

Projeto 2 – FDTD 1D

A equação de onda escalar

George Alexandre Gantus
EESC e ICMC
Universidade de São Paulo
São Carlos - SP, Brasil
Email: georgegantus@usp.br

Renata Oliveira Brito
EESC e ICMC
Universidade de São Paulo
São Carlos - SP, Brasil
Email: renata.oliveira.brito@usp.br

Victor Felipe Domingues do Amaral
EESC e ICMC
Universidade de São Paulo
São Carlos - SP, Brasil
Email: victoramaral@usp.br

Abstract—Relatório final apresentado ao professor Leonardo André Ambrosio sobre uma das avaliações do SEL0612 - Ondas eletromagnéticas. Trabalhar com a equação de onda escalar e ganhar familiaridade com o método FDTD envolvendo equações diferenciais de segunda ordem.

I. INTRODUÇÃO

O objetivo deste projeto é trabalhar com a equação de onda escalar e ganhar familiaridade com o método FDTD envolvendo equações diferenciais de segunda ordem, para isso foram feitas as leituras dos capítulos 1 e 2 do livro [1] e então resolvemos os problemas de 2.4 a 2.11 do capítulo 2 do mesmo livro [1].

A. A equação de onda escalar

Uma onda é uma função do espaço e do tempo. A equação de onda escalar para uma função $u \equiv u(x, t)$ onde o meio é livre de fontes é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

onde v é a *velocidade da onda* ($v = \frac{\lambda}{T}$, sendo a razão entre um ciclo completo no espaço e um no tempo). Com isso temos que a equação (1) é uma equação diferencial de segunda ordem com derivadas parciais, a soma de duas soluções envolvendo ondas se propagando em direções opostas, *propagante* e *contrapropagante*, pode se considerar solução da equação ($u(x, t) = F^+(x, t) + G^-(x, t)$), temos então a seguinte solução:

$$u(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt), \quad (2)$$

onde F e G representam qualquer função de $x + vt$ e $x - vt$, respectivamente.

Considere uma solução contínua de onda propagante senoidal da seguinte forma

$$u(x, t) = e^{j(\omega t \mp kx)}, \quad (3)$$

A solução proposta em (3) é a representação complexa instantânea de uma onda plana uniforme de amplitude unitária, onde ω é a frequência angular em $[Hz]$ ou $[rad/s]$ e k é o número de onda em $[m^{-1}]$. A substituição de (3) em (1) nos

diz que $u(x, t) = e^{j(\omega t - kx)}$ é solução da equação de onda escalar com

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (4)$$

onde λ é o comprimento de onda em $[m]$ e f é a frequência em $[Hz]$.

B. Problema proposto 2.4:

Desenvolva resultados gráficos semelhantes aos da figura 1, mas para um fator de estabilidade de Courant $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

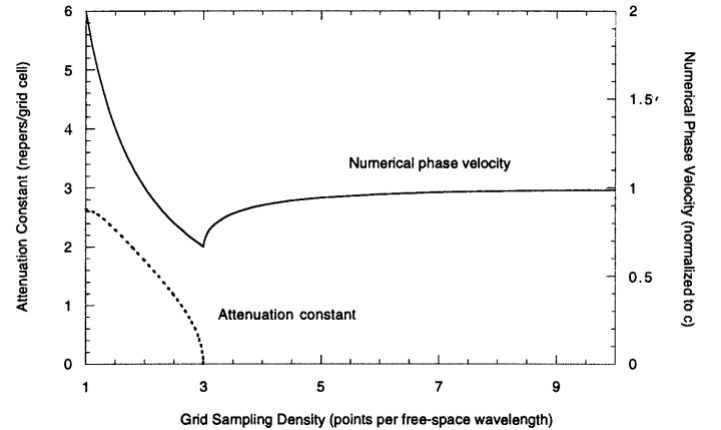


Fig. 1. Variação da velocidade da fase numérica normalizada \bar{v}_p/v e atenuação por célula da malha $\alpha\Delta x$ em função da densidade de amostragem da malha ($1 \leq N_\lambda \leq 10$) para um fator de estabilidade de Courant $S = 0,5$. Figura extraída da referência [1].

C. Problema proposto 2.5:

Replicar os resultados gráficos da figura (2).

D. Problema proposto 2.6:

Desenvolva os resultados gráficos semelhantes aos da figura (2), porém agora para um fator de estabilidade de Courant $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

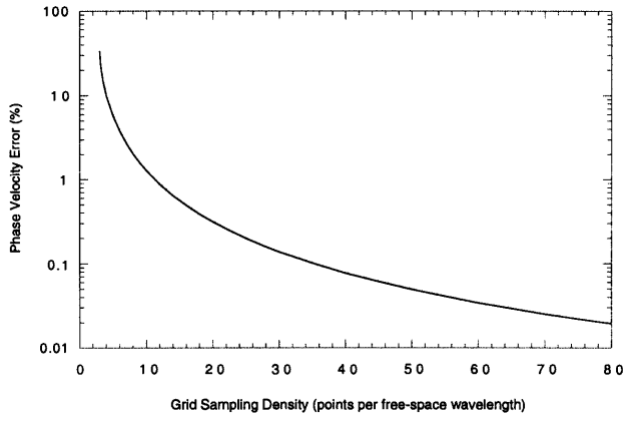


Fig. 2. Percentual de erro numérico de velocidade de fase em relação à velocidade da luz no espaço livre em função da densidade amostral da malha ($3 \leq N_\lambda \leq 80$) para um fator de estabilidade de Courant de $S = 0,5$. Figura extraída da referência [1].

E. Problema proposto 2.7:

Escreva um programa computacional que implemente a solução da onda escalar unidimensional. Para obter uma onda, especifique u_0^n na fronteira esquerda da malha. Teste o programa replicando os resultados gráficos das figuras (3) e (4), que mostram o efeito da dispersão numérica em um pulso retangular que se propaga no espaço livre para diferentes fatores de estabilidade de Courant, na figura (3) temos $S = 1$ (Δt igual ao passo mágico) e $S = 0,99$ (Δt apenas 1% abaixo do passo mágico), e na figura (4) temos $S = 1$ e $S = 0,5$ (Δt 50% abaixo do passo mágico).

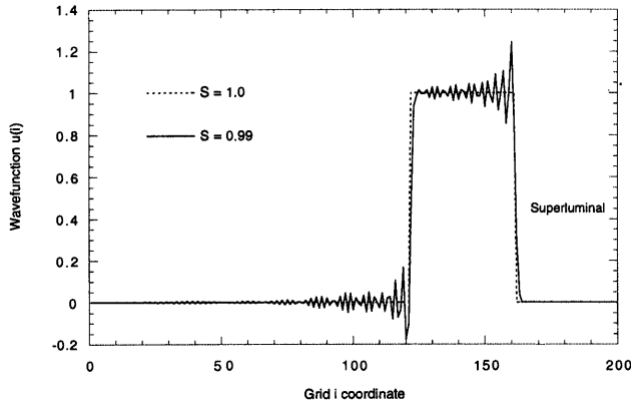


Fig. 3. Comparação da propagação do pulso calculado para $S = 1$ e $S = 0,99$. Figura extraída da referência [1].

F. Problema proposto 2.8:

Use o programa desenvolvido na subseção (I-E), para replicar os resultados gráficos das figuras (5) e (6), que mostram o efeito da dispersão numérica sobre um pulso Gaussiano propagando-se no espaço livre para diferentes fatores de estabilidade Courant: $S = 1$ (Δt igual ao passo mágico), $S = 0,99$ (Δt apenas 1% abaixo do passo mágico), e $S = 0,5$ (Δt 50% abaixo do passo mágico).

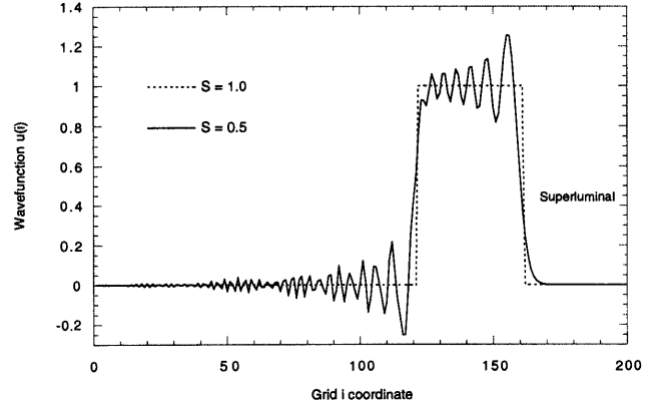


Fig. 4. Comparação da propagação do pulso calculado para $S = 1$ e $S = 0,5$. Figura extraída da referência [1].

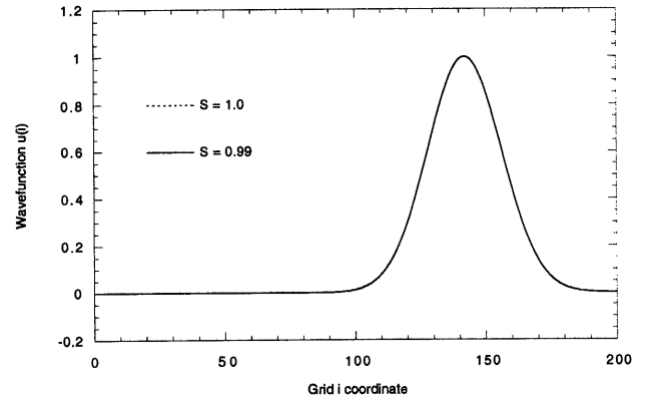


Fig. 5. Comparação da propagação do pulso calculado para $S = 1$ e $S = 0,99$. Figura extraída da referência [1].

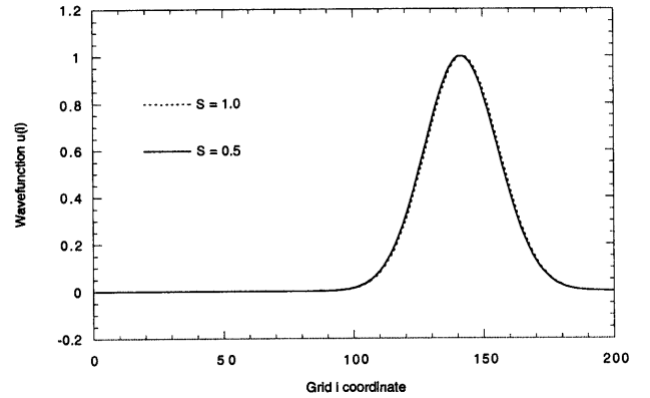


Fig. 6. Comparação da propagação do pulso calculado para $S = 1$ e $S = 0,5$. Figura extraída da referência [1].

G. Problema proposto 2.9:

Use o programa desenvolvido na subseção (I-E), para replicar os resultados gráficos da figura (7).

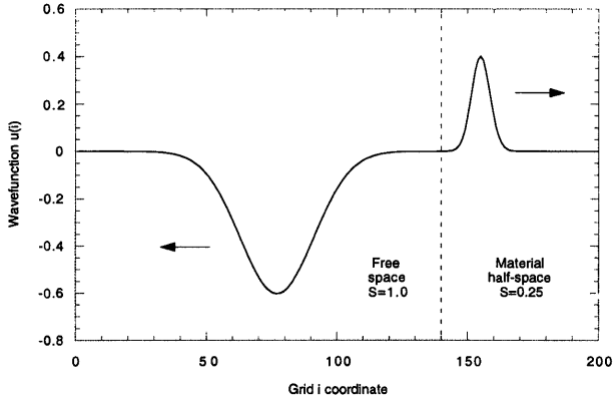


Fig. 7. Exemplo da reflexão e transmissão calculadas de um pulso Gaussiano em uma interface entre o espaço livre e um meio material sem perdas tendo $v_p = v/4$. Figura extraída da referência [1].

H. Problema proposto 2.10:

Use o programa desenvolvido na subseção (I-E), para replicar os resultados gráficos das figuras (8) e (9), que representam o início da instabilidade numérica de um pulso Gaussiano que se propaga no espaço livre. O fator de estabilidade de Courant é $S = 1,0005$ em cada ponto da grade.

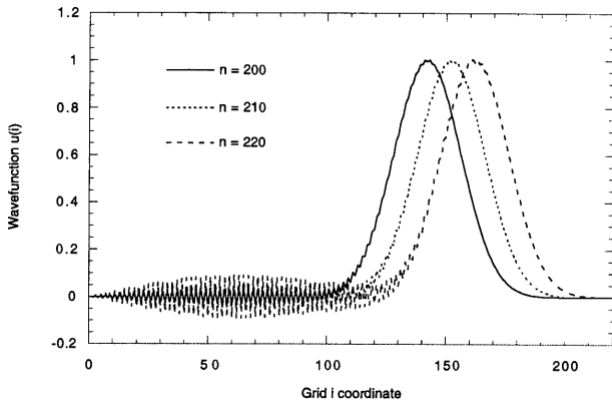


Fig. 8. Comparação da propagação de pulso calculada em $n = 200$, 210 e 220 em intervalos de tempo sobre as coordenadas da malha de $i = 1$ à $i = 220$. Figura extraída da referência [1].

I. Problema proposto 2.11:

Use o programa desenvolvido na subseção (I-E), para replicar os resultados gráficos das figuras (10) e (11), que representam o início da instabilidade numérica de um pulso Gaussiano que se propaga no espaço livre. Diferentemente das figuras (8) e (9), o fator de estabilidade de Courant é $S = 1$ em todos os pontos da malha, mas $i = 90$, onde $S = 1,075$.

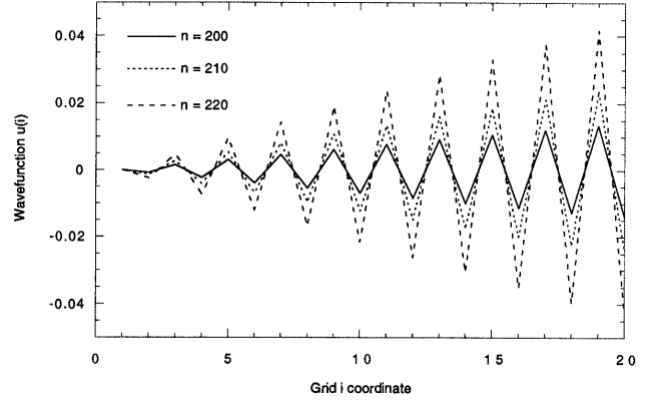


Fig. 9. Visualização expandida da figura (8) sobre as coordenadas da malha de $i = 1$ à $i = 20$. Figura extraída da referência [1].

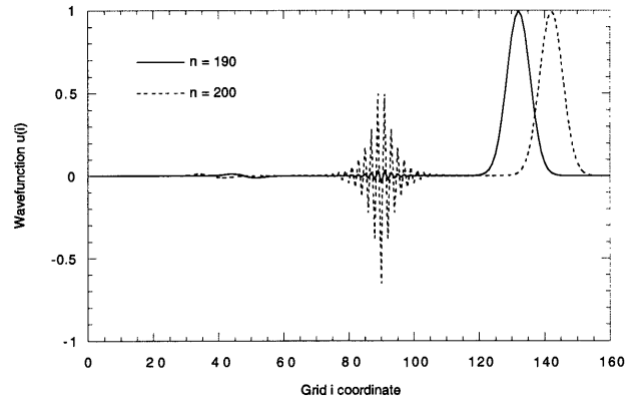


Fig. 10. Comparação da propagação de pulso calculada em $n = 190$ e $n = 200$ em intervalos de tempo sobre as coordenadas da malha de $i = 1$ à $i = 220$. Figura extraída da referência [1].

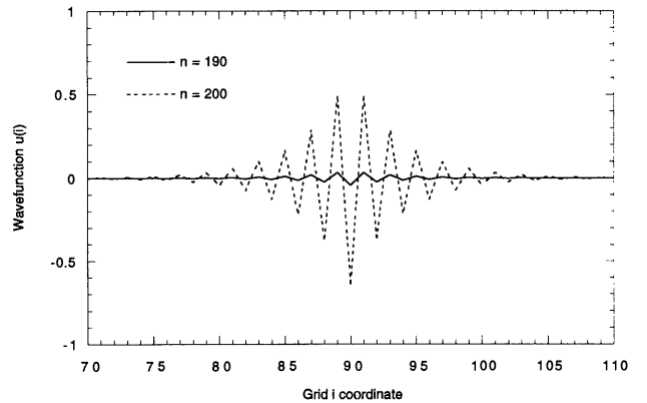


Fig. 11. Visualização expandida da figura (10) sobre as coordenadas da malha de $i = 70$ à $i = 110$. Figura extraída da referência [1].

II. QUAL A RELEVÂNCIA DE OBTERMOS AS SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL PARA A SOCIEDADE MODERNA?

Para entendermos melhor tal questão, discutiremos as perspectivas do uso de soluções numéricas, em particular usaremos o método *finite-difference time-domain* (FDTD).

A. Técnicas de solução no domínio da frequência

A modelagem de sistemas de engenharia eletromagnéticas antes de 1960 foi implementada principalmente usando técnicas de solução para as equações de Maxwell no estado estacionário senoidal, envolvendo soluções analíticas de forma fechada e de séries infinitas, sendo que para ter esses resultados era necessário o uso de uma calculadora. Depois de 1960, a disponibilidade de computadores começou a crescer, então os pesquisadores começaram a utilizá-los obtendo melhores resultados, pois a velocidade e o armazenamento de dados computacional é muito maior do que o das calculadoras.

No entanto, essas técnicas no domínio da frequência têm uma relação de perda e ganha. Por exemplo, embora as análises assintóticas sejam bem adequadas para modelar as propriedades de espalhamento de formas complexas eletricamente grandes, essas análises têm dificuldade em tratar a composição não metálica do material e a complexidade volumétrica de uma estrutura. Embora os métodos de equações integrais possam lidar com a complexidade material e estrutural, sua necessidade de construir e resolver sistemas de equações lineares limita o tamanho elétrico de possíveis modelos, especialmente aqueles que requerem tratamento detalhado de detalhes geométricos dentro de um volume, em oposição à forma da superfície.

Embora tenha sido feito um progresso significativo na solução dos sistemas ultra grandes de equações geradas por equações integrais no domínio da frequência, as capacidades até das mais recentes tecnologias são esgotadas por muitas estruturas volumetricamente complexas de interesse de engenharia. Isso também vale para técnicas de elementos finitos no domínio da frequência, que geram matrizes esparsas e não densas.

B. O crescimento do uso do método *finit-difference time-domain*

Durante as décadas de 1970 e 1980, as agências de defesa que trabalharam no desenvolvimento da tecnologia de radar de micro-ondas durante a segunda guerra mundial, perceberam as limitações das soluções de equação integral no domínio da frequência das equações de Maxwell. Isso levou a explorações iniciais de uma nova abordagem alternativa. O método FDTD, introduzido por Yee em 1966, foi a primeira técnica que utilizava o conceito de soluções no domínio do tempo das equações diferenciais de Maxwell em malhas e permaneceu sendo assunto de desenvolvimento contínuo. E desde de 1990, quando os engenheiros tiveram noção das capacidades de modelagem oferecidas pelo método FDTD o interesse nessa área se expandiu muito além da tecnologia de defesa de forças militares.

Existem sete razões principais para o crescimento do interesse do FDTD sendo solução computacional para as equações de Maxwell:

- 1) O FDTD não usa álgebra linear, evitando as dificuldades que usando ela geralmente teria, como por exemplo, limitar o tamanho o modelo eletromagnético (equações integrais).
- 2) As fontes de erro nos cálculos do FDTD são bem compreendidas e pode ser limitadas para permitir modelos precisos para uma grande variedade de problemas de interação com ondas eletromagnéticas.
- 3) O FDTD calcula diretamente a resposta ao impulso de um sistema eletromagnético, com isso pode fornecer dados temporais de banda ultralarga ou uma resposta senoidal em estado estacionário em qualquer frequência em um espectro de excitação.
- 4) Sendo uma técnica no domínio do tempo, o FDTD calcula diretamente a resposta não-linear de um sistema eletromagnético.
- 5) Fazendo o uso do FDTD, especificar uma nova estrutura a ser modelada é reduzida a um problema de geração de malhas, e não uma reformulação complexa de uma equação integral.
- 6) Como FDTD é um método baseado em discretização de espaço e volume, exigindo memória do computador, cada vez que evolui a capacidade de memória do computador é bom para o método.
- 7) Além de exigir memória do computador, também exige a visualização gráfica, por conta das matrizes e campos que são gerados, quanto mais a tecnologia avança, melhor para o método.

Enquanto as soluções em larga escala das equações de Maxwell foram motivadas no passado principalmente pelos requisitos de defesa militar, todo o campo da eletrodinâmica computacional mudou para aplicações importantes em comunicações, computação e biomedicina. Essas aplicações afetam todos nós em nossa vida diária. O bem-estar econômico e físico das nações, bem como sua segurança militar, estão sendo acentuadamente impulsionados pelos avanços na eletrodinâmica computacional. Um dos principais objetivos restantes é a unificação computacional de ondas eletromagnéticas, carga, transporte e fenômenos quânticos para permitir modelar uma gama maior de problemas, como escalas de distância características, desde a de toda a terra até a de um único átomo ou escalas de tempo da maior parte dos minutos até os sub femtosegundos. Indiscutivelmente, o FDTD e as técnicas relacionadas ao domínio do tempo da malha espacial compreendem os meios mais flexíveis e robustos para resolver problemas que abrangem esses intervalos, especialmente onde predominam a complexidade geométrica, não linearidade e a multifísica.

III. A EQUAÇÃO DE ONDA ESCALAR UNIDIMENSIONAL

Nesta seção consideramos a solução numérica FDTD da equação diferencial parcial mais básica que descreve o movimento das ondas, a equação de onda escalar unidimensional.

As soluções de ondas são obtidas. Em seguida, diferenças finitas são introduzidas e aplicadas à equação de onda.

A. Soluções de ondas propagantes

Considere a equação de onda escalar unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5)$$

e as funções do seguinte tipo

$$u(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt), \quad (6)$$

onde F e G são arbitrárias. Derivando a equação 6 duas vezes em relação a t e a x , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dF(x + vt)}{d(x + vt)} \frac{\partial(x + vt)}{\partial t} + \frac{dG(x - vt)}{d(x - vt)} \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} \quad (7)$$

$$= vF'(x + vt) - vG'(x - vt)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v^2 F''(x + vt) - v(-v)G''(x - vt) \\ &= v^2 F''(x + vt) + v^2 G''(x - vt) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dF(x + vt)}{d(x + vt)} \frac{\partial(x + vt)}{\partial x} + \frac{dG(x - vt)}{d(x - vt)} \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} \quad (9)$$

$$= F'(x + vt) + G'(x - vt)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x + vt) + G''(x - vt) \quad (10)$$

e substituindo na equação de onda escalar (5), obtemos:

$$v^2 F''(x + vt) + v^2 G''(x - vt) = v^2 [F''(x + vt) + G''(x - vt)] \quad (11)$$

Como isso deve ser uma identidade então não importa a escolha de F e G .

F e G são conhecidas como soluções de ondas de propagação. Por exemplo, considere uma "foto" de $F(x + vt)$ tirada no instante de tempo t_0 . Depois de passar Δt segundos, a solução de onda F se moveu para esquerda (na direção $-x$) por $v\Delta t$ metros, pois o argumento que o tempo está relacionado é *aumentado* de $v\Delta t$, com isso a parte que está relacionada com o espaço deve *diminuir* de $v\Delta t$ para obtermos então o valor anterior da função de onda. O contrário é verdadeiro para $G(x - vt)$, na qual se move para a direita. Vemos que v representa a velocidade de propagação da onda na direção $+x$ ou $-x$.

B. Relação de dispersão

A dispersão é definida como a variação de um comprimento de onda de propagação da onda λ com a frequência f . Por conveniência, a dispersão também é frequentemente representada como a variação do número de onda da onda propagante $k = 2\pi/\lambda$ com a frequência angular $\omega = 2\pi f$.

Um exemplo simples que pode apresentar essa ideia de relação de dispersão é o resultado de uma equação de onda escalar unidimensional. Considere então a seguinte solução da equação (5), uma função senoidal continua de onda propagante escrita na sua forma fasorial:

$$u(x, t) = e^{j(\omega t - kx)}, \quad (12)$$

onde $j = \sqrt{-1}$. Substituindo na equação (5), obtém

$$(j\omega)^2 e^{j(\omega t - kx)} = v^2 (-jk)^2 e^{j(\omega t - kx)} \quad (13)$$

Sabendo que $j^2 = -1$, e fatorando o termo exponencial complexo nos dois lados, obtemos

$$\begin{aligned} -\omega^2 &= v^2 (-k^2) \\ \omega &= v^2 k^2 \longrightarrow k = \pm \omega/v \end{aligned} \quad (14)$$

como achamos a variação do número de onda propagante, k , com a frequência angular, ω , temos que de fato a equação (14) é a relação de dispersão da equação de onda escalar unidimensional (5). O sinal de $+$ representa a direção $+x$ e o sinal de $-$ representa a direção $-x$.

Podemos obter da equação (14) a expressão para a velocidade de fase da onda, como:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \pm v \quad (15)$$

com isso vemos que a velocidade de fase é $\pm v$, sendo uma constante independente da frequência. Então, ondas propagantes tendo a relação de dispersão da forma de (14), resultando em velocidade de fase constante da forma de (15), são chamadas de *sem dispersão*, pois sua forma de onda permanece inalterada após grandes distâncias de propagação.

C. Diferenças finitas

Podemos utilizar a série de Taylor para encontrar uma aproximação para as derivadas parciais de segunda ordem da equação (5).

Primeiramente fixaremos $t = t_n$ em $u(x, t)$ e escreveremos $u(x + \Delta x, t_n)$ em sua expansão por Série de Taylor em torno do ponto x_i .

$$\begin{aligned} u(x_i + \Delta x, t_n) &= u(x_i, t_n) + \Delta x \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, t_n)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 u(x_i, t_n)}{\partial x^4} + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Agora, escreveremos $u(x - \Delta x, t_n)$ em sua expansão por Série de Taylor também em torno do ponto x_i

Um caso particular vale a pena ser destacado é o caso onde temos $v\Delta t = \Delta x$, neste caso a expressão obtida para o termo u_i^{n+1} é:

$$u(x_i - \Delta x, t_n) = u(x_i, t_n) - \Delta x \frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, t_n)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 u(x_i, t_n)}{\partial x^4} + \dots \quad (17)$$

Somando a equação (16) com a equação (17) obtemos:

$$u(x_i + \Delta x, t_n) + u(x_i - \Delta x, t_n) = 2u(x_i, t_n) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, t_n)}{\partial x^4} + \dots \quad (18)$$

Como nosso termo de interesse é a derivada de segunda ordem vamos isola-la:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} = \frac{u(x_i + \Delta x, t_n) + u(x_i - \Delta x, t_n) - 2u(x_i, t_n)}{\Delta x^2} + O[\Delta x^2] \quad (19)$$

Note que substituímos os termos remanescente da Série de Taylor pelo termo $O[(\Delta x)^2]$ que nos deixa com uma aproximação com ordem de precisão igual a 2 já que nosso termo remanescente se aproxima de zero com o quadrado do nosso passo espacial.

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i, t_n} = \left[\frac{u(x_i + \Delta x) - 2u(x_i) + u(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right]_{t_n} + O[(\Delta x)^2] \quad (20)$$

a partir deste ponto denotaremos como u_n^i o ponto no espaço $i\Delta x$ e no tempo $n\Delta t$, atualizando a notação obtemos:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i, t_n} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (21)$$

usando um processo análogo podemos obter a seguinte expressão para a derivada parcial de u em relação a t :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{x_i, t_n} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} + O[(\Delta t)^2] \quad (22)$$

Agora podemos escrever a nossa equação de onda escalar em função da expressões obtidas para as derivadas em relação a posição e ao tempo, neste passo também retiraremos da expressão o termo que representa o erro da nossa aproximação por Séries de Taylor de modo que em nossa solução estaremos sujeitos a um erro da ordem de $O[(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2]$ que surgiu ao negligenciarmos os termos restantes da nossa série de Taylor em cada uma das aproximações:

$$u_i^{n+1} \approx (v\Delta t)^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] + 2u_i^n - u_i^{n-1} \quad (23)$$

Podemos notar que neste ponto o termo do lado esquerdo da equação não depende de nenhum dado que se encontra mais avançado em relação ao seu tempo, deste modo podemos calcular u_i^{n+1} em função de termos já previamente calculados.

Veja que neste caso temos uma igualdade e não um dado aproximado pois ao fazermos essa substituição e cancelamos os termos que eram responsáveis pelo erro em nossa Série de Taylor.

$$u_i^{n+1} = (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + 2u_i^n - u_i^{n-1} = u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - u_i^{n-1} \quad (24)$$

Usando o método das diferenças finitas é possível obter a relação numérica de dispersão da aproximação da equação (5). Para isso consideraremos uma onda senoidal com frequência angular ω amostrada no espaço e no tempo nos pontos (x_i, t_n) . Sendo $\bar{k} = \bar{k}_{real} + j\bar{k}_{img}$ temos

$$u_i^n = e^{j(\omega n \Delta t - \bar{k} i \Delta x)} = e^{j(\omega n \Delta t - (\bar{k}_{real} + j\bar{k}_{img}) i \Delta x)} = e^{\bar{k}_{img} i \Delta x} e^{j(\omega n \Delta t - \bar{k}_{real} i \Delta x)} \quad (25)$$

Aqui podemos reparar que dependendo do valor de \bar{k} temos diferentes situações para o comportamento da amplitude da onda, para $\bar{k}_{img} = 0$, temos um amplitude constante no espaço, para $\bar{k}_{img} < 0$, temos a amplitude decrescendo exponencialmente no espaço e para $\bar{k}_{img} > 0$, o comportamento é de crescimento exponencial no espaço. Vale ressaltar que \bar{k} difere do valor físico de k , essa diferença também é conhecida como artefato de dispersão numérica e pode dar origem a amplitudes e velocidades de onda que diferem dos valores reais.

Agora substituiremos a equação (23) na equação (25), obtendo assim:

$$\begin{aligned} e^{j(\omega(n+1)\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} &= \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[e^{j(\omega n \Delta t - \bar{k}(i+1)\Delta x)} - 2e^{j(\omega n \Delta t - \bar{k}i\Delta x)} + e^{j(\omega n \Delta t - \bar{k}(i-1)\Delta x)} \right] \\ &\quad + 2e^{j(\omega n \Delta t - \bar{k}i\Delta x)} - e^{j(\omega(n-1)\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} \end{aligned} \quad (26)$$

Dividindo ambos os lados por $e^{j(\omega n \Delta t - \bar{k}i\Delta x)}$ temos:

$$e^{j\omega \Delta t} = \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (e^{-j\bar{k}\Delta x} - 2 + e^{j\bar{k}\Delta x}) + 2 - e^{-j\omega \Delta t} \quad (27)$$

Agora podemos agrupar os termos exponenciais e aplicar a fórmula de Euler para obter a seguinte relação:

$$\cos(\omega \Delta t) = \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} \right)^2 [\cos(\bar{k}\Delta x) - 1] + 1 \quad (28)$$

Isolando \bar{k} temos:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{v\Delta t} \right)^2 [\cos(\omega \Delta t) - 1] \right\} \quad (29)$$

Podemos dividir nosso problema em três situações distintas:

1) Caso 1: $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta x \rightarrow 0$.

Neste caso podemos utilizar aproximações por dois termos das Séries de Taylor nas funções trigonométricas e manter a precisão dos resultados já que Δt e Δx são suficientemente pequenos sendo assim:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta x}{v\Delta t} \right)^2 \left[1 - \frac{(\omega\Delta t)^2}{2} - 1 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{v} \right)^2 (\Delta x)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left[1 - \frac{1}{2} (k\Delta x)^2 \right]\end{aligned}\quad (30)$$

Note que ω/v representa o número de onda k , ainda assumindo $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta x \rightarrow 0$, também podemos aproximar a função arccos também aplicando a expansão em Série de Taylor de dois termos o que nos leva a:

$$\bar{k} = \frac{1}{\Delta x} (k\Delta x) = k \quad (31)$$

Neste caso o número de onda numérico \bar{k} é equivalente ao número de onda físico em espaço livre. Neste caso, como a velocidade de fase e de grupo são iguais a v independentemente da frequência, podemos inferir que nossa solução numérica não apresenta dispersão.

2) Caso 2: Passo temporal "mágico" ($v\Delta t = \Delta x$)

Realizando a substituição indicada no título deste tópico obtemos:

$$\bar{k} = \frac{1}{v\Delta t} \cos^{-1} [\cos(\omega\Delta t)] = \frac{\omega\Delta t}{v\Delta t} = k \quad (32)$$

Como no caso 1, nosso número de onda numérico \bar{k} é igual ao número de onda físico em espaço livre. Este resultado implica em dizer que nossa solução numérica é exata independentemente da escolha de Δt e Δx desde que estes estejam escalados em função da velocidade de propagação da onda em espaço livre v .

3) Caso 3: Propagação de onda com dispersão

Aqui analisaremos um caso geral, onde o erro numérico associado a dispersão pode existir.

Inicialmente vamos definir alguns parâmetros que serão utilizados:

$$S = \frac{v\Delta t}{\Delta x} \quad (33)$$

e

$$N_\lambda = \frac{\lambda_0}{\Delta x} \quad (34)$$

sendo S o fator de estabilidade numérica e N_λ sendo a resolução das células espaciais em células espaciais por comprimento de onda em espaço livre. Podemos destacar que N_λ é definido em função dos parâmetros contínuos do comprimento λ_0 de onde e não em seu equivalente numérico $\bar{\lambda}$. Desse modo podemos escrever a equação (?? para obter:

$$\begin{aligned}\bar{k} &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{S} \right)^2 \left[\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\zeta) \right]\end{aligned}\quad (35)$$

Onde ζ é:

$$\zeta = 1 + \left(\frac{1}{S} \right)^2 \left[\cos \left(\frac{2\pi S}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \quad (36)$$

Neste ponto devemos tomar um devido cuidado ao atribuir valores para S e N_λ , já que podemos escolhe-los de forma que \bar{k} seja complexo. Podemos perceber que na equação (35) a transição entre um valor complexo e real de λ acontece quando $\zeta = -1$. Agora vamos resolver N_λ para no ponto de transição.

$$N_\lambda|_{transicao} = \frac{2\pi S}{\cos^{-1}(1 - 2S^2)} \quad (37)$$

Quando $N_\lambda > N_\lambda|_{transicao}$ obtemos um valor real para \bar{k} e portanto a onda numérica não sofre atenuação enquanto se propaga no espaço, além disso a velocidade de fase \bar{v}_p é menor do que a velocidade de propagação no espaço livre. Já quando $N_\lambda < N_\lambda|_{transicao}$ temos que \bar{k} é um número complexo e a onda numérica sofre de um fenômeno não físico de decaimento exponencial enquanto se propaga e ainda podemos ter nossa velocidade de fase numérica superando o valor de v .

Agora vamos ilustrar como \bar{k} e \bar{v}_p variam em função de N_λ , para isso vamos separar os casos onde temos $\bar{k} \in \mathbb{R}$ e $\bar{k} \in \mathbb{C}$, em ambos os casos vamos considerar a situação onde $S = 0,5$ que implica em $N_\lambda|_{transicao} = 3$.

- Número de onda numérico $\in \mathbb{R}$

Para $N_\lambda \geq 3$:

$$\bar{k}_{real} = \frac{1}{\Delta x} \cos^{-1} \left\{ 1 + 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right\}; \quad \bar{k}_{img} = 0 \quad (38)$$

Para a velocidade de fase numérica temos:

$$\begin{aligned}\bar{v}_p &= \omega / \bar{k}_{real} \\ &= \frac{2\pi f \Delta x}{\cos^{-1} \left\{ 1 + 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right\}}\end{aligned}\quad (39)$$

Sabemos que

$$2\pi f \Delta x = 2\pi f \left(\frac{\lambda_0}{N_\lambda} \right) = \left(\frac{2\pi}{N_\lambda} \right) v \quad (40)$$

Substituindo a equação (40) na equação (39) obtemos:

$$\bar{v}_p = \frac{2\pi}{N_\lambda \cos^{-1} \left\{ 1 + 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{N_\lambda} \right) - 1 \right] \right\}} v \quad (41)$$

Para analisarmos a amplitude precisamos relembrar a equação (25), note que o multiplicar da amplitude a cada célula da malha espacial é dada por:

$$e^{\bar{k}_{img} \Delta x} \equiv e^{-\alpha \Delta x} = e^0 = 1 \quad (42)$$

Portanto podemos concluir que a amplitude da onda é constante independentemente da posição para este caso de N_λ .

- Numero de onda numérico $\in \mathbb{C}$

Neste caso, temos que $\zeta < -1$ e portanto obtemos um valor complexo para o arcsin de ζ devido a isso o uso de algumas relações envolvendo números complexos são importantes para explicar o comportamento de \bar{k} e \bar{v}_p .

$$\sin^{-1}(\zeta) = -j \ln(j\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (43)$$

substituindo a equação (43) na equação (35) obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln \left(j\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln \left(j\zeta + j\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

substituindo $j = e^{j\pi/2}$ temos:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\pi}{2} + j \ln \left[\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{j\pi/2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\pi}{2} + j \ln \left[\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{-j\pi/2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

aplicando o logaritmo natural obtemos:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\pi}{2} + j \left[\ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) - j \frac{\pi}{2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \pi + j \ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

isso implica em:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{real} &= \frac{\pi}{\Delta x}; \\ \bar{k}_{img} &= \frac{1}{\Delta x} \ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

para a velocidade de fase temos:

$$\begin{aligned} \bar{v}_p &= \frac{\omega}{\bar{k}_{real}} = \frac{\omega}{(\pi/\Delta x)} = \frac{2\pi f \Delta x}{\pi} \\ &= \frac{2f \lambda_0}{N_\lambda} = \frac{2}{N_\lambda} v \end{aligned} \quad (48)$$

Usando o mesmo procedimento do caso real para analisar a amplitude temos:

$$\begin{aligned} e^{\bar{k}_{img} \Delta x} &\equiv e^{-\alpha \Delta x} = e^{\ln(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \\ &= -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (49)$$

Como neste caso $\zeta < -1$ a amplitude da onda numérica decai exponencialmente com a posição. Além das situações já analisadas, existe também o caso onde \bar{v}_p supera v . Do teorema de Nyquist sabemos que a frequência máxima de amostragem que podemos ter de modo que seja possível reproduzir a onda original sem o efeito de aliasing é dada por: $f_{max} = 1/2\Delta t$ a partir disso temos:

$$\lambda_{0,min} = v/f_{max} = 2v\Delta t \quad (50)$$

A partir de agora vamos adotar N_λ em função do comprimento de onda mínimo e portanto teremos a menor amostragem espacial.

$$N_{\lambda,min} = \lambda_{0,min}/\Delta x = 2v\Delta t/\Delta x = 2S \quad (51)$$

No próximo tópico discutiremos condições de estabilidade do algoritmo e entre elas podemos adiantar que $S \leq 1$ e utilizando essa condição temos que:

$$N_{\lambda,min} = 2S \leq 2 \quad (52)$$

Com isso podemos calcular a velocidade de fase numérica máxima que pode ser obtida:

$$\bar{v}_{p,max} = \frac{2}{N_{\lambda,min}} v = \frac{2}{2S} v = \frac{1}{S} v \geq v \quad (53)$$

Agora substituindo S temos:

$$\bar{v}_{p,max} = \frac{1}{S} v = \frac{\Delta x}{v\Delta t} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (54)$$

Vale destacar que $\bar{v}_{p,max}$ não depende do material usado e é uma propriedade inerente à malha escolhida e ao método utilizado para obtermos as derivadas espaciais.

D. Analise na estabilidade da solução numérica

Até agora, já estudamos como a escolha de Δx e Δt influenciam na velocidade de fase da onda numérica e no erro associado ao método numérico, a partir deste ponto analisaremos com essa escolha impacta na estabilidade da solução numérica. Para isso primeiro vamos definir o que é esta estabilidade. Uma solução numérica para a equação de onda escalar unidimensional é dita estável quando ao darmos uma entrada limitada para esta solução a sua saída também deve ser limitada.

Utilizaremos um método que tem como base uma análise de frequência complexa usando a relação numérica de dispersão (28).

Novamente utilizaremos como exemplo uma onda senoidal, mas desta vez vamos permitir que a frequência angular numérica $\bar{\omega}$ assuma valores complexos e portanto possa ser escrita como $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{real} + j\bar{\omega}_{img}$. Partindo disso temos

$$\begin{aligned} u_i^n &= e^{j(\bar{\omega}n\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} \\ &= e^{j[(\bar{\omega}_{real} + j\bar{\omega}_{img})n\Delta t - \bar{k}i\Delta x]} \\ &= e^{-\bar{\omega}_{img}n\Delta t} e^{j(\bar{\omega}_{real}n\Delta t - \bar{k}i\Delta x)} \end{aligned} \quad (55)$$

Podemos perceber que temos as seguintes opções para a amplitude em função de $\bar{\omega}$:

- Amplitude Constante no tempo $\bar{\omega} = 0$
- Amplitude exponencialmente decrescente no tempo $\bar{\omega}_{img} > 0$
- Amplitude exponencialmente crescente no tempo $\bar{\omega}_{img} < 0$

Agora, continuaremos nossa análise a partir da relação numérica de dispersão, mas desta vez usando a frequência

numérica angular complexa. Sendo assim a equação (28) se torna:

$$\cos(\bar{\omega}\Delta t) = \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right)^2 [\cos(\bar{k}\Delta x) - 1] + 1 \quad (56)$$

Agora vamos redefinir $S = v\Delta t/\Delta x$ sendo S também chamado de fator de estabilidade de Courant. Substituindo S na equação (56) temos:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{\Delta t} \cos^{-1} \{S^2 [\cos(\bar{k}\Delta x) - 1] + 1\} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \cos^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(\zeta) \right] \end{aligned} \quad (57)$$

Onde:

$$\zeta = S^2 [\cos(\bar{k}\Delta x) - 1] + 1 \quad (58)$$

Agora podemos relacionar os valores S com os valores de ζ . Para os valores reais de \bar{k} temos $1 - 2S^2 \leq \zeta \leq 1$ e podemos dividir esta situação em dois casos:

- 1) $-1 \leq \zeta \leq 1$. Para que este intervalo seja possível, temos que da equação 58, S deve pertencer ao intervalo $0 \leq S \leq 1$ note que nesta situação o $\arcsin \zeta$ assume um valor real e portanto $\bar{\omega}$ também pertence aos reais, o que implica em uma amplitude de onda constante com o tempo.
- 2) $1 - 2S^2 \leq \zeta < -1$. Também da equação (58) percebemos que para este intervalo, $S > 1$. A borda inferior deste intervalo acontece quando a função cosseno assume seu valor mínimo -1 .

Neste caso a função \arcsin novamente assume um valor complexo, e aqui novamente utilizaremos como referência a equação (43) para estudar o caso onde $S > 1$. Substituindo a equação (43) na equação (57) temos:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln \left(j\zeta + \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\pi}{2} + j \ln \left(j\zeta + j\sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right] \end{aligned} \quad (59)$$

substituindo $j = e^{j\pi/2}$ temos:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\pi}{2} + j \ln \left[\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{j\pi/2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\pi}{2} + j \ln \left[\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) e^{-j\pi/2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (60)$$

utilizando a propriedade do logaritmo da multiplicação de dois termos temos:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\pi}{2} + j \left[\ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) - j \frac{\pi}{2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \pi + j \ln \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (61)$$

A partir deste ponto, a divisão de $\bar{\omega}$ em sua parte real e imaginária já se torna bem evidente:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{real} &= \frac{\pi}{\Delta t}; \\ \bar{\omega}_{img} &= \frac{1}{\Delta t} \ln(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \end{aligned} \quad (62)$$

Agora substituiremos o resultado obtido para $\bar{\omega}$ na equação (55):

$$\begin{aligned} u_i^n &= e^{[-n \ln(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})]} e^{j[(\pi/\Delta t)(n\Delta t) - \bar{k}i\Delta x]} \\ &= \left(\frac{1}{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right)^n e^{j[(\pi/\Delta t)(n\Delta t) - \bar{k}i\Delta x]} \end{aligned} \quad (63)$$

vamos separar desta equação o termo que multiplica nossa onda numérica

$$q_{crescimento} \equiv \frac{1}{-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (64)$$

note que estamos no caso onde $S > 1$ e portanto $\zeta < -1$ portanto o fator q é um número maior do que 1 e portanto para cada passo n no tempo multiplicamos a amplitude pelo fator $q > 1$ obtendo assim um crescimento exponencial no tempo. Sendo assim fica evidente que para um valor de S maior do que 1, nossa solução cresce indefinidamente. Outro resultado desta análise é que a frequência f_0 da onda senoidal com crescimento exponencial depende unicamente do parâmetro Δt :

$$f_0 = \frac{\bar{\omega}_{real}}{2\pi} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (65)$$

Por fim, podemos também obter a velocidade numérica de propagação da onda com crescimento exponencial:

$$\bar{v}_p = \frac{\bar{\omega}_{real}}{\bar{k}} = \frac{(\pi/\Delta t)}{(\pi/\Delta x)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v}{S} \quad (66)$$

Para resumir, concluímos que em relação a estabilidade computacional do modelo de uma onda unidimensional utilizando um algoritmo numérico, existe um limite superior para o tamanho do passo temporal de Δt que depende de Δx e de v .

$$S \equiv \frac{v\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \rightarrow \Delta t \geq \frac{\Delta x}{v} \quad (67)$$

Na maioria das situações o primeiro parâmetro a ser definido é um Δx que se adéqua as restrições geométricas da estrutura de interesse, em seguida podemos calcular um limite superior para o passo no tempo de modo que preservemos a estabilidade do algoritmo.

IV. DETALHES DA IMPLEMENTAÇÃO

Para a implementação do programa optou-se pelo uso da linguagem de programação *Python* pela afinidade dos integrantes do grupo com a linguagem e por esta oferecer ferramentas e bibliotecas que facilitam o desenvolvimento de uma solução numérica, as bibliotecas utilizadas foram:

- *Matplotlib* - Para a exibição dos gráficos
- *Scipy* - Utilizada para fornecer constantes científicas
- *Math* - Oferecer uma maior variedade de recursos matemáticos
- *Numpy* - Facilitar as operações com matrizes e vetores

Além disso podemos ressaltar que a escolha por *Python* foi importante pois esta linguagem permite que o código escrito possua uma alta legibilidade. O código desenvolvido encontra-se no repositório do *Github*, dentro da pasta Trabalho 2, cujo link encontra-se no fim deste relatório. Quanto

a implementação, utilizamos os conceitos desenvolvidos até aqui para implementar o método das diferenças finitas para discretizar a equação de onda escalar.

V. RESULTADOS OBTIDOS E ANÁLISES.

A. Resolução do problema proposto 2.4

Para o problema 2.4, utilizou-se a equação (37) para determinar o N de transição, que é o ponto no qual k se torna complexo. A partir dessa informação, calculamos o valor de τ para cada ponto N_λ , calculando então a velocidade de fase numérica e a atenuação. O gráfico abaixo nos mostra Os valores obtidos para $S = 1/\sqrt{2}$.

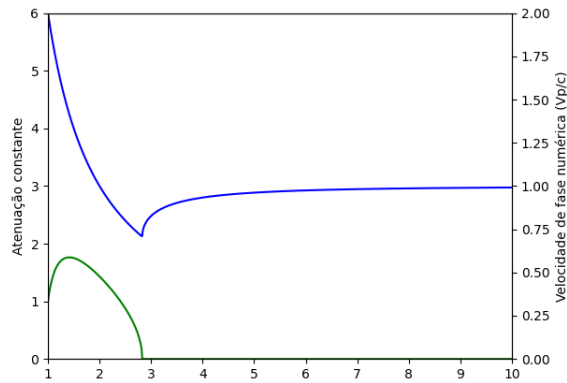


Fig. 12. Gráfico de N_λ para $S = 1/\sqrt{2}$

B. Resolução do problema proposto 2.5

Replicando o gráfico da figura 2.2, obtivemos:

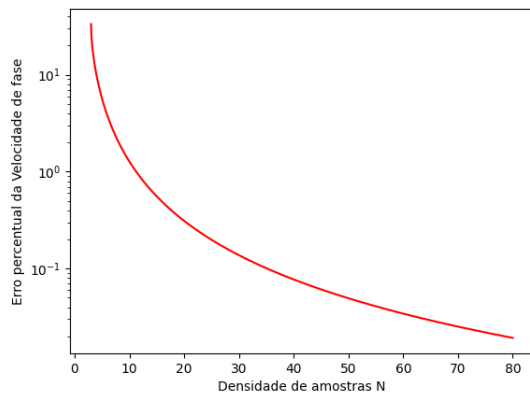


Fig. 13. texto

C. Resolução do problema proposto 2.6

Já para o gráfico da figura 2.2, mas com $S = 1/\sqrt{2}$, obtivemos o seguinte gráfico:

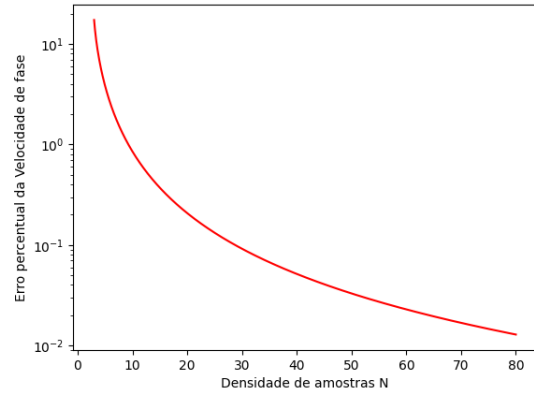


Fig. 14. Gráfico figura 2.2 com $S = 1/\sqrt{2}$

D. Resolução do problema proposto 2.7

Para o exercício 2.7, reproduzimos os gráficos figura 2.3a e 2.4b. As constantes estão representadas pela legenda.

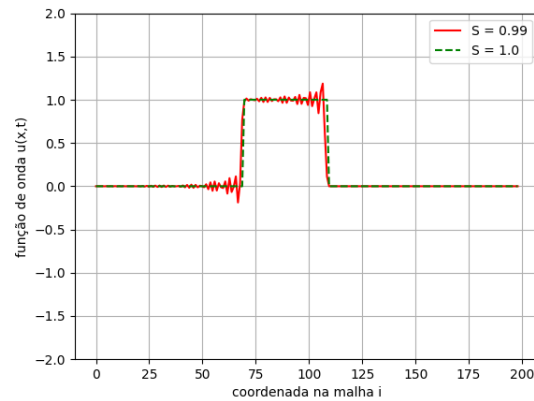


Fig. 15. Pulso quadrado da figura 2.3a para $S_1 = 1.0$ e $S_2 = 0.99$

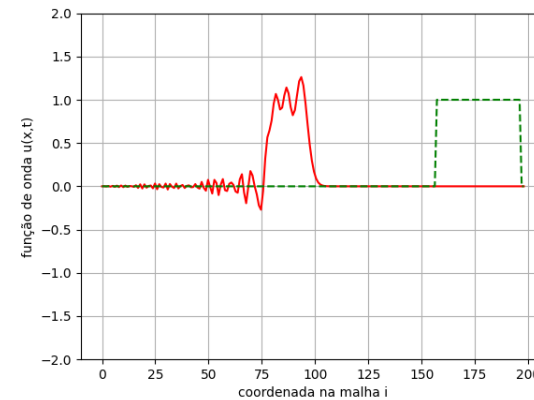


Fig. 16. Pulso quadrado da figura 2.3b para $S_1 = 1.0$ e $S_2 = 0.5$

E. Resolução do problema proposto 2.8

Este exercício é semelhante ao exercício anterior (2.7), porém para uma entrada de pulso gaussiano. Geramos os gráficos abaixo.

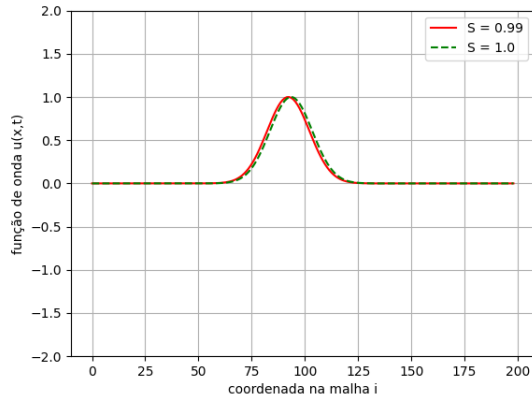


Fig. 17. Pulso gaussiano da figura 2.3a para $S_1 = 1.0$ e $S_2 = 0.99$

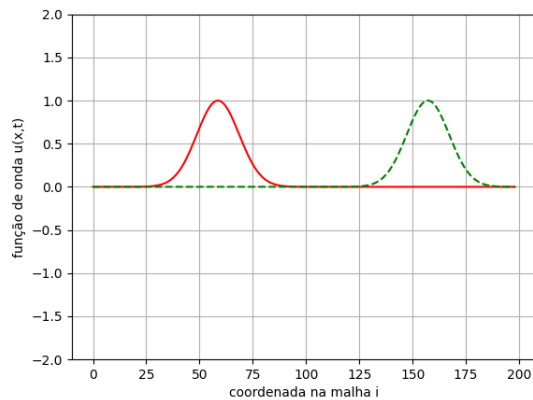


Fig. 18. Pulso gaussiano da figura 2.3b para $S_1 = 1.0$ e $S_2 = 0.5$

F. Resolução do problema proposto 2.9

Replicando o gráfico da figura 2.5, para um meio $S = 1.0$ se $i < 140$ e $S = 0.25$ para $i \geq 140$, obtivemos o gráfico da figura abaixo.

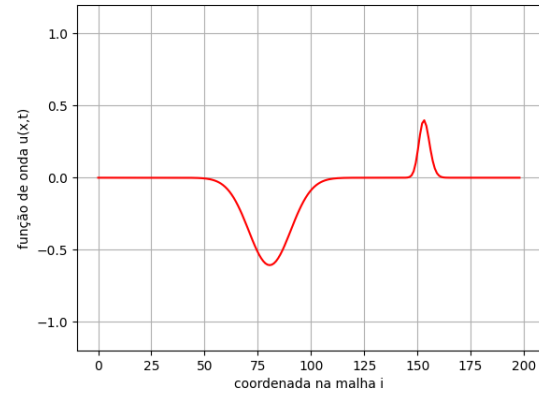


Fig. 19. onda se propagando num meio $S = 1.0$ se $i < 140$ e $S = 0.25$ para $i \geq 140$

G. Resolução do problema proposto 2.10

Para o problema do exercício 10, replicamos a figura 2.6a e 2.6b. Na figura 2.6a, comparamos um pulso gaussiano se propagando em diferentes cortes temporais ($n = 200$, $n = 210$, $n = 220$). Na figura 2.6b, a escala no eixo i foi aproximada para obter detalhes da região entrando na instabilidade.

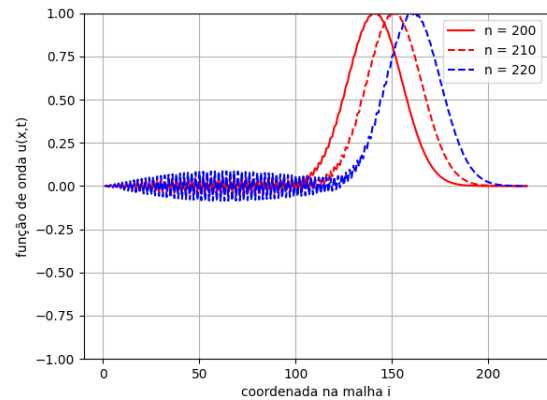


Fig. 20. Pulso gaussiano se propagando para $S = 1.005$

VI. CONCLUSÃO

Pelos resultados obtidos nos exercícios propostos podemos dizer que o objetivo deste trabalho foi alcançado pois foi possível modelar a equação de onda escalar utilizando o método FDTD e implementar um algoritmo que simula o seu comportamento em um dimensão. Nos exercícios propostos foi possível analisar uma série de situações diferentes e aplicar vários dos conceitos discutidos até aqui, incluindo estabilidade e velocidade de fase da onda estudada. Logo o objetivo do trabalho 2 foi alcançado com sucesso já que obtivemos sucesso ao aplicar os conceitos discutidos na solução dos problemas propostos.

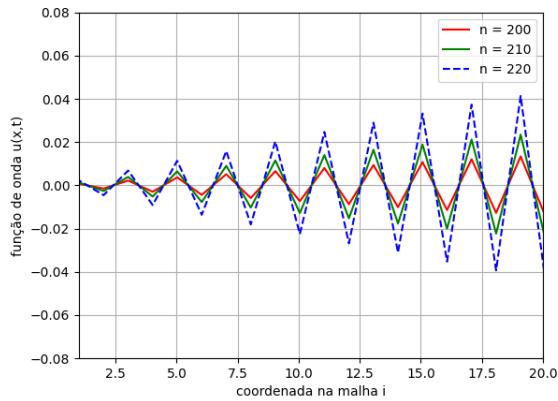


Fig. 21. Aproximação na região instável da figura anterior

H. Resolução do problema proposto 2.11

Para a figura 2.7, reproduzimos um pulso gaussiano se propagando através de um meio no qual $S = 1.075$ para $i = 90$, e $S = 1.0$ para outros casos. Obtivemos as figuras abaixo.

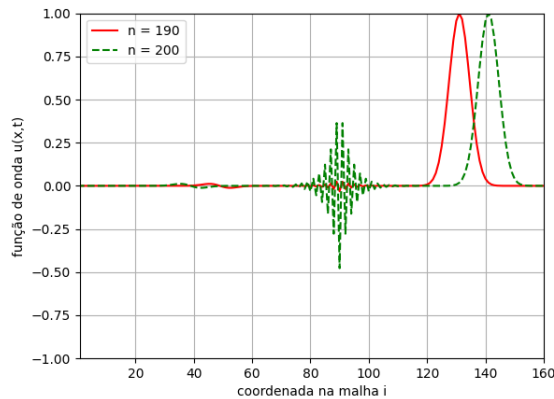


Fig. 22. texto

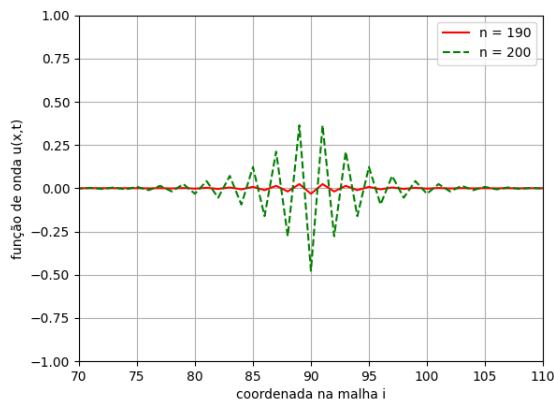


Fig. 23. texto

REFERENCES

- [1] A. Taflov e S. C. Hagness. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference TimeDomain Method*. Norwood: Artech House, 2a. ed., 2000.
- [2] DAVID B. DAVIDSON. *Computational electromagnetics for rf and microwave engineering*. Cambridge University Press 2005
- [3] M. N. O. Sadiku. *Elementos de Eletromagnetismo*. Porto Alegre: Bookman, 3a. ed., 2004.

<https://github.com/felfipe/OndasEletromagFDTD>