代数系统

二元运算

性质

(1) 若对任意$x,y \in S$ 有 $x \circ y = y \circ x$, 则称运算在S上满足交换律.

(2) 若对任意$x,y,z \in S$有 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, 则称运算在$S$上满足结合律.

(3) 若对任意$x \in S$ 有 $x \circ x = x$, 则称运算在S上满足幂等律. x为运算$\circ$的幂等元.

定义5.4 设$\circ$和$*$为S上两个不同的二元运算,

(1) 若对任意$x,y,z \in S$有 $z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$，$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$, 则称$\circ$运算对$*$运算满足(第一/第二)分配律.

(2) 若对任意$x,y \in S$有 $x \circ (x * y) = x$，$x * (x \circ y) = x$, 则称$\circ$和$*$运算满足吸收律.

吸收率：合取和析取、交集和并集

特异元素

单位元（e）：使得$e \cdot x = x$

零元（θ）：使得$\theta * x = \theta$

逆元（y）：使得$y \cdot x = e$，若存在逆元，则称x是可逆的

消去律：

定义5.6 设$\circ$为S上的二元运算, 若对任意$x,y,z \in S$有

(1) 若$x \circ y = x \circ z$, 且$x \neq \theta$, 则$y = z$;

(2) 若$y \circ x = z \circ x$, 且$x \neq \theta$, 则$y = z$.

那么称此运算满足消去律, 其中(1)称为左消去律,(2)称为右消去律.

代数系统：

定义5.6 非空集合S和S上k个一元或二元运算$f_1, f_2, \ldots, f_k$组成的系统称为代数系统, 简称代数，记做$\langle S, f_1, f_2, \ldots, f_k \rangle$.

切记，对运算封闭

组成部分为：集合、运算、代数常数（通常是零元或者幺元）

子代数系统：

定义5.7 设$V=<S, \circ>$是代数系统，B是S的非空子集，$<B, *>$ 也是代数系统，若$a\in B, b\in B$，则$a*b=a\circ b$，则称$<B, *>$是V的子代数系统，简称子代数. 有时将子代数系统简记为B.

证明：

设A=<S，*，△，k>是一代数，如果

(1) $S' \subseteq S$

(2) S'对S上的运算*和△封闭

(3) $k \in S'$

那么A' = <S'，，△,k>是A的子代数.

同类型代数系统：

两代数系统中运算的个数相同，代数常数个数相同，对应运算元素相同，则称两者同类型

例如 $V_1=<\mathrm{R}, +, \cdot, 0, 1>$, $V_2=<M_n(\mathrm{R}), +, \cdot, \theta, E>$, θ为 n 阶全0矩阵，E为 n 阶单位矩阵, $V_3=<P(B), \cup, \cap, \varnothing, B>$

- V_1, V_2, V_3是同类型的代数系统，它们都含有2个二元运算, 2个代数常数.

同构：

定义5.9 设$V_1=<A,\circ>$和$V_2=<B,*>$是同类型的代数系统，若存在双射函数$f:A\to B$，且$\forall x, y\in A$ 有 $f(x\circ y) = f(x)*f(y)$, 则称 f 是V_1到V_2的同构映射（函数）. 或称V_1和V_2同构，记为

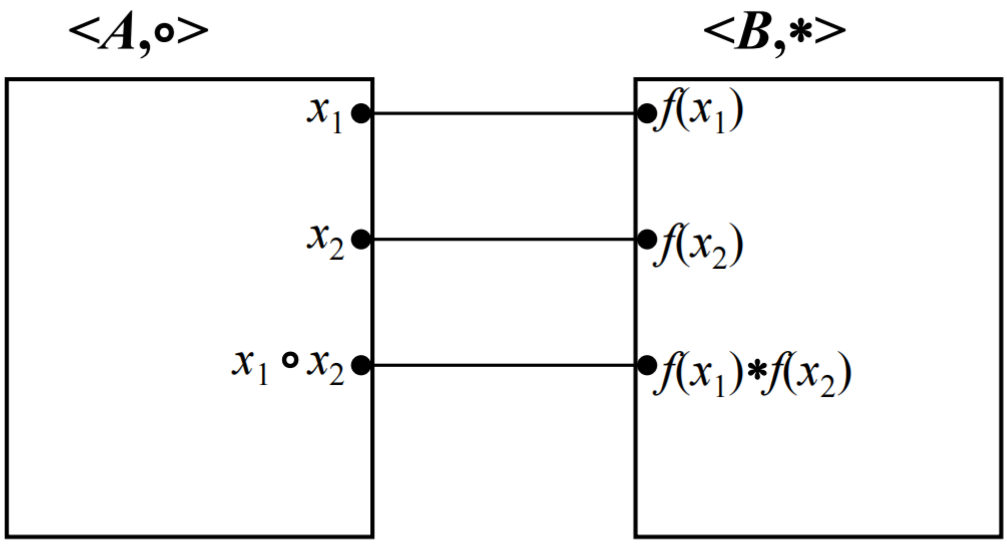
$$V_1 \simeq V_2$$

需要满足以下条件：

1.同类型的代数系统

2.集合基数相同（等势）

3.定义的运算法则相同



例 代数系统< R^+, ·>和<R, +>是同构的，其中R^+为正实数集

证明：构造函数f: $R^+ \to R$，

$$f(x)=\ln x$$

容易证明，此函数是双射函数。

因为：$f(a\cdot b)=\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b=f(a)+f(b)$

得证.

定理5.4 设V_1=<A,∘>和V_2=<B,*>是同构的代数系统，若V_1满足结合律（交换律），则V_2也满足结合律（交换律）

证明 略.（见教材）

定理5.5 设V_1=<A,∘>和V_2=<B,*>是同构的代数系统，f是V_1到V_2的同构映射，若V_1存在单位元e_1，则V_2亦存在单位元e_2，且有$f(e_1)=e_2$

定理5.7 设V_1=<A,∘>和V_2=<B,*>是同构的代数系统，f是V_1到V_2的同构映射，若V_1存在零元θ_1，则V_2亦存在零元θ_2，且有$f(\theta_1)=\theta_2$

定理5.6 设V_1=<A,∘>和V_2=<B,*>是同构的代数系统，f是V_1到V_2的同构映射，若V_1对每个$x\in A$均存在逆元x^{-1}，则V_2对每个$y\in B$亦存在逆元y^{-1}，且若$f(x)=y$，有$f(x^{-1})=y^{-1}$

代数系统之间的同构关系是等价关系

自反性☞ 自身同构：$<A,\circ> \simeq <A,\circ>$

对称性☞ 若$<A,\circ> \simeq <B,*>$，则存在双射函数$f:A\to B$，使得

$\forall x_1, x_2 \in A$ 有 $$f(x_1 \circ x_2) = f(x_1) * f(x_2)$$

则 f 必然存在反函数$f^{-1}:B\to A$，要证$\forall y_1, y_2 \in B$ 有

$$f^{-1}(y_1 * y_2) = f^{-1}(y_1) \circ f^{-1}(y_2)$$

传递性☞ 如果$<A,\circ> \simeq <B,*>$且$<B,*> \simeq <C,\otimes>$，要证明

$$<A,\circ> \simeq <C,\otimes>$$