1. 笛卡尔积

1.1. 定义

设 $\boldsymbol{S}$ $\boldsymbol{M}$ 是两个集合，则从 $\boldsymbol{S}$ $\boldsymbol{M}$ 分别取一个元素，组成的集合称为$\boldsymbol{S}$ $\boldsymbol{M}$ 的笛卡尔积，记作$\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{M}$, 数学上的表示为:

$$\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{M} = \{(a,b) \mid a \in \boldsymbol{S}, b \in \boldsymbol{M}\} \tag{1}$$

如果 $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{M}$ 中的两个元素$(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ 满足$a_1 = b_1, a_2 = b_2$， 则称两者相等。

笛卡尔积最直接的例子是直角坐标系，我们从 x y 轴上分别取值构成的有序数对(x_0, y_0) 就是一个坐标，其刻画了一个平面的点的位置。

1.2. 二元关系

设 $\boldsymbol{S}$ 是一个非空集合，如果有一个 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$的非空子集，则称 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 上的一个二元关系。如果$a, b \in \boldsymbol{S}; (a,b) \in \boldsymbol{W}$, 则称$a, b$ 具有$\boldsymbol{W}$ 关系， 记作$a\boldsymbol{W}b$ 或者$a \sim b$。如果$a, b \in \boldsymbol{S}; (a,b) \notin \boldsymbol{W}$, 则称$a, b$ 没有$\boldsymbol{W}$ 关系

1.3. 等价关系

如果$\boldsymbol{S}$ 上的一个关系满足以下性质

1.3.1. 反身性 $a \sim a$

1.3.2. 对称性 $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

1.3.3. 传递性 $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

那么这样的关系称作等价关系

1.4. 等价类

设 $\sim$ 是 $\boldsymbol{S}$ 上的一个等价关系，那么，令:

$$a \in \boldsymbol{S}, \bar{a} \overset{\text{def}}{=} \{x \in \boldsymbol{S} \mid x \sim a\} \tag{2}$$

称$\bar{a}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 上由 a 确定的等价类, 由定义可知，$\bar{a}$ 是一个集合

1.4.1. 性质 1. $a \in \bar{a}$

1.4.2. 性质 2. $x \in \bar{a} \Leftrightarrow x \sim a$

1.4.3. 性质 3. $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x \sim y$

证明：

1. 必要性: 因为$\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow x \in \bar{x} \Rightarrow x \in \bar{y} \Rightarrow x \sim y$ (性质 1. 性质 2.)
2. 充分性: 设$\forall c \in \bar{x} \Rightarrow c \sim x; x \sim y \Rightarrow c \sim y \Rightarrow c \in \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \subseteq \bar{y}$， 同理从$\bar{y}$ 任取元素可得$\bar{y} \subseteq \bar{x}$ 结合两者可得$\bar{x} = \bar{y}$

1.4.4. 定理 设$\sim$是$\boldsymbol{S}$ 上的一个等价关系，则任取$a, b \in \boldsymbol{S}$, 有$\bar{a} = \bar{b}$ 或者$\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$

1. 先证明$\bar{a} \neq$ hov $[b] \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$. 设$c \in \bar{a} \cap \bar{b} \Rightarrow c \sim a, c \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$ 与假设矛盾，因此其交集必为空集。同理，当$\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ 时， 存在上述的c 使得结果成立，从而必有$\bar{a} = \bar{b}$

1.5. 定义$\boldsymbol{S}$ 的划分

设有 I 个$\boldsymbol{S}$ 的非空子集的并集$\cup S_i, i \in I$, 并且满足$S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$，则称$\{S_i, i \in I\}$是$\boldsymbol{S}$ 的一个划分，记作$\pi(\boldsymbol{S})$

1.5.1. 定理 设$\sim$是$\boldsymbol{S}$ 上的一个等价关系，则所有等价类组成的集合是$\boldsymbol{S}$ 的一个划分，记作$\pi_{\sim}(\boldsymbol{S})$

证明:

$$\forall a \in \boldsymbol{S}, a \in \bar{a} \Rightarrow \boldsymbol{S} = \cup_{a \in \boldsymbol{S}} \{\bar{a}\}, \text{又} a_i, a_j \in \boldsymbol{S}, \bar{a\_}\mathrm{i} \neq \bar{a\_}\mathrm{j} \Rightarrow \bar{a\_}\mathrm{i} \cap \bar{a\_}\mathrm{j} = \emptyset \Rightarrow \cup_{a \in \boldsymbol{S}} \{\bar{a}\}\text{满足划分条件} \tag{3}$$

1.5.2. 商集

我们可以在整数集上定义这样的一个关系:

$$a \sim b \overset{\text{def}}{=} a \bmod 7 = b \bmod 7 \tag{4}$$

这个关系是否满足等价关系?

1. 反身：$a \bmod 7 = a \bmod 7$
2. 对称: $a \bmod 7 = b \bmod 7 \Leftrightarrow b \bmod 7 = a \bmod 7$
3. 传递: $a \bmod 7 = b \bmod 7, b \bmod 7 = c \bmod 7 \Leftrightarrow a \bmod 7 = c \bmod 7$ (mod 取得的是一个具体的数，因此是满足传递性质的)

从而模 7 同余关系是一个等价关系，易知$\boldsymbol{Z}$ 中有 7 个等价类$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$. 由此引入商集概念：

设$\sim$ 是$\boldsymbol{S}$ 上的一个等价关系，由所有等价类组成的集合称为$\boldsymbol{S}$ 对于$\sim$ 关系的商集，记作$\boldsymbol{S}/\sim$。注意商集是一个集合，不是元素

2. 矩阵相抵

$\boldsymbol{K}$ 上的所有$s\times n$的矩阵的集合记作$\boldsymbol{M}_{s\times n}$,当$s=n$时，简记为$\boldsymbol{M}_n$, 表示$\boldsymbol{K}$ 上所有 n 阶矩阵的集合。

2.1. 相抵定义：

$\boldsymbol{M}_{s\times n}$ 上的矩阵A 经过一系列初等行列变换得到B, 则称A, B是相抵的，记作$A\overset{相抵}{\sim}B$. 相抵是$\boldsymbol{M}_{s\times n}$ 上的一个二元关系，容易验证，相抵满足等价关系的三条性质：

1. 反身: A 和自身相抵
2. 对称: A, B 相抵 等价于 B, A 相抵
3. 传递: A, B, C, 如果$A\sim B, B\sim C \Rightarrow A\sim C$

相抵关系下，A的等价类称为其相抵类

回忆: 矩阵的初等行变换等价于, 矩阵左乘以一系列初等矩阵（矩阵被视作行向量组合）；矩阵的初等列变换等价于矩阵右乘以一系列初等矩阵 Q。从而矩阵的相抵关系可以表达为:

$$B=(\Pi_k P_k)A(\Pi_k Q_k)=PAQ \tag{5}$$

式 5 中的 P, Q 均是可逆矩阵

2.2. 定理

设$A\in\boldsymbol{M}_{s\times n}, rank(A)=r$, 如果$r>0$, 则 A 相抵于矩阵:$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$,这个()矩阵称为A的相抵标准形。如果$r=0$, 那么A 相抵于 0 矩阵。

证明：

1. 如果$r>0$, 那么矩阵A可以经过初等行变换为简化阶梯型J, 但是J的列分布不一定是连续的，我们可以通过初等列变换，将主元的列分布控制位连续的，其形式如下:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n}\\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n}\\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{3,r+1} & \cdots & c_{3,n}\\
\ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n}\\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix} \tag{6}$$

这个矩阵的前 r 行，可以通过初等列变换将后面的列全部消去（如同矩阵初等行变换生成阶梯型一样），从而最终就变成形如$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ 的矩阵。这个变换过程只涉及初等行变换和列变换，从而矩阵与之相抵

2.3. 定理 矩阵相抵判定定理

设$A, B\in\boldsymbol{M}_{s\times n}$, A, B 相抵的充要条件是$rank(A)=rank(B)$ () 证明:

1. 必要性，如果A, B 相抵，根据定义，矩阵的初等行列变换不会改变矩阵的秩（注意不是行列式），从而$rank(A)=rank(B)$
2. 充分性, 如果$rank(A)=rank(B)$，则它们的标准型相等，再根据相抵的传递性可知，A, B 相抵．

根据该定理，可以得知，对于$0\leq r\leq\min(s,n)$, r 唯一决定了相抵类。这种称为相抵关系下的完全不变量。

2.4. 定义 不变量与完全不变量

设$\sim$是$\boldsymbol{S}$上的一个等价关系，一个量或者表达式对于等价类里的元素是相等的，则称该量或表达式是该关系下的一个不变量。如果能恰好完全决定等价类的一组不变量则称为完全不变量

结合以上信息，我们可以有以下推论:

$$A\in\boldsymbol{M}_{s\times n}, rank(A)\neq 0\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}Q \tag{7}$$

3. 广义逆矩阵

如果A 是一个可逆矩阵，那么$AXA=A$ 的一个解是$X=A^{-1}$. 当 A 不可逆时，这个方程是否有解呢?

3.1. 定理

设$A\in\boldsymbol{M}_{s\times n}, rank(A)=r>0$, 则矩阵方程:$AXA=A$ 一定有解。设$A=P\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}Q$, P 是 s 阶矩阵，Q 是 n 阶矩阵。则该矩阵方程的解为:$X=Q^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}P^{-1}$. 其中$B\in M_{r\times(s-r)}, C\in M_{(n-r)\times r}, D\in M_{(n-r)\times(s-r)}$, 矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 是一个$n\times s$矩阵

证明:

$$
\begin{aligned}
AXA &= P\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} QQ^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} P^{-1}A \\
&= P\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{I}_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} P^{-1}A \\
&= P\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} P^{-1}A \\
&= P\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} Q
\end{aligned} \tag{8}
$$

式 8 中的左侧矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ 的列划分是$(r, n-r)$, 右侧矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$的行划分是$(r, n-r)$,因此两者可以相乘(参考分块矩阵乘积，证明比较复杂), 其结果为:$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$, 从而: 式 8 就可写作:

$$
P\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} Q = P\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} Q = A \tag{9}
$$

从而我们验证了这个定理，上面的定理中对BCD 除了形状之外，没有特殊要求

3.2. 广义逆

设$A \in \boldsymbol{M}_{s\times n}$, 矩阵方程$AXA = A$的每一个解都称为$A$的广义逆矩阵，简称$A$的广义逆， 记作$A^-$ 根据定义显然$AA^-A = A$. 同时根据上述定理，$rank(A) = r, A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \Rightarrow X = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1} = A^-$, 可见$A^-$通常是一个集合

对于$\mathbf{0}_{s\times n}$ 任意$B \in M_{n\times s} \Rightarrow \mathbf{0}B\mathbf{0} = \mathbf{0}_{s\times n} \Rightarrow B = 0^-$

3.3. 定理 非齐次线性方程组的相容性定理

非齐次线性方程组$A\boldsymbol{x} = \beta$ 有解的充要条件是$\beta = AA^-\beta$

证明：
1. 必要性:设$\boldsymbol{b}$ 是$A\boldsymbol{x} = \beta$的解，那么$A\boldsymbol{b} = \beta \Rightarrow AA^-(A\boldsymbol{b}) = \beta$, 又$A\boldsymbol{b} = \beta \Rightarrow \beta = AA^-\beta$
2. 充分性:

$$
\beta = AA^-\beta = A(A^-\beta) \Rightarrow A[A^-\beta] = \beta \tag{10}
$$

从而$A^-\beta$是$A\boldsymbol{x} = \beta$的一个解

3.4. 定理 非齐次线性方程组的解的结构定理

如果$A\boldsymbol{x} = \beta$ 有解，则其通解为

$$
\boldsymbol{x} = A^-\beta \tag{11}
$$

证明： 设$\boldsymbol{\gamma}$ 是一个解，则$A\boldsymbol{\gamma} = \beta$. 那么有:

$$
\begin{aligned}
P\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} Q\boldsymbol{\gamma} &= \beta \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} Q\boldsymbol{\gamma} &= P^{-1}\beta
\end{aligned} \tag{12}
$$

式 12 中,Q 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\gamma}$是一个$n\times 1$的向量，从而$Q\boldsymbol{\gamma}$ 是一个$n\times 1$的矩阵（向量），将$Q\boldsymbol{\gamma}$ 写作$Q\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y_1}_r \\ \boldsymbol{Y_2}_{n-r} \end{pmatrix}$. 同理$P^{-1}\beta = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z_1}_r \\ \boldsymbol{Z_2}_{s-r} \end{pmatrix}$ 从而式 12 可以写作:

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y_1}_r \\ \boldsymbol{Y_2}_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z_1}_r \\ \boldsymbol{Z_2}_{s-r} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Z_1}_r = \boldsymbol{Y_1}_r, \boldsymbol{Z_2}_{s-r} = \boldsymbol{0} \Rightarrow P^{-1}\beta = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{13}
$$

这里要证明一个推论，就是P_s可逆时，$\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, P\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. 设$\exists \boldsymbol{x} \neq 0 s.t. P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 因为$P$是可逆矩阵$\Rightarrow rank(P) = s \Rightarrow P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有 0 解，与假设矛盾,从而$P\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$

从而$P^{-1}\beta \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{Z_1} \neq \boldsymbol{0}_r$, 因此设$\boldsymbol{Z_1} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_r \end{pmatrix}$,$\exists k_i \neq 0$; 根据前述广义逆定理，$A^- = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & B \\ C & D \end{pmatrix} P^{-1}$, 我们将$\boldsymbol{C}_{(n-r)\times(r)}$ 写作$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, ..., k_i^{-1}\boldsymbol{Y}_2, ..., \boldsymbol{0})$,这里要注意$\boldsymbol{Y}_2$ 是一个列向量. 那么$\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}_1 = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, ..., k_i^{-1}\boldsymbol{Y}_2, ..., \boldsymbol{0}) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_r \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}_2$，那么:

$$
\begin{aligned}
Q\gamma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\gamma = Q^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \because P^{-1}\beta = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \\
\gamma = Q^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} P^{-1}\beta = A^{-}\beta
\end{aligned} \tag{14}
$$

我们也可以反过来验证，对于A^{-}, 由 3.3. 定理可知，$\beta = AA^{-}\beta$, 从而$A^{-}\beta$ 一定是$A\boldsymbol{x} = \beta$的解

综上，如果$A\boldsymbol{x} = \beta$ 有解，则其解可表示为$x = A^{-}\beta$

3.5. 齐次线性方程组的解的结构定理：

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的通解为:

$$
\boldsymbol{x} = (I_n - A^{-}A)Z, Z \in K^n \tag{15}
$$

证明:

$$
Z \in K^n, A[(I_n - A^{-}A)Z] = A[(I_n - A^{-}A)]Z = (A - AA^{-}A)Z = \boldsymbol{0} \tag{16}
$$

这里注意$A^{-} \in M_{n\times s}$, 同时这个证明只证明了$\boldsymbol{x} = (I_n - A^{-}A)Z, Z \in K^n$ 是$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解的一部分而不是全部，接下来要证明任意解的情况

$$
\boldsymbol{b} s.t. A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, (I_n - A^{-}A)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - A^{-}(A\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} - A^{-}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{b} \Rightarrow A(I_n - A^{-}A)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{17}
$$

综上， 定理得证

此处证明实际上有重复证明的情况，并且没有说明式 15 为何包含了全部解

1. 重复证明$\boldsymbol{b} \in K^n, s.t. A\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 而第一步证明时取得向量$Z \in K^n$ 一定包含$\boldsymbol{b}$
2. 没有包含全部情况$(I_n - A^{-}A)Z$ 会对Z 做变换，验证全部情况，应当说明$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解的空间和$(I_n - A^{-}A)Z$ 是同一个空间

3.6. 推论

设$\beta \in K^n, \beta \neq \boldsymbol{0}$, 则如果$A\boldsymbol{x} = \beta$ 有解时，其通解为:

$$
\boldsymbol{x} = A^{-}\beta + (I_n - A^{-}A)Z, Z \in K^n \tag{18}
$$

证明: 由定理 3.4. 知,$\boldsymbol{x} \in \{A^{-}\beta\}, s.t. A\boldsymbol{x} = \beta$, 又$A\boldsymbol{x} = \beta = \beta + \boldsymbol{0} = A\boldsymbol{x} + A\gamma, A\gamma = \boldsymbol{0}$, 由 3.5. 知$\gamma \in \{(I_n - A^{-}A)Z, Z \in K^n\}$ 从而$A\boldsymbol{x} + A\gamma = A^{-}\beta + (I_n - A^{-}A)Z, Z \in k^n$

3.7. (略)设 A 是复数域上的$s \times n$ 矩阵，那么

$$
\begin{cases}
AXA = A \\
XAX = X \\
(AX)^{*} = AX \\
(XA)^{*} = XA
\end{cases} \tag{19}
$$

称为 A 的 Penrose 方程组，他的解叫做A 的 Moore-Penrose 广义逆，记作A^{+}