RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Hausaufgabenübung 6

Studenten: *Joshua Feld, 406718* *Jeff Vogel, 407758* *Henrik Herrmann, 421853*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*
Abgabefrist: *14. Dezember, 2020*

Aufgabe 1. (Konvergenz von Folgen)

Sei $a_n = \frac{8n^2-5}{4n^2+7}$. Zeigen Sie, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Hieraus folgt die Konvergenz. Bestimmen Sie den Grenzwert und beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diesen Grenzwert hat mittels direkter Anwendung der Definition des Grenzwertes.

Lösung. Wir wollen zunächst zeigen, dass $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, denn dann ist die Folge monoton wachsend. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{8(n+1)^2+5}{4(n+1)^2+7} \geq \frac{8n^2+5}{4n^2+7} \\
\iff &\left(8(n+1)^2-5\right)\left(4n^2+7\right) \geq \left(8n^2+5\right)\left(4(n1)^2+7\right) \\
\iff &32(n+1)^2n^2-20n^2+56(n+1)^2-35 \geq 32(n+1)^2n^2-20(n+1)^2+56n^2-35 \\
\iff &56(n+1)^2-20n^2 \geq 56n^2-20(n+1)^2 \\
\iff &56(2n+1) \geq -20(2n+1)
\end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $56 > -20$. Nun wollen wir noch die Beschränktheit zeigen. Da die Folge monoton wächst, müssen wir die Beschränktheit nach oben zeigen. Sei $a_n \leq x$ für ein $x \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{8n^2-5}{4n^2+7} \leq x \iff 8n^2-5 \leq x \cdot \left(4n^2+7\right) \iff (8-4x)\cdot n^2 \leq 7x+5.$$

Diese Ungleichung ist beispielsweise für $x = 2$ erfüllt, denn dann lautet die Ungleichung $0 \leq 5$ was für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich ist x eine obere Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge ist beschränkt. Für den Grenzwert gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2-5}{4n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{8-\frac{5}{n^2}}{4+\frac{7}{n^2}} = \frac{8-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}{4+\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}} = \frac{8}{4} = 2.$$

Wir wollen nun mithilfe der Definition des Grenzwertes zeigen, dass 2 tatsächlich der Grenzwert der Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\left|\frac{8n^2-5}{4n^2+7}-2\right| = \left|\frac{8n^2-5-(8n^2+14)}{4n^2+7}\right| = \left|-\frac{19}{4n^2+7}\right| \leq \frac{19}{4n^2} \leq \frac{20}{4n^2} \leq \frac{5}{n} < \varepsilon$$

Aufgabe 2. (Konvergenz von Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i)^k+3^{k-1}}{5^k}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Hinweis: *Bestimmen Sie zunächst $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Lösung.

Aufgabe 3. (Orthonormalbasen)

Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{2}{9} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine Orthonormalbasis bzgl. des euklidischen Skalarprodukts und der dazugehörigen Norm handelt.

Lösung.

Aufgabe 4. (Orthogonales Komplement)

Sei $V = \mathbb{R}^4$ mit dem (Standard-)Skalarprodukt $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ für $x, y \in \mathbb{R}^4$ gegeben. Berechnen Sie das orthogonale Komplement von

$$U := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hinweis: *Ergänzen Sie* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ und verwenden Sie dann das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.*

Lösung.

Aufgabe 5. (Bestapproximation)

Seien
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element $u^* \in U$.

Lösung.

Aufgabe 6. (Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)

Sei $V = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ sowie $v_i(x) = x^i, i = 0, 1, 2, 3$. Verwenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis des $\mathcal{P}_3$ unter dem Skalarprodukt
$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \, \mathrm{d}\, x$$
zu bestimmen.
Hinweis: *Diese orthogonalen Polynome werden Legendre-Polynome genannt. Eine wichtige Roll spielen die Legendre-Polynome in der theoretischen Physik, insbesondere in der Elektrodynamik und in der Quantenmechanik.*

Lösung.