RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Hausaufgabenübung 4

Studenten: *Joshua Feld, 406718* *Jeff Vogel, 407758* *Henrik Herrmann, 421853*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*
Abgabefrist: *1. Dezember, 2020*

Aufgabe 1. (Abzählbarkeit von Mengen)

In Computern werden Zahlen im Binärsystem dargestellt. Das heißt, die einzigen Ziffern, die eine Zahl haben kann, sind $b_i \in \{0, 1\}$. Wir betrachten folgende Menge von Binärzahlen

$$M = \{b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0 : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, b_i = \{0, 1\}\}.$$

Ist diese Menge abzählbar unendlich? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. Aus dem Hinweis wissen wir, dass eine Binärzahl mit der bijektiven Funktion

$$f : M \to \mathbb{N} \cup \{0\}, f(x) = \sum_{i=0}^{N} b_i 2^i$$

in das Dezimalsystem umgerechnet werden kann. Sei nun zusätzlich

$$g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}, g(x) = x + 1.$$

Daraus folgt, dass $\mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind, also abzählbar unendlich. Da sowohl f als auch g bijektiv sind, ist auch die Komposition

$$g \circ f : M \to \mathbb{N}, (g \circ f)(x) = \sum_{i=0}^{N} \left(b_i 2^i\right) + 1$$

bijektiv und somit sind auch M und $\mathbb{N}$ gleichmächtig, also ebenfalls abzählbar unendlich. Die Menge der Binärzahlen ist als abzählbar unendlich.

Aufgabe 2. (Komplexe Mengen)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 4\}$, $\tilde{M}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4\}$, $\bar{M}_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z| \leq 4\}$

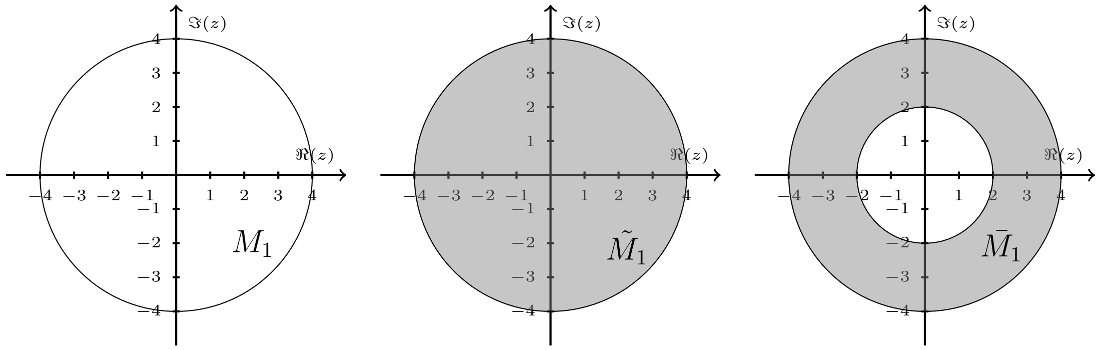
b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2\Re(z) + 5\Im(z) = 1\}$

c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) + \Im(z) - 1 > 2\}$

d) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0 \wedge |z| < 9 \wedge \Re(z) \leq \Im(z)\}$

Lösung.

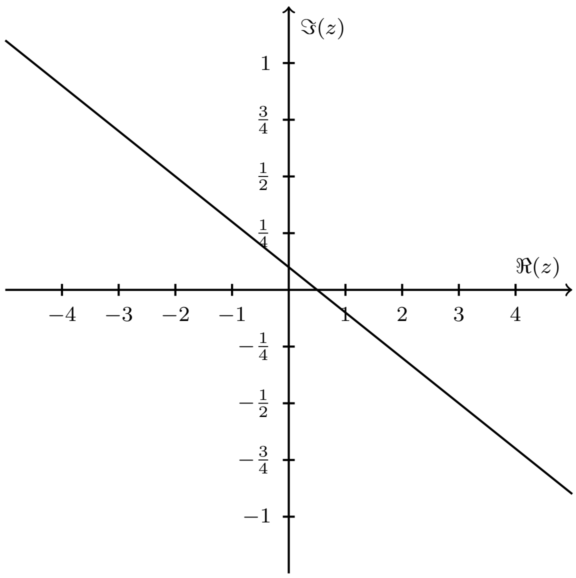
a) Die Menge M enthält nur die Punkte auf der Linie. $\tilde{M}$ und $\bar{M}$ hingegen enthalten alle Punkte in dem grau ausgemalten Bereich.



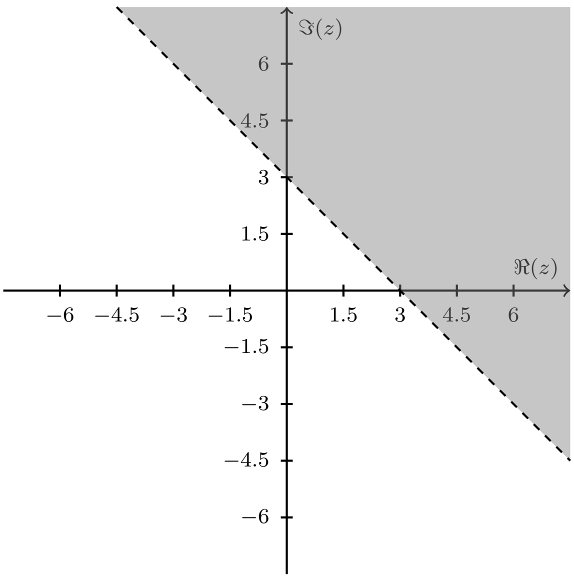
b) Wir können diese Gleichung umformen:

$$2\Re(z) + 5\Im(z) = 1 \iff 5\Im(z) = 1 - 2\Re(z) \iff \Im(z) = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\Re(z)$$

Dies ist in der Form einer linearen Funktion, die wir wie folgt darstellen können,



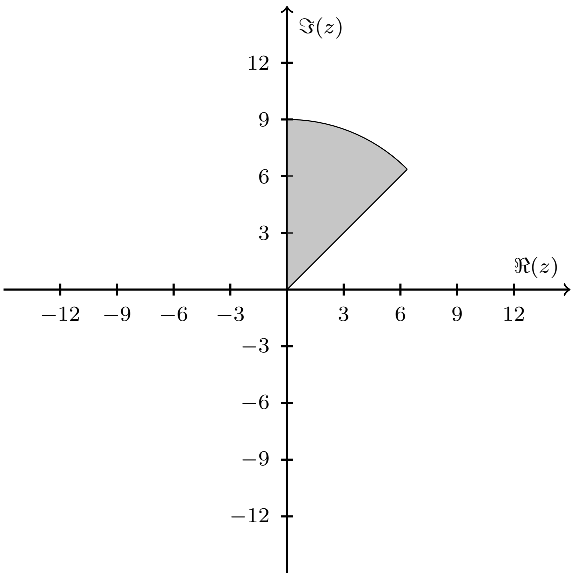
c) Wir können die Gleichung umformen nach $\Re(z) + \Im(z) > 3$. Somit ergibt sich die folgende Grafik, wobei die Punkte auf der gestrichelten Linie nicht enthalten sind.



d) Die Menge M_4 können wir aufteilen in drei Mengen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ mit

$$\mathcal{M}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$$
$$\mathcal{M}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 9\}$$
$$\mathcal{M}_3 = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \leq \Im(z)\}$$

$M_4 = \bigcap_{i=1}^{3} \mathcal{M}_i$ ist unten abgebildet.



Aufgabe 3. (Polynome und Nullstellen)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Nullstellen von p entweder reell sind oder konjugiert komplex auftreten, d.h.: Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, so ist auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

Lösung. Sei z eine Nullstelle von p. Dann gilt offensichtlich

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0.$$

Hier können wir direkt folgern, dass

$$\overline{p(z)} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z^i} = \bar{0}.$$

Wir wissen, dass das komplexe Konjugat einer reellen Zahl x wieder die reelle Zahl ist, d.h. $\bar{x} = x$. Daraus folgt

$$\overline{p(z)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z^i} = 0.$$

Nach der Vorlesung gilt $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$. Dies können wir auf unsere z^i aus dem Funktionsterm anwenden und erhalten

$$\overline{p(z)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \bar{z}^i = 0 = p(\bar{z}).$$

Somit ist für jede Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ von p auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von p.

Aufgabe 4. (Polynome, Einheitswurzeln)

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung:

$$z^2 = \frac{1 - i + (1+i)\sqrt{3}}{2 - 2i}$$

Vereinfachen Sie dafür zunächst den Ausdruck und schreiben Sie ihn anschließend in Polarkoordinaten.

b) Bestimmen Sie von der Gleichung $z^3 = -7i$ alle Lösungen in den komplexen Zahlen. Es gilt $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

Lösung.

a) Wir formen den Bruch zunächst um:

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{1 - i + (1+i)\sqrt{3}}{2 - 2i} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - i + (1+i)\sqrt{3}}{1 - i} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1-i}{1-i} + \frac{(1+i)\sqrt{3}}{1-i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1+i}{1-i} \right) \end{aligned}$$

Wir multiplizieren nun den sowohl den Nenner als auch den Zähler mit dem komplexen Konjugat des Nenners um diesen zu eliminieren und erhalten

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\cdot\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right).$$

Für die Polarkoordinatendarstellung benötigen wir den Betrag, welcher sich wie folgt berechnen lässt:

$$r=\left|z^2\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

Für den Winkel φ ergibt sich:

$$\tan(\varphi)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\iff\varphi=\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Also ist

$$z^2=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Wir haben also die allgemeine Gleichung $z^n=w=r(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi))$, mit $n=2$, $r=1$ und $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Dann gibt es nach Bemerkung 6.10 der Vorlesung zwei komplexe Zahlen z_0,z_1, gegeben durch

$$\begin{aligned}
z_0&=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+0\cdot\frac{2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+0\cdot\frac{2\pi}{2}\right)\\
&=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\\
z_1&=\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+\frac{2\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+\frac{2\pi}{2}\right)\\
&=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,
\end{aligned}$$

für die $(z_k)^n=w$ $(k=0,1)$ erfüllt ist. Dies sind also die Lösungen der quadratischen Gleichung.

b) Wir bestimmen auch hier zunächst die Polarkoordinatendarstellung. Dazu bestimmen wir den Betrag wie folgt:

$$r=\left|z^3\right|=\sqrt{(-7)^2}=7.$$

Nun können wir schon unsere Polarkoordinatendarstellung aufschreiben, denn $\varphi=\arg(z^3)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$:

$$z^3=7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Wir haben also wieder, wie in der ersten Teilaufgabe, die allgemeine Gleichung $z^n=w=r(\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi))$, mit $n=3$, $r=7$ und $\varphi=-\frac{\pi}{2}$. Dann gibt es nach

Bemerkung 6.10 der Vorlesung drei komplexe Zahlen z_0, z_1, z_2, gegeben durch

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{7}\left(\cos\left(-\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \sqrt[3]{7}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt[3]{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right), \\
z_1 &= \sqrt[3]{7}\left(\cos\left(-\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \sqrt[3]{7}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt[3]{7}i, \\
z_2 &= \sqrt[3]{7}\left(\cos\left(-\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \sqrt[3]{7}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)\right) = \sqrt[3]{7}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right),
\end{aligned}$$

für die $(z_k)^n = w$ $(k = 0, 1)$ erfüllt ist. Dies sind also die Lösungen der Gleichung.

Aufgabe 5. (Lineare Abhängigkeit)

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig.

b) Sind v_1, v_2 für $a = b = 1$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Lösung.

a) Wir prüfen, wie sich $0 \in \mathbb{R}^3$ durch die beiden Vektoren v_1, v_2 darstellen lassen.

$$0 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} a^2 & b & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ b & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} a^2 & b & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ b+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} a^2+b & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ b+1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Unter der Annahme, dass λ_1 und λ_2 beide Null sind folgt aus der letzten Gleichung, dass $b = -1$. Setzen wir dies nun in die erste Gleichung ein, so folgt $|a| = 1$. Also sind die Vektoren für $b = -1$ und $a = -1$ oder $a = 1$ linear abhängig.

b) Für $a = b = 1$ erhalten wir die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also wieder ein lineares Gleichungssystem, was sich aus der Gleichung $0 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$ ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Da nun unsere Matrix in Zeilenstufenform ist, können wir von unten nach oben lösen. Aus der dritten Gleichung folgt direkt $\lambda_3 = 0$. Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, erhalten wir auch $\lambda_2 = 0$. Beide Lösungen eingesetzt in die erste Gleichung ergibt $\lambda_1 = 0$. Folglich sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, denn die $0 \in \mathbb{R}^3$ lässt sich nur durch die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ darstellen.

Aufgabe 6. (Unterräume)

Entscheiden und begründen Sie, ob U ein Unterraum des $\mathbb{R}$- Vektorraums V ist:

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \right\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : y = 2x + 1 \right\}$

c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : y + 2x + 2z = 0 \right\}$

d) $V = \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ (Raum aller Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$),
$U = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ ist Polynom vom Grad } \leq n\}$

Lösung.

a) Es ist $U \subset V$. Seien $u, v \in U$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ 2t_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} t_2 \\ 2t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot t_1 + \lambda_2 \cdot t_2 \\ 2 \cdot (\lambda_1 \cdot t_1 + \lambda_2 \cdot t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix},$$

mit $t = \lambda_1 \cdot t_1 + \lambda_2 \cdot t_2$. Folglich ist $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v \in U$. Da U abgeschlossen ist im Bezug auf Addition und Multiplikation mit Skalaren, ist U ein Unterraum von V.

b) Die $0 \in \mathbb{R}^3$ erfüllt offensichtlich die Gleichung $y = 2x + 1$ nicht. Folglich ist $0 \notin U$. Daraus folgt direkt, dass U kein Unterraum von V ist.

c) Es ist $U \subset V$. Seien $u = (u_1, u_2, u_3)^T, v = (v_1, v_2, v_3)^T \in U$. Dann gilt

$$u_1 + 2u_2 + 2u_3 = 0 \quad \text{und} \quad v_1 + 2v_2 + 2v_3 = 0$$

Hieraus folgt direkt, dass für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ auch $\lambda_1 \cdot u, \lambda_2 \cdot v \in U$, denn

$$\lambda_1 u_1 + 2 \cdot (\lambda_1 u_2) + 2 \cdot (\lambda_1 u_3) = \lambda_1 \cdot (u_1 + 2u_2 + 2u_3) = \lambda_1 \cdot 0 = 0,$$

$$\lambda_2 v_1 + 2 \cdot (\lambda_2 v_2) + 2 \cdot (\lambda_2 v_3) = \lambda_2 \cdot (v_1 + 2v_2 + 2v_3) = \lambda_2 \cdot 0 = 0.$$

Offensichtlich gilt dann auch $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v \in U$, denn

$$\lambda_1 \cdot (u_1 + 2u_2 + 2u_3) + \lambda_2 \cdot (v_1 + 2v_2 + 2v_3) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0.$$

Da U abgeschlossen ist im Bezug auf Addition und Multiplikation mit Skalaren, ist U ein Unterraum von V.

d) Seien $f,g \in U$ zwei Abbildungen mit

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot g)(x) &= \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot g(x) \\
&= \lambda_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \lambda_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \big(\lambda_1 \cdot a_i x^i\big) + \sum_{i=0}^{n} \big(\lambda_2 \cdot b_i x^i\big) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \big(\lambda_1 \cdot a_i x^i + \lambda_2 \cdot b_i x^i\big) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \big((\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i) x^i\big) \in U.
\end{aligned}$$

Folglich ist U abgeschlossen im Bezug auf Addition und Multiplikation mit Skalaren und da $U \subset V$ ist U auch ein Unterraum von V.