RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Selbstrechenübung 4

Student: *Joshua Feld, 406718*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*

Aufgabe 1. (Komplexe Zahlen)

Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und in Polarkoordinaten, d.h. in der Form $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ Bestimmen Sie dazu den Betrag r und das Argument φ von z exakt in $(-\pi, \pi]$.

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$$

Lösung. Wir wollen zunächst den Bruch ohne den Exponenten vereinfachen. Dazu multiplizieren wir diesen mit dem komplexen Konjugat des Nenners:

$$\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-i}{1} = -i.$$

Folglich können wir $z = (-i)^5$ schreiben. Wir wenden nun die Exponentenregel an, die besagt, dass $(-a)^n = -a^n$ gilt, falls n ungerade ist. Somit gilt insgesamt

$$z = -i^5 = -i.$$

Um φ zu bestimmen benötigen wir zunächst noch den Betrag von z. Dieser ist

$$r = |z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1.$$

Nun können wir φ wie folgt bestimmen:

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \iff 0 = \cos(\varphi) \iff \varphi = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Aufgabe 2. (Komplexe Zahlen)

a) Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$w_1 = \frac{2}{1-3i}, \quad w_2 = \frac{1}{i}, \quad w_3 = \frac{1+it}{1-it} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

b) Berechnen Sie den Betrag von $z = \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$.

c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| \leq 1$? Skizzieren Sie die Lösungsmenge in der komplexen Ebene.

d) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $\Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \geq 0$? Skizzieren Sie die Lösungsmenge in der komplexen Ebene.

Lösung.

a) Wir multiplizieren zunächst den Zähler und den Nenner von w_1 mit dem komplexen Konjugat des Nenners, um diesen zu eliminieren:

$$\frac{2}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{2(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2(1+3i)}{1-3i+3i+(3i)^2} = \frac{2(1+3i)}{10}.$$

Wir können nun den gemeinsamen Faktor 2 rauskürzen und erhalten

$$\frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i,$$

d.h. es gilt $\Re(w_1) = \frac{1}{5}$ und $\Im(w_1) = \frac{3}{5}$.

Wir multiplizieren wieder mit dem komplexen Konjugat und erhalten

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i(-i)} = \frac{-i}{1} = -i.$$

Somit ist $\Re(w_2) = 0$ und $\Im(w_2) = -1$.

Wir multiplizieren erneut mit dem komplexen Konjugat und erhalten

$$\frac{1+it}{1-it} \cdot \frac{1+it}{1+it} = \frac{(1+it)(1+it)}{(1-it)(1+it)} = \frac{1-t^2+2it}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+1}i,$$

also $\Re(w_3) = \frac{1-t^2}{t^2+1}$ und $\Im(w_3) = \frac{2t}{t^2+1}$.

b) Wir definieren zunächst vier neue komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{C}$ mit

$$z_1 = 3+4i, \quad z_2 = -1+2i, \quad z_3 = -1-i, \quad z_4 = 3-i.$$

Nun können wir den Betrag von z berechnen mit

$$|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3| \cdot |z_4|} = \sqrt{\frac{(3^2+4^2)\left((-1)^2+2^2\right)}{\left((-1)^2+(-1)^2\right)\left(3^2+(-1)^2\right)}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 5}{2 \cdot 10}} = \sqrt{\frac{125}{20}} = \frac{5}{2}.$$

c) Seien $x := \Re(z), y := \Im(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Wir berechnen zunächst $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$:

$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \left|\frac{x+iy+i}{x+iy-i}\right| = \left|\frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i}\right| = \sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}}.$$

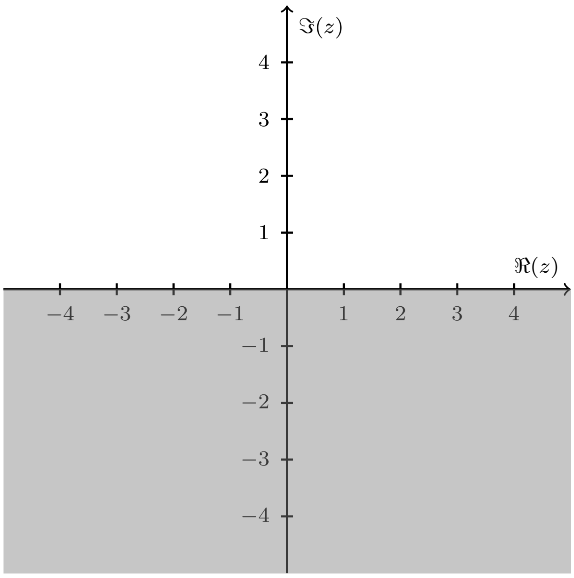
Für $c \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ gilt somit

$$\begin{aligned}\left|\frac{z+i}{z-i}\right| \leq 1 \iff \sqrt{\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}} \leq 1 &\iff \frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2} \leq 1 \\ &\iff x^2+(y+1)^2 \leq x^2+(y-1)^2 \iff (y+1)^2 \leq (y-1)^2 \\ &\iff y^2+2y+1 \leq y^2-2y+1 \iff 4y \leq 0 \iff y \leq 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Lösungsmenge

$$M := \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z+i}{z-i}\right| \leq 1\right\} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \leq 0\}.$$

In der komplexen Zahlenebene sieht die Menge wie folgt aus:



d) Seien $x := \Re(z), y := \Im(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Wir wollen nun $\Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ für $z \neq 1$ $(z \in \mathbb{C})$ berechnen. Es gilt

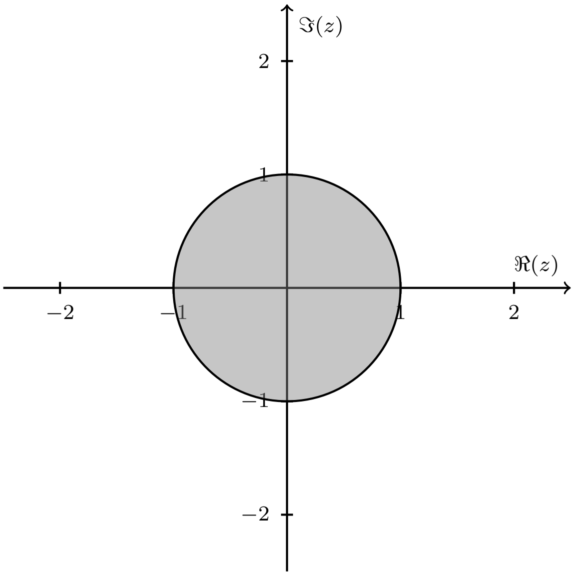
$$\begin{aligned}\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} &= \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2} \\ &= \frac{1-x^2+(1+x+1-x)yi-y^2}{(1-x)^2+y^2} \\ &= \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} + \frac{2y}{(1-x)^2+y^2} \cdot i,\end{aligned}$$

also $\Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ gilt

$$\begin{aligned}\Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \geq 0 \iff 1-x^2-y^2 \geq 0 &\iff 1 \geq x^2+y^2 \\ &\iff 1 \geq |z|^2 \iff 1 \geq |z|.\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Lösungsmenge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} : \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \geq 0 \right\} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 1, |z| \leq 1\}.$$



Aufgabe 3. (Unterräume)

Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen Unterräume der jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume V sind:

a) $U = \{a, b \in \mathbb{Z} : (a+b, 3a-b, 2a+b)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

b) $U = \{a, b \in \mathbb{R} : (a+b, 3a-b, 2a+b)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

c) $U = \{a, b \in \mathbb{R} : (a+b, 3a-b, 2a+b+1)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

d) $U = \{a, b \in \mathbb{R} : (a+b, 3a-b, 2a+b, a)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$

Lösung.

a) Sei $a = 1$ und $b = 0$. Dann ist $(1, 2, 3) \in U$. Sei nun $\lambda = \frac{1}{2}$. Dann gilt

$$\lambda \cdot (1, 2, 3) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right) \notin U,$$

denn es es existieren keine zwei ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $a + b = \frac{1}{2}$. Folglich ist U kein Unterraum von V.

b) Es gilt $U \subset V$ und $0 \in U$ offensichtlich mit $a = b = 0$. Seien nun

$$v = (a_1 + b_1, 3a_1 - b_1, 2a_1 + b_1), \quad w = (a_2 + b_2, 3a_2 - b_2, 2a_2 + b_2) \in U$$

und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (v + w) &= \lambda \cdot (a_1 + b_1 + a_2 + b_2, 3a_1 - b_1 + 3a_2 - b_2, 2a_1 + b_1 + 2a_2 + b_2) \\ &= \lambda \cdot (a' + b', 3a' - b', 2a' + b') \quad \text{mit } a' = a_1 + a_2 \text{ und } b' = b_1 + b_2 \\ &= (a + b, 3a - b, 2a + b) \in U \quad \text{mit } a = \lambda a' \text{ und } b = \lambda b' \end{aligned}$$

Da U abgeschlossen ist im Bezug auf Addition und Multiplikation mit Skalaren, ist U ein Unterraum von V.

c) Falls U ein Unterraum von V ist, muss U den Nullvektor enthalten. In anderen Worten, wir müssten $a, b \in \mathbb{R}$ finden, so dass

$$a + b = 0, \quad 3a - b = 0, \quad 2a + b + 1 = 0.$$

Allerdings folgt aus den ersten zwei Gleichungen $a = b = 0$, was die dritte Gleichung nicht erfüllt. Daraus schließen wir, dass U kein Unterraum von V ist.

d) U ist offensichtlich kein Unterraum von V, denn $U \subset \mathbb{R}^4$ aber $V = \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4. (Parallelogrammidentität)

a) Gegeben sei ein Vektorraum V in dem ein Skalarprodukt definiert ist mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in V$. Beweisen Sie die Parallelogrammidentität

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

b) Gilt in einem normierten Vektorraum die Parallelogrammidentität, so existiert ein Skalarprodukt welches die Norm erzeugt:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Beweisen Sie diese Aussage.

Lösung.

a) Wir können die Parallelogrammidentität mit simplen Umformungen direkt zeigen:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle \\
&= \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle + \langle x, x - y\rangle - \langle y, x - y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle \\
&\quad - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).
\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der Polarisationsformel wählen wir

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big).$$

Es bleibt zu zeigen, dass dies ein Skalarprodukt definiert. Die Symmetrie, Definitheit und Nichtnegativität ist klar, da das Skalarprodukt durch eine Norm definiert ist. Es bleibt die Bilinearität

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle,$$

$$\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$$

zu zeigen. Es gilt unter Verwendung der Parallelogrammgleichung:

$$\begin{aligned}
&\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2-\|x_1+y\|^2-\|x_2+y\|^2+\|x_1-y\|^2+\|x_2-y\|^2\\
&=\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2-\|x_1+y\|^2-\|x_2\|^2-\|x_2+y\|^2-\|x_1\|^2\\
&\quad+\|x_1-y\|^2+\|x_2\|^2+\|x_2-y\|^2+\|x_1\|^2\\
&=\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1+x_2-y\|^2\\
&\quad-\frac{1}{2}\big(\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_1-x_2+y\|^2\big)-\frac{1}{2}\big(\|x_1+x_2+y\|^2-\|x_2-x_1+y\|^2\big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\big(\|x_1+x_2-y\|^2-\|x_1-x_2+y\|^2\big)-\frac{1}{2}\big(\|x_1+x_2-y\|^2-\|x_2-x_1+y\|^2\big)\\
&=0
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Additivität gezeigt. Es bleibt die Aussage

$$\|\alpha x+y\|^2-\|\alpha x-y\|^2=\alpha\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big)$$

zu beweisen. Wir setzen in der vorherigen Rechnung $x=x_1=x_2$, somit haben wir

$$\|2x+y\|^2-\|2x-y\|^2=2\big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\big)$$

bewiesen. Dann können wir die obige Aussage induktiv für alle $\alpha\in\mathbb{N}$ beweisen. Wegen

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=n\Big(\big\|n^{-1}x+y\big\|^2-\big\|n^{-1}x-y\big\|^2\Big),\quad n\in\mathbb{N}$$

können wir die Aussage für alle $q\in\mathbb{Q}_{>0}$ folgern. Dank der Additivität gilt die Aussage auf $q\in\mathbb{Q}$. Da die rationalen Zahlen dicht in der Menge der reellen Zahlen liegen, folgt die Behauptung.