Teoria da Decisão

Modelagem de Preferência

Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

www.ppgee.ufmg.br/∼lusoba

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Graduação em Engenharia de Sistemas

Sumário

1 Modelagem de Preferência
- Apresentação
- Relações de Preferência

2 Modelagem de Preferência Fuzzy
- Apresentação
- Relações de Preferência Nebulosa

Introdução

- A geração de soluções eficientes na otimização vetorial representa somente a primeira etapa do problema de decisão multiobjetivo (abordagem *a posteriori*).

- Agora, como selecionar, ordenar ou classificar estas alternativas *incomparáveis* (dominância Pareto)?

- Como definir uma *relação de ordem* entre essas alternativas?

Sumário

1 **Modelagem de Preferência**
- Apresentação
- Relações de Preferência

2 **Modelagem de Preferência Fuzzy**
- Apresentação
- Relações de Preferência Nebulosa

Introdução

Relações de Dominância *vs.* Relações de Ordem

- *Relações de dominância* foram consideradas nos métodos clássicos estudados, visando identificar um conjunto inicial de soluções promissoras;
- *Relações de ordem* podem ser estabelecidas entre tais soluções visando obter:
  - um menor conjunto de soluções (relação de ordem parcial); ou
  - uma única solução (relação de ordem completa).

Introdução

Motivação para a Criação de Ferramentas de Apoio à Decisão

- O desenvolvimento de ferramentas de auxílio à decisão devem-se aos seguintes fatos:
  - comparações entre três ou mais soluções podem gerar "ciclos";
  - comparações par a par podem gerar intransitividades;
  - incomparabilidade entre ações podem ocorrer.

Introdução

Exemplo de preferência intransitiva

Qual o melhor candidato à vaga de uma empresa, se...

Candidatos	Inteligência	Experiência
$\boldsymbol{a}_1$	2ϵ	6ϵ
$\boldsymbol{a}_2$	3ϵ	4ϵ
$\boldsymbol{a}_3$	4ϵ	2ϵ

Tabela: Matriz de avalição dos candidatos

Visto que julgamentos intransitivos descrevem um ciclo, qual decisão tomar?

Introdução

Exemplo de indiferença intransitiva

Suponha diferentes quantidades de açúcar em uma xícara de café. Uma pessoa pode julgar que:

- 10g é indiferente a 20g;
- 20g é indiferente a 30g;
- 30g é indiferente a 40g; ...

Assumindo que a indiferença seja transitiva, então:

$$\boldsymbol{a} I \boldsymbol{b} \;\wedge\; \boldsymbol{b} I \boldsymbol{c} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a} I \boldsymbol{c}$$

ou seja, **10g é indiferente a 100g???**

Introdução

Exemplo de incomparabilidade

Causas comuns de incomparabilidade são escassez de informações, ambiguidades ou avaliações conflitantes.

Considere a escolha de um entre dois candidatos a um emprego:

- Uma fonte confiável 1 informou que A não é confiável, mas B tem excelente currículo.
- Uma fonte confiável 2 informou que A é ótimo candidato, mas B tem péssimas referências.

A resposta mais plausível do decisor seria provavelmente “Eu não sei quem é o melhor candidato!”.

Notação e Definições Básicas

Conceitos Básicos Necessários

Dado um conjunto de soluções promissoras, como classificá-las?

Precisamos relembrar os seguintes conceitos:

- relações binárias;
- relações de equivalência;
- relações de ordem.

Notação e Definições Básicas

Relação binária

Dados dois conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, uma relação binária R é um subconjunto de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. A pertinência de $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$, à relação R é representada por $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathrm{R}$, $(\boldsymbol{a}\,\mathrm{R}\,\boldsymbol{b})$ ou $\mathrm{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, caso contrário, tem-se $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \notin \mathrm{R}$ ou $(\boldsymbol{a} \neg\mathrm{R}\,\boldsymbol{b})$.

- Uma relação binária é uma relação entre dois elementos.

Exemplo

Seja $\mathcal{A} = \{1, 5\}$ e $\mathcal{B} = \{3, 4, 8\}$ e a relação binária "maior que":

$$\mathrm{R} = \{(5, 3), (5, 4)\}$$

$$\neg\mathrm{R} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 8), (5, 8)\}$$

Notação e Definições Básicas

Formas de representação de relações binárias:

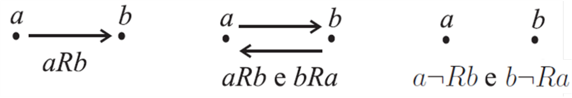

Figura: Grafo direcionado de R

	b_1	b_2	b_3
a_1	0	1	0
a_2	0	0	1
a_3	0	1	0

Tabela: Matriz de R: $\boldsymbol{a}_1 \, \mathrm{R} \, \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}_2 \, \mathrm{R} \, \boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{a}_3 \, \mathrm{R} \, \boldsymbol{b}_2$, sendo $\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{A}$ e $\boldsymbol{b}_j \in \mathcal{B}$

Notação e Definições Básicas

Relação de equivalência

Uma relação binária R definida sobre o conjunto $\mathcal{A}$ é uma relação de equivalência se ela satisfaz as propriedades a seguir:

- reflexiva: $\forall x \in \mathcal{A},\ x \mathrm{R} x$;
- transitiva: $\forall (x, y, z) \in \mathcal{A}^3,\ x \mathrm{R} y \wedge y \mathrm{R} z \Rightarrow x \mathrm{R} z$;
- simétrica: $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2,\ x \mathrm{R} y \Rightarrow y \mathrm{R} x$;

- e.g., relação de equivalência "$=$" em $\mathbb{N}$.

Notação e Definições Básicas

Relação de ordem

Uma relação binária R definida sobre o conjunto $\mathcal{A}$ é uma relação de ordem se ela satisfaz as propriedades a seguir:

- reflexiva: $\forall x \in \mathcal{A}$, $x \, \mathrm{R} \, x$;
- transitiva: $\forall (x, y, z) \in \mathcal{A}^3$, $x \, \mathrm{R} \, y \wedge y \, \mathrm{R} \, z \Rightarrow x \, \mathrm{R} \, z$;
- antissimétrica: $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2$, $x \, \mathrm{R} \, y \wedge y \, \mathrm{R} \, x \Rightarrow x = y$;

- e.g., relação de ordem "$\leq$" em $\mathbb{N}$.
- Soluções equivalentes não são permitidas.

Notação e Definições Básicas

Pré-ordem

Uma relação binária R definida sobre o conjunto $\mathcal{A}$ é uma relação de pré-ordem se ela satisfaz as propriedades a seguir:

- reflexiva: $\forall x \in \mathcal{A},\ x \,\mathrm{R}\, x$;
- transitiva: $\forall (x, y, z) \in \mathcal{A}^3,\ x \,\mathrm{R}\, y \wedge y \,\mathrm{R}\, z \Rightarrow x \,\mathrm{R}\, z$;

- Permite soluções equivalentes.

Notação e Definições Básicas

Pré-ordem total

Uma pré-ordem é uma relação de pré-ordem total se todos os elementos de $\mathcal{A}$ podem estar na relação, isto é, todos os elementos são comparáveis entre si.

- e.g., relação "$\leq$" é uma pré-ordem total em $\mathbb{R}$.

Pré-ordem parcial

Uma pré-ordem é uma relação de pré-ordem parcial se apenas alguns elementos de $\mathcal{A}$ podem estar na relação, isto é, alguns elementos são incomparáveis entre si.

- A relação de dominância Pareto é uma pré-ordem parcial.

Notação e Definições Básicas

Relações de preferência

Os métodos de decisão se baseiam nas relações de **preferência**, **indiferença** e **incomparabilidade** entre duas ações $x, y \in \mathcal{A}$.

Preferência estrita: representada por $x \, \mathrm{P} \, y$, denota preferência de x em relação a y;

Indiferença: representada por $x \, \mathrm{I} \, y$, denota indiferença de x em relação a y;

Incomparabilidade: representada por $x \, \mathrm{J} \, y$, denota incomparabilidade de x em relação a y, isto é, $x \neg \mathrm{P} \, y$, $y \neg \mathrm{P} \, x$, e $x \neg \mathrm{I} \, y$.

Notação e Definições Básicas

Propriedades das relações de preferência

Preferência estrita (P):

- irreflexiva: um DM não pode preferir estritamente x a x;
- assimétrica: um DM não pode preferir estritamente x a y e y a x, ao mesmo tempo.

Notação e Definições Básicas

Propriedades das relações de preferência

Indiferença (I):

- reflexiva: um DM é sempre indiferente entre x e x;
- simétrica: "x é indiferente a y" é equivalente a "y é indiferente a x".

Notação e Definições Básicas

Propriedades das relações de preferência

Incomparabilidade (J):

- irreflexiva: um DM não pode dizer que x é incomparável a x;
- simétrica: "x é incomparável a y" é equivalente a "y é incomparável a x".

Notação e Definições Básicas

Relação entre $\{P, I, J\}$ e R

As relações de preferência $\{P, I, J\}$ podem ser definidas a partir da relação binária R:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\,\mathrm{P}\,\boldsymbol{b} &\quad sss \quad \boldsymbol{a}\,\mathrm{R}\,\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}\neg\,\mathrm{R}\,\boldsymbol{a}\\
\boldsymbol{a}\,\mathrm{I}\,\boldsymbol{b} &\quad sss \quad \boldsymbol{a}\,\mathrm{R}\,\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}\,\mathrm{R}\,\boldsymbol{a}\\
\boldsymbol{a}\,\mathrm{J}\,\boldsymbol{b} &\quad sss \quad \boldsymbol{a}\neg\,\mathrm{R}\,\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}\neg\,\mathrm{R}\,\boldsymbol{a}
\end{aligned}
$$

Notação e Definições Básicas

Estrutura de preferência

Uma estrutura de preferência constitui um grupo de relações binárias definidas sobre um conjunto de alternativas $\mathcal{A}$.

- As relações de preferência $\{P, I, J\}$ definem uma estrutura de preferência.
- Dada uma estrutura de preferências, podemos definir a relação de preferência de sentido amplo (relação de sobreclassificação):

$$\boldsymbol{a}\,\mathrm{S}\,\boldsymbol{b} \quad \text{se} \quad \boldsymbol{a}\,\mathrm{P}\,\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{a}\,\mathrm{I}\,\boldsymbol{b}$$

Notação e Definições Básicas

Se a estrutura de preferência atende as condições a seguir, diz-se que ela constitui um *sistema fundamental de relações de preferência*:

1. Para cada par $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k) \in \mathcal{A}$ apenas uma relação binária pertencente à estrutura é satisfeita. Implica que a estrutura é capaz de particionar $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.
2. Define-se uma relação S chamada *relação característica*, de tal forma que $S = P \cup I$.
3. Cada relação de preferência da estrutura é caracterizada por suas propriedades (simetria, reflexividade, etc).

Sumário

1 Modelagem de Preferência
- Apresentação
- Relações de Preferência

2 Modelagem de Preferência Fuzzy
- Apresentação
- Relações de Preferência Nebulosa

Introdução

- A abordagem clássica baseada na lógica binária tende a representar a preferência humana através de modelos simplistas (consideram julgamentos precisos e bem definidos).
- Entretanto, incerteza, imprecisão e ambiguidade são aspectos intrínsecos à tomada de decisão.
- Neste contexto, a lógica nebulosa pode ser mais adequada para representar julgamentos subjetivos.

Operações com conjuntos nebulosos

- A teoria de conjuntos nebulosos (*fuzzy*) foi criada em 1965 por Lotfi Zadeh como uma extensão da noção clássica de conjuntos.
- Útil em contextos em que a informação é descrita por variáveis linguísticas, conceitos imprecisos, incompletos ou subjetivos.
- A pertinência de elementos a conjuntos nebulosos não é mais binária, mas dada por um valor de pertinência contínuo no intervalo $[0, 1]$.

Operações com conjuntos nebulosos

Conjunto nebuloso

Um conjunto nebuloso $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ é descrito por uma função de pertinência $\mu_A(x) : \mathcal{U} \mapsto [0,1]$, com $x \in \mathcal{U}$, que fornece o grau de pertinência de x ao conjunto $\mathcal{A}$.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathcal{A} \\ 1, & x \in \mathcal{A} \\ 0 < \alpha < 1, & \text{algum grau de pertinência a } \mathcal{A} \end{cases}$$

Operações com conjuntos nebulosos

Operações padrão

- Operação de complemento:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

- Operação de interseção:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$$

- Operação de união:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$$

Operações com conjuntos nebulosos

- Uma T-norma é usada para representar a interseção em conjuntos nebulosos ou conjunção lógica em lógica nebulosa.

T-norma

Uma T-norma é uma função $T : [0,1] \times [0,1] \mapsto [0,1]$ que satisfaz as propriedades:

- Condições de contorno: $T(0,0) = 0$, $T(a,1) = T(1,a) = a$;
- Monotonicidade: $T(a,b) \leq T(c,d)$ se $a \leq c$ e $b \leq d$;
- Comutatividade: $T(a,b) = T(b,a)$;
- Associatividade: $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$;

Operações com conjuntos nebulosos

Exemplos de T-normas:

- T-norma mínimo:
$$T(a,b) = \min(a,b)$$
- T-norma produto:
$$T(a,b) = a.b$$
- T-norma Lukasiewicz:
$$T(a,b) = \max(0, a+b-1)$$
- entre outras...

Operações com conjuntos nebulosos

- Uma T-conorma (ou S-norma) é usada para representar a união em conjuntos nebulosos ou disjunção lógica em lógica nebulosa.
- Dada uma T-norma, sua S-norma complementar é dada por $S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$ (generalização das leis de De Morgan).

S-norma

Uma S-norma é uma função $S : [0,1] \times [0,1] \mapsto [0,1]$ que satisfaz as propriedades:

- Condições de contorno: $S(1,1) = 1$, $S(a,0) = S(0,a) = a$;
- Monotonicidade: $S(a,b) \leq S(c,d)$ se $a \leq c$ e $b \leq d$;
- Comutatividade: $S(a,b) = S(b,a)$;
- Associatividade: $S(a, S(b,c)) = S(S(a,b), c)$;

Operações com conjuntos nebulosos

Exemplos de S-normas:

- S-norma máximo:

$$S(a, b) = \max(a, b)$$

- Soma probabilística:

$$S(a, b) = a + b - a.b$$

- S-norma limitada:

$$S(a, b) = \min(a + b, 1)$$

- entre outras...

Sumário

1. **Modelagem de Preferência**
   - Apresentação
   - Relações de Preferência

2. **Modelagem de Preferência Fuzzy**
   - Apresentação
   - Relações de Preferência Nebulosa

Notação e Definições Básicas

Relação nebulosa

Supondo dois conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, uma relação nebulosa R define um conjunto nebuloso por meio da função de pertinência $\mu_{\mathrm{R}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \mapsto [0, 1]$.

O grau de pertinência de $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$, à relação nebulosa R é representado por:

$$\mu_{\mathrm{R}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{cases} 0, & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \notin \mathrm{R} \\ 1, & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathrm{R} \\ 0 < \alpha < 1, & \text{algum grau de pertinência a R} \end{cases}$$

Notação e Definições Básicas

Relações nebulosas

Principais propriedades das relações nebulosas:

- reflexiva: $\forall x \in \mathcal{A}$, $\mu_R(x, x) = 1$;
- irreflexiva: $\forall x \in \mathcal{A}$, $\mu_R(x, x) = 0$;
- simétrica: $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2$, $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$;
- T-assimétrica: $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2$, $T(\mu_R(x, y),\ \mu_R(y, x)) = 0$;
- T-anti-simétrica: $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2$, $T(\mu_R(x, y), \mu_R(y, x)) = 0 \Rightarrow x \neq y$
- T-transitiva: $\forall (x, y, z) \in \mathcal{A}^3$, $T(\mu_R(x, y),\ \mu_R(y, z)) \leq \mu_R(x, z)$;
- S-completa: $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2$, $S(\mu_R(x, y),\ \mu_R(y, x)) = 1 \Rightarrow x \neq y$;

Notação e Definições Básicas

Relações nebulosas de ordenação

Pré-ordem parcial fuzzy	T-transitiva, reflexiva
Ordem parcial fuzzy	T-transitiva, reflexiva, T-anti-simétrica
Ordem fraca fuzzy	T-transitiva, S-completa
Ordem completa fuzzy	T-transitiva, T-anti-simétrica, completa

Tabela: Tipos de relações nebulosas de ordenação

Notação e Definições Básicas

Estrutura de preferência nebulosa

Uma estrutura de preferência nebulosa constitui um grupo de relações nebulosas definidas sobre um conjunto de alternativas $\mathcal{A}$.

- As relações nebulosas de preferência $\{P, I, J\}$ definem uma estrutura de preferência nebulosa.
- Dada uma estrutura de preferências nebulosa, podemos definir a relação nebulosa de preferência no sentido amplo:

$$\mu_S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

que representa o grau de credibilidade em que ***a*** é pelo menos tão boa quanto ***b***.

Literatura Especializada

- J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys, Springer Science, 2005.
- B. Roy, *Decision-Aid and Decision-Making*, European Journal of Operational Research, 45, p. 324–331, 1990.

Inicio