Faculdade de Engenharia Elétrica

Projeto EE400

Projeto 4 – GNSS e Drones

Aluno: Fernando Kenzo Imami Fugihara ***Ra:*** 205067

Aluno: Nathan de Oliveira Martins ***Ra:*** 250900

Aluno: Mateus Candido Fiochi ***Ra:*** 248181

Aluno: João Pedro Aranha Anttogneto ***Ra:*** 249361

Campinas, SP

2025

Objetivo

O objetivo do projeto é implementar um programa que seja capaz de determinar a posição de um drone em múltiplos instantes de tempo, a partir dos dados fornecidos por um receptor GNSS embarcado. O programa pode ser implementado em qualquer linguagem de programação e as especificações são:
I) Deve ser capaz de resolver as posições dos satélites, considerando que as informações obtidas pelo receptor seguem as especificações do Exercício 1.
II) Deve ser capaz de estimar a posição do drone em um instante de tempo, com o método discutido no Exercício 2.

A implementação do código está no seguinte repositório público do Github: https://github.com/fekenzofugi/EE400-PROJETO

Exercício 1: Parametrização de Orbitas

a) Parametrização da forma no plano orbital

Primeiramente, vamos descrever a elipse no sistema de coordenadas perifocal. Nesse sistema, a elipse está totalmente contida em um plano, com a origem localizada no foco mais próximo ao perigeu. O eixo x é orientado na direção do perigeu, enquanto o eixo y é perpendicular a esse, correspondendo ao ângulo verdadeiro v=90◦, conforme ilustrado na Figura 1.

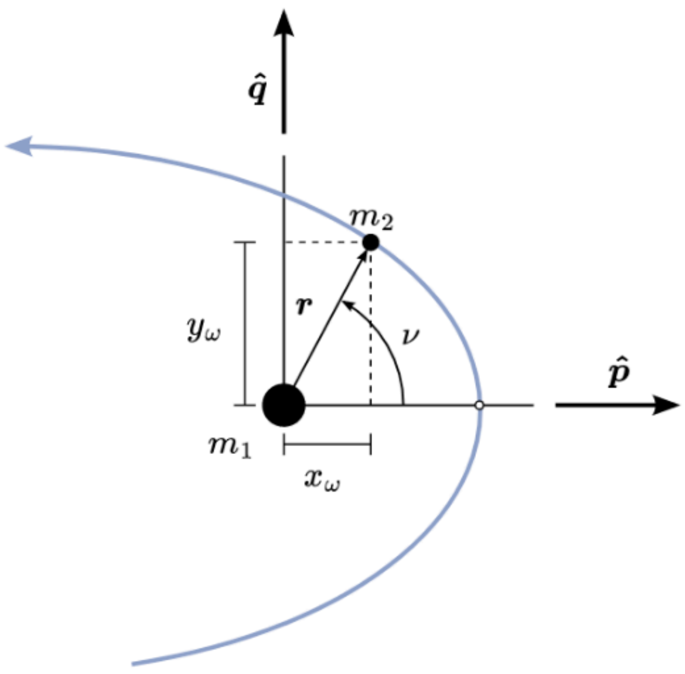

Figura 1: Sistema de coordenadas perifocal. Fonte: Projeto D, João Felipe Contreras De Moraes.

Em primeiro lugar, escreva a parametrização cartesiano em termos de r(t), distância entre o satélite e o centro da Terra, e o ângulo $\nu(t)$***, chamado de anomalia verdadeira.***

Em seguida, use um círculo auxiliar, de forma que a elipse fique circunscrita, e defina o ângulo central E (anomalia excêntrica), como mostra a Figura 4. Escreva a parametrização anterior em termos de [E], [a] e [e].

Resposta:

Vamos começar descrevendo a elipse em termos de $r(t)$ a distância entre o satélite e o centro da Terra, e o ângulo $\nu(t)$, conhecido como anomalia verdadeira. Dado que as coordenadas da elipse estão contidas em um plano, podemos representar a posição do satélite em termos de coordenadas cartesianas x e y, como funções de r(t) e v(t). Assim, temos:

$x = x(r(t), \nu(t))$

$y = y(r(t), \nu(t))$

Dessa forma, temos que a parametrização polar de x e y é dada por

$x = r(t)\, cos(\nu(t))$

$y = r(t)\, sin(\nu(t))$

Em seguida, consideramos um sistema auxiliar onde a elipse está circunscrita por um círculo de raio igual ao semi-eixo maior a, com centro no ponto O, centro da elipse. Nesse sistema, a posição do satélite é descrita a partir da anomalia excêntrica E, definida como o ângulo entre a direção do perigeu e a projeção do satélite sobre o círculo auxiliar. Essa construção geométrica permite uma parametrização conveniente da trajetória orbital, como ilustrado na Figura 4.

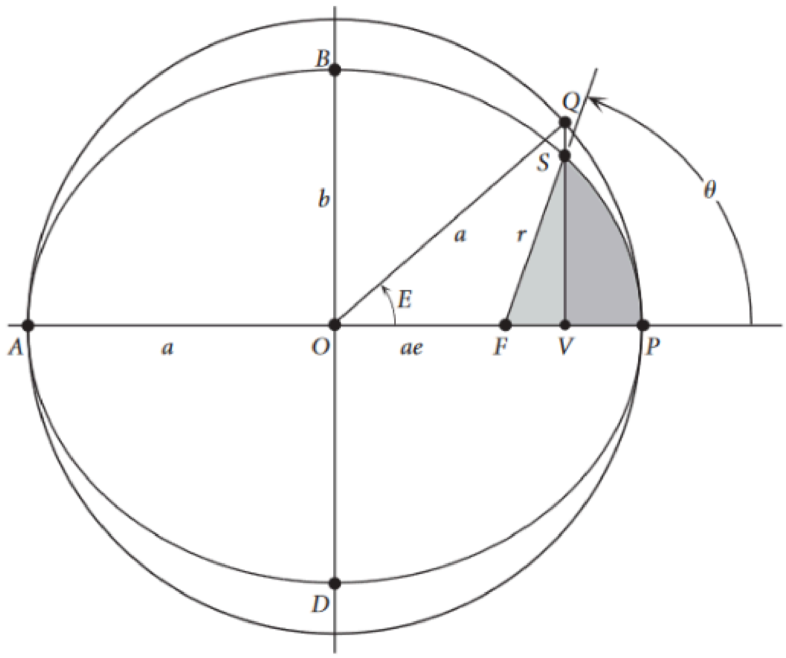

Figura 2: Elipse circunscrita e anomalia excêntrica. Fonte: Projeto D, João Felipe Contreras De Moraes.

Para escrever a parametrização anterior em termos de [E], [a] e [e], precisamos encontrar a equação que define a elipse com excentricidade e circunscrita na circunferência de raio a. Para isso, vamos utilizar a equação polar da elipse

$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,cos\theta}$ (1)

e as coordenadas cartesianas na forma polar

$x = r\,cos(\theta)\,,\, y = r\,sin(\theta)\,,\, |r|^2 = x^2 + y^2$

Substituindo $cos(\theta) = x/r$ na Eq. 1, temos

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,x/r} \Rightarrow r + ex = a(1 - e^2)$$

$$\Rightarrow r = a(1 - e^2) - ex \Leftrightarrow r^2 = (a(1 - e^2) - ex)^2$$

Substituindo $|r|^2 = x^2 + y^2$ e rearranjando os termos,

$$x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)^2 - 2ae(1 - e^2)x + e^2x^2$$

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2ae(1 - e^2)x = a^2(1 - e^2)^2$$

Completando quadrados, temos

$$(1 - e^2)(x + ae)^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)^2$$

Dessa forma, temos que a equação da elipse em coordenadas cartesianas é dada por

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

Portanto, as parametrizações para x e y são dadas por

$$x = a\,(cos(E) - e)$$

$$y = b\,sin(E) = a\sqrt{1 - e^2}\,sin\,(E)$$

b) Parametrização do tempo

Nesse próximo passo, a dependência temporal será incluída. Para simplificar as expressões, vamos definir a anomalia média como $M := \frac{2\pi}{T}\Delta t$, sendo Δt o tempo desde o perigeu e T o período orbital.

A dependência temporal da parametrização do item (a) é introduzida pela relação entre E e M, dada pela Equação de Kepler

$$E(t) - e\,sinE(t) = M(t) \quad \textbf{(1)}$$

sendo t o tempo atual.

Desejamos resolver a equação de Kepler, dado um valor de M(t). No entanto, ela é uma equação transcendente. O que isso significa e qual a implicação disso?

Resposta:

Por definição, uma equação transcendente é uma equação que contém alguma função que não é redutível a uma fração entre polinômios, e cuja solução não pode ser expressa através de funções elementares. Tendo isso em mente, para encontrar a solução da equação de Kepler, podemos utilizar métodos iterativos que aproximam a solução.

Para encontrar a solução da Eq. 1 , optamos por utilizar o método iterativo de Newton. É um método usado para encontrar raízes de funções reais de forma iterativa. O algoritmo do método de Newton é dado por

1. Seja x_o uma aproximação razoável para , o zero de f.
2. Para $k = 0, 1, 2, ...$

   2.1 $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} - f(x^{(k)})/f'(x^{(k)})$

Decidimos utilizá-lo por conta de sua eficiência computacional produzindo um resultado com convergência quadrática. Desde que certos critérios sejam atendidos para um certa função f(x)

1. $f'(x_*) \neq 0$, $onde\ x_*$ é $a\ raiz\ da\ função.$
2. $f(x)$ é $uma\ função\ com\ segunda\ derivada\ contínua.$

Essas condições garantem que, para uma estimativa inicial x_0 suficientemente próxima da solução x_*, o método converge rapidamente, com o erro diminuindo quadraticamente a cada iteração.

Para aplicar o método iterativo de Newton, precisamos deixar a equação do formato adequado

$$f(t) = E(t) - e\ sinE(t) - M(t) = 0$$

Vamos encontrar a derivada de primeira e segunda ordem de f(t) em relação a E(t)

$$f'(E) = 1 - e\ cos(E(t))$$
$$f''(E) = e\ sin(E(t)) \neq 0 => \ Convergência\ Garantida.$$

Logo, o método de Newton converge quadraticamente e sua fórmula de iteração para encontrar E(t) é dada por

$$f(E)^{(k+1)} = E^{(k)} - f(E^{(k)})/f'(E^{(k)})$$

c) Parametrização Espacial

Considerando agora a disposição espacial da órbita, desejamos escrever as coordenadas do sistema perifocal em um sistema ECI (Earth-Centered Inertial). Em outras palavras, queremos descrever a órbita plana no espaço tridimensional.

Para isso, três rotações sucessivas são necessárias (Figura 3):

i. Rotacionar em torno z_w , até que o eixo x_w esteja alinhado com o nó ascendente,

ii. Rotacionar em torno do novo x_ω', até que o plano orbital e equatorial estejam alinhados,

iii. Rotacionar em torno de z', para alinhar o nó ascendente com a direcão de referência.

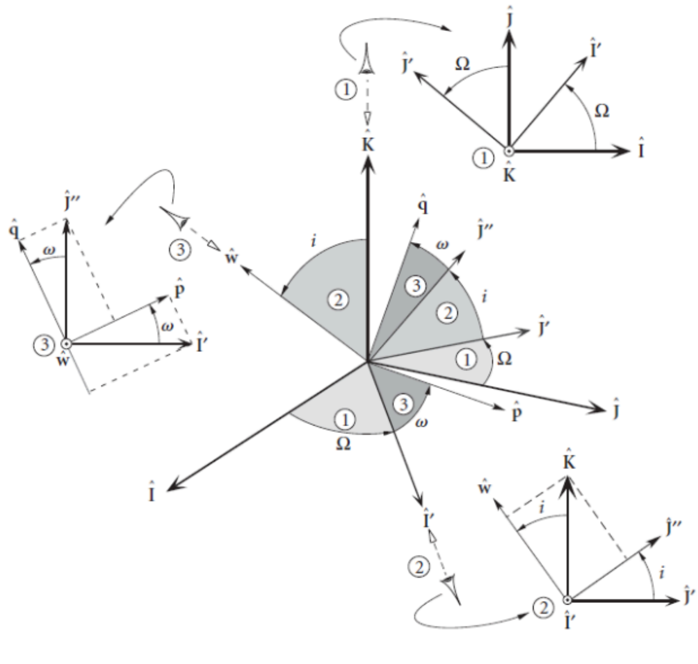

Figura 3: Rotações para alinhar os ângulos.

Resposta:

Para converter as coordenadas da órbita para o sistema ECI é necessário aplicar uma sequência de três rotações ativas.

1ª Rotação: ângulo Ω (longitude do nó ascendente)

Rotação em torno do eixo Z do ECI. Essa rotação é dada por

$$R_z(\Omega) = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2ª Rotação: ângulo i (inclinação)

Inclina o plano orbital em relação ao plano z do sistema ECI. Essa rotação é dada pela matriz

$$R_x(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

3ª Rotação: ângulo ω (argumento do perigeu)

Essa rotação mantém a coordernada z fixa e gira os vetores no plano xy. A rotação, é dada pela matriz

$$R_z(\omega) = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação total é dada por

$R = R(\Omega).R(i).R(\omega)$

Exercício 2. Trilateração e gradiente descendente

a) As distâncias relativas para cada um dos satélites

A partir da leitura do TOT (time of transmission), codificado no sinal do satélite, e do relógio interno, indicando o TOA (time of arrival), o receptor é capaz de determinar o TOF (time of flight). Além disso, com essa última informação, ele é capaz de calcular a distância relativa para esse satélite. Explique esse procedimento.

Resposta:

O tempo que o sinal levou para viajar do satélite até o receptor (TOF) é dado pela diferença

$TOF = TOA - TOT$

onde TOA é o tempo de chegada do sinal e TOT é o tempo exato em que o sinal foi transmitido.

Os sinais emitidos pelo satélite são ondas eletromagnéticas que viajam na velocidade da luz $c \approx 3 \times 10^8\, m/s$. Desse modo, a distância percorrida pelo sinal do satélite até o receptor pode ser aproximada por

$\rho = v\,.\,t = c\,.\,TOT$

Estamos desconsiderando o erro do relógio do receptor. O relógio do receptor não é perfeitamente sincronizado com os relógios atômicos dos satélites. Isso introduz um erro sistemático comum a todas as medidas.

b) Sistema de Equações

A partir das medidas de distância ρ_i (distância entre satélite i e receptor) e da posição r_i, obtenha o sistema de equações. O que se pode afirmar sobre a linearidade desse sistema de equações?

Dado as seguintes dependências da posição r

$r = (x, y, z)$: posição desconhecida do receptor;
$r_i = (x_i, y_i, z_i)$: posição conhecida do satélite;
ρ: distância medida entre o receptor e o satélite i;

A distância até o satélite é dada por

$\rho_i = \|r - r_i\|$

Ou seja,

$\rho_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$

O sistema completo para n satélites é dado por

$\rho_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$

$\rho_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}$

$\vdots$

$\rho_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2}$

c) Encontrando Soluções

Além da natureza do sistema obtido, todas as medidas de GNSS apresentam erros e, portanto, pode ser que não exista uma solução. Dessa maneira, diversas técnicas se apoiam em soluções iterativas nesses cenários (como vimos no Exercício 1(b)), que buscam otimizar determinado critério.

Por exemplo, ao usar uma função $J(\theta)$ de critério, dependente de uma possível solução, que assume valores maiores para soluções piores e valores menores para as melhores, o problema consiste em encontrar o valor de θ que minimiza essa função (a melhor solução possível). A notação para esse tipo de problema é

$\hat{\theta} = argmin\, J(\theta)$

Um critério possível no problema da localização do drone é uma função J(r) que depende de um "chute" inicial de posição, r, e avalia a diferença entre a medida e o valor calculado usando o chute. Uma função J possível seria

$$J(r) \;=\; \sum_{i=1}^{N} (\| r_i - r \| \;-\; \rho_i)^2$$

Para um conjunto de N medidas.

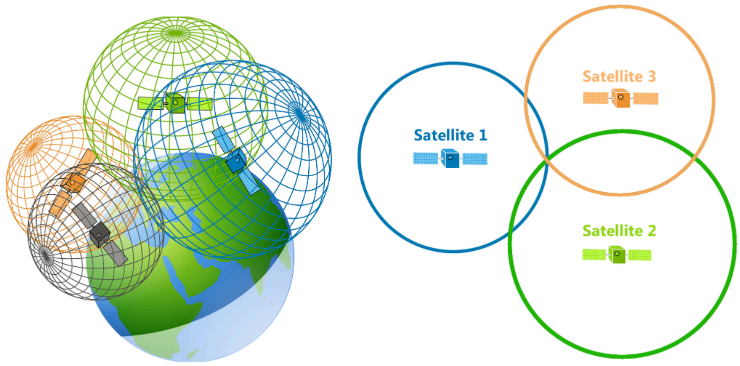

Figura 4: Múltiplos satélites medem distâncias relativas com relação ao receptor.

A partir da Figura 4, qual o valor de J quando escolhemos a posição certa do receptor (desconsiderando os erros na medida?) O que podemos dizer sobre o valor de J para outros valores de r?

Resposta:

O relógio do receptor não está perfeitamente sincronizado com os relógios atômicos dos satélites, isso introduz um erro sistemático comum a todas as medições de tempo. Além disso, o sistema resultante é não linear. Dessa forma, sistema exato acima pode não ter solução exata

Para resolver esse problema, podemos utilizar métodos numéricos iterativos. Assim, buscamos a melhor aproximação de r que minimize os erros observados. Isso pode ser feito utilizando uma função custo J(r)

$$J(r) \;=\; \sum_{i=1}^{N} (\| r_i - r \| \;-\; \rho_i)^2$$

que mede o erro quadrático entre a distância esperada e a distância medida.

Se por acaso escolhermos exatamente a posição correta do receptor e não houver erro nas distâncias medidas ρ_i, temos que $J(r) = 0$ na posição correta. Além disso, para J(r) > 0, temos que os valores medidos e o esperado são diferentes. J serve como um indicador de quão boa ou ruim é uma estimativa de posição.

Dessa forma, queremos encontrar a posição r que minimiza a função de custo J(r). Como minimizamos essa função?

d) Gradiente Descendente

Problemas de otimização são ubíquos nas diversas áreas da ciência e engenharia e, em problemas de natureza contínua, é possível usar os conceitos de análise vetorial vistos na disciplina para obter boas soluções.

Nesse sentido, o conceito do vetor gradiente ∇f, de uma função multivariável $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, é especialmente útil uma vez que ele indica a direção de máxima subida e máxima descida. Portanto, o gradiente de uma função que se deseja maximizar/minimizar vai indicar o melhor caminho local.

Usando essas ideias, descreva um método iterativo de otimização que use o gradiente e demonstre como ele pode ser aplicado para o problema de trilateração:

$$argmin \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (\| r_i - r\| - \rho_i)^2$$

Resposta:

Gradiente descendente é um dos algoritmos mais utilizados em machine learning para encontrar o valor de r que resultam no menor custo possivel. É um método iterativo de otimização que utiliza o conceito de gradiente, a taxa de mudança da função custo, que mostra a direção para ajustar os parâmetros para reduzir o erro até chegar na solução.

Os passos do gradiente descendente são dados por

1. Inicialização das variáveis.

2. Computar o gradiente.

3. Atualizar os parâmetros para a direção que reduza o custo.

4. Repita os passos anteriores até a função custo chegar no mínimo.

Dado que o parâmetro que estamos interessados em encontrar é r, temos que a fórmula geral para atualizar os parâmetros é dada por

$$r = r - \alpha\frac{\partial J(r)}{\partial r}$$

onde α é a taxa de aprendizado, que tem um grande impacto na eficiência da implementação do algoritmo. Caso α seja muito pequeno, o algoritmo tomará vários passos e irá demorar para convergir. Caso α seja muito grande, o algoritmo pode nunca chegar no mínimo (Overshoot). Dessa forma, devemos escolher uma taxa de aprendizado equilibrada. Nesse caso utilizamos 0,6.

O gradiente nesse caso é computado como

$$\nabla J = \frac{\partial J(r)}{\partial r} = 1/2 \frac{\partial(\| r_i - r \| - \rho_i)^2}{\partial r} = (1 - \frac{\rho_i}{\| r_i - r \|})(r_i - r)$$

Dessa forma, a fórmula de atualização para esse contexto é dada por

$$r = r - 0.6 \,(1 - \frac{\rho_i}{\| r_i - r \|})(r_i - r)$$

Referências:
https://medium.com/@bhatadithya54764118/day-11-gradient-descent-understanding-the-gradient-descent-algorithm-24a0be00758f