RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Hausaufgabenübung 3

Studenten: *Joshua Feld, 406718* *Jeff Vogel, 407758* *Henrik Herrmann, 421853*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*
Abgabefrist: *23. November, 2020*

Aufgabe 1. (Menge reeller Zahlen)

a) Bestimmen Sie das Maximum, Minimum, Infimum und Supremum der folgenden Menge:

$$M_1 = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\frac{x-5}{x+5} > 0 \land |15x - 2| \geq 30$$

Lösung.

a) Ein Bruch $\frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist streng monoton fallend, d.h. am Beginn des Definitionsberechs ist das Maximum zu finden. Daraus folgt

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2.$$

Da $2 \in M_1$ gilt $\max M_1 = \sup M_1 = 2$. Des Weiteren gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ mit $k \in \mathbb{N}$, also auch

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = 0.$$

Wir wissen jedoch, dass $0 \notin M_1$, denn sonst müsste $\frac{1}{m}$ das additive Inverse von $\frac{1}{n}$ sein, was aber einen Widerspruch darstellt, da dazu $m = -n$ gelten müsste, jedoch liegen die negativen Zahlen nicht in $\mathbb{N}$. Folglich gilt $\inf M_1 = 0$, aber es existiert kein Minimum.

b) Um die erste Ungleichung zu lösen bestimmen wir zunächst die Nullstellen der Terme $x - 5$ und $x + 5$. Offensichtlich sind die Nullstellen hier $x = 5$ und $x = -5$. Damit erhalten wir die folgenden möglichen Lösungsintervalle:

$$\mathbb{L}_1 = (-\infty, -5), \quad \mathbb{L}_2 = (-5, 5) \quad \text{und} \quad \mathbb{L}_3 = (5, \infty).$$

Durch Einsetzen von Werten überprüfen wir, welche Intervalle zur Lösung gehören.

$$\begin{aligned} -6 \in \mathbb{L}_1 : \quad & \frac{(-6)-5}{-6+5} = \frac{-11}{-1} = 11 > 0 \\ 0 \in \mathbb{L}_2 : \quad & \frac{0-5}{0+5} = -\frac{5}{5} = -1 \leq 0 \\ 6 \in \mathbb{L}_3 : \quad & \frac{6-5}{6+5} = \frac{1}{11} > 0 \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also

$$\mathbb{L}_A = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x < -5 \vee x > 5\}.$$

Wir wollen nun noch die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ bestimmen, für die $|15x - 2| \geq 30$. Es gilt

$$\begin{aligned} |15x-2| \geq 30 &\iff (15x-2)^2 \geq 900 \\ &\iff 225x^2 - 60x + 4 \geq 900 \\ &\iff x^2 - \frac{4}{15}x - \frac{896}{225} \geq 0 \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Nullstellen der quadratischen Gleichung $x^2 - \frac{4}{15}x - \frac{896}{225} = 0$ finden. Diese sind:

$$\begin{aligned} & x^2 - \frac{4}{15}x - \frac{896}{225} = 0 \\ \iff & x = \frac{2}{15} \pm \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{896}{225}} = \frac{2}{15} \pm 2 \\ \iff & x = \frac{32}{15} \vee x = -\frac{28}{15} \end{aligned}$$

Damit haben wir nun die möglichen Lösungsintervalle der quadratischen Ungleichung $x^2 - \frac{4}{15}x - \frac{896}{225} \geq 0$ gefunden. Diese sind

$$\mathbb{L}_1 = \left(-\infty, -\frac{28}{15}\right], \quad \mathbb{L}_2 = \left[-\frac{28}{15}, \frac{32}{15}\right] \quad \text{und} \quad \mathbb{L}_3 = \left[\frac{32}{15}, \infty\right)$$

Durch Einsetzen von Werten überprüfen wir, welche Intervalle zur Lösung gehören.

$$\begin{aligned} -2 \in \mathbb{L}_1 : \quad & (-2)^2 - \frac{4}{15} \cdot (-2) - \frac{896}{225} = \frac{124}{225} \geq 0 \\ 0 \in \mathbb{L}_2 : \quad & 0^2 - \frac{4}{15} \cdot 0 - \frac{896}{225} = -\frac{896}{225} < 0 \\ 3 \in \mathbb{L}_3 : \quad & 3^2 - \frac{4}{15} \cdot 3 - \frac{896}{225} = \frac{949}{225} \geq 0 \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also

$$\mathbb{L}_B = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leq -\frac{28}{15} \vee x \geq \frac{32}{15} \right\}.$$

Für die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ für die beide Ungleichungen gelten, ergibt sich

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_A \cap \mathbb{L}_B = \mathbb{L}_A = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x < -5 \vee x > 5\}.$$

Aufgabe 2. (Supremum, Infimum, Maximum, Minimum)

Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen. In welchen Fällen handelt es sich um ein Maximum bzw. Minimum? Begründen Sie, warum es sich jeweils um ein Supremum/Infimum/Maximum/Minimum handelt.

a) $M_1 = [a, b)$, $M_2 = (a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$,

b) $M_3 = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{z} \text{ für } z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$,

c) $M_4 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ und } x(x-1)(x-2) < 0\}$.

Hinweis: *Für eine Teilmenge* $A \subset \mathbb{R}$ *mit* $\sup(A) \in A$ *heißt* $s := \sup(A)$ *auch das Maximum von* A. *Also* $s = \max(A)$. *Falls* $\sup(A) \notin A$, *so hat die Menge kein Maximum. Analog folgt* $t := \inf(A) \in A \implies t = \min(A)$ *und falls* $\inf A \notin A$, *dann hat die Menge kein Minimum.*

Lösung.

a) b ist nach der Definition des Intervalls eine obere Schranke von M_1. Da jedoch $b \notin M_1$ müssen wir noch zeigen, dass b wirklich die kleinste obere Schranke von M_1 ist. Dies zeigen wir mithilfe eines Widerspruchs. Angenommen, es existiert ein $b' = \sup M_1$ mit $b' < b$. Da für alle $0 < x < b - a$ gilt $b - x \in M_1$, also

$$b' \in M_1 \wedge b' = \sup M_1 \implies b' = \max M_1.$$

Daraus folgt aber auch $b' + \frac{b-b'}{2} \in [a, b)$. Somit kann b' nicht Maximum von M_1 sein, womit wir einen Widerspruch erreicht haben. a ist offensichtlich die größte untere Schranke, da sie in M_1 enthalten ist. Insgesamt also

$$\sup M_1 = b \quad \text{und} \quad \inf M_1 = \min M_1 = a.$$

Für M_2 ist das Verhalten gespiegelt, d.h. es exisitiert ein Infimum mit $\inf M_2 = a$ aber kein Minimum, da $a \notin M_2$. b ist offensichtlich die größte obere Schranke, da sie in M_2 enthalten ist. Insgesamt also

$$\sup M_2 = \max M_2 = b \quad \text{und} \quad \inf M_2 = a.$$

b) Für alle $x \in M_3, x = \frac{1}{z}$ mit $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ muss gelten $|x| \leq 1$. Daraus folgt sofort

$$\sup M_3 = \max M_3 = 1 \quad \text{und} \quad \inf M_3 = \min M_3 = -1.$$

c) Wir formen die beiden Bedingungen für die $x \in M_4$ gleichzeitig um:

$$\begin{aligned}
x \geq 0 \wedge x(x-1)(x-2) < 0 &\iff x > 0 \wedge (x-1)(x-2) < 0 \\
&\iff x > 0 \wedge ((x-1) > 0 \wedge (x-2) < 0) \vee ((x-1) < 0 \wedge (x-2) > \\
&\iff x > 0 \wedge ((x > 1 \wedge x < 2) \vee (x < 1 \wedge x > 2)) \\
&\iff x > 0 \wedge (x > 1 \wedge x < 2) \\
&\iff x \in (1, 2).
\end{aligned}$$

Es gilt also $\sup M_4 = 2$ und $\inf M_4 = 1$. Minimum und Maximum exisitieren beide nicht, da das Intervall für $x \in M_4$ in beide Richtungen offen ist und somit $\sup M_4, \inf M_4 \notin M_4$.

Aufgabe 3. (Reelle Zahlen)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$:

a) Sei w eine positive irrationale Zahl. Zeigen Sie, dass es eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass $a < wr < b$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass wr auch eine irrationale Zahl ist. Daher existiert zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer auch eine irrationale Zahl.

c) Sei $\alpha = \sup(A) < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass eine Zahl $x \in A$ existiert, so dass $\alpha - \varepsilon < x$ gilt.

Lösung.

a) Aus der Dichtheit der rationalen Zahlen, welche bereits in der Vorlesung bewiesen wurde, folgt, dass es ein $r \in \mathbb{Q}$ gibt, für dass gilt

$$\frac{a}{w} < r < \frac{b}{w},$$

denn offensichtlich sind $\frac{a}{w}, \frac{b}{w} \in \mathbb{R}$. Multiplizieren wir alles mit w erhalten wir, da w positiv ist, direkt

$$a < wr < b,$$

was zu zeigen war.

b) Wir zeigen diese Aussage mithilfe eines Widerspruchs. Angenommen es gelte $wr \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$w \cdot \frac{m}{n} = \frac{x}{y} \iff w = \frac{xm}{yn}.$$

Hiernach muss w eine rationale Zahl sein, was den Widerspruch darstellt. Folglich ist $wr \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Somit ist bewiesen, dass zwischen zwei reellen Zahlen auch immer eine irrationale Zahl existiert.

c) Aus $\alpha = \sup A$ folgt, dass α die kleinste obere Schranke der Menge A ist. Somit gilt für eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ immer $\alpha - \epsilon < \alpha$. Daraus folgt, dass $\alpha - \epsilon$ keine kleinste obere Schranke der Menge A sein kann, woraus wir folgern können, dass ein $x \in A$ existiert, für das $\alpha - \epsilon < x$ gilt.

Aufgabe 4. (Bernoulli-Ungleichung)

Beweisen Sie die *Bernoulli-Ungleichung*: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Lösung.

- Induktionsverankerung: $(n = 1)$

$$(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + x.$$

- Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und ein $n \in \mathbb{N}$.

- Induktionsschritt: $(n \to (n+1))$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x)\\ &\underbrace{\geq}_{\text{I.V.}} (1+nx)\cdot(1+x)\\ &= 1+x+nx+nx^2\\ &\geq 1+x+nx = 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5. (Ungleichung)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Beweisen Sie, dass gilt:

$$2xy \leq x^2 + y^2.$$

Lösung. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Offensichtlich gilt $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$. Addieren wir auf jeder Seite $2xy$, so erhalten wir $2xy \leq x^2 + y^2$.

Aufgabe 6. (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Sei V ein Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in V$$

erfüllt. Hierbei ist $\|\cdot\|$ die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *induzierte Norm*, d.h. $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
Hinweis: *Berechnen Sie $\langle x + \lambda \cdot y, x + \lambda \cdot y\rangle$ und wählen Sie anschließend $\lambda \in \mathbb{R}$ geeignet.*

Lösung. Für den Fall $x = y = 0$ Ist die Ungleichung trivial, denn dann gilt

$$|\langle 0, 0\rangle| = 0 \leq 0 = \|0\| \cdot \|0\|.$$

Seien $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir nehmen zunächst an, es gilt $y \neq 0$. Wir betrachten den Ausdruck

$$\begin{aligned}\langle x + \lambda \cdot y, x + \lambda \cdot y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle\\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle\\ &= \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle\\ &= a + 2\lambda b + \lambda^2 c\end{aligned}$$

mit $a = \langle x, x \rangle$, $b = \langle x, y \rangle$ und $c = \langle y, y \rangle$. Es gilt $a + 2\lambda b + \lambda^2 c \geq 0$. Wir wählen $\lambda = -\frac{|b|}{c}$ und setzen dies ein

$$\begin{aligned} a - 2\frac{|b|}{c}b + \left(-\frac{|b|}{c}\right)^2 c &\geq 0 \\ a - 2\frac{|b|^2}{c} + \frac{|b|^2}{c^2}c &\geq 0 \\ a - 2\frac{|b|^2}{c} + \frac{|b|^2}{c} &\geq 0 \\ a - \frac{|b|^2}{c} &\geq 0 \end{aligned}$$

Hieraus können wir nun durch Multiplikation mit c folgern, dass $ax - |b|^2 \geq 0$ beziehungsweise durch umformen $|b|^2 \leq ac$. Wir setzen nun unsere ursprünglichen Werte für a, b, c ein und erhalten

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Nehmen wir also nun es sei $y = 0$ und x beliebig. Dann folgt, dass $c = 0$ und somit auch $\|y\| = 0$. Außerdem gilt auch $\langle x, y \rangle = 0$. Folglich gilt die Ungleichung auch in diesem Fall:

$$|0|^2 = 0 \leq 0 = \|x\| \cdot 0.$$