Teoria da Decisão

Métodos Baseados em Relações de Sobreclassificação

Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

www.ppgee.ufmg.br/∼lusoba

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Graduação em Engenharia de Sistemas

Sumário

1. **Métodos de Sobreclassificação**
   - Apresentação
   - Métodos baseados em relações de sobreclassificação

Introdução

Questão crucial em tomada de decisão

Como considerar simultaneamente todos os critérios para a comparação das ações possíveis?

Procedimentos de agregação multicritério:

- Síntese de critério;
- Síntese de sistema de relações de preferência.

Introdução

Síntese de sistema de relações de preferência

- Distingue-se da síntese de critério principalmente por não considerar cada ação $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ separadamente.
- Relações de preferência são estabelecidas a partir de comparações par a par entre as alternativas.
- Não garante uma pré-ordem completa em $\mathcal{A}$.

Introdução

Síntese de sistema de relações de preferência

- Esse sistema de preferência pode ser expresso por meio de relações binárias (modelo clássico ou nebuloso).
- Algumas dificuldades:
  - comparações par a par podem gerar intransitividades;
  - incomparabilidade entre ações podem ocorrer;
  - uma regra adicional de decisão pode ser necessária.

Introdução

Métodos baseados em síntese de relações de preferência

Escola Francesa (década de 1960)

- Métodos baseados em relações de sobreclassificação[a].
- Multicriteria Decision Aid (MCDA).
- Atitude construtiva:
  - Basea-se em modelos mais reais da preferência humana;
  - Auxilia o decisor a construir suas preferências.

[a] *surclassement* ou *outranking*

Introdução

Escola Francesa

ELECTRE I	Elimination Et Choix Traduisant la Realité
ELECTRE II	
ELECTRE III	
ELECTRE IV	
ELECTRE TRI	
PROMETHEE I	Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations
PROMETHEE II	
PROMETHEE V	

Tabela: Principais Métodos da Escola Francesa

Sumário

1. **Métodos de Sobreclassificação**
   - Apresentação
   - Métodos baseados em relações de sobreclassificação

Definições

Notação

Seja um conjunto de ações ou alternativas $\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$ e um conjunto de critérios c_j, $j = 1, \ldots, n_c$. A avaliação da ação $\boldsymbol{a}_i$ pelo critério c_j é dada por $c_j(\boldsymbol{a}_i)$.

Representação da Sobreclassificação

As relações entre diferentes ações podem ser representadas num grafo direcionado G. Uma seta de $\boldsymbol{a}_i$ para $\boldsymbol{a}_j$ indica que a ação $\boldsymbol{a}_i$ sobreclassifica (preferência ampla) $\boldsymbol{a}_j$.

Definições

Exemplo de Sobreclassificação

Represente o grafo das relações entre as ações.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1							
a_2	S						
a_3	S						
a_4	S	S	S				
a_5	S	S				S	
a_6							
a_7							

Tabela: Exemplo de relações de sobreclassificação entre ações

Nota: $a_i \, S \, a_j$: a_i sobreclassifica a_j.

Definições

Kernel de um Grafo

O kernel de um grafo é composto pelo conjunto das ações tal que:

- todas as ações que não pertencem ao kernel são sobreclassificadas por pelo menos uma ação do kernel;
- as ações do kernel não sobreclassificam outras ações do kernel.

- Qual o kernel do exemplo anterior?
- Existem ações incomparáveis nesse exemplo?

Definições

Índice de concordância

Seja um conjunto de ações ou alternativas $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$ e um conjunto de critérios c_j, $j = 1, \ldots, n_c$.

O critério c_j é compatível com a hipótese "$\boldsymbol{a}_i$ sobreclassifica $\boldsymbol{a}_k$" se $\boldsymbol{a}_i$ é pelo menos tão boa quanto $\boldsymbol{a}_k$: $c_j(\boldsymbol{a}_i) \geq c_j(\boldsymbol{a}_k)$.

Condição de discordância

A condição de discordância permite ao tomador de decisão recusar a sobreclassificação de uma ação sobre outra, se uma oposição muito alta existe em pelo menos um critério.

ELECTRE I

- Proposto por B. Roy em 1968.
- "Elimination and Choice Expressing the Reality".
- Permite determinar uma pré-ordem total das ações.

Passos

1. Defina pesos w_j para cada um dos $J = \{1, \ldots, n_c\}$ critérios.
2. Estabeleça comparações entre cada par $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) \in \mathcal{A}$, gerando os seguintes conjuntos de índices:

$$J^{+}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \{j \in J \mid c_j(\boldsymbol{a}_i) > c_j(\boldsymbol{a}_k)\}$$

$$J^{=}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \{j \in J \mid c_j(\boldsymbol{a}_i) = c_j(\boldsymbol{a}_k)\}$$

$$J^{-}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \{j \in J \mid c_j(\boldsymbol{a}_i) < c_j(\boldsymbol{a}_k)\}$$

ELECTRE I

Passos

3. Converta as relações entre ações em valores numéricos:

$$P^{+}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \sum_j w_j, \quad j \in J^{+}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)$$

$$P^{=}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \sum_j w_j, \quad j \in J^{=}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)$$

$$P^{-}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \sum_j w_j, \quad j \in J^{-}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)$$

ELECTRE I

Passos

4. Calcule o índice de concordância:

$$C_{ik} = \frac{P^{+}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) + P^{=}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)}{\sum\limits_{j \in J} w_j}\ ,\ 0 \leq C_{ik} \leq 1$$

5. Calcule o índice de discordância:

$$D_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{se } J^{-}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \varnothing \\ \delta_j \max\left(c_j(\boldsymbol{a}_k) - c_j(\boldsymbol{a}_i)\right),\ j \in J^{-}(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k), & \text{c.c.} \end{cases}$$

tal que δ_j é o fator de escala associado ao critério c_j e $0 \leq D_{ik} \leq 1$.

ELECTRE I

Passos

6. Obtenha as relações de sobreclassificação e as melhores ações:

$$\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{S} \, \boldsymbol{a}_k \iff \begin{cases} C_{ik} \geq \tau_c \\ D_{ik} \leq \tau_d \end{cases}$$

τ_c**:** limiar de concordância, em geral ≈ 0.7;

τ_d**:** limiar de discordância, em geral ≈ 0.3.

ELECTRE I

Suponha as notas de 5 estudantes em 5 matérias

(i,j)	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
E_1	7	13	8	12	11
E_2	8	11	11	12	11
E_3	20	2	10	3	15
E_4	16	14	16	14	13
E_5	12	12	8	8	10

Quem é o melhor estudante?

ELECTRE I

Critérios adotados pelo decisor

1. c_1: A nota média de todas as matérias deve ser a maior possível;
2. c_2: A nota mínima deve ser maior ou igual a 8;
3. c_3: A variação em torno da média deve ser a menor possível.

ELECTRE I

Critérios adotados pelo decisor

1. c_1: A nota média de todas as matérias deve ser a maior possível;

ELECTRE I

Critérios adotados pelo decisor

1. c_1: A nota média de todas as matérias deve ser a maior possível;

$$c_1(E) = \frac{\sum_M nota(E, M)}{5}$$

2. c_2: A nota mínima deve ser maior ou igual a 8;

ELECTRE I

Critérios adotados pelo decisor

1. c_1: A nota média de todas as matérias deve ser a maior possível;

$$c_1(E) = \frac{\sum_M nota(E, M)}{5}$$

2. c_2: A nota mínima deve ser maior ou igual a 8;

$$c_2(E) = \begin{cases} 10, & \text{se } \min_M(nota(E, M)) \geq 8 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

3. c_3: A variação em torno da média deve ser a menor possível.

ELECTRE I

Critérios adotados pelo decisor

1. c_1: A nota média de todas as matérias deve ser a maior possível;

$$c_1(E) = \frac{\sum_M nota(E, M)}{5}$$

2. c_2: A nota mínima deve ser maior ou igual a 8;

$$c_2(E) = \begin{cases} 10, & \text{se } \min_M(nota(E, M)) \geq 8 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

3. c_3: A variação em torno da média deve ser a menor possível.

$$c_3(E) = \frac{\sqrt{\sum_M (nota(E, M) - c_1(E))^2}}{5}$$

ELECTRE I

Cálculo dos critérios

	c_1	c_2	c_3
E_1	10.2	0	1.035
E_2	10.6	10	0.606
E_3	10	0	3.08
E_4	14.6	10	0.5366
E_5	10	10	0.8

Tabela: Valores dos critérios

	c_1'	c_2'	c_3'
E_1	0.87	0	16.08
E_2	2.61	20	19.45
E_3	0	0	0
E_4	20	20	20
E_5	0	20	17.9

Tabela: Critérios escalados $[0, 20]$

- Vale notar que o fator de escala adotado é $\delta_j = 1/20$.

ELECTRE I

Comparações entre estudantes (ações)

J^+	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		$\emptyset$	$\{1,3\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
E_2	$\{1,2,3\}$		$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,3\}$
E_3	$\emptyset$	$\emptyset$		$\emptyset$	$\emptyset$
E_4	$\{1,2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$		$\{1,3\}$
E_5	$\{2,3\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\emptyset$	

$J^=$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
E_2	$\emptyset$		$\emptyset$	$\{2\}$	$\{2\}$
E_3	$\{2\}$	$\emptyset$		$\emptyset$	$\{1\}$
E_4	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$		$\{2\}$
E_5	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	

J^-	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
E_2	$\emptyset$		$\emptyset$	$\{1,3\}$	$\emptyset$
E_3	$\{1,3\}$	$\{1,2,3\}$		$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$
E_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		$\emptyset$
E_5	$\{1\}$	$\{1,3\}$	$\emptyset$	$\{1,3\}$	

ELECTRE I

Cálculo dos coeficientes P^+ e $P^=$

- Definição dos pesos dos critérios:

$$w_1 = 0.50, \quad w_2 = 0.25, \quad w_3 = 0.25$$

P^+	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		0	0.75	0	0.5
E_2	1		1	0	0.75
E_3	0	0		0	0
E_4	1	0.75	1		0.75
E_5	0.5	0	0.5	0	

$P^=$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		0	0.25	0	0
E_2	0		0	0.25	0.25
E_3	0.25	0		0	0.5
E_4	0	0.25	0		0.25
E_5	0	0.25	0.5	0.25	

ELECTRE I

Cálculo dos coeficientes de concordância

C_{ik}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		0	1	0	0.5
E_2	1		1	0.25	1
E_3	0.25	0		0	0.5
E_4	1	1	1		1
E_5	0.5	0.25	1	0.25	

Tabela: Coeficiente de concordância C_{ik}

D_{ik}	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1		1	0	1	1
E_2	0		0	0.870	0
E_3	0.804	1		1	1
E_4	0	0	0		0
E_5	0.043	0.130	0	1	

Tabela: Coeficiente de discordância D_{ik}

ELECTRE I

Relações de sobreclassificação das ações

Considerando que os testes sejam satisfeitos para $C_{ik} \geq 0.75$ e $D_{ik} \leq 0.25$:

- Quais C_{ik} satisfazem o teste de concordância?
- Quais D_{ik} não satisfazem o teste de discordância?
- Esboce o grafo das relações entre as ações.
- Qual a ordem de sobreclassificação entre as ações (estudantes)?

ELECTRE I

Discussão

- A classificação obtida é coerente: corresponde ao resultado que seria obtido de maneira convencional;
- Assim, este método “imita” o pensar humano;
- Possui maior capacidade para lidar com grandes quantidades de dados do que o ser humano.

ELECTRE Iv

- Corresponde ao método ELECTRE I com limiar de veto.
- Contorna dificuldades devidas à heterogeneidade de escalas.
- Permite selecionar a melhor ou um subconjunto das ações analisadas, independente do tipo de escala dos critérios.

Diferença entre ELECTRE I e ELECTRE Iv

O índice de discordância é relacionado à escala do critério c_j em termos absoluto, e o limiar de veto é relacionado às diferenças de preferência entre $c_j(\boldsymbol{a}_i)$ e $c_j(\boldsymbol{a}_k)$.

Condição de veto

Avaliado quando $\exists\, j \in J^-$. Define um limite superior a partir do qual a discordância contrário a $(\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{S} \, \boldsymbol{a}_k)$ não pode ultrapassar.

$$c_j(\boldsymbol{a}_k) - c_j(\boldsymbol{a}_i) \leq v_j(c_j(\boldsymbol{a}_i)) \ , \ \forall\, j \in J^-$$

ELECTRE IS

- ELECTRE I com índices C_{ik} e D_{ik} baseados em lógica fuzzy.
- Trata simultaneamente heterogeneidade de escalas e incertezas.

Índice de concordância

Índice de concordância por critério:

$$\begin{cases} C_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = 0 & \text{se } c_j(\boldsymbol{a}_k) - c_j(\boldsymbol{a}_i) > p_j \\ 0 < C_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) < 1 & \text{se } q_j < c_j(\boldsymbol{a}_k) - c_j(\boldsymbol{a}_i) \leq p_j \\ C_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = 1 & \text{se } c_j(\boldsymbol{a}_k) - c_j(\boldsymbol{a}_i) \leq q_j \end{cases}$$

Índice de concordância global:

$$C_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^{n_c} w_j C_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)}{\sum_{j=1}^{n_c} w_j}$$

ELECTRE IS

Índice de discordância

Índice de discordância por critério:

$$D_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } c_j(\boldsymbol{a}_k) - c_j(\boldsymbol{a}_i) < v_j - q_j \dfrac{1 - C_{ik}}{1 - \tau_c} \\ 1 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Índice de discordância global:

$$D_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{se } D_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = 0, \ \forall\, j = 1, \dots, n_c \\ 1 & \text{c.c.} \end{cases}$$

- v_j: limiar de veto relativo a $\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{S} \, \boldsymbol{a}_k$ ($v_j \geq p_j \geq q_j$).
- Quanto mais próximo v_j for de p_j, mais facilmente a afirmativa $\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{S} \, \boldsymbol{a}_k$ é rejeitada (isso reflete a maior importância do critério c_j).

ELECTRE IS

Relação de sobreclassificação

$$S(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } C_{ik} \geq \tau_c \text{ e } D_{ik} = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Vantagens em relação ao ELECTRE I

- A lógica fuzzy reduz a sensibilidade do método aos parâmetros definidos pelo decisor.
- A abordagem fuzzy permite escolher um parâmetro como um “intervalo” ao invés de um valor fixo.

Métodos ELECTRE (Variações)

- ELECTRE IS: método ELECTRE I com lógica fuzzy para os índices de concordância e discordância; reduz sensibilidade aos parâmetros definidos pelo decisor.
- ELECTRE II: similar ao ELECTRE I, mas modifica a definição das relações de sobreclassificação (forte e fraca); elimina circuitos (paradoxo de Condorcet).
- ELECTRE III: similar ao ELECTRE II, mas introduz limiares para as relações de indiferença e preferência estrita entre ações; altamente configurável, sendo esta sua principal limitação.
- ELECTRE IV: similar ao ELECTRE III, porém elimina a necessidade de definição de pesos pelo decisor.
- ELECTRE TRI: permite classificar as ações com relação a "ações de referência"; possui baixa complexidade computacional.

PROMETHEE I

- PROMETHEE – “Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluations” (Brans et al. 1986).
- Permite a construção de uma pré-ordem parcial (admite soluções equivalentes).
- Utiliza uma abordagem de fluxo num grafo de preferências:
  - define-se funções de preferência entre cada par de ações, e as relações de preferência $\{P, I, J\}$ são dadas pelo fluxo dessas funções de preferência entre os nós do grafo.

PROMETHEE I

Relações de preferência

$P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = 0$ indica indiferença ou não preferência entre $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k \in \mathcal{A}$;

$P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) \to 0$ indica preferência fraca pela ação $\boldsymbol{a}_i$ em relação a $\boldsymbol{a}_k$;

$P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) \to 1$ indica preferência forte pela ação $\boldsymbol{a}_i$ em relação a $\boldsymbol{a}_k$;

$P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = 1$ indica preferência estrita pela ação $\boldsymbol{a}_i$ em relação a $\boldsymbol{a}_k$.

PROMETHEE I

Conexão entre relações de preferência e critérios

A conexão entre as relações de preferência e os critérios c_j, $j = 1, \ldots, n_c$, é dada por:

$$P_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = G\left[c_j(\boldsymbol{a}_i) - c_j(\boldsymbol{a}_k)\right]$$

em que $0 < G(x) < 1$ e $G(x) = 0$ para $x \leq 0$. Várias generalizações de critérios $G(x)$ são empregadas.

PROMETHEE I

- Critério usual:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- Quase-critério:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq q \\ 1, & \text{se } x > q \end{cases}$$

- Critério linear:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ x/p, & \text{se } 0 < x \leq p \\ 1, & \text{se } x > p \end{cases}$$

PROMETHEE I

- Critério degrau:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq q \\ 0.5, & \text{se } q < x \leq p \\ 1, & \text{se } x > p \end{cases}$$

- Critério trapezoidal:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq q \\ \dfrac{x-q}{p-q}, & \text{se } q < x \leq p \\ 1, & \text{se } x > p \end{cases}$$

- Critério Gaussiano:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

PROMETHEE I

Índice de sobreclassificação multiobjetivo

- A relação de preferência $P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)$ é dada por:

$$P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \frac{\sum_{j=1}^{n_c} w_j P_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)}{\sum_{j=1}^{n_c} w_j}$$

- $P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) \rightarrow 0$ indica preferência fraca global de $\boldsymbol{a}_i$ sobre $\boldsymbol{a}_k$ $\forall\, j$.
- $P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) \rightarrow 1$ indica preferência forte global de $\boldsymbol{a}_i$ sobre $\boldsymbol{a}_k$ $\forall\, j$.

PROMETHEE I

Representação das relações de preferência

- Similar ao ELECTRE, as relações de preferência podem ser representadas num grafo direcionado.
- Entretanto, agora considera-se arestas (preferências) bidirecionais:

$$P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) = \frac{\sum_{j=1}^{n_c} w_j P_j(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)}{\sum_{j=1}^{n_c} w_j}$$

PROMETHEE I

Relação de fluxo de preferência

- O fluxo líquido no nó $\boldsymbol{a}_i$ é dado pela diferença entre o fluxo de preferência que sai do nó e o fluxo que entra:

$$\phi(\boldsymbol{a}_i) = \phi^+(\boldsymbol{a}_i) - \phi^-(\boldsymbol{a}_i)$$

$$\phi(\boldsymbol{a}_i) = \sum_{\boldsymbol{a}_k \in \mathcal{A}} P(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) - \sum_{\boldsymbol{a}_k \in \mathcal{A}} P(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_i)$$

PROMETHEE I

Relações de sobreclassificação positiva e negativa

- Sobreclassificação positiva ($\mathrm{S}^{+} = \mathrm{P}^{+} \cup \mathrm{I}^{+}$):

$$\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{P}^{+} \, \boldsymbol{a}_k \Leftrightarrow \left\{ \text{se } \phi^{+}(\boldsymbol{a}_i) > \phi^{+}(\boldsymbol{a}_k) \right.$$

$$\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{I}^{+} \, \boldsymbol{a}_k \Leftrightarrow \left\{ \text{se } \phi^{+}(\boldsymbol{a}_i) = \phi^{+}(\boldsymbol{a}_k) \right.$$

- Sobreclassificação negativa ($\mathrm{S}^{-} = \mathrm{P}^{-} \cup \mathrm{I}^{-}$):

$$\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{P}^{-} \, \boldsymbol{a}_k \Leftrightarrow \left\{ \text{se } \phi^{-}(\boldsymbol{a}_i) < \phi^{-}(\boldsymbol{a}_k) \right.$$

$$\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{I}^{-} \, \boldsymbol{a}_k \Leftrightarrow \left\{ \text{se } \phi^{-}(\boldsymbol{a}_i) = \phi^{-}(\boldsymbol{a}_k) \right.$$

PROMETHEE I

Relação de sobreclassificação final

$$\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{P} \, \boldsymbol{a}_k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } \boldsymbol{a}_i \, \mathrm{P}^+ \, \boldsymbol{a}_k \ \wedge \ \boldsymbol{a}_i \, \mathrm{P}^- \, \boldsymbol{a}_k \\ \text{ou } \boldsymbol{a}_i \, \mathrm{P}^+ \, \boldsymbol{a}_k \ \wedge \ \boldsymbol{a}_i \, \mathrm{I}^- \, \boldsymbol{a}_k \\ \text{ou } \boldsymbol{a}_i \, \mathrm{I}^+ \, \boldsymbol{a}_k \ \wedge \ \boldsymbol{a}_i \, \mathrm{P}^- \, \boldsymbol{a}_k \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{I} \, \boldsymbol{a}_k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } \boldsymbol{a}_i \, \mathrm{I}^+ \, \boldsymbol{a}_k \ \wedge \ \boldsymbol{a}_i \, \mathrm{I}^- \, \boldsymbol{a}_k \end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}_i \, \mathrm{J} \, \boldsymbol{a}_k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{caso contrário.} \end{cases}$$

PROMETHEE II

PROMETHEE I *versus* PROMETHEE II

- O método PROMETHEE I fornece ao decisor uma classificação das diversas alternativas, porém algumas alternativas podem ser incomparáveis.
- O método PROMETHEE II elimina a incomparabilidade definindo o seguinte esquema de sobreclassificação (pré-ordem total):

$$\boldsymbol{a}_i \text{ P } \boldsymbol{a}_k \Leftrightarrow \left\{ \text{se } \phi(\boldsymbol{a}_i) > \phi(\boldsymbol{a}_k) \right.$$

$$\boldsymbol{a}_i \text{ I } \boldsymbol{a}_k \Leftrightarrow \left\{ \text{se } \phi(\boldsymbol{a}_i) = \phi(\boldsymbol{a}_k) \right.$$

Literatura Especializada

- Y. Collette, P. Siarry, Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies, ser. Decision Engineering, Springer, 2003.
- L. Y. Maystre, J. Pictet, J. Simos, Méthodes Multicritères ELECTRE, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1994.
- J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys, Springer Science, 2005.
- B. Roy, *Decision-Aid and Decision-Making*, European Journal of Operational Research, 45, p. 324–331, 1990.

Inicio