§1.4 自然坐标及自然坐标中的速度、加速度

主要内容：

1. 自然坐标
2. 变速率圆周运动中的加速度
3. 一般曲线运动中的加速度
4. 圆周运动的角量描述
5. 自然坐标中的运动学问题

学习要求：

1. 掌握自然坐标系下物体的速度、加速度公式
2. 掌握自然坐标系下两类运动学问题的计算

1.4.1 自然坐标

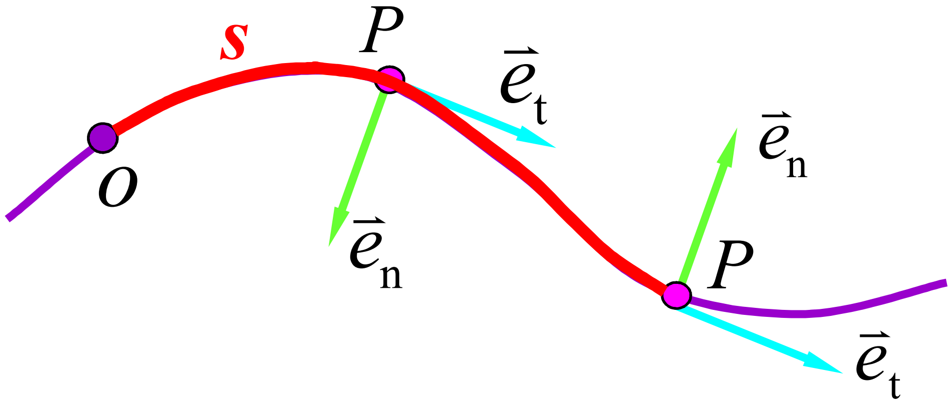
自然坐标：以质点运动轨迹建立坐标轴，在轨迹上任选一点***O***为原点，从***O***点至质点位置的弧长***s***称为自然坐标

$\vec{e}_{\mathrm{n}}$ 法向单位矢量

指向轨迹曲线凹侧

$\vec{e}_{\mathrm{t}}$ 切向单位矢量

指向自然坐标正向



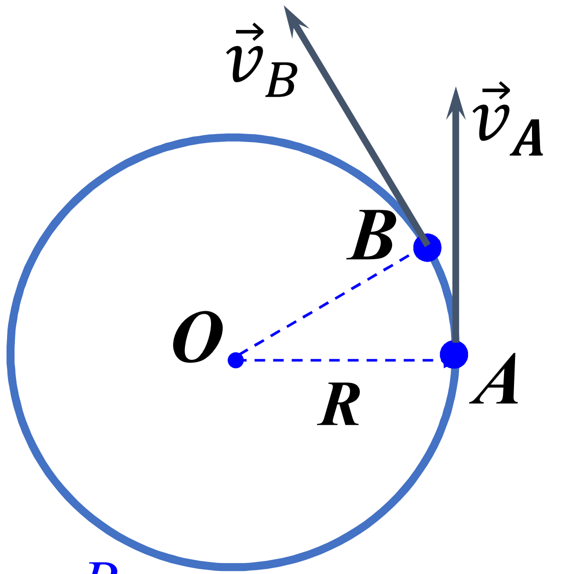
自然坐标正向：质点前进方向

自然坐标中 $\vec{e}_{\mathrm{n}}$, $\vec{e}_{\mathrm{t}}$ 不是恒矢量, 其方向随质点在轨迹上的位置而变化

自然坐标下质点的运动方程 $s = s(t)$

自然坐标中的速度：$\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \vec{e}_t = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \vec{e}_t = v\vec{e}_t$

1.4.2 变速圆周运动中的加速度



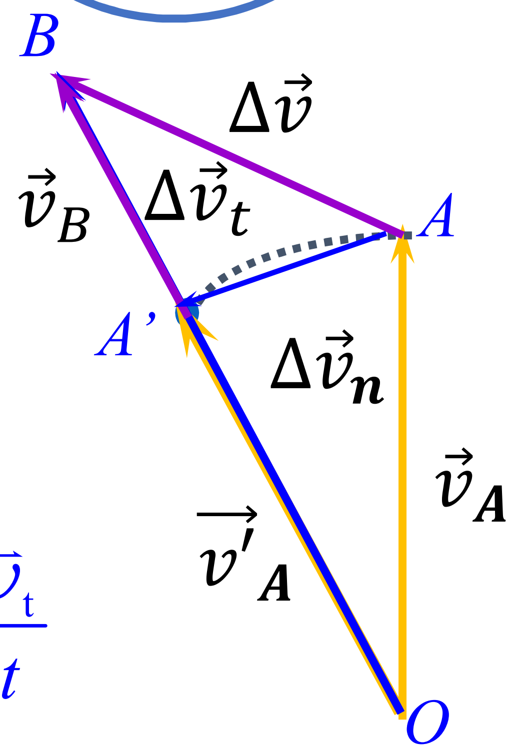
$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$\left|\overrightarrow{v'_A}\right| = |\vec{v}_A|$$

$\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}$ 由于方向变化而引起的速度增量

$\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}$ 由于大小变化而引起的速度增量

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} + \Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}$$

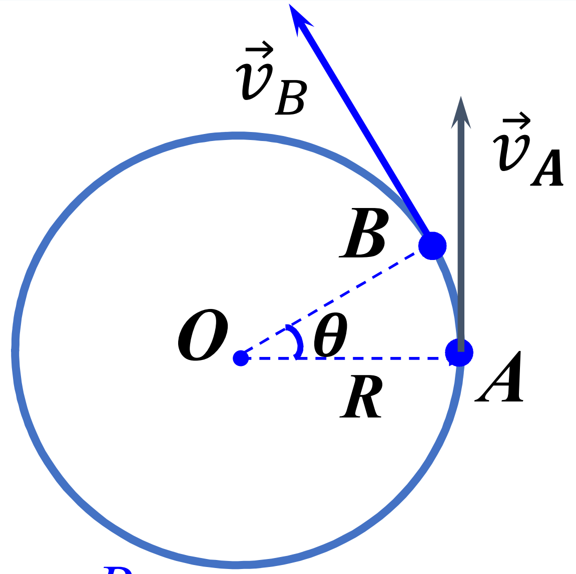


平均加速度 $\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}} + \Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$

瞬时加速度 $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t} + \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$$

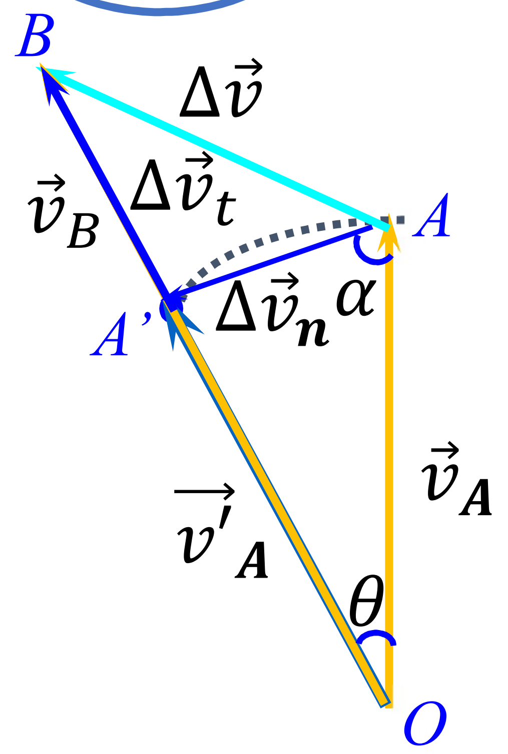
$$=\vec{a}_{\mathrm{n}}+\vec{a}_{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{n}+a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{t}$$



$$\vec{a}_{\mathrm{n}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t}\qquad \alpha=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$$

——反映速度方向的变化，法向加速度

当$\Delta t\to 0$时，$\theta\to 0$，$\alpha\to\pi/2$, $\vec{a}_n\perp\vec{v}_A$



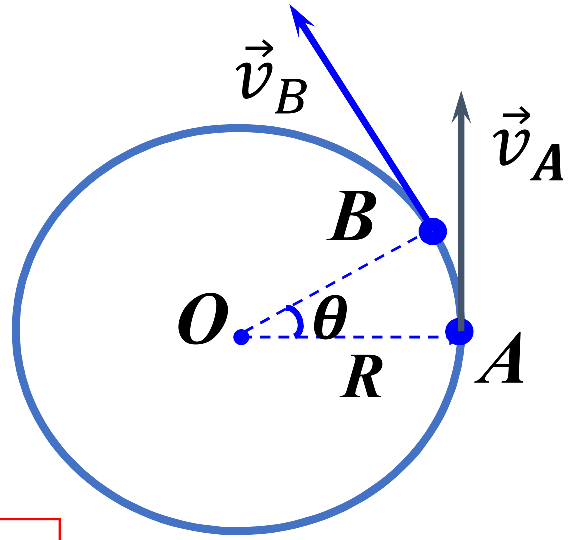
$$\vec{a}_{\mathrm{t}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t}$$

——反映速度大小的变化，切向加速度

当$\Delta t\to 0$时，$\theta\to 0$， $\vec{a}_t\parallel\vec{v}_A$

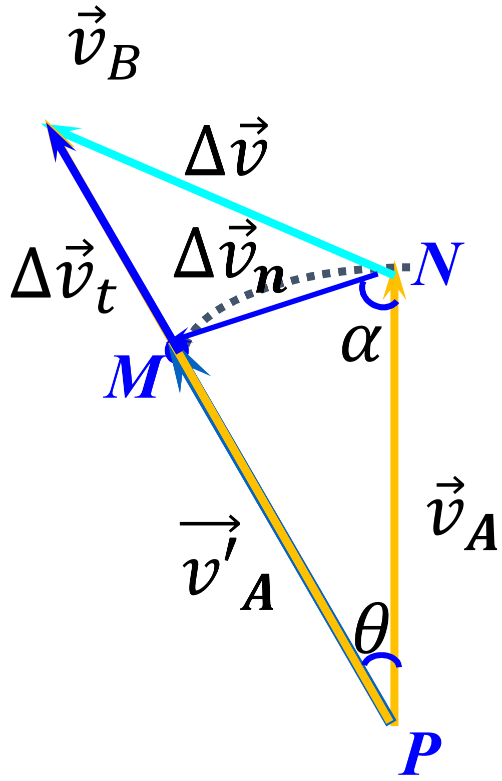
法向加速度：$\vec{a}_{\mathrm{n}} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \vec{v}_{\mathrm{n}}}{\Delta t} = a_n\vec{e}_{\mathrm{n}}$

大小：$a_n = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}|}{\Delta t} = \dfrac{v}{R}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \dfrac{v^2}{R}$



由三角形ΔAOB和ΔMPN相似，可得：

$$\frac{|\Delta\vec{v}_n|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{v_{\mathrm{A}}}{R} \Rightarrow |\Delta\vec{v}_n| = \frac{v_{\mathrm{A}}}{R}|\Delta\vec{r}| = \frac{v}{R}|\Delta\vec{r}|$$

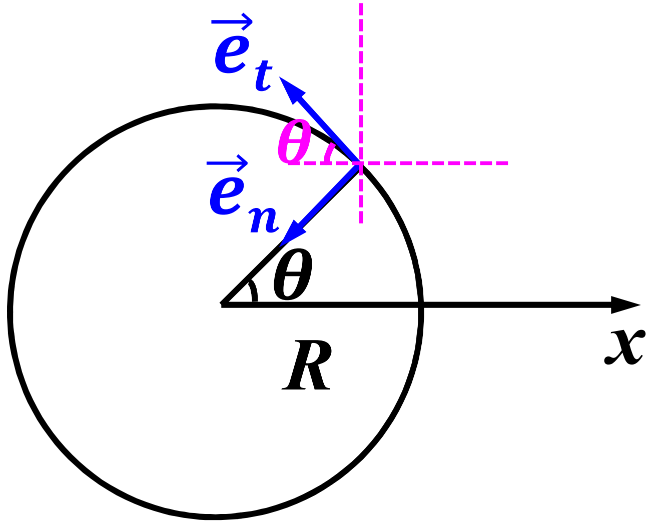


切向加速度：$\vec{a}_{\mathrm{t}} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta \vec{v}_{\mathrm{t}}}{\Delta t} = a_t\vec{e}_t$

大小：$a_t = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta v_t|}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$

采用矢量运算求解切向加速度和法向加速度

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\vec{e}_t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t+v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}$$



$$\vec{a}_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t$$

$$\vec{a}_n=v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

$$\vec{e}_t=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j} \qquad \vec{e}_n=-\cos\theta\vec{i}-\sin\theta\vec{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t}=-\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{i}-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{j}=\frac{R}{R}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\cos\theta\vec{i}-\sin\theta\vec{j})$$

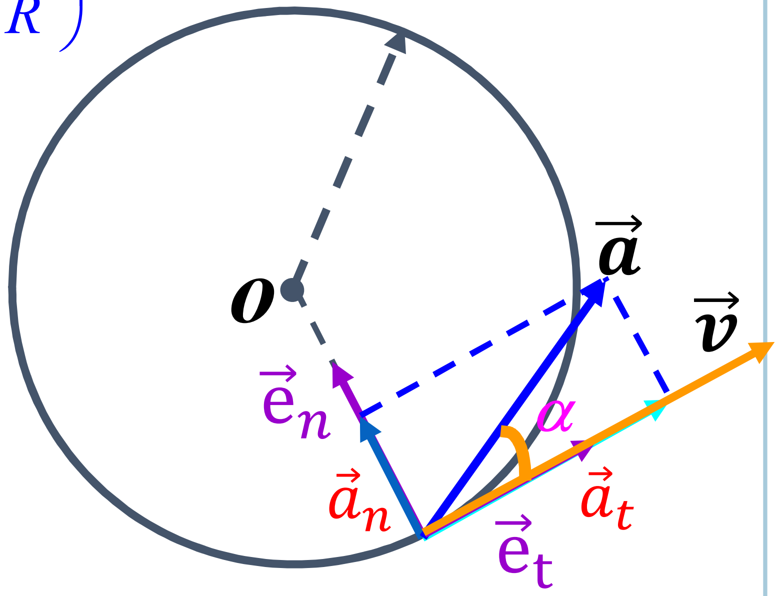
$$=\frac{\mathrm{d}s}{R\,\mathrm{d}t}\vec{e}_n=\frac{v}{R}\vec{e}_n$$

变速圆周运动的加速度

$$\vec{a}=\vec{a}_{\mathrm{n}}+\vec{a}_{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}==\frac{v^2}{R}\vec{e}_n+\frac{dv}{dt}\vec{e}_t$$

大小 $a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}{}^2+a_{\mathrm{n}}{}^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

方向 $\alpha=\arctan\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$



α **为加速度与速度之间的夹角**

➢ **讨论**

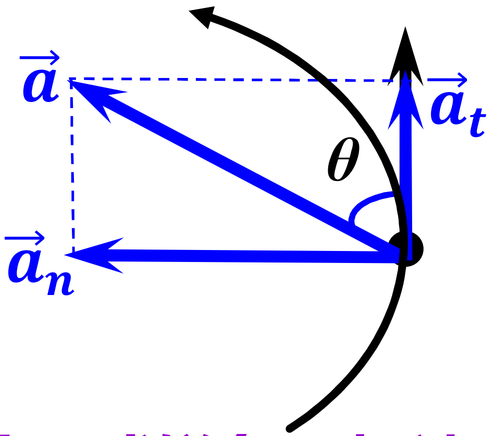
$$\vec{a}=\vec{a}_{\mathrm{n}}+\vec{a}_{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}==\frac{v^2}{R}\vec{e}_n+\frac{dv}{dt}\vec{e}_t$$

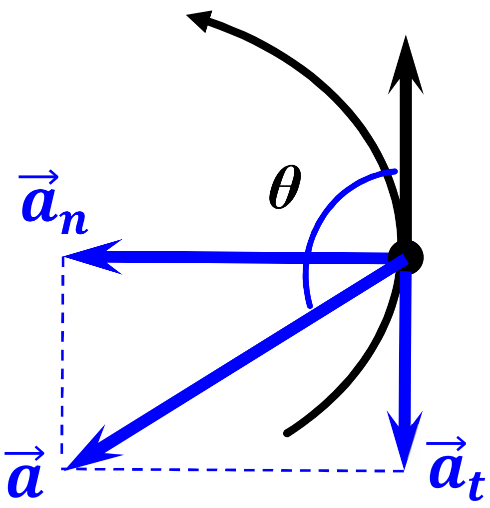
变速率圆周运动加速度方向不指向圆心

- ➢ **匀速率圆周运动** $\vec{a}_t=0 \quad \vec{a}=\frac{v^2}{R}\vec{e}_n$
- ➢ **直线运动** $R\to\infty \quad \vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{e}_t$

圆周运动的加速与减速

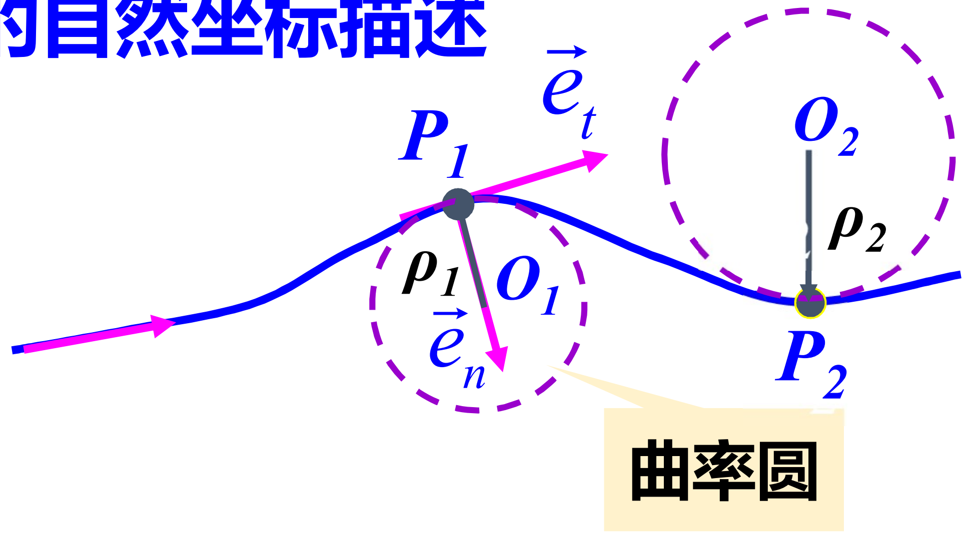
$\vec{a}_t$与$\vec{v}$方向相同/相反





➢ $\vec{a}$与$\vec{v}$成锐角，加速 ➢ $\vec{a}$与$\vec{v}$成钝角，减速

1.4.3 一般平面曲线运动的自然坐标描述



运动方程 $s = s(t)$

速度 $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t$

加速度

$$\vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t$$

ρ 为曲率半径

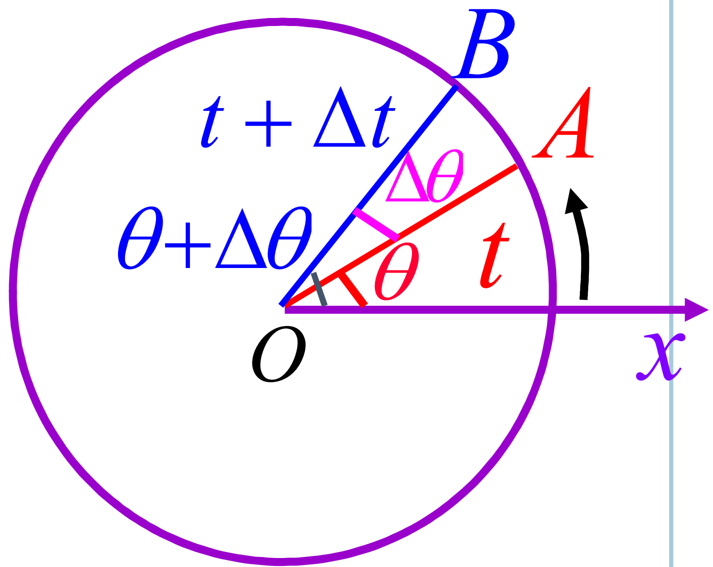
讨论：

一般曲线运动的法向加速度总是指向瞬时曲率中心，

$\vec{a}$总是指向曲线凹的一侧

1.4.4 圆周运动的角量描述

1.角位置与角位移



角位置θ 半径R不变，质点位置可由角位置θ（角坐标）确定

运动方程可表示为：$\theta=\theta(t)$

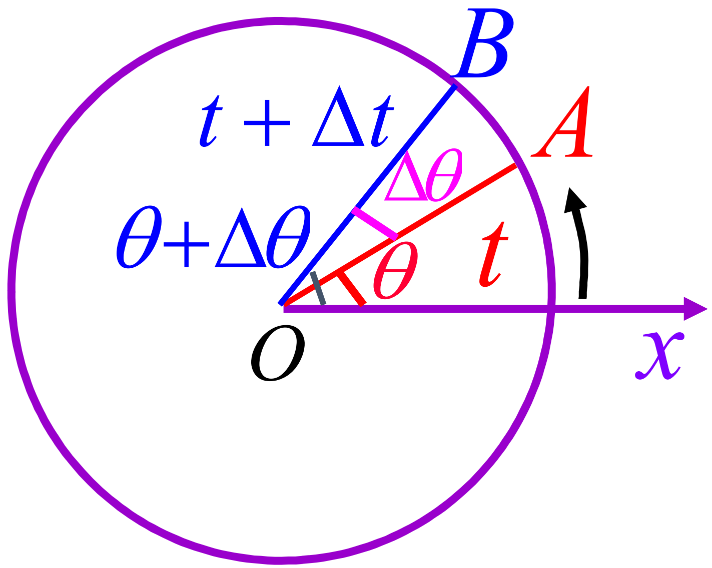
角位移$\Delta\theta$ Δt 时间内，质点转过的角度Δθ

$$\Delta\theta=\theta_B-\theta_A$$

- 单位：弧度（rad）
- 方向:

沿**逆时针**转动，$\Delta\theta$为**正**；沿**顺时针**转动，$\Delta\theta$为**负**。

2.角速度与角加速度



角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(rad/s)}$$

角加速度

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{d^2 t} \ \text{(rad/s}^2\text{)}$$

质点作匀速圆周运动时，角速度ω是常量，角加速度β为零

质点作匀变速圆周运动时，角加速度β为常量

3 匀速圆周运动的角量描述

质点作匀速圆周运动时，角速度ω是常量，角加速度β为零

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega_0$$

分离变量 $$\mathrm{d}\theta=\omega_0\mathrm{d}t$$

已知初始条件 $t=0,\quad \theta=\theta_0$

两边积分 $$\int_{\theta_0}^{\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^t\omega_0\mathrm{d}t$$

匀速圆周运动的基本方程 $$\theta=\theta_0+\omega_0 t$$

与质点作匀速直线运动的分析过程和结论类似 $x=x_0+vt$

4 匀变速圆周运动的角量描述

质点作匀变速圆周运动时，角加速度β为常量

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \beta_0$$

分离变量 $\mathrm{d}\omega = \beta_0 \mathrm{d}t$

已知初始条件 $t=0$, $\omega = \omega_0$

两边积分 $\int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^t \beta_0 \mathrm{d}t$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \beta_0 t}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \beta_0 t$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta_0 t^2}$$

$$\beta_0 = \frac{d\omega}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

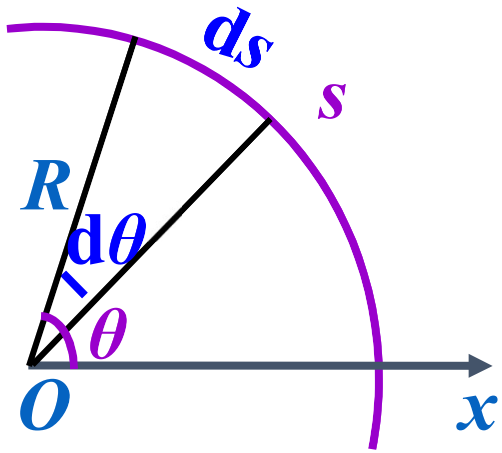
$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^{\ 2} + 2\beta_0 \left(\theta - \theta_0\right)}$$

与质点作匀变速直线运动的分析过程和结论类似

$v = v_0 + at$　　$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$　　$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

1.4.5 线量与角量关系

1 线速度与角速度



根据弧长与圆心角的关系，有

$$s = R\theta \qquad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \qquad \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{v = R\omega}$$

2 切向加速度、法向加速度与角加速度

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\beta \qquad \boxed{a_t = R\beta}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = \omega v \qquad \boxed{a_n = \omega^2 R}$$

角量与线量的比较

线　　量		角　　量		线量和角量的关系
位置	$\vec{r}$	角位置	θ	
位移	$\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0$	角位移	$\Delta\theta=\theta-\theta_0$	
速度	$\vec{\upsilon}=\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$	角速度	$\omega=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$	$\upsilon=r\omega$
加速度	$\vec{a}=\mathrm{d}\vec{\upsilon}/\mathrm{d}t$	角加速度	$\beta=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$	
切线加速度	$\lvert\vec{a}_\mathrm{t}\rvert=\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}t$			$a_\mathrm{t}=r\beta$
法向加速度	$\lvert\vec{a}_\mathrm{n}\rvert=\upsilon^2/r$			$a_\mathrm{n}=r\omega^2$
匀速直线运动	$\Delta x=\upsilon\Delta t$	匀速圆周运动	$\Delta\theta=\omega\Delta t$	
匀变速直线运动	$\upsilon=\upsilon_0+at$ $x=x_0+\upsilon_0t+\frac{1}{2}at^2$ $\upsilon^2=\upsilon_0{}^2+2a(x-x_0)$	匀变速圆周运动	$\omega=\omega_0+\beta t$ $\theta=\theta_0+\omega_0t+\frac{1}{2}\beta t^2$ $\omega^2=\omega_0{}^2+2\beta(\theta-\theta_0)$	

练习：

质点做半径R=3m的圆周运动，其角位置 $\theta=(4t^2-t)$ rad

求:

(1) 质点的角速度和角加速度随时间的变化函数关系式

(2) t=0.2s时质点的速度和加速度大小

（1） $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=8t-1(\mathrm{rad/s})$ $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=8(\mathrm{rad/s^2})$

（2） $v=\omega R=1.8m/s$

$$a_n=\omega^2R=1.08m/s^2$$

$$a_t=R\beta=24m/s^2$$

$$a=\sqrt{a_n{}^2+a_t{}^2}\approx 24m/s^2$$

1.4.5 自然坐标中的运动学问题

自然坐标中运动学的两类问题：

第一类问题： 已知质点运动方程 $s=s(t)$，求质点在任意时刻的速度和加速度。

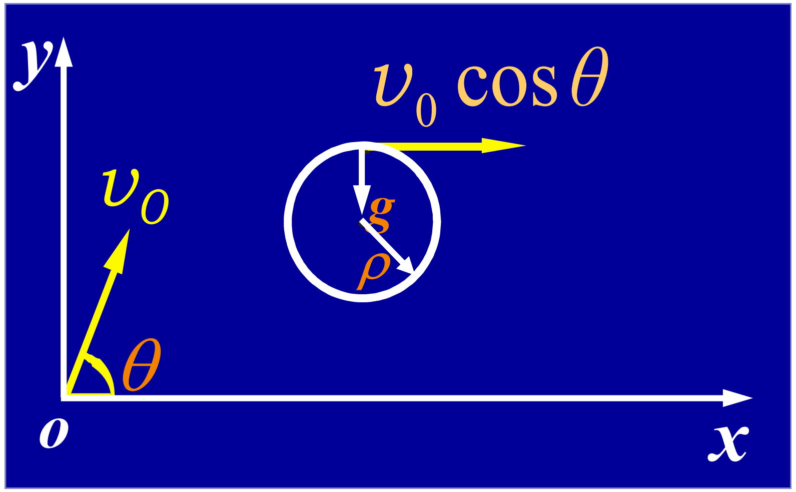
第二类问题： 已知质点运动的速率v或切向加速度a_t，求曲线运动的运动方程$s=s(t)$。

例 如图所示，炮弹的出口速率为v_0，发射角为θ，不计阻力。

求 (1) 任一时刻t的切向加速度a_t及法向加速度a_n；

(2) 轨迹最高点的曲率半径ρ。

解 炮弹作抛体运动，设炮弹在平面Oxy上运动



(1) $\vec{a}=\vec{g}$ 为恒矢量

任一时t刻炮弹速度在Ox, Oy轴上的分量

$$\upsilon_x=\upsilon_0\cos\theta$$

$$\upsilon_y=\upsilon_0\sin\theta-gt$$

任一时刻t的切向加速度大小

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2}$$

$$= -g\frac{v_0\sin\theta - gt}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2}}$$

法向加速度大小 $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{g^2 - a_t^2} = g\sqrt{1 - (\frac{a_t}{g})^2}$

$$= g\frac{v_0\cos\theta}{\sqrt{(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2}}$$

(2) 轨迹最高点的曲率

$$\rho=\frac{v^2}{a_{\mathrm{n}}}=\frac{v_0^{\ 2}\cos^2\theta}{g}$$

讨论

由于顶点处速率 v 最小，且法向加速度 $a_{\mathrm{n}}=g$ 最大(为什么?)，按 $\rho=\dfrac{v^2}{a_{\mathrm{n}}}$ 可知，在顶点处 ρ 达到最小值。同理可推知，在抛出点和落地点 ρ 为最大值。

例 汽车在半径为**200 m**的水平圆弧形弯道上行驶，发现路障后司机刹车。若将开始刹车的时刻作为记时起点，则刹车阶段汽车的运动方程为$s=20t-0.2t^3$ 。

求 汽车在t=1s时的加速度。

解 本题为自然坐标中第一类问题。

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20-0.6t^2$$

切向加速度大小 $a_\mathrm{t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-1.2t$

法向加速度大小 $a_\mathrm{n}=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{(20-0.6t^2)^2}{R}$

总加速度 $\vec{a}=\vec{a}_\mathrm{n}+\vec{a}_\mathrm{t}=\dfrac{(20-0.6t^2)^2}{R}\vec{e}_\mathrm{n}-1.2t\vec{e}_\mathrm{t}$

当 $t=1\,\mathrm{s}$ 时 $\quad a_{\mathrm{t}}=-1.2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{(20-0.6\times1)^2}{200}=1.88\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$\vec{a}=1.88\vec{e}_{\mathrm{n}}-1.2\vec{e}_{\mathrm{t}}$$

$t=1\,\mathrm{s}$ 时，加速度的大小

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{n}}{}^2+a_t^2}$$

$$=\sqrt{1.88^2+(-1.2)^2}=2.23\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$\tan\theta=\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}=\frac{1.88}{-1.2}=-1.5667$$

加速度 $\vec{a}$ 与速度 $\vec{v}$ 的夹角为 $\theta=122^\circ33'$

例 质点沿半径为$\boldsymbol{R}$的圆周按 $s=v_0t-\frac{b}{2}t^2$ 运动，式中$\boldsymbol{s}$为自然坐标，$\boldsymbol{v}_0$、$\boldsymbol{b}$为常量。

求 **(1)** 质点的加速度;

(2) 质点的角速度、角加速度;

(3) 法向加速度和切向加速度数值相等前，质点运动的时间。

解 **(1)** 本题是自然坐标的第一类问题。

先求出速率 $$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b$$

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{n}}{}^{2}+a_{\mathrm{t}}{}^{2}}=\frac{1}{R}\sqrt{R^{2}b^{2}+(\upsilon_{0}-bt)^{4}}$$

$$\tan\theta=\frac{(\upsilon_{0}-bt)^{2}}{-Rb}$$

(2) 根据线量和角量关系，写出用角量描述的运动方程 $\theta(t)$

$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{\upsilon_{0}}{R}t-\frac{b}{2R}t^{2}$$

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\upsilon_{0}}{R}-\frac{b}{R}t \qquad \beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{b}{R}$$

(3) 由 $|a_{\mathrm{t}}|=|a_{\mathrm{n}}|$ 可得

$$b=\frac{(\upsilon_{0}-bt)^{2}}{R}$$

解出 $t=\dfrac{\upsilon_{0}}{b}-\sqrt{\dfrac{R}{b}}$

例 一质点作半径为$\boldsymbol{R}$的圆周运动，其速率随时间变化的规律为 $\upsilon=\upsilon_0-bt$ ，式中$\boldsymbol{\upsilon_0}$、$\boldsymbol{b}$均为正的常量。$\boldsymbol{t=0}$时，质点位于自然坐标的原点。

求 **(1)** 自然坐标中质点的运动方程;

(2) 当加速度的大小为$\boldsymbol{b}$时，质点沿圆周运动了几圈?

解 **(1)** 本题为自然坐标中的第二类问题，根据速度的定义

$$\upsilon=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\upsilon_0-bt$$

分离变量

$$\mathrm{d}s=(\upsilon_0-bt)\,\mathrm{d}t$$

两边积分

$$\int_0^s \mathrm{d}s=\int_0^t(\upsilon_0-bt)\,\mathrm{d}t$$

$$s=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}bt^2$$

(2)根据加速度的定义

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R} \qquad a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b$$

$$a=\sqrt{a_{\mathrm{t}}^{\ 2}+a_{\mathrm{n}}^{\ 2}}=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}$$

$$a=\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}$$

说明质点做匀减速圆周运动

运动过程为先正转再反转

由 $$a=\frac{1}{R}\sqrt{R^2b^2+(v_0-bt)^4}=b$$

解得 $$t=\frac{v_0}{b}$$

与速度为**0**的时间 (***t***=***v***$_0$/***b***) 相等，说明恰好只存在正转过程

这时质点运行的圈数为

$$n=\frac{s}{2\pi R}=\frac{v_0\left(\frac{v_0}{b}\right)-\frac{1}{2}b\left(\frac{v_0}{b}\right)^2}{2\pi R}=\frac{v_0^{\ 2}}{4\pi Rb}$$

自然坐标中质点运动学问题也分为两类问题。

1. 第一类问题：已知自然坐标中运动方程**s(t)**，求质点运动的速度、切向加速度、法向加速度，用求导法。

2. 第二类问题：已知质点运动的速度或切向加速度及初始条件，求运动方程，用积分法。

3. 质点的圆周运动可用线量描述也可用角量描述。

§1.5 相对运动

主要内容：

1. 基本参考系与运动参考系

2. 伽利略坐标变换

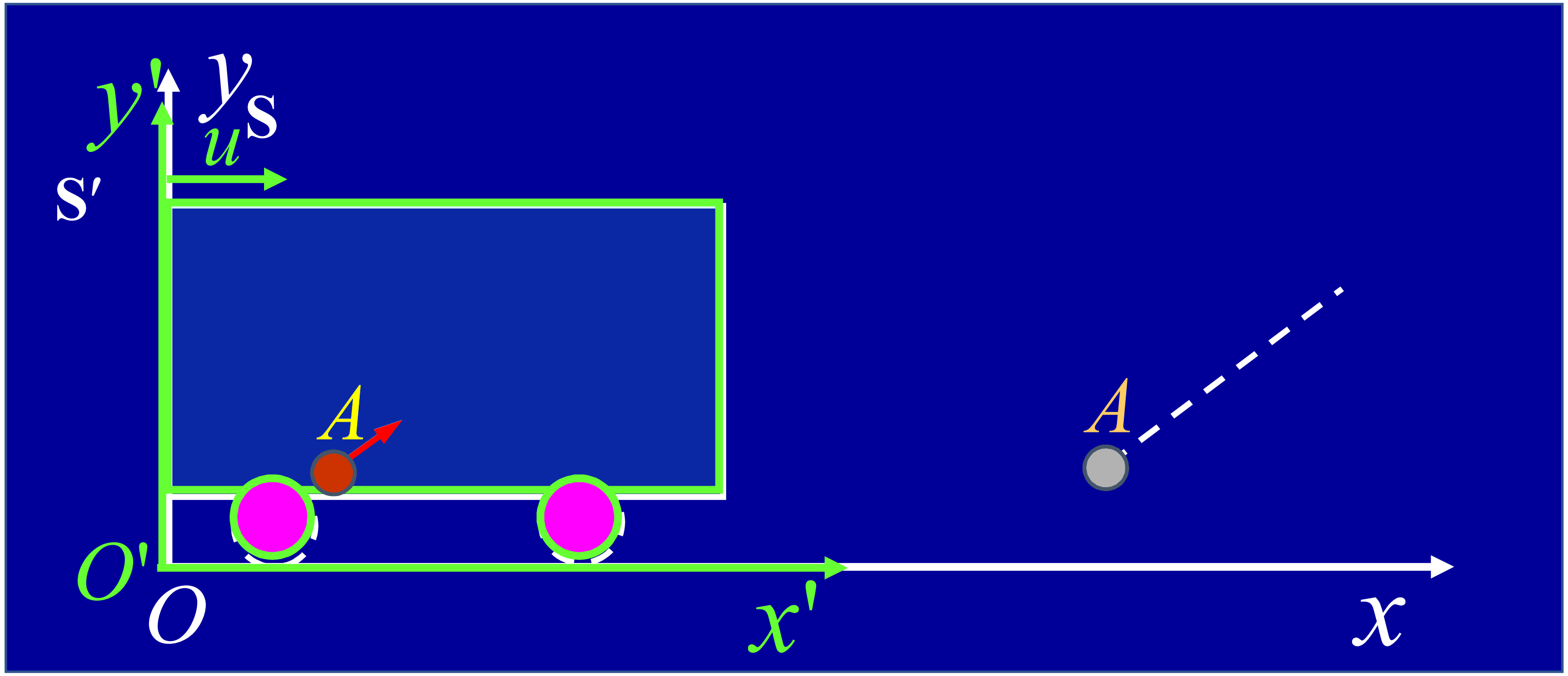
3. 伽利略速度变换

学习要求：

掌握速度变换公式及其相关计算

1.5.1 基本参考系与运动参考系

两个作相对运动的参考系，选其中一个作为基本参考系，用S系表示；把另一参考系称为运动参考系，用S′系表示。



物体相对于S 系的运动 —— 绝对运动；

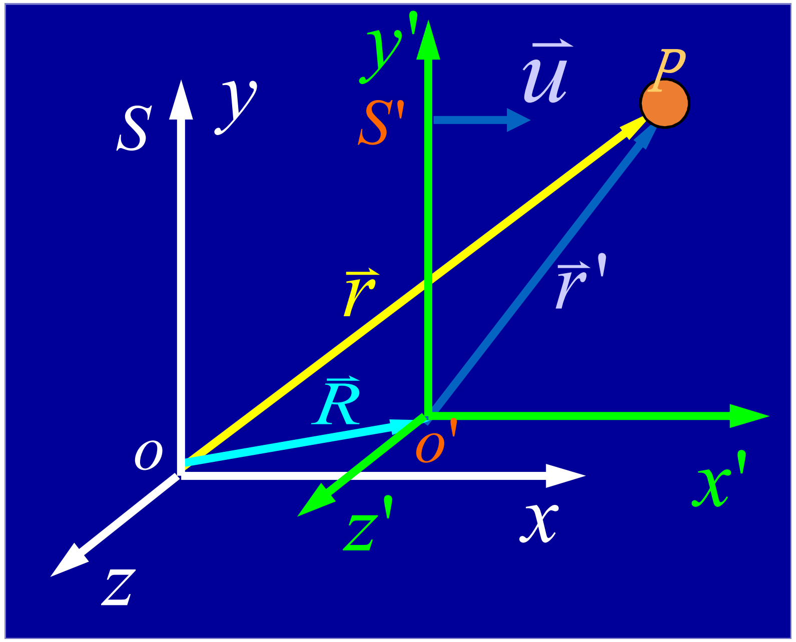
物体相对于S′系的运动 —— 相对运动；

S′系相对于S 系的运动 —— 牵连运动。

1.5.2 经典力学中的平动坐标系变换

平动：物体上任意两点所连成的直线，在整个运动过程中，始终保持平行

质点P 在两个相互作平动运动的坐标系中位矢之间的关系



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}$$

质点P 在相互作平动运动的坐标系中速度之间的关系

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

绝对速度　　牵连速度　　相对速度

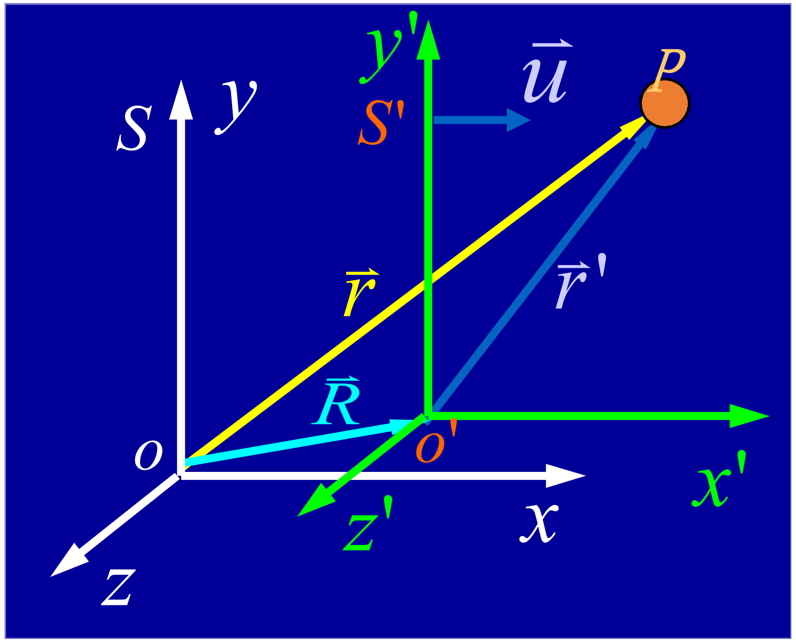
绝对时空观

时间、空间间隔与参考系无关

质点P 在相互作平动运动的坐标系中速度之间的关系

$$\vec{\upsilon} = \vec{u} + \vec{\upsilon}\,'$$

绝对速度　　牵连速度　　相对速度



伽利略速度变换公式

(经典力学速度变换公式)

注意：该公式在物体运动速度很高，接近于光速时不成立

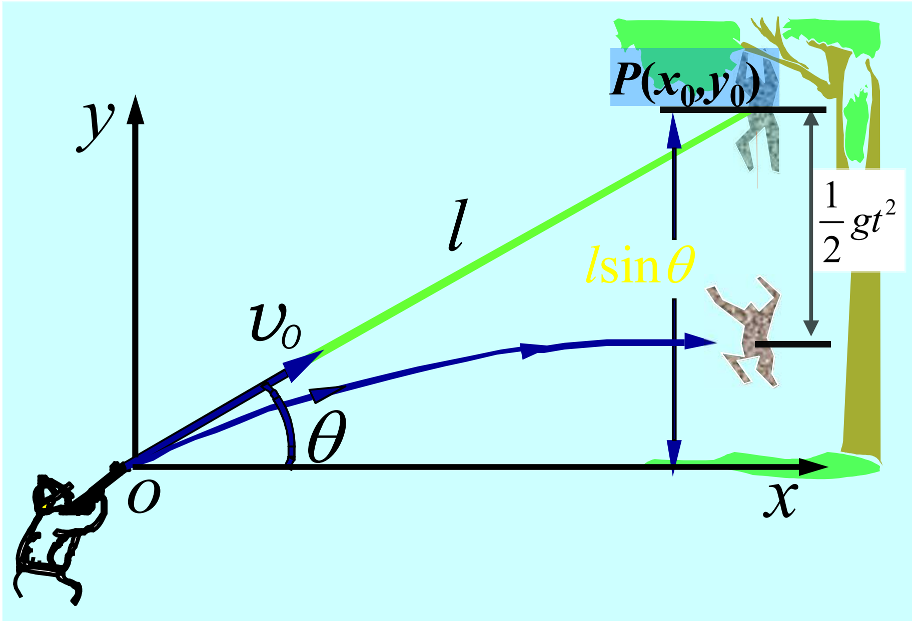
对速度变换作时间的一阶求导，可得加速度变换关系

$$\vec{u} = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\,' = \vec{a}$$

例 用枪瞄准攀伏在树上的猴子，随着枪响，受惊的猴子开始向下掉落，设空气阻力可以忽略不计。

求 试证明不论子弹的初速度$\boldsymbol{v}_0$多大，都会击中自由下落的猴子.

证 取地面为基本参考系，猴子为运动参考系。子弹为运动物体，则子弹的速度为:



$$\vec{v}_{弹\to地} = \vec{v}'_{弹\to猴} + \vec{u}_{猴\to地}$$

$$\vec{v}'_{弹\to猴} = \vec{v}_0 \qquad \vec{v}'_{弹\to地} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

$$\vec{u}_{猴\to地} = \vec{g}t$$

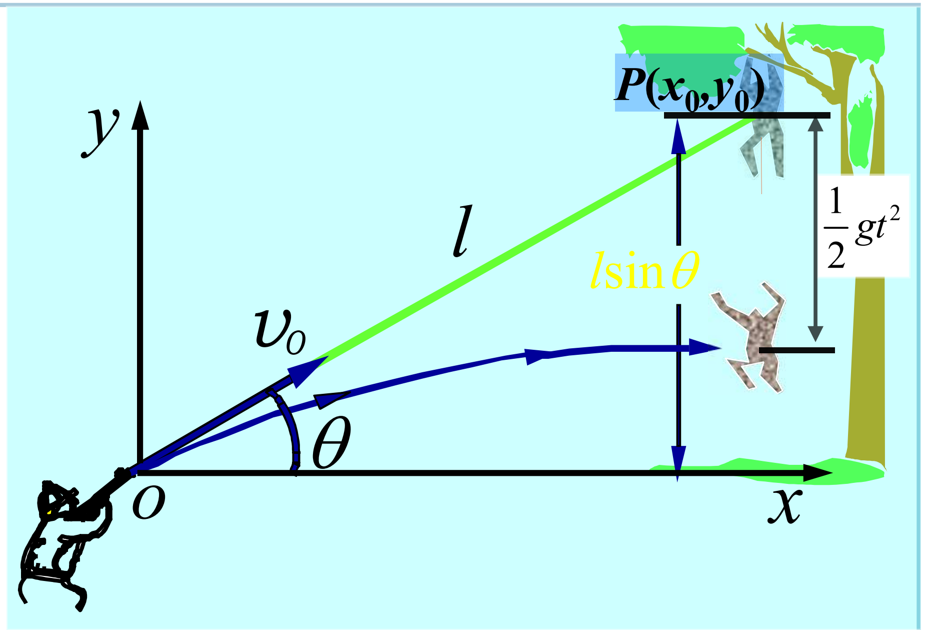
$$\vec{v}'_{弹\to猴} = \vec{v}_{弹\to地} - \vec{u}_{猴\to地}$$

$$\vec{v}'_{弹\to猴} = \vec{v}_0 + \vec{g}t - \vec{g}t = \vec{v}_0 = \text{常矢量}$$

子弹相对于猴子作匀速直线运动，只要初始被瞄准，不论子弹的初速度$\boldsymbol{v}_0$为多大，自由下落的猴子都会被击中。

另一种解法:

要击中猴子，必须在某一时刻 t, 子弹和猴子的坐标一样。



设子弹初速度为 $\boldsymbol{\upsilon}_0$，发射角为 θ，猴子的初始坐标为（x_0，y_0）

瞄准时 $\tan\theta = \dfrac{y_0}{x_0}$

子弹在 t 时刻的位置为
$$\begin{cases} x_1 = \upsilon_0 \cos\theta \cdot t \\ y_1 = \upsilon_0 \sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

猴子在 t 时刻的位置为
$$\begin{cases} x_2 = l\cos\theta = x_0 \\ y_2 = l\sin\theta - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

子弹击中猴子：同一时刻，子弹和猴子到达同一位置。

当$\boldsymbol{x_1=x_2}$，即 $v_0\cos\theta\cdot t=l\cos\theta$ 得 $t=\dfrac{l}{v_0}$

将 $t=\dfrac{l}{v_0}$ 代入$\boldsymbol{y_1}$和$\boldsymbol{y_2}$的表达式得

$$y_1=v_0\sin\theta\frac{l}{v_0}-\frac{1}{2}g(\frac{l}{v_0})^2=l\sin\theta-\frac{gl^2}{2v_0{}^2}$$

$$y_2=l\sin\theta-\frac{1}{2}g(\frac{l}{v_0})^2=l\sin\theta-\frac{gl^2}{2v_0{}^2}$$ 即 $y_1=y_2$

可见，在 $t=\dfrac{l}{v_0}$ 这一时刻，$\boldsymbol{x_1=x_2}$，$\boldsymbol{y_1=y_2}$，即子弹和猴子到达同一位置，所以不论初速度$\boldsymbol{v}_0$为多大，只要开始瞄得准，总可击中下落的猴子。

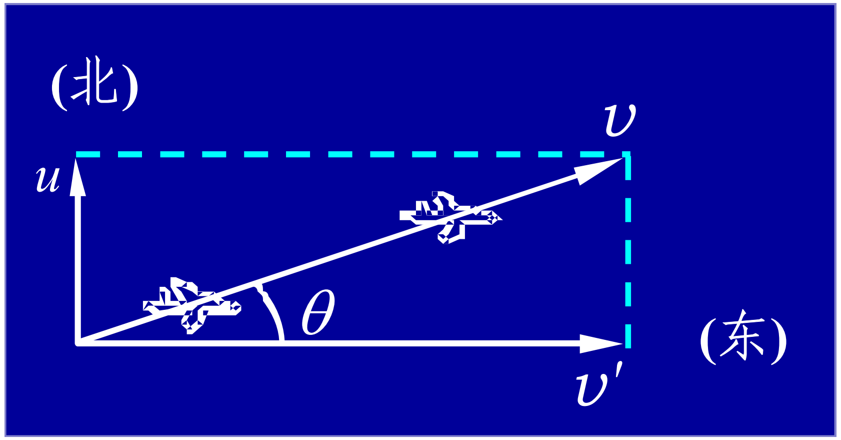
例 飞机上的罗盘指出飞机航向正东（即飞机相对气流方向为正东），航速表的读数为**215 km/h**，此时风向正南，风速为**65 km/h**。

求 **(1)** 飞机相对地面的速度；

(2) 若飞行员想朝相对地面方向正东飞行，他应取什么航向？

解 基本参考系：地面；运动参考系：气流；运动物体：飞机。

(1) 已知飞机相对气流的速度 $\boldsymbol{v}'$=**215km/h**，方向正东。气流相对地面的速度即风速$\boldsymbol{u}$=**65km/h**，方向正北。



由速度变换关系可知，飞机相对地面的速度为：

$$\vec{v}_{机\to地} = \vec{v}'_{机\to气} + \vec{u}_{气\to地}$$

其大小为 $v=\sqrt{v'^2+u^2}=\sqrt{215^2+65^2}\ \text{km/h}=225\ \text{km/h}$

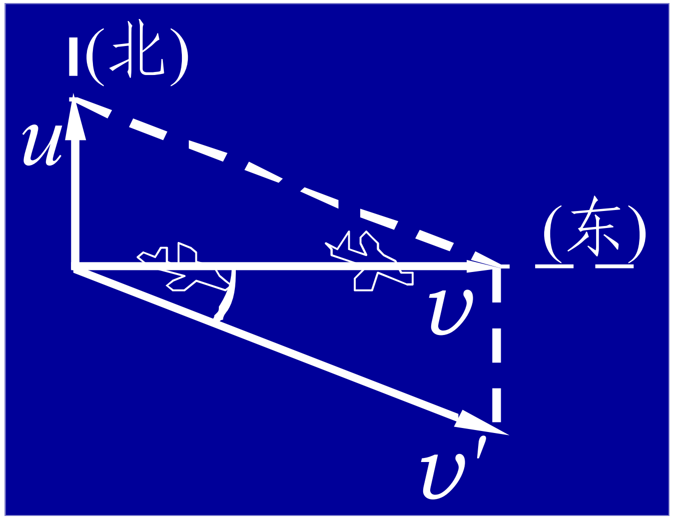
方向角 $\theta=\arctan\dfrac{u}{v'}=\arctan\dfrac{65}{215}=16.8^\circ$

(2) 飞机相对气流的速度大小不变, **v'=215km/h**, 飞机相对地面的绝对速度**v**方向向东, 风速的大小和方向不变, **u=65km/h**, 方向正北。

由速度变换关系知: $v_{机\to气}=v_{机\to地}-v_{气\to地}$,

即 $v'=v-u$

v'的方向如图所示.



由图可知, 飞行员应取的航向为正东偏南α, 其值为

$$\alpha=\arcsin\frac{u}{v'}=\arcsin\frac{65}{215}=17.6^\circ$$

本章小结

质点运动

- 质点运动的描述
  - 参考系
  - 坐标系
- 描述质点运动的物理量
  - 位矢 → 轨迹方程、运动方程
    - ↓ 变化量
  - 位移 ⟷ 路程（区别与联系）
    - ↓ 对时间的一阶导数
  - 速度
    - ↓ 对时间的一阶导数
  - 加速度
- 质点运动问题的研究方法
  - 第一类问题（微分） 运动方程→速度、加速度
  - 第二类问题（积分） 速度、加速度→运动方程
- 常见的几种质点运动形式
  - 匀加速直线运动
  - 抛体运动　运动叠加原理
  - 圆周运动　角量与线量的关系
- 相对运动　伽利略变换

1. 描述质点运动的物理量

(1) 位矢：从坐标原点引向质点所在位置的有向线段。

在直角坐标系中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(2) 运动方程

在直角坐标系中 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

直角坐标系中分量表示 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

在自然坐标中 $s = s(t)$

(3)位移：由质点的初始位置指向末位置的矢量。

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

在直角坐标系中 $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$

(4)路程：物体运动时沿轨迹实际通过的路径长度称为路程，用s表示.

一般情况下 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ 但 $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$

(5)速度：质点位置对时间的一阶导数称为速度，$\vec{\upsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

在直角坐标系中 $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$

$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

在自然坐标中 $\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}$

速度的大小称为速率，速率是标量 $v=|\vec{v}|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

(6) 加速度**:** 质点运动速度对时间的一阶导数或位移对时间的二阶导数

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

$$=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

在自然坐标中 $\vec{a}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\dfrac{v^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$

2. 常见的几种运动形式

(1)匀加速直线运动:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\upsilon^2 - \upsilon_0^2 = 2a(x\text{-}x_0)$$

(2)抛体运动:

$$a_x = 0\,,\quad a_y = -\mathrm{g}$$

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\theta\,,\quad \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\theta - \mathrm{g}\,t$$

$$x = \upsilon_0 \cos\theta \cdot t\,,\quad y = \upsilon_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}\mathrm{g}\,t^2$$

（3）圆周运动的角量描述:

角位置: $\theta = \theta(t)$

角位移: $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$

角速度: $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\upsilon}{R}$

角加速度: $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

法向加速度: $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{\upsilon^2}{R} = R\omega^2$ （指向圆心）

切向加速度: $a_{\mathrm{t}} = \dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = R\beta$ （沿切线方向）

3. 相对运动和伽利略变换

伽利略速度变换式: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}$