RWTH Aachen University
Lehrstuhl für computergestützte Analyse technischer Systeme

Vorrechenübung 1

Student: *Joshua Feld, 406718*

Kurs: *Mechanik I* – Professor: *Prof. Dr. Behr*

Aufgabe 1. (Kinetische Energie)

Wenn sich ein starrer Körper der Masse m in der Ebene bewegt, wird seine kinetische Energie (E_k) über die Gleichung

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mk^2\omega^2$$

beschrieben. Hierbei sind v die Geschwindigkeit am Schwerpunkt, k eine Konstante und ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers (Einheit $[T]^{-1}$). Bestimmen Sie die Einheiten von E_k und k im $[MLT]$-System.

Lösung. Die folgenden Einheiten sind bekannt:

$$[m] = [M], \quad [v] = \left[\frac{L}{T}\right], \quad [\omega] = \left[\frac{1}{T}\right].$$

Betrachten wir zunächst nur den ersten Teil der Gleichung, also $\frac{1}{2}mv^2$. Dafür ergibt sich dann direkt

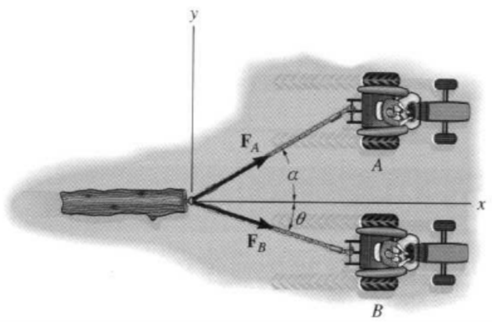
$$[E_k] = [m][v]^2 + \ldots = [M]\left[\frac{L}{T}\right]^2 = \left[M\frac{L^2}{T^2}\right]$$

Nun betrachten wir den zweiten Teil:

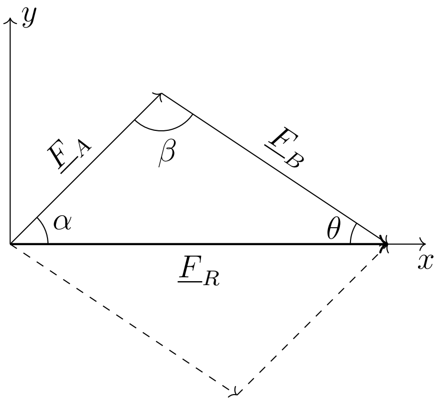
$$[E_k] = \ldots + [m][k]^2[\omega]^2 \iff \left[M\frac{L^2}{T^2}\right] = [M][k]^2\left[\frac{1}{T}\right]^2 \iff [k]^2 = [L]^2 \iff [k] = [L]$$

Aufgabe 2. (Traktoren)

Ein Baumstamm wird von zwei Traktoren A und B gezogen. Bestimme den Betrag und die Richtung der beiden Zugkräfte F_A und F_B. Die resultierende Kraft soll entlang der x-Achse wirken. Gegeben ist $F_R = 10\,\text{kN}$, $\theta = 15°$ und $\alpha = 30°$.



Lösung. Aus der Aufgabenstellung erhalten wir $F_R = |F_R| = 10\,\mathrm{kN}$, $\theta = 15°$ und $\alpha = 30°$. Wir wollen nun die Kräfte, die durch die Vektoren erzeugt werden, $\underline{F}_A$ und $\underline{F}_B$, berechnen. Wir kennen die resultierende Kraft, also gilt $\underline{F}_R = \underline{F}_A + \underline{F}_B$. Wir betrachten nun eine Skizze:



Nach dem aus der Vorlesung bekannten Sinussatz gilt

$$\frac{F_R}{\sin\beta} = \frac{F_A}{\sin\theta} = \frac{F_B}{\sin\alpha},$$

also $\underline{F}_A = \underline{F}_R \frac{\sin\theta}{\sin\beta} = 3{,}66\,\mathrm{kN}$ und $\underline{F}_B = \underline{F}_R \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 7{,}07\,\mathrm{kN}$. Wir müssen nun noch die Richtung der Kräfte bestimmen. Im Allgemeinen gilt für einen Kraftvektor $\underline{A} = |\underline{A}| \cdot \underline{\lambda}_A$, mit $|\underline{\lambda}_A| = 1$; in unserem Fall also $\underline{F}_A = |\underline{F}_A| \cdot \underline{\lambda}_A$ und $\underline{F}_B = |\underline{F}_B| \cdot \underline{\lambda}_B$. Es gilt

$$\cos\alpha = \frac{\lambda_{Ax}}{|\underline{\lambda}_A|} \iff \lambda_{Ax} = \underbrace{|\underline{\lambda}_A|}_{=1} \cdot \cos\alpha = \cos\alpha = \cos 30°,$$

$$\sin\alpha = \frac{\lambda_{Ay}}{|\underline{\lambda}_A|} \iff \lambda_{Ay} = |\underline{\lambda}_A| \cdot \sin\alpha = \sin\alpha = \sin 30°,$$

also $\underline{F}_A = F_A \begin{pmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{pmatrix}$ und

$$\cos\theta = \frac{\lambda_{Bx}}{|\underline{\lambda}_B|} \iff \lambda_{Bx} = \underbrace{|\underline{\lambda}_B|}_{=1} \cdot \cos\theta = \cos\theta = \cos 15°,$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda_{By}}{|\underline{\lambda}_B|} \iff \lambda_{By} = |\underline{\lambda}_B| \cdot \sin\theta = \sin\theta = \sin 15°,$$

also $\underline{F}_B = F_B \begin{pmatrix} \cos 15° \\ \sin 15° \end{pmatrix}$. Dies können wir nun noch überprüfen mithilfe der Vektoraddition von $\underline{F}_A$ und $\underline{F}_B$:

$$\underline{F}_R = \underline{F}_A + \underline{F}_B = F_A \begin{pmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{pmatrix} + F_B \begin{pmatrix} \cos 15° \\ \sin 15° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\,\mathrm{kN} \\ 0\,\mathrm{kN} \end{pmatrix}.$$