RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Selbstrechenübung 6

Student: *Joshua Feld, 406718*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*

Aufgabe 1. (Reihen)

Beweisen Sie die Konvergenz der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{mit } a_n = \frac{3^n}{5^n + 1}.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Betrachten Sie die Folge der Partialsummen.

b) Schätzen Sie geeignet nach oben ab.

c) Erinnern Sie sich an die geometrische Summenformel.

Lösung.

a) Wir definieren $b_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ als Folge von Teilsummen.

b) Für a_n gilt

$$a_n = \frac{3^n}{5^n + 1} \leq \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Somit ist

$$b_k \leq \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{3}{5}\right)^n =: c_k.$$

c) Die geometrische Summenformel ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$. Das heißt

$$c_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{k+1}}{1 - \frac{3}{5}} - 1.$$

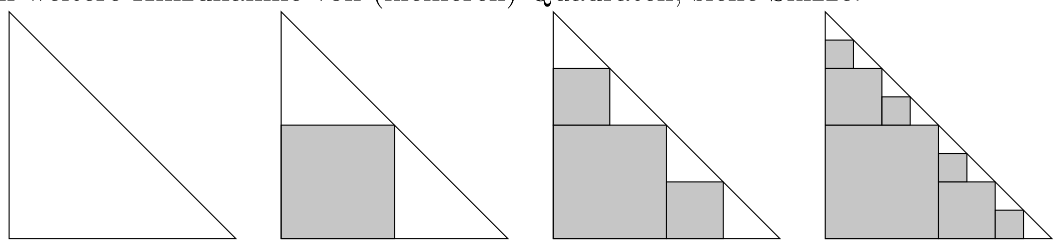
Da $\left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} \to 0$ für $k \to \infty$, gilt $c_k \frac{1}{\frac{2}{5}} - 1 = \frac{3}{2}$ für $k \to \infty$ und somit auch

$$b_k \to b \leq \frac{3}{2}, \text{ mit } b = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (k \to \infty).$$

Also konvergiert die Reihe.

Aufgabe 2. (Konvergenz von Reihen)

Wir approximieren ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge 1 in jedem Schritt durch weitere Hinzunahme von (kleineren) Quadraten, siehe Skizze:



$n = 0$ $n = 1$ $n = 2$

Zeigen Sie, dass die zu den Flächeninhalten der Quadrate gehörende Reihe gegen den Flächeninhalt des Dreiecks konvergiert.

Lösung. Es gilt für die Reihe der aufsummierten Flächeninhalte der Quadrate:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate konvergiert also gegen den Flächeninhalt des Dreiecks.

Aufgabe 3. (Bestapproximation)

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \operatorname{span}\{e_1, e_2\} \subset V$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist.

a) Für welchen Vektor v_0 gilt

$$\|v_0 - v_1\|_2 \leq \|v - v_1\|_2 \quad \forall v \in U$$

mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wie groß ist die Norm $\|v_0 - v_1\|_2$?

Lösung.

a) Wir finden v_0 als Bestapproximation von v_1 durch Projektion auf U, d.h.

$$\begin{aligned} v_0 &= \langle v_1, e_1 \rangle e_1 + \langle v_1, e_2 \rangle e_2 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Wir berechnen sofort

$$\|v_0 - v_1\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_2 = 3.$$

Aufgabe 4. (Bestapproximation)

Sei $V = C([0,1])$ der Vektorraum der stetigen, reellwertigen Funktion auf $[0,1]$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, \mathrm{d}\, x \quad \text{für alle } f, g \in V.$$

Bestimmen Sie die Bestapproximation $u^* \in U$ des Unterraums

$$U = \operatorname{span}\{1, x, x^2\}$$

an die Funktion $f \in V$ mit $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. Bevor Sie rechnen: Welche Genauigkeit der Bestapproximation erwarten Sie hier?
Hinweis: *Eine Orthonormalbasis von U ist gegeben durch*

$$u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad u_2(x) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

Lösung. Da sich die zu approximierende Funktion aus Vektoren vom Unterraum U zusammensetzt, wird hier erwartet, dass die Bestapproximation zum genauen Ergebnis führt. Da die Bestapproximation u^* im Untervektorraum U liegt, lässt sich u^* durch eine Linearkombination des Basisvektoren darstellen:

$$u^* = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2.$$

Die Bestapproximation u^* entspricht gerade der Funktion in U, die zu der gegebenen Funktion f den kürzesten Abstand hat. Damit muss also gelten, dass die Verbindung von f und u^* orthogonal auf dem Untervektorraum U liegt. Für $i = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\langle f - u^*, u_i \rangle = 0 &\iff \langle f, u_i \rangle = \langle u^*, u_i \rangle \\
&\iff \langle f, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{2} \alpha_j u_j, u_i \right\rangle \\
&\iff \langle f, u_i \rangle = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j \langle u_j, u_i \rangle \\
&\underbrace{\iff}_{\text{orthog.}} \langle f, u_i \rangle = \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle \\
&\underbrace{\iff}_{\text{orthon.}} \langle f, u_i \rangle = \alpha_i \cdot 1.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die folgenden beiden Eigenschaften genutzt:

- Das Skalarprodukt von orthogonalen Vektoren ist gleich 0; $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ für $i \neq j$.
- Das Skalarprodukt von orthonormalen Vektoren ist gleich 1; $\langle u_i, u_j\rangle = 1$ für $i = j$.

Damit liegen drei Gleichungen $\langle f, u_0\rangle = \alpha_0$, $\langle f, u_1\rangle = \alpha_1$ und $\langle f, u_2\rangle = \alpha_2$ vor, um die drei Unbekannten α_0, α_1 und α_2 für u^* zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 = \langle f, u_0\rangle &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \cdot 1 \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0,\\
\alpha_1 = \langle f, u_1\rangle &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \mathrm{d}\,x,\\
&= \left(2\sqrt{3}\right)\int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} \,\mathrm{d}\,x\\
&= \left(2\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) = \left(2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.\\
\alpha_2 = \langle f, u_2\rangle &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right) \mathrm{d}\,x\\
&= \left(6\sqrt{5}\right)\int_0^1 x^4 - x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{18} \,\mathrm{d}\,x\\
&= \left(6\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18}\right)\\
&= \left(6\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6}\right)\\
&= \left(6\sqrt{5}\right)\left(\frac{36}{180} - \frac{45}{180} - \frac{20}{180} + \frac{30}{180}\right)\\
&= \left(6\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{\left(6\sqrt{5}\right)^2}\right) = \frac{1}{6\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
u^* &= \sum_{j=0}^{2} \alpha_j \cdot u_j(x) = \sum_{j=0}^{2} \langle f, u_j\rangle \cdot u_j\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6\sqrt{5}} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = x^2 - \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Somit ist die Vermutung einer Bestapproximation ohne Fehler bestätigt.