M. KOWO YOPO Ulrich

Cours de Statistique et probabilité II
`B2 Keyce Informatique`(B2)
Keyce Informatique et Intélligence artificielle (Keyce)
Keyce Informatique et Intélligence artificielle (Keyce)

"tout astronome peut prédire avec la plus grande précision la place exacte où sera ce soir, à onze heures et demi, n'importe quelle étoile. Il ne peut en dire autant de sa fille."

J. Truslow Adams

Table des matières

Ressources bibliographiques du cours

Le lecteur intéressé pourra consulter les ouvrages suivants qui constituent la référence bibliographique de ce cours :

- Rachid ZOUHHAD, Jean - Laurent VIVIANI, Française BOUFFARD,*Mathématiques appliquées Mathématiques & applications.* 6è édition DUNOD.
- Jean-Pierre LECOURTE, *Statistique et probabilités, manuel et exercices corrigés*, 3è édition DUNOD.
- Sheldon M. Ross, *Initiation aux probabilités,* traduction de la quatrième édition américaine.
- Seymour LIPSCHUTZ, *Probabilités, cours et problèmes.* Série SCHAUM, neuvième tirage.
- Corina REISCHER, Raymond LEBLANC, Bruno RÉMILLARD, Denis LAROCQUE, *Théorie des probabilités. Problèmes et solutions.* Presses de l'Université du Québec.

Chapitre 1

Calculs de probabilité

La théorie des probabilité traite des phénomènes aléatoires expériences non déterministes dont les résultats dépendent du **hasard** et des lois qui les régissent. Dans ce contexte, on parle d'**expérience aléatoire** pour qualifier toutes expériences dont le résultat est imprévisible même lorsque celle-ci est répétée dans des conditions identiques. Par exemple, si l'on jette un dé en l'air, il est certain que le dé va retomber, mais il n'est pas certain que le dé va retomber en faisant apparaître un 6.

Le résultat d'une expérience s'appelle **événement**. La quantité de chance qu'un événement a de se réaliser correspond à la notion intuitive de **probabilité**. Pour réaliser cette quantification, il est nécessaire de décrire au préalable l'ensemble des résultats possibles appelés **événements élémentaires** ou épreuves. Cet ensemble expérimental s'appelle **ensemble fondamental** ou univers et est traditionnellement noté Ω.

L'objectif de ce chapitre est de définir la notion de probabilité et les différentes manières de l'évaluer.

SECTION 1.1

Définitions

1.1.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est imprévisible, même lorsque celle-ci est répétée dans des conditions identiques.

Exemple 1.1.

Le jet d'un dé constitue une expérience dont l'ensemble des résultats possibles est :

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Le lancer d'une pièce est une expérience aléatoire dont les aboutissements possibles sont :

$$\{\text{Pile, Face}\}$$

1.1.2 Ensemble fondamental

L'ensemble fondamental noté Ω d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats (ou issues) possibles de l'expérience aléatoire.

Chaque résultat possible est un élément de cet ensemble Ω qui peut être fini, infini dénombrable ou non dénombrable.

— **Fini**, s'il est constitué d'un nombre fixe de résultats

Exemple 1.2.

L'ensemble des résultat possibles du lancer d'une pièce est un ensemble fini.

$$\Omega = \{\text{Pile}\,,\ \text{Face}\}$$

— **Infini dénombrable**, s'il est possible d'affecter un numéro à chacun des résultats ;

Exemple 1.3.

L'épreuve aléatoire qui consiste à lancer un dé, une ou plusieurs fois, jusqu'à l'apparition du 6. Un résultat possible est le nombre de lancers nécessaires à l'achèvement de la partie. L'ensemble Ω est dénombrable car il est possible de numéroter les lancers $\{1^{\text{è}},\ 2^{\text{è}}, \ldots\}$; infini en raison du nombre de lancers, qui peut être théoriquement élevé, nécessaires à l'obtention du 6.

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\} = \mathbb{N}^* \quad \text{ensemble infini dénombrable}$$

— **Infini dénombrable**, s'il s'agit d'un intervalle continu.

Exemple 1.4.

Si un train entre en gare dans un intervalle de temps $[a\,,\ b]$, l'instant t où ce train entrera en gare est aléatoire et appartient à l'intervalle $[a\,,\ b]$. C'est un résultat possible de l'épreuve.

$$\Omega = [a\,,\ b]$$

Les observations relatives aux caractéristiques physiques (taille, poids, âge) ; biologiques (numération sanguine) ou au temps constituent des exemples infinis non dénombrables.

On observe la durée de vie d'une ampoule. Quel est l'ensemble fondamental ?

$$\Omega = [\,0,\ +\infty\,[\quad \text{ensemble infini non dénombrable.}$$

Remarque: 1.1.

les notions développées dans ce chapitre se limiteront aux seuls cas des ensembles finis et infinis dénombrables, cadre dans lequel peuvent être définis les événements aléatoires.

1.1.3 Événement

Un **événement** (rattaché à l'expérience), est toute situation qui peut être réalisée par une ou plusieurs résultats de l'expérience aléatoire.

Il est représenté par une lettre majuscule $A, B, X, \ldots$.

Exemple 1.5.

A l'événement A : « obtenir un nombre pair » ; pour un lancer de dé, est associé l'ensemble :

$$A = \{2,\ 4,\ 6\}$$

. Un événement (comme A) est une partie ou un sous-ensemble de Ω. Les sous-ensembles ne comportant qu'un seul élément sont appelés **événements élémentaires** : si $a \in \Omega$ alors $\{a\}$ est un **événement élémentaire**.

SECTION 1.2

Relations logiques entre événements

1.2.1 Événement complémentaire

Soit A une partie de Ω. Le complémentaire de A également partie de Ω et noté $\bar{A}$, est l'ensemble des résultats qui conduit à la réalisation de l'événement contraire : « non A ». Il est constitué de tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A :

$$\bar{A} = C_{\Omega}A = \Omega - A \tag{1.1}$$

Exemple 1.6.

Soit l'épreuve qui consiste à lancer un dé. Désignons par A l'événement « obtenir un nombre pair » : $A = \{2, 4, 6\}$. L'événement contraire noté $\bar{A}$ est alors : $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$.

1.2.2 Événements simultanés et incompatibles

L'événement C, réalisé si les deux événements A et B sont réalisés **simultanément**, est représenté par l'intersection de A et B.

$$C = A \cap B \tag{1.2}$$

Exemple 1.7.

Considérons à nouveau l'épreuve qui consiste à lancer un dé. Désignons par A l'événement « obtenir un nombre pair » et B « obtenir un nombre supérieur à 3 » : $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{4, 5, 6\}$. Alors l'événement $A \cap B$ « obtenir un nombre pair et supérieur à 3 » est : $A \cap B = \{4, 6\}$.

Deux événements A et B sont dits **incompatibles** ou **exclusifs** si leur réalisation simultanée est impossible :

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{alors A et B sont dits } \textbf{incompatibles} \tag{1.3}$$

Exemple 1.8.

Dans une épreuve de lancer de dé, on considère l'événement A « obtenir un nombre pair » et l'événement B « obtenir un nombre impair » : $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$. L'événement $A \cap B$ « obtenir un nombre pair et impair » est incompatible $A \cap B = \varnothing$.

1.2.3 Réunion

L'événement D réalisé si A ou B est réalisé (c'est à dire au moins un des deux événements), est représenté par la réunion de A et B :

$$D = A \cup B \quad \text{c'est à dire soit } A, \text{ soit } B, \text{ soit les deux} \tag{1.4}$$

Exemple 1.9.

On lance un dé et on désigne par A l'événement « obtenir un nombre pair » et par B « obtenir un nombre supérieur à 3 » alors $A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$

1.2.4 Événements impossible et certain

Un événement est dit **impossible** si cet événement ne peut pas se réaliser pour une expérience aléatoire donnée. L'ensemble associé à cet événement est vide. On note symboliquement l'événement impossible par $\varnothing$.

Exemple 1.10.

L'événement « *obtenir un nombre supérieur à 6* » en un lancer de dé est un événement impossible.

L'événement **certain** est celui qui se réalise à chaque événement. Il est représenté par Ω.

Exemple 1.11.

L'événement « *obtenir un nombre inférieur ou égal à 6* » en un lancer de dé est un événement certain.

1.2.5 Implication des événements

La proposition « *l'événement A implique l'événement B* » signifie que la réalisation de A entraîne celle de B. Cette relation est traduite par l'inclusion $A \subset B$.

Exemple 1.12.

L'événement A « *obtenir un deux* » en un lancer de dé, implique l'événement B : « *obtenir un nombre pair* ».

SECTION 1.3

Différentes interprétation de la notion de probabilité

Une **probabilité** est une mesure de *« croyance »* affectée à un événement, c'est à dire un degré de certitude ou de confiance que l'on a que l'événement se produise ou non. Les fondements de cette confiance correspondent à des conceptions différentes de la notion de probabilité.

1.3.1 Approche classique ou approche de Pascal

Si la nature d'une expérience aléatoire ne permet pas de privilégier un résultat plutôt qu'un autre, on est tenté de faire sienne l'expression de Pascal : *« le hasard est égal »*. Elle se traduit par l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires. Sous cette hypothèse d'équiprobabilité, pour un ensemble fondamental Ω contenant n événements élémentaires, chaque événement élémentaire a une probabilité $\dfrac{1}{n}$ de se réaliser.

D'autre part, si un événement A se réalise à travers r événement élémentaires, sa probabilité est alors $r \times \dfrac{1}{n}$. Ce résultat s'énonce parfois sous la forme suivante :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement } A}{\text{Nombre de cas possibles de l'ensemble fondamental } \Omega} = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}} \tag{1.5}$$

La formule $P(A)$ ne peut être utilisée que dans le cas particulier d'équiprobabilité des événements élémentaires, ce qui nous ramène à un simple **problème de dénombrement**. Cette particularité est souvent sous-entendue ou précisée dans l'affirmation que **les résultats sont obtenus au hasard**.

Exemple 1.13.

Considérons l'épreuve qui consiste à lancer deux dés à la fois. Quelle est la probabilité que la somme des nombres obtenus soit égal à 5 ?

Soit A l'événement « obtenir une somme égale à 5 ». Les événements élémentaires qui composent l'ensemble fondamental Ω sont représentés par les couples $(J,\, K)$ qui correspondent aux positions des deux dés. Ainsi J est le résultat du premier dé et K celui du second. Donc

$$\Omega = \{A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_{36}\} \quad \text{où} \quad A_i = (J,\, K), \quad \text{avec} \quad J,\, K = 1,\, 2,\, \ldots,\, 6 \quad \text{d'où} \quad \operatorname{card}\Omega = 36$$

Les 36 événements élémentaires peuvent être tenus pour équiprobables :

$$p(\{A_i\}) = \frac{1}{36} \quad \forall i = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, 36$$

$A = \{(1,\, 4)\,;(2,\, 3)\,;(3,\, 2)\,;(4,\, 1)\}$. La probabilité d'obtenir une somme égale à 5 s'écrit :

$$p(A) = \frac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\Omega} = \frac{4}{36}$$

Exemple 1.14.

On prend au hasard trois ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité pour que :

1. A *"Aucune ampoule ne soit défectueuse"*
2. B *"Exactement une ampoule soit défectueuse"*
3. C *"Au moins une ampoule soit défectueuse"*

Mais l'hypothèse d'équiprobabilité est rarement vérifiée pour la plupart des expériences aléatoires en matière de gestion (prévision de la demande, de l'évolution des prix, du taux de change,. . .). Par ailleurs, lorsque l'ensemble fondamental est infini, il est impossible de déterminer la probabilité de chaque résultat. Dans ces situations, la définition classique de la probabilité est inadéquate.

1.3.2 Approche objective ou fréquentiste ou empirique

Cette approche part du principe qu'il est possible de repéter une expérience dans les mêmes conditions aussi souvent que l'on veut.

Si A est un événement aléatoire associé à une expérience, si l'on répète l'expérience un nombre n de fois, $n(A)$ étant le nombre de fois que A s'est réalisé. La fréquence relative de A est $\dfrac{n(A)}{n}$.

Cette approche définit la probabilité de A comme la limite de la fréquence relative de A quand n tend vers l'infini. Ce résultat repose sur la **loi des grands nombres**.

$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(A)}{n}} \tag{1.6}$$

Exemple 1.15.

Une mutuelle désire déterminer la probabilité de survenance d'un certain type d'accident afin de fixer sa politique de prime d'assurance. Elle effectue une enquête statistique sur une population de 100 000 adultes concernés répartis par classes d'âge. Il apparaît que 800 personnes ont eu ce type d'accident. On peut donc supposer que la probabilité de cet événement est égale à $\frac{800}{100\,000} = 0,008 = 0,8\%$.

Exemple 1.16.

Sur 1000 personnes contrôlées dans l'autobus, 350 d'entre elles ont fait l'objet d'une amende pour infraction. Quelle est la probabilité qu'un passager quelconque soit un fraudeur ?

1.3.3 Approche subjective

Les probabilités déduites de cette approche s'appliquent à des expériences dont la caractéristique majeure est l'absence de répétition. La probabilité affectée au résultat se fonde sur les avis émis par des spécialistes du domaine concerné.

1.3.4 Définition axiomatique d'une probabilité

Soit Ω l'ensemble fondamental associé à une épreuve aléatoire. A chaque événement A est associé un nombre réel $P(A)$ appelé probabilité de l'événement A qui vérifient les axiomes de Kolmogorov :

Axiome 1 : La probabilité associé à tout événement A est un nombre positif ou nul

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Axiome 2 : La probabilité associée à l'ensemble des événements Ω est égale à l'unité

$$P(\Omega) = 1 \quad \Omega \quad \text{étant l'événement certain}$$

Axiome 3 : Si A et B sont incompatibles

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Remarque: 1.2.

L'Axiome 3 peut être étendu pour toute suite A_1, A_2, $\ldots$, A_n d'événements 2 à 2 incompatibles :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \\ \Leftrightarrow \quad P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \end{aligned}$$

Des axiomes de définition précédentes découlent les propriétés suivantes :

P$_1$ L'événement impossible est de probabilité nulle

$$P(\varnothing) = 0$$

P$_2$ La probabilité de l'union de deux événements s'obtient par la formule de Poincaré :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

P$_3$ La probabilité de l'événement complémentaire d'un événement quelconque A s'obtient par :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

P$_4$ Si un événement en implique un autre, sa probabilité est plus petite

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

P$_5$ La probabilité de la différence de deux événements s'obtient par la formule :

$$P(A \backslash B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

P$_6$ La probabilité de la différence symétrique entre deux événements A et B s'obtient par la formule :

$$P(A \Delta B) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

Une probabilité est donc une application des parties Ω dans l'ensemble des réels $[0, 1]$.

Exemple 1.17.

Sur 40 personnes répondant à une offre d'emploi de responsable de la gestion d'une unité de fabrication, 18 ont une expérience professionnelle antérieure, 20 ont un diplôme en matière de gestion, 15 ont à la fois un diplôme et l'expérience.

1. Quelle est la probabilité pour q'un des 40 candidats, tiré au hasard ait soit l'expérience, soit un diplôme, soit les deux ?
2. Quelle est la probabilité que ce candidat ait soit l'expérience, soit un diplôme, mais pas les deux ?
3. Quelle est la probabilité qu'un candidat n'ait ni diplôme ni expérience ?
4. Quelle est la probabilité qu'un candidat ayant un diplôme possède aussi l'expérience ?

Exemple 1.18.

La probabilité pour qu'un homme vive encore 10 ans est 1/4, et la probabilité pour que sa femme vive encore 10 ans est 1/3. Calculer la probabilité pour que (i) tous les deux vivent encore dans 10 ans, (ii) l'un d'eux au moins vive encore dans 10 ans, (iii) aucun d'eux ne vive encore dans 10 ans, (iv) seulement la femme vive encore dans 10 ans.

SECTION 1.4

Théorème des probabilité totales

1.4.1 Cas d'événements compatibles

Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $A \cap B \neq \varnothing \implies P(A \cap B) \neq 0$ on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.7}$$

1.4.2 Cas d'événements incompatibles

Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing \implies P(A \cap B) = 0$ on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1.8}$$

Exemple 1.19.

SECTION 1.5

Théorème de probabilités composées

Le théorème des probabilités composées permet de déterminer la probabilité de réalisation **simultanée** de deux événements. Ce théorème s'obtient à partir de la définition de la probabilité conditionnelle d'un événement.

1.5.1 Formule de probabilité conditionnelle

Soit Ω un ensemble d'événements sur lequel est défini une probabilité. Considérons les événements A et B tel que $P(B) \neq 0$. La probabilité pour qu'un événement A se produise, l'événement B s'étant produit auparavant ou en d'autre terme la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisée, que l'on note $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ a pour expression :

$$\boxed{P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \tag{1.9}$$

On peut de façon analogue définir la probabilité conditionnelle de l'événement B par rapport à l'événement A, à savoir :

$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \tag{1.10}$$

Propriété 1.1.

Les probabilités conditionnelles vérifient les axiomes de définitions énoncées précédemment :

$$0 \leq P_B(A) \leq 1$$

Soient A et C deux événements incompatibles : $P_B(A \cup B) = P_B(A) + P_B(C)$

$$P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) \qquad \text{et} \qquad P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

1.5.2 Formule de probabilité composée

La formule de probabilité composée permet de calculer la probabilité de réalisation simultanée de A et B (intersection). De la formule de la probabilité conditionnelle on peut écrire, si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(B) \times P(A/B)} \qquad \text{car } A \cap B = B \cap A \tag{1.11}$$

Et plus généralement

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$

Cette formule est "naturellement" utilisée dans les **arbres de probabilités**.

En comparant les probabilités $P(A)$ et $P(A/B)$ on peut déterminer si la réalisation de l'événement A influence ou non la réalisation de l'événement B. Ceci renvoie à la notion d'indépendance.

1.5.3 Événements indépendants

Deux événements événements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'affecte pas la probabilité de réalisation de l'autre. Dans ce cas et réciproquement on a :

$P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$ la réalisation de B n'affecte pas A et réciproquement

Le théorème des probabilités composées devient :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)} \quad \text{en cas d'indépendance} \tag{1.12}$$

Et par extension $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \cdots \times P(A_n)$.

Remarque: 1.3.

Il convient de distinguer les notions d'*indépendance* et d'*incompatibilité* :

- A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$: *les deux événements ne peuvent pas se réaliser simultanément.*
- A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$: *la réalisation d'un des deux événements n'affecte pas la probabilité de réalisation de l'autre.*
- L'indépendance est une propriété réciproque. Si A est indépendant de B, B est indépendant de A.

Exemple 1.20.

Soit une urne contenant 6 boules rouges, 8 boules vertes et 12 boules jaunes. On tire deux boules sans remise dans l'urne.

1. Quelle est la probabilité que la première boule soit jaune et la seconde rouge ? Représenter les scénarios possibles par un arbre de probabilité.
2. Répondre à la question précédente si on considère que le tirage avec remise. Conclure.

Exemple 1.21.

Sur les matières de BTS, 25% des étudiants échouent en mathématiques, 15% échouent en statistiques, et 10% échouent à la fois en mathématiques et en statistiques. On choisit un étudiant au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il ait échoué en mathématiques ou en statistiques ?
2. Quelle est la probabilité que l'étudiant n'ait échoué qu'en mathématiques ?

3. Quelle est la probabilité qu'il n'ait echoué aucune matière ?
4. Si l'étudiant a échoué en mathématiques, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en statistiques ?
5. Si l'étudiant a échoué en statistique, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en mathématiques ?
6. Peut-on considérer que les performances d'un étudiant en mathématiques et en statistique sont liées ? justifier

Exemple 1.22.

Une entreprise met en œuvre une nouvelle stratégie publicitaire. La probabilité que celui-ci soit couronnée de succès est évaluée à 0,70. La probabilité que le budget publicitaire ne soit pas dépassé est de 0,60. La probabilité que ces deux objectifs soient atteints est de 0,42.

1. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des deux objectifs soit atteint ?
2. Le budget publicitaire ne pouvant être dépassé quoiqu'il advienne, quelle est la probabilité de succès de la nouvelle stratégie publicitaire ?
3. Peut on considérer que le succès de la nouvelle stratégie est lié au dépassement du budget ?

Exemple 1.23.

Dans une entreprise, la probabilité pour qu'un personnel d'appui quitte l'entreprise dans l'année est 1/5 et la probabilité pour qu'un cadre quitte l'entreprise est 1/8. En supposant ces deux événements indépendants, calculer la probabilité que :

1. Le personnel d'appui et le cadre quittent l'entreprise
2. L'un des deux quitte l'entreprise
3. Ni le personnel d'appui, ni le cadre ne quittent l'entreprise
4. Le personnel d'appui seulement quitte l'entreprise

Exemple 1.24.

On considère une urne qui contient 8 boules indiscernables au toucher : 5 boules rouges et 3 boules blanches. On tire successivement 2 boules de l'urne ; si on tire une boule rouge, on ajoute une nouvelle boule blanche et si on tire une boule blanche, on ne rajoute rien du tout.

1. Représenter tous les scénarios possibles par un arbre de probabilité
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

Exemple 1.25.

Dans une urne qui contient deux boules rouges et trois boules noires, quatre personnes tirent successivement une boule sans la remettre : la première personne qui tire une boule rouge gagne. Calculer la probabilité de gain de chaque personne A, B, C, D.

Exemple 1.26.

Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard trois articles du lot, l'un après l'autre. Calculer la probabilité pour les trois articles ne soient pas défectueux.

SECTION 1.6

Formule de probabilité totale et théorème de BAYES

Supposons que les événements $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forment un *système complet d'événements* c'est à dire une partition de Ω ; les événements A_i ont une probabilité connue et strictement positive $(P(A_i) > 0)$, elles sont deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$) et leur réunion est Ω avec $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$. Soit B un événement quelconque. Alors :

$$\begin{aligned} B &= \Omega \cap B &&= (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) \cap B \\ & &&= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \end{aligned}$$

Où les $A_i \cap B$ s'excluent mutuellement. Par conséquent, on aboutit à la formule de probabilité totale

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)\right] \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) + \cdots + P(A_n)P(B/A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)} \quad \textit{Formule de probabilité totale} \tag{1.13}$$

La **formule de probabilité totale** permet de calculer la probabilité d'un événement B qui dépend d'autres événements $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. la formule de probabilité totale est utile dans les situations où il est difficile d'évaluer directement la probabilité d'un événement mais où il est assez facile de la calculer connaissant ses probabilités conditionnelles si certains événement sont réalisés.

Ceci nous permet de calculer les probabilités à postériori $P(A_i/B)$ après réalisation d'un événement B, à partir des probabilités à priori $P(A_k)$ $k = 1, \ldots, n$.

$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B/A_k)} \quad i = 1, 2, \ldots, n} \tag{1.14}$$

La formule (1.14) est appelée **formule de Bayes** [1] aussi connue sous le nom de la *formule des hypothèses ou des causes.*

Interprétation de la formule de Bayes :

L'application de ce théorème, appelé théorème des causes ou hypothèses, permet de modifier l'estimation initiale (ou à priori) des probabilités attribuées à différents événements en fonction d'une information nouvelle.

1. Thomas Bayes (1702-1761), révérend et mathématicien anglais.

Considérons l'événement B dont la réalisation peut être la conséquence de l'un des événements A_i appelés **causes**. Les informations disponibles permettent d'attribuer à B une probabilité de se réaliser :

$$\begin{array}{ccc} P_{A_1}(B) & \text{, dans l'éventualité de} & A_1 \\ P_{A_2}(B) & \text{, dans l'éventualité de} & A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{A_n}(B) & \text{, dans l'éventualité de} & A_n \end{array}$$

Les nombres $P(A_i)$ et $P_{A_i}(B)$ représentent l'état initial des relations entre B et les A_i. Une information nouvelle : la réalisation de l'événement B, remet en question, de façon partielle, l'état initial du système des probabilités : $P_{A_i}(B)$.

Ainsi les probabilités : $P(A_i)$ doivent être remplacées par des probabilités « sachant que B est réalisé » : $P_{A_i}(B)$, donnés par la formule de Bayes.

Il est ainsi possible de passer de probabilités « à priori »à des probabilités « à postériori », ou respectivement, « avant »et « après »l'information nouvelle.

Remarque: 1.4.

Le théorème de Bayes ne permet pas d'affecter des probabilités à des événements, mais de modifier les probabilités initialement attribués par l'un des moyens décrits précédemment.

Exemple 1.27. *Formule de probabilités totales*

Une compagnie d'assurance estime que les gens peuvent être répartis en deux classes : ceux qui sont enclins aux accidents et ceux qui ne le sont pas. Ses statistiques montrent qu'un individu enclin aux accidents a une probabilité de 0,4 d'en avoir un dans l'espace d'un an ; cette probabilité tombe à 0,2 pour les gens à risque modéré. On suppose que 30% de la population appartient à la classe à haut risque. Quelle est alors la probabilité qu'un nouvel assuré (signataire d'une police d'assurance) soit victime d'un accident durant l'année qui suit la signature de son contrat ? On considéra les événements A_1 « le signataire est enclin aux accidents » B « le signataire aura un accident dans l'année qui suit l'établissement du contrat ».

Exemple 1.28. *Probabilités de Bayes*

Soit deux machines M_1 et M_2 produisant respectivement 100 et 200 objets identiques. Malgré la manutention des machines, La machine M_1 produit 5% d'objets défectueux, la machine M_2 en produit 6%. On mélange les 300 objets dans une caisse et on tire un objet par les 300 objets fabriqués.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
2. On suppose que l'objet est défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il ait été fabriqué par la machine M_1 ?

On nomme les événements :

- A_1 "l'objet est fabriqué par la machine M_1"
- A_2 "l'objet est fabriqué par la machine M_2"
- D "l'objet est défectueux"

Exemple 1.29.

On considère trois urnes d'aspect identique et dont la composition est donnée par le tableau suivant :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	3	4
U_2	1	2
U_3	4	3

On choisit au hasard une urne dont on tire une boule. (1) Trouver la probabilité que la boule extraite soit blanche. (2) Trouver la probabilité que la boule blanche extraite provienne de U_2.

SECTION 1.7

Exercices

Exercice 1.1.

Un laboratoire a mis au point un alcootest dont les propriétés sont décrites ci-après :
— Il se révèle positif pour quelqu'un qui n'est pas en état d'ébriété dans 2% des cas ;
— Il se révèle positif pour quelqu'un qui est en état d'ébriété dans 96% des cas.

Dans un département donné, on sait que 3% des conducteurs sont en état d'ébriété. On note les événements suivants :
— A^+ : « *l'alcootest est positif* »
— $\bar{E}$: « *le conducteur est en état d'ébriété* »

Si le contrôle se révèle positif, quelle est la probabilité que ce conducteur ne soit pas malgré tout en état d'ébriété ? Que dire de la fiabilité du test ?

Exercice 1.2.

Sur 15 comptes de fournisseurs, il y a 5 pour lesquels il s'est glissé une erreur d'enregistrement.

1. Un auditeur choisit au hasard 2 comptes. Quelle est la probabilité qu'aucun des 2 comptes ne contienne d'erreur ?
2. Construire une structure arborescente représentant les différentes situations possibles et leur probabilité
3. Quelle est la probabilité de choisir 3 comptes sans erreur ?
4. Si l'auditeur choisit 2 comptes au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins une erreur ?
5. Si l'auditeur choisit 3 comptes au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il y ait au moins une erreur ?

Exercice 1.3.

Au Cameroun, sur 1000 petites et moyenne entreprises, 50 font faillite dans une année. Sur 1000 grandes entreprises, 3 font faillite dans l'année. Une entreprise fait faillite. Déterminer la probabilité que ce soit une P.M.E sachant qu'il y a 90% de P.M.E dans l'ensemble des entreprises.

Exercice 1.4.

Une société qui a la distribution exclusive d'un produit sur le territoire national désire étudier la relation pouvant exister entre la localisation géographique et le montant des achats annuels par client. Pour ce faire, elle utilise les statistiques collectées dans 3 de ses magasins à Douala, Yaoundé et Bafoussam et concernant 2000 clients.

	Montant moyen des achats			
Localisation	1 500	1 500≤< 4 000	4000 ≤	Total
Douala	150	200	100	450
Yaoundé	250	400	200	850
Bafoussam	300	300	100	700
Total	700	900	400	2000

1. Réaliser le tableau de distribution des probabilités. Mettre en évidence les distributions marginales des probabilités.
2. Réaliser les tableaux de distributions conditionnelles
3. Calculer la probabilité d'avoir un montant moyen inférieur à 1 500 F ou supérieur à 4000 F, la probabilité d'avoir un montant compris entre 1 500 F et 4000 F ou un achat à Bafoussam.
4. Calculer la probabilité d'avoir un montant supérieur à 4000 F et une localisation à Yaoundé
5. On reçoit une commande individuelle supérieure à 4000 F. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de Douala ? (utiliser le théorème de Bayes).

Exercice 1.5.

Un fabricant de jouet produit ses jouets avec trois machines A, B, C. 50% de la production totale est issu de la machine A, 30% de la machine B et 20% de la machine C. Les statistiques passées montrent que 4% des jouets produits par la machine A sont défectueux, 2% produit par la machine B sont défectueux et 4% des jouets produits par la machine C sont défectueux. On choisit un jouet au hasard dans la production.

1. Quelle est la probabilité que le jouet choisi soit défectueux ?
2. Si l'on se rend compte que le jouet est défectueux, quelle est la probabilité que ce jouet ait été fabriqué par la machine A ?

Exercice 1.6.

Une compagnie d'assurance automobile assure les conducteurs de tous âges. Un actuaire compilé les statistiques suivantes sur les conducteurs assurés de la compagnie :

Age du conducteur	**Probabilité d'un accident de circulation**	**Proportion des conducteurs assurés de la compagnie**
$16-20$	$0,06$	$0,08$
$21-30$	$0,03$	$0,15$
$31-65$	$0,02$	$0,49$
$66-99$	$0,04$	$0,28$

La compagnie sélectionne au hasard un conducteur qu'elle assure et s'avère qu'il est victime d'un accident de circulation. Calculer la probabilité que le conducteur était de la tranche d'âge 16-20 ans.

$$(A)\,0,13 \quad (B)\,0,16 \quad (C)\,0,19 \quad (D)\,0,23 \quad (E)\,0,40$$

Exercice 1.7. *Coût de la garantie*

Un appareil comporte deux pièces fragiles. Durant la période de garantie la probabilité qu'aucune ne tombe en panne est 0,25, la probabilité que les deux tombent en panne est 0,25 également et la probabilité que seulement l'une de des deux tombe en panne est 0,50. En cas de panne, la probabilité que le coût de la réparation s'élève à cent, trois cent ou six cent francs, est respectivement un demi, un tiers et un sixième.

1. Quelle est la probabilité que le coût de la garantie d'un appareil soit nul ?
2. Quelle est la probabilité que le coût de la garantie d'un appareil s'élève à :
   (a) 1 200 francs
   (b) 900 francs
   (c) 600 francs ?

Exercice 1.8. *Zone industrielle*

Une zone industrielle comporte 124 entreprises parmi lesquelles 54 sont commerciales dont 35 exportatrices, 45 sont industrielles, dont 29 exportatrices et 25 sont des entreprises prestataires de services.

On relève un nom au hasard parmi la liste des 124 entreprises, quelle est la probabilité qu'il s'agisse :

1. d'une entreprise commerciale
2. d'une entreprise exportatrice
3. d'une entreprise industrielle et exportatrice
4. d'une entreprise exportatrice sachant qu'il s'agit d'une entreprise industrielle
5. d'une entreprise non exportatrice sachant qu'elle est prestataire de services
6. d'une entreprise industrielle sachant qu'elle est exportatrice
7. d'une entreprise industrielle ou commerciale
8. d'une entreprise qui ne soit pas prestataire de service ?

On relève 3 noms au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils désignent :

1. une entreprise commerciale et deux prestataires de services,
2. une entreprise commerciale, une industrielle et une prestataire de services,
3. trois entreprises exportatrices sachant qu'il s'agit de trois entreprises industrielles,
4. une entreprise exportatrice et deux non exportatrices,
5. une entreprise exportatrice au moins,
6. au moins une entreprise commerciale ou exportatrice,
7. trois entreprises exportatrices dont une industrielle et les deux autres commerciales ?

Exercice 1.9. ***Crédit à la consommation***

Un organisme de crédit à la consommation attribue les crédits en fonction d'une grille d'analyse de la clientèle. Cette grille conduit à n'accorder de crédit qu'aux clients des trois premières catégories (A, B, C). Celles-ci représentent respectivement 45%, 30% et 25% des dossiers retenus. Une étude du service contentieux fournit les informations suivantes :

Catégorie	**Nombre de dossiers**		
	Réglés sans incidents	Réglés avec incidents	Insolvables
A	0,85	0,10	0,05
B	0,75	0,15	0,10
C	0,55	0,20	0,25

1. Quelle est la probabilité qu'un dossier accepté ait une suite sans problème ?
2. Quelle est la probabilité q'un dossier accepté s'avère insolvable ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client insolvable :
   (a) Soit un client de catégorie A
   (b) Soit un client de catégorie B
   (c) Soit un client de catégorie C ?
4. Quelle est la probabilité qu'un client dont le remboursement connait quelques incidents :
   (a) Soit un client de catégorie A
   (b) Soit un client de catégorie B
   (c) Soit un client de catégorie C ?
5. Quelle est la probabilité qu'un client remboursant le crédit sans aucun incident :
   (a) Soit un client de catégorie A
   (b) Soit un client de catégorie B
   (c) Soit un client de catégorie C ?
6. La grille d'analyse est-elle pertinente ?

On supposera maintenant que les catégories A, B, C représentent respectivement 25%, 60% et 15% des dossiers traités. Le suivi des dossiers fournit les résultats suivants :

Catégorie	**Nombre de dossiers**		
	règlements sans incidents	Règlements avec incidents	Insolvables
A	0,85	0,10	0,05
B	0,75	0,15	0,10
C	0,70	0,20	0,10

Reprendre les questions 1 à 6.

<u>Exercice</u> 1.10. *Étude de différents conditionnements (théorème de Bayes)*

Le service commercial d'une société coopérative s'interroge sur les différentes formes de conditionnement de son vin. Le vin est vendu sous trois formes :

— En vrac ;
— En bouteilles ;
— En bag *in box* (BB)

Il a défini trois segments de clientèles :

- une clientèle locale fidèle qui représente 70% des achats ;
- les touristes français : 20% des achats ;
- les touristes étrangers : 10% des achats.

Le type de conditionnement choisi par chaque type de clientèle est donné dans le tableau suivant :

	Clientèle		
Conditionnement	Locale	Française	Etrangère
Vrac	0,8	0,3	0,2
Bouteille	0,1	0,4	0,6
BB	0,1	0,3	0,2

1. Quelle est la proportion de vin vendu : (a) en vrac (b) en bouteille (c) en bag in box.
2. Quelle est la probabilité qu'un achat de bouteilles soit réalisé par un : (a) client local (b) touristique français (c) touriste étranger
3. Quelle est la probabilité qu'un achat de vrac soit réalisé par la clientèle locale ?
4. Quelle est la probabilité qu'un achat en BB soit réalisé par : (a) un touriste français (b) un touriste étranger
5. Le service clientèle pense que, dans l'avenir, les touristes français représentent 40 % de la clientèle et les touristes étrangers 20%. Quelles seront alors les parts des différents conditionnements ?
6. Non seulement la structure de la clientèle devient celle de la question 5 mais les proportions d'achats en bouteilles et BB par la clientèle locale doublent aux dépens du vrac. Quelles seront les parts des différents conditionnements ?

Chapitre 2

Variable aléatoire

Soit un univers Ω muni d'une probabilité. On appelle variable aléatoire à valeurs réelles toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \to & x \end{array}$$

Par exemple, en lançant deux dés, X peut représenter la somme des points amené par les deux dés. De même en considérant un échantillon d'étudiants, X peut correspondre au nombre d'heure d'étude par étudiant ou au poids d'un étudiant.

La notation $X(\omega) = x$ signifie que x est la valeur associée au résultat ω par la variable aléatoire X que l'on écrira sous la forme $X(\omega_1) = x_1$, $X(\omega_2) = x_2$, $X(\omega_3) = x_3 \ldots$.

Il y a deux types de variables aléatoires :

- Les **variables aléatoires discrètes** : dont les valeurs sont finies ou infinies dénombrable.
- Les **variables aléatoires continues** : dont les valeurs sont un intervalle de $\mathbb{R}$.

SECTION 2.1

Variables aléatoire discrète

2.1.1 Définition

Une variable aléatoire est dite discrète si elle peut prendre un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs entières.

Exemple 2.1.

Nombre fini de valeurs : Le nombre de points réalisés en un lancer de dé. L'ensemble des valeurs est : 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Nombre infini dénombrable de valeurs : Le nombre de lancers de dé nécessaire pour obtenir un 2. L'ensemble dénombrable des réalisations est : 1, 2, 3,. . .

2.1.2 Loi de probabilité

Une variable aléatoire X est totalement définie par sa **loi de probabilité**. Celle-ci est donnée par la distribution des probabilités associées aux valeurs prises par X :

- Valeurs prises par X :

$$X = \{x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n\}$$

- Probabilités que X prenne ces valeurs :

$$p(X = x_i) = p(x_i) = p_i \quad \forall i = 1,\, 2,\, 3\, \ldots,\, n \quad \text{avec} \quad 0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Habituellement, on représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X par un *tableau* mais aussi par une fonction ou un **graphe** (diagramme en bâton).

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

$$\begin{array}{llll} \text{avec} & 0 \leq p_i \leq 1 & & i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \\ \text{et} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1 & \text{ou} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{array}$$

$$p(X = x_i) = \begin{cases} p_1 & \text{si} \quad x = x_1 \\ p_2 & \text{si} \quad x = x_2 \\ p_3 & \text{si} \quad x = x_3 \\ \vdots & \quad\quad \vdots \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Figure 2.1 – Graphe fonction de masse

Exemple 2.2.

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

X	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,3$	$0,4$	$0,2$

Représenter sa fonction de masse et son graphe.

Solution

Figure 2.2 – Graphe fonction de masse

$$p(x_i) = p(X = x_i) = \begin{cases} 0,1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0,3 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0,4 & \text{si} \quad x = 3 \\ 0,2 & \text{si} \quad x = 4 \\ 0 & \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exemple 2.3.

Une association d'anciens étudiants de l'Institut Universitaire de la Côte a interrogé 100 adhérents ayant le statut de cadre. L'acquisition de ce statut s'est effectuée au terme de : 1 année pour 5 d'entre eux ; 2 années pour 10 d'entre eux ; 3 années pour 23 d'entre eux ; 4 années pour 28 d'entre eux ; 5 années pour 18 d'entre eux ; 6 années pour 9 d'entre eux ; 7 années pour 7 d'entre eux.

Désignons par X la variable aléatoire « *terme d'obtention du statut de cadre* ». L'ensemble des valeurs de X est :

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$$

Cet ensemble est fini. Déterminons les probabilités associées à chacune des valeurs possibles de X.

Variable aléatoire X	1	2	3	4	5	6	7
$p(x_i)$	$0,05$	$0,10$	$0,23$	$0,28$	$0,18$	$0,09$	$0,07$

2.1.3 Fonction de répartition

La fonction de répartition donne la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x. Sa représentation s'effectue à partir des probabilité cumulées croissantes. La fonction de répartition F définie par :

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X < x) \\ F(x) &= \sum_{x_i < x} p(x_i) \end{aligned}$$

$F(x)$ est positive, monotone croissante de 0 à 1 et telle que $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Lorsque l'ensemble des valeurs possibles, ou ensemble de définition de la variable aléatoire X est fini : $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ alors $F(x)$ est nulle sur l'intervalle $]-\infty, x_1[$ et égale à 1 sur l'intervalle $[x_n, +\infty[$.

La fonction de répartition garde la même valeur $F(x)$ pour tout intervalle $[x_i, x_{i+1}[$. Au point d'abscisse x_i, elle fait un saut égal à la probabilité attachée à la valeur de x_i. Sa représentation graphique prend la forme d'un **diagramme en escalier**.

Si X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est :

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

alors la fonction de répartition est déterminée de façon unique par la loi de probabilité comme suit :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1 \\ p_1 & \text{si} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{si} \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} & \text{si} \quad x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{si} \quad x > x_n \end{cases}$$

Exemple 2.4.

La fonction de répartition $F(x)$ de l'application numérique précédente est représentée à partir de :

Variable aléatoire X	**Probabilités**	$F(x)$
x_i	$p(x_i)$	$P(X < x_i)$
1	$0,05$	0
2	$0,10$	$0,05$
3	$0,23$	$0,15$
4	$0,28$	$0,38$
5	$0,18$	$0,66$
6	$0,09$	$0,84$
7	$0,07$	$0,93$
> 7		1
	1	

Diagramme en escalier *(en séance de cours)*

Remarque: 2.1.

La représentation graphique de la fonction de répartition permet de déterminer, par simple lecture, la probabilité $(X < x_0)$. Ainsi :

- La probabilité *« être cadre moins de 5 ans après sa sortie de l'IUC »* est notée :

$$P(X < 5) = F(5) = 0,66$$

Cette valeur est obtenue en traçant une perpendiculaire à l'axe des abscisses qui part de la gauche immédiate du point d'abscisse 5 pour rencontrer la fonction de répartition en un point d'ordonnée 0,66, probabilité que $(X < 5)$;

- La probabilité « *être cadre 5 ans au plus après sa sortie de l'IUC* » est notée :

$$P(X \leq 5) = P(X < 6) = F(6) = 0,84$$

- La probabilité « *être cadre pus de 3 ans après sa sortie de l'IUC* » est notée :

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) \\ &= 0,28 + 0,18 + 0,09 + 0,07 = 0,62 \end{aligned}$$

Ou en posant :

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - F(4) \\ &= 1 - 0,38 = 0,62 \end{aligned}$$

- La probabilité « *être cadre plus de 3 ans mais au plus 5 ans après sa sortie de l'IUC* » est notée :

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 5) &= P(X \leq 5) - P(X \leq 3) \\ &= F(6) - F(4) \\ &= 0,84 - 0,36 = 0,46 \end{aligned}$$

Cette probabilité est également déterminée à partir de :

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 5) &= P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0,28 + 0,18 = 0,46 \end{aligned}$$

• La probabilité « *être cadre plus de 3 ans mais moins de 5 ans après sa sortie de l'IUC* » est notée :

$$\begin{aligned} P(3 < X < 5) &= P(X < 5) - P(X \leq 3) \\ &= F(5) - F(4) \\ &= 0,66 - 0,38 = 0,28 \end{aligned}$$

Cette probabilité est directement obtenue à partir de :

$$P(3 < X < 5) = P(X = 4) = 0,28$$

La fonction de répartition permet de calculer la probabilité d'un intervalle. Les probabilités de l'intervalle délimité par les réels a et b sont données par :

$$\begin{aligned} p(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) - p(X = a) \\ p(a < X \leq b) &= F(b) - F(a) + p(X = b) - p(X = a) \\ p(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) - p(X = a) \\ p(a \leq X < b) &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

On peut déduire que :

$$\begin{array}{lll} p(X \leq a) & = p(X < a) + p(X = a) & = F(a) + p(X = a) \\ p(X > a) & = 1 - p(X \leq a) & = 1 - F(a) - p(X = a) \\ p(X \geq a) & = 1 - p(X < a) & = 1 - F(a) \\ p(X < a) & = & = F(a) \end{array}$$

SECTION 2.2

Caractéristiques d'une variable aléatoire discrète

2.2.1 Moment non centré et moment centré d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$)

On appelle **moment** (non centré) **d'ordre** r de la variable aléatoire X, le nombre :

$$m_r(X) = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \, p_i \tag{2.1}$$

On appelle **moment centré d'ordre** r de la variable aléatoire X, le nombre :

$$\mu_r(X) = E\left[(X - E(X))^r\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \left[x_i - E(X)\right]^r \tag{2.2}$$

Remarque: 2.2.

On appelle variable **aléatoire centrée** de la variable aléatoire X la variable définie par $X - E(X)$.

2.2.2 Espérance mathématique et variance et d'une variable aléatoire

L'**espérance mathématique** d'une variable aléatoire X notée $E(X)$ est la somme des valeurs prises par X pondérées par les probabilités qui leur sont associées.

L'espérance mathématique est égale au moment (non centré) d'ordre 1 $m_1(X)$.

$$E(X) = m_1(X) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \cdots + x_n \cdot p(x_n)$$
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i) \tag{2.3}$$

La **variance** d'une variable aléatoire est égale au moment centrée d'ordre 2. Elle se note $V(X)$.

$$\mu_2 X = V(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\ [x_i - E(X)]^2 \tag{2.4}$$

L'écart-type d'une variable aléatoire est égale à la racine carrée de la variance, et mesure la dispersion autour de $E(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{2.5}$$

Remarque: 2.3.

Il est commode pour le calcul de la variance d'utiliser la **formule de KOENIG-HUYGENS** :

$$V(X) = \sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(x_i) - [E(X)]^2 = m_2(X) - [m_1(X)]^2 \tag{2.6}$$

Propriété 2.1.

Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** et a une constante . On a les propriétés suivantes :

Espérance mathématique $E(X)$		**Variance** $V(X)$	
$E(a)$	$= a$	$V(a)$	$= 0$
$E(aX)$	$= aE(X)$	$V(aX)$	$= a^2V(X)$
$E(X+Y)$	$= E(X) + E(Y)$	$V(X+Y)$	$= V(X) + V(Y)$
$E(X+a)$	$= E(X) + a$	$V(X+a)$	$= V(X)$
$E(XY)$	$= E(X)\,E(Y)$	$V(X-Y)$	$= V(X) + V(Y)$

Si X et Y ne sont pas indépendants alors :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,COV(X\,,\,Y) \quad \text{avec} \quad COV(X\,,\,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right]}$$

SECTION 2.3

Exercices

<u>Exercice</u> 2.1.

Un article en stock fait l'objet d'une demande journalière X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,25$	$0,15$	$0,10$	$0,05$

1. Déterminer la fonction de masse et représenter graphiquement cette fonction (par un diagramme en bâton)
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X et représenter graphiquement
3. Trouver la probabilité qu'une demande dépasse 4
4. Trouver la probabilité qu'une demande soit inférieure à 2
5. Calculer $p(1 \leq X \leq 4)$ et $p(X \geq 3)$
6. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type, puis interpréter

Exercice 2.2.

Lors d'une enquête, on a interrogé 5 hommes et 3 femmes. On choisit au hasard et sans remise les personnes une à une jusqu'à obtention d'un homme. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Déterminer les valeurs de X et sa loi de probabilité.

Exercice 2.3.

Dans une loterie, cent billets sont proposés. Parmi ces billets 5 gagnent chacun un lot de 1 000 F ; 10 gagnent un lot de 500 F, 15 gagnent un lot de 200 F, 20 gagnent un lot de 100 F les autres billets ne gagnent rien. Soit la variable aléatoire $X=$ « *gain du joueur* ».

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X
2. Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X
3. Calculer $P(X \geq 1000)$ et $P(X < 200)$
4. Calculer et interpréter $E(X)$ et $\sigma(X)$

Exercice 2.4.

Un tenancier présente le jeu suivant :

Tout joueur effectue une mise égale à 34 F, il tire ensuite un jeton parmi 17 numérotés respectivement 1, 2, 3, . . . , 17.

— Si le numéro du jeton tiré est un multiple de 3, le joueur reçoit 20 F
— Si ce numéro est un multiple de 5 (15 excepté), le joueur reçoit 50 F
— Si ce numéro est un multiple de 7, le joueur reçoit 88 F
— Si ce numéro est le 8, le joueur reçoit 134 F.

Le joueur est perdant dans toutes les autres éventualités et dans ce cas ne reçoit rien.

1. Enoncer la loi de probabilité de la variable aléatoire "*somme reçus par le joueur*".
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de cette variable
3. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins 50 F ?
4. Calculer le bénéfice moyen[1] réalisé par l'organisateur du jeu après que 100 joueurs aient chacun joué une partie.

1. Bénéfice moyen = (mise d'un joueur − espérance mathématique du montant du lot)$\times$ nombre de joueur

SECTION 2.4

Exercices

<u>Exercice</u> 2.5. ***Trois loteries***

On vous propose de jouer à trois loteries organisées de la façon suivante :

Loterie	Billets		Gain	Nombre de billets
	Nombre	Prix		
1	200	1	0	150
			1	25
			2	25
2	200	10	0	150
			10	25
			20	25
3	200	1	0	100
			0,5	50
			1	25
			2	25

1. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type du gain des loteries 1 et 2. Comparer
2. Est-il raisonnable d'emprunter pour jouer à ces loteries ?
3. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type du gain de la loterie 3 et indiquer quelle loterie parmi les trois est la plus favorable au joueur
4. On organise une vente liée permettant, pour 2 euros, d'acquérir un billet de la loterie 1 et un billet de la loterie 3. Déterminer la fonction de distribution du gain.

SECTION 2.5

Variable aléatoire continue

L'étude de problèmes économiques peut conduire à présenter les résultats possibles sous forme d'intervalles.

Une variable aléatoire est dite **continue** quand l'ensemble des valeurs possibles qu'elle peut prendre est défini par toutes les valeurs d'un intervalle réel.

Le nombre de valeur d'un intervalle étant infini, la probabilité attachée à un point tend intuitivement vers 0 :

$$P(X = x) = 0$$

Exemple 2.5.

Soit l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un individu au hasard dans une ville. On définit la variable aléatoire X par la *"taille de l'individu"*. la variable aléatoire X est elle continue ?

2.5.1 Densité de probabilité

Pour une variable aléatoire continue, la probabilité attachée à un point est toujours nulle : on dit que la probabilité ne charge aucun point ($p(X = x) = 0$). par exemple la probabilité qu'une ampoule meure exactement à une heure très précise donnée est nulle.

C'est pourquoi pour une variable aléatoire continue, on s'intéresse plutôt à la probabilité que le résultat x de X tombe dans un intervalle $[a\,, b]$ choisi aussi petit que l'on veut.

Le calcul de cette probabilité se fait à partir de la **fonction densité de probabilité** f.

La **densité de probabilité** f d'une variable aléatoire X est une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

— f est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf peut être en un nombre fini ou dénombrable de points pour lesquels elle admet une limite finie à gauche et à droite)

— $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ *(fonction de répartition)*

Une V.A. continue peut être définie par la donnée d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés de la définition ci-dessus. La fonction de répartition F et les probabilités se calculant par intégration. On a en particulier :

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $p(X = x) = 0$, donc $p(X \leq x) = P(X < x)$

— Pour tout réels a et b $(a \leq b)$, $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$

La fonction de répartition $F(x) = p(X < x)$ est une fonction continue et croissante et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet pour dérivée, la fonction densité de probabilité.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \;\Leftrightarrow\; F' = f \tag{2.7}$$

Exemple 2.6.

La fonction densité de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si} \quad x \in [0, +\infty[\\ 0 & \quad\text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Montrer que f est effectivement une densité de probabilité
2. Déterminer la fonction de répartition
3. Calculer $p(-3 \leq X \leq 4)$

Exemple 2.7.

La fonction densité de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} c(2-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \quad\text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité
2. Déterminer la fonction de répartition de X
3. Déterminer par le calcul et graphiquement les probabilités suivantes : $p(X > 1/2)$ $\quad p(0 \leq X \leq 1,75)$

SECTION 2.6

Caractéristiques d'une variable aléatoire continue

2.6.1 Moment (non centré) d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$)

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f, on définit :

- **Moment non centré d'ordre** r ($r \in \mathbb{N}$)

$$m_r(X) = \int_D x^r f(x)\,dx \quad \text{où} \quad D \text{ est le domaine de définition} \tag{2.8}$$

- **L'espérance mathématique**

$$m_1(X) = E(X) = \int_D x\,f(x)\,dx \tag{2.9}$$

L'espérance mathématique est le moment non centré d'ordre 1

2.6.2 Moment d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$)

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f, on définit :

- **Moment centré d'ordre** r ($r \in \mathbb{N}$)

$$\mu_r(X) = \int_D (x - E(X))^r f(x)\,dx \quad \text{où} \quad D \text{ est le domaine de définition} \tag{2.10}$$

- **La variance**

$$V(X) = \mu_X^2 = \int_D (x - E(X))^2 f(x)\,dx \tag{2.11}$$

La variance est le moment centrée d'ordre 2.

SECTION 2.7

Exercices

<u>Exercice</u> 2.6.

Test sur les variables aléatoires continues

1. Quelles conditions doit vérifier une fonction f pour être densité de probabilité d'une variable aléatoire continue ?
2. Quel est le lien entre densité de probabilité et fonction de répartition ?
3. Connaissant la fonction de répartition F de X, comment calculer $p(a < X < b)$?
4. Quelle formules permettent de calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire continue X de densité f ?

<u>Exercice</u> 2.7.

Une variable aléatoire continue de densité de probabilité $f(x) = (1/2)(2 - x)$ est définie sur l'intervalle $[0\,,\,2]$:

1. Vérifier que l'aire entre la courbe de densité de probabilité et l'axe des abscisses est égale à 1 ;
2. Représenter graphiquement $F(x)$ et $f(x)$;
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

<u>Exercice</u> 2.8.

La durée du processus d'atterrissage d'un avion est le temps T, mesuré en minutes, qui s'écoule depuis la prise en charge par la tour de contrôle jusqu'à l'immobilisation de l'avion sur la piste. Dan un certain aéroport, on estime que T est une v.a. continue dont la densité de probabilité est la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(t) = te^{-t} & \text{si} \quad t > 0 \\ f(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$
2. Déterminer la fonction de répartition F de T
3. Quelle est la probabilité que :
   — T dépasse 2 minutes
   — T soit compris entre 45 secondes et 3 minutes
   — T soit inférieur à 4 minutes sachant qu'il dépasse 2 minutes ?

Chapitre 3

Les lois de probabilité usuelles

Les lois de distribution des phénomènes physiques, économiques, etc. sont innombrables et chaque cas semble particulier. Mais en réalité, on se rend compte que la grande majorité des phénomènes statistiques peuvent être décrits par un nombre réduit de **modèles probabilistes**. Il importe dans un premier temps de pouvoir décrire de façon adéquate le mécanisme du processus réel étudié (temps d'attente, nombre de passages dans un intervalle de temps, nombre d'essais avant d'obtenir tel résultat, etc.) Dans un second temps, une fois cette caractérisation réalisée, nous pouvons choisir la loi théorique qui paraît mieux convenir pour modéliser le phénomène observé. Une fois la loi théorique identifiée et validée, il sera possible d'expliquer et d'interpréter le phénomène observé, voire de prédire les résultats futurs de l'expérience.

Nous allons évoquer dans ce chapitre les lois usuelles couramment utilisées et permettant de modéliser une grande variété de phénomènes. A ce niveau, le travail le plus important sera de reconnaître le type de loi correspondant à la variable aléatoire étudiée et de déterminer ses paramètres. La démarche est la même : présenter d'abord le schéma de formation de la v.a., et définir la loi de probabilité en mettant en exergue les paramètres de la loi.

Ce *"catalogue"* des lois usuelles fait une distinction entre **lois discrètes** et **lois continues** admettant une densité de probabilité.

SECTION 3.1

Lois de probabilité discrètes

3.1.1 Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli lorsqu'elle est liée à une expérience aléatoire qui a exactement deux résultats possibles : succès (S) ou échec (E).

Par exemple, dans le domaine du contrôle de la qualité, un produit peut être classé comme bon ou mauvais.

La variable de Bernoulli peut prendre deux valeurs numériques, 0 ou 1, où 1 correspond à l'événement qualifié de *"succès"* et 0 à l'événement considéré comme *"échec"* avec les probabilités $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$, où p représente la probabilité de réalisation de l'événement *"succès"*.

$$\begin{aligned} X &= \{0,\, 1\} \\ P(\text{succès}) = P(X = 1) &= p \\ P(\text{echec}) = P(X = 0) &= 1 - p \end{aligned}$$

On note

$$X \sim \mathcal{B}(1,\, p)$$

Avec

$$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x} \tag{3.1}$$

Caractéristiques d'une loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli possède les caractéristiques suivantes :

Distribution de bernoulli	
Espérance mathématique	$E(X) = p$
Variance	$V(X) = pq$
Ecart-type	$\sigma = \sqrt{pq}$

***Preuve*.** ■

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{2} x_i\, p(x_i) && = (0 \times q) + (1 \times p) && = p \\ V(X) &= \sum_{i=1}^{2} [x_i - E(X)]^2\, p(x_i) && = [(0-p)^2 \cdot q] + [(1-p)^2 \cdot p] && = pq \end{aligned}$$

La loi de Bernoulli est une loi discrète qui est liée à de nombreuses autres lois, telles que les lois binomiale, géométrique et de Pascal. La loi de Bernoulli représente le résultat d'un essai. Des suites d'essais de Bernoulli indépendants génèrent les autres lois. Ainsi, la loi binomiale modélise le nombre de succès sur n essais, la loi géométrique modélise le nombre de défaillances avant le premier succès et la loi de Pascal modélise le nombre de défaillances avant le $x^{\text{è}}$ succès.

3.1.2 La loi Binomiale

Considérons les épreuves répétées et indépendantes d'une même expérience n'ayant que deux résultats possibles (épreuve de Bernoulli). On suppose que l'un de ces résultats correspond à un *"succès"* et l'autre à un *"échec"* . Soit p la probabilité de succès. Par voie de conséquence, la probabilité d'échec est $q = 1-p$. Si l'on s'intéresse qu'au **nombre de succès**, et non à l'ordre dans lequel ceux-ci se réalisent, alors la variable aléatoire X donnant le *nombre de succès observés* suit une distribution (loi) binomiale.

On peut énoncer le théorème suivant :
La probabilité pour qu'il y ait exactement x succès lors de n épreuves répétées est :

$$p(X = x) = C_n^x \, p^x (1 - p)^{n-x} \qquad X = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \ldots,\, n$$

On peut observer que la probabilité de n'avoir aucun succès est q^n et que par conséquent, la probabilité d'avoir au moins un succès est $1 - q^n$.

Une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale est généralement notée :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) \tag{3.2}$$

Pour dire que X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Où n est le nombre d'épreuves, p est la probabilité attachée au succès.

Caractéristiques d'une loi Binomiale

La loi Binomiale possède les caractéristiques suivantes :

Distribution binomiale	
Espérance mathématique	$E(X) = np$
Variance	$V(X) = npq$
Ecart-type	$\sigma = \sqrt{npq}$

Propriété 3.1.

Si $X \sim \mathcal{B}(n_1,\, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2,\, p)$ alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2,\, p)$

Remarque: 3.1. *Pour x variant de 0 à n, la somme des probabilités est égales à 1 :*

$$\sum_{x=0}^{n} p(X = x) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x \, p^x (1 - p)^{n-x}$$

Le recours au binôme de Newton permet d'établir que :

$$\sum_{x=0}^{n} C_n^x \, p^x (1 - p)^{n-x} = (p + q)^n$$

D'où

$$\sum_{x=0}^{n} C_n^x \, p^x (1 - p)^{n-x} = (p + q)^n = 1^n = 1 \qquad car \quad (p + q) = 1$$

Remarque: 3.2. *Il est équivalent de considérer qu'une variable aléatoire binomiale est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli ou qu'une variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire qui suit une loi de paramètres : 1 et p noté $\mathcal{B}(1,\, p)$. Dans ce cas dernier cas, le nombre d'épreuves est $n = 1$.*

Exercice d'application 3.1.1.

Le dirigeant d'une entreprise constate que 70% des cadres embauchés sont encore dans l'entreprise 5 ans après. Il recrute 6 jeunes cadres. Calculer la probabilité que 5 ans après :

1. Les 6 nouveaux cadres soient encore dans l'entreprise
2. Les 6 nouveaux cadres aient quittés l'entreprise
3. 4 d'entre eux aient quitté l'entreprise
4. 3 d'entre eux aient quitté l'entreprise

Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

3.1.3 Loi géométrique

On effectue des épreuves successives et indépendantes jusqu'à la réalisation de l'événement étudié et on note X le nombre (aléatoire) d'épreuves nécessaires pour obtenir l'événement étudié la 1ère fois.

Alors X suit une **loi géométrique** de paramètre p où p est la probabilité de réalisation de cette événement.

$$P(X = x) = p\,(1 - p)^{x-1} = p\,q^{x-1} \qquad X = \{1,\, 2,\, 3,\, \ldots\} \tag{3.3}$$

Et on note :

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

La loi géométrique représente le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p nécessaires pour obtenir le 1er *"succès"*. Le nom de loi géométrique provienne du fait que les probabilités forment une progression géométrique. Elle possède les **caractéristiques** suivantes :

Distribution géométrique	
Espérance mathématique	$E(X) = \dfrac{1}{p}$
Variance	$V(X) = \dfrac{q}{p^2}$
Ecart-type	$\sigma = \sqrt{\dfrac{q}{p^2}}$

3.1.4 Loi de Pascal

On effectue des épreuves successives et indépendantes jusqu'à la réalisation de l'événement étudié r fois. La v.a. X correspond au nombre (aléatoire) d'épreuves nécessaires pour obtenir l'événement étudié r fois.

Alors X suit une **loi de Pascal** de paramètre p où p est la probabilité de réalisation de cette événement.

$$P(X = x) = C_{x-1}^{r-1}\, p^r\, (1 - p)^{x-r} \qquad X = \{r,\, r+1, \ldots\} \tag{3.4}$$

Et on note :

$$X \sim \mathcal{P}(r,\, p)$$

La loi de Pascal représente le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p nécessaires pour obtenir un nombre r de succès. Si $r = 1$, on retrouve la loi géométrique de paramètre p qui représente le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le 1er *"succès"*.

Caractéristiques de la loi de Pascal

Distribution de Pascal	
Espérance mathématique	$E(X) = \dfrac{r}{p}$
Variance	$V(X) = \dfrac{r\,q}{p^2}$
Ecart-type	$\sigma = \sqrt{\dfrac{r\,q}{p^2}}$

Remarque: 3.3.

La loi géométrique et la loi de Pascal interviennent particulièrement en contrôle de qualité mais aussi dans la surveillance des événements dont une certaine fréquence de survenue est interprétée en terme de signal d'alarme.

3.1.5 Loi de Poisson

La loi de Poisson est une loi de probabilité utilisée lorsqu'il s'agit de déterminer des probabilités de succès relatives à des événements que l'on considère comme répartis dans le temps ou l'espace et dont la probabilité de réalisation est faibles. La loi de Poisson est parfois appelée la loi des événements rares ou des petits nombres.

La distribution de Poisson se définit par :

$$p(X = x) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!}\,, \qquad X = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \qquad \mathrm{e} = 2,71828 \tag{3.5}$$

Où $\lambda > 0$ est une constante quelconque. Cette loi de distribution infiniment dénombrable apparaît dans de nombreux phénomènes naturels, comme le nombre d'appels téléphoniques par minute dans un central téléphonique, le nombre de fautes d'impression par page dans un livre, nombre d'arrivée de clients à un guichet, nombre d'accidents sur une portion de route, le nombre d'arrivées d'avions à un aéroport, d'arrivées de camions à un poste de chargement ou de déchargement . . .

Une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson est généralement notée :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

La loi de Poisson a une certaine analogie avec la loi Binomiale. la différence réside dans le fait qu'ici les événements sont étudiés dans leur apparition sur un intervalle continu (de temps et d'espace) au lieu d'être reliés à des épreuves discontinues. Et comme pour la loi Binomiale, on fait l'hypothèse que les événements sont indépendants.

Caractéristiques de la loi de Poisson

Loi de Poisson	
Espérance mathématique	$E(X) = \lambda$
Variance	$V(X) = \lambda$
Ecart-type	$\sigma = \sqrt{\lambda}$

Remarque: 3.4. *Le paramètre de la loi de Poisson est à la fois l'espérance mathématique et la variance :* $E(X) = V(X) = \lambda$.

Remarque: 3.5. *La somme de n variables de Poisson est une variable de Poisson. Désignons par X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires de Poisson indépendantes, de paramètres respectifs :* λ_1, λ_2, , λ_n. *La variable aléatoire* $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + +\lambda_n)$

Remarque: 3.6. ***Processus de Poisson***

La notion de processus implique que la réalisation d'un événement soit lié à la variable temps. Son existence est fondée sur la réunion de trois conditions suivantes :

— La probabilité de réalisation de l'événement considérée au cours d'un intervalle de temps infiniment petit dt est proportionnelle à sa durée ;

— Cette probabilité est indépendante du nombre de réalisations antérieures de l'événement et demeure constante au cours de la période d'observation ;

— La probabilité que l'événement se réalise plus d'une fois dans le même intervalle de temps dt est faible.

Le nombre X d'événements réalisés au cours d'un intervalle de temps T est une variable de Poisson de paramètre :

$$\lambda = p \cdot n$$

Avec

$n = \dfrac{T}{dt}$, rapport de proportionnalité entre T et dt ;

p, nombre constant de réalisations au cours de l'intervalle de temps dt

Exemple 3.1.

Les services d'urgence d'un hôpital sont sollicités deux fois tous les quarts d'heure. Calculer les probabilités que le nombre de cas d'urgence en une heure soit de 12, supérieur à 12.

SECTION 3.2

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Dans la loi Binomiale, lorsque le nombre n d'épreuves devient très grand, la loi de Poisson propose une bonne approximation de la loi binomiale.

Considérons une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n\,, p)$.

Si $n \to \infty$ et $p \to 0$ alors le produit $\lambda p \to \lambda > 0$. La loi binomiale converge vers la loi de Poisson.

$$\mathcal{B}(n,\, p) \to \mathcal{P}(\lambda)$$

Dans la pratique, l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson est possible lorsque :

$$n \geq 50 \;\; , \;\; p < 0,1 \quad \text{et} \quad np \leq 5 \tag{3.6}$$

Lorsqu'on utilise cette approximation, l'espérance mathématique de la loi de Poisson , λ, est alors égale à l'espérance mathématique de la loi binomiale

$$\lambda = \text{espérance d'une v.a. binomiale} = np$$

.

Exemple 3.2.

La société Alpha fabrique des microprocesseurs destinés exclusivement aux producteurs de micro-ordinateurs. La norme imposée par les clients et de deux pièces défectueuses pour 500. Le contrôleur de la société Alpha prélève 1000 pièces d'une série achevée. Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit (a) nul, (b) au plus égal à 3, (c) supérieur à 4.

SECTION 3.3

Exercices

Exercice 3.1. *Loi binomiale*

La probabilité pour q'une ampoule électrique ait une durée de vie supérieure à 2 ans est égale à 0,2. Sachant qu'un lustre possède 5 ampoules. Calculer la probabilité

1. De ne pas changer d'ampoules en deux ans
2. De changer toutes les ampoules en deux ans

Exercice 3.2. *Loi géométrique*

Pour accéder à un guichet automatique, il faut utiliser une carte magnétique et un code confidentiel. Un client tapant un code au hasard est refusé 999 fois sur 1000. Soit X le nombre d'essais nécessaires pour accéder au guichet.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer $P(X = 1)$
3. Sachant qu'au bout de trois essais infructueux, la carte est confisquée, calculer la probabilité d'accéder au guichet au hasard ?
4. Combien faut-il d'essais en moyenne pour accéder au guichet par hasard ?

Exercice 3.3. *Loi de Pascal*

Lors d'un test d'accès à un ordinateur central par réseau informatique, on a constaté que 95% des essais permettaient une connexion correcte. Une entreprise doit se connecter 4 fois dans la journée pour la mise à jour de ses fichiers. Soit X le nombre d'essais nécessaires pour se connecter 4 fois :

1. calculer $P(X = 4)$ et interpréter
2. Calculer la probabilité de dépasser 6 essais
3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ et interpréter

Exemple 3.3. *loi de géométrique*

Une société possède une photocopieuse. La firme qui l'a vendue offre un service de réparation gratuit, à condition que ces réparations gratuites soient séparées d'au moins 31 jours (sinon elles sont payantes). On estime que la probabilité d'une panne est de 0,01 par jour d'utilisation. Si la photocopieuse vient d'être réparée gratuitement aujourd'hui, quelle est la probabilité de devoir payer la prochaine réparation ?

Exercice 3.4. *Approximation loi binomiale par loi de Poisson*

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées.

I Après un premier réglage, on constate une proportion de 30% de pièces défectueuses. On examine 5 pièces choisies au hasard dans la production. Soit X la variable aléatoire : *"nombre de pièces défectueuses parmi les 5"*

(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

(b) Donner la loi de probabilité de X

(c) Calculer l'espérance et l'écart-type de X

(d) Quelle est la probabilité que deux des picèes soient défectueuses ?

(e) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?

(f) Déterminer le mode (c'est à dire la valeur de X la plus probable) et la probabilité associée.

II Après un second réglage, la proportion des pièces défectueuses deviens 5%. On examine un lot de 100 pièces.

(a) Calculer la probabilité de ne pas trouver de pièces défectueuses

(b) Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses

(c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins trois pièces défectueuses

(d) Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit compris entre (au sens large) 2 et 4.

Exercice 3.5. *Approximation loi binomiale par loi de Poisson*

La probabilité de rupture de stock pendant un mois est de 1/30.

1. Soit X le nombre de mois durant lesquels il y a rupture de stock pendant une période de 5 ans. Quelle loi suit X ?
2. Calculer $P(X \geq 2)$ et donner sa signification
3. Comment peut-on approximer cette loi ? Calculer $P(1 < X < 5)$

Exemple 3.4. *loi binomiale*

Au brasseries, une machine à embouteiller à la probabilité de 0,01 de tomber en panne à chaque emploi. La machine doit être utilisée 100 fois. Soit X le nombre de pannes obtenues après 100 utilisations.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(\geq 4)$

3. On estime que le coût d'une réparation à 500 F Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ et interpréter

Exemple 3.5. *loi binomiale*

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : *"nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20"*. Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que sa forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exemple 3.6. *loi binomiale*

Des études effectuées par les compagnies aériennes montrent qu'il y a une probabilité de 0,05 que chaque passager ayant fait une réservation n'effectue pas le vol. A la suite de ça, SA Arlines vend toujours 94 billets pour ses avions à 90 sièges, tandis que BA Arlines vend toujours 188 billets pour ses avions à 180 sièges. Avec quelle compagnie un passager ayant réservé un siège risque-t-il le plus de ne pas pouvoir prendre place dans l'avion ?

SECTION 3.4

Lois de probabilité continues

3.4.1 Loi normale ou Loi de Laplace-Gauss

Cette loi s'intéresse au variable aléatoire continue. Une variable normale X peut prendre toutes les valeurs comprises dans l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty\,[$.

La loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) s'applique au cas d'une variable statistique qui résulte d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et aucune des causes n'exerce un effet prépondérant (chacune d'entre elle n'ayant qu'un effet négligeable sur l'ensemble de l'expérience).

C'est la loi de probabilité le plus souvent utilisée car elle décrit assez bien les phénomènes liées à des populations nombreuses dont les comportements sont de type symétrique : répartition des individus d'une population selon leur taille (symétrique par rapport à la taille moyenne), leur âge, leur poids ; détermination des fluctuations des ventes d'un produit de grande consommation autour d'une moyenne ; estimation d'un % d'erreur sur le diamètre de pièces fabriquées en série, fluctuation accidentelle d'une grandeur économique (production, vente etc.). En particulier la loi normale apparaît comme un approximation de la loi binomiale et de la loi de Poisson lorsque l'effectif de l'échantillon est grand. Ce résultat est constamment utilisé dans la pratique, notamment dans les applications de la méthode des sondages, car il simplifie considérablement les calculs.

3.4.1.1 Caractéristiques

Une v.a. normale est donc caractérisée par 2 paramètres : son espérance mathématique $E(X) = m$ (ou $E(X) = \mu$) et son écart-type $\sigma(X) = \sigma$.

Une v.a. continue X qui suit une loi normale sera notée

$$X \sim \mathcal{N}(m\,,\,\sigma) \tag{3.7}$$

Sa fonction densité de probabilité :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \\ \text{avec} \quad & -\infty < x < +\infty \quad E(X) \in \mathbb{R} \quad \sigma \in \mathbb{R}_+^* \\ & e = 2,71828 \qquad\qquad \pi = 3,1416 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Les deux diagrammes ci-dessous montrent les variations de f en fonction de μ et de σ. On observe en particulier, que ces courbes en forme de cloche sont symétriques par rapport à $x = \mu$.

3.4.1.2 Loi normale centrée réduite

Si une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(m\,,\,\sigma)$ alors la variable $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,,\,1)$.

Ce théorème permet de limiter l'étude des lois normales à celle de la loi normale centrée réduite.

- La loi de la variable T est dite **centrée** car $E(T) = 0$ et **réduite** car $\sigma(T) = 1$;
- La fonction de densité f de la variable T est définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{3.9}$$

- La variable T étant continue $P(T \leq t) = P(T < t)$

On peut voir ci-dessous le graphique de la loi normale centrée-réduite. On remarque que pour $-1 \leq t \leq 1$, on obtient 68,2% de l'aire situé en dessous de la courbe, et que pour $-2 \leq t \leq 2$ on obtient 95,4% de l'aire située en dessous de la courbe.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale ($X \sim \mathcal{N}(m\ ,\ \sigma)$). On peut calculer la probabilité $P(a \leq X \leq b)$ pour que X soit entre a et b de la manière suivante. On transforme d'abord a et b en unités centrées réduites.

$$a^{'} = \frac{a-m}{\sigma} \quad \text{et} \quad b^{'} = \frac{b-m}{\sigma}$$

On a

$$P(a \leq X \leq b) = P(a^{'} \leq T \leq b^{'}) \qquad \text{où} \quad T = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0\,,\,1)$$

3.4.1.3 Calculs pratiques

Les différents cas possibles sont envisagés ci-dessous, les calculs indiqués pouvant être effectués avec la table.

On cherche	**pour** $t \geq 0$	**pour**$t < 0$
$P(X < x) = P(T < t) =$	$\pi(t)$	$1 - \pi(-t)$
$P(X > x) = P(T > t) =$	$1 - \pi(t)$	$\pi(-t)$
$P(\lvert X\rvert < x) = P(\lvert T\rvert < t) =$	$2\,\pi(t) - 1$	
$P(\lvert X\rvert > x) = P(\lvert T\rvert > t) =$	$2\,[1 - \pi(t)]$	

Exemple 3.7.

Soit T une variable aléatoire suivant une loir normale centrée réduit. Calculer :

$$\begin{array}{cccc} P(T<0) & P(T<2,04) & P(T<-1,95) & \\ P(0<T<2) & P(-1<T<2) & P(-3<T<-1) & \\ P(T>2,21) & P(T>-2) & P(|T|<1) & P(|T|>1) \end{array}$$

Exemple 3.8. *Lecture de la table de la fonction de répartition*

Le chiffre d'affaires quotidien, exprimé en francs, d'un commerce suit une loi normale de moyenne 12 000 et d'écart-type 1 500.

1. Calculer la probabilité que le chiffre d'affaires quotidien soit :
   (a) Égal à 12 000 francs
   (b) Inférieur à 12 000 francs
   (c) Inférieur à 13 000 francs
   (d) Inférieur à 10 00à francs
   (e) Compris entre 10 500 et 13 500 francs
2. Calculer le chiffre d'affaires quotidien qui :
   (a) Ne sera pas dépassé dans 95% des cas;
   (b) Sera dépassé dans 80% des cas.

3.4.1.4 Somme et différence de variables aléatoires normales indépendantes

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m_1 , \sigma_1)$ et si Y suit une loi normale $\mathcal{N}(m_2 , \sigma_2)$, avec X et Y indépendants, alors

Somme $X + Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m_1 + m_2 , \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$

Différence $X - Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m_1 - m_2 , \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$

Exemple 3.9.

Le chiffre d'affaires quotidien d'un magasin A suit une loi normale $\mathcal{N}(15000\ ,\ 2000)$, et celui d'un magasin B, géographiquement éloigné et ainsi indépendant de celui du magasin A, suit une loi normale $\mathcal{N}(20000\ ,\ 3000)$. Le propriétaire de ces deux magasins désire calculer la probabilité que :

1. Le chiffre d'affaires total soit supérieur à 30 000 francs par jour
2. La différence de chiffres d'affaires entre les deux magasins soit de plus de 6 000 francs.

3.4.1.5 Théorème centrale limite

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance mathématique commune m et de variance commune σ^2, alors la v.a. Y définie comme la somme de ces n v.a. tend à suivre une loi normale dès que n est grand.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{N}\left(E(Y)\,;\,\sigma(Y)\right)$$

$$\text{Avec}\quad E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n\,m$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \cdots + \sigma^2(X_n)} = \sqrt{n\,\sigma^2} = \sigma\sqrt{n}$$

C'est ce théorème fondamental qui est à l'origine de l'importance de la loi normale en probabilité et statistiques.

SECTION 3.5

Approximations de la loi Binomiale et la loi de Poisson par la loi normale

D'après le théorème de la limite centrale, la loi binomiale et la loi de Poisson convergent vers la loi normale quand n est grand. L'intérêt de ces approximations est de simplifier les calculs.

3.5.1 Approximation de la loi Binomiale par la loi normale

Une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ,\ p)$ peut être approchée par une loi normale lorsque les conditions d'approximations suivantes sont vérifiées :

$$\boxed{n \geq 30\,;\, np \geq 5 \quad \underline{\text{et}} \quad nq \geq 5} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{npq \geq 3}$$

C'est à dire que pour les calculs de probabilité, on peut remplacer la loi $\mathcal{B}(n\,,\,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np\,,\,\sqrt{npq})$.

3.5.2 Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

Une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approchée par une loi normale lorsque $\lambda \geq 10$.

C'est à dire que pour les calculs de probabilité, on peut remplacer la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda\,,\,\sqrt{\lambda})$.

3.5.3 Correction de continuité

Lorsqu'on approche une loi discrète (loi binomiale, loi de Poisson) par une loi continue, on doit corriger légèrement les informations pour tenir compte du passage du disret au continu.

On peut améliorer la précision des calculs en utilisant les formules suivantes appelées **correction de continuité** :

$$P(X < x) \quad = P(X < x - 0,5) \quad = \pi\left(\frac{x - 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad \textit{(On soustrait 0,5 de x)}$$

$$P(X \leq x) \quad = P(X \leq x + 0,5) \quad = \pi\left(\frac{x + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad \textit{(On ajoute 0,5 à x)}$$

$$P(X < x) \quad = P(X < x - 0,5) \quad = \pi\left(\frac{x - 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad \textit{(On soustrait 0,5 de x)}$$

$$P(X \leq x) \quad = P(X \leq x + 0,5) \quad = \pi\left(\frac{x + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad \textit{(On ajoute 0,5 à x)}$$

Exemple 3.10. *Curriculum vitæ falsifiés*

Une agence de recrutement constate que six commerciaux sur dix falsifient leur curriculum vitae.

1. Déterminer la de X : nombre de curriculum vitæ falsifiés existant dans le fichier de 480 commerciaux ;
2. Proposer une approximation de cette loi par une autre loi plus simple. Justifier le choix de la loi ;
3. Calculer la probabilité que X soit supérieur ou égal à 230, la probabilité que X soit inférieur ou égal à 240 et supérieur ou égal à 220 ;
4. L'agence propose 20 candidats à l'un de ses clients. Calculer la probabilité pour que Y nombre de dossiers falsifiés proposés soit inférieur ou égal à 2.

Exemple 3.11.

Dans un service de réparation, on sait que l'on reçoit 9 appels à l'heure. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait au plus 60 appels pendant une période de 6 heures de travail ?

SECTION 3.6

Exercices

Exercice 3.6. *Loi binomiale*

La probabilité pour q'une ampoule électrique ait une durée de vie supérieure à 2 ans est égale à 0,2. Sachant qu'un lustre possède 5 ampoules. Calculer la probabilité

1. De ne pas changer d'ampoules en deux ans
2. De changer toutes les ampoules en deux ans

Exercice 3.7. *Approximation loi binomiale par loi de Poisson*

Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées.

I Après un premier réglage, on constate une proportion de 30% de pièces défectueuses. On examine 5 pièces choisies au hasard dans la production. Soit X la variable aléatoire : *"nombre de pièces défectueuses parmi les 5"*

(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

(b) Donner la loi de probabilité de X

(c) Calculer l'espérance et l'écart-type de X

(d) Quelle est la probabilité que deux des pièces soient défectueuses ?

(e) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?

(f) Déterminer le mode (c'est à dire la valeur de X la plus probable) et la probabilité associée.

II Après un second réglage, la proportion des pièces défectueuses deviens 5%. On examine un lot de 100 pièces.

(a) Calculer la probabilité de ne pas trouver de pièces défectueuses

(b) Calculer la probabilité d'obtenir deux pièces défectueuses

(c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins trois pièces défectueuses

(d) Calculer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit compris entre (au sens large) 2 et 4.

Exercice 3.8. *Approximation loi binomiale par loi de Poisson*

La probabilité de rupture de stock pendant un mois est de 1/30.

1. Soit X le nombre de mois durant lesquels il y a rupture de stock pendant une période de 5 ans. Quelle loi suit X ?
2. Calculer $P(X \geq 2)$ et donner sa signification
3. Comment peut-on approximer cette loi ? Calculer $P(1 < X < 5)$

Exemple 3.12. *loi binomiale*

Au brasseries, une machine à embouteiller à la probabilité de 0,01 de tomber en panne à chaque emploi. La machine doit être utilisée 100 fois. Soit X le nombre de pannes obtenues après 100 utilisations.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer $P(X = 0)$; $P(X = 1)$; $P(\geq 4)$

3. On estime que le coût d'une réparation à 500 F Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ et interpréter

Exemple 3.13. *loi binomiale*

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : *"nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20"*. Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que sa forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exemple 3.14. *loi binomiale*

Des études effectuées par les compagnies aériennes montrent qu'il y a une probabilité de 0,05 que chaque passager ayant fait une réservation n'effectue pas le vol. A la suite de ça, SA Arlines vend toujours 94 billets pour ses avions à 90 sièges, tandis que BA Arlines vend toujours 188 billets pour ses avions à 180 sièges. Avec quelle compagnie un passager ayant réservé un siège risque-t-il le plus de ne pas pouvoir prendre place dans l'avion ?

SECTION 3.7

Exercices sur la loi normale

Exercice 3.9. *Risque de crédit*

Une banque s'intéresse au nombre de crédits qui ne sont pas remboursés au cours d'une période donnée. Le gestionnaire de crédit suppose que le nombre de défauts suit une loi de Poisson. Il a accordé 80 crédits ; il sait qu'en moyenne 5% des crédits ne sont pas remboursées. Si un crédit n'est pas remboursé, la perte pour la banque est de 20 000 euros

1. Calculer la perte moyenne de la banque sur les 80 crédits
2. Calculer la perte qui a une probabilité de 95% de ne pas être dépassée.

Exercice 3.10. *Pièces défectueuses*

Une machine fabrique 120 pièces par heure. Chaque pièce a une probabilité 0,03 d'être défectueuse.

1. Déterminer la loi de X, nombre de pièces défectueuses en une heure et calculer la probabilité que X soit inférieure ou égal à trois.
2. Peut-on approximer cette loi par une loi de Poisson ? Si oui, en déterminer les paramètres.
3. Calculer la probabilité que X soit inférieure ou égal à trois, celle qu'il soit inférieur ou égal à trois et supérieur ou égal à un.

Exercice 3.11. *Seuil de rentabilité*

La demande annuelle d'un bien (exprimé en unités) suit une loi normale de paramètres $m = 12\,300$ et $\sigma = 1\,120$.

1. Calculer la probabilité que la demande :
   (a) soit inférieure ou égale à 12 300

(b) soit inférieure ou égale à 11 000

(c) soit supérieure à 12 700

2. Quelle est la probabilité d'atteindre le seuil de rentabilité si celui-ci s'élève à 12 100 unités ?

Exercice 3.12. *Offre d'emploi*

Retrouver les paramètres de la loi normale que suit X : le nombre de réponses à une annonce d'offre d'emploi sachant que la probabilité que X soit supérieur à 11 est 0,1587 et la probabilité que X soit inférieur ou égal à 8 est 0,0228.

Exercice 3.13. *Rendez-vous*

Un expert comptable et l'un de ses clients se sont donnés rendez-vous à 12h30 au restaurant. Le client est installé à proximité et la durée de son trajet obéit à une loi normale de paramètres (exprimés en minutes) $m = 10$ et $\sigma = 4$.

1. Sachant que le client quitte son bureau à 12h15, quelle est la probabilité qu'il soit en retard

L'expert comptable doit attendre un taxi en sortant de son bureau, phénomène que l'on peut approximer par une loi normale de paramètres $m = 14$ et $\sigma = 2$. De plus, le trajet en taxi est lui-même soumis aux aléas de la circulation, ce que l'on peut décrire par une loi normale de paramètres $m = 13$ et $\sigma = 3$.

2. Sachant qu'il quitte son bureau à 12h, quelle est la probabilité qu'il arrive à l'heure ?

En considérant que les deux trajets sont indépendants :

3. Quelle est la probabilité que l'un au moins arrive à l'heure ?

On suppose maintenant qu'ils se sont donné rendez-vous à la gare. Le client s'y rend dans les mêmes conditions. L'expert doit prendre à 10h un taxi qui le déposera à la gare ; la durée du trajet suit une loi normale de paramètres $m = 13$ et $\sigma = 3$. A la gare il doit prendre le train de 10h19 qui l'emmènera à la gare du rendez-vous. La durée du trajet ferroviaire obéit à une loi normale de paramètres $m = 130$ et $\sigma = 2$.
Même questions que précédemment

Exercice 3.14.

Une agence de recrutement constate que six commerciaux sur dix falsifient leur curriculum vitae

1. Déterminer la loi de X : nombre de curriculum vitæ falsifiés existant dans le fichier de 460 commerciaux
2. Proposer une approximation de cette loi par une autre loi plus simple. Justifier le choix de la loi
3. Calculer la probabilité que X soit supérieur ou égal à 230, la probabilité que X soit inférieur ou égal à 240 et supérieur ou égal à 220.
4. L'agence propose 20 candidats à l'un de ses clients. Calculer la probabilité pour que Y : nombre de dossiers falsifiés proposés soit inférieur ou égal à 2.

FIN DU COURS DE STATISTIQUE ET PROBABILITÉ II ! ! !

« Le succès arrive toujours lorsqu'une opportunité rencontre la préparation »

Albert EINSTEIN

« Nous sommes ce que nous faisons de façon constante. L'excellence n'est donc pas une action mais une habitude. »

Aristote