第三节　随机变量的函数及其分布(2)

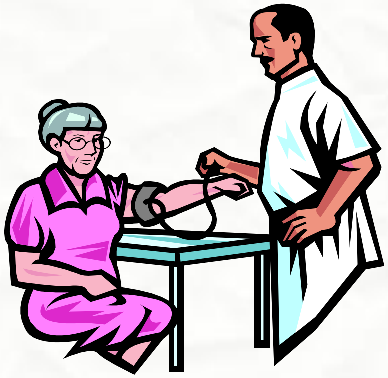
（两个随机变量的函数的分布）

- 一、问题的引出
- 二、离散型随机变量的函数的分布
- 三、连续型随机变量的函数的分布

一、问题的引出

有一大群人，令X和Y分别表示一个人的年龄和体重，Z表示该人的血压并且已知Z与X,Y的函数关系$Z=f(X,Y)$,如何通过(X,Y)的分布确定Z的分布.

为了解决类似的问题,下面我们讨论二维随机变量函数的分布的求法.



二、离散型随机变量函数的分布

例1 设随机变量(X,Y)的分布律

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

求 (1)$X+Y$, (2)$\lvert X-Y\rvert$的分布律.

目 上 下 回 停 续

解

$X \backslash Y$	-2	-1	0
-1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$

等价于

P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{2}{12}$
(X,Y)	$(-1,-2)$	$(-1,-1)$	$(-1,0)$	$\left(\frac{1}{2},-2\right)$	$\left(\frac{1}{2},-1\right)$	$\left(\frac{1}{2},0\right)$	$(3,-2)$	$(3,-1)$	$(3,0)$
$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\lvert X-Y \rvert$	1	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	4	3

所以$X+Y, |X-Y|$的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y\rvert$	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

所以$X+Y, |X-Y|$的分布律分别为

$X+Y$	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

$\lvert X-Y \rvert$	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

结论

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$p\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,$$

则随机变量函数 $Z = f(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{f(X,Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = f(x_i, y_j)} p_{ij} \qquad k = 1,2\cdots$$

其中“$\sum_{z_k = f(x_i, y_j)} p_{ij}$”是关于 $f(x_i, y_j) = z_k$

的 (x_i, y_j) 求和.

例2 设两个独立的随机变量X 与Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$\Rightarrow$

P	(X,Y)	$Z=X+Y$
0.18	(1,2)	3
0.12	(1,4)	5
0.42	(3,2)	5
0.28	(3,4)	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

三、二维连续型随机变量函数的分布

几种特殊形式的随机变量函数的分布

(1)和的分布　$Z = X + Y$的分布

(2)商的分布　$Z = \dfrac{X}{Y}$的分布

(3) 极值分布，$M = \max\{X, Y\}$及

$N = \min\{X, Y\}$的分布.

注： 研究方法仍然沿用分布函数法.

(1)$Z = X + Y$的分布

设(X, Y)的概率密度为$p(x, y)$,求$Z = X + Y$的概率密度 $p_Z(z)$.

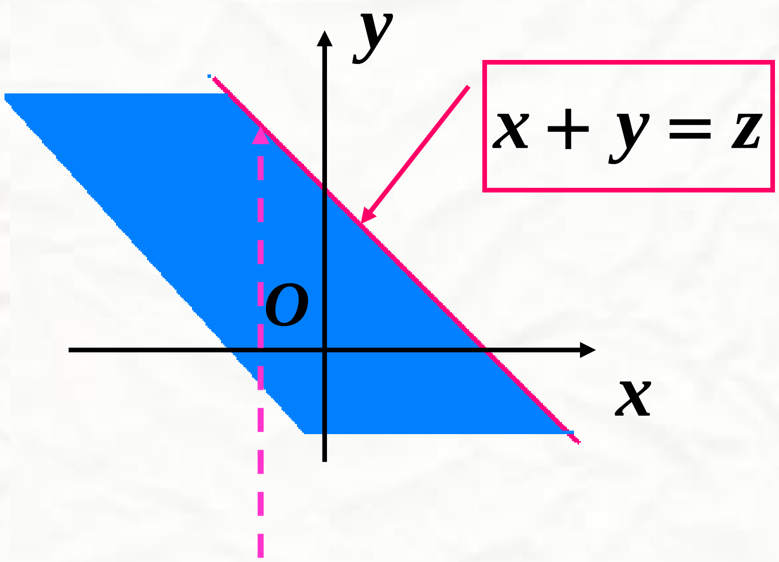
推导 $\forall z \in R$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

$$= P\{X + Y \le z\}$$

$$= \iint_{x+y\le z} p(x, y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z-x} p(x, y)\mathrm{d}y$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p(x, y) dy$$

令 $u = x + y$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} p(x, u - x) du$$

积分时 z 视为常数

$$= \int_{-\infty}^{z} du \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u - x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} [\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, u - x) dx}_{f(u)}] du$$

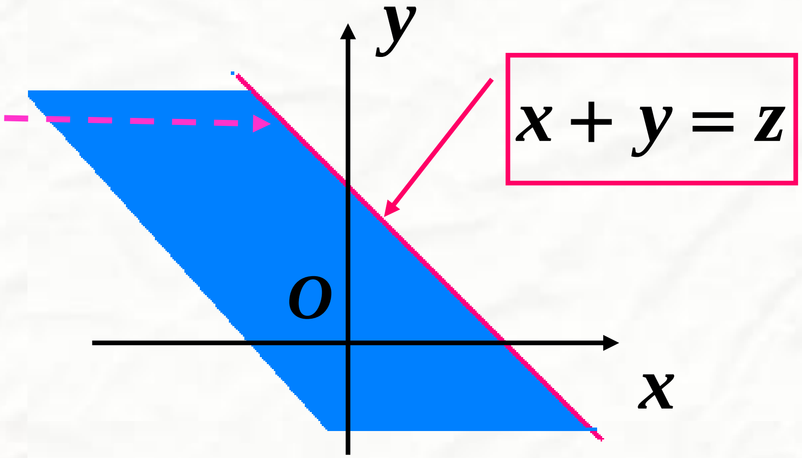
$$[\int_{-\infty}^{z} f(u) du]' = f(z)$$

$$\therefore \quad p_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z - x) dx$$

结论

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}p(z-y,y)dy$$



若X与Y独立时，

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(z-y)p_Y(y)dy$$

例5 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由 $p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $-\infty<x<+\infty$

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty$$

可知,Z的取值也在-∞<z< ∞,

由公式$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x$

目 上 下 回 停 续

得当$\begin{cases} -\infty < x < +\infty, \\ -\infty < z - x < +\infty, \end{cases}$ 即$-\infty < x < +\infty$时,

$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)p(z-x)\,\mathrm{d}x$中被积函数不为零.

于是 $$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-\frac{z}{2})^2} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\frac{z}{2})^2}{2\times\frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即 Z 服从 $N(0,2)$分布.

本例结论的延伸

一般，设 X, Y 相互独立且

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

则 $Z = X + Y$ 仍然服从正态分布，

且有 $Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$

继续延伸

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则有

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n + b$$

$$\sim N\left(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n + b, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

熟记以上结论！！！

例6 在一简单电路中，两电阻X和Y串联联接，设X,Y相互独立,它们的概率密度均为

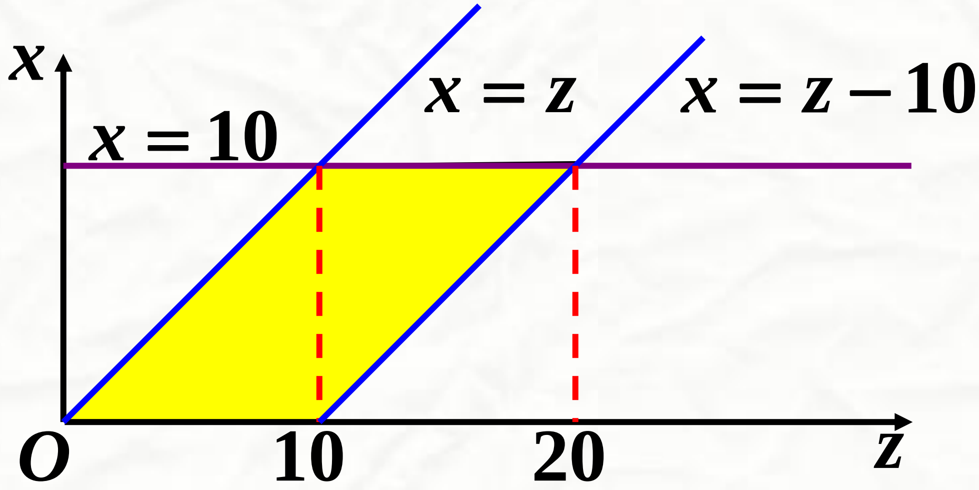
$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求电阻$Z=X+Y$的概率密度.

解 由题意知 Z 的概率密度为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)p(z-x)\,\mathrm{d}\,x.$$

目 上 下 例 停 续

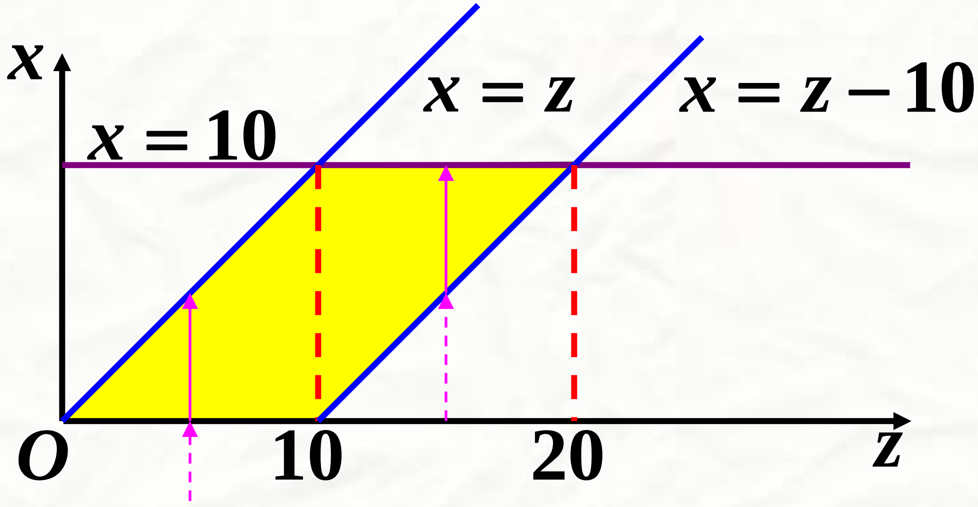


当 $\begin{cases} 0 < x < 10, \\ 0 < z - x < 10, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 < x < 10, \\ z - 10 < x < z, \end{cases}$ 时,

$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)p(z-x)\,\mathrm{d}x$ 中被积函数不为零.

此时

$$p_Z(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^z p(x)p(z-x)\,\mathrm{d}x, & 0\le z<10,\\ \displaystyle\int_{z-10}^{10} p(x)p(z-x)\,\mathrm{d}x, & 10\le z\le 20,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\qquad(1)$$



目 上 下 回 停 续

将 $$p(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$p(z-x)=\begin{cases}\dfrac{10-(z-x)}{50}, & 0\le z-x\le 10,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

代入 (1) 式得

$$p_Z(z)=\begin{cases}(600z-60z^2+z^3)/15000, & 0\le z<10,\\ (20-z)^3/15000, & 10\le z<20,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

(2)$Z=\frac{X}{Y}$的分布

设（X，Y）的概率密度为$p(x,y)$,则求$Z=\dfrac{X}{Y}$的密度函数.

推导 $\forall z\in R,\quad D=\{(x,y)\mid \dfrac{x}{y}\le z\}$

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\frac{X}{Y}\le z\}=\iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

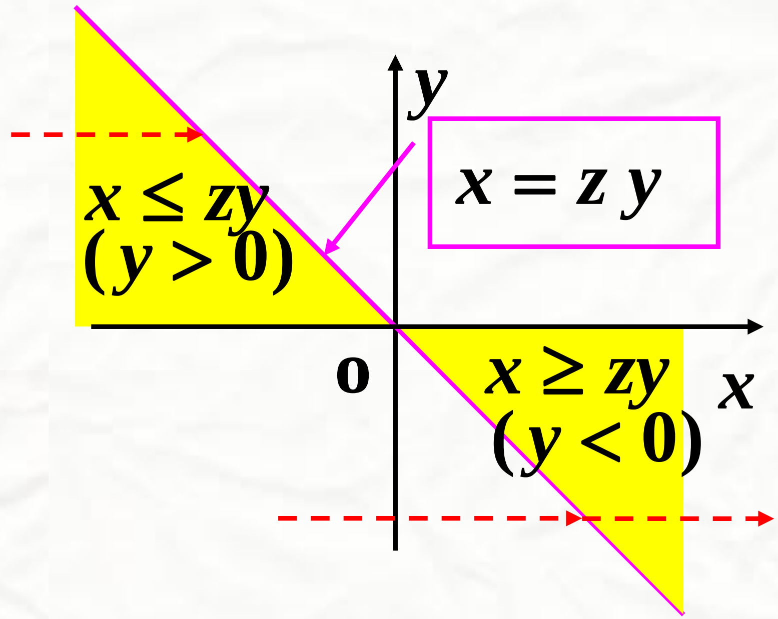
① 当 $z \le 0$ 时，

$$D=\{(x,y)\mid \frac{x}{y}\le z\}$$

$$F_Z(z)=\iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{0} dy\int_{zy}^{+\infty} p(x,y)dx$$

$$+\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}y\int_{-\infty}^{zy} p(x,y)\mathrm{d}x$$



令 $u=\dfrac{x}{y}$

$$=\int_{-\infty}^{0} dy\int_{z}^{-\infty} p(yu,y)y\,du+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z} p(yu,y)y\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{z}^{-\infty}p(yu,y)y\mathrm{d}u+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z}p(yu,y)y\mathrm{d}u$$

$$=\int_{z}^{-\infty}du\int_{-\infty}^{0}p(yu,y)ydy\ +\int_{-\infty}^{z}du\int_{0}^{+\infty}p(yu,y)y\mathrm{d}y$$

$$p_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$$

$$=-\int_{-\infty}^{0}p(yz,y)y\mathrm{d}y+\int_{0}^{+\infty}p(yz,y)y\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p(yz,y)\mathrm{d}y$$

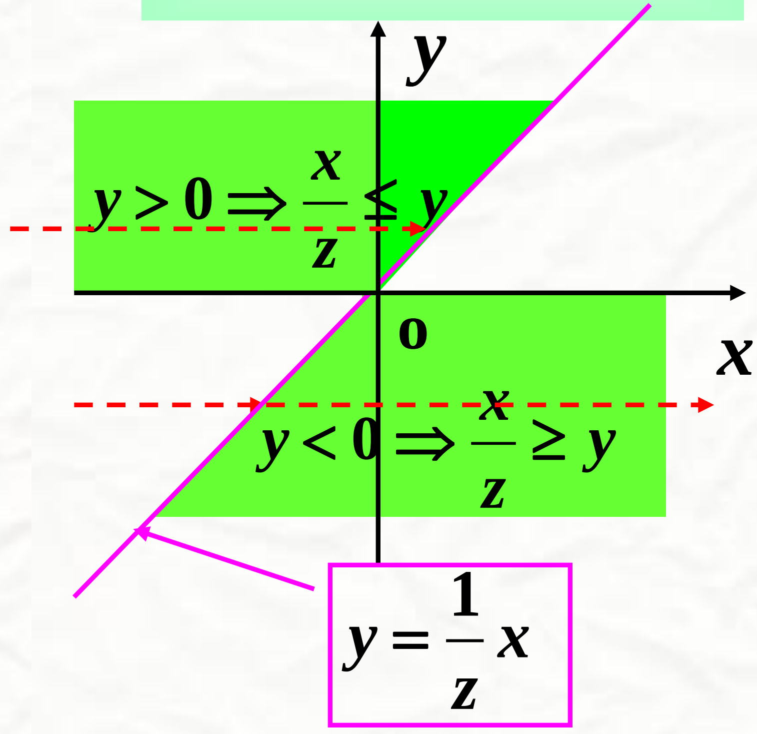
② 当$z>0$时，

$$D=\{(x,y)\mid \frac{x}{y}\le z\}$$

$$F_Z(z)=\iint_D p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{0}dy\int_{zy}^{\infty}p(x,y)dx$$

$$+\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{zy}p(x,y)\mathrm{d}x$$



令$u=\dfrac{x}{y}$

$$=\!=\!=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{z}^{-\infty}p(yu,y)y\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z}p(yu,y)y\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{z}^{-\infty}p(yu,y)y\mathrm{d}u+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z}p(yu,y)y\mathrm{d}u$$

$$=\int_{z}^{-\infty}du\int_{-\infty}^{0}p(yu,y)y dy+\int_{-\infty}^{z}\mathrm{d}u\int_{0}^{+\infty}p(yu,y)y\mathrm{d}y$$

$$p_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=-\int_{-\infty}^{0}p(yz,y)y\mathrm{d}y+\int_{0}^{+\infty}p(yz,y)y\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p(yz,y)\mathrm{d}y$$

综上，$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p(yz,y)\mathrm{d}y$

当X与Y独立时，

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p_X(yz)p_Y(y)\mathrm{d}y$$

例7 设X,Y分别表示两只不同型号的灯泡的寿命，X,Y相互独立,它们的 概率密度分别为

$$p(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0, \\ 0, \quad 其他. \end{cases} \qquad p(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, y>0, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$$

试求$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度函数

解 当 $z \le 0$ 时， $p_Z(z)=0,$

当$z>0$时,

由公式 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\,p(yz,y)\,\mathrm{d}y$

目 上 下 回 停 续

当$\begin{cases} yz > 0, \\ y > 0, \end{cases}$ 即 $y > 0$ 时,

$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\, p(yz, y)\,\mathrm{d}\,y$ 中被积函数不为零.

得所求密度函数 $p_Z(z) = \int_0^{+\infty} 2y\mathrm{e}^{-yz}\mathrm{e}^{-2y}\,\mathrm{d}\,y$

$$= \int_0^{+\infty} 2y\mathrm{e}^{-y(2+z)}\,\mathrm{d}\,y = \frac{2}{(2+z)^2},$$

得 $p_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{(2+z)^2}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$

目 上 下 回 停 续

(3) 极值分布，即$M=\max\{X,Y\}$,

$N=\min\{X,Y\}$的分布.

设X, Y 是两个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$,求M, N的分布.

目 上 下 回 停 续

推导 $F_M(z) = P\{M \le z\}$

$$= P\{X \le z, Y \le z\}$$

$$= P\{X \le z\} \cdot P\{Y \le z\} \qquad (X\text{与}Y\text{独立})$$

$$= F_X(z) F_Y(z)$$

$$F_N(z) = P\{N \le z\} = 1 - P\{N > z\}$$

$$= 1 - P\{X > z, Y > z\}$$

$$= 1 - P\{X > z\} \cdot P\{Y > z\}$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$$

因此有

① 当X，Y相互独立时，有

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

② 当X，Y相互独立且同分布时，有

$$F_M(z)=F^2(z)$$

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^2$$

推广： 一般地，设

$$M = \max\{X_1, X_2, \cdots X_n\},$$

$$N = \min\{X_1, X_2, \cdots X_n\},$$

则当$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立且同分布时，

有 $$F_M(z) = F^n(z)$$

$$F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

其中$F(z) = P\{X_1 \le z\}$.

例8 对某种电子装置的输出测量了 5 次，得到的观察值为X_1, X_2, X_3, X_4, X_5设它们是相互独立的随机变量，且都服从同一分布

$$F(z)=\begin{cases}1-e^{-\frac{2ze^2}{8}}, & z \geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求$\max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}>4$的概率.

解 设 $D=\max(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$

目 上 下 例 停 续

因为 $F_{\max}(z)=[F(z)]^5$,

所以 $P\{D>4\}=1-P\{D\leq 4\}$

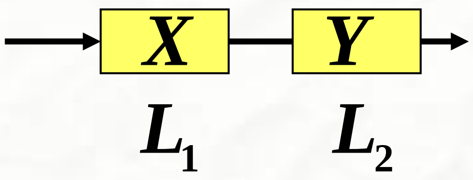
$$=1-F_{\max}(4)$$

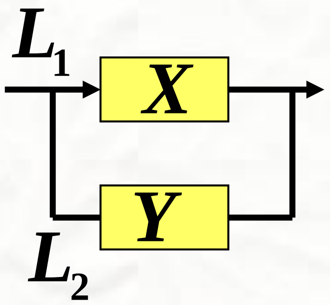
$$=1-[F(4)]^5$$

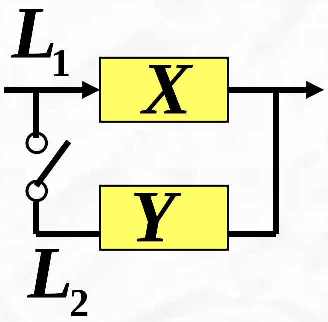
$$=1-(1-e^{-e^2})^5.$$

目 上 下 回 停 续

例8-1 设系统L由两个相互独立的子系统L_1, L_2联接而成，连接的方式分别为(i)串联,(ii)并联,(iii)备用(当系统L_1损坏时,系统L_2开始工作),如图所示







设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y,已知它们的概率密度分别为

目 上 下 回 停 续

$$p_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad p_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

其中$\alpha>0,\beta>0$且$\alpha\ne\beta$.试分别就以上三种联接方式写出L的寿命Z的概率密度.

解 **(i)串联情况**

由于当L_1,L_2中有一个损坏时,系统L就停止工作,所以这时L的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $$p_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

由 $p_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z=\max(X,Y)$.

$Z=\max(X,Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

$$p_{\max}(z)=\begin{cases}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha z}+\beta\mathrm{e}^{-\beta z}-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时，系统 L_2 才开始工作，因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和，即

$$Z = X + Y$$

当 $z > 0$ 时，$Z = X + Y$ 的概率密度为

$$p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z-y)\,p_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^z \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha(z-y)}\beta\,\mathrm{e}^{-\beta y}\mathrm{d}y$$

$$= \alpha\beta\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}]$$

当 $z < 0$ 时, $f(z) = 0$,

于是 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$p(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z} - \mathrm{e}^{-\beta z}], & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

例8-2

随机变量X的概率分布为$P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$,

随机变量Y与X相互独立，且Y的概率密度函数为

$$f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度函数。

解 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

$$=P(X+Y\le z, X=0)+P(X+Y\le z, X=2)$$

$$=P(Y\le z, X=0)+P(Y\le z-2, X=2)$$

目 上 下 回 停 续

$$= P(Y \le z, X = 0) + P(Y \le z - 2, X = 2)$$

$$= P(X = 0)P(Y \le z) + P(X = 2)P(Y \le z - 2)$$

$$= \frac{1}{2}P(Y \le z) + \frac{1}{2}P(Y \le z - 2)$$

$$\longrightarrow \quad F_Z(z) = \frac{1}{2}P(Y \le z) + \frac{1}{2}P(Y \le z - 2)$$

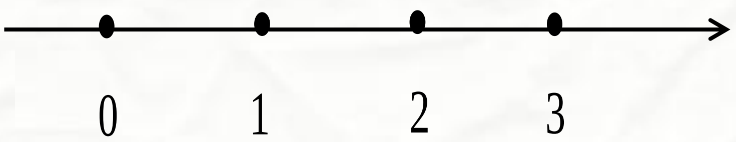
$$= \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z - 2)$$

目 上 下 回 停 续

$$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-2)$$

$$=\begin{cases}0 & z<0,\\ z & 0\le z<1\\ 0 & 1\le z<2\\ (z-2) & 2\le z<3\\ 0 & z\ge 3\end{cases}$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0\le z<1\\ z-2, & 2\le z<3\\ 0, & 其他\end{cases}$$

内容小结

1. 离散型随机变量函数的分布律

若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots$$

则随机变量函数 $Z = f(X,Y)$的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{f(X,Y) = z_k\}$$
$$= \sum_{z_k = f(x_i, y_j)} p_{ij} \qquad k = 1,2,\cdots.$$

目 上 下 回 停 续

2. 连续型随机变量函数的分布

(1)$Z = X + Y$的分布

(2)$Z = \dfrac{X}{Y}$的分布

(3)$M = \max(X, Y)$及$N = \min(X, Y)$的分布


再见

备用题

例3-1 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求：$Z=\max(X,Y)$的分布律.

解　因为X与Y相互独立,

所以$p\{X=x_i,Y=y_j\}=p\{X=x_i\}p\{Y=y_j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

目 上 下 回 停 续

$$p\{\max(X,Y)=i\}$$
$$=P\{X=i, Y<i\}$$
$$+P\{X\le i, Y=i\}$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$\Rightarrow P\{\max(X,Y)=0\}=P\{0,0\}=\frac{1}{2^2},$$

$$P\{\max(X,Y)=1\}=P\{1,0\}+P\{0,1\}+P\{1,1\}$$
$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{2^2}.$$

故$Z=\max(X,Y)$的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

例4-1 设随机变量X与Y独立，且

$$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=p>0,$$

$$P\{X=0\}=P\{Y=0\}=1-p>0,$$

$$令Z=\begin{cases}1, & X+Y为偶数,\\ 0, & X+Y为奇数.\end{cases}$$

要使X与Z独立，则$p=$ $\underline{\frac{1}{2}}$.

解

P	$2p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$
(X,Y)	$(0,1),(1,0)$	$(0,0),(1,1)$
Z	0	1

若X与Z独立,则

$$\boxed{Z=0 \leftrightarrow \begin{cases}(X,Y)=(0,1)\\(X,Y)=(1,0)\end{cases}}$$

$$P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Z=0\}$$

$\because$ 事件$\{X=0,\ Z=0\}=\{X=0,\ Y=1\}$

$$\therefore\quad P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0,Y=1\}$$

$$=P\{X=0\}\cdot P\{Y=1\}$$

$$=(1-p)\cdot p$$

从而 $\cancel{(1-p)\cdot p}=\cancel{(1-p)}\cdot \cancel{2}p(1-p)$

$\because\quad 1-p>0\ \therefore\quad 2(1-p)=1\quad \therefore\quad p=\dfrac{1}{2}$

目 上 下 回 停 续

例6-1 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且其分布密度分别为

$$p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}\quad p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的分布密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,所以 (X,Y) 的分布密度函数为

$$p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

随机变量 Z 的分布函数为

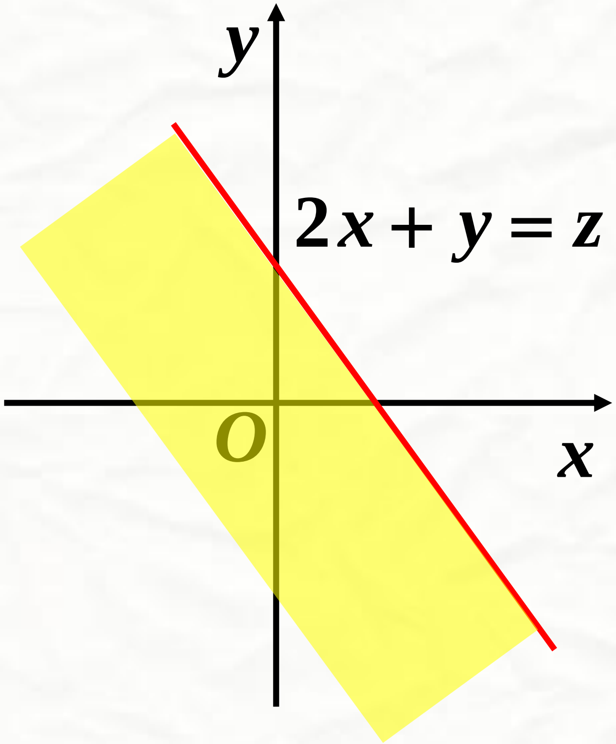
$$F_Z(z) = P\{Z \le z\}$$

$$= P\{2X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{2X+Y\le z} p(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{2X+Y\le z} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$(0 \le x \le 1, y > 0)$$



目 上 下 回 停 续

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^{\frac{z}{2}}(1-e^{2x-z})\,dx, & 0<z\le 2,\\ \int_0^{1}(1-e^{2x-z})\,dx, & z>2.\end{cases}$$

所以随机变量 Z 的分布密度为

$$p_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ (1-e^{-z})/2, & 0<z\le 2,\\ (e^2-1)e^{-z}/2, & z\ge 2.\end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

例6-2 若X和Y独立,具有共同的概率密度

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

解 由卷积公式

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

$$\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le z-x\le 1,\end{cases}\quad \text{也即}\quad \begin{cases}0\le x\le 1,\\ z-1\le x\le z,\end{cases}$$

目 上 下 回 停 续

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(z-x) \mathrm{d}x$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为0的区域

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le z - x \le 1, \end{cases} \quad \text{也即} \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ z - 1 \le x \le z, \end{cases}$$

如图示:

于是

$$p_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z \mathrm{d}x = z, & 0 \le z \le 1, \\ \int_{z-1}^1 \mathrm{d}x = 2 - z, & 1 \le z < 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$