诚信保证 本人知晓我校考场规则和违纪处分条例的有关规定，保证遵守考场规则，诚实做人。　　　　本人签字：____________

编号：_________

西北工业大学考试试题（A 卷）

2019 －2020 学年第 春 学期

开课学院________________课程____离散数学____学时__64__

考试日期__2020.07.06__　　考试时间__2__小时　　考试形式（闭）（A）卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

考生班级		学　号		姓　名	

一、选择题（共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分，均为单选）

1. 令 $F(x, y)$表示"x 敬佩 y"，$M(x)$表示"x 是学生"，$G(x)$表示"x 是科学家"，则"每个学生都敬佩一些科学家"的谓词逻辑公式为：(　　　)

   A. $\forall x\exists y(M(x)\wedge G(y)\wedge F(x, y))$　　B. $\forall x(M(x)\wedge\exists y(G(y)\rightarrow F(x, y)))$

   C. $\forall xM(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge F(x, y))$　　D. $\forall x\exists y(M(x)\rightarrow G(y)\wedge F(x, y))$

2. 已知命题逻辑公式 A 含有 3 个命题变元 p, q, r，并且它的成真赋值为 010，011，110，111，则 A 的主析取范式为：(　　　)

   A. $m_2\vee m_3\vee m_6\vee m_7$　　B. $m_0\vee m_1\vee m_4\vee m_5$

   C. $M_0\vee M_1\vee M_4\vee M_5$　　D. $M_2\vee M_3\vee M_6\vee M_7$

   注：$m_0=\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$　　$M_0=p\vee q\vee r$

   $m_1=\neg p\wedge\neg q\wedge r$　　$M_1=p\vee q\vee\neg r$

   $m_2=\neg p\wedge q\wedge\neg r$　　$M_2=p\vee\neg q\vee r$

   $m_3=\neg p\wedge q\wedge r$　　$M_3=p\vee\neg q\vee\neg r$

   $m_4=p\wedge\neg q\wedge\neg r$　　$M_4=\neg p\vee q\vee r$

   $m_5=p\wedge\neg q\wedge r$　　$M_5=\neg p\vee q\vee\neg r$

   $m_6=p\wedge q\wedge\neg r$　　$M_6=\neg p\vee\neg q\vee r$

   $m_7=p\wedge q\wedge r$　　$M_7=\neg p\vee\neg q\vee\neg r$

注：1. 命题纸上一般不留答题位置，试题请用小四、宋体打印且不出框。

2. 命题教师和审题教师姓名应在试卷存档时填写。

3. 下列各式中不是永真式的是（　　）

A. $\forall x(A(x)\to B) \leftrightarrow \exists xA(x)\to B$　(注：B 中不含 x)

B. $\forall x(A(x)\to B(x)) \leftrightarrow \forall xA(x)\to \forall xB(x)$

C. $\forall xF(x)\to \exists yG(y) \leftrightarrow \neg\forall xF(x)\vee\exists yG(y)$

D. $\exists x(B\to A(x)) \leftrightarrow B\to\exists xA(x)$　(注：B 中不含 x)

4. 设 $A=\{a,\{a\}\}$，它的幂集 $P(A)$ 为 (　　　　)

A. $\{\{a\}, \{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$　　B. $\{a,\{a\}, \{a,\{a\}\}\}$

C. $\{\varnothing, a, \{a\},\{a,\{a\}\}\}$　　D. $\{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$

5. 已知 $A=\{1,2,3,4\}$. A 上的关系 $R=\{<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>\}$满足 (　　　　)

A. 反自反性、对称性　　B. 自反性、对称性

C. 反对称性、传递性　　D. 传递性、对称性

6. 已知 $A=\{1,2,3,4,5\}$. A 上的等价关系 $R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<1,3>,<3,1>,<2,4>,<4,2>,<2,5>,<5,2>,<4,5>,<5,4>\}$，则 R 对应的划分为：(　　　)

A. $\{\{1,3\},\{2\},\{4,5\}\}$　　B. $\{\{1,3\},\{2,4,5\}\}$

C. $\{\{1\},\{3\},\{2,4,5\}\}$　　D. $\{\{1\},\{3\},\{4\},\{2,5\}\}$

7. 设 R 是从 $A=\{a,b,c\}$到 $B=\{d,e,f,g\}$的二元关系，下面哪个是函数？(　　　　)

A. $R=\{<a,e>,<b,e>,<c,d>,<b,f>\}$

B. $R=\{<a,e>,<b,f>,<c,g>\}$

C. $R=\{<a,e>,<a,f>,<c,e>,<b,g>\}$

D. $R=\{<a,g>,<b,f>,<c,e>,<b,f>,<c,d>\}$

8. **Z** 是整数集, +是算术加法，则下面函数中哪个是代数系统<**Z**,+>的自同构 (　　)

A. $f(x) = 5x$　　B. $f(x) = -x$

C. $f(x) = |x|$(这里指取绝对值)　　D. $f(x) = 0$

9. 下列代数系统$<S,*>$中，哪个不是群？ (　　　　)

A. 设 A 是任一集合, S 为 A 上双射函数集合, *表示函数的合成

B. S 为有理数集，*为算术乘法

C. $S=\{0, 2, 4\}$,*为模 6 加法

D. S 为正整数集，*为算术加法

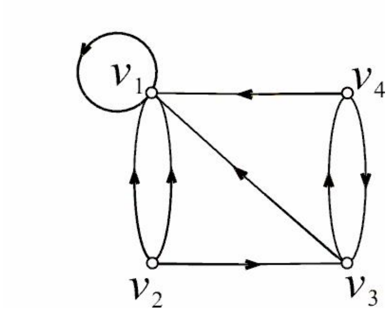
10. 右图是：(   )

    A. 强连通的

    B. 单向连通的

    C. 非弱连通的

    D. 弱连通但非单向连通的



二、简答题（每小题 5 分，共 20 分）

1. 在附加前提证明法中，欲证：

   前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

   结论：$C \to B$

   可以等价地证明：

   前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

   结论：B

   试述其理由。

2. （1）设二元关系 R 的关系图记为 G, $t(R)$为 R 的传递闭包，其关系图为 G_t，试述如何通过 G 得到 G_t。

   （2）试举例说明：偏序集的最小元和最大元不一定存在；偏序集的真子集的下确界（亦称最大下界）、上确界（亦称最小上界）不一定存在。

3. （1）两个代数系统$<G,*>$和$<H,\circ>$的同态如何定义？设 $V_1=<\mathbf{R},+>$, $V_2=<\mathbf{R}^*,\bullet>$，其中 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}^*$分别为实数集与非零实数集，+ 和 • 分别表示普通加法与乘法。令函数 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^*$，$f(x)=e^x$，则 f 是 V_1 到 V_2 的同态吗？请说明理由。

   （2）请描述群论中的拉格朗日定理。

4. 设 $A_{n\times n}$ 是一个无向图的邻接矩阵，其中的元素为a_{ij}（$1 \le i, j \le n$）。$a_{ij}=1$，表示结点V_i和V_j之间有边；$a_{ij}=0$，则表示结点V_i和V_j之间没有边。因其是无向图，所以可仅使用矩阵的左下部（含主对角线元素）元素即可表示图中的所有边，而令矩阵右上部（不含主对角线元素）的所有元素取值为 0。请说明如何据此矩阵判断图中是否存在欧拉回路。

三、数理逻辑部分（共 18 分）

1. 判断题（3 分）

在实数集合中，已知$\forall x \exists y\,(x > y)$是真命题，请看下面推导：

①	$\forall x \exists y\,(x > y)$	P（前提引入）
②	$\exists y\,(z > y)$	①US
③	$z > c$	②ES
④	$\forall x\,(x > c)$	③UG

而$\forall x\,(x > c)$是假命题。请指出推导过程有何错误？

2. 演算题（5 分）

符号化命题：任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车，每一个人或者喜欢乘汽车，或者喜欢骑自行车，有的人不爱骑自行车，因而有的人不爱步行。

3. 证明题（10 分）

证明 $\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \to (R(x) \to \neg P(x))$

四、集合论部分（共 12 分）

1. 计算题（3 小题，每题 2 分，共 6 分）

（1） 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，A 上的二元关系 $R = \{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$、$S = \{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$，求 S 和 R 的合成 $S \circ R$。

（2） 求 1 到 1000 之间（包含 1 和 1000 在内）既不能被 5 和 6 整除，也不能被 8 整除的数的个数。

（3） 设 **N** 是自然数集合，f, g, h 是从 **N** 到 **N** 的函数，其中：

$$f(n) = n+1, g(n) = 2n, h(n) = \begin{cases} 0 & n\text{是偶数} \\ 1 & n\text{是奇数} \end{cases}$$

试求函数的复合运算$f \circ g$和$g \circ h$。（注：$f \circ g(x) = g(f(x))$）

2. 证明题（6 分）

设 R 是非空集合 A 上的等价关系，证明 aRb 当且仅当$[a]=[b]$。

五、代数系统部分（共 18 分）

设$G = \{f \mid f: R \to R$且$f(x) = ax + b$, 其中 $a, b \in R,\ a \neq 0\}$,其中 R 是实数集合，$\circ$是G上的关于函数的复合运算。

(1) 证明：$< G, \circ >$是群；（10 分）

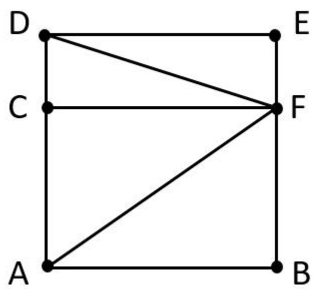
(2) 设$S_1=\{f\mid f(x)=x+b,\ 其中x,b\in R\}$，

$S_2=\{f\mid f(x)=ax,\ 其中a,x\in R,\ a\neq 0\}$。证明：$<S_1,\circ>$和$<S_2,\circ>$都是<G，$\circ$>的子群。（8 分）

六、图论部分（共 12 分）

设 6 个城市间有军用物资运输网络如下图所示，为了保卫运输线路不受破坏，每段线路须派一连士兵看守。

（1） 为保证任意两个城市间运输物资畅通，最少需要多少连士兵看守，他们应驻扎于哪些线路上？（6 分）



（2） 进一步地，为了更便于看守，希望总的看守线路的长度最短。若各条线路的长度如下表所示，请给出一种使总看守线路的长度最短的驻扎方式，并且计算出该最短长度。（6 分）

边	DC	EF	DE	DF	CF	AC	AB	AF	BF
长度	1	1	2	2.5	2	3	2	4	3