RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Hausaufgabenübung 5

Studenten: *Joshua Feld, 406718*   *Jeff Vogel, 407758*   *Henrik Herrmann, 421853*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*
Abgabefrist: *7. Dezember, 2020*

Aufgabe 1. (Konvergenz von Folgen)

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{8n-1}$

b) $a_n = \left(\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n}\right)^n$

c) $a_n = \frac{4n^2+1}{2n^3+n^2}$

Hinweis: *Es gilt* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Lösung.

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{8n-1} &= \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{8n} \cdot \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right)^{8n} \cdot \left(\frac{2n+1-1}{2n+1}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}\right)^{4} \cdot \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Wir definieren $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Sei nun $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ mit $k_n = 2n$. Dann ist die Teilfolge $y_n = x_{k_n}$ unser Nenner $y_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine konvergente Folge mit Grenzwert $x^* \in \mathbb{R}$ jede ihrer Teilfolgen ebenfalls konvergent ist mit Grenzwert x^*. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$. Da zusätzlich $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = 0$ gilt insgesamt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{8n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}\right)^{4} \cdot \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{-1}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^4 \cdot 1 = e^{-4}.$$

Die Folge a_n kovergiert also mit Grenzwert e^{-4}.

b) Wir wissen, dass $\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{n}$, denn $\frac{1}{n} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\left(\sqrt[n]{n} + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = n.$$

Die Folge konvergiert offensichtlich nicht; sie ist divergent.

c) Wir wissen, dass $2n^3 + n^2 \leq 2n^3$, denn $n^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt dann

$$\frac{4n^2+1}{2n^3+n^2} \leq \frac{4n^2+1}{2n^3} = \frac{4n^2}{2n^3} + \frac{1}{2n^3} = 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^3}$$

Offensichtlich gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$. Es folgt also $a_n \leq 0$. Wir wissen zudem, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit konvergiert die Folge und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+1}{2n^3+n^2} = 0.$$

Aufgabe 2. (Konvergenz von Folgen)

Beweisen Sie mit Hilfe der Konvergenz-Definition, dass die Folge (a_n) definiert durch

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Lösung. Wir müssen zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt. Der Ausdruck $\frac{1}{(n+1)^2}$ ist immer positiv, also können wir die Betragsstriche weglassen. Es ergibt sich

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon \iff 1 < \varepsilon \cdot (n+1)^2$$
$$\iff \frac{1}{\varepsilon} < (n+1)^2 \iff \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1 < n.$$

Wir müssen also $N > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} + 1$ wählen. Da die Bedingung erfüllt ist, konvergiert die Folge (a_n) mit Grenzwert 0.

Aufgabe 3. (Rekursive Folgen)

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass (a_n) der Abschätzung $a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt.

b) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie nun, dass (a_n) eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge ist und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis: *Die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend und stetig in* $[0, \infty)$.

Lösung.

a) Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion:

- Induktionsverankerung: $(n = 1)$ Offensichtlich ist $a_1 = 1 < 2$.
- Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschritt: $(n \to n+1)$ Da die Wurzelfunktion stetig ist, gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \underbrace{<}_{\text{I.V.}} \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage damit für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Da die Wurzelfunktion stetig ist, gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{a_n + a_n} = \sqrt{2a_n} > \sqrt{a_n^2} = a_n.$$

Somit ist die Folge monoton wachsend.

c) Aus der Vorlesung wissen wir, dass jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge konvergent ist. Monotonie haben wir in der zweiten Teilaufgabe gezeigt und Beschränktheit in der ersten Teilaufgabe. Wir wollen nun noch den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ berechnen:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Wir erhalten also die Gleichung $a = \sqrt{2 + a}$. Dies lösen wir nun wie folgt auf

$$a^2 = 2 + a \iff a^2 - a - 2 = 0 \iff a = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Wir wissen also, dass $a = -1$ oder $a = 2$. Wir wissen aber aus den ersten beiden Teilaufgaben, dass für alle a_n gilt $1 \leq a_n < 2$, also kommt nur $a = 2$ als Grenzwert infrage:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Aufgabe 4. (Cauchyfolgen)

a) Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge $(a_n) \in \mathbb{K}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist.

b) Sei $(a_n) \in \mathbb{K}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{6 + 7a_n}{7 + 2a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist und ermitteln Sie den Grenzwert.

Hinweis: *Zeigen Sie zuerst, dass es ein $q \in (0, 1)$ gibt, sodass $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q \cdot |a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und schließen Sie hieraus, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.*

Joshua Feld, 406718 Jeff Vogel, 407758 Henrik Herrmann, 421853

Lösung.

a) Sei $\varepsilon > 0$. Daraus, dass (a_n) eine konvergente Folge ist, folgt, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a - a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |a - a_\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k, \ell \geq N$. Daraus folgt dann insgesamt

$$|a_k - a_\ell| = |(a_k - a) + (a - a_\ell)| \leq |a_k - a| + |a - a_\ell| < \varepsilon.$$

Dies entspricht der Definition einer Cauchy-Folge und die zu zeigende Aussage gilt.

b) Wir zeigen zunächst, dass ein $q \in (0,1)$ gibt, sodass $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q \cdot |a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \frac{6 + 7a_{n+1}}{7 + 2a_{n+1}} - \frac{6 + 7a_n}{7 + 2a_n} \\ &= \frac{(6 + 7a_{n+1})(7 + 2a_n) - (7 + 2a_{n+1})(6 + 7a_n)}{(7 + 2a_{n+1})(7 + 2a_n)} \\ &= \frac{42 + 12a_n + 49a_{n+1} + 14a_{n+1}a_n - (42 + 49a_n + 12a_{n+1} + 14a_{n+1}a_n)}{(7 + 2a_{n+1})(7 + 2a_n)} \\ &= \frac{37a_{n+1} - 37a_n}{(7 + 2a_{n+1})(7 + 2a_n)} \\ &= \frac{37}{(7 + 2a_{n+1})(7 + 2a_n)} \cdot (a_{n+1} - a_n) \end{aligned}$$

Daraus folgt dann für die Betragsgleichung

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \frac{37}{(7 + 2a_{n+1})(7 + 2a_n)} \cdot |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{37}{49} \cdot |a_{n+1} - a_n|,$$

wobei wir im letzten Schritt a_{n+1} und a_n aus dem Nenner weggelassen haben. Dies können wir machen, weil die Folge für alle $n \in \mathbb{N}$ größer als 0 ist. Das zeigen wir noch kurz per Induktion:

- Induktionsverankerung: $(n = 1)$

$$a_1 = 1 > 0.$$

- Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschritt $(n \to n + 1)$ Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{6 + 7a_n}{7 + 2a_n} > 0,$$

  weil $a_n > 0$ nach der Induktionsvoraussetzung.

Daraus folgt, dass die in dem Hinweis gegebene Ungleichung für $q = \frac{37}{49} \in (0,1)$ erfüllt ist. Hiermit wollen wir nun zeigen, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist. Aus dieser Ungleichung folgt

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q^n \cdot |a_2 - a_1| = \frac{4}{9} q^n,$$

mit $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{6+7}{7+2} = \frac{13}{9}$. Dies beweisen wir wieder induktiv

- Induktionsverankerung: $(n = 1)$ Gilt, wie gerade eben schon gezeigt.
- Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschritt: $(n \to n + 1)$ Es gilt

$$\begin{aligned}|a_{n+3} - a_{n+2}| &\leq q \cdot |a_{n+2} - a_{n+1}| \underbrace{\leq}_{\text{I.V.}} q \cdot q^n \cdot |a_2 - a_1| \\ &= q^{n+1} \cdot |a_2 - a_1| = q^{n+1} \cdot \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

Damit zeigen wir nun, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy- Folge ist. Hierzu betrachten wir für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$: $|a_{m+1} - a_{n+1}|$. Sei nun $k = m - n$, dann gilt

$$\begin{aligned}|a_{m+1} - a_{n+1}| = |a_{n+1+k} - a_{n+1}| &\underbrace{\leq}_{\text{Teleskopsumme}} \sum_{\ell=1}^{k} |a_{n+1+\ell} - a_{n+\ell}| \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{k} q^{n+\ell-1} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9} q^n \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} q^\ell \underbrace{\leq}_{k\to\infty} \frac{4}{9(1-q)} \cdot q^n.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann folgt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ und $\frac{4}{9(1-q)} q^{n-1} < \varepsilon$ aus der obigen Ungleichung $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy- Folge und somit eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$.

Den Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ der Folge berechnen wir wie folgt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{6 + 7 \lim_{n\to\infty} a_n}{7 + 2 \lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{6 + 7a}{7 + 2a}.$$

Wir haben also die Gleichung

$$a = \frac{6 + 7a}{7 + 2a} \iff 7a + 2a^2 = 6 + 7a \iff a^2 = 3 \iff a = \pm\sqrt{3}.$$

Da jedoch die Folge nur Werte größer Null annimmt kommt nur der Fall $a = \sqrt{3}$ infrage, also $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$.

Aufgabe 5. (Unterräume)

Entscheiden und begründen Sie, ob U ein Unterraum des $\mathbb{R}$- Vektorraums V ist:

a) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$

b) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \right\}$

c) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2, a, b \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3b \\ 2b - a \end{pmatrix} \right\}$

Lösung.

a) Es gilt $U \subset V$ und offensichtlich $0 \in U$. Seien $v, w \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \lambda \cdot (v+w) \right\rangle &= \lambda \cdot (v_1 + w_1) + \lambda \cdot (v_2 + w_2) + \lambda \cdot (v_3 + w_3)\\ &= \lambda \cdot ((v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) + (v_3 + w_3))\\ &= \lambda \cdot (\underbrace{v_1 + v_2 + v_3}_{=0} + \underbrace{w_1 + w_2 + w_3}_{=0}) = 0\end{aligned}$$

Da $\lambda \cdot (v+w)$ die Bedingung erfüllt, ist dies in U enthalten. Folglich ist U abgeschlossen im Bezug auf Addition und Multiplikation mit Skalaren. Also ist U ein Unterraum von V.

b) Die angegebene Menge ist kein Unterraum von V. Sei $v = (-1,1)^T$ und $\lambda = -1$. Dann ist $v \in U$ aber $\lambda \cdot v = (-1) \cdot (-1,1)^T = (1,-1)^T \notin U$. Folglich ist U nicht abgeschlossen im Bezug auf die Multiplikation mit Skalaren.

c) Es gilt $U \subset \mathbb{R}^2$. Es ist $0 \in U$, mit $a = b = 0$. Seien nun $v = \begin{pmatrix}a_1 + 3b_1\\2b_1 - a_1\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}a_2 + 3b_2\\2b_2 - a_2\end{pmatrix} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (v+w) &= \lambda \cdot \left(\begin{pmatrix}a_1 + 3b_1\\2b_1 - a_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2 + 3b_2\\2b_2 - a_2\end{pmatrix} \right)\\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix}a_1 + a_2 + 3(b_1 + b_2)\\2(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)\end{pmatrix}\\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix}a' + 3b'\\2b' - a'\end{pmatrix} \quad \text{mit } a' = a_1 + a_2 \text{ und } b' = b_1 + b_2\\ &= \begin{pmatrix}\lambda \cdot a' + \lambda \cdot 3b'\\ \lambda \cdot 2b' - \lambda \cdot a'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a + 3b\\2b - a\end{pmatrix} \in U \quad \text{mit } a = \lambda a' \text{ und } b = \lambda b'.\end{aligned}$$

Da U abgeschlossen im Bezug auf Addition und Multiplikation mit Skalaren ist, ist U ein Unterraum von V.

Aufgabe 6. (Gram-Schmidt Orthogonalisierung)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit euklidischem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Gegeben seien die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}.$$

Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren auf die drei Vektoren an. Was passiert im dritten Schritt des Gram-Schmidt Verfahrens? Erklären Sie die Ursache für das beobachtete Verhalten der Orthogonalisierung.

Lösung. Wir wählen

$$o_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir o_2, welcher orthogonal zu o_1 ist.

$$o_2 = v_2 - \frac{\langle o_1, v_2 \rangle}{\langle o_1, o_1 \rangle} o_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den letzten Vektor o_3, welcher orthogonal zu o_1 und o_2, berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} o_3 &= v_3 - \frac{\langle o_1, v_3 \rangle}{\langle o_1, o_1 \rangle} o_1 - \frac{\langle o_2, v_3 \rangle}{\langle o_2, o_2 \rangle} o_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{10}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im dritten Schritt wird versucht, den dritten Vektor v_3 orthogonal zu den ersten beiden Vektoren o_1, o_2 zu stellen. Da die Ausgangsvektoren jedoch linear abhängig sind, erzeugen diese nur einen zwei-dimensionalen Vektorraum. Somit kann der dritte Vektor nicht in die dritte Dimension hineingehen. Folglich ergibt sich $(0,0,0)^T$. Daraus folgt auch die Bedingung, dass alle Ausgangsvektoren für das Gram-Schmidt- Verfahren linear unabhängig sein müssen.

Aufgabe 7. (ε-N-Kriterium)

a) Geben Sie die Definition der Konvergenz einer Folge durch das ε-N-Kriterium an.

b) Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ zwei konvergente reelle Folgen mit den entsprechenden Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie anhand des ε- N-Kriteriums, dass die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \lambda(a_n + b_n)$ für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert $\lambda(a+b)$ konvergiert.

Lösung.

a) Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt konvergent, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Man nennt a Limes oder Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ und schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. Man sagt auch, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen a konvergiert. Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann exisitieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ für die gilt

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N_1 \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N_2.$$

Wählen wir nun $N = \max\{N_1, N_2\}$ und $n \geq N$ beliebig. Daraus folgt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

wobei wir beim Schritt $\leq$ die aus der Vorlesung bekannte Dreiecksungleichung genutzt haben. Sei nun noch $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass $\lambda(a_n + b_n)$ gegen $\lambda(a + b)$ konvergiert, d.h. wir müssen zeigen, dass $|\lambda(a_n + b_n) - \lambda(a + b)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ $(N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N})$ gilt:

$$\begin{aligned} |\lambda(a_n + b_n) - \lambda(a + b)| < \varepsilon &\iff |\lambda((a_n + b_n) - (a + b))| < \varepsilon \\ &\iff |\lambda| \cdot |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Sei nun zunächst $\lambda \neq 0$ (den Fall sehen wir uns danach an). Dann können wir weiter umformen zu $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Da $|(a_n + b_n) - (a + b)|$ gegen 0 konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ für alle $n \geq N$ ist. Für den Fall $\lambda = 0$ ist $\lambda(a_n + b_n) = 0 \cdot (a_n + b_n) = 0$, also auch $\lim_{n\to\infty} \lambda(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Insgesamt konvergiert also die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ gegen den Grenzwert $\lambda(a + b)$.