

# **Teoria da Decisão**

## **Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério**

Prof. Lucas S. Batista

[lusoba@ufmg.br](mailto:lusoba@ufmg.br)

[www.ppgee.ufmg.br/~lusoba](http://www.ppgee.ufmg.br/~lusoba)

Universidade Federal de Minas Gerais  
Escola de Engenharia  
Graduação em Engenharia de Sistemas



Abordagem Bellman-Zadeh

## Sumário

### 1 Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério

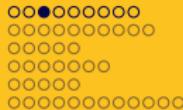
- Abordagem Bellman-Zadeh
- Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
- Critérios de Escolha
- Generalização da Abordagem Clássica
- Modificação dos Critérios de Escolha
- Exemplo de Aplicação



Abordagem Bellman-Zadeh

## Apresentação

- A abordagem clássica Bellman-Zadeh é aplicada para tomada de decisão em ambientes *fuzzy* para o tratamento de problemas multicritério;
- Nessa abordagem, cada função objetivo  $F_p(x)$  pode ser substituída por uma função objetivo *fuzzy* ou conjunto *fuzzy*  $A_p$ ;
- Uma solução *fuzzy*  $D$  é obtida a partir da interseção  $D = \bigcap_{p=1}^q A_p$ ;



Abordagem Bellman-Zadeh

## Apresentação

- A função de pertinência de  $D$  é definida como:

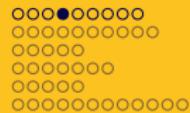
$$D(x) = \wedge_{p=1}^q A_p(x) = \min_{p=1, \dots, q} A_p(x), \quad x \in \mathbf{L}$$

- Esta função permite determinar a solução  $x$  com maior pertinência à solução fuzzy  $D$ :

$$\max D(x) = \max_{x \in \mathbf{L}} \min_{p=1, \dots, q} A_p(x)$$

- O problema de decisão torna-se então:

$$x^* = \arg \max_{x \in \mathbf{L}} \min_{p=1, \dots, q} A_p(x)$$



Abordagem Bellman-Zadeh

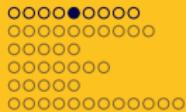
## Apresentação

### Exemplo

As funções de pertinência de três funções objetivo fuzzy  $A_1(x)$ ,  $A_2(x)$  e  $A_3(x)$  são apresentadas a seguir:

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_1(x)$	0.1	0.2	0.8	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.2	0.1
$A_2(x)$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0.6	0.3	0.1	0.9
$A_3(x)$	0.4	0.6	1.0	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2

**Figura:** Funções de pertinência de funções objetivo fuzzy



Abordagem Bellman-Zadeh

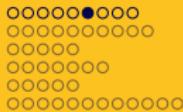
## Apresentação

### Exemplo

A solução *fuzzy*  $D(x)$  é apresentada a seguir, a qual fornece a solução  $x^* = 5$ .

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D(x)$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.7	0.6	0.5	0.3	0.1	0.1

**Figura:** Função de pertinência de uma solução *fuzzy*

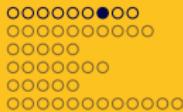


Abordagem Bellman-Zadeh

## Apresentação

Ao considerar problemas multiobjetivo:

- para obter  $x^*$  é necessário construir as funções de pertinência  $A_p(x)$ ,  $p = 1, \dots, q$ ;
- cada função de pertinência deve refletir o grau de aproximação do próprio ótimo para  $F_p(x)$ ,  $x \in \mathbf{L}$ ,  $p = 1, \dots, q$ .



Abordagem Bellman-Zadeh

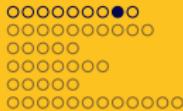
## Apresentação

- Para funções objetivo de minimização:

$$A_p(x) = \left[ \frac{\max_{x \in \mathcal{L}} F_p(x) - F_p(x)}{\max_{x \in \mathcal{L}} F_p(x) - \min_{x \in \mathcal{L}} F_p(x)} \right]^{\lambda_p}$$

- Para funções objetivo de maximização:

$$A_p(x) = \left[ \frac{F_p(x) - \min_{x \in \mathcal{L}} F_p(x)}{\max_{x \in \mathcal{L}} F_p(x) - \min_{x \in \mathcal{L}} F_p(x)} \right]^{\lambda_p}$$



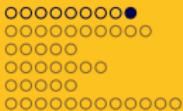
Abordagem Bellman-Zadeh

## Apresentação

- Existem diferentes operadores de agregação que podem ser usados no lugar do operador min;
- Assim,  $D(x)$  pode ser obtido da seguinte forma geral:

$$D(x) = \text{agg}(A_1(x), A_2(x), \dots, A_q(x)), \quad x \in \mathbf{L}$$

- Entretanto, essa escolha é baseada na experiência do DM.



Abordagem Bellman-Zadeh

## Apresentação

- Além do operador  $\min$ , o operador produto também tem sido muito empregado em problemas de tomada de decisão;
- Nesse caso, tem-se:

$$D(x) = \prod_{p=1}^q A_p(x), \quad x \in \mathbf{L}$$

$$\max D(x) = \max_{x \in \mathbf{L}} \prod_{p=1}^q A_p(x)$$

$$x^* = \arg \max_{x \in \mathbf{L}} \prod_{p=1}^q A_p(x)$$



Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza

## Sumário

### 1 Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério

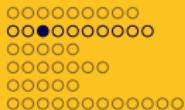
- Abordagem Bellman-Zadeh
- Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
- Critérios de Escolha
- Generalização da Abordagem Clássica
- Modificação dos Critérios de Escolha
- Exemplo de Aplicação



Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza

## Apresentação

- A abordagem clássica define inicialmente uma matriz de compromisso considerando as alternativas de projeto e possíveis estados de natureza (cenários), em que
  - alternativas:  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ ;
  - cenários:  $Y_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ ;



Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza

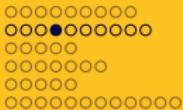
## Apresentação

### Matriz de compromisso

A matriz de compromisso quantifica os efeitos (consequências) das ações  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  nos possíveis cenários  $Y_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ .

	$Y_1$	...	$Y_s$	...	$Y_S$
$X_1$	$F(X_1, Y_1)$	...	$F(X_1, Y_s)$	...	$F(X_1, Y_S)$
...	...	...	...	...	...
$X_k$	$F(X_k, Y_1)$	...	$F(X_k, Y_s)$	...	$F(X_k, Y_S)$
...	...	...	...	...	...
$X_K$	$F(X_K, Y_1)$	...	$F(X_K, Y_s)$	...	$F(X_K, Y_S)$

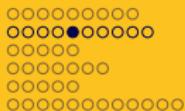
**Figura:** Matriz de compromisso



Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza

## Apresentação

- A análise da matriz de compromisso e a escolha de uma solução racional são baseados em *critérios de escolha*;
- Os *critérios de escolha* mais utilizados são os critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz;



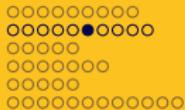
## Apresentação

### Matriz de compromisso com estimativas de características

Os critérios de escolha permitem incorporar estimativas de características à matriz de compromisso:

	$Y_1$	...	$Y_s$	...	$Y_S$	$F^{\max}(X_k)$	$F^{\min}(X_k)$	$\bar{F}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
$X_1$	$F(X_1, Y_1)$	...	$F(X_1, Y_s)$	...	$F(X_1, Y_S)$	$F^{\max}(X_1)$	$F^{\min}(X_1)$	$\bar{F}(X_1)$	$r^{\max}(X_1)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$X_k$	$F(X_k, Y_1)$	...	$F(X_k, Y_s)$	...	$F(X_k, Y_S)$	$F^{\max}(X_k)$	$F^{\min}(X_k)$	$\bar{F}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$X_K$	$F(X_K, Y_1)$	...	$F(X_K, Y_s)$	...	$F(X_K, Y_S)$	$F^{\max}(X_K)$	$F^{\min}(X_K)$	$\bar{F}(X_K)$	$r^{\max}(X_K)$
$F^{\max}(Y_s)$	$F^{\max}(Y_1)$	...	$F^{\max}(Y_s)$	...	$F^{\max}(Y_S)$				

**Figura:** Matriz de compromisso com estimativas de características



Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza

## Apresentação

### Estimativas de características

Nível máximo da função objetivo:

$$F^{max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)$$

Este nível é determinado para uma dada solução e representa:

- a estimativa mais otimista quando deseja-se maximizar  $F$ , ou
- a estimativa mais pessimista quando deseja-se minimizar  $F$ .



## Apresentação

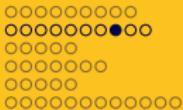
### Estimativas de características

Nível mínimo da função objetivo:

$$F^{min}(X_k) = \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)$$

Este nível é determinado para uma dada solução e representa:

- a estimativa mais pessimista quando deseja-se maximizar  $F$ , ou
- a estimativa mais otimista quando deseja-se minimizar  $F$ .



Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza

## Apresentação

### Estimativas de características

Nível médio da função objetivo:

$$\bar{F}(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s)$$

Este nível é determinado para uma dada solução e representa uma estimativa média da sua qualidade em relação aos cenários possíveis.



## Apresentação

### Estimativas de características

Nível máximo de risco:

$$r^{max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} r(X_k, Y_s)$$

em que  $r(X_k, Y_s)$  é uma medida de risco (arrependimento),

$$r(X_k, Y_s) = F^{max}(Y_s) - F(X_k, Y_s), \text{ se deseja-se maximizar } F$$

$$r(X_k, Y_s) = F(X_k, Y_s) - F^{min}(Y_s), \text{ se deseja-se minimizar } F$$

em que,

$$F^{max}(Y_s) = \max_{1 \leq k \leq K} F(X_k, Y_s) \text{ e } F^{min}(Y_s) = \min_{1 \leq k \leq K} F(X_k, Y_s)$$



Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza

## Apresentação

### Matriz de risco

Calculando o nível de risco para todo  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$  e  $Y_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ , obtém-se a matriz de risco a seguir:

	$Y_1$	$\dots$	$Y_s$	$\dots$	$Y_S$	$r^{\max}(X_k)$
$X_1$	$r(X_1, Y_1)$	$\dots$	$r(X_1, Y_s)$	$\dots$	$r(X_1, Y_S)$	$r^{\max}(X_1)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$X_k$	$r(X_k, Y_1)$	$\dots$	$r(X_k, Y_s)$	$\dots$	$r(X_k, Y_S)$	$r^{\max}(X_k)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$X_K$	$r(X_K, Y_1)$	$\dots$	$r(X_K, Y_s)$	$\dots$	$r(X_K, Y_S)$	$r^{\max}(X_K)$

**Figura:** Matriz de risco



Critérios de Escolha

## Sumário

### 1 Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério

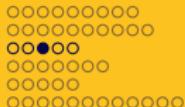
- Abordagem Bellman-Zadeh
- Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
- Critérios de Escolha
- Generalização da Abordagem Clássica
- Modificação dos Critérios de Escolha
- Exemplo de Aplicação



Critérios de Escolha

## Apresentação

- Os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz são baseados nas estimativas de características  $F^{max}(X_k)$ ,  $F^{min}(X_k)$ ,  $\bar{F}(X_k)$  e  $r^{max}(X_k)$ ;
- Nos próximos slides, os critérios de escolha são definidos considerando que se deseja maximizar a função objetivo  $F$ .



Critérios de Escolha

## Apresentação

### Critério de Wald

O critério de Wald se baseia em  $F^{min}(X_k)$ :

$$\max_{1 \leq k \leq K} F^{min}(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)$$

### Critério de Laplace

O critério de Laplace se baseia em  $\bar{F}(X_k)$ :

$$\max_{1 \leq k \leq K} \bar{F}(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s)$$



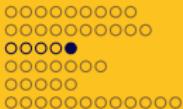
Critérios de Escolha

## Apresentação

### Critério de Savage

O critério de Savage se baseia em  $r^{max}(X_k)$ :

$$\min_{1 \leq k \leq K} r^{max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} r(X_k, Y_s)$$



Critérios de Escolha

## Apresentação

### Critério de Hurwicz

O critério de Hurwicz se baseia em  $F^{\min}(X_k)$  e  $F^{\max}(X_k)$ :

$$\max_{1 \leq k \leq K} [\alpha F^{\min}(X_k) + (1 - \alpha) F^{\max}(X_k)] = \\ \max_{1 \leq k \leq K} \left[ \alpha \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \right]$$

em que  $\alpha \in [0, 1]$  é o índice “pessimismo-otimismo” (usualmente,  $\alpha = 0.75$ ).



Generalização da Abordagem Clássica

## Sumário

### 1 Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério

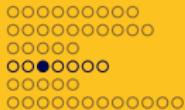
- Abordagem Bellman-Zadeh
- Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
- Critérios de Escolha
- Generalização da Abordagem Clássica
- Modificação dos Critérios de Escolha
- Exemplo de Aplicação



Generalização da Abordagem Clássica

## Apresentação

- A abordagem Bellman-Zadeh pode ser aplicada para a solução de problemas de tomada de decisão multiobjetivo;
- Esta abordagem clássica pode ser generalizada a partir da maximização de  $D(x)$ ;
- Nesse caso, ao lidar com  $q$  funções objetivo,  $q$  matrizes de compromisso deverão ser geradas e analizadas;



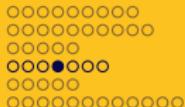
Generalização da Abordagem Clássica

## Apresentação

- A matriz de compromisso modificada (normalizada) relacionada ao  $p$ -ésimo critério fica da seguinte forma:

	$Y_1$	...	$Y_s$	...	$Y_S$
$X_1$	$A_p(X_1, Y_1)$	...	$A_p(X_1, Y_s)$	...	$A_p(X_1, Y_S)$
...	...	...	...	...	...
$X_k$	$A_p(X_k, Y_1)$	...	$A_p(X_k, Y_s)$	...	$A_p(X_k, Y_S)$
...	...	...	...	...	...
$X_K$	$A_p(X_K, Y_1)$	...	$A_p(X_K, Y_s)$	...	$A_p(X_K, Y_S)$

**Figura:** Matriz de compromisso normalizada



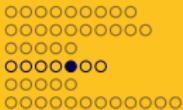
Generalização da Abordagem Clássica

## Apresentação

- A disponibilidade das  $q$  matrizes de compromisso modificadas permite a construção da matriz de compromisso agregada:

	$Y_1$	...	$Y_s$	...	$Y_S$	$D^{\max}(X_k)$	$D^{\min}(X_k)$	$\overline{D}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
$X_1$	$D(X_1, Y_1)$	...	$D(X_1, Y_s)$	...	$D(X_1, Y_S)$	$D^{\max}(X_1)$	$D^{\min}(X_1)$	$\overline{D}(X_1)$	$r^{\max}(X_1)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$X_k$	$D(X_k, Y_1)$	...	$D(X_k, Y_s)$	...	$D(X_k, Y_S)$	$D^{\max}(X_k)$	$D^{\min}(X_k)$	$\overline{D}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$X_K$	$D(X_K, Y_1)$	...	$D(X_K, Y_s)$	...	$D(X_K, Y_S)$	$D^{\max}(X_K)$	$D^{\min}(X_K)$	$\overline{D}(X_K)$	$r^{\max}(X_K)$
$D^{\max}(Y_s)$	$D^{\max}(Y_1)$	...	$D^{\max}(Y_s)$	...	$D^{\max}(Y_S)$				

**Figura:** Matriz de compromisso agregada com estimativas de características



Generalização da Abordagem Clássica

## Apresentação

### Estimativas de características

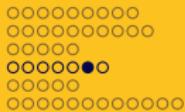
Função de pertinência de nível máximo (estimativa otimista):

$$D^{max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} D(X_k, Y_s)$$

### Estimativas de características

Função de pertinência de nível mínimo (estimativa pessimista):

$$D^{min}(X_k) = \min_{1 \leq s \leq S} D(X_k, Y_s)$$



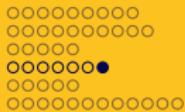
Generalização da Abordagem Clássica

## Apresentação

### Estimativas de características

Função de pertinência de nível médio:

$$\bar{D}(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S D(X_k, Y_s)$$



Generalização da Abordagem Clássica

## Apresentação

### Estimativas de características

Risco de nível máximo:

$$r(X_k, Y_s) = D^{\max}(Y_s) - D(X_k, Y_s)$$

em que,

$$D^{\max}(Y_s) = \max_{1 \leq k \leq K} D(X_k, Y_s)$$



Modificação dos Critérios de Escolha

## Sumário

### 1 Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério

- Abordagem Bellman-Zadeh
- Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
- Critérios de Escolha
- Generalização da Abordagem Clássica
- **Modificação dos Critérios de Escolha**
- Exemplo de Aplicação



Modificação dos Critérios de Escolha

## Apresentação

### Critério de Wald modificado

O critério de Wald é definido como:

$$\max_{1 \leq k \leq K} D(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq s \leq S} \min_{1 \leq p \leq q} A_p(X_k, Y_s)$$

### Critério de Laplace modificado

O critério de Laplace é definido como:

$$\max_{1 \leq k \leq K} D(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \min_{1 \leq p \leq q} A_p(X_k, Y_s)$$



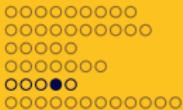
Modificação dos Critérios de Escolha

## Apresentação

### Critério de Savage modificado

O critério de Savage é definido como:

$$\min_{1 \leq k \leq K} r^{\max}(X_k) = \\ \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} \left[ \max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq p \leq q} A_p(X_k, Y_s) - \min_{1 \leq p \leq q} A_p(X_k, Y_s) \right]$$



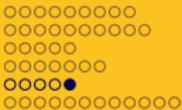
Modificação dos Critérios de Escolha

## Apresentação

### Critério de Hurwicz modificado

O critério de Hurwicz é definido como:

$$\max_{1 \leq k \leq K} \left[ \alpha \min_{1 \leq k \leq K} D(X_k) + (1 - \alpha) \max_{1 \leq k \leq K} D(X_k) \right] =$$
$$\max_{1 \leq k \leq K} \left[ \alpha \min_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq p \leq q} D(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq p \leq q} D(X_k, Y_s) \right]$$



Modificação dos Critérios de Escolha

## Apresentação

- Embora a abordagem apresentada considere os critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, outros critérios disponíveis na literatura podem ser aplicados;
- Entretanto, estes outros critérios frequentemente assumem a disponibilidade de certos tipos de informação sobre os estados de natureza;
- Além disso, existem inúmeros trabalhos que sugerem o pontencial dos critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz.



Exemplo de Aplicação

## Sumário

### 1 Abordagem Clássica para Tomada de Decisão Multicritério

- Abordagem Bellman-Zadeh
- Abordagem Clássica para tratamento de Incerteza
- Critérios de Escolha
- Generalização da Abordagem Clássica
- Modificação dos Critérios de Escolha
- Exemplo de Aplicação



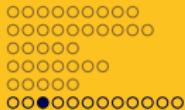
Exemplo de Aplicação

## Apresentação

A abordagem geral para tomada de decisão multicritério sob incerteza envolve três etapas:

### Fase 1:

- Construção das  $q$  matrizes de compromisso a partir das funções  $F_p(X_k, Y_s)$ ;
- Nesta etapa pode ser necessário resolver modelos  $\langle \mathbf{X}, \mathbf{M} \rangle$  para a geração de soluções factíveis;
- Alternativamente, um conjunto de soluções viáveis pode ser fornecido diretamente pelo DM;

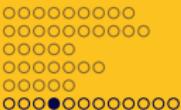


Exemplo de Aplicação

## Apresentação

### Fase 2:

- Análise das matrizes de compromisso;
- O procedimento geral pode conduzir a mais de uma solução (ordem parcial);
- Esta etapa ajuda a avaliar tanto os riscos particulares quanto agregados em relação a cada alternativa de projeto;

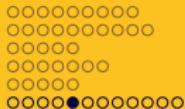


## Exemplo de Aplicação

## Apresentação

### **Fase 3:**

- Construção e análise de modelos  $\langle \mathbf{X}, \mathbf{R} \rangle$  para a contração subsequente do domínio de incerteza de decisão;
  - Os modelos  $\langle \mathbf{X}, \mathbf{R} \rangle$  permitem considerar índices quantitativos e qualitativos baseados no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas;



Exemplo de Aplicação

## Apresentação

### Exemplo de aplicação

Considere o seguinte problema multiobjetivo:

$$\min F_1(x) = [2.70, 3.30]x_1 + [11.70, 14.30]x_2 + [7.20, 8.80]x_3$$

$$\min F_2(x) = [5.40, 6.60]x_1 + [3.60, 4.40]x_2 + [4.50, 5.50]x_3$$

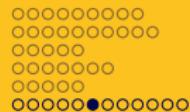
sujeito às restrições:

$$0 \leq x_1 \leq 10$$

$$0 \leq x_2 \leq 12$$

$$0 \leq x_3 \leq 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 36$$



Exemplo de Aplicação

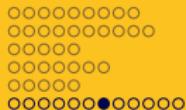
## Apresentação

### Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso do critério  $F_1$ :

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	250.00	249.20	250.80	249.43	259.83	239.03	252.03
$X_2$	243.75	249.01	246.49	245.87	255.58	236.17	253.77
$X_3$	242.75	244.26	241.24	240.60	249.76	231.45	249.60
$X_4$	247.10	249.50	244.70	244.52	253.89	235.14	255.27

**Figura:** Matriz de compromisso do critério  $F_1$



Exemplo de Aplicação

## Apresentação

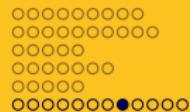
### Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso com estimativas de características de  $F_1$ :

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	$F^{\max}(X_k)$	$F^{\min}(X_k)$	$\bar{F}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
$X_1$	250.00	249.20	250.80	249.43	259.83	239.03	252.03	259.83	239.03	250.05	10.07
$X_2$	243.75	249.01	246.49	245.87	255.58	236.17	253.77	255.58	236.17	247.81	5.82
$X_3$	242.75	244.26	241.24	240.60	249.76	231.45	249.60	249.76	231.45	242.81	0
$X_4$	247.10	249.50	244.70	244.52	253.89	235.14	255.27	255.27	235.14	247.16	5.67
$F^{\min}(Y_s)$	242.75	244.26	241.24	240.60	249.76	231.45	249.60				

**Figura:** Matriz de compromisso com estimativas de características de  $F_1$

Os critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz sugerem  $X_3$ .



Exemplo de Aplicação

## Apresentação

### Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso do critério  $F_2$ :

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	148.00	151.80	144.20	152.87	146.87	146.07	146.47
$X_2$	148.45	151.67	145.23	151.58	149.62	145.33	147.48
$X_3$	149.45	152.72	146.18	151.75	151.44	146.05	148.75
$X_4$	148.58	151.47	145.69	150.83	150.96	144.82	147.89

**Figura:** Matriz de compromisso do critério  $F_2$



Exemplo de Aplicação

## Apresentação

### Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso com estimativas de características de  $F_2$ :

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	$F^{\max}(X_k)$	$F^{\min}(X_k)$	$\bar{F}(X_k)$	$r^{\max}(X_k)$
$X_1$	148.00	151.80	144.20	152.87	146.87	146.07	146.47	152.87	144.20	148.04	2.04
$X_2$	148.45	151.67	145.23	151.58	149.62	145.33	147.48	151.67	145.23	148.48	2.75
$X_3$	149.45	152.72	146.18	151.75	151.44	146.05	148.75	152.72	146.05	149.48	4.57
$X_4$	148.58	151.47	145.69	150.83	150.96	144.82	147.89	151.47	144.82	148.61	4.09
$F^{\min}(Y_s)$	148.00	151.80	144.20	152.87	146.87	146.07	146.47				

**Figura:** Matriz de compromisso com estimativas de características de  $F_2$

Os critérios de Wald, Laplace e Savage sugerem  $X_1$ , enquanto o critério de Hurwicz indica  $X_4$ . Formalmente,  $X_1$  e  $X_4$  são indiferentes.



Exemplo de Aplicação

## Apresentação

### Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso normalizada de  $F_1$ :

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	0.35	0.37	0.32	0.37	0	0.73	0.27
$X_2$	0.57	0.38	0.47	0.49	0.15	0.83	0.21
$X_3$	0.60	0.55	0.66	0.68	0.35	1	0.36
$X_4$	0.45	0.36	0.53	0.54	0.21	0.87	0.16

**Figura:** Matriz de compromisso normalizada de  $F_1$



Exemplo de Aplicação

## Apresentação

### Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso normalizada de  $F_2$ :

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$X_1$	0.56	0.12	1	0	0.69	0.78	0.74
$X_2$	0.51	0.14	0.88	0.15	0.37	0.87	0.62
$X_3$	0.39	0.02	0.77	0.13	0.16	0.79	0.48
$X_4$	0.49	0.16	0.83	0.24	0.22	0.93	0.57

**Figura:** Matriz de compromisso normalizada de  $F_2$



Exemplo de Aplicação

## Apresentação

### Exemplo de aplicação

Matriz de compromisso agregada com estimativas de características:

	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	$D^{\max}(X_k)$	$D^{\min}(X_k)$	$\bar{D}(X_k)$	$R^{\max}(X_k)$
$X_1$	0.35	0.12	0.32	0	0	0.73	0.27	0.73	0	0.26	0.34
$X_2$	0.51	0.14	0.47	0.15	0.15	0.83	0.21	0.83	0.14	0.34	0.19
$X_3$	0.39	0.02	0.66	0.13	0.16	0.79	0.36	0.79	0.02	0.36	0.14
$X_4$	0.45	0.16	0.53	0.24	0.21	0.87	0.16	0.87	0.16	0.37	0.20
$D^{\max}(Y_s)$	0.51	0.16	0.66	0.24	0.21	0.87	0.36				

**Figura:** Matriz de compromisso agregada com estimativas de características

Os critérios de Wald, Laplace e Hurwicz sugerem  $X_4$ , enquanto o critério de Savage indica  $X_3$ . Este resultado requer uso da fase 3.



## Literatura Especializada



W. Pedrycz, P. Ekel, R. Parreiras, *Fuzzy Multicriteria Decision-Making: Models, Methods and Applications*, John Wiley & Sons, 2011. (section 4.5 and chapter 8)

◀ Inicio