

Selbstrechenübung 7

Student: *Joshua Feld, 406718*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*

Aufgabe 1. (Konvergenz von Reihen)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\binom{2k}{k} \right]^{-1}$

Hinweis: Bei b) kann verwendet werden, dass $(1 + \frac{1}{k})^k$ gegen e konvergiert.

Lösung.

Aufgabe 2. (Potenzreihe)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$ konvergiert. Verwenden Sie für die Untersuchung einmal das Quotientenkriterium und einmal das Wurzelkriterium. Erhalten Sie jeweils den gleichen Konvergenzradius?

Lösung.

Aufgabe 3. (Lineare Abbildung)

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Worauf wird der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ abgebildet?

b) Geben Sie eine Darstellung von Kern und Bild der Abbildung f an und bestimmen Sie jeweils die Dimension.

Hinweis: Nutzen Sie die Linearität der Abbildung aus.

Lösung.**Aufgabe 4. (Lineare Abbildungen)**

Prüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $L_i : V \rightarrow W$, $i = 1, \dots, 4$ linear sind und bestimmen sie ggf. ihren Kern und Bild sowie deren Dimensionen.

- a) $L_1 : x \mapsto 5x - 1$, $V = W = \mathbb{R}$
- b) $L_2 : x \mapsto 0$, $V = W = \mathbb{R}$
- c) $L_3 : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$, $V = W = \mathbb{R}^2$
- d) $L_4 : (x, y, z) \mapsto (z, y, 0)$, $V = W = \mathbb{R}^3$

Lösung.