Arbeidskrav 2 (individuelt)

Betrakt en pendel bestående av en punktmasse m som henger i en stiv, masseløs stav med lengde L i et gravitasjonsfelt g. La $\theta(t)$ betegne vinkelen som pendelen utgjør med loddlinjen som funksjon av tiden. Pendelen slippes i en vinkel $\theta(0) = \theta_0$, i ro, $\theta'(0) = 0$.

Bevegelsesligningen

Gjenoppfrisk mekanikkunnskapene og vis at bevegelsesligningen for pendelen er

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta,$$

en ikkelineær ordinær differensialligning av andre orden.

Tilnærmet ligning

For små vinkler, $\theta \ll 1$, er $\sin\theta \approx \theta$, og bevegelsesligningen kan tilnærmes som

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta.$$

Løs denne lineære ordinære differensialligningen analytisk for initialverdiene gitt over, og vis at pendelens periode er $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

Numerisk løsning av den tilnærmede ligningen

Introduser $\phi = d\theta/dt$ og skriv den tilnærmede ligningen som et system av to lineære førsteordens ligninger. Utled numeriske skjemaer for å løse denne vha. eksplisitt Euler, implisitt Euler, Heun og Crank–Nicholson. Implementer numerisk (bruk $g = L = 1$ for enkelhets skyld), løs for forskjellige tidsskritt og sammenlign nøyaktigheten av perioden med den eksakte løsningen. Plot $\theta(t)$ for noen få perioder for de ulike skjemaene.

Numerisk løsning av den eksakte ligningen

Introduser $\phi = d\theta/dt$ og skriv den eksakte ligningen som et system av to ikkelineære førsteordens ligninger. Utled numeriske skjemaer for eksplisitt Euler og Heun (hvorfor ikke implisitt og Crank–Nicholson?). Implementer numerisk (bruk $g = L = 1$ for enkelhets skyld), løs for forskjellige tidsskritt og forskjellige verdier av θ_0, og sammelign nøyaktigheten med den eksakte løsningen,

$$T = 2\pi\sqrt{g/L}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \cdots\right).$$

Plot $\theta(t)$ for noen få perioder for de forskjellige skjemaene og forskjellige verdier av θ_0.

Ekstra: animasjon

Lag en fin animasjon av den svingende pendelen!