

Teoria da Decisão

Teoria da Utilidade Multiatributo

Prof. Lucas S. Batista

lusoba@ufmg.br

www.ppgee.ufmg.br/~lusoba

Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Graduação em Engenharia de Sistemas

Sumário

1 Teoria da Utilidade Multiatributo

- Apresentação
- Métodos baseados em função de utilidade

Introdução

Questão crucial em tomada de decisão

Como considerar simultaneamente todos os critérios/atributos para a comparação das ações possíveis?

Procedimentos de agregação multicritério:

- Síntese de critério;
- Síntese de sistema de relações de preferência.

Introdução

Síntese de critério

- Regras formais consideram as m consequências de uma dada ação $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ de forma a atribuir uma nota a mesma.
- Um único critério sintetiza os m atributos.
- Produz-se uma pré-ordem completa em \mathcal{A} (não admite incompatibilidade).
- Note que esta estratégia não corresponde a uma análise monocritério.

Introdução

Métodos baseados em síntese de critério

Escola Americana (década de 1950)

- Multicriteria Decision Making (MCDM).
- Métodos baseados na teoria da utilidade.
- Atitude normativa:
 - Baseia-se em regras pré-estabelecidas (teoria axiomática);
 - Assume que o decisor tem um sistema de preferência bem definido.



Introdução

Métodos baseados em síntese de critério

- Assumem um decisor completamente racional, capaz de definir sua preferência entre quaisquer duas alternativas.
- Não admitem atitudes de indecisão; consideram relações de preferência sempre transitivas.
- Impedem a representação de certas atitudes reais do decisor.

Introdução

Escola Americana

AHP	Analytic Hierarchy Process
MACBETH	Measuring Attractiveness by a Categorical based Evaluation Technique
MAUT	Multi-Attribute Utility Theory
SMART	Simple Multi-Attribute Rating Technique
SMARTS	Simple Multi-Attribute Rating Technique using Swings
SMARTER	Simple Multi-Attribute Rating Technique Exploiting Ranks

Tabela: Principais Métodos da Escola Americana



Introdução

Teoria da utilidade multiatributo (MAUT)

Assume que a preferência do decisor pode ser quantificada, medida, e representada por meio de uma função de utilidade multiatributo.

- Dado um problema de decisão, elabora-se um funcional $U(\cdot)$ que represente a preferência do decisor.
- Por meio de $U(\cdot)$, atribui-se uma nota a cada alternativa de \mathcal{A} , possibilitando a ordenação dessas ações.

Introdução

Processo de construção de $U(\cdot)$

- 1 Constrói-se uma função de utilidade $u : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ para cada critério.
- 2 Agrega-se tais funções originando o funcional $U(\cdot)$. Frequentemente utiliza-se agregação aditiva:

$$U(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m w_i u_i(\mathbf{a}) \quad \text{em que} \quad \sum_{i=1}^m w_i = 1, \quad w_i \geq 0$$



Introdução

Relações de preferência

- Em MAUT, usa-se uma estrutura $\{P, I\}$ de tal forma que:

$$\mathbf{a}_i P \mathbf{a}_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{se } U(\mathbf{a}_i) > U(\mathbf{a}_j) \\ \text{ou } U(\mathbf{a}_i) = U(\mathbf{a}_j) \end{array} \right.$$

$$\mathbf{a}_i I \mathbf{a}_j \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{se } U(\mathbf{a}_i) = U(\mathbf{a}_j) \\ \text{ou } U(\mathbf{a}_i) < U(\mathbf{a}_j) \end{array} \right.$$

Métodos baseados em função de utilidade

Sumário

1 Teoria da Utilidade Multiatributo

- Apresentação
- Métodos baseados em função de utilidade



Introdução

Notação

Seja um conjunto de ações ou alternativas $\mathbf{a}_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$ e um conjunto de critérios c_j , $j = 1, \dots, m$. A avaliação da ação \mathbf{a}_i pelo critério c_j é dada por $c_j(\mathbf{a}_i)$.

Exemplo de tabela de avaliação de efeitos de \mathcal{A}

	c_1	c_2	\dots	c_m
\mathbf{a}_1	$c_1(\mathbf{a}_1)$	$c_2(\mathbf{a}_1)$	\dots	$c_m(\mathbf{a}_1)$
\mathbf{a}_2	$c_1(\mathbf{a}_2)$	$c_2(\mathbf{a}_2)$	\dots	$c_m(\mathbf{a}_2)$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
\mathbf{a}_n	$c_1(\mathbf{a}_n)$	$c_2(\mathbf{a}_n)$	\dots	$c_m(\mathbf{a}_n)$

Método do Ponto Médio

Procedimento básico

- 1 Escolher um atributo f_i e fixar os demais em seus valores de consequência menos desejáveis.
- 2 Identificar os limites inferior f_{min_i} e superior f_{max_i} dos efeitos de f_i e atribuir as notas 0 e 1 ao pior e melhor valor, respectivamente.
- 3 Obter o ponto médio $f_{[0.5]_i}$: escolher um valor $f'_i \in [f_{min_i}, f_{max_i}]$ e verificar o *tradeoff* preferido (trocar f_{min_i} por f'_i ou f'_i por f_{max_i}).
 - Se o decisor for indiferente, então $f_{[0.5]_i} = f'_i$;
 - Senão, escolhe-se outro ponto f''_i no intervalo de melhor tradeoff;
 - O processo é repetido até obter $f_{[0.5]_i}$, no qual:

$$u_i(f_{[0.5]_i}) = 0.5[u_i(f_{min_i}) + u_i(f_{max_i})] = 0.5$$

Método do Ponto Médio

Procedimento básico

- 4 Repetir o passo 3 para obter os pontos médios $f_{[0.25]_i}$ (entre f_{min_i} e $f_{[0.5]_i}$) e $f_{[0.75]_i}$ (entre $f_{[0.5]_i}$ e f_{max_i}).
- 5 Para garantir consistência, pode-se verificar se $f_{[0.5]_i}$ é o ponto médio entre $f_{[0.25]_i}$ e $f_{[0.75]_i}$.
- 6 Repetir os passos 3 – 5 até que pontos suficientes sejam gerados para a interpolação de $u_i(\cdot)$.
- 7 Repetir o processo para os demais atributos.
- 8 Ordenar as alternativas de acordo com $U(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m w_i u_i(\mathbf{a})$, e tomar a decisão.

SMART (Simple Multi-Attribute Rating Technique)

- No geral, a construção de um funcional $U(\cdot)$ pode ser bastante trabalhosa.
- Além disso, um alto nível de detalhamento das funções de utilidade $u_i(\cdot)$ nem sempre contribui para o resultado final, devido aos erros de julgamento da unidade de decisão.
- Nesse contexto, Ward Edwards (1994) propôs a aproximação de cada função utilidade por funções lineares e a agregação dessas pelo método aditivo.



Métodos baseados em função de utilidade

SMART (Simple Multi-Attribute Rating Technique)

Procedimento básico

- 1 Construir uma tabela com as avaliações das consequências de cada ação $a_i \in \mathcal{A}$.
- 2 Determinar a faixa de variação de cada consequência $[f_{\min_i}, f_{\max_i}]$.
- 3 Determinar uma função utilidade u_i para cada critério. Ward Edwards propôs quatro tipos de funções utilidade.
- 4 Agregar os critérios no funcional $U(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m w_i u_i(\mathbf{a})$.
- 5 Ordenar as alternativas de acordo com $U(\cdot)$ e tomar a decisão.

SMART (Simple Multi-Attribute Rating Technique)

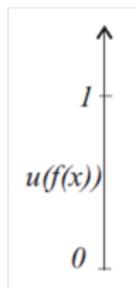
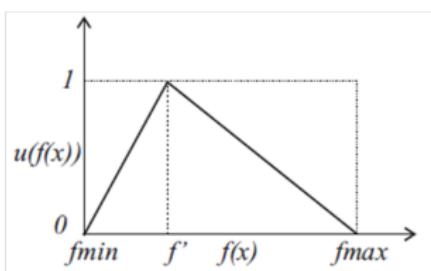
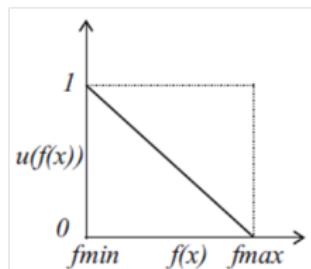
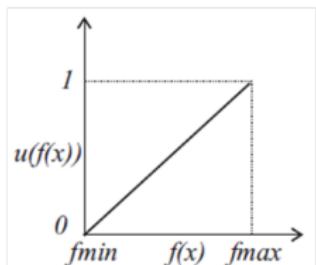


Figura: Funções utilidade propostas por Ward Edwards



Métodos baseados em função de utilidade



SMART (Simple Multi-Attribute Rating Technique)

Definição dos pesos

- O decisor atribui nota 10 ao atributo de menor importância.
- Os demais são pontuados segundo sua importância relativa.
- Os pesos são então normalizados, t.q. $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ e $w_i > 0 \quad \forall i$.

ATENÇÃO!!!

A comparação de importância dos atributos não é significante se a mesma não refletir a faixa de valores de consequência dos atributos.



Análise

- Usualmente, após a execução de um método de decisão, avalia-se tanto a **sensibilidade** quanto a **robustez** do resultado;
- Estas análises permitem verificar a **confiabilidade** do resultado, i.e., a sensibilidade da decisão com relação aos parâmetros escolhidos pelo DM.

Análise

Análise de sensibilidade (Maystre et al., 1994)

- Consiste em repetir o processo de decisão variando-se os diversos parâmetros do método;
- Seu principal objetivo é identificar os parâmetros para os quais uma pequena variação induz uma grande mudança na solução proposta.

Análise

Análise de robustez (Maystre et al., 1994)

- Visa determinar o domínio de variação de alguns parâmetros no qual a decisão se mantém estável;
- É usada para fornecer ao DM uma solução robusta;
- Informa o DM acerca da habilidade da solução em resistir a variações entre realidade e modelo usado.



Discussão Final

A teoria da utilidade pode falhar ao descrever o comportamento de decisão humano.

Paradoxo de Allais (1953)

Supondo uma pessoa que não possui absolutamente nada...

- ➊ ganhar R\$1mi é preferível a ganhar R\$2mi com $\rho = 0.09$, R\$1mi com $\rho = 0.9$, ou nada com $\rho = 0.01$:

$$u(R\$1mi) > 0.09u(R\$2mi) + 0.9u(R\$1mi) + 0.01u(R\$0)$$

- ➋ ganhar R\$2mi com $\rho = 0.09$ (ou nada com $\rho = 0.91$) é preferível a ganhar R\$1mi com $\rho = 0.10$ ou nada com $\rho = 0.9$:

$$0.09u(R\$2mi) + 0.91u(R\$0) > 0.1u(R\$1mi) + 0.9u(R\$0)$$

Isso implica que a função de utilidade u não pode existir.



Literatura Especializada

-  Y. Collette, P. Siarry, *Multiobjective Optimization: Principles and Case Studies*, ser. Decision Engineering, Springer, 2003.
-  J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer Science, 2005.
-  W. Edwards, F. H. Barron, Smarts and Smarter: Improved simple methods for multiattribute utility measurement, *Organizational Behaviour and Human Decision Processes*, 60, p. 306–325, 1994.
-  J. Mustajoki, R. P. Hamalainen, A. Salo, Decision support by interval Smart/Swing: Incorporating imprecision in the Smart and Swing methods, *Decision Sciences*, 36(2), p. 317–339, 2005.
-  B. Roy, *Decision-Aid and Decision-Making*, European Journal of Operational Research, 45, p. 324–331, 1990.