RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Weihnachtsübung

Student: *Joshua Feld, 406718*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*

Aufgabe 1. (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

Hinweis: *Übersetzen Sie Teil a) zunächst in die Summenschreibweise. Teil a) heißt auch die "geometrische Summenformel".*

Lösung.

Aufgabe 2. (Einheitswurzeln, Nullstellen)

a) Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen $-12-7i$, $\overline{3+5i}$ und $(1-i)^{10}$, wobei jeweils das Argument in $(-\pi, \pi]$ liegen soll.

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt: $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

c) Das Polynom $p(x) := 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 64$ hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = 4$. Ermitteln Sie alle weiteren Nullstellen von p in $\mathbb{C}$.

Lösung.

Aufgabe 3. (Komplexe Folgen)

Wir betrachten die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n, \qquad b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_n.$$

a) Bestimmen Sie alle konvergenten Teilfolgen von (a_n) und (b_n) und deren Grenzwert.

b) Bestimmen Sie max, min, inf und sup der Folgen $\left(c_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}, k = 1, 2$ mit $c_n^1 = |a_n|$ und $c_n^2 = |b_n|$.

c) Skizzieren Sie a_n und b_n in der komplexen Ebene.

Lösung.

Aufgabe 4. (Konvergente Reihen und Potenzreihen)

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i)^k + 3^{k-1}}{5^k}.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi) \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

Lösung.

Aufgabe 5. (Stetigkeit, gleichmäßige und Lipschitz-Stetigkeit)

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit:

  i) $f(x) = x^2$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

  ii) $g(x) = x^2$ mit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

  iii) $h(x) = m \cdot x + b$ mit $m, b \in \mathbb{R}$.

  Hinweis: *Benutzen Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit nur in Teil (i), argumentieren Sie in den anderen beiden Fällen geschickter.*

b) Benutzen Sie den Zwischenwertsatz um zu zeigen, dass $k(x) = mx^2 + b$ immer mindestens eine Nullstelle besitzt, wenn $m < 0$ und $b > 0$.

Lösung.

Aufgabe 6. (Lipschitz-Stetigkeit)

a) Zeigen Sie die Lipschitz-Stetigkeit der Funktion

$$f : [1, 10] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$

und geben Sie eine Lipschitz-Konstante $L > 0$ an.

b) Beweisen Sie, dass aus der Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion die gleichmäßige Stetigkeit folgt.

Lösung.

Aufgabe 7. (Vektorraum und Skalarprodukt)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $I := [a, b]$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

$$C^k(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} | \ f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar auf } I\}$$

und

$$\langle f, g \rangle_{H^k} := \sum_{l=0}^{k} \int_a^b f^{(l)}(x) \cdot g^{(l)}(x) \,\mathrm{d}\, x \quad \forall f, g \in C^k(U).$$

Zeigen Sie, dass $C^k(I)$ unter der Vektoraddition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in I, f, g \in C^k(I)$$

und der Multiplikation mit Skalaren

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in I, f \in C^k(I)$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Zeigen Sie weiter, dass $\langle f, g \rangle_{H^k}$ ein Skalarprodukt auf $C^k(I)$ ist.

Lösung.

Aufgabe 8. (Unterräume)

Entscheiden und begründen Sie, ob U ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist:

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \right\}$

b) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = 2x + 1 \right\}$

c) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y + 2x + 2z = 0 \right\}$

d) $V = \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$, Raum aller Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

i. $U_1 = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Polynom vom Grad } \leq n \}$

ii. $U_2 = C^k([a,b])$

iii. $U_3 = C^\infty([a,b])$

Welcher Unterraum ist dabei wieder ein Unterraum der jeweils anderen Teilräume?

Lösung.

Aufgabe 9. (Lineare Unabhängigkeit)

a) Untersuchen Sie, ob $\{f_1, f_2, f_3\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch

$$f_1(t) = \cos(t), \quad f_2(t) = \cos(2t), \quad f_3(t) = \cos(3t), \quad t \in \mathbb{R},$$

linear unabhängig ist.

b) Sei $\{x, y, z\} \subset V$ linear unabhängig. Ist $\{x + y, x + z, y + z\}$ auch linear abhängig?

c) Für welche Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\left\{(\lambda, 1, 0)^T, (1, \lambda, 1)^T, (0, 1, \lambda)^T\right\}$ linear abhängig?

Lösung.

Aufgabe 10. (Basis und Dimension)

Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von

a) $V = \{p \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) = 0\}$,

b) $V = \operatorname{span}\{1 - 2x, 2x - x^2, 1 - x^2, 1 + x^2\} \subset \mathcal{P}_2$.

Lösung.

Aufgabe 11. (Bestapproximation)

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und der Teilraum $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ gegeben. Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element u^* des Teilraums U.

Lösung.

Aufgabe 12. (Lineare Abbildungen)

Gegeben seien die Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \{x, y\} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ 2x \\ y + 5x \end{pmatrix}$$

und

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \{x, y, z\} \mapsto x + y + z.$$

a) Zeigen Sie die Linearität der Abbildungen φ und ϕ.

b) Identifizieren Sie jeweils die zugehörige Matrix.

c) Bilden Sie die Verknüpfung $\phi \circ \varphi$ und geben Sie die Matrix an.

d) Diskutieren Sie die Verknüpfung $\varphi \circ \phi$.

Lösung.