RWTH AACHEN UNIVERSITY
CENTER FOR COMPUTATIONAL ENGINEERING SCIENCE

Hausaufgabenübung 7

Studenten: *Joshua Feld, 406718*   *Jeff Vogel, 407758*   *Henrik Herrmann, 421853*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*
Abgabefrist: *21. Dezember, 2020*

Aufgabe 1. (Konvergente Reihe und Potenzreihen)

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n + 7}{3^n}, \quad i\text{: komplexe Einheit.}$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n^n}.$$

Lösung.

Aufgabe 2. (Konvergenz von Reihen)

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^{k+1}}{2^k}.$$

Zeigen Sie, dass man mittels des Majorantenkriteriums und mittels des Wurzelkriteriums die Konvergenz der Reihe zeigen kann, jedoch nicht mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Bestimmen Sie anschließend den Wert der Reihe.
Hinweis: *Es gilt für $a > 0$: $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n \to \infty} 1$.*

Lösung.

Aufgabe 3. (Stetigkeit)

Seien $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen

a) $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$.

b) $$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Stetigkeit der Funktionen f und g im Nullpunkt.

Lösung.

Aufgabe 4. (Lineare Abbildung)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an. Geben Sie für die linearen Abbildungen den Kern der Abbildung und dessen Dimension an.

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad f_1(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ x-3 \end{pmatrix}$

b) $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$

c) $f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_3 x_4 \end{pmatrix}$

d) $f_4 : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3 \quad f_4(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$

Lösung.