1. 其他概念

本文所提的旋转向量，一般是单位向量，特殊会提及

1.1. 同构

同构用于描述两种数学结构的相似性，其定义如下：

设有两个集合A B, 存在一个映射$f : A \to B$, 满足以下条件:
1. 双射: f 既是单射，也是满射
2. 运算性质保持: 加法的结合律、分配律、乘法的结合律 分配律等，如果在A 中成立，则在B中也成立

同构可以让我们用其他结构中的对象等效替换

1.2. 正交投影

如图，设向量g在向量f上的投影为e, 由图可知，h 与f 正交，且$e + h = g \Rightarrow h = g - e$ 从而:

$$\begin{gathered} hf = 0 \\ (g - e)f = gf - ef = 0 \Rightarrow gf = ef \end{gathered} \tag{1}$$

两边同乘以f， 从而:$(g \cdot f)f = (e \cdot f)f$ 向量点乘不满足结合律 由于e, f 同向，从而$\| (e \cdot f)f \| = \| e \| \| f \| \| f \| \Rightarrow (e \cdot f)f = e\| f \|^2$ (向量相等的定义是：方向相同，大小相等) 所以:

$$(g \cdot f)f = e\| f \|^2 \Rightarrow e = (g \cdot f)\frac{f}{\| f \|^2} \tag{2}$$

把以上向量写成列向量，则$g \cdot f := < g, f > = f^T g$, 式 2 可以写作:$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{f}^T \boldsymbol{g}}{< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} >}\boldsymbol{f}$, 观察:$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} > \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^T \boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^T)\boldsymbol{g}$，把这个带入式 2, 我们可以得到一个矩阵:

$$P = \frac{\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^T}{\| \boldsymbol{f} \|^2} \tag{3}$$

如果$\boldsymbol{f}$ 是一个单位向量，那么式 3 就可以写作:$P = (\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}^T)$, P 称为正交投影矩阵 这个结论是基本正确的，过程是错误的，标量乘法不能直接展开复合。 正交投影在线性代数引入了线性空间后才会介绍到 此处暂时跳过。

1.3. 向量叉乘

以下只在三维场景讨论 向量叉乘也叫向量的外积或者向量积，其定义是:
1. $\boldsymbol{c}$的方向垂直于a, b 所张成的平面，由右手定则表示，食指、中指指向两个向量，拇指方向就是$\boldsymbol{c}$的方向
2. $\boldsymbol{c}$的模是 $\| \boldsymbol{c} \| = \| \boldsymbol{a} \| \| \boldsymbol{b} \| \sin(\theta)$

向量叉乘符合乘法对加法的左分配律和右分配律，不满足交换律. 分配律的证明需要在几何情况下证明（代数式是通过几何证明后的分配律给出的）

如果两个向量平行， 则他们向量叉乘的结果是 0 向量

向量叉乘可以表示为以下矩阵的行列式:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \det\left(\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \hat{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} \tag{4}$$

这的矩阵是一个反对称矩阵。 注意矩阵中的各元素顺序，与向量$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$的作用顺序有关

性质:
1. $\hat{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = -\hat{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 等价于叉乘的负结合律
2. $\hat{\boldsymbol{a}}^T = -\hat{\boldsymbol{a}}$ 反对称矩阵性质

向量叉乘三重积:

$$\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{a}) \tag{5}$$

$$n\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0 \tag{6}$$

假设$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \neq 0$, 从而:$m = -n\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}}$， 取$n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, m = -(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$， 再设$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$， 式 6 仍然成立。因此可以认为 $n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, m = -(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ 是式 6 的一个解，至于他是不是唯一解，很明显不是，因为$n = 0, m = 0$很明显是上面的方程的一个解。

2. 复数

2.1. 复数定义

略

2.2. 复数加法

略

2.3. 复数乘法

设$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ 则两者乘积为:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + i(bc + ad) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \tag{7}$$

式 7 中，$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$是 z_2的向量表示。 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 是z_1 的矩阵表示。也就是说，复数乘法，可以用矩阵和向量的运算表达，很自然的，我们能够想到，矩阵作用于向量就是一种变换。(这里要注意矩阵形式是一种同构映射，但我们此处不去纠结)

当然，如果取z_2 的矩阵形式，也是可以表示乘法的:

$$z_1 z_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix} \Leftrightarrow (ac - bd) + (bc + ad)i \tag{8}$$

两个矩阵的乘积通常是两个变换的复合

由于矩阵表示、向量表示是复数集的同构映射，因此其乘法保持交换律, 这很容易验证

2.4. 特殊的复数矩阵

$$1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \tag{9}$$

$i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

由于是同构映射$i^2 = i * i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix} = -I \Leftrightarrow -1$

2.5. 复数的模长

定义略

2.6. 共轭复数

对于$z_1 = a + bi$而言，其共轭定义为$\overline{z_1} = a - bi$, 容易验证$z_1\overline{z_1} = a^2 + b^2 = (\| z_1 \|)^2$， 因此复数的模可以这样表示:$(\| z_1 \|) = \sqrt{z_1\overline{z_1}}$

2.7. 复数和 2D 旋转

在前面的内容中，复数的模表示为$\| z_1 \| = \sqrt{a^2+b^2}$, 以复数的矩阵形式表达，对个变量归一化则有:

$$z_1 \Leftrightarrow \| z_1 \| \begin{pmatrix} \frac{a}{\| z_1 \|} & -\frac{b}{\| z_1 \|} \\ \frac{b}{\| z_1 \|} & \frac{a}{\| z_1 \|} \end{pmatrix} \tag{10}$$

在复平面上(x 为实轴, y 表示虚部)，则显然上面可以表示成:

$$z_1 \Leftrightarrow \| z_1 \| \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \| z_1 \| I \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \| z_1 \| & 0 \\ 0 & \| z_1 \| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{11}$$

这样z_1 可以表示两个矩阵的符合：角度旋转和尺度缩放（这也暗示了为什么 3D 旋转一个旋转向量就可以表示了）。我们要注意到$\theta = \arctan(b, a)$, 特别的，这里是四象限反正切a, b 可能为负值，范围是$(-\pi, \pi)$.

这样，对于 2D 平面的向量旋转θ可以表示为 :$V_t = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} V$, 而该旋转矩阵可以表示为:$\cos(\theta) + i\sin(\theta)$（这里很容易让人联想到欧拉公式$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$）。我们以复数形式表示：$V_t = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))V = e^{i\theta}V$

2.8. 极坐标表示（或指数表示）

根据欧拉公式，复数可以表示为：$z_1 = \| z_1 \| e^{i\theta}$, 这种情况之下，复数定义就和实部、虚部(a,b) 无关了。我们可以用一个尺度缩放因子r 和旋转角度θ 来定义复数或表示旋转,即$V_t = re^{i\theta}V$

我们一共给出了 2D 旋转的 3 中表达方法：
1. 矩阵形式
2. 复数乘积形式
3. 极坐标形式

方法 2 3 要把被旋转向量映射到复平面或极坐标系下，只不过这种映射是自然且直接的

2.9. 2D 旋转符合

由于复数的乘积满足交换律，因此其表示的缩放+旋转也满足交换律。我们很容易在指数表示下验证:

$$V_t = (z_1 e^{i\alpha} z_2 e^{i\beta})V = (z_2 e^{i\beta} z_1 e^{i\alpha})V = (z_1 z_2 e^{i(\alpha+\beta)})V \tag{12}$$

3. 3D 旋转

3D 旋转可以用轴角法表示. 轴角法需要先确定一个空间向量，右手在以大拇指指向该向量朝向，拇指握拳，其余手指旋转所指方向为旋转方向（逆时针）。确定好了旋转向量轴和角度以后，我们就可以说一个向量v以r为轴旋转θ。

在三维空间中，确定一个向量需要三个坐标x, y, z, 确定旋转角需要一个变量θ，共四个自由度。 实际上这四个自由度即包含了旋转方向和角度，也包含了尺寸变化。如果不关注尺度变换，我们可以将向量单位化即使用单位向量表示旋转轴，从而可以通过$\| (x, y, z) \|^2 = 1$ 约束消去一个自由度。向量单位化的公式是：

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\| \boldsymbol{u} \|} \tag{13}$$

3.1. 3D 旋转分解

一个向量$\boldsymbol{V}$围绕旋转轴$\boldsymbol{r}$ 旋转θ， 可以这么等价：
1. 以$\boldsymbol{r}$ 作为法向量构造平面H，$\boldsymbol{V}$可以分解为垂直旋转轴的$V_\perp$ 和 落在$\boldsymbol{r}$上的投影$V_{/\!/}$ 即$\boldsymbol{V} = V_\perp + V_{/\!/}$, 注意到$V_\perp$ 是落在平面H上的

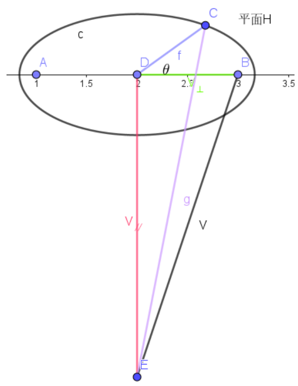

Figure 1: 旋转分解

2. 对$\boldsymbol{V}$ 旋转θ, 图中可见，$V_\perp$ 等效旋转了θ, 而$V_{/\!/}$ 没有变化。旋转后的向量$\boldsymbol{V}' = V_{/\!/} + V'_\perp$

这两 3D 旋转可以表示成 2D 平面上H的旋转，为了表达H，我们需要另外一个向量$\boldsymbol{w}$， 我们可以通过向量的叉乘获得:$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}_\perp$. 这是因为$r, \boldsymbol{V}_\perp$ 正交，其叉乘可以获得两者组成的平面的法向量$\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}_\perp$ 互相正交（三维空间的正交基，右手系），这同样意味着，$\boldsymbol{V}_\perp, \boldsymbol{w}$ 可以组成平面H的一个正交基，旋转后的$V'_\perp$ 可以由这组基线性表出。(这里有个微妙的地方就在于，叉乘是不满足交换律，但是满足反交换律，如果叉乘顺序不同，得到的$\boldsymbol{w}$也不同，最终得到的旋转角度也不同)

根据向量叉乘公式:$\| \boldsymbol{w} \| = \| \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}_\perp \| = \| \boldsymbol{r} \| \cdot \| \boldsymbol{V}_\perp \| \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = \| \boldsymbol{r} \| \cdot \| \boldsymbol{V}_\perp \|$, 如果$\boldsymbol{r}$ 是单位向量，那么就有:$\| \boldsymbol{w} \| = \| \boldsymbol{V}_\perp \|$, 如下图所示:

很自然的，逆时针旋转了θ的$V'_\perp$ 可以这么表达:

$$V'_\perp = V_\perp \cos(\theta) + \boldsymbol{w}\sin(\theta) \tag{14}$$

从而总的有:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}' &= V_{/\!/} + V'_\perp \\ &= V_{/\!/} + (V_\perp \cos(\theta) + \boldsymbol{w}\sin(\theta)) \\ &= V_{/\!/} + V_\perp \cos(\theta) + (\boldsymbol{r} \times V_\perp)\sin(\theta) \\ &= V_{/\!/} + V_\perp \cos(\theta) + \boldsymbol{r} \times \left(V - V_{/\!/}\right)\sin(\theta) \\ &= V_{/\!/} + V_\perp \cos(\theta) + \left(\boldsymbol{r} \times V - \boldsymbol{r} \times V_{/\!/}\right)\sin(\theta) \\ &= V_{/\!/} + V_\perp \cos(\theta) + \boldsymbol{r} \times V \sin(\theta) \end{aligned} \tag{15}$$

再根据正交投影公式:$V_{/\!/} = V \cdot \frac{r}{\| r \|^2} r$, 设$r$是单位向量， 所以$V_{/\!/} = (V \cdot r)r$, 从而$V_\perp = V - (V \cdot r)r$, 带入式 15：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}' &= (V \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r} + (V - (V \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r})\cos(\theta) + \boldsymbol{r} \times V \sin(\theta) \\ &= V\cos(\theta) + (1 - \cos(\theta))(V \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r} + \sin(\theta)\boldsymbol{r} \times V \end{aligned} \tag{16}$$

式 16 将旋转结果 用原始向量$\boldsymbol{V}$、旋转轴$\boldsymbol{r}$以及角度θ表达了出来。这个公式也叫做罗德里格斯旋转公式。罗德里格斯旋转公式可以用来求解一个旋转向量所对应的旋转矩阵

3.2. 罗德里格斯旋转矩阵求解:

$$R = \cos(\theta)I + (1 - \cos\theta)\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T + \sin(\theta)\hat{\boldsymbol{r}} \tag{17}$$

式 17 中，$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^T$ 是指由$\boldsymbol{r}$ 确定的正交投影矩阵，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 用来表示$\boldsymbol{r}$确定的反对称矩阵，前文提及向量叉乘可以等价于其对应的反对称矩阵作用于目标向量。

我们可以用向量的模长表示旋转角度（这样，反过来求解一个姿态的旋转时似乎有两种表达？或者说一个姿态本身就可以对应于多个旋转?)，这样，一个旋转即可被一个向量确定下来

4. 四元数

4.1. 定义及性质

四元数是包含三个虚部的一种代数结构，表示为$q = a + bi + cj + dk$, 并且$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. 其加法、减法以及标量乘法定义与复数一致

一些四元数等式:

$$\begin{aligned} ijk &= -1 \\ iijk &= -i = -jk \\ jk &= i \end{aligned} \tag{18}$$

同理可得$ij = k$; $ijj = kj = -i$，可见$kj \neq jk$， 从而四元数乘法一般不满足交换律 我们进一步可以总结出以下等式:

$$\begin{aligned} ij &= k \\ ji &= -k \\ ki &= j \\ ik &= -j \\ jk &= i \\ kj &= -i \end{aligned} \tag{19}$$

4.2. 四元数乘法：

设四元数$q_1 = a + bi + cj + dk, q_2 = e + fi + gj + hk$, 其乘法为:

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) &= ae + afi + agj + ahk + bei + bfi^2 + bgij + bhik + cej + cfji + cgj^2 + chjk + dek + dfki + dgkj + dhk^2 \\ &= ae + afi + agj + ahk + bei - bf + bgij + bhik + cej + cfji - cg + chjk + dek + dfki + dgkj - dh \end{aligned} \tag{20}$$

这个结果非常混乱, 我们利用式 19 对其简化:

$$\begin{gathered} ae + afi + agj + ahk + bei - bf + bgk - bhj + cej - cfk - cg + chi + dek + dfj - dgi - dh \\ ae - bf - cg - dh + [be + af - dg + ch]i + [ce + df + ag - bh]j + [de - cf + bg + ah]k \end{gathered} \tag{21}$$

写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \tag{22}$$

由于四元数乘法不满足交换律，$p_1 p_2$ 称为p_2左乘以p_1 或者 p_1 右乘以 p_2. 右乘的等效矩阵是不同的：

$$p_2 p_1 = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} \tag{23}$$

如果把四元数的虚部看成三维向量，即对于$(a + bi + cj + dk)$, $(e + fi + gj + hk)$, 令$v = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$; $u = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$，那么:

$$\begin{gathered} v \cdot u = bf + cg + dh \\ v \times u = \det\left(\begin{pmatrix} i & j & k \\ b & c & d \\ f & g & h \end{pmatrix} \right) = (ch - dg)i - (bh - df)j + (bg - cf)k = \begin{pmatrix} ch - dg \\ -bh + df \\ bg - cf \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{24}$$

对比向量:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} be + af - dg + ch \\ ce + df + ag - bh \\ de - cf + bg + ah \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ch - dg \\ -bh + df \\ bg - cf \end{pmatrix} = \\ = a \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} b \\ c \\ \\ d \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{25}$$

从而:

$$q_1 q_2 = \begin{pmatrix} a \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \\ a\boldsymbol{u} + e(v) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \tag{26}$$

, 这个好像是什么外代数的积。 对比前面的罗德里格斯公式：

$$\boldsymbol{V} \cos(\theta) + (1 - \cos(\theta))(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V} \sin(\theta) \tag{27}$$

貌似看不出什么联系

4.3. 纯四元数

只包含虚部的四元数称为纯四元数，一个 3D 向量可以等价为一个纯四元数。考虑纯四元数的乘法：

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \tag{28}$$

这里可以顺带讨论下只有实部的四元数和四元数的乘积:

$$\begin{pmatrix} a \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ a\boldsymbol{d} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} c \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \tag{29}$$

这个展示了，四元数从定义上是包括实数的。我们可以放心的把实数看做一个四元数

4.4. 四元数的共轭和逆

四元数共轭基本和复数的共轭差不多，实部相同，虚部相反，记为q^*. 和共轭复数类似:

$$qq^* = \begin{pmatrix} s \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ -\boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 + \| \boldsymbol{v} \|^2 \\ s\boldsymbol{v} - s\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times (-\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 + \| \boldsymbol{v} \|^2 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \| q \|^2 \tag{30}$$

同理$q^* q = \| q^* \|^2 = \| q \|^2 = qq^*$

要注意共轭的基本性质$q^{**} = q$

4.4.1. 逆

四元数的逆和矩阵的逆类似，其定义是:$qq^{-1} = q^{-1}q = 1$, q^{-1} 称为q的逆。 和矩阵类似，有以下一些基本等式:

$$\begin{aligned} pqq^{-1} &= p(q\ \mathtt{inv}\ (q)) = p \\ q^{-1}qp &= (q^{-1}q)p = p \end{aligned} \tag{31}$$

结合共轭，我们可以得到一些等式:

$$\begin{aligned} q^*qq^{-1} = q^* \Rightarrow \\ (q^*q)q^{-1} = q^* \Rightarrow \\ \| q \|^2 q^{-1} = q^* \Rightarrow q^{-1} = \frac{q^*}{\| q \|^2} \end{aligned} \tag{32}$$

式 32 给了我们一个高效的方法寻找四元数的逆。 特别的，对于单位四元数，即$\| q \| = 1, q^{-1} = q^*$

4.5. 四元数和 3D 旋转

我们可以把涉及到旋转的向量映射成纯四元数:$\boldsymbol{v} = \binom{0}{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v}_\perp = \binom{0}{\boldsymbol{v}_\perp}, \boldsymbol{v}_\parallel = \binom{0}{v_\parallel}, \boldsymbol{r} = \binom{0}{\boldsymbol{r}}$

4.5.1. $v_\perp$ 旋转

前文再向量形式下:$\boldsymbol{v}_\perp{}' = \cos(\theta)\boldsymbol{v}_\perp + \sin(\theta)(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\perp)$. 而对于纯四元数$p_1 = \binom{0}{\boldsymbol{v}_\perp}, p_2 = \binom{0}{r}$. 那么$p_2p_1 = [-\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}_\perp, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\perp]$, 因为$\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v}_\perp$, 因此$p_2p_1 = [0, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\perp] \Leftrightarrow \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\perp$

如此，我们我们把式 32 中的向量全部等价替换为四元数：

$$\boldsymbol{v}_\perp{}' \Leftrightarrow \cos(\theta)p_1 + \sin(\theta)(p_2p_1) = (\cos(\theta)p_1 + \sin(\theta)p_2)p_1. \tag{33}$$

四元数乘法的分配律可以直接和矩阵的乘法的分配律类比

以$q = (\cos(\theta) + \sin(\theta)p_2)$, 那么$\boldsymbol{v}_\perp{}' = qp_1$。下面关注这个$q$

$$\begin{aligned} q &= \cos(\theta) + \sin(\theta)p_2 \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} = \cos(\theta) + \sin(\theta)r_x i + \sin(\theta)r_y j + \sin(\theta)r_z j \end{aligned} \tag{34}$$

这意味着$\boldsymbol{v}_\perp$ 围绕$\boldsymbol{r}$ 旋转θ 可以表示为:$qp_1 = qv_\perp$, $v_\perp$ 表示$\boldsymbol{v}_\perp$ 对应的四元数， $q = \binom{\cos(\theta)}{\sin(\theta)\boldsymbol{r}}$，同时注意到:

$$\begin{aligned} \| \sin(\theta)\boldsymbol{r} \|^2 = (\sin(\theta)\boldsymbol{r}) \cdot (\sin(\theta)\boldsymbol{r}) \\ \| q \|^2 = \cos(\theta)^2 + \| \sin(\theta)\boldsymbol{r} \|^2 \Rightarrow \\ \| q \|^2 = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)\boldsymbol{r} \cdot \sin(\theta)\boldsymbol{r} = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \end{aligned} \tag{35}$$

即，这个四元数是一个单位四元数，其指标是旋转，不表示缩放

4.5.2. $\boldsymbol{v}_\parallel$的旋转

前文分析可得$\boldsymbol{v}_\parallel$ 不会旋转

4.5.3. $\boldsymbol{v}$的旋转

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp{}' \Leftrightarrow v_\parallel + qv_\perp; q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \tag{36}$$

The beautiful part begins.

4.5.4. 几个引理

$$q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix}, \| \boldsymbol{r} \| = 1 \Rightarrow q^2 = qq = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \tag{37}$$

证明:

$$\begin{aligned} qq = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{38}$$

这表示，连续两个θ旋转可以复合成一个2θ的旋转

引理 2.

$$q = \begin{pmatrix} a \\ b\boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_\parallel \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \| \boldsymbol{u} \| = 1 \Rightarrow qv_\parallel = v_\parallel q \tag{39}$$

这个使用外代数积证明:

$$\begin{aligned} L = qv_\parallel = \begin{pmatrix} a \\ b\boldsymbol{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_\parallel \\ a\boldsymbol{v}_\parallel \end{pmatrix}; \\ R = v_\parallel q = \begin{pmatrix} 0 \\ v_\parallel \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b\boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_\parallel \\ a\boldsymbol{v}_\parallel \end{pmatrix} = L \end{aligned} \tag{40}$$

引理 3.

$$q = \begin{pmatrix} a \\ b\boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \| \boldsymbol{u} \| = 1, \boldsymbol{v}_\perp \cdot \boldsymbol{u} = 0, \Rightarrow qv_\perp = v_\perp q^* \tag{41}$$

仍然使用外代数积证明:

$$\begin{aligned} L = qv_\perp = \begin{pmatrix} a \\ b\boldsymbol{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v}_\perp \end{pmatrix} = (0, a\boldsymbol{v}_\perp + b\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}_\perp) \\ R = v_\perp q^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v}_\perp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -b\boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\boldsymbol{v}_\perp - b\boldsymbol{v}_\perp \times \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \because a \times b = -b \times a \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 0 \\ a\boldsymbol{v}_\perp + b\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}_\perp \end{pmatrix} = L \end{aligned} \tag{42}$$

现在对旋转公式变形:

$$\begin{aligned} v' = v_\parallel + qv_\perp = pp^{-1}v_\parallel + ppv_\perp; 令pp = q, p = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \| p \| = 1 \Rightarrow p^{-1} = p^* \Rightarrow v' &= pp^*v_\parallel + ppv_\perp \\ &= p\left(p^*v_\parallel\right) + p(pv_\perp) \\ &= p\left(v_\parallel p^*\right) + p(v_\perp p^*) \\ &= pv_\parallel p^* + pv_\perp p^* \\ &= p\left[v_\parallel p^* + v_\perp p^*\right] \\ &= p\left(v_\parallel + v_\perp\right)p^* \\ &= pvp^* \end{aligned} \tag{43}$$

所以对于向量$\boldsymbol{v}$, 围绕旋转轴$\boldsymbol{r}$ 旋转θ 时，其表示为:

$$v' = pvp^* = pvp^{-1}; p = \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\theta) \\ \sin(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \tag{44}$$

换句话说，$q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix}$ 可以是向量v 围绕$\boldsymbol{r}$ 旋转2θ角度。

罗德里格斯旋转公式的四元数表示:

$$pvp^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta)\boldsymbol{v} + (1-\cos(\theta))(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} + \sin(\theta)(r\times v) \end{pmatrix} \tag{45}$$

证明:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\theta) \\ \sin(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\theta) \\ -\sin(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} \\ \cos(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{v} + \sin(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\theta) \\ -\sin(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(\frac{1}{2}\theta)\sin(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} - \left[\cos(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{v} + \sin(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right]\cdot(-\sin(\frac{1}{2}\theta)\boldsymbol{r}) \\ \cdots \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{46}$$

因为$\boldsymbol{r}\perp r\times v$， 所以:

$$-\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} - \left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)\boldsymbol{v} + \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right]\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\boldsymbol{r}\right) = -\cos\sin\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} + \sin\cos\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} = 0 \tag{47}$$

因此式 46 的实部为 0，接下来看虚部: 令 $c = \cos(\frac{1}{2}\theta), s = \sin(\frac{1}{2}\theta)$; 则虚部为:

$$\begin{gathered} c[c\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}] + s\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}s\boldsymbol{r} + [c\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}]\times(-s\boldsymbol{r}) = \\ c[c\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}] + s\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}s\boldsymbol{r} - cs\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r} - s^2\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r} \end{gathered} \tag{48}$$

因为$(a\times b)\times c = -a(c\cdot b) + b(c\cdot a)$ 从而:

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v} \tag{49}$$

从而：

$$\begin{gathered} c[c\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}] + s\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}s\boldsymbol{r} - cs\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r} - s^2[-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}] \\ = c^2\boldsymbol{v} + cs\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} + s^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} - cs\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r} - s^2[-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}] = \\ c^2\boldsymbol{v} + cs\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} + cs\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} + s^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} + s^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} - s^2\boldsymbol{v} = \\ c^2\boldsymbol{v} + 2s^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} + 2cs(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) - s^2\boldsymbol{v} = \\ (c^2 - s^2)\boldsymbol{v} + 2s^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} + 2cs(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \end{gathered} \tag{50}$$

接下来是三角的倍角公式:

$$\begin{gathered} \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \\ 2\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 - (\cos^2(a) - \sin^2(a)) = 1 - \cos(2a) \end{gathered} \tag{51}$$

则有： $\begin{aligned} &\sin(\theta)(c^2 - s^2)\boldsymbol{v} + 2s^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} + 2cs(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) = \\ &\cos(\theta)\boldsymbol{v} + (1-\cos(\theta))(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} + \sin(\theta)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \end{aligned}$ 综上，罗德里格斯公式的四元数旋转表达为:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta)\boldsymbol{v} + (1-\cos(\theta))(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} + \sin(\theta)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} \tag{52}$$

对于一个向量，其旋转后仍然是一个向量，因此罗德里格斯公式的实部为 0.

4.5.5. 四元数对旋转的表达：

对于旋转轴$\boldsymbol{r}$, 旋转角度θ， 其四元数表达为:$\begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2})\boldsymbol{r} \end{pmatrix}$. 已知一个四元数，求角度和旋转向量是比较容易得:

$$\begin{gathered} p = \begin{pmatrix} a \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \\ \theta = 2\arccos(a); \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin(\arccos(a))} \end{gathered} \tag{53}$$

前面说过，四元数左乘、右乘可以表达成矩阵形式，在实际应用中，我们可以将式 43 写成矩阵形式，以提高计算效率，此处略去过程。

4.6. 旋转复合

对于两个旋转过程$r_1 = p_\alpha^{\boldsymbol{r}_1}, r_2 = p_\beta^{\boldsymbol{r}_2}$, 我们考虑先经过$r_1$, 在经过$r_2$的旋转， 这个总的旋转能否用另外一个四元数表示呢? 即:

$$\begin{gathered} v' = q_1vq_1^*; \\ v'' = q_2v'q_2^* = q_2q_1vq_1^*q_2^* \\ ? = q_3vq_3^* \end{gathered} \tag{54}$$

引理:

$$\begin{gathered} \forall q_1 = \begin{pmatrix} a \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} c \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}: \\ q_1^*q_2^* = (q_2q_1)^* \\ L = \\ q_1^*q_2^* = \begin{pmatrix} a \\ -\boldsymbol{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ -\boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \\ -a\boldsymbol{d} - c\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d} \end{pmatrix} \\ R = \\ (q_2q_1)^* = \left\{\begin{pmatrix} c \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}\right\}^* = \begin{pmatrix} ac + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \\ a\boldsymbol{d} + c\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} ac + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \\ -a\boldsymbol{d} - c\boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = L \end{gathered} \tag{55}$$

因此:

$$q_2q_1vq_1^*q_2^* = q_2q_1v(q_2q_1)^* \Rightarrow \exists q_3 = q_2q_1, s.t. q_3vq_3^* = q_2q_1vq_1^*q_2^* \tag{56}$$

这表示我们可以使用结合律，q_2q_1 来得到一个四元数，表达两次旋转的符合。这个很容易推广到多次旋转场景:

$$v^n = \Pi_{k=n}^1 q_k v \Pi_{k=1}^n q_k^* \Leftrightarrow v^n = q_n v q_n^*, q_n = \Pi_{k=n}^1 q_k \tag{57}$$

4.7. 双倍覆盖

双倍覆盖是指同一个旋转，可以用确定的两个四元数表达。即:$q_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix}$ 等价于$q_2 = -q_1 = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix}$ 所表示的旋转。利用一些三角等式:

$$\begin{gathered} -\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta); \\ \sin(\theta) = \sin(\pi - \theta) \end{gathered} \tag{58}$$

从而$q_2v(e + fi + gj + hk)^*$ 就表示围绕$-\boldsymbol{r}$ 旋转$(2\pi - 2\theta)$ 度，其等价于围绕$\boldsymbol{r}$ 旋转2θ

或者可以用四元数旋转公式表示:

$$(-q)v{-}q^* = (-1)^2qvq^* = qvq^* \tag{59}$$

这种称为 2 对 1 满射同态。

值得注意的是式 59 中两侧的旋转矩阵表达是一样的，因此矩阵层面没有双倍覆盖问题。

4.8. 单位四元数的指数形式表示

类似于欧拉公式，如果$\| \boldsymbol{u} \|^2 = 1$, 那么，对于单位纯四元数$q = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix}$ 有：

$$e^{q\theta} = \cos(\theta) + q\sin(\theta) = \cos(\theta) + \boldsymbol{u}\sin(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \boldsymbol{u}\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{60}$$

注意等式左侧是$e^{q\theta}$, 右侧是一个新四元数:$p = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \boldsymbol{u}\sin(\theta) \end{pmatrix}$. 同时注意到:

$$q^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \tag{61}$$

这个性质和欧拉公式中的i 很相似.

另外$e^{q^*\theta} = e^{-q\theta}$, 因$q^* = -q$

总结，对于形如$q = (\cos(\theta, \boldsymbol{u}\sin\theta))$的四元数，可以表示成$e^{u\theta}, u = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix}$

这样，对于旋转轴，我们工作的四元数$q = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix}$, 对于旋转角度$\theta$，我们可以这样表示旋转:

$$v' = e^{q\frac{\theta}{2}} v e^{-q\frac{\theta}{2}} \tag{62}$$

4.8.1. 指数性质

$q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta)\boldsymbol{u} \end{pmatrix}$，则:

1. 求对数

$\log(q) = \log(e^{u\theta}) = u\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta\boldsymbol{u} \end{pmatrix}$

2. 幂运算

$$q^t = \left(e^{u\theta}\right)^t = e^{u(t\theta)} = \begin{pmatrix} \cos(t\theta) \\ \sin(t\theta)\boldsymbol{u} \end{pmatrix} \tag{63}$$

式 63 么有写成$e^{(tu)\theta}$ 的原因是四元数欧拉公式成立的前提是旋转向量（对应的四元数）必须是单位向量（纯单位四元数）。复合后就不满足这个条件了。此式的含义是t次相同角度的旋转复合，等价于一次旋转$t\theta$

4.9. 练习

1. 一个物体的位姿可以用旋转+平移表示，那么先旋转在位移和先位移再旋转 最终得到的效果是相同的吗？

我们可以用四元数表示这个旋转和位移:

先旋转再位移

$$\begin{aligned} v_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v_t} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\boldsymbol{r} \end{pmatrix}, v' = qvq^* + v_t \\ v' = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta)\boldsymbol{v} + (1-\cos(\theta))(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{r} + \sin(\theta)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v_t} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ c\boldsymbol{v} + (1-c)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{r} + s(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v_t}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{64}$$

先位移再旋转:

$$... = \begin{pmatrix} 0 \\ c(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v_t}) + (1-c)(\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v_t}))\boldsymbol{r} + s(\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v_t})) \end{pmatrix} \tag{65}$$

很明显这两者不太一样。

5. 旋转的“差”或旋转增量

5.1. 旋转增量表示

四元数插值其实是求两次四元数变换的“差”（注意，不是直接作差），即，我们考虑$q_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\boldsymbol{u} \end{pmatrix}; q_2 = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta)\boldsymbol{r} \end{pmatrix}$, 求得一个变化量$\Delta q$，使得:$q_2 = \Delta q q_1$, 即:$q_2 v q_2^* = \Delta q q_1 v (\Delta q q_1)^*$. 表示:

q_1 将$\boldsymbol{v}$ 旋转到P_1 后，经过Δq 作用，可以再旋转到P_2位置。而P_2 位置可以直接由q_2 作用于$\boldsymbol{v}$ 旋转得到.

求解Δq:

$$\Delta q q_1 = q_2 \Rightarrow \Delta q q_1 q_1^{-1} = q_2 q_1^{-1} \Rightarrow \Delta q = q_2 q_1^{-1} = q_2 q_1^* \tag{66}$$

5.1.1. 问题:

5.1.1.1. 1. 这个Δq 是不是单位四元数呢？

待确认

5.1.1.2. 2. 任意两个单位四元数相乘的结果是不是单位四元数?

假设$\boldsymbol{r} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{u}, \| \boldsymbol{r} \| = 1, \| \boldsymbol{u} \| = 1$, 令

$$\begin{aligned} q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix}, \\ q_1 q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{67}$$

是单位四元数

同理，假设$\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{u}$, 易得 $q_1 q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u} \end{pmatrix}$ 也是单位四元数

实际上，观察式 21:

$$\begin{aligned} q = q_1 q_2 = ae - bf - cg - dh + [be + af - dg + ch]i + [ce + df + ag - bh]j + [de - cf + bg + ah]k \Rightarrow \\ \| q \|^2 = (ae - bf - cg - dh)^2 + [be + af - dg + ch]^2 + [ce + df + ag - bh]^2 + [de - cf + bg + ah]^2 \\ = e^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + f^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + g^2(c^2 + d^2 + a^2 + b^2) + h^2(d^2 + c^2 + b^2 + a^2) + ... \\ = e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + ... \\ = ... = 1 + 2(-aebf - aecg - aedh + bfcg + bfdh + cgdh) + 2(beaf - bedg + bech - afdg + afch - dgch) + \\ 2(cedf + ceag - cebh + dfag - dfbh - agbh) + 2(-decf + decg + deah - cfbg - cfah + bgah) = 1 \end{aligned} \tag{68}$$

因此单位四元数乘法保持模长不变（有没有更简便的方法?）观察式 22, 表示乘法的矩阵是一个关于对角线的反对称矩阵，对角线元素为a, 我们考虑一个简单的2×2矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}, A^TA=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0\\ 0 & b^2+a^2\end{pmatrix}; \text{同理：}$$
$$A=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d\\ b & a & -d & c\\ c & d & a & -b\\ d & -c & b & a\end{pmatrix}, A^TA=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}=I; \tag{69}$$

从而$\| A\boldsymbol{v} \|^2=(A\boldsymbol{v})^T(A\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}^TA^TA\boldsymbol{v}=\| v \|^2$

事实证明，不要贸然行动。

5.2. 四元数夹角和旋转

现在假设$P_1\to P_2$ 经过了两次相同的旋转，即存在：

$q_3, s.t. \Delta q_t=(q_3)q_1^{-1}=(q_2)q_3^{-1}$，同时$(\Delta q_t)^2 q_1=q_2=\Delta q q_1 \Leftrightarrow \Delta q_t=(\Delta q)^{\frac{1}{2}}$ 依次类推，$(\Delta q)^{\eta}, 0\le\eta\le1$, 代表了$\Delta q$ 旋转的多少，如$\eta=\frac{1}{2}$ 时代表旋转了Δq的 50%. $\eta=0.25$时表示旋转了Δq的 25%.

这在生成过程动画时，比较有用，能够生成两个位置之间的旋转过程，这种插值方式，也叫做 Slerp 插值。 Slerp 插值效率比较低。（到目前为止，我们似乎从未定义过四元数的开方或者指数运算），同时此处还需要存在性证明，即表示可以有且一定可以有一个这样的中间过程。

存在性是比较好证明的，我们只要找到P_2, P_1 之间的旋转轴和角度$\boldsymbol{r}, \theta$, 旋转多少用$t\theta, 0\le t\le 1$ 即可。这个是很容易验证的。

注意这个“增量”过程里，不光有旋转角度的变化，也有旋转轴的变化。这个旋转的变化量:从对于$\boldsymbol{v}$, q_1 表示，让$\boldsymbol{v}$ 围绕$\boldsymbol{u}$ 旋转α. 对于q_2，表示$\boldsymbol{v}$围绕$\boldsymbol{r}$ 旋转β. Δq 表示的是:

$$q_2q_1^*=\begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\boldsymbol{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\boldsymbol{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_bc_a+s_bs_a\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}\\ -c_bs_a\boldsymbol{u}+s_bc_a\boldsymbol{r}+s_as_b\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}\end{pmatrix} \tag{70}$$

式 70 展示了，这个增量让$\boldsymbol{v_1}$ 围绕一个新的轴旋$\boldsymbol{t}=-c_bs_a\boldsymbol{u}+s_bc_a\boldsymbol{r}+s_as_b\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}$转一个新的角度$\gamma$，可以得到$\boldsymbol{v_2}$.

观察式 70 的实部, 其等于$q_1\cdot q_2$ (实际上对于任意$q_aq_b^*$ 都成立):

$$c_bc_a+s_bs_a\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}c_b\\ s_b\boldsymbol{r}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_a\\ s_a\boldsymbol{u}\end{pmatrix} \tag{71}$$

就像在 3D 空间的向量内积和夹角关系一样，我们定义四元数的空间的夹角为:

$$\cos(\theta)=\frac{q_a\cdot q_b}{\| q_a \| \| q_b \|} \tag{72}$$

如果式 71 中的四元数都是单位四元数，从其夹角余弦就是:

$$\cos(\theta)=q_1\cdot q_2=c_bc_a+s_bs_a\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u} \tag{73}$$

等于Δq 的实部。 而$\Delta q=\begin{pmatrix}\cos(\gamma)\\ \sin(\gamma)\boldsymbol{t}\end{pmatrix}$. 从而$\theta=\gamma$或者$\gamma=-\theta$. 而根据内积的定义，$0<\theta<\pi$，从而$\gamma=\theta$(但是$\gamma$ 可以取负值?)

我们知道Δq表达的是围绕$\boldsymbol{t}$ 的 2θ旋转. 这就表示，从$q_1vq_1^*\Rightarrow q_2vq_2^*$ 需要围绕$\boldsymbol{t}$ 旋转2θ角度，其中$\cos(\theta)=q_1\cdot q_2$

假设q_1, q_2 夹角之间有个中间位置为$q_t, \angle_{q_t}q_1=t\theta, \angle_{q_t}q_2=(1-t)\theta, 0\le t\le 1$. 我们可以根据时间控制$t$, 从而生成这个中间的旋转过度过程。

6. 四元数微分方程

四元数微分方程和旋转矩阵微分类似，分析他们的表示和性质需要一些李群、李代数的知识，目前还没精力弄。此处只写结论。

6.1. 四元数的微分方程:

$q_{t+\Delta t}=\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}_{t+\Delta t}=\begin{pmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{pmatrix}_{t}+\frac{1}{2}\Delta t()$

6.1.1. 附: 内积与夹角的关系

设向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角为θ. 令$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 由余弦定理知:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-\| a \|\| b \|\cos(\theta)\Rightarrow\\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-\| a \|\| b \|\cos(\theta)\Rightarrow\\ \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-\| a \|\| b \|\cos(\theta)\Rightarrow\\ \cos(\theta)=\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{\| a \|\| b \|}\end{gathered} \tag{74}$$