RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Selbstrechenübung 6

Student: *Joshua Feld, 406718*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*

Aufgabe 1. (Reihen)

Beweisen Sie die Konvergenz der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{mit } a_n = \frac{3^n}{5^n + 1}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Betrachten Sie die Folge der Partialsummen.

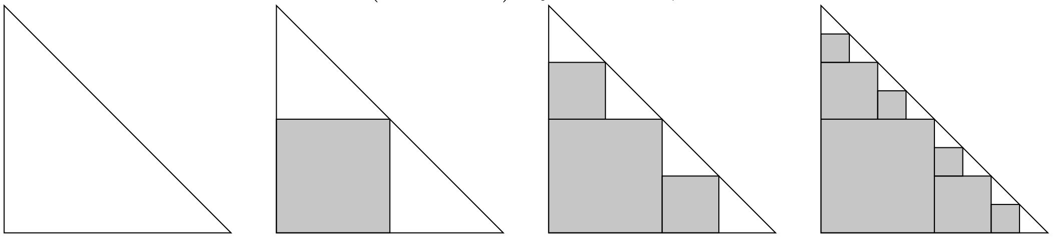
b) Schätzen Sie geeignet nach oben ab.

c) Erinnern Sie sich an die geometrische Summenformel.

Lösung.

Aufgabe 2. (Konvergenz von Reihen)

Wir approximieren ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge 1 in jedem Schritt durch weitere Hinzunahme von (kleineren) Quadraten, siehe Skizze:



$n = 0$ $\qquad$ $n = 1$ $\qquad$ $n = 2$

Zeigen Sie, dass die zu den Flächeninhalten der Quadrate gehörende Reihe gegen den Flächeninhalt des Dreiecks konvergiert.

Lösung.

Aufgabe 3. (Bestapproximation)

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \text{span}\{e_1, e_2\} \subset V$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist.

a) Für welchen Vektor v_0 gilt

$$\|v_0 - v_1\|_2 \leq \|v - v_1\|_2 \quad \forall v \in U$$

mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wie groß ist die Norm $\|v_0 - v_1\|_2$?

Lösung.

Aufgabe 4. (Bestapproximation)

Sei $V = C([0,1])$ der Vektorraum der stetigen, reellwertigen Funktion auf $[0,1]$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle *, f \rangle \, g = \int_0^1 f(x)g(x) \, \mathrm{d}\, x \quad \text{für alle } f, g \in V.$$

Bestimmen Sie die Bestapproximation $u^* \in U$ des Unterraums

$$U = \text{span}\{1, x, x^2\}$$

an die Funktion $f \in V$ mit $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Bevor Sie rechnen: Welche Genauigkeit der Bestapproximation erwarten Sie hier?

Hinweis: *Eine Orthonormalbasis von U ist gegeben durch*

$$u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad u_2(x) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$