连续时间系统的时域分析方法
-全响应求解

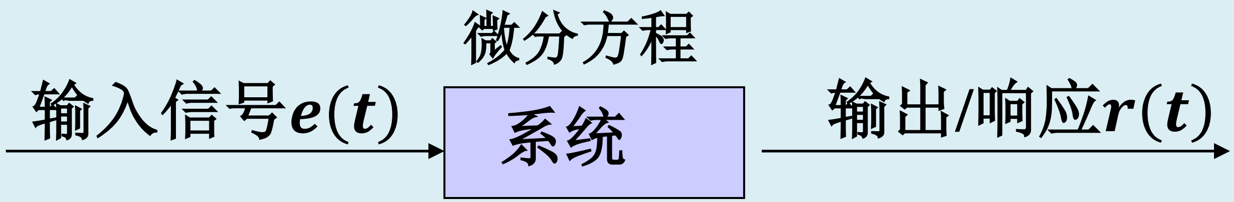
柳艾飞，副教授
西北工业大学软件学院

Email: liuaifei@nwpu.edu.cn

连续时间系统的时域分析

- 系统分析的逻辑
- 零输入响应
  - 系统的算子表示法
  - 输入响应求解
- 零状态响应
  - 奇异函数
  - 信号的时域分解
  - 奇异函数的响应
  - 卷积定理
- 系统的全响应

系统方程的算子表示法



一般的微分方程：

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r(t)+\ldots+a_1\frac{d}{dt}r(t)+a_0r(t)$$

$$=b_m\frac{d^m}{dt^m}e(t)+b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}e(t)+\ldots+b_1\frac{d}{dt}e(t)+b_0e(t)$$

微分算子：$p=\frac{d}{dt};\ p^n=\frac{d^n}{dt^n};\ \frac{1}{p}=\int_{-\infty}^{t}(\quad)d\tau;$

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)r(t)=$$

$$(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0)e(t)$$

系统的定义

微分方程

输入信号$e(t)$ → 系统 → 输出/响应$r(t)$

$$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)r(t)=$$
$$(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0)e(t)$$

微分方程求解

1. 零输入响应：$e(t)=0$;状态$\neq 0$

齐次微分方程:$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)r(t)=0$

多项式分解；指数函数；利用初始状态求系数

2. 零状态响应：$e(t)\neq 0$;状态=0

齐次微分方程:$(p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0)r(t)=(b_mp^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_1p+b_0)e(t)$

卷积；卷积特性；冲激函数特性

系统的全响应

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)r(t) =$$
$$(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)e(t)$$

$$D(p)r(t) = N(p)e(t)$$

$$r(t) = H(P)e(t) = \frac{N(p)}{D(p)}e(t)$$

系统的全响应

$$D(p)r(t) = N(p)e(t)$$

◆ 零输入响应 $D(p)r(t) = 0$

特征方程$D(\lambda) = 0$, 求出特征根λ_i

$$\boxed{r_{zi} = \sum_{i=1}^{N} C_i e^{\lambda_i t}}$$

◆ 零状态响应

冲激响应 $D(p)h(t) = N(p)\delta(t)$

n>m, $h(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{\lambda_i t} \varepsilon(t)$

卷积 $\boxed{r_{zs} = e(t) * h(t)}$

系统的全响应

LTIC系统： $e(t) \to r_{zi}(t) = e(t) * h(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \to \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau \overset{\Delta}{=} e(t) * h(t)$$

利用卷积积分零状态响应

改变输入只需要重新计算卷积积分！

若连续系统为因果系统，即 $h(t)=0$, $t<0$, 且输入信号为因果信号，则有

$$r(t) = \int_{0}^{t} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

系统的全响应

例1.一线性系统：$\dfrac{d^2}{dt^2}r(t)+5\dfrac{d}{dt}r(t)+6r(t)=e(t)$,

$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t), r(0^-)=3.5, r'(0^-)=-8.5$, 求$r(t)$

解题思路？？

全响应：

1. 零输入响应

2. 零状态响应

微分方程算子表示->特征方程=0-> 特征根->自然响应->初始状态确定常系数

微分方程算子表示->冲激响应->冲激响应与输入信号卷积->零状态响应

$r(t)=H(p)e(t)$-> $H(p)$分解为多个一阶系统

系统的全响应

例1.一线性系统：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+5\frac{d}{dt}r(t)+6r(t)=e(t)$,

$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t), r(0)=3.5, r'(0)=-8.5,$ 求 $r(t)$

解：**1：零输入响应：**

$$p^2 r(t)+5pr(t)+6r(t)=e(t)$$

$$H(p)=\frac{r(t)}{e(t)}=\frac{1}{p^2+5p+6}=\frac{1}{(p+2)(p+3)}$$

特征方程：

$$\lambda^2+5\lambda+6=0$$

$$(\lambda+2)(\lambda+3)=0$$

$$\lambda_1=-2; \lambda_2=-3$$

$$r_{zi}=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$\left.\begin{aligned} r_{zi}(0)&=C_1+C_2=3.5 \\ r'_{zi}(0)&=-2C_1-3C_2=-8.5 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1&=2 \\ C_2&=1.5 \end{aligned}$$

$$\boxed{r_{zi}=(2e^{-2t}+1.5e^{-3t})\varepsilon(t)}$$

系统的全响应

例1.一线性系统：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+5\frac{d}{dt}r(t)+6r(t)=e(t)$,

$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t), r(0\_)=3.5, r'(0\_)=-8.5$, 求$r(t)$

解：**2：零状态响应：** $r(t)=H(p)e(t)$ ➡ $\boxed{h(t)=H(p)\delta(t)}$

$$h(t)=\frac{1}{p^2+5p+6}\delta(t)=\left(\frac{A}{(p+2)}+\frac{B}{(p+3)}\right)\delta(t)$$

$$\frac{1}{p^2+5p+6}=\left(\frac{A}{(p+2)}+\frac{B}{(p+3)}\right)=\left(\frac{1}{(p+2)}+\frac{-1}{(p+3)}\right)$$

$$h(t)=\frac{1}{(p+2)}\delta(t)+\frac{-1}{(p+3)}\delta(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)-e^{-3t}\varepsilon(t)$$

系统的全响应

例1.一线性系统：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+5\frac{d}{dt}r(t)+6r(t)=e(t)$,

$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t), r(0\_)=3.5, r'(0\_)=-8.5$, 求$r(t)$

解: **2：零状态响应：**

$$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)=\left(e^{-t}\varepsilon(t)\right)*\left((e^{-2t}-e^{-3t})\varepsilon(t)\right)$$

$$\boxed{[e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)]*[e^{\lambda_2 t}\varepsilon(t)]=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}]\varepsilon(t)}$$

$$\boxed{r_{zs}(t)=(0.5e^{-t}-e^{-2t}+0.5e^{-3t})\varepsilon(t)}$$

系统的全响应

例1.一线性系统：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+5\frac{d}{dt}r(t)+6r(t)=e(t)$,

$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t), r(0\_)=3.5, r'(0\_)=-8.5$, 求$r(t)$

解：全响应=零状态响应+零输入响应

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$
$$=(2e^{-2t}+1.5e^{-3t})\varepsilon(t)+(0.5e^{-t}-e^{-2t}+0.5e^{-3t})\varepsilon(t)$$

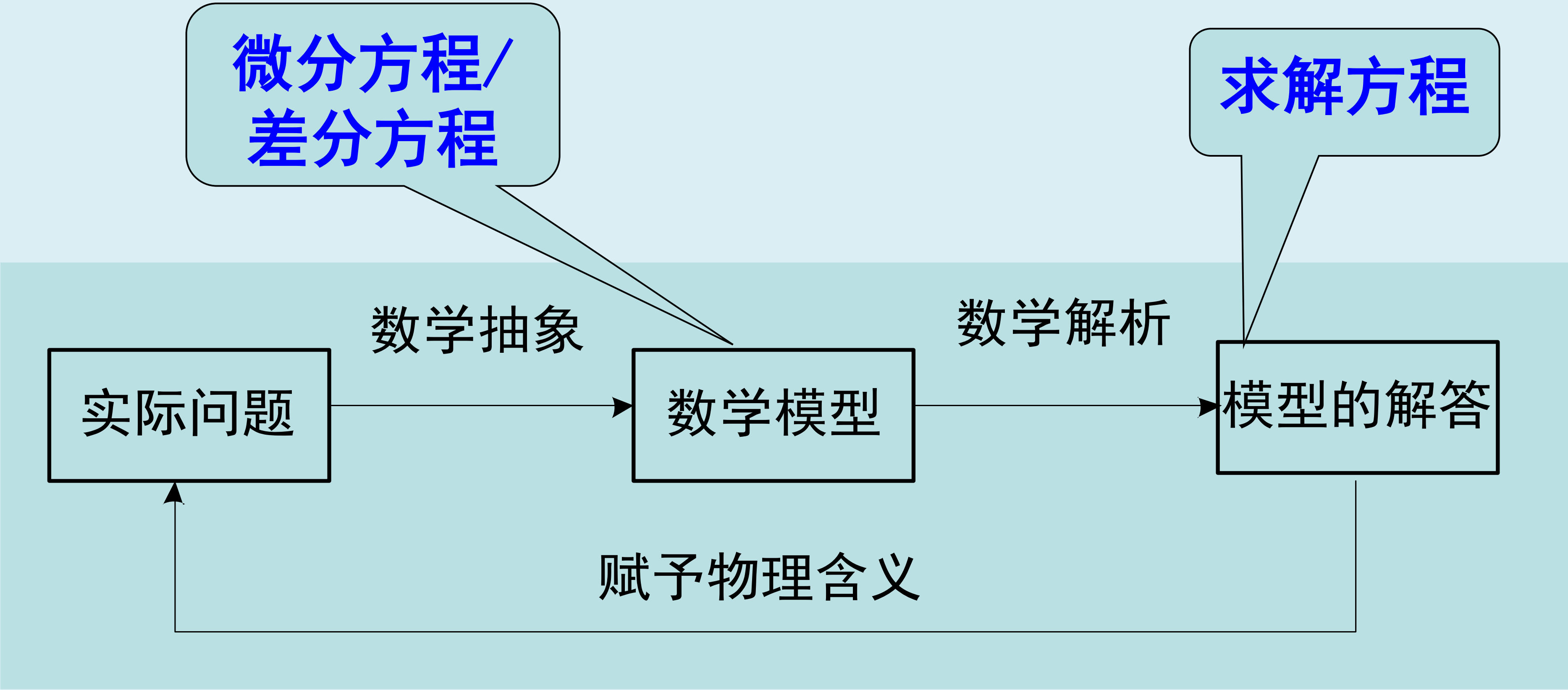
$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$

$\lambda_1=-2; \lambda_2=-3$

自由响应

受迫响应

系统的定义



系统的全响应

例2 .一线性系统：$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+5\frac{d}{dt}r(t)+6r(t)=e(t)$,

$e(t)=e^{-t}\varepsilon(t), r(0\_)=3.5, r'(0\_)=-8.5$, 求$r(t)$

$$\boxed{r_{zi}(t)=(2e^{-2t}+1.5e^{-3t})\varepsilon(t)}$$

自由响应

$$\boxed{r_{zs}(t)=(0.5e^{-t}-e^{-2t}+0.5e^{-3t})\varepsilon(t)}$$

受迫响应　自由响应

零输入响应只包含自由响应。

零状态响应包含自由响应和受迫响应。

系统全响应=零输入响应+零状态响应

系统全响应＝自由响应＋受迫响应

系统的全响应

系统全响应 ＝ 瞬态响应 ＋ 稳态响应

瞬态响应：系统响应中那些随着时间的增加而衰减，并且最终完全消失的分量称为瞬态响应。

稳态响应：系统响应中那些随着时间的增加一直保留的分量称为稳态响应。

系统的全响应

例1 已知某LTIC系统为 $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$

试求当输入$e(t)=10e^{-3t}\varepsilon(t)$, $r(0^-)=0$，$r'(0^-)=-5$**的响应**

$$r(t)=\underbrace{\overbrace{\underbrace{-5e^{-t}+5e^{-2t}}_{\text{零输入响应}}\;\underbrace{-5e^{-t}+20e^{-2t}}}^{\text{自由响应}}\;\overbrace{-15e^{-3t}}^{\text{受迫响应}}_{\text{零状态响应}}}_{\text{瞬态响应}}\qquad t\geq 0$$

一般来说稳定系统 $\overset{\text{充要条件}}{\Longleftrightarrow}$ **自然响应全部是瞬态响应**

线性系统响应的时域求解法

LTIC系统小结:

数学模型:用常系数微分方程来描述

系统全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

零输入响应: 系统特征模式的线性组合

单位冲激响应: $h(t) = b_m \delta(t) + [\text{特征模式项}]\varepsilon(t)$

零状态响应: $e(t) \rightarrow r_{zi}(t) = e(t) * h(t)$

系统全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

= 自由响应 + 受迫响应

= 瞬态响应 + 稳态响应

系统的特征根及特征模式对系统特性的影响

◈系统特性对特征模式的依赖

假设一个一阶系统，单一的特征模式 $e^{\lambda t}$

定性分析 设 $h(t) = Ae^{\lambda t}\varepsilon(t)$，输入 $e(t) = e^{\xi t}\varepsilon(t)$

$$r(t) = e(t) * h(t) = \frac{A}{\xi - \lambda}[e^{\xi t} - e^{\lambda t}]\varepsilon(t)$$

◈谐振现象

当输入信号与系统某个特征模式一致或非常相似，就会出现谐振现象。

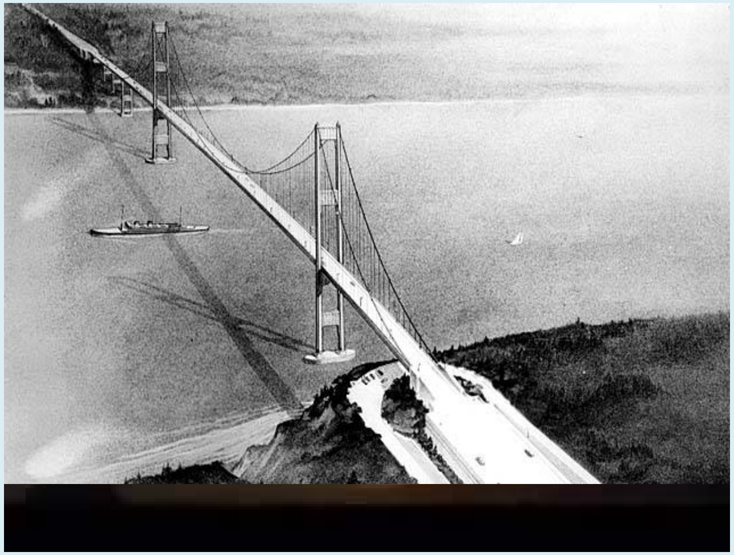
◈谐振现象

假设一个一阶系统，单一的特征模式

定性分析设 $h(t)=Ae^{\lambda t}$ **，输入** $e(t)=e^{(\lambda-\Delta)t}$

$$r(t)=e(t)*h(t)=\frac{A}{\varepsilon}[e^{\lambda t}-e^{(\lambda-\Delta)t}]=\frac{A}{\varepsilon}e^{\lambda t}[1-e^{-\Delta t}]$$

利用洛必达法则： $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} r(t)=Ate^{\lambda t}$



非常著名的*Tacoma*大桥垮塌事件

大桥钢缆绳

MATLAB在LTI系统的应用

已知某LTIC系统为 $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$

试求当输入$e(t)=10e^{-3t}\varepsilon(t)$时的零状态响应。已知其单位冲激响应$h(t)=(-e^{-t}+2e^{-2t})\varepsilon(t)$。

解：零状态响应为：$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)$

$$=(-5e^{-t}+20e^{-2t}-15e^{-3t})\varepsilon(t)$$

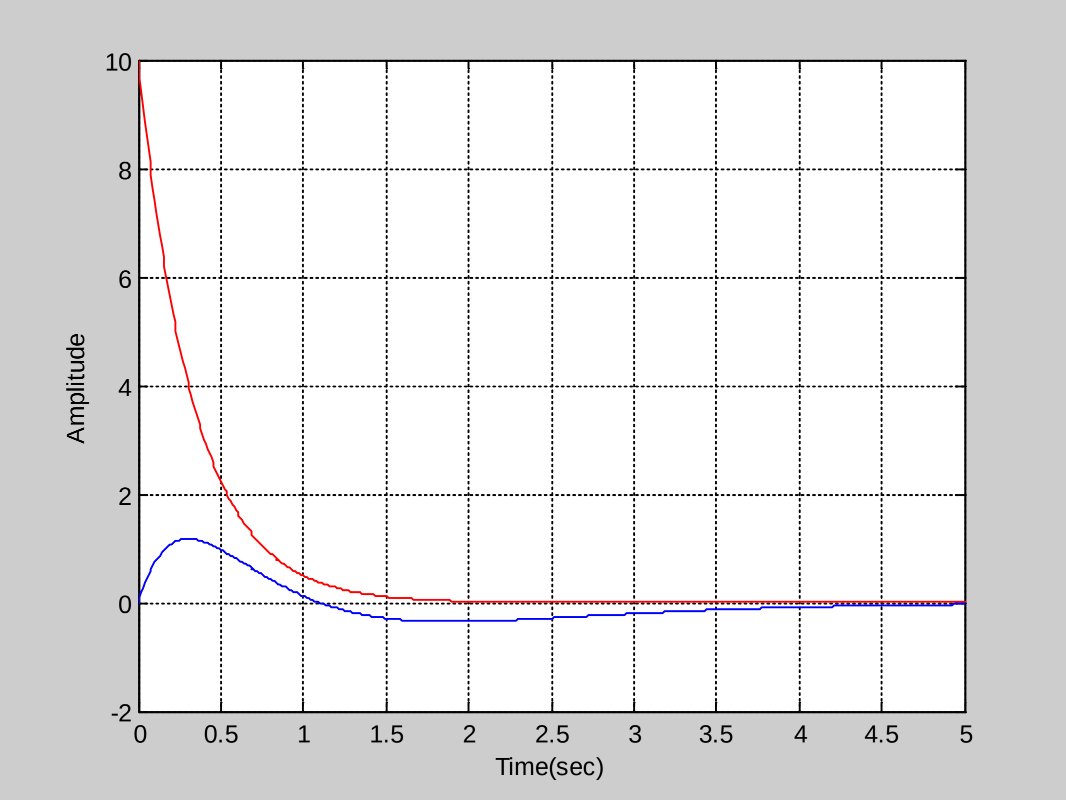
$$\boxed{[e^{\lambda_1 t}\varepsilon(t)]*[e^{\lambda_2 t}\varepsilon(t)]=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}[e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}]\varepsilon(t)}$$

```
% LTI连续系统的响应实现程序
    a=[1 3 2];     b=[1,0];
    t=0:0.01:5
    f=10*exp(-3*t);    %定义激励信号f
    plot(t,f,'R');
    hold on;                %当前图上重画开关
    y=lsim(b,a,f,t);       %用f激励系统，输出为y
    plot(t,y);
    grid on;                % 画分格线
    xlabel('Time(sec)');     ylabel('Amplitude');
```

MALTAB在LTI系统的应用

输入信号： $e(t)=10e^{-3t}\varepsilon(t)$

零状态响应为： $r_{zi}(t)=(-5e^{-t}+20e^{-2t}-15e^{-3t})\varepsilon(t)$



2.8 线性系统响应的时域求解法

已知某LTI因果连续系统的转移算子$H(\mathrm{p}) = \frac{p+5}{p^2+5p+6}$, 系统的零输入响应为$r_{zi}(t)$，其初始状态为$r_{zi}(0^-) = 1$，$\frac{d}{dt}r_{zi}(0^-) = -2$，求系统的零输入响应。

求解：

特征方程为：$\lambda^2 + 5\lambda \;\; + 6 = 0$，可以求得特征根为：$\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = -3$;

因此，$r_{zi}(t) = (c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t})\varepsilon(t)$

根据已知初始状态可以得到，c_1=1; c_2=0;

因此零输入响应为，$r_{zi}(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)$

$r_{zi}(t) + r_{zs}(t) = 0$ 得到，$r_{zs}(t) = -e^{-2t}\varepsilon(t)$

连续时间系统分析

2.42

- **例题：2.4，2.5，2.7，2.8 a、b，2.10，2.16，2.19，2.20**