陪集定义与性质

定义6.18 设H是G的子群，$a \in G$.令

$$Ha=\{h \circ a \mid h \in H\}$$

称Ha是子群H在G中的右陪集. 称a为Ha的代表元素.

类似定义左陪集。

定理6.22 设H是群G的子群，则

(1) $He = H$

(2) $\forall a \in G$ 有$a \in Ha$

(3) $\forall a,b \in G$有$a \in Hb \Leftrightarrow a \circ b^{-1} \in H \Leftrightarrow Ha=Hb$

证 (1) $He = \{ h \circ e \mid h \in H \} = \{ h \mid h \in H \} = H$

(2) 任取 $a \in G$，由$a = e \circ a$ 和 $e \circ a \in Ha$ 得 $a \in Ha$

陪集的基本性质

(3) $\forall a,b\in G$有$a\in Hb \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H \Leftrightarrow Ha=Hb$

先证$a\in Hb \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H$

$$a\in Hb \Leftrightarrow \exists h(h\in H\wedge a=h\circ b)$$
$$\Leftrightarrow \exists h(h\in H\wedge a\circ b^{-1}=h) \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H$$

再证 $a\in Hb \Leftrightarrow Ha=Hb.$

充分性. 若$Ha=Hb$，由$a\in Ha$ 可知必有 $a\in Hb.$

必要性. 由 $a\in Hb$ 可知存在 $h\in H$ 使得 $a=h\circ b$，即$b=h^{-1}\circ a$

任取 $h_1\in H$则$h_1\circ a\in Ha$，则有

$$h_1\circ a = h_1\circ(h\circ b) = (h_1\circ h)\circ b\in Hb$$

从而得到 $Ha\subseteq Hb$. 反之，任取$h_1\circ b\in Hb$，则有

$$h_1\circ b = h_1\circ(h^{-1}\circ a) = (h_1\circ h^{-1})\circ a\in Ha$$

从而得到$Hb\subseteq Ha$. 综合上述，$Ha=Hb$得证.

实例

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

合成运算

$\diamond$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_5	p_6	p_3	p_4
p_3	p_3	p_6	p_1	p_5	p_4	p_2
p_4	p_4	p_5	p_6	p_1	p_2	p_3
p_5	p_5	p_4	p_2	p_3	p_6	p_1
p_6	p_6	p_3	p_4	p_2	p_1	p_5

实例

取$H=\{p_1, p_4\}$, $<H, \diamond>$是$<\{p_1....p_6\}, \diamond>$的子群

左陪集是： $p_1H = p_4H = \{p_1, p_4\}$

$$p_2H = p_6H = \{p_2, p_6\}$$

$$p_3H = p_5H = \{p_3, p_5\}$$

$\{\{p_1, p_4\}, \{p_2, p_6\}, \{p_3, p_5\}\}$是$\{p_1....p_6\}$的一个划分。

右陪集是: $Hp_1 = Hp_4 = \{p_1, p_4\}$

$$Hp_3 = Hp_6 = \{p_3, p_6\}$$

$$Hp_2 = Hp_5 = \{p_2, p_5\}$$

$\{\{p_1, p_4\}, \{p_2, p_5\}, \{p_3, p_6\}\}$是$\{p_1....p_6\}$的一个划分。

陪集的基本性质

定理6.23 设H是群G的子群，在G上定义二元关系R：

$$\forall a,b\in G,\ \langle a,b\rangle\in R \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H$$

则 R是G上的等价关系，且$[a]_R = Ha$.

证 先证明R为G上的等价关系.

自反性. 任取$a\in G$，$a\circ a^{-1} = e\in H \Leftrightarrow \langle a,a\rangle\in R$

对称性. 任取$a,b\in G$，则 $\langle a,b\rangle\in R\Rightarrow a\circ b^{-1}\in H$

$\Rightarrow(a\circ b^{-1})^{-1}\in H\Rightarrow b\circ a^{-1}\in H\Rightarrow\langle b,a\rangle\in R$

传递性. 任取$a,b,c\in G$，则

$$\langle a,b\rangle\in R\wedge\langle b,c\rangle\in R \Rightarrow a\circ b^{-1}\in H\wedge b\circ c^{-1}\in H$$

$$\Rightarrow a\circ c^{-1}\in H \Rightarrow \langle a,c\rangle\in R$$

下面证明：$\forall a\in G$，$[a]_R = Ha$. 任取$b\in G$，

$b\in[a]_R \Leftrightarrow \langle a,b\rangle\in R \Leftrightarrow a\circ b^{-1}\in H \Leftrightarrow Ha=Hb \Leftrightarrow b\in Ha$

推论

推论 设H是群G的子群, 则

(1) $\forall a,b\in G$，$Ha = Hb$ 或 $Ha\cap Hb = \varnothing$

(2) $\cup\{Ha \mid a\in G\} = G$

证明：由等价类性质可得.

例8 <Z, +>是整数加法群, <H, +>是正整数m的所有倍数作成的子群, 若m=3, H的右陪集为:

$$H0 =\{\ldots, -6,-3,0,3,6,\ldots\}$$

$$H1 =\{\ldots, -5,-2,1,4,7,\ldots\}$$

$$H2 =\{\ldots, -4,-1,2,5,8,\ldots\}$$

0,1,2是它们的代表元素. 这三个右陪集将<Z, +>划分成三个互不相交的集合并完全覆盖Z.

左陪集的定义与性质

设G是群，H是G的子群，H 的左陪集，即

$$aH = \{a \circ h \mid h \in H\},\ a \in G$$

关于左陪集有下述性质：

(1) $eH = H$

(2) $\forall a \in G$，$a \in aH$

(3) $\forall a,b \in G$，$a \in bH \Leftrightarrow b^{-1} \circ a \in H \Leftrightarrow aH=bH$

(4) 若在G上定义二元关系R，

$$\forall a,b \in G,\ \langle a,b\rangle \in R \Leftrightarrow b^{-1} \circ a \in H$$

则R是G上的等价关系，且$[a]_R = aH$.

例如, 例8对左陪集同样适用.

Lagrange定理

定理6.24 （Lagrange）设G是有限群，H是G的子群，则

$$|G| = |H| \cdot [G:H]$$

其中$[G:H]$ 是H在G中的不同右陪集(或左陪集) 数，称为H在G 中的**指数**.

一个有限群的任意子群的阶数整除群的阶数。

证 设$[G:H] = r$，$a_1,a_2,\ldots,a_r$分别是H 的r个右陪集的代表元素，

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \ldots \cup Ha_r$$

由于这r个右陪集两两不交，$|G| = |Ha_1| + |Ha_2| + \ldots + |Ha_r|$

由$|Ha_i| = |H|$，$i = 1,2,\ldots,r$, 得

$$|G| = |H| \cdot r = |H| \cdot [G:H]$$

Lagrange定理的推论

推论1 任一阶为素数的有限群只有平凡子群.

推论2 任一阶为n的有限群的循环子群, 其周期均能整除n.

推论3 对于任一阶为n的有限群, 可得$a^n = e$ (a为群中任意元素)

证 任取$a\in G$，由循环群的定义和子群判定定理三有$\langle a\rangle$是G的子群，由L定理$\langle a\rangle$的阶是n的因子. $\langle a\rangle$是由a生成的子群，若$|a| = r$，则 $\langle a\rangle = \{a^0=e,a^1,a^2,\ldots,a^{r-1}\}$即$\langle a\rangle$的阶与$|a|$相等, 所以$|a|$是$n$的因子. 从而$a^n = e$.

推论4 一个素数阶的群必是循环群, 并且任一与么元不同的元素都是生成元.

推论5 阶小于6 的群都是Abel群.

证 由阶为1; 素数2,3,5; 4分别讨论. 略

群表

*	e
e	e

*	e	a
e	e	a
a	a	e

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

6.6 正规子群与同态

Q: (1) 陪集是由群上的等价关系建立的，那么这种等价关系满足什么条件时成为同余关系?

(2) 根据这种同余关系, 建立群与它的商群, 它们具有什么关系? 同态?

定义6.19 设G是群, N是G的子群, 如果对G的每个元素a均有:

$$aN=Na$$

则称N是G的**正规子群**, 此时N的左/右陪集叫做N的陪集.

Note: Abel群的每个子群都是正规子群.

<Z, +>是整数加法群, <H, +>是正整数m的所有倍数作成的子群, 它是Z的正规子群.

实例

$$p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\qquad p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\qquad p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad p_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

合成运算

$\diamond$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_5	p_6	p_3	p_4
p_3	p_3	p_6	p_1	p_5	p_4	p_2
p_4	p_4	p_5	p_6	p_1	p_2	p_3
p_5	p_5	p_4	p_2	p_3	p_6	p_1
p_6	p_6	p_3	p_4	p_2	p_1	p_5

实例

取$H=\{p_1, p_5, p_6\}$, $<H, \Diamond>$是$<\{p_1\ldots p_6\}, \Diamond>$的子群

$$p_1H = p_5H = p_6H = \{p_1, p_5, p_6\}$$
$$p_2H = p_3H = p_4H = \{p_2, p_3, p_4\}$$

左陪集

$$Hp_1 = Hp_5 = Hp_6 = \{p_1, p_5, p_6\}$$
$$Hp_2 = Hp_3 = Hp_4 = \{p_2, p_3, p_4\}$$

右陪集

$\{\{p_1, p_5, p_6\}, \{p_2, p_3, p_4\}\}$ 是$\{p_1\ldots p_6\}$的一个划分。

***H*的陪集等价关系也是一个同余关系。**

正规子群

定理6.25 群G的子群N是正规子群的充要条件是:

$$a \circ n \circ a^{-1} \in N \quad (a \in G, n \in N).$$

证明 必要性: 由正规子群的定义可知, $\forall n \in N$, $\exists n_1 \in N$, 使得

$$a \circ n = n_1 \circ a$$

故有
$$a \circ n \circ a^{-1} = n_1 \circ a \circ a^{-1} = n_1 \circ e = n_1 \in N$$

充分性: 由于$a \circ n \circ a^{-1} \in N$ 故$\forall n \in N$, $\exists n_1 \in N$, 使得

$$a \circ n \circ a^{-1} = n_1$$

可推得
$$n \circ a^{-1} = a^{-1} \circ n_1$$

由a的任意性, 用a替代a^{-1} 得到: $n \circ a = a \circ n_1$, 可知对任一 $n \circ a \in Na$必有$n \circ a \in aN$, 故有: $Na \subseteq aN$, 同理可证$aN \subseteq Na$, 因此可得: $aN = Na$. 得证.

正规子群的同余关系

定理6.26 群G的正规子群N所确定的陪集关系是一个同余关系.

证明 略.

Note: 同余关系建立后, 也可以研究商代数与原群G的同态映射关系(自然同态).

存在一个满同态映射$g:G\to G/N$, 使得$\langle G,\circ\rangle$与$\langle G/N,*\rangle$同态, 其中G/N是G关于N的陪集关系的商集, 而运算$*$可以定义为:

$$\forall aN, bN \in G/N, \text{有} aN * bN = (a \circ b)N$$

由于$\langle G,\circ\rangle$与$\langle G/N,*\rangle$同态, 所以$\langle G/N,*\rangle$也是一个群, 称为G关于正规子群N的商群.

作业

徐 p100 6.6 6.7 6.8

6.9. 6.10. 6.11