2.3 关系运算

- 复合关系
- 逆关系
- 幂

实例

(1)小于等于关系　　大于等于关系

(2) 整除关系　　倍数关系

(3)程序**P1**直接调用程序**P2**，**P2**调用**P3**
　则**P1**间接调用**P3**

(4) a是**b**的父亲，**b**是**c**的父亲，**a**是**c**的爷爷

新的关系即是逆关系、合成关系

关系的运算

关系的基本运算

定义　关系的定义域、值域与域分别定义为

$$\mathbf{dom}R = \{ x \mid \exists y\,(\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\mathbf{ran}R = \{ y \mid \exists x\,(\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\mathbf{fld}R = \mathbf{dom}R \cup \mathbf{ran}R$$

例　$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathbf{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathbf{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathbf{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系运算(逆与复合)

定义 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ \langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \}$$

定义 关系的复合运算，设R, S为二元关系，则:

右复合$R \circ S = \{ \langle x, z\rangle \mid \exists y\, (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S) \}$

左复合$S \circ R = \{ \langle x, z\rangle \mid \exists y\, (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S) \}$

我们采用右复合的定义

例 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^{-1} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R \circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

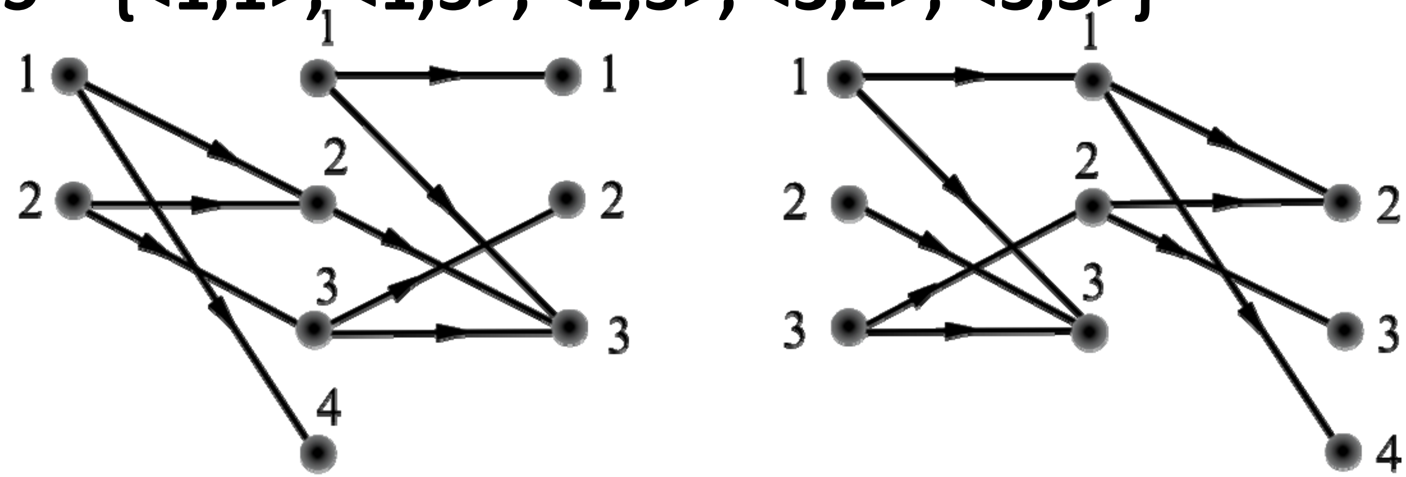
$S \circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

复合的图示法

利用图示方法求复合

R = {<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>}

S = {<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>}



$R \circ S$ $S \circ R$

$R \circ S$ ={<1,3>, <2,2>, <2,3>}

$S \circ R$ ={<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>}

复合的矩阵

设$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$,$Z=\{z_1,z_2,\ldots,z_p\}$,

R是X到Y的关系,$M_R=[a_{ij}]$是$m\times n$矩阵,

S是Y到Z的关系,$M_S=[b_{ij}]$是$n\times p$矩阵.

则 $M_{R\cdot S}=[c_{ij}]=M_R\cdot M_S$,

这里 $c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n} a_{ik}\wedge b_{kj}$

$$i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots p$$

实例

设$X=\{1,2\}$,$Y=\{a,b,c\}$,$Z=\{\alpha,\beta\}$,$R=\{<1,a>,<1,b>,<2,c>\}$,
$S=\{<a,\beta>,<b,\beta>\}$,则

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad M_S=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$M_{R\cdot S}=M_R\cdot M_S=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

关系运算的性质

定理　设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1}\Leftrightarrow<y,x>\in F^{-1}\Leftrightarrow<x,y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取x,

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1}\Leftrightarrow\exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow\exists y(<y,x>\in F)\Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系运算的性质

定理 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in(F\circ G)\circ H \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\circ G \wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(\exists s\,(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G) \wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,\exists s\,(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G \wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \wedge \exists t\,(<s,t>\in G \wedge <t,y>\in H)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \wedge <s,y>\in G\circ H) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ(G\circ H)
\end{aligned}
$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

证明

(2) 任取$<x,y>$,

$$<x,y> \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y,x> \in F \circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<y,t> \in F \wedge <t,x> \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in G^{-1} \wedge <t,y> \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理 设R为A上的关系, 则

$$R\circ I_A = I_A\circ R=R$$

证 任取$\langle x,y\rangle$

$$\langle x,y\rangle \in R\circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle x,t\rangle \in R \wedge \langle t,y\rangle \in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle x,t\rangle \in R \wedge t=y \wedge y \in A)$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R$$

关系的幂运算

定义

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂R^n定义为:

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R^0 \circ R = R$
- R^2, R^3, R^4 ……如何求?
- 集合表示法: 通过n-1次右复合计算得到R^n
- 关系矩阵表示法: R的关系矩阵为M, 则R^n的关系矩阵M^n为n个M之积
- 关系图表示法: 直接由R的关系图G得到R^n的关系图G'

幂的求法

例 设$A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$, 求$R$的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2的关系矩阵分别是:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法

R^3和R^4的关系矩阵是:

$$M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

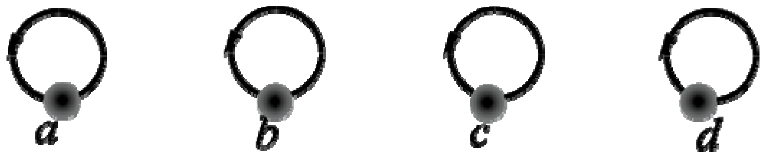
R^0的关系矩阵是

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

关系图

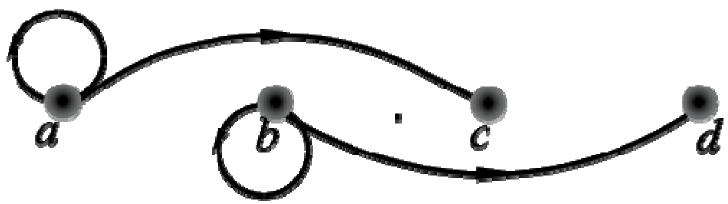
G'的顶点集与G相同. 考察G的每个顶点x_i, 如果在G中从x_i出发经过**n步长**的路径到达顶点x_j, 则在G'中加一条从x_i到x_j的边

$R^0, R^1, R^2, R^3,\ldots$的关系图如下图所示.



R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$

$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理 设 R 是 A上的关系， $m, n \in \mathrm{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m \in \mathrm{N}$, 对n用归纳法.

若$n=0$, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1} ,$$

所以对一切$m,n \in \mathrm{N}$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

证明

(2) 对于任意给定的$m \in \mathbf{N}$, 对n用归纳法.

若$n=0$, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m$$

$$= R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切$m,n \in \mathbf{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

作业

徐 P37 2.4、 2.5

P58 25、 29