

切变模量的测量

材料的杨氏模量、切变模量以及断裂强度等宏观量都能反映出物质微观结构的特点。20 世纪 30 年代，人们从物质结构理论出发，计算出的断裂强度值比实际值大几个数量级。这个重大矛盾迫使科学家提出了位错理论来解释实验现象。后来人们在电子显微镜下观察到了位错的形成和运动，证实了这种理论。科学的发展反复证明了实践是检验真理的唯一标准。

在这个实验中，用扭摆来测量金属丝的切变模量，同时要学习尽量设法避免测量那些较难测准的物理量，从而提高实验精度的设计思想。

实验原理

实验对象是一根上下均匀而细长的钢丝，从几何上说就是一个如图 5.3.2-1 所示的细长的圆柱体，其半径为 R ，长度为 L 。将其上端固定，而使其下端发生扭转。扭转力矩使圆柱体各截面小体积元均发生切应变。在弹性限度内，切应变 γ 正比于切应力 τ ：

$$\tau = G\gamma \quad (1)$$

这就是剪切胡克定律，比例系数 G 即为材料的切变模量。

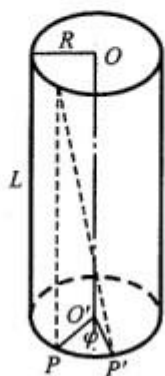


图 5.3.2-1 金属丝扭转形变示意图

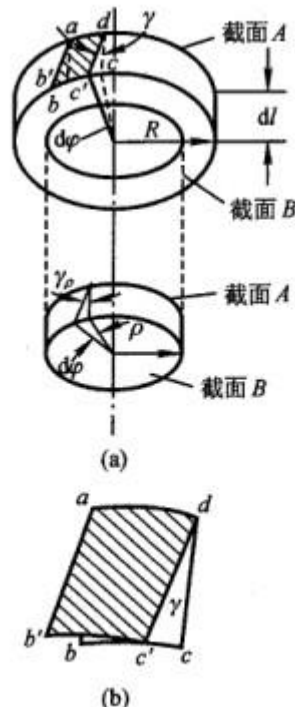


图 5.3.2-2 细丝某一横截面的运动状态

钢丝下端绕中心轴 OO' 转过 φ 角（即 P 点转到了 P' 的位置）。相应的，钢丝各横截面都发生转动，其单位长度的转角 $d\varphi/dl = \varphi/L$ 。分析这细圆柱中长为 dl 的一小段，其上截面为 A ，下截

面为 B（如图 5.3.2-2 所示）。由于发生切变，其侧面上的线 ab 的下端移至 b'，即 ab 转动了一个角度 γ ， $bb' = \gamma dl = R d\varphi$ ，即切应变

$$\gamma = R \frac{d\varphi}{dl} \quad (2)$$

在钢丝内部半径为 ρ 的位置，其切应变为

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dl} \quad (3)$$

由剪切胡克定律 $\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dl}$ 可得横截面上距轴线 OO' 为 ρ 处的切应力。这个切应力产生的恢复力矩为

$$\tau_\rho \cdot \rho \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi G\rho^3 \frac{d\varphi}{dl} \cdot d\rho$$

截面 A、B 之间的圆柱体，其上下截面相对切变引起的恢复力矩 M 为

$$M = \int_0^R 2\pi G\rho^3 d\rho \cdot \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\pi}{2} GR^4 \frac{d\varphi}{dl} \quad (4)$$

因钢丝总长为 L ，总扭转角 $\varphi = L \frac{d\varphi}{dl}$ ，所以总恢复力矩

$$M = \frac{\pi}{2} GR^4 \frac{\varphi}{L} \quad (5)$$

所以

$$G = \frac{2ML}{\pi R^4 \varphi} \quad (6)$$

于是，求切变模量 G 的问题就转化成求钢丝的扭矩（即其恢复力矩）的问题。为此，在钢丝下端悬挂一圆盘，它可绕中心线自由扭动，成为扭摆。摆扭过的角度 φ 正比于所受的扭力矩，

$$M = D\varphi \quad (7)$$

D 为金属丝的扭转模量。将式（7）代入式（6），有

$$G = \frac{2DL}{\pi R^4} \quad (8)$$

由转动定律

$$M = I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (9)$$

I_0 为摆的转动惯量，再由式（7）和（9）可得

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I_0} \varphi = 0 \quad (10)$$

这是一个简谐运动微分方程，其角频率 $\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}$ ，周期

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad (11)$$

作为扭摆的圆盘上带有一个夹具，这给测量或计算 I_0 带来困难。为此，可将一个金属环对称地置于圆盘上。设环的质量为 m ，内外半径分别为 $r_{\text{内}}$ 和 $r_{\text{外}}$ ，转动惯量为

$$I_1 = \frac{1}{2}m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)，\text{这时扭摆的周期}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}} \quad (12)$$

由式 (11)、(12) 可得

$$I_0 = I_1 \frac{T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (13)$$

$$D = \frac{4\pi^2}{T_0^2} I_0 = 4\pi^2 \frac{I_1}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{2\pi^2 m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{T_1^2 - T_0^2} \quad (14)$$

$$G = \frac{4\pi Lm(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)} \quad (15)$$

实验内容

基础内容

实验用扭摆法测量钢丝的切变模量，扭摆装置如图 5.3.2-3 所示。

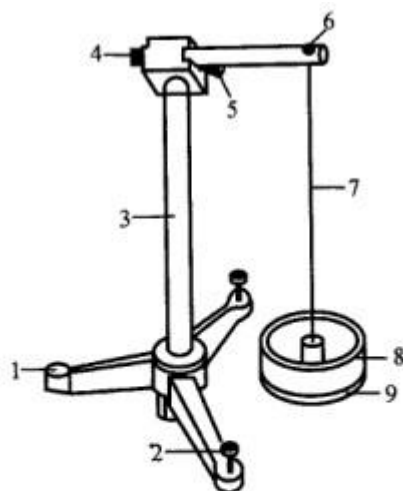


图 5.3.2-3 扭摆的结构示意图

1—底座；2—底座上的调平螺丝；3—支杆；4—固定横杆的螺母；5—连接支杆和横杆的螺丝；6—固定金属丝的螺丝；7—待测金属丝；8—金属环；9—金属悬盘

1. 装置扭摆，使钢丝与作为扭摆的圆盘面垂直，圆环应能方便地置于圆盘上。
2. 用螺旋测微器测钢丝直径，用游标卡尺测环的内外径，用米尺测钢丝的有效长度。
3. 写出相对误差公式，据此估算应测多少个周期较合适。
4. 计算钢丝的切变模量 G 和扭转模量 D ，分析误差。

提高内容

研究钢丝的切变模量与其扭转角度的关系。

进阶内容

研究钢丝切变模量和钢丝直径的关系。

高阶内容

用智能手机拍摄实验视频，用 Track 软件追踪扭摆的运动轨迹，研究有非切向力时，扭摆周期的变化情况以及对切变模量的影响。

思考题

1. 本实验是否满足 $\gamma \ll 1$ 的条件？
2. 为提高测量精度，本实验在设计上作了哪些安排？在具体测量时又要注意什么？