RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Selbstrechenübung 3

Student: *Joshua Feld, 406718*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*

Aufgabe 1. (zwei-elementiger Körper)

a) Prüfen Sie nach, dass $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, ausgestattet mit der Addition $\begin{array}{c|c|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$ und Multiplikation $\begin{array}{c|c|c} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$ ein Körper ist.

b) Wir interpretieren 0 als falsch und 1 als wahr. Welchen logischen Operationen entsprechen dann + und $\cdot$?

Hinweis: *Sie müssen zeigen, dass $\mathbb{K}$ mit obiger Addition und Multiplikation die Körperaxiome erfüllt; das heißt es sind erfüllt:*

(A1) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(A2) Es gibt in $\mathbb{K}$ ein neutrales Element der Addition n, so dass $a + n = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$.

(A3) Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ existiert ein additiv inverses Element $(-a) \in \mathbb{K}$ mit $a + (-a) = n$.

(A4) $a + b = b + a$.

(A5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(A6) Es gibt in $\mathbb{K}$ ein neutrales Element der Multiplikation $e \neq n$, so dass $a \cdot e = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$.

(A7) Zu jedem $a \neq n$ aus $\mathbb{K}$ existiert ein multiplikativ inverses Element $a^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot a^{-1} = e$.

(A8) $a \cdot b = b \cdot a$.

(A9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Lösung.

a) Wir überprüfen die einzelnen Körperaxiome. Es gilt

a	b	c	$a+(b+c)$	$(a+b)+c$	$(a\cdot b)\cdot c$	$a\cdot(b\cdot c)$	$a\cdot(b+c)$	$a\cdot b+a\cdot c$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0

(A1) Nach obiger Wahrheitstabelle ist das Axiom erfüllt.

(A2) Es ist $n = 0$, da $0 + n = 0 + 0 = 0$ und $1 + n = 1 + 0 = 1$.

(A3) Es ist $-a = a$, da $0 + (-0) = 0 + 0 = 0$ und $1 + (-1) = 1 + 1 = 0$.

(A4) Folgt direkt aus der Symmetrie der Tabelle für $+$.

(A5) Nach obiger Wahrheitstabelle ist das Axiom erfüllt.

(A6) Es ist $e = 1$, da $0 \cdot e = 0 \cdot 1 = 0$ und $1 \cdot e = 1 \cdot 1 = 1$.

(A7) Es ist $a^{-1} = a$, da $1 \cdot 1^{-1} = 1 \cdot 1 = 1 = e$.

(A8) Folgt direkt aus der Symmetrie der Tabelle für $\cdot$.

(A9) Nach obiger Wahrheitstabelle ist das Axiom erfüllt.

b) Es gilt

$$a \cdot b \iff a \wedge b$$

und

$$a + b \iff (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b) \iff (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b).$$

Aufgabe 2. (Menge reeller Zahlen)

a) Bestimmen Sie das Maximum, Minimum, Infimum und Supremum der folgenden Mengen:

$$M_2 = \left\{x^2 - 3 : x \in (-2, 4)\right\}.$$

b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$x^2 - 1 \leq 0 \quad \vee \quad \ln(x) < 1.$$

Lösung.

a) Sei $f(x) = x^2 - 3$. Dann gilt

$$\inf(M_2) = -3 \quad \text{und} \quad \sup(M_2) = 13.$$

Es ist kein Minimum bzw. Maximum, wegen $f(-2) \notin M_2$ und $f(4) \notin M_2$.

b) Aus der ersten Bedingung folgt

$$x^2 - 1 \leq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1 \iff x \in [-1, 1].$$

Da der natürliche Logarithmus ln nur für $x > 0$ definiert ist, gilt

$$\ln(x) < 1 \iff (x > 0) \wedge x < e \iff x \in (0, e).$$

Die Gesamtlösungsmenge lautet also

$$\mathbb{L} = [-1, e)\,.$$

Aufgabe 3. (Dichtheit und Mächtigkeit der irrationalen Zahlen)

Seien $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen, $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{Q}^C$ die Menge der irrationalen Zahlen. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. Weiterhin haben wir gezeigt, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ abzählbar ist mit $|\mathbb{Q}| = \mathcal{N}_0$. Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist hingegen nicht abzählbar. Das Ziel dieser Aufgabe ist, ähnliche Resultate für die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{Q}^C$ zu erarbeiten.

a) Zeigen Sie, dass der Verbund von zwei disjunkten abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist. Zeigen Sie damit, dass die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{Q}^C$ nicht abzählbar ist.

b) Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Nutzen Sie die archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen und die Dichtheit der rationalen Zahlen und zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $r \in \mathbb{Q}$ existieren, sodass

$$x < r + \frac{\sqrt{2}}{n} < y.$$

Zeigen Sie damit, dass die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{Q}^C$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. Im Rahmen dieser Aufgabe wird das Element 0 als Element der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ betrachtet. Die Definition variiert von Buch zu Buch und von Vorlesung zu Vorlesung.

Lösung.

a) Seien A, B zwei disjunkte abzählbare Mengen. Per Definition der abzählbaren Mengen existieren bijektive Funktionen $f : A \to \mathbb{N}$ und $g : B \to \mathbb{N}$. Sei $C = A \cup B$. Definiere die Funktion $h : C \to \mathbb{N}$ wie folgt

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x) & \text{falls } x \in A, \\ 2g(x) + 1 & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Nun beweisen wir, dass h eine injektive Funktion ist. Seien $x, y \in C$, so dass $f(x) = f(y)$. Dann gilt entweder $x \in A$ oder $x \in B$ und ebenfalls $y \in A$ oder $y \in B$. Nun führen wir eine Fallunterscheidung durch:

- Nehme $x \in A$ und $y \in B$ an. Dann gilt

$$2g(y) + 1 = h(y) = h(x) = 2f(x).$$

Per Definition sind $g(y)$ und $f(x)$ natürliche Zahlen. $h(y) = 2g(y) + 1$ ist eine ungerade Zahl und $h(x) = 2f(x)$ ist eine gerade Zahl. Dies führt zum Widerspruch, da per Konstruktion $h(x) = h(y)$ gilt.

- Nehme $x \in B$ und $y \in A$ an. Dann gilt

$$2f(y) = h(y) = h(x) = 2g(x) + 1.$$

  $h(y) = 2f(y)$ ist eine gerade Zahl und $h(x) = 2g(x) + 1$ ist eine ungerade Zahl. Da $h(x) = h(y)$ gelten soll, führt dieser Fall wieder zu einem Widerspruch.

- Nehme $x \in A$ und $y \in A$ an. In diesem Fall gilt

$$2f(y) = h(y) = h(x) = 2f(x).$$

  f ist per Konstruktion injektiv. Daraus folgt $x = y$.

- Nehme $x \in B$ und $y \in B$ an. In diesem Fall gilt

$$2g(y) + 1 = h(y) = h(x) = 2g(x) + 1.$$

  Da g per Konstruktion injektiv ist, folgt $x = y$.

Somit ist h eine injektive Funktion. Als nächstes wird die Surjektivität von h bewiesen. Sei $y \in \mathbb{N}$. Es muss gezeigt werden, dass ein $x \in C$ existiert, sodass $h(x) = y$. Betrachte zwei Fälle:

- Nehme an, dass y ungerade ist. In diesem Fall existiert eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$, sodass $y = 2p + 1$ gilt. Da die Funktion $g : B \to \mathbb{N}$ per Konstruktion bijektiv ist, folgt, dass ein $x \in B$ existiert, sodass $g(x) = p$. Dies impliziert

$$h(x) = 2g(x) + 1 = 2p + 1 = y.$$

- Nehme an, dass y gerade ist. In diesem Fall existiert eine natürliche Zahl $q \in \mathbb{N}$, sodass $y = 2q$ gilt. Da die Funktion $f : A \to \mathbb{N}$ per Konstruktion bijektiv ist, folgt, dass ein $x \in A$ existiert, sodass $f(x) = q$. Dies impliziert

$$h(x) = 2f(x) + 1 = 2q = y.$$

Damit ist h eine surjektive Funktion. Somit haben wir gezeigt, dass eine bijektive Funktion $h : C \to \mathbb{N}$ existiert. C ist daher eine abzählbare Menge.

Nun muss noch gezeigt werden, dass $\mathbb{Q}^C$ nicht abzählbar ist. Nehme an, dass $\mathbb{Q}^C$ abzählbar sei. In diesem Fall ist $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^C$ der Verbund von zwei abzählbaren Mengen. Daher muss $\mathbb{R}$ abzählbar sein. Da wir aus der Vorlesung wissen, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, führt die Annahme zu einem Widerspruch. Daher ist $\mathbb{Q}^C$ nicht abzählbar.

b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Aufgrund der Dichtheit der rationalen Zahlen folgt, dass eine rationale Zahl r mit der Eigenschaft $r \in (x, y)$ existiert. Die Eigenschaft $r < y$ führt zur Ungleichung $\frac{y-r}{\sqrt{2}} > 0$. Aufgrund der archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$\frac{1}{n} < \frac{y - r}{\sqrt{2}}.$$

Daher folgt

$$r + \frac{\sqrt{2}}{n} < y.$$

Damit und mit der Nutzung von $x < r$ folgt

$$x < r + \frac{\sqrt{2}}{n} < y. \tag{1}$$

Es verbleibt noch der Beweis, dass die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{Q}^C$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. Daher müssen wir zeigen, dass für zwei beliebige reelle Zahlen x, y eine irrationale Zahl $q \in (x, y)$ existiert. Im Folgenden beweisen wir, dass $r + \frac{\sqrt{2}}{n}$ in Ungleichung (1) eine solche irrationale Zahl ist. $\frac{\sqrt{2}}{n}$ ist eine irrationale Zahl. Dies folgt aus der irrationalen Zahl irrational. Daher ist $r + \frac{\sqrt{2}}{n}$ eine irrationale Zahl. Der Beweis ist somit komplett.

Aufgabe 4. (Normen)

Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

a) $f(x_1, x_2) = 2|x_1| + 3|x_2|$

b) $f(x_1, x_2) = |x_1| + \frac{|x_2|}{1+|x_2^2|}$

Lösung.

a) (N1) Es gilt für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = 2|x_1| + 3|x_2| = 0 &\iff 2|x_1| = -3|x_2| \\ &\iff 2|x_1| = 0 \text{ und } -3|x_2| = 0 \\ &\iff x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0. \end{aligned}$$

(N2) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, x_2)) &= f(\alpha x_1, \alpha x_2) = 2|\alpha x_1| + 3|\alpha x_2| \\ &= |\alpha| \cdot 2|x_1| + |\alpha| \cdot 3|x_2| = |\alpha| \cdot (2|x_1| + 3|x_2|) \\ &= |\alpha| \cdot f(x_1, x_2). \end{aligned}$$

(N3) Für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2|x_1 + y_1| + 3|x_2 + y_2| \\ &\le 2|x_1| + 2|y_1| + 3|x_2| + 3|y_2| \\ &= 2|x_1| + 3|x_2| + 2|y_1| + 3|y_2| \\ &= f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2). \end{aligned}$$

b) Die Bedingung (N2) ist nicht erfüllt und somit ist f keine Norm. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot (x_1, x_2)) &= f(\alpha x_1, \alpha x_2) = |\alpha x_1| + \frac{|\alpha x_2|}{1 + |\alpha x_2^2|} \\ &= |\alpha||x_1| + |\alpha| \cdot \frac{|x_2|}{1 + \alpha \cdot |x_2^2|} = |\alpha| \cdot \underbrace{\left(|x_1| + \frac{|x_2|}{1 + \alpha \cdot |x_2^2|}\right)}_{\neq f(x_1, x2), \text{ falls } |\alpha| \neq 1}. \end{aligned}$$