RWTH Aachen University
Center for Computational Engineering Science

Selbstrechenübung 5

Student: *Joshua Feld, 406718*

Kurs: *Mathematische Grundlagen I* – Professor: *Prof. Dr. Torrilhon & Prof. Dr. Stamm*

Aufgabe 1. (Konvergenz von Folgen)

Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten folgender Folgen für $n \to \infty$ und begründen Sie Ihre Antwort:

a) $a_n := \frac{(2n+x)^4}{xn^4-5n^3+6}$, für $x = 0$ und $x \neq 0$

b) $b_n := \left(\frac{2n}{2n-2}\right)^n$

Lösung.

a) Wir formulieren zunächst die Folgenglieder um:

$$a_n = \frac{(2n+x)^4}{xn^4 - 5n^3 + 6} = \frac{2n^4 \cdot \left(1 + \frac{x}{2n}\right)}{n^4 \cdot \left(x - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^4}\right)} = \frac{16\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^4}{x - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^4}}.$$

Für $x = 0$ divergiert die Folge: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Für alle anderen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{16}{x}$, denn

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{2n}\right)^4 = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{5}{n} + \frac{6}{n^4}\right) = x$$

b) Bringt man den Ausdruck auf die Form

$$b_n = \left(\frac{2n}{2n-2}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (ε-N-Kriterium)

a) Geben Sie die Definition der Konvergenz einer Folge durch das ε-N-Kriterium an.

b) Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ zwei konvergente reelle Folgen mit den entsprechenden Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie anhand des ε-N-Kriteriums, dass die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \lambda(a_n + b_n)$ für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert $\lambda(a + b)$ konvergiert.

Lösung.

a) Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt konvergent, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Man nennt a Limes oder Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ und schreibt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. Man sagt auch, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen a konvergiert. Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann exisitieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ für die gilt

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq N_1 \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n \geq N_2.$$

Wählen wir nun $N = \max\{N_1, N_2\}$ und $n \geq N$ beliebig. Daraus folgt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

wobei wir beim Schritt $\leq$ die aus der Vorlesung bekannte Dreiecksungleichung genutzt haben. Sei nun noch $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass $\lambda(a_n + b_n)$ gegen $\lambda(a + b)$ konvergiert, d.h. wir müssen zeigen, dass $|\lambda(a_n + b_n) - \lambda(a + b)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ ($N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\begin{aligned} |\lambda(a_n + b_n) - \lambda(a + b)| < \varepsilon &\iff |\lambda((a_n + b_n) - (a + b))| < \varepsilon \\ &\iff |\lambda| \cdot |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Sei nun zunächst $\lambda \neq 0$ (den Fall sehen wir uns danach an). Dann können wir weiter umformen zu $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. Da $|(a_n + b_n) - (a + b)|$ gegen 0 konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ für alle $n \geq N$ ist. Für den Fall $\lambda = 0$ ist $\lambda(a_n + b_n) = 0 \cdot (a_n + b_n) = 0$, also auch $\lim_{n\to\infty} \lambda(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Insgesamt konvergiert also die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ gegen den Grenzwert $\lambda(a + b)$.

Aufgabe 3. (Lineare Anhängigkeit)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2a \\ b \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass für $b \neq 0$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 immer linear unabhängig sind.

b) Finden Sie für $b = 0$ ein $a \in \mathbb{R}$, so dass v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind.

Lösung.

Aufgabe 4. (Vorbereitung zur Gram-Schmidt Orthogonalisierung)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit euklidischem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Gegeben seien außerdem die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie zuerst die Projektion $\tilde{v_2}$ von v_2 auf v_1. Berechnen Sie nun die zu v_1 orthogonale Komponente von v_2 und bezeichnen Sie diese als u_2. Überprüfen Sie anschließend, ob u_2 tatsächlich orthogonal zu v_1 ist.

b) Berechnen Sie die Projektion von v_3 auf die Vektoren v_1, v_2 sowie u_2. Berechnen Sie nun die zu v_1 und u_2 orthogonale Komponente von v_3 und bezeichnen Sie diese als u_3. Überprüfen Sie wiederum, ob u_3 tatsächlich orthogonal zu v_1 und u_2 ist.

Lösung.

a) Bestimme zunächst die Projektion von v_2 auf v_1:

$$\tilde{v_2} = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{11}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die orthogonale Komponente u_2 ist gegeben durch die Differenz von v_2 und $\tilde{v_2}$:

$$u_2 = v_2 - \tilde{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{11}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Durch Nachrechnen sehen wir, dass

$$\langle u_2, v_1 \rangle = \left\langle \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{25}(-24 + 24 + 0) = 0.$$

Somit ist u_2 orthogonal zu v_1.

b) Projektion von v_3 auf v_1:

$$\tilde{v_3} = \frac{\langle v_1, v_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Projektion von v_3 auf v_2:

$$\hat{v_3} = \frac{\langle v_2, v_3\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Projektion von v_3 auf u_2:

$$\tilde{u_2} = \frac{\langle u_2, v_3\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = \frac{\left\langle \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix}, \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} = \frac{29}{325} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Orthogonale Komponente u_3:

$$u_3 = v_3 - \tilde{u_2} - \tilde{v_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{29}{325} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} - \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -18 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Nachrechnen zeigt, dass u_3 orthogonal zu v_1 und u_2 ist:

$$\langle u_2, v_1\rangle = \left\langle \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 50 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{25} \cdot (96 + 54 - 150) = 0,$$

$$\langle u_3, v_1\rangle = \left\langle \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{13}(-36 + 36 + 0) = 0.$$