RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Hausaufgabenübung 1

Studenten: *Joshua Feld, 406718* *Jeff Vogel, 407758* *Henrik Herrmann, 421853*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*
Abgabefrist: *9. November, 2020*

Aufgabe 1. (Morgansche Regeln)

Beweisen Sie die Regeln von de Morgan für beliebige Mengen M, N, P:

a) $M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$,

b) $M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$.

Hinweis: *Zeigen Sie die Gleichheit durch gegenseitige Inklusion* $(A = B) :\iff (A \subset B \wedge B \subset A)$. *Achten Sie in Ihrer lösung auf korrekte und saubere Notation.*

Lösung.

a) Sei $x \in M \setminus (N \cap P)$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in M \setminus (N \cap P) &\iff x \in M \wedge x \notin N \cap P \\ &\iff x \in M \wedge (x \notin N \vee x \notin P) \\ &\iff (x \in M \wedge x \notin N) \vee (x \in M \wedge x \notin P) \\ &\iff x \in M \setminus N \vee x \in M \setminus P \\ &\iff x \in (M \setminus N) \cup (M \setminus P). \end{aligned}$$

b) Sei $x \in M \setminus (N \cup P)$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in M \setminus (N \cup P) &\iff x \in M \wedge x \notin N \cup P \\ &\iff x \in M \wedge (x \notin N \wedge x \notin P) \\ &\iff (x \in M \wedge x \notin N) \wedge (x \in M \wedge x \notin P) \\ &\iff x \in M \setminus N \wedge x \in M \setminus P \\ &\iff x \in (M \setminus N) \cap (M \setminus P). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Abbildungen)

Die Aussagenlogik bildet die Grundlage der Digitalelektronik: Es lassen sich beliebig komplizierte Schaltungen mit einer einzigen Art von Bauelement, dem sogenannten NAND-Gatter (NAND = not and), realisieren. Das NAND $\uparrow$ ist definiert durch

$$(A \uparrow B) :\iff \neg(A \land B).$$

Drücken Sie folgende aussagenlogische Formeln durch äquivalente NANDs aus und begründen Sie Ihre Antwort:

a) $\neg A$,

b) $A \lor B$,

c) $A \land B$.

Hinweis: Verwenden Sie nur $\uparrow$ und keinen der anderen logischen Operatoren $(\lor, \land, \neg)$.

Lösung.

a) Es gilt $\neg A \iff \neg(A \land A) \iff A \uparrow A$.

b) Wir starten mit $A \uparrow B \iff \neg(A \land B)$. Hier können wir die De-morganschen Regeln für Aussagen anwenden und erhalten $\neg A \lor \neg B$. Die Negation haben wir bereits in Teilaufgabe a) gezeigt und wir erhalten somit $(A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$.

c) Es gilt $A \uparrow B \iff \neg(A \land B)$. Wir wollen diese Aussage nun negieren. Dies haben wir schon in Teilaufgabe a) gezeigt und erhalten somit $(A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$.

Aufgabe 3. (Relationen)

Untersuchen Sie die folgenden Relationen auf Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Antisymmetrie und Totalität. Hier bezeichne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

a) $=$ auf $\mathbb{N}$,

b) $\neq$ auf $\mathbb{N}$,

c) $\leq$ auf $\mathbb{N}$,

d) $<$ auf $\mathbb{N}$,

e) $|$ auf $\mathbb{N}$ (Teilbarkeit: $a|b \iff \exists n \in \mathbb{N} : an = b$),

f) $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(\{1, 2\})$.

Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Äquivalenzrelation und/oder eine (Total-) Ordnung handelt.

Lösung.

a)

- Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{N} : x = x$. (ja)

- Symmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x = y \implies y = x$. (ja)
- Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $x = y$ und $y = z \implies x = z$. (ja)
- Antisymmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x = y$ und $y = x \implies x = y$. (ja)
- Totalität: Sei $x = 1$ und $y = 2$, dann gilt weder $x = y$ noch $y = x$. (nein)

Die Relation ist eine Äquivalenzrelation und eine Ordnung aber keine Totalordnung.

b)

- Reflexivität: Sei $x = 2 \in \mathbb{N}$, dann gilt $x \neq x$ nicht. (nein)
- Symmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \neq y \implies y \neq x$. (ja)
- Transitivität: Sei $x = 1, y = 2$ und $z = 1$, dann gilt $x \neq y$ und $y \neq z$ aber nicht $x \neq z$. (nein)
- Antisymmetrie: Sei $x = 1$ und $y = 2$, dann gilt $x \neq y$ und $y \neq x$. (nein)
- Totalität: Sei $x = 1$ und $y = 1$, dann gilt weder $x \neq y$ noch $y \neq x$. (nein)

Die Relation ist weder eine Äquivalenzrelation noch eine Ordnung, also folglich auch keine Totalordnung.

c)

- Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{N} : x \leq x$. (ja)
- Symmetrie: Sei $x = 1$ und $y = 2$, dann gilt $x \leq y$ aber $y > a$. (nein)
- Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $x \leq y$ und $y \leq z \implies x \leq z$. (ja)
- Antisymmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \leq y$ und $y \leq x \implies x = y$. (ja)
- Totalität: Seien $x, y \in \mathbb{N}$, dann gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. (ja)

Die Relation ist keine Äquivalenzrelation aber eine Totalordnung also folglich auch eine Ordnung.

d)

- Reflexivität: Sei $x = 1$, dann gilt nicht $x < x$. (nein)
- Symmetrie: Sei $x = 1$ und $y = 2$, dann gilt $x < y$ aber nicht $y < x$. (nein)
- Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $x < y$ und $y < z \implies x < z$. (ja)
- Antisymmetrie: Für $x, y \in \mathbb{N}$ kann nicht gleichzeitig $x < y$ und $y < x$ gelten. Da die Voraussetzung nicht gilt ist die Aussage immer wahr. (ja)
- Totalität: Sei $x = 1$ und $y = 1$, dann gilt weder $x < y$ noch $y < x$. (nein)

Die Relation ist weder eine Äquivalenzrelation noch eine Ordnung, also folglich auch keine Totalordnung.

e)

- Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{N} : x | x$. (ja)
- Symmetrie: Sei $x = 1$ und $y = 2$, dann gilt $x | y$ aber nicht $y | x$. (nein)

- Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $x|y$ und $y|z$, dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ für die gilt $x \cdot m = y$ und $y \cdot n = z$. Also ist $z = y \cdot n = (x \cdot m) \cdot n = x \cdot mn$. Da $mn \in \mathbb{N}$, gilt $x|z$. (ja)
- Antisymmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x|y$ und $y|x$, dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ für die gilt $x \cdot m = y$ und $y \cdot n = x$. Damit gilt $x = y \cdot n = (x \cdot m) \cdot n$. Hieraus folgt, dass $m = n = 1$ gelten muss, da $m, n \in \mathbb{N}$. Setzen wir ein erhalten wir direkt $x = y$. (ja)
- Totalität: Sei $x = 2$ und $y = 3$, dann gilt weder $x|y$ noch $y|x$. (nein)

Die Relation ist keine Äquivalenzrelation. Die Relation ist eine Ordnung aber keine Totalordnung.

f)

- Reflexivität: $\forall M \in \mathcal{P}(\{1,2\}) : M \subseteq M$. (ja)
- Symmetrie: Es gilt $\emptyset \subseteq \{1\}$ aber $\{1\} \not\subseteq \emptyset$. (nein)
- Transitivität: Seien $M, N, O \in \mathcal{P}(\{1,2\})$ für die gilt $M \subseteq N$ und $N \subseteq O$, dann folgt direkt $M \subseteq O$. (ja)
- Antisymmetrie: Seien $M, N \in \mathcal{P}(\{1,2\})$ für die gilt $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$, dann folgt $M = N$. (ja)
- Totalität: Für $\{1\}, \{2\} \in \mathcal{P}(\{1,2\})$ gilt weder $\{1\} \subseteq \{2\}$ noch $\{2\} \subseteq \{1\}$. (nein)

Die Relation ist keine Äquivalenzrelation. Die Relation ist eine Ordnung aber keine Totalordnung.

Aufgabe 4. (Äquivalenzrelation)

a) Sei $M = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ die Menge aller Brüche. Zeigen Sie, dass durch

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff bc = ad$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist.

b) Beschreiben Sie möglichst genau die Menge aller Äquivalenzklassen, in die M bezüglich $\sim$ zerfällt.

Lösung.

a) Wir müssen zeigen, dass die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Reflexivität: $\forall x = \frac{m}{n} \in M : x \sim x \iff nm = mn$.
- Symmetrie: Seien $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d} \in M$. Dann gilt

$$x \sim y \iff bc = ad \iff da = cb \iff y \sim x.$$

- Transitivität: Seien $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f} \in M$ für die gilt $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \sim y \land y \sim z &\iff bc = ad \land de = cf \\ &\iff c = \frac{ad}{b} \land de = cf \\ &\iff de = \frac{ad}{b} f \\ &\iff bde = adf \\ &\iff be = af \iff x \sim z \end{aligned}$$

Da $\sim$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, handelt es sich um eine Äquivalenzrelation auf M.

b) M zerfällt bezüglich $\sim$ in eine Menge von Äquivalenzklassen. Jede Äquivalenzklasse wird durch einen Bruch, der sich nicht weiter kürzen lässt repräsentiert. Sei A_M die Menge aller Äquivalenzklassen, dann ist

$$A_M = \left\{ \left\{ \frac{m}{n} \right\}_\sim \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \land \operatorname{ggT}(m,n) = 1 \right\}.$$