概率论与数理统计

下 回 停

第二节 多维随机变量及其分布(3)

- 八、随机变量的独立性
- 九、条件分布

八、随机变量的独立性

随机变量的独立性是概率论中的一个重要概念.

下面我们利用事件之间的独立性导出随机变量之间的独立性概念.

目 上 下 回 停 续

定义2.6 设X,Y是两个随机变量,若对任意实数 x,y,事件$\{X \le x\},\{Y \le y\}$是相互独立的 ,即

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$

则称 X,Y是相互独立的.

回忆：两事件 A,B独立的定义：

若$P(AB)=P(A)P(B)$
则称事件A,B独立 .

用分布函数表示，上述定义 $\Longleftrightarrow$

设X,Y是两个随机变量，若对任意的x, y, 有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称X,Y 相互独立.

两个随机变量相互独立时，它们的联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积 .

对于离散型随机变量,上述独立性定义 $\Longleftrightarrow$

对(X,Y)所有可能取值(x_i, y_j),有

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

即 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$ 则称X,Y相互独立.

对于连续型随机变量,上述独立性定义 $\Longleftrightarrow$

对于任意的x, y有 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$

成立,则称X,Y相互独立.

其中$p(x,y)$是 X,Y的联合概率密度;

$p_X(x)$和$p_Y(y)$分别是 X和Y的边缘概率密度.

注 如果 X 和 Y 相互独立,那么 它们的连续函数

$f(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立.

分布律的另一种表示方法

例1 已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求α与β应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立,求 α与β 的值.

解 将 (X,Y) 的分布律改写为

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	$\frac{2}{3}+\alpha+\beta$

(1)由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \dfrac{2}{3}+\alpha+\beta = 1,$

故α与β应满足的条件是 : $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 且 $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}.$

(2) 因为 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

特别有

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$, 得 $\beta = \dfrac{1}{9}$.

例2 设(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

问 X与Y是否独立?

解 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0. & x\le 0. \end{cases}$

即

$$=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

同理

$$p_Y(y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

$$p(x,y)=p_X(x)p_Y(y),$$

所以 X 与Y 独立.

例3 设$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

证明X与Y相互独立的充要条件是 $\rho = 0$.

证 前面已经给出的X 和Y边缘概率密度分别为

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

(注：$\exp x = \mathrm{e}^{x}$)

若$\rho = 0$，则

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$= p_X(x)p_Y(y)$$

说明 X与Y相互独立.反之,若X与Y相互独立,则

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} -$$

$$2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\}$$

令$x=\mu_1, y=\mu_2$,则上式变为

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$$

从而推出$\rho = 0$.

单选题 1分

设置

设二维随机变量服从正态分布$N(1,0,1,1,0)$,

则X与Y

A 不独立

B 独立

C X不是正态变量

D Y也不是正态变量

提交

回 停 续

填空题 0分

设置

此题未设答案

设二维随机变量服从正态分布$N(1,0,1,1,0)$,

则X与Y

请点击此处编辑题干，在浮窗中选择对应按钮添加空格。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

回 停 续

九、条件分布

问题的提出: 从遗传学的角度看, 父亲的身高 X 会影响儿子的身高Y.这里父亲的身高 X与儿子的身高Y都是随机变量,都有自己的分布.那么两者之间关系如何呢?

一般的处理方法是将父亲的身高X 固定在一特定值X_0处,考察儿子身高Y 的分布情况.

这就是我们要讲的条件分布.

1.离散型随机变量的条件分布

定义 设(X,Y)是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若$P\{Y=y_j\}>0$,则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i;Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

其中$i=1,2,\cdots$

为事件$\{Y=y_j\}$发生的条件下随机变量 X的条件分布律.

同样，对于固定的 i,如果$P\{X=x_i\}>0$,则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

其中 $j=1,2,\cdots$

为在事件$\{X=x_i\}$发生的条件下随机变量Y的条件分布律.

例4 已知(X,Y)有如下分布律:

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1) 求在 $X=1$ 的条件下,Y 的条件分布律;

(2) 求在 $Y=0$ 的条件下,X 的条件分布律.

解 由上述分布律的表格可得

$$P\{Y=0 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1, Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.030}{0.045},$$

$$P\{Y=1 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1, Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.010}{0.045},$$

$$P\{Y=2 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1, Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.005}{0.045},$$

即在 $X=1$ 的条件下,Y 的条件分布律为

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k \mid X=1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

同理可得在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律为

$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k \mid Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

2. 连续型随机变量的条件分布

定义 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $p(x,y)$, (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $p_Y(y)$.若对于固定的 y, $p_Y(y)>0$, 则称 $\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度,记为

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}.$$

条件分布函数

称$\int_{-\infty}^{x} p_{X|Y}(x \mid y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}dx$为在

$Y = y$的条件下,X的条件分布函数,记为

$$P\{X \le x \mid Y = y\} \text{或} F_{X|Y}(x \mid y),$$

即
$$F_{X|Y}(x \mid y) = P\{X \le x \mid Y = y\}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} p_{X|Y}(x \mid y)dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}dx$$

同理, (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为 $p_X(x)$.

若对于固定的 x, $p_X(x)>0$, 则称 $\dfrac{p(x,y)}{p_X(x)}$ 为在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件概率密度, 记为

$$p_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}.$$

同理可定义在$X = x$的条件下,Y的条件分布函数,

$$F_{Y|X}(y\,|\,x) = P\{Y \le y\,|\,X = x\}$$

$$= \int_{-\infty}^{y} p_{Y|X}(y\,|\,x)dy = \int_{-\infty}^{y} \frac{p(x,y)}{p_X(x)}dy.$$

例5 设(X,Y)在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$上服从均匀分布，求条件分布密度 $p(x\mid y)$.

解 由题设知

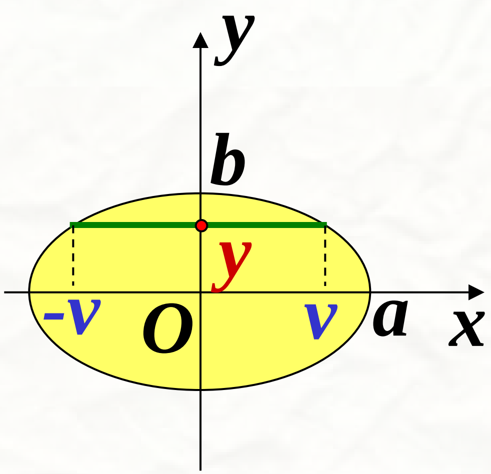
$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi ab}, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1,\\ 0, & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1.\end{cases}$$

由联合概率密度我们可以得到关于Y的边缘概率密度.

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_{-v}^{v}\frac{1}{\pi ab}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi b}\sqrt{1-y^2/b^2}, & |y|\le b,\\ 0, & |y|>b.\end{cases}$$

其中 $v=a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}$

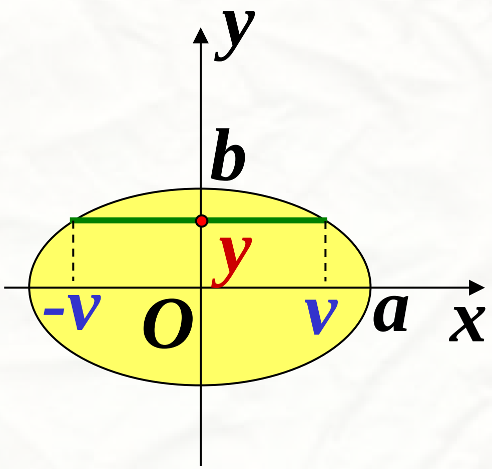


从而对于 $y\in(-b,b)$,有

$$p_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$p_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{1-y^2/b^2}}, & |x|\le a\sqrt{1-y^2/b^2},\\[2mm] 0, & |x|> a\sqrt{1-y^2/b^2}.\end{cases}$$



由上式可以看出，在 $(Y=y)$ 的条件下，X 在

区间$[-a\sqrt{1-y^2/b^2},a\sqrt{1-y^2/b^2}]$上服从均匀分布.

例6 设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,求条件概率密度 $p(x\,|\,y), p(y\,|\,x)$.

解 由于上节已经求出了 X和Y的边缘概率密度,所以对于一切 $x, y \in (-\infty,+\infty)$,有

$$p(y\,|\,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{[y-(\mu_2+\rho\sigma_2(x-\mu_1)/\sigma_1)]^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right\}$$

$$p(x \mid y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{[x-(\mu_1+\rho\sigma_1(y-\mu_2)/\sigma_2)]^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right\}$$

本题说明了对于二元正态分布,其条件分布仍为正态分布.

目 上 下 回 停 续

思考题

设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x<1,\ 0\le y<x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求 $P\{Y\le \frac{1}{8}\,\big|\, X=\frac{1}{4}\}$? 判断下面的解法是否正确?

解 因为 $P\{X=\frac{1}{4}\}=0,$

所以 $P\{Y\le \frac{1}{8}\,\big|\, X=\frac{1}{4}\}=\dfrac{P\{X=\frac{1}{4},Y\le\frac{1}{8}\}}{P\{X=\frac{1}{4}\}}$ 不存在.

上述解法不正确,正确解法应该为

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}y$$

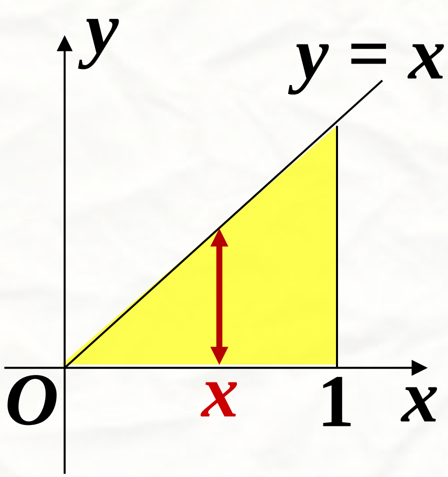
$$=\begin{cases}\int_0^x 3x\,\mathrm{d}y, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{□ □}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3x^2, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此当$0 \le x < 1$时，

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}$$

$$= \begin{cases} 3x/3x^2 = 1/x, & 0 \le y < x, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

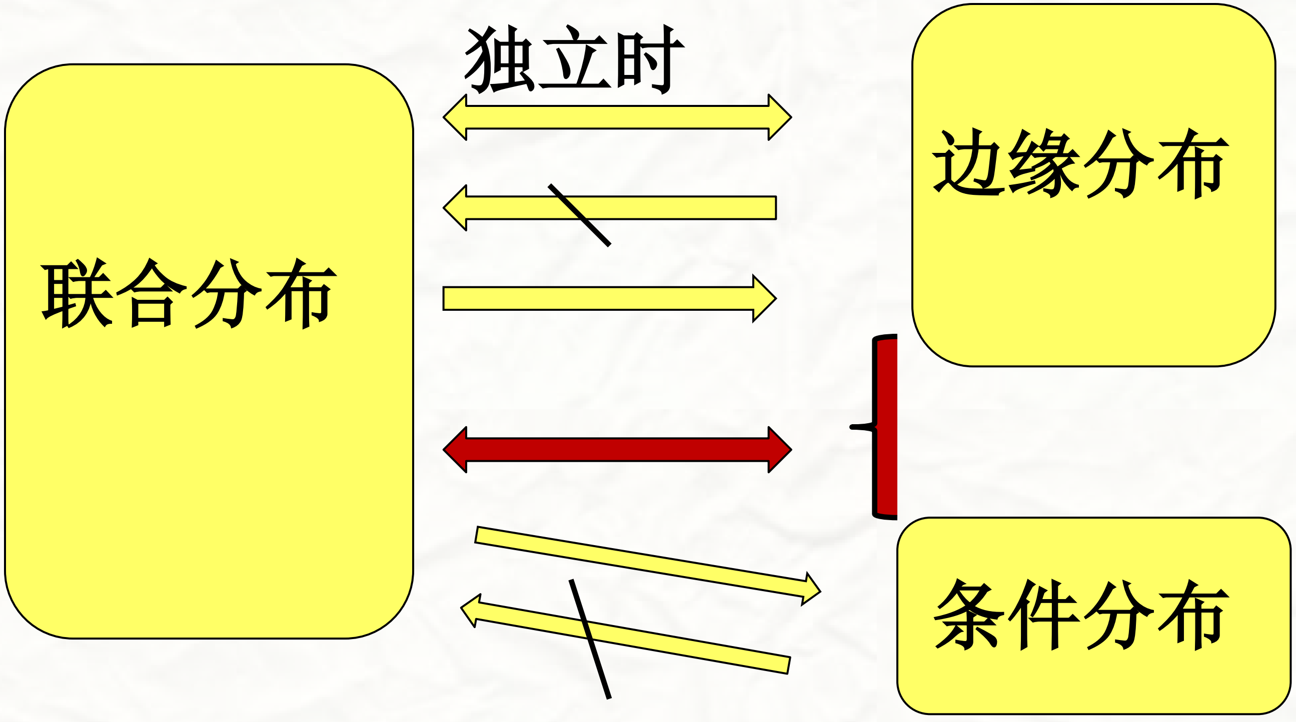


于是 $P\{Y \le \frac{1}{8} \Big| X = \frac{1}{4}\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{8}} p_{Y|X}(y|\frac{1}{4})\,\mathrm{d}y$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{8}} 4\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

目 上 下 回 停 续

第二节知识框架



$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \Leftrightarrow p(x,y)=p_Y(y)\,p_{X|Y}(x|y)$$

例7 设数 X 在区间(0,1)上等可能地随机取值，当观察到 $X=x\ (0<x<1)$时，数Y在区间$(x,1)$上等可能地随机取值,求 Y 的概率密度.

解 由题意知,X 的概率密度为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对于任意给定的值$x(0<x<1)$,在$X=x$的条件下,Y的条件概率密度为 $p_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$p_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此, X 和 Y 的联合概率密度为

$$p(x,y)=p_{Y|X}(y|x)p_X(x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

于是 Y 的边缘概率密度为

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

内容小结

1. 独立性

(1) 若随机变量 (X,Y)的联合分布函数为 $F(x,y)$,

边缘分布函数分别为 $F_X(x)$和 $F_Y(y)$,则有 X

和 Y相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$.

(2) 若离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$p\{X=i,Y=j\}=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$$

则 X与Y相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

(3) 设连续型随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为 $p(x,y)$,边缘概率密度分别为 $p_X(x), p_Y(y)$,则有

X与Y相互独立 $\Leftrightarrow p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$

(4) 若 X和Y相互独立，则 $f(X)$与$g(y)$也相互独立.

2. 条件分布

(1) 若离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$p\{X=i, Y=j\}=p_{ij}, \ i,j=1,2,\cdots$$

目 上 下 回 停 续

在给定 $Y=y_j$ 的条件下随机变量 X的条件分布律为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i;Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

在给定 $X=x_i$ 的条件下随机变量 Y的条件分布律为

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

其中 $i,j=1,2,\cdots$

(2) 设 (X,Y)是二维连续型随机变量,则有

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}p_{X|Y}(x\mid y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{x}p(\mathrm{x},y)/p_Y(y)\mathrm{d}x$$

$$F_{Y|X}(y\mid x)=\int_{-\infty}^{y}p_{Y|X}(y\mid x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{y}p(\mathrm{x},y)/p_X(x)\mathrm{d}y$$


再见

备用题

例2-1 设随机变量X和Y相互独立,并且X服从$N(a,\sigma^2)$,Y在$[-b,b]$上服从均匀分布,求(X,Y)的联合概率密度.

解 由于X与Y相互独立,

所以 $p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)$

又 $p_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<\infty;$

目 上 下 回 停 续

$$p_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & -b\le y\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

得 $$p(x,y)=\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 $-\infty<x<\infty,\quad -b\le y\le b.$

当 $|y|>b$ 时, $\quad p(x,y)=0.$

例2-2 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求(1)边际密度函数$P_X(x)$和$P_Y(y)$;

(2)X与Y是否独立?

解 (1)因为当$0<x<1$时，有

$$P_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x 3x\mathrm{d}y=3x^2,$$

所以X的边际密度函数为

$$P_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这是贝塔分布Be(3,1).

又因为当$0<y<1$时，有

$$P_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1 3x\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^2\Big|_y^1=\frac{3}{2}(1-y^2),$$

所以Y的边际密度函数为

$$P_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)因为$P(x,y)\neq P_X(x)P_Y(y)$,所以X与Y不独立.

例2-3 某电子仪器由两部分构成，其寿命(单位：千小时)X与Y的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geq 0, y\geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问: (1) X与Y是否独立？

(2) 两部件的寿命都超过100小时的概率？

解 (1)当$x\geq 0, y\geq 0$时,

由$F(x,y)=1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}$

$$得F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}(1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)})$$

$$=1-e^{-0.5x},\ x\geq 0.$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)})$$

$$=1-e^{-0.5y},\ y\geq 0.$$

$$由F_X(x)\cdot F_Y(y)=(1-e^{-0.5x})(1-e^{-0.5y})$$

$$=1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}=F(x,y)$$

可知X与Y相互独立.

$$(2)P(X>0.1,Y>0.1)=P(X>0.1)P(Y>0.1)$$

$$=[1-P(X\le 0.1)][1-P(Y\le 0.1)]$$

$$=[1-F_X(0.1)][1-F_Y(0.1)]$$

$$=e^{-0.05}\cdot e^{-0.05}=e^{-0.1}$$

例3-1 设随机变量(X,Y)的两个分量X和Y相互独立，且服从同一分布.试证

$$P\{X \le Y\} = 1/2.$$

证 因为X,Y独立，所以 $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$.

$$P\{X \le Y\} = \iint\limits_{x \le y} p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x \le y} p_X(x)p_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [p_Y(y)\int_{-\infty}^{y} p_X(x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [p_Y(y)F_Y(y)]\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_Y(y)\mathrm{d}F_Y(y)=F^2(y)/2\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1/2.$$

也可以利用对称性来证，因为X，Y独立同分布，所以有

$$P\{X\le Y\}=P\{Y\le X\},$$

而$P\{X\le Y\}+P\{Y\le X\}=1,$故$P\{X\le Y\}=1/2.$

目 上 下 回 停 续