矩阵的四种分解

费政聪

学号：201928013229003

一．文件结构：

主要有 main.py 读取参数文件 parameter.txt 和矩阵数据 matrix.txt 后，调用对应的矩阵分解变化函数，实现矩阵的分解。

二．参数配置

matrix.txt 文件存储需要变换的矩阵，parameter.txt 存储需要进行的分解。

三．示例

一下对四种分解分别做了测试样例并与答案做了比较。

1. Schmidt 正交分解，以课本例题为例，在 matrix.txt 中存储数据

```
*matrix.txt - 记事本
文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)
0 -20 -14
3 27 -4
4 11 -2
```

在 parameter.txt 中配置参数

```
*parameter.txt - 记事本
文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)
decomposition mode (LU,SM,HOUSE,GIVENS):
SM
```

运行 main.py 程序，得到结果：

```
[[  0. -20. -14.]
 [  3.  27.  -4.]
 [  4.  11.  -2.]]
分解类型为： SM

[[ 0.    -0.8   -0.6 ]
 [ 0.6    0.48 -0.64]
 [ 0.8   -0.36  0.48]]
[[ 5. 25. -4.]
 [ 0. 25. 10.]
 [ 0.  0. 10.]]
[Finished in 0.6s]
```

对应课本答案：

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & -20 & -15 \\ 15 & 12 & -16 \\ 20 & -9 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Householder 分解，以课本例题为例，在 matrix.txt 中存储数据

```
*matrix.txt - 记事本
文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)
0 -20 -14
3 27 -4
4 11 -2
```

在 parameter.txt 中配置参数

```
*parameter.txt - 记事本
文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)
decomposition mode (LU,SM,HOUSE,GIVENS):
HOUSE
```

运行 main.py 程序，得到结果：

```
[[  0. -20. -14.]
 [  3.  27.  -4.]
 [  4.  11.  -2.]]
分解类型为： HOUSE

[[ 0.    -0.8   -0.6 ]
 [ 0.6    0.48 -0.64]
 [ 0.8   -0.36  0.48]]
[[ 5 25 -4]
 [ 0 25 10]
 [ 0  0 10]]
[Finished in 0.3s]
```

对应课本答案：

$$\hat{\mathbf{R}}_2\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{A} = \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

If $\hat{\mathbf{R}}_k = \mathbf{I} - 2\hat{\mathbf{u}}\hat{\mathbf{u}}^T/\hat{\mathbf{u}}^T\hat{\mathbf{u}}$ is an elementary reflector, then so is

$$\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{R}}_k \end{pmatrix} = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} \quad \text{with} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix},$$

and consequently the product of any sequence of these $\mathbf{R}_k$'s can be formed by using the observation (5.7.4). In this example,

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 \\ -20 & 12 & -9 \\ -15 & -16 & 12 \end{pmatrix}.$$

3. Givens 分解，以课本例题为例，在 matrix.txt 中存储数据

matrix.txt - 记事本

文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)

```
1 2 -3 4
4 8 12 -8
2 3 2 1
-3 -1 1 -4
```

在 parameter.txt 中配置参数

*parameter.txt - 记事本

文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)

```
decomposition mode (LU,SM,HOUSE,GIVENS):
GIVENS
```

运行 main.py 程序，得到结果：

```
[[  0. -20. -14.]
 [  3.  27.  -4.]
 [  4.  11.  -2.]]
分解类型为： GIVENS

[[ 0.    -0.8   -0.6 ]
 [ 0.6    0.48 -0.64]
 [ 0.8   -0.36  0.48]]
[[ 5 25 -4]
 [ 0 25 10]
 [ 0  0 10]]
[Finished in 0.3s]
```

对应课本答案：

Finally, using the (2,2)-entry in $\mathbf{P}_{13}\mathbf{P}_{12}\mathbf{A}$ to annihilate the (3,2)-entry produces

$$\mathbf{P}_{23} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{so that} \quad \mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{13}\mathbf{P}_{12}\mathbf{A} = \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Since plane rotation matrices are orthogonal, and since the product of orthogonal matrices is again orthogonal, it must be the case that

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{13}\mathbf{P}_{12} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 \\ -20 & 12 & -9 \\ -15 & -16 & 12 \end{pmatrix}$$

4. LU 分解，以课本例题为例，在 matrix.txt 中存储数据

matrix.txt - 记事本

文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)

```
1 2 -3 4
4 8 12 -8
2 3 2 1
-3 -1 1 -4
```

在 parameter.txt 中配置参数

```
parameter.txt - 记事本
文件(F) 编辑(E) 格式(O) 查看(V) 帮助(H)
decomposition mode (LU,GS,HOUSE,GIVENS):
LU
```

运行 main.py 程序，得到结果：

```
[[ 1.  2. -3.  4.]
 [ 4.  8. 12. -8.]
 [ 2.  3.  2.  1.]
 [-3. -1.  1. -4.]]
分解类型为： LU

[[ 1.          0.          0.          0.        ]
 [-0.75        1.          0.          0.        ]
 [ 0.25        0.          1.          0.        ]
 [ 0.5        -0.2         0.33333333  1.        ]]
[[  4.   8.  12.  -8.]
 [  0.   5.  10. -10.]
 [  0.   0.  -6.   6.]
 [  0.   0.   0.   1.]]
[[0. 1. 0. 0.]
 [0. 0. 0. 1.]
 [1. 0. 0. 0.]
 [0. 0. 1. 0.]]
[Finished in 0.3s]
```

对应课本答案：

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -3/4 & 1 & 0 & 0\\ 1/4 & 0 & 1 & 0\\ 1/2 & -1/5 & 1/3 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{U}=\begin{pmatrix}4 & 8 & 12 & -8\\ 0 & 5 & 10 & -10\\ 0 & 0 & -6 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \mathbf{P}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$