Roteiro para o Trabalho 3: Equação do Calor e Sistemas de Equações Lineares

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos
Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

O objetivo aqui neste trabalho é resolver alguns problemas sobre a Equação do Calor e também sobre a resolução numérica de Sistemas de Equações Algébricas Lineares. Seguem algumas instruções:

- O trabalho é individual. Você pode discutir os exercícios com os seus colegas, mas cada um deve fazer o seu trabalho.
- Você pode utilizar qualquer linguagem de programação.
- Responda os exercícios com texto e gráficos. Comente todos os gráficos que você incluir no relatório.
- O relatório deve ser enviado em formato pdf, em um único arquivo, por meio do Moodle.
- Os códigos devem ser colocados em uma seção de anexos no próprio relatório ou então enviados separadamente no Moodle.

Equação do Calor (1D transiente, explícito)

Exercícios 1 ao 5. Objetivo: resolver numericamente a equação do calor

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

usando diferenças finitas (explícitas, FTCS)

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \tag{2}$$

com diferentes condições de contorno.

Sugestões: faça gráficos de T em função de x para diferentes t; compare com as soluções analíticas; escolha, por exemplo, um t pequeno (0.01) para mostrar o início, um t médio (0.5 ou 1.0, dependendo do problema), e um t maior para mostrar a condição final (10); faça a simulação com diferentes Δt, para ver quais levam a uma resposta que faz sentido e quais "explodem"; interprete fisicamente os gráficos.

Exercício 1.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 2\,, \quad t > 0 \tag{3}$$

$$T(0,t) = T(2,t) = 0\,, \quad t > 0 \tag{4}$$

$$T(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,, \quad 0 \leq x \leq 2 \tag{5}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = \exp\left[\frac{-\pi^2 t}{4}\right]\sin\left[\frac{\pi}{2}x\right] \tag{6}$$

Exercício 2.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0 \tag{7}$$

$$T(0,t) = T(1,t) = 0\,, \quad t \geq 0 \tag{8}$$

$$T(x,0) = 1\,, \quad 0 < x < 1 \tag{9}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin\left[(2n-1)\pi x\right]\exp\left[-(2n-1)^2\pi^2 t\right]\ . \tag{10}$$

Exercício 3.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0 \tag{11}$$

$$T(0,t) = 1\,, \quad T(1,t) = 0\,, \quad t \geq 0 \tag{12}$$

$$T(x,0) = 0\,, \quad 0 < x < 1 \tag{13}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = 1 - x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left[n\pi x\right]\exp\left[-n^2\pi^2 t\right]\ . \tag{14}$$

Exercício 4.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.01\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0 \tag{15}$$

$$T(0,t) = T(1,t) = 0\,, \quad t \geq 0 \tag{16}$$

$$T(x,0) = \begin{cases} 200x\,, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 200(1-x)\,, & 0.5 < x \leq 1 \end{cases} \tag{17}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = \frac{800}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\left[(2n+1)\pi x\right]\exp\left[-(2n+1)^2\pi^2 0.01t\right] \,. \tag{18}$$

Exercício 5. condição de contorno de Neumann (da derivada).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.01\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 0.5\,, \quad t > 0 \tag{19}$$

$$T(0,t) = 0\,, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0.5\ ,\ t) = 0\,, \quad t > 0 \tag{20}$$

$$T(x,0) = 200x\,, \quad 0 \le x \le 0.5 \tag{21}$$

Solução exata:

$$T(x,t) = \frac{800}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\left[(2n+1)\pi x\right]\exp\left[-(2n+1)^2\pi^2 0.01t\right] \,. \tag{22}$$

Equação do Calor (2D transiente, explícito)

Exercícios 6 ao 9. O objetivo aqui é resolver a equação do calor bidimensional transiente,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\ , \tag{23}$$

usando diferenças finitas (explícitas, FTCS),

$$\frac{T^{k+1}_{i,j} - T^k_{i,j}}{\Delta t} = \frac{T^k_{i+1,j} - 2T^k_{i,j} + T^k_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T^k_{i,j+1} - 2T^k_{i,j} + T^k_{i,j-1}}{\Delta y^2}\ , \tag{24}$$

com diferentes condições de contorno. Sugestões: faça gráficos tridimensionais de T em função de x e y para diferentes t e faça também gráficos de contorno; compare com as soluções analíticas (note que as soluções analíticas são para o regime permanente); escolha, por exemplo, um t pequeno (0.05) para mostrar o início, um t médio (0.5), e um t maior para mostrar a condição final (10); faça a simulação com diferentes Δt, para ver quais levam a uma resposta que faz sentido e quais "explodem" ; interprete fisicamente os gráficos.

Exercício 6.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad t > 0 \tag{25}$$

$$T(x,0,t) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1\,, \quad t \ge 0 \tag{26}$$

$$T(x,1,t) = \sin(\pi x)\,, \qquad 0 \le x \le 1\,, \quad t \ge 0 \tag{27}$$

$$T(0,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \ge 0 \tag{28}$$

$$T(1,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \geq 0 \tag{29}$$

$$T(x,y,0) = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1 \tag{30}$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x,y,t \to \infty) = \frac{\sinh(\pi y)\sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} \tag{31}$$

Exercício 7.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,, \quad 0 < x < 0.5\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad t > 0 \tag{32}$$

$$T(x,0,t) = 0\,, \qquad 0 \leq x \leq 0.5\,, \quad t \geq 0 \tag{33}$$

$$T(x,1,t) = \sin(\pi x)\,, \qquad 0 \leq x \leq 0.5\,, \quad t \geq 0 \tag{34}$$

$$T(0,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \geq 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0.5,y,t) = 0\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad t \geq 0 \tag{36}$$

$$T(x,y,0) = 0\,, \qquad 0 < x < 0.5\,, \quad 0 < y < 1 \tag{37}$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x,y,t \to \infty) = \frac{\sinh(\pi y)\sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} \tag{38}$$

Exercício 8.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1\,, \quad t > 0 \tag{39}$$

$$T(x,0,t) = 0\,, \qquad 0 \leq x \leq 1\,, \quad t \geq 0 \tag{40}$$

$$T(x,1,t) = \begin{cases} 75x\,, & 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 150(1-x)\,, & \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}\,, \quad t \geq 0 \tag{41}$$

$$T(0,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \geq 0 \tag{42}$$

$$T(1,y,t) = 0\,, \qquad 0 < y < 1\,, \quad t \geq 0 \tag{43}$$

$$T(x,y,0) = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1 \tag{44}$$

Solução exata no regime permanente:

$$T(x,y,t \to \infty) = \frac{450}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n^2 \sinh n\pi} \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)\,. \tag{45}$$

Exercício 9.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{46}$$

A placa da figura 1 tem dimensão 1 por 1. Todas as paredes têm temperatura 0. Os pontos do centro (cor preta) da placa têm temperatura 1 (fixa, não varia com o tempo). Como condição inicial considere todos os pontos que não estão no centro com temperatura 0.

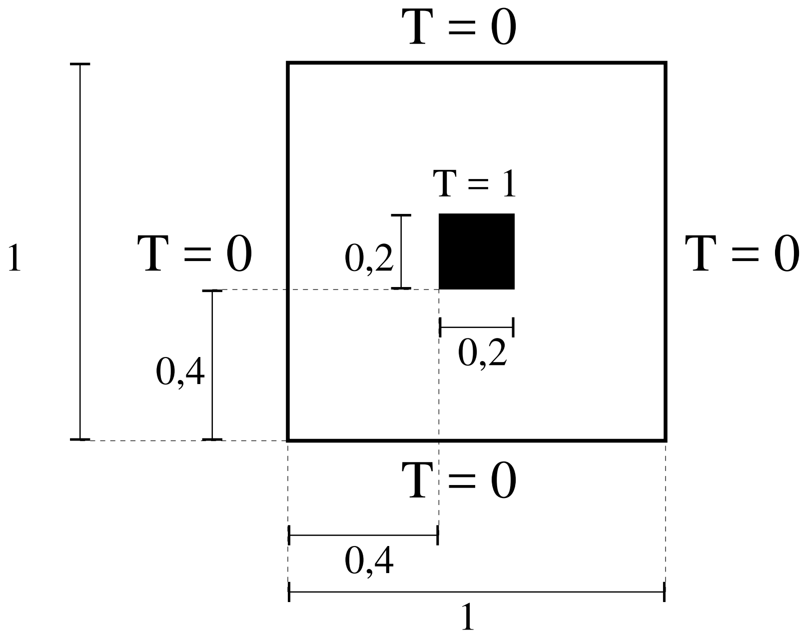

Figura 1: Problema 4.

Sistemas de Equações Lineares

Exercício 10. Use o método de Gauss-Seidel para resolver o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 12 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 20 & -4 \\ -2 & 15 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Exercício 11. O objetivo aqui é **resolver** o sistema apresentado no início da aula "Sistemas de Equações Algébricas Lineares" (ver a equação 11 daquela aula). Aquele sistema foi resultado da discretização da barra considerando uma divisão em $N = 5$ partes iguais e resultou em $n = N-1 = 4$ equações. Aqui você deve considerar que a discretização é para um número N arbitrário de partes iguais, que vai resultar em um número $n = N - 1$ de equações no sistema. Note que a matriz $\mathbf{A}$ é $n \times n$ e tridiagonal.

Você vai resolver esse sistema usando 4 métodos iterativos diferentes: **Jacobi, Gauss-Seidel, SOR e Gradiente Conjugado**. Em todos os métodos iterativos, inicia-se a solução com um chute inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ (pode ser todos os pontos do interior iguais a zero). O próximo valor, $\boldsymbol{x}^{(1)}$, é obtido a partir de algum método iterativo. São feitas M iterações até que o método convirja. O critério utilizado para convergência pode ser, por exemplo, $|x_i^{(M+1)} - x_i^{(M)}|_{max} \leq \epsilon$, em que ϵ é a tolerância. Os algoritmos correspondentes a cada um dos métodos são apresentados na sequência.

Método de Jacobi

$$\begin{aligned} x_i^{(ITER+1)} &= x_i^{(ITER)} + R_i^{(ITER)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ R_i^{(ITER)} &= \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \end{aligned} \tag{48}$$

Método de Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} x_i^{(ITER+1)} &= x_i^{(ITER)} + R_i^{(ITER)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ R_i^{(ITER)} &= \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(ITER+1)} - \sum_{j=i}^{n} A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \end{aligned} \tag{49}$$

SOR

$$\begin{aligned} x_i^{(ITER+1)} &= x_i^{(ITER)} + \omega R_i^{(ITER)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \\ R_i^{(ITER)} &= \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j^{(ITER+1)} - \sum_{j=i}^{n} A_{ij} x_j^{(ITER)} \right) \end{aligned} \tag{50}$$

Aqui, ω é o fator de sobre-relaxação e deve estar entre 1 e 2.

Gradiente Conjugado

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}^{(0)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \\ &\boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{r}^{(0)} \\ &ITER = 0 \\ &\text{Faça:} \\ &\qquad \alpha^{(ITER)} = \frac{\boldsymbol{r}^{(ITER)} \cdot \boldsymbol{r}^{(ITER)}}{\boldsymbol{p}^{(ITER)} \cdot \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^{(ITER)}\right)} \\ &\qquad \boldsymbol{x}^{(ITER+1)} = \boldsymbol{x}^{(ITER)} + \alpha^{(ITER)} \boldsymbol{p}^{(ITER)} \\ &\qquad \boldsymbol{r}^{(ITER+1)} = \boldsymbol{r}^{(ITER)} - \alpha^{(ITER)} \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}^{(ITER)}\right) \\ &\qquad \text{se } \max(\text{abs}(\boldsymbol{r})) < \epsilon : \\ &\qquad\qquad PARE \\ &\qquad \beta^{(ITER)} = \frac{\boldsymbol{r}^{(ITER+1)} \cdot \boldsymbol{r}^{(ITER+1)}}{\boldsymbol{r}^{(ITER)} \cdot \boldsymbol{r}^{(ITER)}} \\ &\qquad \boldsymbol{p}^{(ITER+1)} = \boldsymbol{r}^{(ITER+1)} + \beta^{(ITER)} \boldsymbol{p}^{(ITER)} \\ &\qquad ITER = ITER + 1 \end{aligned} \tag{51}$$

Faça um programa com 4 funções, cada uma resolvendo o sistema por um dos métodos acima apresentados. As entradas para cada função são a matriz $\boldsymbol{A}$, o vetor $\boldsymbol{b}$ e a tolerância ϵ. A saída de cada função é o vetor $\boldsymbol{x}$ (e o número de iterações ou tempo de execução, quando necessários). Faça **três investigações:**

i) Faça um gráfico de $n \times M$ para os 4 métodos: estude o número de iterações necessárias para a convergência para diferentes valores de n. Assuma $\epsilon = 10^{-7}$ e n até 100 (ou mais). Qual método converge com o menor número de iterações?

ii) Faça um gráfico de $n \times$*tempo de execução* para os 4 métodos: estude o tempo que o computador levou para rodar com diferentes valores de n. Assuma $\epsilon = 10^{-7}$ e n até 100 (ou mais). Qual método é o mais rápido?

iii) Faça um gráfico de $iter \times R_{max}$ para o 4 métodos, em que R_{max} é o valor máximo (absoluto) do resíduo de cada iteração. Cada iteração tem uma matriz de resíduos, então você plotar o valor máximo desse resíduo em cada iteração. Use $n = 20$ ou 40.