一、具体行列式的计算★★

1. 掌握内容：

1）二、三阶行列式的对角线法则

（三阶以上的行列式不能用）；

2）行列式的性质；

3）按行（列）展开公式（设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$）

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$\det \boldsymbol{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

4）牢记一些特殊行列式的值：

①上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

②次上下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & a_{2,n-1} & \\ a_{n-1,2} & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

③范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \times$$
$$\times (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \times$$
$$\times \cdots\cdots\cdots \times$$
$$\times (x_n - x_{n-1})$$

上页 下页 返回

④分块上下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ * & \cdots & * & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 主要类型：

1)稀——大量元素为零的行列式

① 二条线行列式(直接展开降阶)；

② 三条线行列式：

箭形(利用对角或次对角元消去一条边)；

三对角(直接展开得递推公式)。

2)满——大量元素不为零的行列式

① 行(列)和相等的行列式

(各列(行)加到第1列(行)或第n列(行))；

② 可采用升阶法计算的行列式

(升阶化为箭形)。

二、代数余子式的有关计算★

1. 部分代数余子式:

1) 利用代数余子式的性质

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det \boldsymbol{A}, & i\neq j\\ 0\quad, & i=j\end{cases}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}\det \boldsymbol{A}, & i\neq j\\ 0\quad, & i=j\end{cases}$$

2) 强制代换法

$$b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2．全部代数余子式：利用伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})_{n\times n}=(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}$$

三、求抽象矩阵的行列式★★

掌握内容：

1）行列式及矩阵的性质（设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为n阶方阵）

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}\,,\quad \det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \det\boldsymbol{A}$$

$$\det(k\boldsymbol{A}) = k^n\det\boldsymbol{A}$$

特别地

$$\det(-\boldsymbol{A}) = (-1)^n\det\boldsymbol{A}\,,$$

$$\det((\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}_n) = (\det\boldsymbol{A})^n$$

$$\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det\boldsymbol{A}}$$

上页 下页 返回

2) 分块上下三角阵的行列式

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B} \ ,$$

$$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}$$

3) 利用 $\det \boldsymbol{A} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是$\boldsymbol{A}$的n个特征值。

四、求逆矩阵★★★

1．具体矩阵：

① 2阶矩阵——伴随阵法(公式法)

对 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$， 有

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

② 2阶以上——初等变换法

$$(A,E)\xrightarrow{\text{行变换}}(E,A^{-1})$$

③ 分块对角阵求逆公式

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

2. 抽象矩阵：

变形为 $AB = E$ 或 $BA = E$，则

A可逆，且 $A^{-1} = B$

上页 下页 返回

五、求解矩阵方程★★★

矩阵方程——含未知矩阵的等式。

目的——考察利用运算规律的技巧和数值计算的能力。

方法——先利用运算法则通过“字母”运算变形、化简转化为

$$AXB = C$$

的形式，再利用逆矩阵和矩阵乘法求解

$$X = A^{-1}CB^{-1}。$$

上页 下页 返回

六、求矩阵的秩★

1. 具体矩阵：

1) 利用定义——子式法；

2) 利用矩阵的初等变换。（化为阶梯形）

2. 抽象矩阵：

利用有关的结果，如：

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}_{m\times n} \le \min\{m,n\}$$

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) \le \min\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\}$$

$\boldsymbol{A}$可逆时 $\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{B}$可逆时 $\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$为n阶方阵且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$时，

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\le n$$

$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，则

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{*}=\begin{cases} n, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n \\ 1, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1 \\ 0, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A}<n-1 \end{cases}$$

七、求方阵的幂★

1）数学归纳法：

计算A^2，A^3等，从中发现A^k的规律，再用数学归纳法证明。

2）利用二项展开公式：

将矩阵A分解成 $A=F+G$，要求F，G 的方幂好计算，且$FG=GF$，则

$$\begin{aligned} A^k &= (F+G)^k \\ &= F^k + \mathrm{C}_k^1 F^{k-1}G + \mathrm{C}_k^2 F^{k-2}G^2 + \\ &\cdots + \mathrm{C}_k^{k-1} FG^{k-1} + G^k \end{aligned}$$

上页 下页 返回

3）利用矩阵乘法结合律：

如果矩阵$\boldsymbol{A}$可分解成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$，其中$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$均为 $n\times 1$矩阵，则

$$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^k=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})^{k-1}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})^{k-1}\boldsymbol{A}$$

4）分块对角阵求幂：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1^k & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^k \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_i$ 均为方阵。

上页 下页 返回

5）利用相似对角化：若求得可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

八、初等变换与初等方阵★

1. 定义　单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等方阵。

2. 性质

1）

$$\boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$$

$$\boldsymbol{E}(i(\lambda))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{\lambda}))$$

$$\boldsymbol{E}(i,j(\lambda))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j(-\lambda))$$

上页　下页　返回

2) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 相当于 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\mathrm{r}_i\leftrightarrow\mathrm{r}_j}\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{E}(i(\lambda))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 相当于 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\mathrm{r}_i\times\lambda}\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{E}(i,j(\lambda))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 相当于 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\mathrm{r}_i+\lambda\mathrm{r}_j}\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{B}$ 相当于 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\mathrm{c}_i\leftrightarrow\mathrm{c}_j}\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i(\lambda))=\boldsymbol{B}$ 相当于 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\mathrm{c}_i\times\lambda}\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}(i,j(\lambda))=\boldsymbol{B}$ 相当于 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{\mathrm{c}_j+\lambda\mathrm{c}_i}\boldsymbol{B}$

利用初等方阵可将对矩阵的初等变换转化成矩阵的乘法运算。

九、分块矩阵的有关运算

考虑分块矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中$A$或$D$可逆。

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & -BD^{-1} \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -D^{-1}C & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ O & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ PC & PD \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ O & P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & BP \\ C & DP \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AP & B \\ CP & D \end{pmatrix}$$

十、向量组线性相关性的判定与证明★★

1. 具体向量组：

1) 利用定义—— 列出

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

转化成齐次线性方程组有无非零解的问题。

2) 利用矩阵的秩—— 将向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$排成矩阵$A$，求$\operatorname{rank} A$；若 $\operatorname{rank} A = m$，则向量组线性无关；若$\operatorname{rank} A < m$，则向量组线性相关。

3) 行列式法—— 将n个n维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$排成$n$阶方阵$A$。若$\det A \neq 0$，则向量组线性无关；若 $\det A = 0$，则向量组线性相关。

4)利用有关的结论，如：

(1)部分相关，则全体相关；

(2) $n+1$个n维向量必线性相关等。

2. 抽象向量组：

利用定义，列出

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

然后变形或乘上适当的矩阵。

十一、向量线性表出的判定与证明★

1．具体向量：

列出 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$

转化成非齐次线性方程组有无解的问题。

2．抽象向量：

利用有关的结论，如：

(1) 部分相关，则全体相关；

全体无关，则任意部分无关。

(2) 唯一表示定理：$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 无关，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta$ 相关，则 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 表出。

十二、求向量组的秩与极大无关组★

1．具体向量组： 将向量组排成矩阵 A 求秩，即得向量组的秩；在 A 中找阶数等于秩的非零子式 D，包含D的向量组是极大无关组。

2．抽象向量组：

(1) 利用定义

(先证整体线性相关，再找部分证线性无关)

(2) 利用有关的结论，如：

① 等价的向量组有相同的秩。

② 若向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示，

则：组(Ⅰ)的秩≤组(Ⅱ)的秩

十三、求解线性方程组的消元法★★★

列出增广矩阵(非齐次)或系数矩阵(齐次)，用初等行变换化为**行最简形矩阵**，写出同解方程组，再写出通解的参数形式或向量形式。

上页 下页 返回

十四、求齐次线性方程组的基础解系★★★

用初等行变换化系数矩阵为行最简形矩阵，写出同解方程组，再写出通解的向量形式抽出基础解系；或在同解方程组中取自由未知量的一组值求得其余未知量构成基础解系。

十五、含参数线性方程组的求解（向量组的线性表出）★★★

1. 当 $m = n$ 时，先求系数行列式 $\det \boldsymbol{A}$，对于使得 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ 的参数值，方程组有唯一解；对于使得 $\det \boldsymbol{A} = 0$ 的参数值，分别列出增广矩阵用初等行变换求解；

2. 当 $m \neq n$ 时，直接列出增广矩阵用初等行变换求解。（注意化为行最简形矩阵。）

十六、抽象线性方程组的求解★★

根据所给条件或解向量的性质找非齐次线性方程组的特解和对应齐次线性方程组的基础解系，再利用解的结构写出通解。

上页 下页 返回

十七、线性方程组有无解的证明★●

证明系数矩阵与增广矩阵的秩相等或不相等。

十八、求两个方程组的公共解★

已知线性方程组(1)的一般式与线性方程组(2)的通解(或基础解系)，将(2)的通解代入(1)确定通解中的参数。

十九、空间三个平面的位置与方程组的解的关系★

1．交与一点　　　　方程组有唯一解

（系数阵秩为3，增广阵秩为3）

2．交与一条直线　方程组有无穷解

（系数阵秩为2，增广阵秩为2）

3．三平面重和　　　方程组有无穷解

（系数阵秩为1，增广阵秩为1）

4．平行但不重合　方程组无解

（系数阵秩为1，增广阵秩为2）

5．其它　　　　　　方程组无解

（系数阵秩为2，增广阵秩为3）

上页 下页 返回

二十、基础解系的证明★

1. 向量组是齐次方程组 $Ax=0$ 的解向量；
2. 向量组线性无关；
3. 向量组所含向量个数恰好为$n-\mathrm{rank}A$，其中 n为方程组所含未知数个数。

二十一、求过渡矩阵★★

1. 两组基已知—— 利用中间基法；
2. 两组基不知，但知两组基的关系——写成形式记法；
3. 知道一组基，又知同一向量在两组基下坐标之间的关系—— 写出坐标变换公式，从而求得过渡矩阵和另一组基。

二十二、求向量的坐标★★

1．根据定义，采用待定法求坐标；

2．利用坐标变换公式。

二十三、求向量空间的基与维数★

1. 由集合形式给出的向量空间——观察得出一组向量(一般增加一个条件，维数减一)，证明这组向量线性无关，再证明任意向量可由这组向量线性表出；

2. 由向量组生成的向量空间——生成向量组的秩即为向量空间的维数，生成向量组的极大无关组即为向量空间的基；

3. 齐次线性方程组的解向量构成$n-\mathrm{rank}A$维的向量空间(n为未知数的个数)，基础解系是它的基。

二十四、有关矩阵的秩的证明★●

综合利用矩阵的秩的定义、 向量组的秩的有关结果、线性方程组的有关结果等证明。

上页 下页 返回

二十五、求特征值与特征向量★★★

1. 具体矩阵：

由 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0$ 求得$\boldsymbol{A}$的n个特征值

$$\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$$

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求得对应λ_i的特征向量。

2. 抽象矩阵：

利用定义 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。

上页 下页 返回

二十六、由特征值与特征向量反求矩阵中的参数★

1. 已知$\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{A}$的特征向量，列出 $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$；

2. 已知λ_0是$\boldsymbol{A}$的特征值，列出 $\det(\boldsymbol{A} - \lambda_0\boldsymbol{E}) = 0$。

二十七、相似矩阵求参数★★

1. 定义 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$

2. 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，求参数：

(1) 利用

$$\begin{cases}\lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+\cdots+a_{nn}\\ \lambda_1\cdots\lambda_n=\det\boldsymbol{A}\end{cases}$$

(2) 利用

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\det(\boldsymbol{\Lambda}-\lambda\boldsymbol{E})$$

上页 下页 返回

二十八、相似对角化的条件★

1. (充要)n阶方阵A有n个线性无关的特征向量;
2. (充分)n阶方阵A有n个互异的特征值;
3. (充要)对于A的每个重特征值有等于重数的线性无关的特征向量;
4. (充分)A是实对称矩阵。

上页 下页 返回

二十九、矩阵相似于对角阵的计算（反求矩阵）★

第一步　求出$\boldsymbol{A}$的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 和对应的 n个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n$；

第二步　构造

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n),\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda$$

三十、正交矩阵的有关证明★

利用 $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = E$

上页 下页 返回

三十一、二次型的矩阵★★★

二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵$\boldsymbol{A}$的主对角元素依次为二次型的平方项 $x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2$ 的系数，而$\boldsymbol{A}$的i行j列元素a_{ij} $(i<j)$是交叉项x_ix_j的系数的一半，再取a_{ji}=a_{ij} $(i<j)$即得对称矩阵$\boldsymbol{A}$。

二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩即为$\boldsymbol{A}$的秩。

三十二、实对称矩阵正交相似与对角阵的计算(用正交变换化实二次型为标准形) ★★★

第一步：求出n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

第二步：求出对应特征值的线性无关的特征向量；

第三步：用**Schmidt**正交化过程将对应重特征值的线性无关特征向量正交化，再将全部特征向量单位化；

第四步：由两两正交的单位特征向量排成正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，则

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为

$$f=\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$$

三十三、实对称矩阵合同于对角阵的计算（配方法化二次型为标准形）★

1. 由实对称矩阵$\boldsymbol{A}$构造二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，

再用配方法化二次型f为标准形

$$f=d_1y_1^2+\cdots+d_ny_n^2$$

同时求出所用的可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

2．求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

上页 下页 返回

三十四、正定矩阵与正定二次型的判定★★

利用实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的所有顺序主子式大于零。

上页 下页 返回

三十五、正定矩阵的证明★★

1．利用定义——先证$\boldsymbol{A}$实对称，再证对任意n维列向量$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$$

2．利用特征值——先证$\boldsymbol{A}$实对称，再证$\boldsymbol{A}$的特征值全大于零。

上页 下页 返回

三十六、已知矩阵正定（或对称）证明其它结果★

存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

上页 下页 返回