关系

- 有序偶与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包运算
- 等价关系与划分
- 偏序关系

序偶

问题1：

四名同学——{赵，钱，孙，李}

三门课程——{离散，高数，数据结构}

问题：用什么样的数学结构表示学生选课的情况？

集合

{赵，离散}

序偶

问题2：

四人进行单循环羽毛球比赛。

问题：用数学结构表示各场比赛的胜负关系

集合：？

{赵，李} 和 {李，赵}

谁是胜者？

需要引入序的概念。

2.1 有序偶与笛卡儿积

定义2.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的有序序列称为有序偶，记作$<x,y>$. 其中x 和 y分别称为$<x,y>$的第一分量和第二分量，简称分量.

有序偶性质: 允许$x=y$

(1) 有序性 $<x,y>\neq<y,x>$ （当$x\neq y$时）

(2) $<x,y>$与$<u,v>$相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u \wedge y=v.$$

n元有序组

定义：

设$a_1,a_2,\ldots,a_n$是n个元素，n元有序组为

$$<a_1,a_2,\ldots,a_n> = <<a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}>, a_n> \quad (n>2)$$

说明：

n元有序组是一个有序偶，其第一分量是n-1元有序组。

$$<2,3,5> = <<2,3>,5> \neq <2,<3,5>>$$

笛卡尔

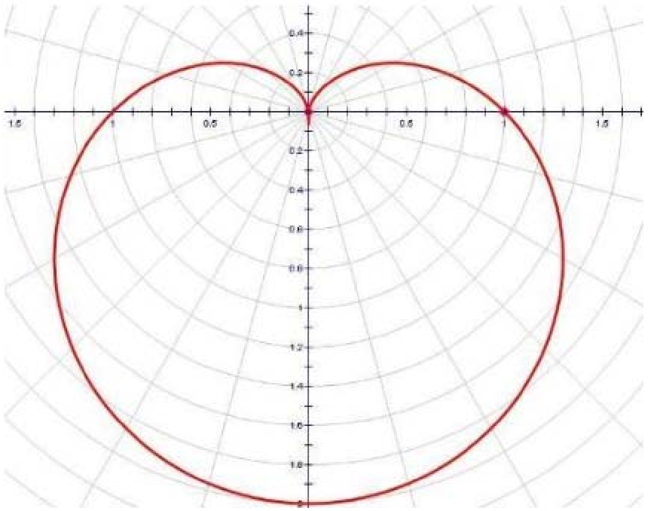
-----1596年3月31日-1650年2月11日

-----法国哲学家，数学家和科学家

-----创立了平面直角坐标系

-----与瑞典公主的爱情故事

$r=a(1-\sin\theta)$



笛卡儿积

定义2.2 设A,B为集合，A与B的笛卡儿积记作$A\times B$，

且$A\times B = \{<x,y> \mid x\in A \wedge y\in B\}$.

可以拓展到n个集合的笛卡儿积

例 （1） $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B$

$=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A$

$=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

例题

设A={a,b}, B={1,2,3}, C={p,q}, D={0}, E=ϕ 。

(a) A×B ={〈a,1〉,〈a,2〉,〈a,3〉,〈b,1〉,〈b,2〉,〈b,3〉}

(b) A×B×C = {〈a,1,p〉,〈a,1,q〉,〈a,2,p〉,〈a,2,q〉,〈a,3,p〉,〈a,3,q〉,〈b,1,p〉,〈b,1,q〉,〈b,2,p〉,〈b,2,q〉,〈b,3,p〉,〈b,3,q〉}

(c) C×D ={〈p,0〉,〈q,0〉}

(d) D×(C^2)= D×{〈p,p〉,〈p,q〉,〈q,p〉,〈q,q〉}={〈0,〈p,p〉〉,〈0,〈p,q〉〉,〈0,〈q,p〉〉,〈0,〈q,q〉〉}

(e) A×E =ϕ

笛卡儿积的性质

(1) 不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(2) 不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

(3) 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

(4) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(5) 若 $|A| = m$, $|B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$ （|.|表示元素个数）

性质证明

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$\langle x,y\rangle$

$$
\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in B\cup C\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\
\Leftrightarrow\ & \langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C\\
\Leftrightarrow\ & \langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}
$$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例

(1) 证明$A=B, C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B, C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in C \\
\Leftrightarrow\ & x\in B\wedge y\in D \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in B\times D
\end{aligned}
$$

(2) 不一定.反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

2.2 二元关系

- 实际选课情况只是笛卡尔积的一部分

{赵，钱，孙，李}×{离散，高数，数据结构}

- 羽毛球比赛中

➢ 不可能出现<赵，赵>

➢ 也不可能同时出现<赵，李>和<李，赵>

- **F**为所有父亲的集合，**S**为所有儿子的集合，**F×S**为父子关系的所有情况，而真正的父子关系只是一个子集。

*A*到*B*的关系与*A*上的关系

定义2.3

设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**，当$A=B$时则叫做**A上的二元关系**.记作R.

例 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 那么

$R_1=\{<0,2>\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{<0,1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,

R_3 和 R_4 也是A上的二元关系.

计数: $|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有 2^{n^2}个. 所以 A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例如 $|A| = 3$，则 A上有=512个不同的二元关系.

二元关系

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序偶

(2) 集合可以是空集

(3) 如果$\langle x,y\rangle \in R$, 可记作xRy;

如果$\langle x,y\rangle \notin R$, 则记作$x\not R y$.

实例：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $S=\{\langle 1,2\rangle,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序偶时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写$1R2$, aRb, $a\not R c$等.

A上重要关系的实例

设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为空关系

(2) 全(域)关系 $E_A = \{<x,y>| x\in A \wedge y\in A\} = A\times A$

恒等关系 $I_A = \{<x,x>| x\in A\}$

小于等于关系 $L_A = \{<x,y>| x,y\in A \wedge x\le y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_B = \{<x,y>| x,y\in B \wedge x$整除$y\}$, B为非0整数子集

包含关系 $R_\subseteq = \{<x,y>| x,y\in A \wedge x\subseteq y\}$, A是集合族.

实例

例如, $A=\{1, 2\}$, 则

$$E_A = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$$

$$I_A = \{<1,1>,<2,2>\}$$

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, 则

$$L_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

$$D_A = \{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$$

例如 $A = P(B) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$$R_{\subseteq} = \{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,$$

$$<\{a\},\{a\}>,<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$$

类似的还可以定义:

大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等.

关系的表示

1. 集合表示
2. 关系矩阵

   若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow < x_i, y_j > \in R.$$

3. 关系图

   若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R= (A, R)$, 其中$A$为结点集，$R$为边集. 如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意：

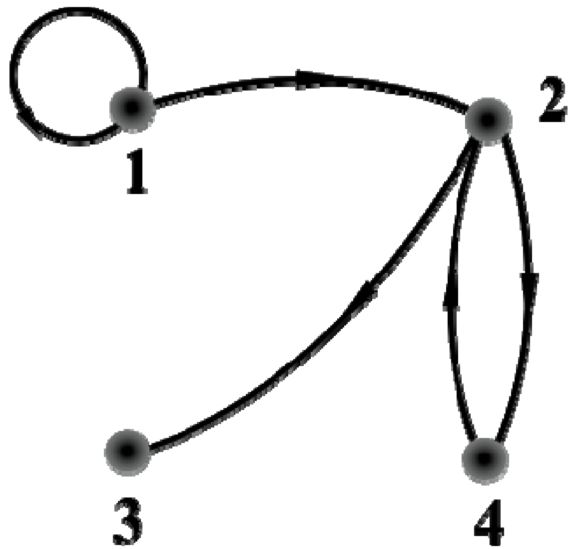
- 关系矩阵适合表示从A到B的关系或A上的关系（A,B为有穷集）
- 关系图适合表示有穷集A上的关系

实例

$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$,

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

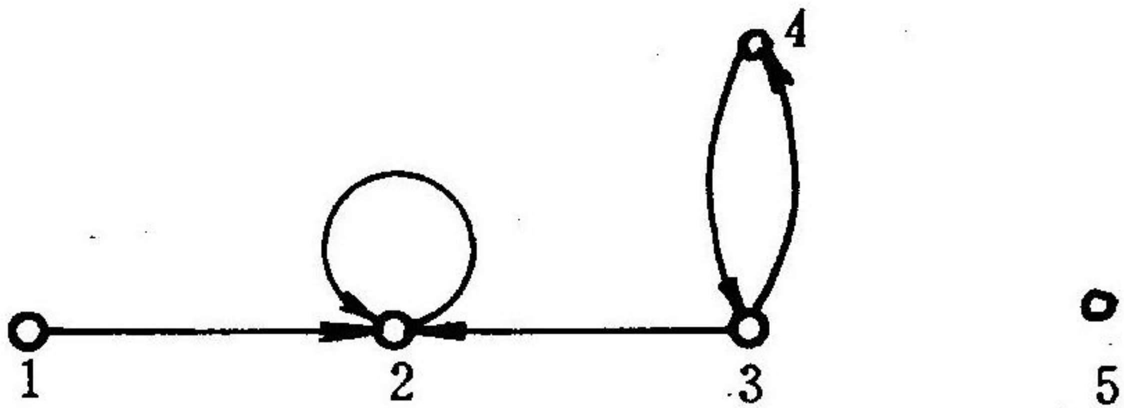
$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$



实例

A={1,2,3,4,5}

R={〈1,2〉，〈2,2〉，〈3,2〉，〈3,4〉，〈4,3〉}



作业解答

证明：

$$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$$

证：

① $A-(B-C) = A\cap \sim(B-C) = A\cap \sim(B\cap\sim C)$

$= A\cap(\sim B\cup C) = (A\cap\sim B)\cup(A\cap C)$

$= (A-B)\cup(A\cap C)$

② 任取 x

$x\in(A-(B-C)) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin(B-C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in(B-C)) \Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in(B\cap\sim C))$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B \wedge x\in\sim C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (\neg x\in B \vee \neg x\notin C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (\neg x\in B \vee \neg\neg x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge (\neg x\in B \vee x\in C)$

$\Leftrightarrow x\in A \wedge \neg x\in B \vee x\in A \wedge x\in C$.

$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \vee x\in A \wedge x\in C$

$\Leftrightarrow x\in(A-B) \vee x\in(A\cap C)$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cup(A\cap C)$

因此 $A-(B-C) = (A-B)\cup(A\cap C)$

作业

徐书

37页 2.2、2.3

58页15、16、21、28