RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Hausaufgabenübung 8

Studenten: *Joshua Feld, 406718* *Jeff Vogel, 407758* *Henrik Herrmann, 421853*

Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*
Abgabefrist: *11. Januar, 2021*

Aufgabe 1. (Stetigkeit)

Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

mittels der ε-δ-Definition. Ist h auch gleichmäßig stetig?

Lösung. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Wenn $|x - x_0| < \delta$ erfüllt ist, so folgt:

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(x_0)| &= \left| \frac{1}{1+|x|} - \frac{1}{1+|x_0|} \right| \\
&= \left| \frac{1+|x_0|}{(1+|x|)(1+|x_0|)} - \frac{1+|x|}{(1+|x_0|)(1+|x|)} \right| \\
&= \left| \frac{|x_0| - |x|}{(1+|x|)(1+|x_0|)} \right| \leq \left| \frac{|x - x_0|}{(1+|x|)(1+|x_0|)} \right| \\
&< \frac{\delta}{(1+|x|)(1+|x_0|)} \leq \delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass f stetig ist. f ist auch gleichmäßig stetig, da δ nicht von x_0 abhängig ist.

Aufgabe 2. (Lipschitz-Stetigkeit)

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen Lipschitz-stetig sind und bestimmen Sie jeweils eine Lipschitz-Konstante.

a) $f : [0,3) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2+3x}$

b) $g : (-3,2) \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 4x - 1$

Lösung.

a) Für alle $x, y \in [0,3)$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt{2+3x} - \sqrt{2+3y} \right| = \left| \frac{3(x-y)}{\sqrt{2+3x} + \sqrt{2+3y}} \right| \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot |x - y|.$$

Damit ist f Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante $L = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

b) Für alle $x, y \in (-3, 2)$ gilt:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left|x^2 + 4x - 1 - \left(y^2 + 4y - 1\right)\right| = \left|x^2 - y^2 + 4x - 4y\right| \\ &= |(x+y)(x-y) + 4(x-y)| = |(x+y+4)(x-y)| \\ &= |x+y+4| \cdot |x-y| \le (2 \cdot \max\{|x|, |y|\} + 4) \cdot |x-y| \\ &\le (2 \cdot \max\{-3, 2\} + 4) \cdot |x-y| = 8 \cdot |x-y| \end{aligned}$$

Damit ist g Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante $L = 8$.

Aufgabe 3. (Zwischenwertsatz)

Eine wichtige Anwendung des Zwischenwertsatzes ist das Lösen von Gleichungen.

a) Betrachte die Gleichung

$$\cos(x) - x = \frac{1}{2}.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung mindestens eine Lösung aus der Menge der reellen Zahlen besitzt.

b) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(1) = f(-1)$. Zeigen Sie, dass es mindestens ein $x \in [0, 1]$ gibt mit $f(x) = f(x - 1)$.

Lösung.

a) Wir wollen zunächst die Fragestellung umformen. Die Frage *"Hat* $\cos(x) - x = \frac{1}{2}$ *mindestens eine Lösung in* $\mathbb{R}$*?"* lässt sich umformen zu *"Hat die Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{2} - \cos(x)$ *mindestens eine Nullstelle?"*, was wir mithilfe des Zwischenwertsatzes prüfen können. f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$, da f eine aus stetigen Funktionen zusammengesetzte Funktion ist. Wir betrachten nun die Grenzwerte für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\to \frac{1}{2}} - \underbrace{\cos(x)}_{\in [1, -1]} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \underbrace{x}_{\to \infty} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{\to \frac{1}{2}} - \underbrace{\cos(x)}_{\in [1, -1]} = \infty$$

Da f stetig und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty < \infty = \lim_{x \to \infty} f(x)$ gilt, muss es nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in \mathbb{R}$ geben, für welches $f(x_0) = 0$ gilt. Dieses x_0 löst also auch die Gleichung $\cos(x) - x = \frac{1}{2}$.

b) Wir betrachten nun die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - f(x - 1)$. Da die Funktion f stetig ist, muss auch g stetig sein. Es gilt:

$$g(0) = f(0) - f(-1) \underbrace{=}_{f(-1) = f(1)} f(0) - f(1) \quad \text{und} \quad g(1) = f(1) - f(0).$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch. Sei zunächst $f(0) < f(1)$. Dann gilt $g(0) < 0 < g(1)$. Daraus folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass ein $x \in [0, 1]$ existiert, für welches $g(x) = 0$ gilt. Sei nun im zweiten Fall $f(0) = f(1)$. Dann ist $g(0) = 0$, also hat g in diesem Fall eine Nullstelle bei $x = 0$. Als letztes sei $f(0) > f(1)$. Dann gilt $g(1) < 0 < g(0)$ und somit existiert nach dem Zwischenwertsatz auch hier ein $x \in [0, 1]$ für welches $g(x) = 0$ gilt.

In jedem Fall gibt es also ein $x \in [0, 1]$ mit $g(x) = 0$. Für dieses x gilt also nach der Definition von g, dass $f(x) = f(x - 1)$.

Aufgabe 4. (Stetige bzw. unstetige Ableitungen)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{falls } x > 1, \\ 0 & \text{falls } x \leq 1. \end{cases}$$

Begründen oder widerlegen Sie, dass f stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$ bzw. zweimal stetig differenzierbar in $\mathbb{R}$ ist.

Lösung. Wir formen zunächst die Funktionsgleichung um. Es gilt

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{falls } x > 1, \\ 0 & \text{falls } x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{falls } x > 1, \\ 0 & \text{falls } x \leq 1. \end{cases}$$

Wir bestimmen nun die erste und zweite Ableitung dieser Funktion:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{falls } x > 1, \\ 0 & \text{falls } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x > 1, \\ 0 & \text{falls } x \leq 1. \end{cases}$$

Zunächst wollen wir prüfen, ob die erste Ableitung stetig ist. Offensichtlich sind $2x - 2$ und 0 stetig. Wir müssen nun also noch die Stelle $x_0 = 1$ betrachten. Es gilt

$$\lim_{x \searrow 1} f'(x) = \lim_{x \searrow 1} 2x - 2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim_{x \nearrow 1} 0 = 0.$$

Da die beiden Grenzwerte übereinstimmen ist f' auch an der Stelle $x_0 = 1$ stetig und somit auf dem gesamten Definitionsbereichs. Wir prüfen nun genau so die zweite Abbildung. 2 und 0 sind konstant, also auch stetig. Wir müssen nun erneut die Stelle $x_0 = 1$ betrachten. Für die Grenzwerte gilt

$$\lim_{x \searrow 1} f'(x) = \lim_{x \searrow 1} 2 = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} f'(x) = \lim_{x \nearrow 1} 0 = 0.$$

f'' ist also an der Stelle x_0 nicht stetig. Insgesamt ist die Funktion f also nur einmal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5. (Matrixdarstellung linearer Abbildungen)

Es sei

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ x-4y \\ 3x \end{pmatrix},$$

eine Abbildung. Ermitteln Sie die Matrixdarstellungen ${}_{E_3}F_S$, ${}_SF_{E_3}$ und ${}_SF_S$ von F, wobei

$$E_3 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und

$$S = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.

Hinweis: *Sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ eine Basis von V und $B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ eine Basis von W. Dann heisst die Matrix*

$${}_{B_2}F_{B_1} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \textit{sodass } \phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i \quad \textit{für } j = 1, \ldots, n$$

Matrixdarstellung von ϕ bezüglich B_1 und B_2.

Lösung.

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 2\cdot 0+0 \\ 1-4\cdot 0 \\ 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3u_1 - 2u_2 - u_3$$

$$F(e_2) = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+0 \\ 0-4\cdot 1 \\ 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4u_2 - 2u_3$$

$$F(e_3) = \begin{pmatrix} 2\cdot 0+1 \\ 0-4\cdot 0 \\ 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u_3$$

Für die erste gesuchte Abbildungsmatrix ergibt sich nun ${}_{E_3}F_S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$F(u_1) = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1 \\ 1-4\cdot 1 \\ 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3e_1 - 3e_2 + 3e_3 = 3u_1 - 6u_2 + 6u_3$$

$$F(u_2) = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+0 \\ 1-4\cdot 1 \\ 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 2e_1 - 3e_2 + 3e_3 = 3u_1 - 6u_2 + 5u_3$$

$$F(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \\ 1 - 4 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e_2 + 3e_3 = 3u_1 - 2u_2 - u_3$$

Für die anderen beiden Abbildungsmatrizen ergibt sich

$$_SF_{E_3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad _SF_S = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. (Matrixmultiplikation)

a) Gegeben seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Prüfen Sie, ob die Multiplikation dieser drei Matrizen assoziativ ist, d.h. ob

$$(AB)C = A(BC)$$

gilt.

b) Wie aus der Vorlesung bekannt, ist die Matrixmultiplikation *im Allgemeinen* nicht kommutativ. Gegeben sei die Matrix

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Welche Bedingungen müssen die Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit sich das Matrizenprodukt mit der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

kommutativ verhält (d.h. $DX = XD$)?

Lösung.

a) Damit die Multiplikation assoziativ ist, muss $(AB)C = A(BC)$ gelten. Wir berechnen beide Seiten einzeln:

$$\begin{aligned}
(AB)C &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \cdot C \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + 1\cdot(-3) + (-1)\cdot 5 & 2\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 & 2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 \\ 0\cdot 4 + 2\cdot(-3) + 1\cdot 5 & 0\cdot(-2) + 2\cdot(-1) + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 \end{pmatrix} \cdot C \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot(-1) + (-5)\cdot 4 + (-3)\cdot 3 & 0\cdot 2 + (-5)\cdot 0 + (-3)\cdot 1 \\ (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 4 + 0\cdot 3 & (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 0 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -29 & -3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$A(BC) = A \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= A \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + (-1) \cdot 3 & (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 & 8 \\ -4 & -7 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-12) + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-7) + (-1) \cdot 12 \\ 0 \cdot (-12) + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 8 + 2 \cdot (-7) + 1 \cdot 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -29 & -3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist gezeigt, dass die Multiplikation assoziativ ist.

b) Wir berechnen

$$D \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a - c & b - d \end{pmatrix},$$

$$X \cdot D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & b \\ c - d & d \end{pmatrix}.$$

Wir wissen, dass zwei Matrizen gleich sind, wenn alle ihre Einträge gleich sind. Damit erhalten wir durch gleichsetzen unserer beiden Matrizen die folgenden vier Gleichungen:

$$a = a - b, \quad b = b, \quad a - c = c - d, \quad b - d = d.$$

Aus der ersten Gleichung folgt sofort $b = 0$, was auch die zweite Gleichung erfüllt. Setzen wir dies in die vierte Gleichung ein, so erhalten wir $d = 0$. Aus der dritten Gleichung erhalten wir dann $2c = a$. Wir können also $c \in \mathbb{R}$ frei wählen und erhalten für unsere Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$