

Teoria da Decisão

Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério

Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

www.ppgee.ufmg.br/~lusoba

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Graduação em Engenharia de Sistemas

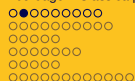
●○○○○○○○○
○○○○○○○○○○
○○○○○
○○○○○
○○○○○○○
○○○○○
○○○○○○○○○○○

Abordagem Bellman-Zadeh

Sumário

1 Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério

- Abordagem Bellman-Zadeh
- Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
- Critérios de Escolha
- Generalização da Abordagem Clássica
- Modificação dos Critérios de Escolha
- Exemplo de Aplicação



Apresentação

- A abordagem clássica Bellman-Zadeh é aplicada para tomada de decisão em ambientes *fuzzy* para o tratamento de problemas multicritério;
- Nessa abordagem, cada função objetivo $F_p(x)$ pode ser substituída por uma função objetivo *fuzzy* ou conjunto *fuzzy* A_p ;
- Uma solução *fuzzy* D é obtida a partir da interseção $D = \bigcap_{p=1}^q A_p$;



Apresentação

- A função de pertinência de D é definida como:

$$D(x) = \bigwedge_{p=1}^q A_p(x) = \min_{p=1, \dots, q} A_p(x), \quad x \in \mathbf{L}$$

- Esta função permite determinar a solução x com maior pertinência à solução *fuzzy* D :

$$\max D(x) = \max_{x \in \mathbf{L}} \min_{p=1, \dots, q} A_p(x)$$

- O problema de decisão torna-se então:

$$x^* = \arg \max_{x \in \mathbf{L}} \min_{p=1, \dots, q} A_p(x)$$



Apresentação

Exemplo

As funções de pertinência de três funções objetivo *fuzzy* $A_1(x)$, $A_2(x)$ e $A_3(x)$ são apresentadas a seguir:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_1(x)$	0.1	0.2	0.8	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.2	0.1
$A_2(x)$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.6	0.3	0.1	0.9
$A_3(x)$	0.4	0.6	1.0	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2

Figura: Funções de pertinência de funções objetivo *fuzzy*



Apresentação

Exemplo

A solução *fuzzy* $D(x)$ é apresentada a seguir, a qual fornece a solução $x^* = 5$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D(x)$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.7	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

Figura: Função de pertinência de uma solução *fuzzy*



Apresentação

Ao considerar problemas multiobjetivo:

- para obter x^* é necessário construir as funções de pertinência $A_p(x)$, $p = 1, \dots, q$;
- cada função de pertinência deve refletir o grau de aproximação do próprio ótimo para $F_p(x)$, $x \in \mathbf{L}$, $p = 1, \dots, q$.



Abordagem Bellman-Zadeh

Apresentação

- Para funções objetivo de minimização:

$$A_p(x) = \left[\frac{\max_{x \in L} F_p(x) - F_p(x)}{\max_{x \in L} F_p(x) - \min_{x \in L} F_p(x)} \right]^{\lambda_p}$$

- Para funções objetivo de maximização:

$$A_p(x) = \left[\frac{F_p(x) - \min_{x \in L} F_p(x)}{\max_{x \in L} F_p(x) - \min_{x \in L} F_p(x)} \right]^{\lambda_p}$$



Apresentação

- Existem diferentes operadores de agregação que podem ser usados no lugar do operador min;
- Assim, $D(x)$ pode ser obtido da seguinte forma geral:

$$D(x) = \text{agg}(A_1(x), A_2(x), \dots, A_q(x)), \quad x \in \mathbf{L}$$

- Entretanto, essa escolha é baseada na experiência do DM.



Apresentação

- Além do operador min, o operador produto também tem sido muito empregado em problemas de tomada de decisão;
- Nesse caso, tem-se:

$$D(x) = \prod_{p=1}^q A_p(x), \quad x \in \mathbf{L}$$

$$\max D(x) = \max_{x \in \mathbf{L}} \prod_{p=1}^q A_p(x)$$

$$x^* = \arg \max_{x \in \mathbf{L}} \prod_{p=1}^q A_p(x)$$

Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza

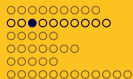
Sumário

- Abordagem Bellman-Zadeh
- **Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza**
- Critérios de Escolha
- Generalização da Abordagem Clássica
- Modificação dos Critérios de Escolha
- Exemplo de Aplicação



Apresentação

- A abordagem clássica define inicialmente uma matriz de compromisso considerando as alternativas de projeto e possíveis estados de natureza (cenários), em que
 - alternativas: X_k , $k = 1, 2, \dots, K$;
 - cenários: Y_s , $s = 1, 2, \dots, S$;



Apresentação

Matriz de compromisso

A matriz de compromisso quantifica os efeitos (consequências) das ações X_k , $k = 1, 2, \dots, K$ nos possíveis cenários Y_s , $s = 1, 2, \dots, S$.

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S
X_1	$F(X_1, Y_1)$...	$F(X_1, Y_s)$...	$F(X_1, Y_S)$
...
X_k	$F(X_k, Y_1)$...	$F(X_k, Y_s)$...	$F(X_k, Y_S)$
...
X_K	$F(X_K, Y_1)$...	$F(X_K, Y_s)$...	$F(X_K, Y_S)$

Figura: Matriz de compromisso



Apresentação

- A análise da matriz de compromisso e a escolha de uma solução racional são baseados em *critérios de escolha*;
- Os *critérios de escolha* mais utilizados são os critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz;



Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza

Apresentação

Matriz de compromisso com estimativas de características

Os critérios de escolha permitem incorporar estimativas de características à matriz de compromisso:

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S	$F^{\max}(X_k)$	$F^{\min}(X_k)$	$\overline{F}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
X_1	$F(X_1, Y_1)$...	$F(X_1, Y_s)$...	$F(X_1, Y_S)$	$F^{\max}(X_1)$	$F^{\min}(X_1)$	$\overline{F}(X_1)$	$r^{\max}(X_1)$
...
X_k	$F(X_k, Y_1)$...	$F(X_k, Y_s)$...	$F(X_k, Y_S)$	$F^{\max}(X_k)$	$F^{\min}(X_k)$	$\overline{F}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
...
X_K	$F(X_K, Y_1)$...	$F(X_K, Y_s)$...	$F(X_K, Y_S)$	$F^{\max}(X_K)$	$F^{\min}(X_K)$	$\overline{F}(X_K)$	$r^{\max}(X_K)$
$F^{\max}(Y_s)$	$F^{\max}(Y_1)$...	$F^{\max}(Y_s)$...	$F^{\max}(Y_S)$				

Figura: Matriz de compromisso com estimativas de características



Apresentação

Estimativas de características

Nível máximo da função objetivo:

$$F^{max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)$$

Este nível é determinado para uma dada solução e representa:

- a estimativa mais otimista quando deseja-se maximizar F , ou
- a estimativa mais pessimista quando deseja-se minimizar F .



Apresentação

Estimativas de características

Nível mínimo da função objetivo:

$$F^{min}(X_k) = \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)$$

Este nível é determinado para uma dada solução e representa:

- a estimativa mais pessimista quando deseja-se maximizar F , ou
- a estimativa mais otimista quando deseja-se minimizar F .



Apresentação

Estimativas de características

Nível médio da função objetivo:

$$\bar{F}(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s)$$

Este nível é determinado para uma dada solução e representa uma estimativa média da sua qualidade em relação aos cenários possíveis.



Apresentação

Estimativas de características

Nível máximo de risco:

$$r^{max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} r(X_k, Y_s)$$

em que $r(X_k, Y_s)$ é uma medida de risco (arrependimento),

$$r(X_k, Y_s) = F^{max}(Y_s) - F(X_k, Y_s), \quad \text{se deseja-se maximizar } F$$

$$r(X_k, Y_s) = F(X_k, Y_s) - F^{min}(Y_s), \quad \text{se deseja-se minimizar } F$$

em que,

$$F^{max}(Y_s) = \max_{1 \leq k \leq K} F(X_k, Y_s) \quad \text{e} \quad F^{min}(Y_s) = \min_{1 \leq k \leq K} F(X_k, Y_s)$$



Apresentação

Matriz de risco

Calculando o nível de risco para todo X_k , $k = 1, 2, \dots, K$ e Y_s , $s = 1, 2, \dots, S$, obtém-se a matriz de risco a seguir:

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S	$r^{\max}(X_k)$
X_1	$r(X_1, Y_1)$...	$r(X_1, Y_s)$...	$r(X_1, Y_S)$	$r^{\max}(X_1)$
...
X_k	$r(X_k, Y_1)$...	$r(X_k, Y_s)$...	$r(X_k, Y_S)$	$r^{\max}(X_k)$
...
X_K	$r(X_K, Y_1)$...	$r(X_K, Y_s)$...	$r(X_K, Y_S)$	$r^{\max}(X_K)$

Figura: Matriz de risco



Sumário

- 1 **Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério**
 - Abordagem Bellman-Zadeh
 - Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
 - **Critérios de Escolha**
 - Generalização da Abordagem Clássica
 - Modificação dos Critérios de Escolha
 - Exemplo de Aplicação



- 22 / 50



Apresentação

Critério de Wald

O critério de Wald se baseia em $F^{min}(X_k)$:

$$\max_{1 \leq k \leq K} F^{min}(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)$$

Critério de Laplace

O critério de Laplace se baseia em $\bar{F}(X_k)$:

$$\max_{1 \leq k \leq K} \bar{F}(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s)$$



Apresentação

Critério de Savage

O critério de Savage se baseia em $r^{max}(X_k)$:

$$\min_{1 \leq k \leq K} r^{max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} r(X_k, Y_s)$$



Critérios de Escolha

Apresentação

Critério de Hurwicz

O critério de Hurwicz se baseia em $F^{\min}(X_k)$ e $F^{\max}(X_k)$:

$$\max_{1 \leq k \leq K} [\alpha F^{\min}(X_k) + (1 - \alpha) F^{\max}(X_k)] =$$

$$\max_{1 \leq k \leq K} \left[\alpha \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \right]$$

em que $\alpha \in [0, 1]$ é o índice “pessimismo-otimismo” (usualmente, $\alpha = 0.75$).

○○○○○○○○○
○○○○○○○○○
○○○○○
●○○○○○
○○○○
○○○○○○○○○○○

Generalização da Abordagem Clássica

Sumário

1 Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério

- Abordagem Bellman-Zadeh
- Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
- Critérios de Escolha
- Generalização da Abordagem Clássica
- Modificação dos Critérios de Escolha
- Exemplo de Aplicação



Apresentação

- A abordagem Bellman-Zadeh pode ser aplicada para a solução de problemas de tomada de decisão multiobjetivo;
- Esta abordagem clássica pode ser generalizada a partir da maximização de $D(x)$;
- Nesse caso, ao lidar com q funções objetivo, q matrizes de compromisso deverão ser geradas e analisadas;



Apresentação

- A matriz de compromisso modificada (normalizada) relacionada ao p -ésimo critério fica da seguinte forma:

	Y_1	\dots	Y_s	\dots	Y_S
X_1	$A_p(X_1, Y_1)$	\dots	$A_p(X_1, Y_s)$	\dots	$A_p(X_1, Y_S)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
X_k	$A_p(X_k, Y_1)$	\dots	$A_p(X_k, Y_s)$	\dots	$A_p(X_k, Y_S)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
X_K	$A_p(X_K, Y_1)$	\dots	$A_p(X_K, Y_s)$	\dots	$A_p(X_K, Y_S)$

Figura: Matriz de compromisso normalizada



Apresentação

- A disponibilidade das q matrizes de compromisso modificadas permite a construção da matriz de compromisso agregada:

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S	$D^{\max}(X_k)$	$D^{\min}(X_k)$	$\overline{D}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
X_1	$D(X_1, Y_1)$...	$D(X_1, Y_s)$...	$D(X_1, Y_S)$	$D^{\max}(X_1)$	$D^{\min}(X_1)$	$\overline{D}(X_1)$	$r^{\max}(X_1)$
...
X_k	$D(X_k, Y_1)$...	$D(X_k, Y_s)$...	$D(X_k, Y_S)$	$D^{\max}(X_k)$	$D^{\min}(X_k)$	$\overline{D}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
...
X_K	$D(X_K, Y_1)$...	$D(X_K, Y_s)$...	$D(X_K, Y_S)$	$D^{\max}(X_K)$	$D^{\min}(X_K)$	$\overline{D}(X_K)$	$r^{\max}(X_K)$
$D^{\max}(Y_s)$	$D^{\max}(Y_1)$...	$D^{\max}(Y_s)$...	$D^{\max}(Y_S)$				

Figura: Matriz de compromisso agregada com estimativas de características



Apresentação

Estimativas de características

Função de pertinência de nível máximo (estimativa otimista):

$$D^{max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} D(X_k, Y_s)$$

Estimativas de características

Função de pertinência de nível mínimo (estimativa pessimista):

$$D^{min}(X_k) = \min_{1 \leq s \leq S} D(X_k, Y_s)$$



Apresentação

Estimativas de características

Função de pertinência de nível médio:

$$\overline{D}(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S D(X_k, Y_s)$$



Apresentação

Estimativas de características

Risco de nível máximo:

$$r(X_k, Y_s) = D^{max}(Y_s) - D(X_k, Y_s)$$

em que,

$$D^{max}(Y_s) = \max_{1 \leq k \leq K} D(X_k, Y_s)$$

○○○○○○○○○
○○○○○○○○○
○○○○○
○○○○○
●○○○
○○○○○○○○○

Modificação dos Critérios de Escolha

Sumário

- 1 **Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério**
 - Abordagem Bellman-Zadeh
 - Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
 - Critérios de Escolha
 - Generalização da Abordagem Clássica
 - **Modificação dos Critérios de Escolha**
 - Exemplo de Aplicação



Apresentação

O critério de Wald é definido como:

$$\max_{1 \leq k \leq K} D(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq s \leq S} \min_{1 \leq p \leq q} A_p(X_k, Y_s)$$

O critério de Laplace é definido como:

$$\max_{1 \leq k \leq K} D(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \min_{1 \leq p \leq q} A_p(X_k, Y_s)$$



Modificação dos Critérios de Escolha

Apresentação

Critério de Savage modificado

O critério de Savage é definido como:

$$\min_{1 \leq k \leq K} r^{\max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} \left[\max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq p \leq q} A_p(X_k, Y_s) - \min_{1 \leq p \leq q} A_p(X_k, Y_s) \right]$$

```

○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○
○○○○○
○○○○○○○
○○○○○○○
○○●○○
○○○○○○○○○○

```

Modificação dos Critérios de Escolha

Apresentação

Critério de Hurwicz modificado

O critério de Hurwicz é definido como:

$$\max_{1 \leq k \leq K} \left[\alpha \min_{1 \leq k \leq K} D(X_k) + (1 - \alpha) \max_{1 \leq k \leq K} D(X_k) \right] =$$

$$\max_{1 \leq k \leq K} \left[\alpha \min_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq p \leq q} D(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq p \leq q} D(X_k, Y_s) \right]$$



Apresentação

- Embora a abordagem apresentada considere os critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, outros critérios disponíveis na literatura podem ser aplicados;
- Entretanto, estes outros critérios frequentemente assumem a disponibilidade de certos tipos de informação sobre os estados de natureza;
- Além disso, existem inúmeros trabalhos que sugerem o potencial dos critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz.

○○○○○○○○○
○○○○○○○○○
○○○○○
○○○○○
○○○○○
○○○○○
●○○○○○○○○○

Exemplo de Aplicação

Sumário

- 1 Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério**
 - Abordagem Bellman-Zadeh
 - Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
 - Critérios de Escolha
 - Generalização da Abordagem Clássica
 - Modificação dos Critérios de Escolha
 - Exemplo de Aplicação



Exemplo de Aplicação

Apresentação

A abordagem geral para tomada de decisão multicritério sob incerteza envolve três etapas:

Fase 1:

- Construção das q matrizes de compromisso a partir das funções $F_p(X_k, Y_s)$;
- Nesta etapa pode ser necessário resolver modelos $\langle \mathbf{X}, \mathbf{M} \rangle$ para a geração de soluções factíveis;
- Alternativamente, um conjunto de soluções viáveis pode ser fornecido diretamente pelo DM;

○○○○○○○○○
○○○○○○○○○
○○○○○
○○○○○
○○○○○○○
○○○○○
○○○○○
○○●○○○○○○○

Exemplo de Aplicação

Apresentação

Fase 2:

- Análise das matrizes de compromisso;
- O procedimento geral pode conduzir a mais de uma solução (ordem parcial);
- Esta etapa ajuda a avaliar tanto os riscos particulares quanto agregados em relação a cada alternativa de projeto;

oooooooo
oooooooo
ooooo
oooooooo
ooooo
ooooo
ooooo
oooo●oooooooo

Exemplo de Aplicação

Apresentação

Fase 3:

- Construção e análise de modelos $\langle \mathbf{X}, \mathbf{R} \rangle$ para a contração subsequente do domínio de incerteza de decisão;
- Os modelos $\langle \mathbf{X}, \mathbf{R} \rangle$ permitem considerar índices quantitativos e qualitativos baseados no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas;



Exemplo de Aplicação

Apresentação

Exemplo de aplicação

Considere o seguinte problema multiobjetivo:

$$\min F_1(x) = [2.70, 3.30]x_1 + [11.70, 14.30]x_2 + [7.20, 8.80]x_3$$

$$\min F_2(x) = [5.40, 6.60]x_1 + [3.60, 4.40]x_2 + [4.50, 5.50]x_3$$

sujeito às restrições:

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 12$$

$$0 \leq x_3 \leq 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 36$$

○○○○○○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○●○○○○○

Exemplo de Aplicação

Apresentação

Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso do critério F_1 :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
X_1	250.00	249.20	250.80	249.43	259.83	239.03	252.03
X_2	243.75	249.01	246.49	245.87	255.58	236.17	253.77
X_3	242.75	244.26	241.24	240.60	249.76	231.45	249.60
X_4	247.10	249.50	244.70	244.52	253.89	235.14	255.27

Figura: Matriz de compromisso do critério F_1



Exemplo de Aplicação

Apresentação

Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso com estimativas de características de F_1 :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^{\max}(X_k)$	$F^{\min}(X_k)$	$\overline{F}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
X_1	250.00	249.20	250.80	249.43	259.83	239.03	252.03	259.83	239.03	250.05	10.07
X_2	243.75	249.01	246.49	245.87	255.58	236.17	253.77	255.58	236.17	247.81	5.82
X_3	242.75	244.26	241.24	240.60	249.76	231.45	249.60	249.76	231.45	242.81	0
X_4	247.10	249.50	244.70	244.52	253.89	235.14	255.27	255.27	235.14	247.16	5.67
$F^{\min}(Y_s)$	242.75	244.26	241.24	240.60	249.76	231.45	249.60				

Figura: Matriz de compromisso com estimativas de características de F_1

Os critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz sugerem X_3 .

○○○○○○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○●○○○○

Exemplo de Aplicação

Apresentação

Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso do critério F_2 :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
X_1	148.00	151.80	144.20	152.87	146.87	146.07	146.47
X_2	148.45	151.67	145.23	151.58	149.62	145.33	147.48
X_3	149.45	152.72	146.18	151.75	151.44	146.05	148.75
X_4	148.58	151.47	145.69	150.83	150.96	144.82	147.89

Figura: Matriz de compromisso do critério F_2



Exemplo de Aplicação

Apresentação

Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso com estimativas de características de F_2 :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^{\max}(X_k)$	$F^{\min}(X_k)$	$\overline{F}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
X_1	148.00	151.80	144.20	152.87	146.87	146.07	146.47	152.87	144.20	148.04	2.04
X_2	148.45	151.67	145.23	151.58	149.62	145.33	147.48	151.67	145.23	148.48	2.75
X_3	149.45	152.72	146.18	151.75	151.44	146.05	148.75	152.72	146.05	149.48	4.57
X_4	148.58	151.47	145.69	150.83	150.96	144.82	147.89	151.47	144.82	148.61	4.09
$F^{\min}(Y_s)$	148.00	151.80	144.20	152.87	146.87	146.07	146.47				

Figura: Matriz de compromisso com estimativas de características de F_2

Os critérios de Wald, Laplace e Savage sugerem X_1 , enquanto o critério de Hurwicz indica X_4 . Formalmente, X_1 e X_4 são indiferentes.

○○○○○○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○
 ○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○○○●○○

Exemplo de Aplicação

Apresentação

Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso normalizada de F_1 :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
X_1	0.35	0.37	0.32	0.37	0	0.73	0.27
X_2	0.57	0.38	0.47	0.49	0.15	0.83	0.21
X_3	0.60	0.55	0.66	0.68	0.35	1	0.36
X_4	0.45	0.36	0.53	0.54	0.21	0.87	0.16

Figura: Matriz de compromisso normalizada de F_1

○○○○○○○○
 ○○○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○
 ○○○○
 ○○○○
 ○○○○○○○○●○

Exemplo de Aplicação

Apresentação

Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso normalizada de F_2 :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
X_1	0.56	0.12	1	0	0.69	0.78	0.74
X_2	0.51	0.14	0.88	0.15	0.37	0.87	0.62
X_3	0.39	0.02	0.77	0.13	0.16	0.79	0.48
X_4	0.49	0.16	0.83	0.24	0.22	0.93	0.57

Figura: Matriz de compromisso normalizada de F_2



Exemplo de Aplicação

Apresentação

Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso agregada com estimativas de características:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$D^{\max}(X_k)$	$D^{\min}(X_k)$	$\overline{D}(X_k)$	$R^{\max}(X_k)$
X_1	0.35	0.12	0.32	0	0	0.73	0.27	0.73	0	0.26	0.34
X_2	0.51	0.14	0.47	0.15	0.15	0.83	0.21	0.83	0.14	0.34	0.19
X_3	0.39	0.02	0.66	0.13	0.16	0.79	0.36	0.79	0.02	0.36	0.14
X_4	0.45	0.16	0.53	0.24	0.21	0.87	0.16	0.87	0.16	0.37	0.20
$D^{\max}(Y_s)$	0.51	0.16	0.66	0.24	0.21	0.87	0.36				

Figura: Matriz de compromisso agregada com estimativas de características

Os critérios de Wald, Laplace e Hurwicz sugerem X_4 , enquanto o critério de Savage indica X_3 . Este resultado requer uso da *fase 3*.

oooooooo
oooooooo
oooooooo
ooooo
oooooo
oooooo
ooooo
ooooo
oooooooooooo

Literatura Especializada



W. Pedrycz, P. Ekel, R. Parreiras, Fuzzy Multicriteria Decision-Making: Models, Methods and Applications, John Wiley & Sons, 2011. (section 4.5 and chapter 8)

◀ Início