RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Hausaufgabenübung 7

Studenten: *Joshua Feld, 406718* *Jeff Vogel, 407758* *Henrik Herrmann, 421853*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*
Abgabefrist: *21. Dezember, 2020*

Aufgabe 1. (Konvergente Reihe und Potenzreihen)

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + 7}{3^n}, \quad i\text{: komplexe Einheit.}$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n^n}.$$

Lösung.

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + 7}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{3^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}i\right)^n + 7\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\
&\underbrace{=}_{\text{geom. Reihe}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}i} + 7\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&\underbrace{=}_{\text{geom. Reihe}} \frac{1 + \frac{1}{3}i}{1 + \frac{1}{9}} + 7 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \\
&= \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{3}i\right) + \frac{21}{2} \\
&= \frac{57}{5} + \frac{3}{10}i
\end{aligned}$$

b) Es ist $x_0 = 0$ und somit $a_n = (-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^n} = (-1)^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right)^n$. Wir erhalten damit für den Konvergenzradius

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right)^n}}\\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n}}\\ &= \frac{1}{2\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)^n}}\\ &= \frac{1}{2\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(-1)}\cdot\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Wir wissen, dass sich der Bruch $\frac{1}{n}$ für $n \to \infty$ immer weiter der Null annähert. Folglich nähert sich auch unser gesamter Nenner Null an und wir erhalten einen unendlichen Konvergenzradius ρ.

Aufgabe 2. (Konvergenz von Reihen)

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^{k+1}}{2^k}.$$

Zeigen Sie, dass man mittels des Majorantenkriteriums und mittels des Wurzelkriteriums die Konvergenz der Reihe zeigen kann, jedoch nicht mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Bestimmen Sie anschließend den Wert der Reihe.
Hinweis: *Es gilt für $a > 0$: $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.*

Lösung.

- Majorantenkriterium: Wir wählen als Majorante die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mit $b_k = q^k$ und $q \in \mathbb{R}$. Von dieser wissen wir aus der Vorlesung, dass sie für $k \to \infty$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{1-q}$ konvergiert.

$$|a_k| \le b_k \iff \left|\frac{2+(-1)^{k+1}}{2^k}\right| \le b_k$$

$$\frac{2+(-1)^{k+1}}{2^k} = \frac{2}{2^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

- Wurzelkriterium: Es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\frac{2+(-1)^{k+1}}{2^k}\right|} &= \sqrt[k]{\left|2^{-k}\cdot\left(2+(-1)^{k+1}\right)\right|}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt[k]{\left|2+(-1)^{k+1}\right|}\end{aligned}$$

Es ist $(-1)^{k+1} \in [-1,1]$, also ist der Teil unter der Wurzel immer größer als 0. Folglich konvergiert dieser nach dem Hinweis für $k \to \infty$ gegen 1. Insgesamt konvergiert $\sqrt[k]{|a_k|}$ somit für $k \to \infty$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}$. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die gesamte Reihe somit auch.

- Quotientenkriterium: Es gilt

$$a_k = \frac{2+(-1)^{k+1}}{2^k} \qquad a_{k+1} = \frac{2+(-1)^{k+2}}{2^{k+1}}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{2+(-1)^{k+2}}{2^{k+1}}}{\frac{2+(-1)^{k+1}}{2^k}}\right| &= \left|\frac{\left(2+(-1)^{k+2}\right)\cdot 2^k}{2^{k+1}\cdot\left(2+(-1)^{k+1}\right)}\right| \\
&= \left|\frac{2+(-1)^{k+2}}{2\cdot\left(2+(-1)^{k+1}\right)}\right| \\
&= \left|\frac{2}{2\cdot\left(2+(-1)^{k+1}\right)} + \frac{(-1)^{k+2}}{2\cdot\left(2+(-1)^{k+1}\right)}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2+(-1)^{k+1}} + \frac{(-1)^k}{2\cdot\left(2-(-1)^k\right)}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2+(-1)^{k+1}} + \frac{1}{2+(-1)^{k+1}} - \frac{1}{2}\right| \\
&= \left|\frac{2}{2+(-1)^{k+1}} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{2}{2+(-1)^k} - \frac{1}{2}\right|
\end{aligned}$$

Wir können sehen, dass der Nenner des Bruchs divergiert, denn der Wert wechselt immer zwischen 1 und 3 (für ungerade und gerade k respektive). Somit alterniert unsere gesamte Folge zwischen den Werten $\frac{1}{6}$ und $\frac{3}{2}$. Da kein Grenzwert für $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert, können wir mit dem Quotientenkriterium keine Aussage über die Konvergenz der ursprünglichen Reihe tätigen.

Aufgabe 3. (Stetigkeit)

Seien $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen

a) $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$.

b) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$

Zeigen oder widerlegen Sie die Stetigkeit der Funktionen f und g im Nullpunkt.

Lösung.

a) Wir wissen aus der letzten Hausaufgabenübung, dass die Wurzelfunktion stetig ist. Dies wollen wir nun formal für den Nullpunkt zeigen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Wir wollen nun zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{0}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ dazu nun beliebig aber fest. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt $a_n < \varepsilon^2$. Dies können wir umformen zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \sqrt{a_n} < \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 0 = \sqrt{0}$ und somit ist die Funktion f stetig.

b) Die Funktion g ist nicht stetig im Nullpunkt. Dies wollen wir mithilfe eines Widerspruchsbeweises zeigen. Wir nehmen also an, g wäre stetig im Nullpunkt.

Aufgabe 4. (Lineare Abbildung)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an. Geben Sie für die linearen Abbildungen den Kern der Abbildung und dessen Dimension an.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad f_1(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ x-3 \end{pmatrix}$

b) $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$

c) $f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 x_4 \end{pmatrix}$

d) $f_4 : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3 \quad f_4(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

Lösung.

a) Seien $x_1 = 0, x_2 = 1 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f_1(x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = f_1(x_1) + f_1(x_2).$$

Da die Additivität nicht erfüllt ist, ist f_1 nicht linear.

b) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, w \in \mathbb{R}^4$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_2(\lambda v + \mu w) &= \begin{pmatrix} \lambda v_1 + \lambda v_2 + \mu w_1 + \mu w_2 \\ \lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 + \lambda v_4 + \mu w_1 + \mu w_2 + \mu w_3 + \mu w_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(v_1 + v_2) + \mu(w_1 + w_2) \\ \lambda(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + \mu(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot f_2(v) + \mu \cdot f_2(w). \end{aligned}$$

Da sowohl Additivität als auch Homogenität erfüllt sind, ist die Abbildung linear. Für den Kern von f_2 gilt

$$\begin{aligned}\ker(f_2) &= \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, f_2(v) = 0 \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, v_1 + v_2 = 0 \wedge v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ v_3 \\ -v_3 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\dim(\ker(f_2)) = 2$, denn jedes $v \in \ker(f_2)$ ist durch die folgende Linearkombination aus zwei Vektoren des $\mathbb{R}^4$ darstellbar:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Sei $\lambda = 3$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Dann gilt

$$f_3(\lambda v) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot f_3(v).$$

Da Homogenität für diese Abbildung nicht erfüllt ist, ist sie nicht linear.

d) Seien $p, q \in \mathcal{P}_3$ mit $p(x) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{3} \beta_i x^i$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda p(x) + \mu q(x)) &= f\big(\lambda\alpha_0 + \mu\beta_0 + (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1)x + (\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)x^2 + (\lambda\alpha_3 + \mu\beta_3)x^3\big) \\ &= \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + 2(\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2)x + 3(\lambda\alpha_3 + \mu\beta_3)x^2 \\ &= \lambda\big(\alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2\big) + \mu\big(\beta_1 + 2\beta_2 x + 3\beta_3 x^2\big) \\ &= \lambda f(p(x)) + \mu f(q(x)) \end{aligned}$$

Da Additivität und Homogenität erfüllt sind, ist die Abbildung linear. Für den Kern der Abbildung gilt

$$\begin{aligned} \ker(f_3) &= \{ p \in \mathcal{P}_3 \mid f_3(p(x)) = 0 \} \\ &= \big\{ p \in \mathcal{P}_3 \mid f_3\big(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3\big) = 0 \big\} \\ &= \big\{ p \in \mathcal{P}_3 \mid \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \big\} \\ &= \{ p \in \mathcal{P}_3 \mid \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \} \\ &= \big\{ p \in \mathcal{P}_3 \mid p(x) = \alpha_0 \big\} = \mathcal{P}_0. \end{aligned}$$

Der Kern enthält also alle Polynome mit Grad 0. Daraus können wir direkt folgern, dass $\dim(\ker(f_4) = 1)$ für die Dimension des Kerns gilt.