Roteiro para o Trabalho 4: Equação do Calor, Soluções Implícitas

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos
Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

O objetivo aqui neste trabalho é resolver alguns problemas sobre a Equação do Calor. Seguem algumas instruções:

- O trabalho é individual. Você pode discutir os exercícios com os seus colegas, mas cada um deve fazer o seu trabalho.
- Você pode utilizar qualquer linguagem de programação.
- Responda os exercícios com texto e gráficos. Comente todos os gráficos que você incluir no relatório.
- O relatório deve ser enviado em formato pdf, em um único arquivo, por meio do Moodle.
- Os códigos devem ser colocados em uma seção de anexos no próprio relatório ou então enviados separadamente no Moodle.

Equação do Calor (2D permanente)

Exercício 1. Equação do calor bidimensional em regime permanente (Equação de Laplace):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \,, \qquad 0 < x < 1 \,, \qquad 0 < y < 1 \,; \tag{1}$$

$$T(x,0) = 0 \,, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{2}$$

$$T(x,1) = 1 \,, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{3}$$

$$T(0,y) = 0 \,, \qquad 0 < y < 1 \tag{4}$$

$$T(1,y) = 0 \,, \qquad 0 < y < 1 \tag{5}$$

Resolva o problema usando diferença finitas centradas e SOR. É necessário usar a matriz A toda? Faça o gráfico de contorno da solução. Compare a solução usando 10 pontos em cada direção e depois 100 pontos. Quanto tempo leva para o computador rodar o problema? Qual é o valor ótimo de ω? Esse valor depende do tamanho da malha?

Exercício 2. Resolva a equação do calor 2D permanente com geração de calor (Equação de Poisson):

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -2\pi^2 \sin \pi x \sin \pi y \ , \qquad 0 < x < 1 \ , \qquad 0 < y < 1 \ ; \tag{6}$$

$$T(x, 0) = 0 \, , \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{7}$$

$$T(x, 1) = 0 \, , \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{8}$$

$$T(0, y) = 0 \, , \qquad 0 < y < 1 \tag{9}$$

$$T(1, y) = 0 \, , \qquad 0 < y < 1 \tag{10}$$

Resolva esse problema usando diferenças finitas centradas e SOR e compare com a solução analítica $T(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$.

Equação do Calor (1D transiente, implícito)

Exercício 3. Resolva novamente o problema proposto no **exercício 3** do Trabalho 3, mas agora com o Método BTCS

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \ , \tag{11}$$

e depois com o método de Crank-Nicolson:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i+1}^{k} - 2T_i^{k} + T_{i-1}^{k}}{\Delta x^2} \right) \ . \tag{12}$$

Compare os resultados obtidos com os 3 métodos numéricos com a solução analítica.

Exercício 4. Resolva novamente o problema proposta no **exercício 5** do Trabalho 3, mas agora com os métodos BTCS e Crank-Nicolson. Compare as soluções.

Equação do Calor (2D transiente, implícito)

Exercício 5. Resolva novamente o **exercício 6** do Trabalho 3, mas agora usando o método BTCS,

$$\frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} = \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^2} \ , \tag{13}$$

e o Crank-Nicolson

$$\begin{aligned}\frac{T_{i,j}^{k+1}-T_{i,j}^{k}}{\Delta t} =& \frac{1}{2}\Bigg(\frac{T_{i+1,j}^{k}-2T_{i,j}^{k}+T_{i-1,j}^{k}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}^{k}-2T_{i,j}^{k}+T_{i,j-1}^{k}}{\Delta y^2}+ \\ &+\frac{T_{i+1,j}^{k+1}-2T_{i,j}^{k+1}+T_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}^{k+1}-2T_{i,j}^{k+1}+T_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^2}\Bigg)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Compare as 3 soluções numéricas entre si e com a solução analítica.

Exercício 6. Resolva o **exercício 7** do Trabalho 3 usando os métodos BTCS e Crank-Nicolson. Compare as soluções.