基于BOOSTRAP抽样的平行分析方法及其模拟研究

田金方,陈珮珮,张小斐
(山东财经大学 统计学院,济南 250014)

摘　要:文章首先评述了六种成份选择方法的优缺点,然后基于BOOSTRAP抽样思想改进了Horn的平行分析方法,并利用随机模拟技术比较分析了改进方法的优越性。结果表明:BOOSTRAP平行分析关于样本容量和样本分布都是一致有效和稳定的,能够正确地辨识出需要提出的成份个数,而Horn的平行分析仅在大样本和正态分布情况下才能达到BOOSTRAP平行分析的效度。

关键词:成份;平行分析;BOOSTRAP
中图分类号:O212.4　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1002-6487(2012)23-0004-05

0　引言

主成份分析和试验性因子分析是广泛应用于社会和行为科学的多变量统计方法,而在使用这些方法的过程中,最有争议的议题就是成份个数的保留问题,它既是主成份分析中的重要决策内容,也是试验性因子分析在因子旋转之后的重要分析方向。在这个阶段提取太少或太多的成份都会导致错误的分析结论。不幸的是,正如Costello和Osborne所说,最流行的软件包都没有提供解决这类问题的最精确方法,许多使用者仅仅相信统计软件包所提供的缺省决策准则(一般情况下是特征值大于1的准则),其他一些使用者有时也借助于特征值的碎石图进行决策,而这两个高度流行的决策方法具有严重的估计偏度等问题。幸运的是,越来越多的统计学家认识到平行分析检验的优越性,逐步推荐使用平行分析来处理成份个数的选择问题,但是目前使用的平行分析多以随机模拟的正态分布样本作为基准来选择成份个数,没有考虑实际样本的偶然性所引起的模型偏差。

鉴于此,本文将首先简要回顾成份个数选择问题的重要性;然后综述解决这个问题的现有方法;接着基于BOOSTRAP抽样思想改进了Horn的平行分析检验方法;最后利用随机模拟技术分析BOOSTRAP平行分析方法的优越性,并给出具体的操作细节。

1　成份个数选择问题

很多研究者都强调过成份个数选择问题在主成份分析和试验性因子分析中的重要性,例如Hayton,Allen,和Scarpello;Ledesma和Pedro[2][3]. 它们论述了致使成份个数选择问题如此重要的三个原因。首先,与其他的决策问题相比,比如选择提取方法或因子旋转方法,成份个数的选择更能影响主成份和试验性因子分析的结果,这是因为这些分析方法关于其他问题相对比较稳健[4]。其次,主成份分析和试验性因子分析需要在"减少"和合适地"展现"原始变量的相关信息之间取得平衡,因此,将重要成份与不重要成份区分开来就显得尤其重要。最后,成份个数的选择误差能够显著地改变主成份和试验性因子分析的结论及其解释。提取较少的成份个数将导致相对信息的损失,严重扭曲分析的求解结论,例如,变量载荷。另一方面,尽管过度提取不是太严重,但会导致主成份或因子具有较小的载荷,使得结论难于解释和推广[4]。总之,低度和过度提取成份都会逆向影响主成份和试验性因子分析的效率和含义。

2　成份个数选择方法

考虑到这个决策的重要性,学者们提出了不同的方法以筛选提取成份的个数,同时,在评估这些方法的单独或比较效率上也进行了大量的研究[4]-[8]。这些研究一般利用随机模拟数据,评估这些方法选择重要成份个数的能力。接下来我们简单综述一下这些研究所涉及的主要领域和结论。

2.1　Bartlett球形检验

Bartlett[9]提出了球形检验,直接解决相关系数矩阵能否进行因子分解的问题。该检验是近似的卡方检验,检验统计量为相关系数矩阵的函数,如下所示:

$$\chi^2[\frac{(p^2-p)}{2}]=-[(n-1)-\frac{(2p+5)}{6}]\ln|R|$$

其中,$\ln|R|$是相关矩阵行列式的自然对数;$(p^2-p)/2$是

基金项目:国家社会科学基金资助项目(10CTJ003;09BTJ011);山东省自然科学基金资助项目(Y2007A24;Y2007A25)
作者简介:田金方(1977-),男,山东巨野人,博士,副教授,研究方向:金融统计。
陈珮珮(1987-),女,山东成武人,硕士研究生,研究方向:金融统计。
张小斐(1957-),男,山东莱阳人,博士,教授,研究方向:经济统计。

卡方检验统计量的自由度；p是变量的个数；n是观测的个数。

当分析中的变量真正相互独立时，我们预期R接近于单位矩阵I。在这种情况下，数据的散点图看似球形，而不是足球样式的椭球形。矩阵的所有特征值都接近于1(说明椭圆的长轴不是明显地长于其他轴)；因此，$|R|$接近于1.0，$\ln|R|$接近于0。随着变量之间的相关性增加，数据的散点图开始看起来更像椭球。在这种情况下，R的一些特征值大于1，一些更接近于零。结果是随着相关水平的增加，特征值的乘积更接近于零，这意味着$\ln|R|$变为较大的负数。

我们利用一系列修正的Bartlett球形检验可以回答主成份选取的问题。如果球形被拒绝掉，那么我们提取最大的主成份，然后检验剩余的相关系数矩阵(即$R-\lambda_1 u_1 u_1'$)，以验证它的行列式是否为零。我们连续提取主成份，直到残差矩阵在统计上不再显著。不幸的是，球形检验的势相当高，且卡方检验对样本容量比较敏感，结果是，通常很难拒绝掉球形检验，这个方法容易保留较多的主成份个数，特别是当样本容量很大时更是如此。在实践中，研究者感兴趣于成份解的可解释性和实际意义，因此Bartlett球形检验有其致命的实践缺陷。

2.2 Kaiser特征值大于1的准则(K1)

Kaiser在1960年提出了K1[10]，它或许是最有名且最实际可用的方法准则[11]。根据这个准则，只有那些特征值大于1的成份才能保留下来做进一步的解释(这里假设我们分析的是标准化数据)。这条准则反应了一些基本的常识观念，即由于成份是对公共方差的测量，所以任意一个主成份都应该至少和每个原始变量X解释的方差一样多。因此，Kaiser准则要求对每一个成份解释的方差大小做绝对的判断。

在如下图1所示主成份问题中，$\lambda_1=3.24$，$\lambda_2=2.23$，$\lambda_3=1.96$，$\lambda_4=1.37$，$\lambda_5=1.15$，Kaiser准则要求保留前五个主成份。然而两个成份的特征值接近于1：$\lambda_5=1.15$，$\lambda_6=0.86$。基于解释能力的考虑，有人可能会提出将中断点设置的比1稍微高一点，保留只有四维的解。而有人可能认为，为了继承90%的原始数据的信息，我们需要将中断点设置的比1稍微小一点，这样我们就保留了前六个主成份。和这些方法中的任何一种相似，Kaiser准则应该被看成是一个指导准则而不是不可违背的定律。

尽管K1方法比较简单可行，但是许多作者认为使用它确定成份个数是有问题的，且效率低下。Fabrigan[11]指出使用这个方法所存在的三个问题。首先，这个方法是为主成份分析的情形提出的——对角线上元素等于1的相关系数矩阵的特征值，它不适用于试验性因子分析中的成份提取——对角线上元素伴随着共同度估计的相关系数矩阵的特征值。其次，与其他所有的机械准则一样，这个方法可以导出随意的决策，例如，将特征值“1.01”视作一个“主要”成份，而将“0.99”视作“次要”成份是毫无意义的。最后，在主成份和试验性因子分析的随机模拟研究中，这个方法易于严重高估成份个数，有时还会低估它们[4]。事实上，保留的成份个数和变量个数之间具有某种可疑的统计关系。Kaiser个人认为K1方法提取的成份个数一般介于变量个数的1/3和1/5或1/6之间[4]。总之，尽管K1方法使用广泛，但专家认为它具有很大的缺陷，不推荐使用其提取主成份。

2.3 Cattell的碎石图

这种图解方法是由Cattell在1966年提出来的[12]。它将每个成份所解释的方差按照从大到小的顺序排列起来，并用折线将它们连接在一起。接着我们需要确定图形显著性下降或产生断裂的“拐角”点，称之为曲线的“肘”，也就是说，在肘点以后的剩余特征值按照近似于直线的方式减小，只保留那些肘点之上的成份。因此，碎石图需要对保留下来的成份所解释的方差大小做一个相对的判断。

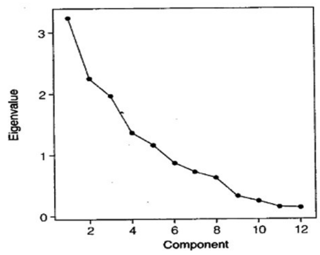

图1 碎石图的示意图

图1就是显示成份特征值的碎石图。曲线图中一个明显的弯曲出现在第三个主成份(它的特征值是1.96)之后，从第四个成份开始，特征值的下降近似于线性，而且比曲线图的第一部分平缓。基于碎石图，我们可以决定只留下前三个主成份。

不幸的是，在实际操作中对于肘部的识别很少如此清楚明确。很多情况下，被解释方差的下降看起来更像是平滑的曲线而不是锯齿状的肘。这个方法由于它的主观性而广受批评，在重要成份和次要成份之间没有变点的客观定义。事实确实如此，有些情况下，碎石图具有多个“肘”点，使得图形模棱两可，很难解释成份个数的选择问题。Zwick和Velicer[4]解释到：当识别者在如何解释碎石图时，结果具有可变性，“肘”点的识别依赖于识别者所受的训练和成份解的本质性质。尽管如此，他们还提到碎石图比K1方法精度更高，可变性更小，比方说，影响K1方法的因素(例如变量数)没有明显地影响碎石图。最后，Zwick和Velicer[4]还注明碎石图具有高估成份个数的趋势，指出如果有更好的方法存在，不推荐采用碎石图方法。

2.4 方差解释比

有时，我们希望提取充分多的成份以便合理地重现原始数据的信息(即能够解释原始变量一定比例的方差)。根据主成份分析的推导过程，原始数据集矩阵X和主成份得分矩阵的关系Z可以表述为$X=Z_s D^{1/2} U'$，其中Z_s表示标准化的主成份得分矩阵，D是主成份的对角协方差矩阵，U是特征向量矩阵。如果我们仅提取c个标准化成份，那么两者之间的关系仅仅是近似的，也就是

$$X\approx[z_{1s}, z_{2s}, \cdots, z_{cs}]D^{1/2}U'$$

我们可以为分析结果施加如下类型的限制条件：我们提取的成份个数必须至少能够解释每一个原始变量50%(或者其他预先设定的百分比)以上的信息。我们知道如

果特征值能够解释所有原始变量50%以上的信息，那么相应的特征值并不能保证解释任一原始变量50%以上的信息。当利用这样的方差解释比标准时，可以评估分析变量的可靠性。

方差解释比方法虽然简单可行，但百分比的设定具有随意性和倾向性，没有统一的指导原则，与碎石图的弊端相类似，选取的成份个数具有主观性，科学依据不强，实际应用中也不推荐使用这个方法提取主成份。

2.5 Velicer的MAP检验

Velicer在1976年提出了MAP（Minimum Average Partial）检验方法[13]，该方法包含了完整的主成份分析，随后又进行一系列的偏相关阵检验。具体地讲，第一步将第一主成份从研究变量之间的相关性中排除掉，然后计算出结果偏相关系数矩阵的非主对角线元素的平方均值。第二步将前两个主成份从原始相关矩阵中排除掉，然后计算出偏相关系数的平方均值。连续执行这样的计算k-1次（k是变量的个数），并将计算出的偏相关系数的平方均值依次排列出来，得到最小偏相关系数平方均值的分析步数决定了提取主成份的个数。同时还需要计算原始相关系数矩阵元素的平方均值，如果这个均值小于最小的偏相关系数平方均值，那么没有主成份可以进行提取。统计上，只要相关系数矩阵中的方差表示系统方差就可以提取主成份，当成份提取的信息相比于系统方差来讲具有非系统信息的特征时，我们就不能再继续提取主成份。

这个准则运用试验性因子分析中的公因子概念决定提取成份的个数，试图确定哪些成份是公共的，而不是从“肘”点的角度去选择成份，很多学者将它作为寻找最优因子解的法则。由于它的计算方式，这个解的其中一个性质就是它不提取具有较小载荷的成份。“至少两个变量在每个提取的成份中具有较高的载荷”[4]。考虑到MAP选择成份的能力，它已被证明优于先前所述的技术方法[4][14]。Zwick和Velicer[4]利用模拟研究发现，MAP在一定条件下能够得到精确的估计解，但有时它也会低估成份个数。特别地，当变量载荷较低和每个成份的变量个数较少时，MAP方法一致地低估主要成份的个数，同时，加之于MAP运算过程的复杂性，其实践应用的可行性并不高。

2.6 Horn的平行分析

Horn[15]提出了平行分析，该方法利用随机生成的观测变量确定需要提取的成份个数。Horn[15]建议使用不同类型的变点规则，与其利用固定值1，倒不如借助于随机数据的特征值变动地设计变点规则，这里的随机数据在变量和观测个数上平行于原始数据资料阵。平行分析的基本思想是主成份分析在解释最大可能方差的过程中，可能还会利用到数据内部的随机抽样变差。即使数据来自于协方差矩阵为I的标的总体，抽样误差也会使得成份分析的协方差矩阵轻微偏离I。由此，第一个成份的特征值总是大于1。Horn的步骤在本质上调整变点以使分析结果调整抽样误差所引起的偏离趋势。具体来讲，平行分析将原始数据相关系数矩阵的特征值与其平行随机相关系数矩阵的特征值进行比较。从计算的角度来看，由于利用模拟的平行随机样本资料阵计算“期望”特征值，所以平行分析是一个蒙特卡洛模拟过程。当利用这个方法时，那些大于随机平行数据“期望”特征值的对应成份才认为是显著的。目前，一般利用相应于给定分位数的特征值，比如随机平行数据特征值的95%分位数[16]-[17]。另外，当在因子分析中利用平行分析时，步骤是一样的，除非相关矩阵的对角元素用平方多元相关系数代替，这是试验性因子分析中近似变量共同度的第一步。

许多研究表明平行分析适用于确定成份的个数[16]-[18]。Zwick和Velicer[4]发现在所有的分析方法中，平行分析是最精确的，对于不同成份具有最小的变动性和敏感性。Glorfeld[17]也同意这个结论，并认为在综述不同方法的作用之后，我们找不到合适的理由不去选择平行分析。同样，一些学术期刊的编辑也支持这些观点，例如，Educational和Psychological Measurement[18]。最后，可以说主成份和试验性因子分析方法在解决存留成份个数的问题上，我们有充分的理由考虑平行分析作为最好的选择。

3 基于BOOSTRAP抽样思想的平行分析方法

上述平行分析方法依赖于随机模拟过程所需的某些参数标的分布（如通常的正态分布），同时没有考虑实际样本的偶然性所引起的模型偏差，而利用BOOSTRAP抽样方法可以充分考虑到样本的随机性，且随机模拟过程不需要任何标的分布。BOOSTRAP抽样方法的基本思想是由于某些原因，我们不知道如何从理论上构造统计量的合适显著性检验，例如在成份个数选择问题上，在理论上构造特征值的显著性检验是很困难的。BOOSTRAP方法假设原始数据是一个随机样本，如果总体样本能够从这些已经发生的样本数据中抽取的话，BOOSTRAP就可以从原始数据中随机抽取样本，以期得到多次重复样本，构造统计量的经验分布，从而可以进行各种相关的统计推断。这些重复样本的样本容量可以小于原始数据的，既可以利用无替代抽样也可以利用有替代抽样进行。实证研究发现最优BOOSTRAP抽样的容量等同于原始数据的，且利用有替代抽样方法进行。

为此，在进行平行分析选择成份个数时，我们不是利用随机数生成器，而是从原始数据中抽取BOOSTRAP样本数据。换句话说，我们有替代地从原始数据集的每个变量中抽取等容量的观测值，构造BOOSTRAP样本B个，以此可以得到随机平行数据特征值的95%分位数。注意必须对每个变量分别进行BOOSTRAP抽样，这样才能保证BOOSTRAP样本的标的联合分布是完全独立的。

4 随机模拟

为了理解BOOSTRAP平行分析的有效性和平稳性，我们利用随机模拟方法从三个方面（正态分布样本、数字

特征非正态样本和分布特征非正态样本）比较分析了Horn的平行分析（标的分布是正态分布）和BOOSTRAP平行分析在成份个数选择过程中的差异性。两种平行分析方法模拟过程都使用B=100[illegible]且取95%的分位数，同时借助于样本资料阵考察了它们的小样本和大样本性质。经验分析告诉我们，在多元分析中，样本资料[illegible]观测数与变量数之比最少是5∶1，推荐使用20∶1的样本资料阵，为此，我们选用8个变量，取观测数分别为40、160、800和2000，分别研究两种平行分析方法在这些样本上面体现出的小样本和大样本性质。另外需要注意的是，为了充分理解平行分析方法在提取成份过程中的效用，我们模拟的数据资料证不适于进行主成份或因子分析①，即变量之间是不相关的，这样更能体现分析的目的[19]。

4.1 正态分布样本

由于Horn平行分析的标的分布是正态分布，所以我们首先利用正态分布生成8个不相关的正态样本，分别计算不同样本容量下样本资料阵的特征值和BOOSTRAP平行分析特征值的95%分位数，与Horn平行分析的相应结果进行比照，分析结论见表1。

从表1可见，虽然数据资料阵是不相关的正态样本，但是按照特征值大于1的标准，我们仍然可以提取4个左右的成份，从而可见发展平行分析方法的必要性。Horn的平行分析结果仅在N＝2000这个大样本下才是有效的，这时不提取任何成份，但是当样本较小时，比方说N＝40，Horn的平行分析提出4个成份，与通常特征值等于1的标准没有显著差异，而BOOSTRAP平行分析在小样本和大样本中都体现出一致有效的分析结论，不进行任何成份的提取，并且在大样本情况下与Horn的平行分析基本等同。综上可见，尽管数据资料阵由正态分布生成，而Horn平行分析的标的分布也恰恰是正态分布，但它的有效性只在大样本情况下等同于BOOSTRAP，在小样本情况下基本失效，其优势远远劣于BOOSTRAP的平行分析。

4.2 非正态分布样本

为了比较分析两种平行分析方法在非正态分布样本上的差异，我们分别构造了数字特征非正态分布样本和分布特征非正态分布样本。数字特征非正态样本首先随机生成8个独立的标准正态分布，然后转换为偏度和峰度分别为（2 10）、（2 8）、（2 6）、（2 4）、（–2 10）、（–2 8）、（–2 6）和（–2 4）的非正态样本。此处使用的变换方法是Fleishman的势变换法，其具体步骤如下：

（1）利用牛顿迭代法得到偏度和峰度系数对相应的变换参数a,b,c,d；

（2）随机生成8个独立的标准正态分布样本；

（3）进行Fleishman的势变换：

$$F_i=a+bX_i+cX_i^2+dX_i^3$$

此时，变换之后的F值即是具有非正态数字特征的随机变量。

灵位，分布特征非正态分布样本由不相关的8个指数分布变量生成。两种形式的样本分析结果见表2和表3。

表2展示的分析结论与表1相同，即Horn平行分析的小样本性质严重偏离成份选取的作用，仅在大样本上与BOOSTRAP平行分析相媲美，而BOOSTRAP平行分析的小样本和大样本性质都是一致有效的。比较表1和表2发现，主成份和试验性因子分析似乎关于数字特征非正态的样本是稳定的。

对于指数类型的非正态样本，尽管主成份和试验性因子分析不再适宜进行，但BOOSTRAP平行分析还是展现其效用的稳定性，一致有效地选择适宜提取的成份；Horn平行分析在小样本上面的有效性还是远远不够，尽管大样本上面的效度增强，但还是表现出不尽人意的分析结论，

表1　　正态分布样本的两种平行分析结果比较表

特征值	Horn平行	N＝40		N＝160		N＝800		N＝2000	
		原始	BOOSTRAP	原始	BOOSTRAP	原始	BOOSTRAP	原始	BOOSTRAP
E1	1.121	1.872	1.972	1.402	1.462	1.145	1.197	1.068	1.123
E2	1.082	1.388	1.596	1.237	1.292	1.097	1.131	1.047	1.081
E3	1.052	1.310	1.353	1.040	1.182	1.057	1.083	1.024	1.053
E4	1.027	1.137	1.148	0.973	1.082	0.999	1.042	1.016	1.026
E5	1.003	0.822	0.987	0.904	1.001	0.987	1.002	0.985	1.003
E6	0.981	0.696	0.835	0.873	0.929	0.953	0.969	0.973	0.982
E7	0.958	0.503	0.673	0.815	0.853	0.900	0.935	0.955	0.958
E8	0.932	0.273	0.539	0.756	0.770	0.861	0.895	0.932	0.933

表2　　数字特征非正态样本的两种平行分析结果比较表

特征值	Horn平行	N＝40		N＝160		N＝800		N＝2000	
		原始	BOOSTRAP	原始	BOOSTRAP	原始	BOOSTRAP	原始	BOOSTRAP
E1	1.121	1.837	2.000	1.380	1.457	1.135	1.196	1.087	1.121
E2	1.082	1.388	1.602	1.250	1.292	1.083	1.130	1.047	1.081
E3	1.052	1.156	1.356	1.155	1.178	1.080	1.080	1.027	1.053
E4	1.027	1.009	1.153	1.003	1.084	1.033	1.038	1.011	1.026
E5	1.003	0.813	0.997	0.902	0.999	0.995	1.006	0.997	1.004
E6	0.981	0.715	0.839	0.872	0.927	0.935	0.971	0.984	0.982
E7	0.958	0.681	0.688	0.778	0.847	0.888	0.935	0.934	0.960
E8	0.932	0.402	0.547	0.660	0.761	0.851	0.897	0.913	0.933

①如需要SAS模拟源程序，请向作者索取。

表3　　分布特征非正态样本的两种平行分析结果比较表

特征值	Horn平行	N = 40		N = 160		N = 800		N = 2000	
		原始	BOOSTRAP	原始	BOOSTRAP	原始	BOOSTRAP	原始	BOOSTRAP
E1	1.121	1.890	1.983	1.286	1.466	1.161	1.194	1.123	1.123
E2	1.082	1.366	1.588	1.159	1.293	1.103	1.131	1.056	1.083
E3	1.052	1.182	1.341	1.142	1.181	1.062	1.081	1.034	1.051
E4	1.027	1.024	1.150	1.092	1.086	1.040	1.041	1.001	1.026
E5	1.003	0.920	0.980	1.017	1.006	0.995	1.004	0.981	1.004
E6	0.981	0.710	0.833	0.862	0.927	0.932	0.969	0.944	0.982
E7	0.958	0.599	0.686	0.772	0.850	0.871	0.934	0.936	0.959
E8	0.932	0.309	0.549	0.670	0.765	0.836	0.896	0.916	0.935

例如,在N=2000时,Horn的平行分析错误地提出了一个成份。

综上可见,改进之后的BOOSTRAP平行分析方法由于综合考虑了样本的随机误差,在提取成份的功效上显著地优于Horn的平行分析方法,其分析结论关于样本容量和样本分布都是一致有效和稳定的,然而,Horn平行分析由于没有借助于BOOSTRAP的抽样思想,忽略了样本自身的特点,仅从标的正态分布进行抽样,因此其功效大打折扣,在小样本情况下很难正确地提出成份,大样本情况下也并没有表现出优越性。同样Horn平行分析关于样本分布也是不稳定的,甚至是在大样本情况下也是无效的。

5　总结

本文简单介绍了成份分析的意义以及成份个数选择在主成份和试验性因子分析过程中的重要性,综述了目前存在的六种选择方法:Bartlett球形检验、Kaiser特征值大于1的准则(K1)、Cattell的碎石图、解释方差比、Velicer的MAP检验和Horn的平行分析,并分别评价了各个方法的优缺点,明确指出目前使用比较流行的选择方法具有致命的缺陷,提出了在多元统计分析当中应该大力推广使用平行分析。而基于BOOSTRAP抽样思想的平行分析更是具有非常优越的效用,本文通过随机模拟分析了这一点,与Horn平行分析比较发现:①BOOSTRAP平行分析关于样本容量和样本分布都是一致有效和稳定的,能够正确地辨识出需要提出的成份个数;②Horn平行分析的大样本性质比较有效,在小样本情况下很难正确地提出成份,尽管样本资料的分布与其抽样标的分布都是来自正态分布;③Horn平行分析关于样本分布不稳定,当数据资料阵偏离正态分布时,即使在大样本情况下,Horn平行分析也有可能出现成份提取错误。

参考文献:

[1]Costello A B, Osborne J W. Best Practices in Exploratory Factor Analysis: Four Recommendations for Getting the Most from Your Analysis [J]. Practical Assessment Research & Evaluation, 1966, 10(7).

[2]Hayton J C, Allen D G, Scarpello V. Factor Retention Decisions in Exploratory Factor Analysis: A Tutorial on Parallel Analysis[J]. Organizational Research Methods, 2004, 7(2).

[3]Ledesma R D, Pedro V M. Determining the Number of Factors to Retain in EFA: An Easy-to-use Computer Program for Carrying out Parallel Analysis[J]. Practical Assessment Research & Evaluation, 2007, 12(2).

[4]Zwick W R, Velicer W F. Comparison of Five Rules for Determining the Number of Components to Retain[J]. Psychological Bulletin, 1986,99(1).

[5]Horn J L, Engstrom R. Cattell´s Scree Test in Relation to Bartlett´s Chi-square Test and Other Observations on the Number of Factors Problem[J]. Multivariate Behavioral Research, 1979, 14(1).

[6]Hubbard R, Allen, S J. An Empirical Comparison of Alternative Methods for Principal Component Extraction[J]. Journal of Business Research, 1987, 15(1).

[7]Lautenschlager G J. A Comparison of Alternatives to Conducting Monte Carlo Analyses for Determining Parallel Analysis Criteria[J]. Multivariate Behavioral Research, 1989, 24(2).

[8]Buja A, Eyuboglu N. Remarks on Parallel Analysis[J]. Multivariate Behavioral Research, 1992, 27(2).

[9]Bartlett M S. Tests of Significance of Factor Analysis[J]. British Journal of Psychology, 1950,3(1).

[10]Kaiser H F. The Application of Electronic Computers to Factor Analysis[J]. Educational and Psychological Measurement, 1960,20(1).

[11]Fabrigar L R, Wegener D T, MacCallum R C, Strahan E J. Evaluating the Use of Exploratory Factor Analysis in Psychological Research [J]. Psychological Methods, 1999,3(1).

[12]Cattell R B. The Scree Test for the Number of Factors[J]. Multivariate Behavioral Research, 1966,1(1).

[13]Velicer W F. Determining the Number of Components from the Matrix of Partial Correlations[J]. Psychometrika, 1976,41(2).

[14]Wood J M, Tataryn D. J, Gorsuch R L. Effects of under- and Overextraction on Principal Axis Factor Analysis with Varimax Rotation[J]. Psychological Methods, 1996,1(2).

[15]Horn J L. A Rationale and Test for the Number of Factors in Factor Analysis[J]. Psychometrika, 1965,30(1).

[16]Cota A A, Longman R S, Holden R R, Fekken G C, Xinaris S. Interpolating 95th Percentile Eigenvalues from Random Data: An Empirical Example[J]. Educational & Psychological Measurement, 1993, 53 (2).

[17]Glorfeld L W. An Improvement on Horn's Parallel Analysis Methodology for Selecting the Correct Number of Factors to Tetain[J]. Educational and Psychological Measurement, 1995, 55(1).

[18]Thompson B, Daniel L G. Factor Analytic Evidence for the Construct Validity of Scores: A Historical Overview and Some Guidelines[J]. Educational and Psychological Measurement, 1996, 56(2).

[19]胡平良.现代统计学与SAS应用[M].北京:军事医学科学出版社,2000.

(责任编辑/亦　民)