Roteiro para o Trabalho 2: EDOs

Disciplina: Métodos Numéricos em Termofluidos
Professor: Adriano Possebon Rosa

Departamento de Engenharia Mecânica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

O objetivo aqui neste trabalho é resolver numericamente alguns problemas relacionados a Equações Diferenciais Ordinárias. Seguem abaixo algumas instruções.

- O trabalho é individual. Você pode discutir os exercícios com os seus colegas, mas cada um deve fazer o seu trabalho.
- Você pode utilizar qualquer linguagem de programação.
- Responda os exercícios com texto, gráficos e explicações. Comente todos os gráficos que você incluir no relatório.
- O relatório deve ser enviado em formato pdf, em um único arquivo, por meio do Moodle.
- Os códigos devem ser colocados em uma seção de anexos no próprio relatório ou então enviados separadamente no Moodle.

Equações Diferenciais Ordinárias

Para os exercícios de 1 a 5: resolva numericamente a equação diferencial ordinária

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t, y) \ , \qquad y(t_o) = y_o \tag{1}$$

usando os métodos de Euler Explícito,

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_n \ , \tag{2}$$

Euler Implícito,

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f_{n+1} \ , \tag{3}$$

Runge-Kutta de segunda ordem,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) \ , \tag{4}$$

$$k_1 = \Delta t f(t_n, y_n) \ , \tag{5}$$

$$k_2 = \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_1) \ , \tag{6}$$

e Runge-Kutta de quarta ordem,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \ , \tag{7}$$

$$k_1 = \Delta t f(t_n, y_n) \ , \tag{8}$$
$$k_2 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \ , \tag{9}$$
$$k_3 = \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \ , \tag{10}$$
$$k_4 = \Delta t f(t_n + \Delta t, y_n + k_3) \ . \tag{11}$$

Em todos esses problemas, compare, por meio de gráficos, os resultados usando esses métodos com a solução analítica da EDO. Utilize um passo de tempo Δt conveniente.

Exercício 1. $y' = 2 - 2t + 4t^2 - 4t^3 - 4t^4 \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \quad y(0) = 1$. Solução analítica: $y(t) = 1 + 2t - t^2 + \frac{4}{3}t^3 - t^4 - \frac{4}{5}t^5$.

Exercício 2. $y' = 1 + \frac{y}{t} \ , \quad 1 \leq t \leq 2 \ , \quad y(1) = 2$. Solução analítica: $y(t) = t \ln t + 2t$.

Exercício 3. $y' = t^2 y \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \quad y(0) = 1$. Solução analítica: $y(t) = \exp(t^3/3)$.

Exercício 4. $y' = ty^2 \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \quad y(0) = 1$. Solução analítica: $y(t) = -\frac{2}{t^2-2}$. Observação: Nesse caso não é necessário resolver usando o método de Euler Implícito.

Exercício 5. $y' = 1 + 0.5y^2 \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \quad y(0) = 0.5$. Solução analítica:
$y(t) = \frac{1}{\sqrt{0.5}} \tan\left[\sqrt{0.5}t + \tan^{-1}\left(0.5^{3/2}\right)\right]$. Observação: Nesse caso não é necessário resolver usando o método de Euler Implícito.

Exercício 6. Considere novamente a equação $y' = 2-2t+4t^2-4t^3-4t^4 \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ , \quad y(0) = 1$. Para um tempo fixo $t = 1$, faça um estudo do erro (módulo da diferença entre o valor y calculado e o valor exato) em função do valor do Δt utilizado. Compare os resultados obtidos com os 4 métodos. Disserte.

Exercício 7. O deslocamento angular $\theta(t)$, em radianos, de um pêndulo é dado por

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0, \qquad \text{com } \theta(0) = \theta_0 \text{ e } \theta'(0) = \theta'_0 \ , \tag{12}$$

com $g = 9.81\,m/s^2$ sendo a aceleração gravitacional e L o comprimento do pêndulo. Para pequenos valores de θ, essa equação pode ser simplificada para

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \ . \tag{13}$$

Faça gráficos de θ em função de t, com um período de oscilação, para $\theta(0) = 0.1$ e $\theta(0) = 0.5$, $\theta'(0) = 0$ e $L = 0.1, 1.0$ e $10\,m$. Utilize a equação exata e a simplificada. Compare os resultados.

Exercício 8. Em um circuito com tensão aplicada $\epsilon(t)$ e com resistência R, indutância L e capacitância C em paralelo, a corrente i satisfaz a equação diferencial

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2\epsilon}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{1}{L}\epsilon \ . \tag{14}$$

Suponha que $C = 0,3\, farads$, $R = 1,4\, ohm$, $L = 1,7\, henrie$ e que a tensão seja dada, em $Volts$, por:

$$\epsilon(t) = e^{-0,06\pi t} \sin(2t - \pi) \ . \tag{15}$$

Se $i(0) = 0$, encontre a corrente para t entre 0 e $10\, s$. Resolva este problema usando o método de Euler Explícito e o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Compare as soluções.

Exercício 9. O crescimento populacional de uma dada espécie pode ser modelado por uma EDO do tipo

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \ , \quad N(0) = N_0 \ , \tag{16}$$

em que N é a população, aN representa a taxa de nascimento e bN^2 representa a taxa de mortalidade causada por doenças e competição por alimentos. Se $N_0 = 100000$, $a = 0,1$ e $b = 10^{-7}$, calcule $N(t)$ para t entre 0 e 20 anos. Varie o coeficiente b e veja como isso afeta no número de indivíduos. Resolva este problema usando o método de Euler Explícito e o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Compare as soluções.

Exercício 10. As populações de duas espécies competindo pela mesma fonte de alimentação podem ser modeladas pelo par de EDOS

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(a_1 - b_1 N_1 - c_1 N_2), \qquad \text{com } N_1(t=0) = N_{1,0} \tag{17}$$

e

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(a_2 - b_2 N_2 - c_2 N_1), \qquad \text{com } N_2(t=0) = N_{2,0} \ . \tag{18}$$

Nessas equações, N_i é o número de indivíduos da espécie i, $a_i N_i$ representa a taxa de nascimento, $b_i N_i^2$ representa a taxa de mortalidade e $c_i N_i N_j$ representa a taxa de mortalidade devido à competição por alimentos. Se $N_{1,0} = N_{2,0} = 10^5$, $a_1 = 0.1$, $b_1 = 8 \times 10^{-7}$, $c_1 = 10^{-6}$, $a_2 = 0.1$, $b_2 = 8 \times 10^{-7}$ e $c_2 = 10^{-7}$, calcule $N_1(t)$ e $N_2(t)$ entre 0 e 10 anos.