

Teoria da Decisão

Processo Analítico Hierárquico
Analytic Hierarchy Process (AHP)

Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

www.ppgee.ufmg.br/~lusoba

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Graduação em Engenharia de Sistemas



Sumário

1

Processo Analítico Hierárquico

- Apresentação
- Funcionamento do método AHP
- Exemplo de aplicação do método AHP



Introdução

Analytic Hierarchy Process (AHP)

- Caracteriza uma teoria de medição (ou classificação) baseada em comparações par a par das alternativas.
- Sustenta-se sobre uma escala de prioridades definida a partir de julgamentos de *experts* na área do problema.
- Os julgamentos podem ser inconsistentes, entretanto, o método AHP permite tanto quantificar essa consistência quanto melhorar tais julgamentos.



Introdução

Analytic Hierarchy Process (AHP)

- Os julgamentos são apresentados por seres humanos, logo é interessante que o número de critérios empregados na comparação seja inferior a 10.
- Estudos psicológicos mostram que o número de itens que podem ser comparados adequadamente por seres humanos está entre 5 e 9; o AHP utiliza uma matemática similar.
- De fato, nem toda informação disponível é relevante para o processo de decisão:
 - O acesso a grande quantidade de dados não reflete necessariamente a uma melhor escolha.



Definições

Passos do processo de decisão

- 1 Defina o problema e determine o tipo de conhecimento requerido.
- 2 Estruture a hierarquia de decisão de cima para baixo, especificando o objetivo principal, os critérios e as alternativas.
- 3 Construa um conjunto de matrizes de comparação par a par, considerando os diferentes níveis de hierarquia.
- 4 Use as prioridades obtidas por meio das comparações em cada nível para gerar a prioridade global das alternativas.



Definições

A escala fundamental de comparações

The Fundamental Scale for Pairwise Comparisons		
Intensity of Importance	Definition	Explanation
1	Equal importance	Two elements contribute equally to the objective
3	Moderate importance	Experience and judgment moderately favor one element over another
5	Strong importance	Experience and judgment strongly favor one element over another
7	Very strong importance	One element is favored very strongly over another; its dominance is demonstrated in practice
9	Extreme importance	The evidence favoring one element over another is of the highest possible order of affirmation
Intensities of 2, 4, 6, and 8 can be used to express intermediate values. Intensities of 1.1, 1.2, 1.3, etc. can be used for elements that are very close in importance.		

- Apresentação
- Funcionamento do método AHP
- Exemplo de aplicação do método AHP






Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Definição do problema

O objetivo é escolher o líder mais adequado para uma companhia considerando-se três candidatos. Os fatores considerados são experiência, educação, carisma e idade.

- Experiência: o trabalho requer habilidades e conhecimentos práticos;
- Educação: o mundo atual requer profissionais qualificados;
- Carisma: o líder deve conseguir motivar a equipe durante o período de transição da chefia;
- Idade: o cargo de liderança se estenderá por 5 anos; o que ocorre se após esse tempo o líder estiver próximo, ou não, da aposentadoria?

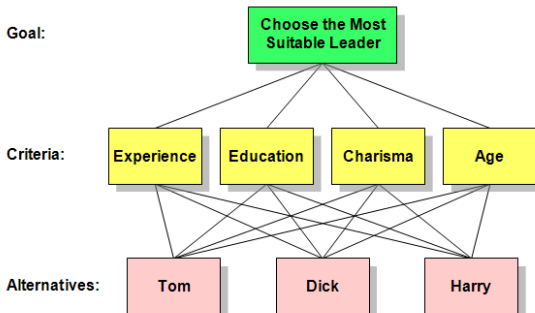
Cenário de decisão

	 Tom	 Dick	 Harry
Age	50 years	60 years	30 years
Experience	10 years with us, plus 16 in a different industry, all in sales and marketing, all with great success. Currently VP Sales, Marketing, and Customer Service.	30 years with us, 8 in another company in our industry. Has had key responsibilities in every department. Currently Executive VP.	5 years with us, 4 with a CPA firm. Completed the management training program in record time and with record performance. Currently VP Finance.
Education	BS, Marketing, Marietta College, 26 years ago. Online MBA, University of Phoenix, last year.	BA and MA, American History, Duke University, 39 years ago. Phi Beta Kappa.	BS, Economics, Princeton, 10 years ago. MBA, Pittsburgh, 5 years ago. Licensed CPA.
Leadership Qualities	An active, inspirational leader. Beloved by his subordinates and all those who have ever worked with him.	A bit reserved. Leads by example and strength of knowledge. Everyone in the company likes him and respects him.	Leads quietly from his office. Highly respected for his brilliance and knowledge of financial matters.

Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Hierarquia de decisão empregada pelo AHP

O AHP determina *prioridades* para os candidatos em relação aos critérios e *prioridades* para os critérios em relação ao objetivo principal. A combinação desses dados gera a prioridade global.





Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Comparações par a par: alternativas vs. critérios

Empregando a escala fundamental do AHP e as informações disponíveis sobre o cenário de decisão, a unidade de decisão define:

Experience	Tom	Dick	Harry
Tom	1	1/4	4
Dick	4	1	9
Harry	1/4	1/9	1



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Comparações par a par: alternativas vs. critérios

O AHP processa os dados gerando as prioridades para os candidatos em relação ao critério experiência:

Experience	Tom	Dick	Harry	Priority
Tom	1	1/4	4	0.217
Dick	4	1	9	0.717
Harry	1/4	1/9	1	0.066
Sum of Priorities				1.000
Inconsistency				0.035



Exemplo de aplicação do método AHP

Definição das Prioridades

Vetor de prioridades

- Usualmente, o vetor de prioridades é dado pelo **autovetor direito principal** (v) associado à matriz de comparações (A), i.e.,

$$Av = \lambda_{\max} v$$

$$\begin{cases} x_0 &= rand(n, 1); \\ x &= fsolve(@(x) (A - \max(eig(A)) * eye(n)) * x, x_0, optimset('Algorithm', 'trust-region-dogleg', 'Display', 'off')); \\ v &= x / sum(x); \end{cases}$$



Exemplo de aplicação do método AHP

Definição das Prioridades

Vetor de prioridades

- Entretanto, o vetor de prioridades é frequentemente obtido da seguinte forma (aproximação):
 - normaliza-se cada coluna de A com relação a soma de seus elementos;
 - o vetor de prioridades é dado então pela média dos elementos de cada linha da matriz normalizada.

$$\begin{cases} s = \text{sum}(A, 1); \\ \text{for } i = 1 : n, N(:, i) = A(:, i)/s(i); \text{ end}; \\ v = \text{mean}(N, 2); \end{cases}$$



Consistência dos Julgamentos

Consistência dos julgamentos

- Caso os decisores gerem julgamentos “perfeitos”, i.e., julgamentos absolutamente consistentes, então:

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik} \quad \forall i, j, k \quad \lambda_{max} = n \quad IC = 0$$

- Quando uma matriz apresenta alto grau de inconsistência, geralmente os julgamentos foram aleatórios e, por isso, devem ser refeitos ou tratados por métodos de melhoria de consistência.



Exemplo de aplicação do método AHP

Consistência dos Julgamentos

Consistência dos julgamentos

n	3	4	5 ou +
IC max	5%	8%	10%

Tabela: Valores máximos de IC em função da ordem da matriz - Saaty (1991)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ICA	0	0	0.52	0.89	1.11	1.25	1.35	1.40	1.45	1.49

Tabela: ICAs em função da ordem da matriz - Colin (2007)



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Comparações par a par: alternativas vs. critérios

O AHP processa os dados gerando as prioridades para os candidatos em relação ao critério educação:

Education	Tom	Dick	Harry	Priority
Tom	1	3	1/5	0.188
Dick	1/3	1	1/7	0.081
Harry	5	7	1	0.731
Sum of Priorities				1.000
Inconsistency				0.062



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Comparações par a par: alternativas vs. critérios

O AHP processa os dados gerando as prioridades para os candidatos em relação ao critério carisma:

Charisma	Tom	Dick	Harry	Priority
Tom	1	5	9	0.743
Dick	1/5	1	4	0.194
Harry	1/9	1/4	1	0.063
Sum of Priorities				1.000
Inconsistency				0.069



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Comparações par a par: alternativas vs. critérios

O AHP processa os dados gerando as prioridades para os candidatos em relação ao critério idade:

Age	Tom	Dick	Harry	Priority
Tom	1	1/3	5	0.265
Dick	3	1	9	0.672
Harry	1/5	1/9	1	0.063

Sum of Priorities 1.000

Inconsistency 0.028



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Comparações par a par: critérios vs. objetivo

O AHP processa os dados gerando as prioridades para os critérios em relação ao objetivo principal:

Criteria	Experience	Education	Charisma	Age	Priority
Experience	1	4	3	7	0.547
Education	1/4	1	1/3	3	0.127
Charisma	1/3	3	1	5	0.270
Age	1/7	1/3	1/5	1	0.056

Sum of Priorities 1.000

Inconsistency 0.044



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Síntese final das prioridades

- A prioridade global é obtida de maneira direta via operações básicas ao longo da estrutura hierárquica.
- A prioridade global de cada alternativa em relação ao objetivo é dada pela seguinte soma:
 - prioridade da alternativa com relação à Experiência \times a prioridade do critério Experiência em relação ao objetivo; +
 - prioridade da alternativa com relação à Educação \times a prioridade do critério Educação em relação ao objetivo; +
 - prioridade da alternativa com relação à Carisma \times a prioridade do critério Carisma em relação ao objetivo; +
 - prioridade da alternativa com relação à Idade \times a prioridade do critério Idade em relação ao objetivo.



Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Síntese final das prioridades

- Por exemplo, a prioridade global de Tom em relação ao objetivo:
 - prioridade de Tom w.r.t. Experiência é $0.217 \times 0.547 = 0.119$; +
 - prioridade de Tom w.r.t. Educação é $0.188 \times 0.127 = 0.024$; +
 - prioridade de Tom w.r.t. Carisma é $0.703 \times 0.270 = 0.201$; +
 - prioridade de Tom w.r.t. Idade é $0.265 \times 0.056 = 0.015$.
- A prioridade total de Tom é dada por $0.119 + 0.024 + 0.201 + 0.015 = 0.358$.



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha de um líder para uma companhia

Síntese final das prioridades

Prioridade global dos candidatos via AHP:

Candidate	Priority with Respect to				
	Experience	Education	Charisma	Age	Goal
Tom	0.119	0.024	0.201	0.015	0.358
Dick	0.392	0.010	0.052	0.038	0.492
Harry	0.036	0.093	0.017	0.004	0.149
Totals:	0.547	0.127	0.270	0.056	1.000

Parabéns Dick, você é o novo líder!



Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

Definição do problema

O objetivo é escolher o emprego mais adequado considerando-se quatro alternativas.

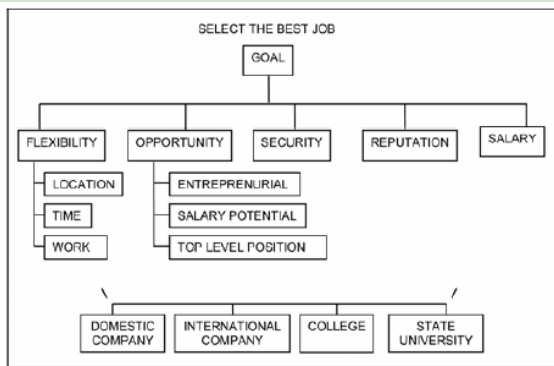
- companhia doméstica; companhia internacional; faculdade; universidade.

Os fatores considerados são flexibilidade, oportunidade, segurança, reputação e salário.

- O fator Flexibilidade possui três subcritérios: local, tempo e trabalho;
- O fator Oportunidade possui três subcritérios: empreendedor, salário potencial e gerência.

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

Cenário de decisão





Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

Comparações par a par

Existem no total 12 matrizes de comparações:

- 01 para os critérios em relação ao objetivo;
- 02 para os subcritérios em relação ao critério correspondente;
- 09 para as alternativas em relação ao conjunto de critérios.
 - flexibilidade de local, tempo e trabalho;
 - oportunidade de empreendedorismo, salário e posição;
 - segurança;
 - reputação;
 - salário.



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

Comparações par a par

Matriz de comparação dos critérios principais em relação ao objetivo:

	<i>Flexibility</i>	<i>Opportunities</i>	<i>Security</i>	<i>Reputation</i>	<i>Salary</i>	<i>Priorities</i>
Flexibility	1	1/4	1/6	1/4	1/8	0.036
Opportunities	4	1	1/3	3	1/7	0.122
Security	6	3	1	4	1/2	0.262
Reputation	4	1/3	1/4	1	1/7	0.075
Salary	8	7	2	7	1	0.506

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

Comparações par a par

Matriz de comparação dos subcritérios em relação a flexibilidade:

	<i>Location</i>	<i>Time</i>	<i>Work</i>	<i>Priorities</i>
Location	1	1/3	1/6	0.091
Time	3	1	1/4	0.218
Work	6	4	1	0.691

Matriz de comparação dos subcritérios em relação a oportunidade:

...



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

Comparações par a par

Matriz de comparação das alternativas em relação ao potencial aumento de salário:

	<i>Domestic Co</i>	<i>Int'l Co</i>	<i>College</i>	<i>State Univ.</i>	<i>Priorities</i>
Domestic company	1	4	3	6	0.555
Int'l company	1/4	1	3	5	0.258
College	1/3	1/3	1	2	0.124
State University	1/6	1/5	1/2	1	0.064

Matrizes de comparação das alternativas em relação aos demais critérios:

...



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

Comparações par a par

Síntese das prioridades globais:

<i>Criteria Subcriteria</i>	<i>Flexibility 0.036</i>			<i>Future opportunity 0.122</i>			<i>Security 0.262</i>	<i>Reputation 0.075</i>	<i>Salary 0.506</i>	<i>Overall Priority</i>
<i>Global weights (criteria \times subcriteria)</i>	<i>Location 0.091</i>	<i>Time 0.218</i>	<i>Work 0.691</i>	<i>Entrepreneurial 0.105</i>	<i>Salary increases 0.637</i>	<i>Top level position 0.258</i>	0.262	0.075	0.506	
Domestic Company	0.003	0.008	0.025	0.013	0.078	0.032	0.225	0.064	0.124	0.193
Internat'n'l Company	0.295	0.084	0.062	0.090	0.555	0.591	0.054	0.101	0.547	0.333
College	0.496	0.055	0.115	0.061	0.258	0.274	0.095	0.247	0.289	0.214
State University	0.131	0.285	0.249	0.239	0.124	0.083	0.626	0.588	0.039	0.262

Cada fator é multiplicado pela prioridade do critério ou subcritério associado e a soma desses resultados fornece a prioridade global.



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

Comparações par a par

Síntese das prioridades globais:

<i>Name</i>	<i>Normalised priorities</i>	<i>Idealised priorities</i>
Domestic Company	0.193	0.579
Internatn'l Company	0.333	1.000
College	0.214	0.643
State University	0.262	0.785



Exemplo de aplicação do método AHP

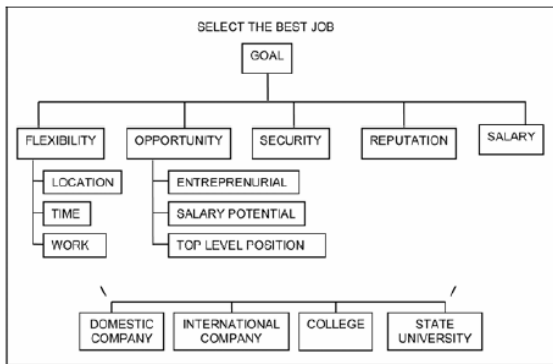
Modelo baseado em Escala (Categoria)

AHP via modelo de escala

- Método alternativo (simples) para determinação das prioridades das alternativas;
- Escalas (categorias) são estabelecidas para ambos os critérios e subcritérios e os valores de prioridades são obtidos via comparações par a par;
- As prioridades dos critérios em relação ao objetivo e dos subcritérios em relação ao critério correspondente são calculadas como no modelo relativo.

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

Cenário de decisão





Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

AHP via modelo de escala

Cálculo das prioridades para as escalas (categorias) associadas à segurança no trabalho:

<i>Job Security</i>	<i>High</i>	<i>Medium</i>	<i>Low</i>	<i>Priorities</i>	<i>Idealised Priorities</i>
High	1	3	7	0.6586	1.0000
Medium	1/3	1	4	0.2628	0.3989
Low	1/7	1/4	1	0.0786	0.1193

Neste modelo, as prioridades idealizadas são sempre empregadas.



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

AHP via modelo de escala

Prioridades das escalas para todos os critérios:

<i>Job Security</i>	<i>Reputation</i>	<i>Salary</i>	<i>Location flexibility</i>	<i>Time flexibility</i>	<i>Work flexibility</i>	<i>Entrepreneurial</i>	<i>Salary increase</i>	<i>Top level</i>
High	Excellent	>3000	Very flexible	Flexible	Very flexible	Very probable	High	Likely
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Med	Above Avg	2000–3000	Flexible	Avg	Flexible	Probable	Above Avg	Depends
0.399	0.487	0.551	0.431	0.405	0.665	0.373	0.299	0.399
Low	Average	1500–2000	Avg flexible	Not flexible	Avg flexible	Not probable	Average	Not likely
0.119	0.403	0.217	0.187	0.164	0.423	0.113	0.119	0.119
	Below Avg	1000–1500	Not flexible		Not flexible	Impossible		
		0.171	0.162		0.195	0.075		
	Poor	<1500	Stable		Stable			
		0.113	0.059		0.122			



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

AHP via modelo de escala

Atribuição das categorias para as alternativas em cada critério:

	<i>Total</i>	<i>Priorities</i>	<i>3 jobsecurity</i> 0.261899	<i>4 Reputation</i> 0.074559	<i>5 Salary</i> 0.505585	<i>Location</i> <i>flexibility</i> 0.003296	<i>Time</i> <i>flexibility</i> 0.007846	<i>Work flexibility</i> 0.024909	<i>Entrepreneurial</i> 0.012766	<i>Salary increase</i> 0.077653	<i>Top level</i> 0.031487
International Company	0.619340	0.310067	Low	Above average	>3000	Very flexible	Not flexible	Not flexible	Impossible	Above avg.	Depends
Domestic Company	0.363962	0.182214	Medium	Average	1500–2000	Flexible	Avg.	Not flexible	Impossible	High	Likely
State University	0.505153	0.252900	High	Excellent	1000–1500	Stable	Flexible	Very flexible	Very probable	Avg.	Likely
College	0.508984	0.254818	Medium	Excellent	2000–3000	Not flexible	Flexible	Flexible	probable	Avg.	Depends

- As prioridades dos critérios e subcritérios foram obtidas do modelo relativo;
- Cada alternativa é associada a uma categoria em cada critério e subcritério considerado.



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

AHP via modelo de escala

Valores numéricos para as escalas adotadas:

	<i>Totals</i>	<i>Criterion Priorities</i>	0.262	0.075	0.506	0.003	0.008	0.025	0.013	0.078	0.031
		<i>Priorities</i>	<i>Job security</i>	<i>Reputation</i>	<i>Salary</i>	<i>Location flexibility</i>	<i>Time flexibility</i>	<i>Work flexibility</i>	<i>Entrepreneurial</i>	<i>Salary increase</i>	<i>Top level</i>
International Company	0.619	0.310	0.119	0.487	1.000	1.000	0.164	0.195	0.075	0.299	0.399
Domestic Company	0.364	0.182	0.399	0.403	0.217	0.431	0.405	0.195	0.075	1.000	1.000
State University	0.505	0.253	1.000	1.000	0.162	0.087	1.000	1.000	1.000	0.119	1.000
College	0.509	0.255	0.399	1.000	0.551	0.124	1.000	0.665	0.373	0.119	0.399

- Cada categoria recebe o valor numérico relacionado a sua prioridade;
- A soma ponderada das prioridades (ao longo de cada linha) fornece a coluna *total*;
- A normalização da coluna *total* (em relação a soma de seus valores) fornece o vetor de prioridades.



Exemplo de aplicação do método AHP

Estudo de Caso: Escolha do melhor emprego

AHP via modelo de escala

Comparação entre os modelos relativo e por escala:

	<i>Relative model results</i>	<i>Ratings model results</i>
Domestic Company	0.192	0.182
Int. Company	0.333	0.310
College	0.214	0.255
State Univ.	0.261	0.253

Modelo baseado em Escala (Categoria)

AHP via modelo de escala ou modelo relativo?

- Os métodos não fornecem exatamente a mesma prioridade, mas os resultados via modelo de escala são adequados;
- O modelo relativo, via comparações par a par das alternativas, é mais preciso;
- O modelo de escala pode tratar muitas alternativas rapidamente:
 - Não realiza comparações par a par entre as ações existentes;
 - Apenas as categorias são comparadas par a par.

O método AHP

- Pressupõe que as preferências do decisor são bem definidas antes do início do processo de decisão.
- Permite que os julgamentos não sejam perfeitamente transitivos, mas sugere julgamentos consistentes.
- Desenvolvimento do processo pela unidade de decisão:
 - Os julgamentos são realizados em conjunto; ou
 - Cada *expert* realiza seu próprio julgamento e o resultado final é obtido via ponderação, e.g., considerando a experiência ou importância do indivíduo.

Conclusão

Estudos envolvendo o AHP

- Criação de novas escalas baseadas em lógica nebulosa.
- Síntese de formas eficientes para cálculo das prioridades e agregação das mesmas.
- Incorporação de técnicas de decisão a métodos de otimização multiobjetivo.



Literatura Especializada



T. L. Saaty, Decision Making with the Analytic Hierarchy Process, Int. J. Services Sciences, vol. 1, no. 1, p. 83–98, 2008.



Analytic hierarchy process: Leader example, From Wikipedia, the free encyclopedia, <http://goo.gl/Z353wi>, 2014.



N. Bhushan, K. Rai, Strategic Decision Making: Applying the Analytic Hierarchy Process, ser. Decision Engineering, Springer, 2004.



J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys, Springer Science, 2005.



B. Roy, Decision-Aid and Decision-Making, European Journal of Operational Research, vol. 45, p. 324–331, 1990.