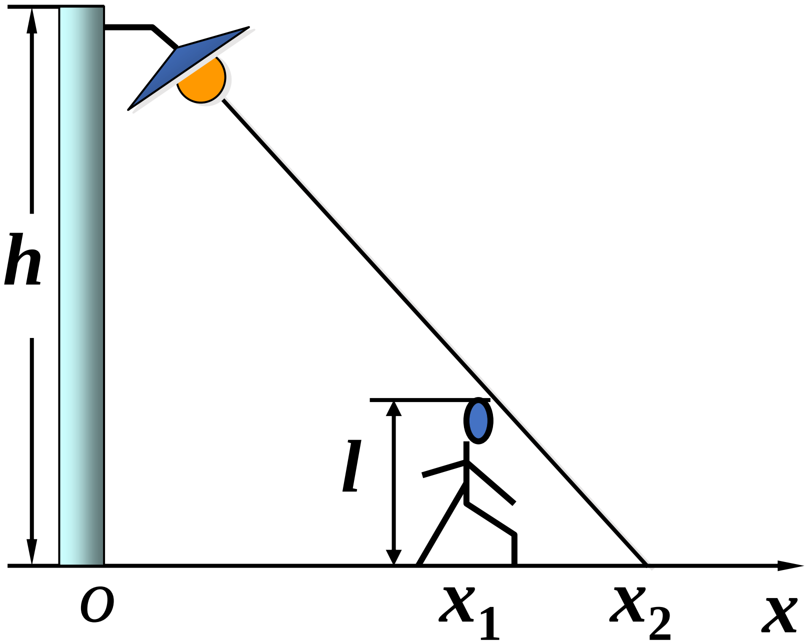
$$= -\frac{\mathrm{d}\sqrt{x^2+h^2}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2+h^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

船的速度 $v = v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v_o}{x}\sqrt{x^2+h^2}$

加速度 $a = a_x = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v_o{}^2 h^2}{x^3}$　　**收绳过程中船在加速**

例 **路灯距地面高度h，身高为l 的人以速度υ_0 在路上匀速行走。**

求 **人影头部的移动速度。**



解 **设υ 为人影头部的移动速度**

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

由几何关系 $$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{x_2}{h}$$

$$(h-l)x_2 = hx_1$$

两边求导 $$(h-l)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = h\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \Longleftarrow \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \upsilon_0$$

$$\upsilon = \frac{h\upsilon_0}{h-l}$$

2. 第二类问题

已知质点运动的速度或加速度，并附以初始条件（即t=0时，质点的位置$\vec{r}_0$和速度$\vec{v}_0$），求质点的运动方程 ——积分法

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\mathrm{d}t$$

注意：**矢量积分在具体运算时要化为标量积分。**

情况1： a 是常量

例 已知质点作匀变速直线运动，加速度为a，a=常量，且初始条件 t=0 时，$v = v_0$， $x = x_0$

求 质点的运动方程

解 $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ ➡ $\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\mathrm{d}t$

一维运动中，矢量表示可省去单位矢量，方向用正负号表示

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$$

两边积分 $\displaystyle\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t = a\int_0^t \mathrm{d}t$

由此得 $v = v_0 + at$

又由定义 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\upsilon=\upsilon_0+at$$

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t(\upsilon_0+at)\mathrm{d}t$$

得 $$x=x_0+\upsilon_0 t+\frac{1}{2}at^2$$ （运动方程）

由 $$a=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\upsilon\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x=\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\upsilon\mathrm{d}\upsilon$$

得 $$\upsilon^2=\upsilon_0^2+2a(x-x_0)$$

以上三式为匀变速直线运动的基本公式

情况2： a 是 t 的函数 $a=a(t)$

例 一质点作直线运动，已知其加速度

$$a=2-2t(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})$$ 加速度方向发生变化

初始条件为 $x_0=0,\ \upsilon_0=0$

求 (1) 质点在第一秒末的速度;(2)运动方程；(3)质点在前三秒内运动的路程。

解 (1) 求质点在任意时刻的速度

由 $a=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=2-2t$ 分离变量 $\mathrm{d}\upsilon=(2-2t)\mathrm{d}t$

两边积分 $\int_0^{\upsilon}\mathrm{d}\upsilon=\int_0^t(2-2t)\mathrm{d}t$

质点在任意时刻的速度 $\upsilon=2t-t^2$

t =1s 时的速度 $\upsilon_1=1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

(2)由质点的速度求运动方程

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t - t^2$$

分离变量 $\mathrm{d}x = (2t - t^2)\,\mathrm{d}t$

两边积分 $\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t (2t - t^2)\,\mathrm{d}t$

质点的运动方程

$x = t^2 - \frac{1}{3}t^3$ （m） 特定时间后运动方向反向

(3) 质点在前三秒内经历的路程

$$s=\int_0^3 |\mathbf{v}|\mathrm{d}t=\int_0^3 |2t-t^2|\mathrm{d}t$$

路程是标量，需分段积分！

令 $v=2t-t^2=0$，得 $t=2$

$$s=\int_0^2 (2t-t^2)\mathrm{d}t+\int_2^3 (t^2-2t)\mathrm{d}t=\frac{8}{3}\mathrm{m}$$

情况3： a是v的函数　　$a = a(v)$

神州飞船返回舱运动状态估计：

模型建立：**地球半径6371km,大气层厚度约700km，为简化问题，假设返回舱受到的万有引力加速度均为 g，阻力与速度成正比。**

例 **返回舱由静止状态下落进入大气层。已知 $a = g - B\upsilon$，式中 g 为重力加速度，B 为常量。**

求 **返回舱的速度和运动方程。**

解 **选向下为x轴正向**

(1) 由微分关系 $a=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=g-B\upsilon$

分离变量并两边积分

$$\int_0^{\upsilon}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{g-B\upsilon}=\int_0^{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \upsilon=\frac{g}{B}(1-e^{-Bt})$$

(2) 由 $\upsilon=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ **求运动方程**

$$\int_0^{x}\mathrm{d}x=\int_0^{t}\upsilon\mathrm{d}t \Rightarrow x=\int_0^{t}\frac{g}{B}(1-e^{-Bt})\mathrm{d}t=\frac{g}{B}t-\frac{g}{B^2}(1-e^{-Bt})$$

- **讨论：返回舱下落速度随时间按指数规律增加，$t\to\infty$时，$v\to g/B$(常量)，达到最大速度，称为收尾速度或终极速度。**

解题思路

1.运动学的第一类问题，用微分法。

① 根据已知条件在选定的坐标系中写出运动方程。

② 用求导数的方法求出速度和加速度。

③ 要注意描述质点运动的几个物理量的矢量表示方法，分清$|\Delta\vec{r}|$和Δr， $|\Delta\vec{v}|$和Δv

2.运动学的第二类问题，用积分法。

已知 $a = a(t)$ 或 $a = a(x)$ 或 $a = a(v)$

及初始条件用积分的方法求出速度和运动方程。

运动学第二类问题解法总结

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$ **初始条件：** $t=0, x=x_0, v=v_0$

1.匀变速直线运动 $a=$ 常量

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t \Rightarrow v(t)-v_0=a(t-t_0)$$

$$\mathrm{d}x=v(t)\mathrm{d}t \Rightarrow x=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a(t-t_0)^2$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad v\mathrm{d}v=a\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

2.加速度是时间函数 $a = a(t)$

$$\mathrm{d}\upsilon = a(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \upsilon(t) - \upsilon_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}x = \upsilon(t)\mathrm{d}t \Rightarrow x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} \upsilon(t)\mathrm{d}t$$

3.加速度是坐标函数 $a = a(x)$

$$\upsilon\mathrm{d}\upsilon = a(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \upsilon^2(x) - \upsilon_0^{\ 2} = 2\int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\upsilon(x)} = \mathrm{d}t \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\upsilon(x)}$$

4.加速度是速度函数 $a = a(v)$

①欲求速度与时间关系

$$\frac{\mathrm{d}v}{a(v)} = \mathrm{d}t \Rightarrow t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{a(v)}$$

$$\mathrm{d}x = v(t)\mathrm{d}t \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$$

②欲求速度与距离关系

$$v\frac{\mathrm{d}v}{a(v)} = \mathrm{d}x \Rightarrow x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v\mathrm{d}v}{a(v)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{v(x)} = \mathrm{d}t \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}v}{v(x)}$$

§1.3 叠加原理与曲线运动 *

主要内容：

1. 运动叠加原理

2. 曲线运动的研究方法

1 运动的独立性和运动叠加原理

运动的独立性：一个物体同时参与好几个方向上的分运动，那么，任何一个方向上的分运动不会因为其它方向上的运动同时存在而受影响

运动叠加原理：一个运动可以看成几个各自独立进行的分运动的叠加

叠加原理和运动的独立性在本质上是等价的

2 曲线运动的研究方法

研究曲线运动的基本方法：

将曲线运动分解成几个直线运动进行单独分析

从地面上某点向空中抛出一物体，它在空中的运动称为抛体运动。抛体运动是一种平面曲线运动。

可看成是两个或三个相互垂直的直线运动的叠加。

处理抛体运动问题的一般步骤：

1. **运动分解：写出沿不同方向的直线运动方程。**

2. **分运动求解：求出沿不同方向的速度、加速度分量等。**

3. **运动合成：抛体运动的运动方程、速度、加速度是相应各直线运动的叠加。**

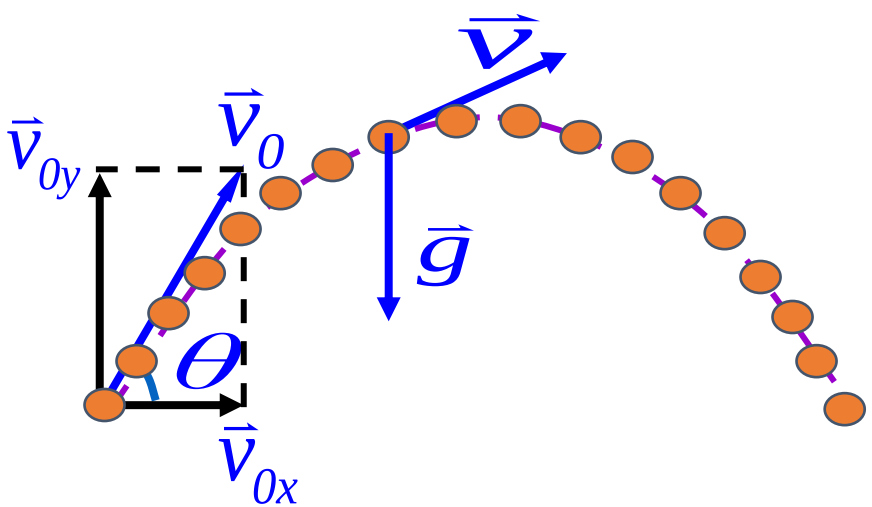
3. 无阻力抛体运动

从地面上某点向空中抛出一物体，以抛出点为原点，取水平方向为x轴，竖直方向y轴。

任意时刻速度分量为

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$



积分可得运动方程

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

消去t 得轨迹方程

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2\upsilon_0^{\ 2}\cos^2\theta}x^2$$

由y =0得射程 $$x_{\mathrm{m}} = \frac{\upsilon_0^{\ 2}\sin 2\theta}{g}$$

由υ_y=0有 $$t = \upsilon_0 \sin\theta / g$$

得射高 $$y_{\mathrm{m}} = \frac{\upsilon_0^{\ 2}\sin^2\theta}{2g}$$

- **讨论：抛射初速度大小υ_0一定的情况下，抛射角θ = 45° 时，射程最大，θ = 90° 时，射高最大。**

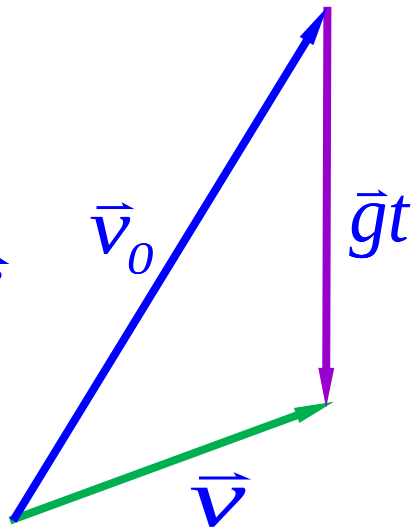
◆使用矢量形式分析

抛体在任意时刻的速度

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

$$\vec{v} = (v_0 \cos\theta)\vec{i} + (v_0 \sin\theta - gt)\vec{j}$$



该矢量形式还可以写成

$$\vec{v} = [(v_0 \cos\theta)\vec{i} + (v_0 \sin\theta)\vec{j}] - gt\,\vec{j}$$

$$= \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

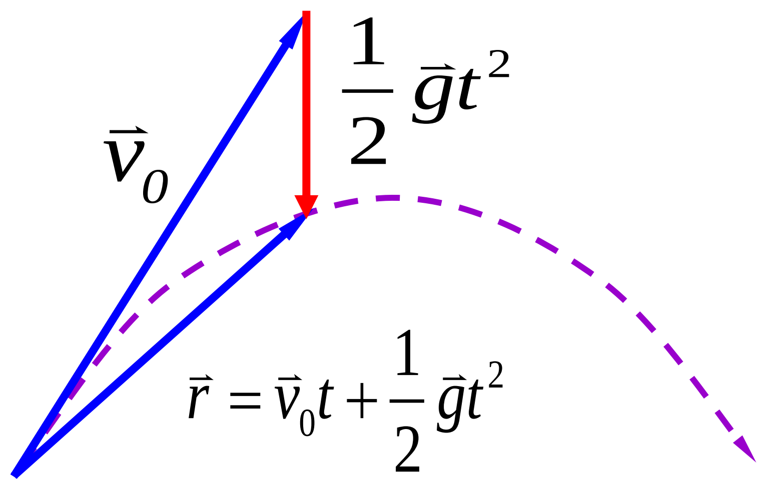
抛体在任意时刻的运动方程

$$\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$$

$$\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{g}t)\mathrm{d}t$$

$$= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$



抛体运动可以看作沿初速度方向的匀速直线运动和沿竖直方向的自由落体运动的叠加

—— **归结为直线运动的叠加。**