RWTH Aachen University
Aachener Verfahrenstechnik

Übung 5

Student: *Joshua Feld, 406718*

Kurs: *Material- und Stoffkunde* – Professor: *Prof. Dr. Gebhardt*

Aufgabe 1. (Newtonsches Gesetz des Abkühlens)

Eine zylindrische Tasse mit Höhe 12 cm und Durchmesser 10 cm ist randvoll mit Kaffee bei einer Temperatur von 90°C. Um eine Trinktemperatur von 60°C zu erreichen wird die Tasse in einer Umgebung mit einer Temperatur von 20°C abgestellt. Nach 5 min hat der Kaffee eine Temperatur von 70°C.

a) Berechnen Sie die Kühlrate k_0 nach dem Newtonschen Gesetz des Abkühlens.

b) Bestimmen Sie die Zeit, nach der der Kaffee die gewünschte Temperatur hat.

c) Nehmen Sie an, die Kühlrate ließe sich durch Anpusten der Tasse mit eine Strömungsgeschwindigkeit v nach dem Ansatz

$$k = k_0\left(1 + \frac{v}{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\right)$$

erhöhen. Welche Strömungsgeschwindigkeit muss erreicht werden, damit der Kaffee bereits nach 5 min die gewünschte Temperatur hat?

Lösung.

a) Gegeben sind die Umgebungstemperatur $\Theta_a = 20°\mathrm{C}$, die Anfangstemperatur $\Theta_0 = 90°\mathrm{C}$ und die Temperatur $\Theta(t_1) = 70°\mathrm{C}$ nach $t_1 = 5\,\mathrm{min}$. Mit dem Newtonschen Gesetz des Abkühlens ergibt sich

$$T(t_1) = T_a + (T_0 - T_a)\exp(-k_0 t_1)$$

und nach Umformen

$$k_0 = -\frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{T(t_1) - T_a}{T_0 - T_a}\right) = -\frac{1}{5\,\mathrm{min}}\ln\left(\frac{70°\mathrm{C} - 20°\mathrm{C}}{90°\mathrm{C} - 20°\mathrm{C}}\right) = 0{,}0673\,\frac{1}{\mathrm{min}}.$$

b) Gegeben sind die Umgebungstemperatur $\Theta_a = 20°\mathrm{C}$, die Anfangstemperatur $\Theta_0 = 90°\mathrm{C}$ und die gewünschte Temperatur $\Theta(t_2) = 60°\mathrm{C}$. Mit dem Newtonschen Gesetz des Abkühlens ergibt sich

$$T(t_2) = T_a + (T_0 - T_a)\exp(-k_0 t_2)$$

und nach Umformen

$$t_2 = -\frac{1}{k_0}\ln\left(\frac{T(t_2) - T_a}{T_0 - T_a}\right) = -\frac{1}{0{,}0673\,\frac{1}{\mathrm{min}}}\ln\left(\frac{60°\mathrm{C} - 20°\mathrm{C}}{90°\mathrm{C} - 20°\mathrm{C}}\right) = 8{,}315\,\mathrm{min}.$$

c) Gegeben sind die Umgebungstemperatur $\Theta_a = 20°\text{C}$, die Anfangstemperatur $\Theta_0 = 90°\text{C}$ und die Temperatur $\Theta(t_3) = 60°\text{C}$ nach $t_3 = 5\,\text{min}$. Analog zur ersten Teilaufgabe kann die Kühlrate bestimmt werden zu

$$k = -\frac{1}{t_3}\ln\left(\frac{T(t_3) - T_a}{T_0 - T_a}\right) = -\frac{1}{5\,\text{min}}\ln\left(\frac{60°\text{C} - 20°\text{C}}{90°\text{C} - 20°\text{C}}\right) = 0{,}1192\,\frac{1}{\text{min}}.$$

Es folgt für die Strömungsgeschwindigkeit

$$v = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(\frac{k}{k_0} - 1\right) = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\left(\frac{0{,}1192\,\frac{1}{\text{min}}}{0{,}0673\,\frac{1}{\text{min}}} - 1\right) = 0{,}663\,\frac{1}{\text{min}}.$$

Aufgabe 2. (Revision: Erwärmung von Brokkoli)

Im Betrieb produziert ein Computerprozessor eine Wärmeleistung von 35 W. Die Oberfläche des Prozessors beträgt $16\,\text{cm}^2$. Im Folgenden soll die Prozessortemperatur berechnet werden, die sich einstellt, wenn keine Kühllösung zum Einsatz kommt.

a) Berechnen Sie die Prozessortemperatur, wenn die Umgebungstemperatur 20°C beträgt und der Wärmeübergang zwischen der Prozessoroberfläche und Luft durch einen Wärmeübergangskoeffizienten von $8\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}}$ gegeben ist. Vernachlässigen Sie dabei den Einfluss von Wärmestrahlung.

b) Berechnen Sie die Prozessortemperatur unter der ausschließlichen Betrachtung von Wärmestrahlung und einem Emissionsgrad $\varepsilon = 0{,}9$ der Prozessoroberfläche. Vernachlässigen Sie den Einfluss von eingehender Wärmestrahlung.

Lösung.

a) Gegeben sind der Wärmestrom $\dot{Q} = 35\,\text{W}$, die Umgebungstemperatur $\Theta_a = 20°\text{C}$, der Wärmeübergangskoeffizient $h = 8\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}}$ und die Prozessoroberfläche $A = 16\,\text{cm}^2$. Da ausschließlich Wärmeleistung betrachtet wird, gilt für den Wärmestrom

$$\dot{Q} = hA(\Theta - \Theta_a).$$

Aufgelöst nach der Prozessortemperatur Θ ergibt sich

$$T = \frac{\dot{Q}}{hA} + \Theta_a = \frac{35\,\text{W}}{8\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}} \cdot 16\,\text{cm}^2} + 20°\text{C} = 2\,764{,}38°\text{C}.$$

b) Gegeben sind der Wärmestrom $\dot{Q} = 35\,\text{W}$, die Umgebungstemperatur $\Theta_a = 20°\text{C}$, der Emissionsgrad $\varepsilon = 0{,}9$ und die Prozessoroberfläche $A = 16\,\text{cm}^2$. Da ausschließlich Wärmestrahlung betrachtet wird, gilt für den Wärmestrom

$$\dot{Q} = \varepsilon\sigma A T^4.$$

Aufgelöst nach der Prozessortemperatur T ergibt sich

$$T = \left(\frac{\dot{Q}}{\varepsilon\sigma A}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{35\,\text{W}}{0{,}9 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2\,\text{K}^4} \cdot 16\,\text{cm}^2}\right)^{\frac{1}{4}} = 809{,}15\,\text{K}.$$

Aufgabe 3. (Wärmekapazität von Gasen)

Um die Temperatur von Computerprozessoren im Betrieb gering zu halten (unter 80°C) wird häufig passive Luftkühlung eingesetzt. Dabei wird ein Kühlkörper mit großer Oberfläche in Form von Kühlrippen auf den Prozessor aufgesetzt um die effektive Kühloberfläche zu erhöhen. Im Folgenden wird ein Kupferkühlkörper der Masse 1 kg betrachtet. Die Umgebungstemperatur beträgt 20°C. Nehmen Sie an, dass die Wärmeleistung in Kupfer ausreichend schnell abläuft und dass die Prozessortemperatur näherungsweise der Oberflächentemperatur des Kühlkörpers entspricht. Gehen Sie wie in Aufgabe 2 von einem Wärmeübergangskoeffizienten von $8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$ aus.

a) Berechnen Sie für den Prozessor aus Aufgabe 2 die benötigte Kühlkörperoberfläche damit eine Temperatur von 80°C nicht überschritten wird.

b) Berechnen Sie die Kühlrate des Kühlkörpers nach dem Newtonschen Gesetz des Abkühlens, die das Abkühlen nach dem Betrieb beschreibt.

c) Wie lange dauert es bis der Kühlkörper nach dem Betrieb bei 80°C auf 40°C abgekühlt ist?

Lösung.

a) Gegeben sind der Wärmestrom $\dot{Q} = 35\,\mathrm{W}$, die Umgebungstemperatur $T_a = 20$°C, die Prozessortemperatur $T = 80$°C und der Wärmeübergangskoeffizient $h = 8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}}$. Wir erwarten, dass die Wärmeübertragung aufgrund des Kühlkörpers von Wärmeleistung dominiert wird und dass der Einfluss von Wärmestrahlung zu vernachlässigen ist. Dann ergibt sich für den Wärmestrom

$$\dot{Q} = hA(T - T_a)$$

und somit für die Kühloberfläche

$$A = \frac{\dot{Q}}{h(T - T_a)} = \frac{35\,\mathrm{W}}{8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K}} \cdot 60\,\mathrm{K}} = 0{,}0729\,\mathrm{m}^2.$$

b) Nach dem Newtonschen Gesetz des Abkühlens gilt

$$\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,t} = -k(T - T_a). \tag{1}$$

Wir nehmen an, dass der Abkühlvorgang von Wärmeleistung dominiert wird. Damit gilt

$$\frac{\mathrm{d}\,Q}{\mathrm{d}\,t} = -hA(T - T_a). \tag{2}$$

Die Wärmekapazität von Kupfer bei 298 K kann der Tabelle aus dem Vorlesungsumdruch mit dem Wert

$$c_p = 0{,}383\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g\,K}}$$

entnommen werden. Nehmen wir an, dass diese konstant mit der Temperatur ist, folgt für die innere Energie des Kühlkörpers

$$Q = c_p m T.$$

Somit lässt sich Gleichung (2) umformen zu

$$\frac{\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{hA}{c_p m}(T - T_a).$$

Durch Vergleich mit Gleichung (1) folgt

$$k = \frac{hA}{mc_p} = \frac{8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{K}} \cdot 0{,}0729\,\mathrm{m}^2}{1\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}383\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}\,\mathrm{K}}} = 0{,}00152\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

c) Nach dem Newtonschen Gesetz des Abkühlens ergibt sich

$$T(t) = T_a + (T_0 + T_a)\exp(-kt)$$

mit der Kühlrate aus der vorherigen Teilaufgabe. Durch Umformen nach der Kühlzeit ergibt sich

$$t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T(t) - T_a}{T_0 - T_a}\right) = -\frac{1}{0{,}00152\,\frac{1}{\mathrm{s}}}\ln\left(\frac{40°\mathrm{C} - 20°\mathrm{C}}{80°\mathrm{C} - 20°\mathrm{C}}\right) = 723\,\mathrm{s}.$$