Teoria da Decisão

Métodos Escalares de Otimização Vetorial

Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

www.ppgee.ufmg.br/∼lusoba

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Graduação em Engenharia de Sistemas

Sumário

1. **Métodos escalares clássicos**
   - Apresentação
   - Métodos escalares

Problema de otimização multiobjetivo

- Formulação geral do problema de otimização multiobjetivo ($\boldsymbol{P}_0$):

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m, \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

$$\boldsymbol{f} : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0; & i = 1, \ldots, p \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0; & j = 1, \ldots, q \\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Métodos escalares/agregação

- Método da soma ponderada (*weighted-sum*);

- Método ϵ-restrito;

Sumário

1. **Métodos escalares clássicos**
   - Apresentação
   - Métodos escalares

Método da soma ponderada (*weighted-sum*)

- Esta é a abordagem mais óbvia e "ingênua" para a solução de problemas de otimização multiobjetivo.
- O problema multiobjetivo original é transformado num problema mono-objetivo, podendo ser resolvido por qualquer método de otimização não linear.
- A estratégia mais simples emprega uma soma ponderada dos objetivos.

Método da soma ponderada (*weighted-sum*)

Formulação

Seja o problema $\boldsymbol{P_0}$. Este é transformado na formulação P_w a seguir:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{w}'\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(\boldsymbol{x})$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0; & i = 1, \ldots, p \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0; & j = 1, \ldots, q \\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \end{cases}$$

com $w_i \geq 0$ e $\sum_k w_k = 1$.

Método da soma ponderada (*weighted-sum*)

Normalização

Se as funções objetivo possuem diferentes semânticas ou significados, uma normalização é necessária:

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \frac{f_i(\boldsymbol{x}) - \min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}} f_i(\boldsymbol{x})}{\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}} f_i(\boldsymbol{x}) - \min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}} f_i(\boldsymbol{x})} \quad \text{(se minimização)}$$

ou

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \frac{\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}} f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x})}{\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}} f_i(\boldsymbol{x}) - \min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{F}} f_i(\boldsymbol{x})} \quad \text{(se maximização)}$$

Método da soma ponderada (*weighted-sum*)

No caso de duas funções objetivo, temos:

$$\min_{\boldsymbol{x}} \; w_1 f_1(\boldsymbol{x}) + w_2 f_2(\boldsymbol{x})$$

No espaço de objetivos, esse problema corresponde a encontrar a menor constante C possível da equação a seguir:

$$f_2(\boldsymbol{x}) = -\frac{w_1}{w_2} f_1(\boldsymbol{x}) + C$$

Método da soma ponderada (*weighted-sum*)

Exemplo

Problema de Schaffer:

$$\min \boldsymbol{f} = \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\text{s.a:}\ \ x \in [0,\ 2]$$

(a) Esboce o conjunto solução no espaço de decisão.

(b) Aplique as condições de suficiência ao problema ponderado e mostre que as soluções de (a) são eficientes (Pareto-ótimas).

(c) Obtenha amostras da fronteira Pareto-ótima para diferentes valores de ponderação.

Método da soma ponderada (*weighted-sum*)

- Em um problema de otimização linear (PL, PLI, PLIM) biobjetivo, é possível gerar todas as soluções Pareto-ótimas com o procedimento a seguir:

Passo 1: Resolver

$$\boldsymbol{z}_i = \arg\min\ \boldsymbol{c}_i'\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$$

Passo 2: Faça $\lambda_1 = f_2(\boldsymbol{z}_1) - f_2(\boldsymbol{z}_2)$ e $\lambda_2 = f_1(\boldsymbol{z}_2) - f_1(\boldsymbol{z}_1)$;

Passo 3: Resolva $\boldsymbol{z} = \arg\min \lambda_1 \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ encontrando uma solução intermediária entre $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2)$;

Passo 4: Retorne ao passo 2, encontrando soluções intermediárias entre $(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z})$ e $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}_2)$.

Método da soma ponderada (*weighted-sum*)

- Seja o problema biobjetivo com funções quadráticas:

$$f_1(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_1)'(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_1)$$
$$f_2(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_2)'(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_2)$$

$$wf_1(\boldsymbol{x}) + (1 - w)f_2(\boldsymbol{x})$$
$$\Downarrow$$
$$(\boldsymbol{x} - [w\boldsymbol{c}_1 + (1 - w)\boldsymbol{c}_2])'(\boldsymbol{x} - [w\boldsymbol{c}_1 + (1 - w)\boldsymbol{c}_2]) + w(1-w)(\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2)'(\boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{c}_2)$$

- Variando os pesos, o mínimo da soma ponderada se desloca ao longo da reta que une os mínimos de f_1 e f_2.

Método da soma ponderada (*weighted-sum*)

- No caso de funções quadráticas gerais:

$$
\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{x}) &= (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}_1)'\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}_1)\\
f_2(\boldsymbol{x}) &= (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}_2)'\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}_2)
\end{aligned}
$$

$$
wf_1(\boldsymbol{x}) + (1-w)f_2(\boldsymbol{x})
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\begin{aligned}
w\nabla f_1 + (1-w)\nabla f_2 &= 0\\
w\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}_1) + (1-w)\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}_2) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{x} = \left[w\boldsymbol{A}_1 + (1-w)\boldsymbol{A}_2\right]^{-1}\left[w\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{c}_1 + (1-w)\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{c}_2\right]
$$

Método da soma ponderada (*weighted-sum*)

Discussão

- Método simples e fácil de programar;
- Gera todas as soluções do conjunto Pareto somente se o conjunto solução de P_0 possuir imagem convexa;
- Várias ponderações podem levar à mesma solução eficiente;
- Em problemas com muitos objetivos, fica difícil controlar a diversidade do conjunto de soluções encontrado;
- O ploblema ponderado possui a mesma estrutura de restrições do problema original;
- Técnicas de programação matemática e metaheurísticas são aplicáveis.

Método ϵ-restrito

- Essa abordagem transforma o problema multiobjetivo em um problema mono-objetivo com restrições adicionais;
- Um dos objetivos é escolhido para ser minimizado;
- Os demais objetivos são transformados em restrições de desigualdade.

Método ϵ-restrito

Formulação

Seja o problema $\boldsymbol{P_0}$. Este é transformado na formulação P_ϵ a seguir:

$$\min_{\boldsymbol{x}} f_1(\boldsymbol{x})$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} f_k(\boldsymbol{x}) \leq \epsilon_k; & k = 2, \ldots, m \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0; & i = 1, \ldots, p \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0; & j = 1, \ldots, q \\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Método ϵ-restrito

- Por exemplo, com dois objetivos:

$$\min_{\boldsymbol{x}} f_1(\boldsymbol{x})$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} f_2(\boldsymbol{x}) \leq \epsilon \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0; \quad i = 1, \ldots, p \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0; \quad j = 1, \ldots, q \\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Método ϵ-restrito

- Por exemplo, com três objetivos:

$$\min_{\boldsymbol{x}} f_1(\boldsymbol{x})$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} f_2(\boldsymbol{x}) \leq \epsilon_2 \\ f_3(\boldsymbol{x}) \leq \epsilon_3 \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0; \quad i = 1, \ldots, p \\ h_j(\boldsymbol{x}) = 0; \quad j = 1, \ldots, q \\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Método ϵ-restrito

Exemplo

Problema de Schaffer:

$$\min \boldsymbol{f} = \begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = (x-2)^2 \leq \epsilon \end{cases}$$

$$\text{s.a:} \;\; x \in [0,\; 2]$$

(a) Esboce o conjunto solução no espaço de decisão.

(b) Obtenha amostras da fronteira Pareto-ótima para diferentes valores de ϵ.

Método ϵ-restrito

Discussão

- A variação dos ϵ_k gera soluções Pareto-ótimas;
- Soluções associadas a trechos não convexos da fronteira Pareto podem ser alcançadas;
- Pode gerar pontos em trechos específicos da fronteira;
- Pode gerar pontos não pertencentes à fronteira Pareto-ótima;
- Quando o número de objetivos aumenta ($m > 2$), aumenta também a probabilidade de serem gerados problemas infactíveis;
- Aumenta o número de restrições do problema original;
- Em geral, fica difícil controlar a distribuição do conjunto de soluções encontradas;
- Técnicas de programação matemática e metaheurísticas são aplicáveis.

Algoritmo geral

Algoritmo 1: Protótipo geral de métodos escalares

Input: Funções objetivo e restrições $\boldsymbol{f}(\cdot)$, $\boldsymbol{g}(\cdot)$, $\boldsymbol{h}(\cdot)$

while *conjunto de estimativas não for satisfatório* **do**
    Gerar solução inicial $\mathbf{x}_0$;
    Escolher formulação P_w ou P_ϵ;
    Resolver usando um método de otimização adequado;
end

Questão

O processo de tomada de decisão pode ser *a priori*, progressivo (interativo), ou *a posteriori*.

Em quais dessas classes os métodos escalares podem ser aplicados?

Literatura Especializada

- Y. Collette, P. Siarry, Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies, ser. Decision Engineering, Springer, 2003.
- V. Chankong, Y. Haimes, Multiobjective decision making: Theory and methodology, 1st ed., Dover Publications, 2008.
- R. H. C. Takahashi, Otimização Escalar e Vetorial, 2007. Disponível em: `http://www.mat.ufmg.br/~taka/`
- J.-S. Roger Jang, C.-T. Sun, E. Mizutani, Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence, Matlab Curriculum Series, Prentice Hall, 1997.
- P. Prodanovic and S. P. Simonovic, *Fuzzy Compromise Programming for Group Decision Making,* IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A: Systems and Humans, 33:3, p. 358–365, May 2003.

Inicio