

Projeto 1 – Linhas de Transmissão

George Alexandre Gantus
EESC e ICMC

Universidade de São Paulo
São Carlos - SP, Brasil

Email: georgegantus@usp.br

Renata Oliveira Brito
EESC e ICMC

Universidade de São Paulo
São Carlos - SP, Brasil

Email: renata.oliveira.brito@usp.br

Victor Felipe Domingues do Amaral
EESC e ICMC

Universidade de São Paulo
São Carlos - SP, Brasil

Email: victoramara@usp.br

Abstract—Final report presented to Professor Leonardo André Ambrosio regarding one of the evaluations of SEL0612 - Electromagnetic Waves. An algorithm was developed in Python to visualize the voltage $V(z, t)$ and current $I(z, t)$ in lossless transmission lines, based on telegrapher's equations..

I. INTRODUÇÃO

O objetivo deste Projeto é desenvolver um código ou algoritmo que envolve a implementação do algoritmo FDTD (Finite-Difference Time-Domain) para visualização de tensão $V(z, t)$ e corrente $I(z, t)$ (transiente) em uma linha de transmissão sem perdas, baseado nas equações do telegrafista.

A. Problema proposto:

A figura 1 mostra uma linha de transmissão de impedância característica Z_0 cujos terminais de entrada (em $z = -l$) estão conectados a uma fonte de tensão $V_S(t)$ de resistência interna R_S . Em $z = 0$, uma carga R_L é alimentada.

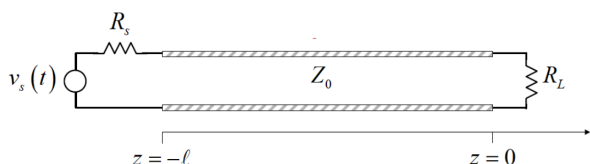


Fig. 1. Linha de transmissão de impedância característica Z_0 alimentada por fonte de tensão $V_S(t)$ (resistência interna R_S), alimentando uma carga R_L .

Assumiremos, neste projeto, que $Z_0 = 50\Omega$. E consideraremos três cargas com os determinados valores:

- $R_L \rightarrow \infty$ (carga em aberto);
- $R_L = 0$ (carga em curto);
- $R_L = 100\Omega$.

Com relação a fonte de tensão ela terá resistência interna fixa $R_S = 75\Omega$ e assumirá os seguintes valores:

- $V_S(t) = 2u(t)$, onde $u(t)$ é a função degrau, e
- $V_S(t) = u(t) - u(t - \frac{l}{10u_f})$ onde $u_f = 0,9c$ é a velocidade do sinal de tensão (ou de corrente), sendo c a velocidade da luz no vácuo.

II. DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DO MODELO CIRCUITAL DAS LINHAS DE TRANSMISSÃO

A. Aparição de transientes em linhas de transmissão

Transientes em linhas de transmissão ocorrem sempre que:

- Uma carga nova é conectada;
- Quando um sinal aperiódico (um pulso gaussiano ou um sinal tipo degrau) é injetado na ou se propaga através da linha;
- Quando o gerador é ligado.

B. Definição

Linhas de transmissão são usadas para transmitir energia elétrica e sinais de um ponto para outro, especificamente de uma fonte para uma carga. Isso pode incluir a conexão entre um transmissor e uma antena, conexões entre computadores em uma rede ou entre uma usina hidrelétrica e uma subestação várias centenas de quilômetros de distância. Exemplos menos familiares incluem as conexões entre dispositivos em uma placa de circuito projetada para operar em altas frequências.

O que todos os exemplos acima têm em comum é que os dispositivos a serem conectados são separados por distâncias na ordem de um comprimento de onda ou muito maior, enquanto nos métodos básicos de análise de circuitos, as conexões entre os elementos são de comprimento insignificante. Essa última condição nos permitiu, por exemplo, tomar como verdadeiro que a tensão através de um resistor de um lado de um circuito estava exatamente em fase com a fonte de tensão do outro lado, ou, de maneira mais geral, que o tempo medido no local da fonte é precisamente o mesmo tempo que o medido em todos outros pontos no circuito. Quando as distâncias são suficientemente grandes entre a fonte e o receptor, os efeitos de atraso de tempo se tornam apreciáveis, o que leva a diferenças de fase induzida por atraso.

Em resumo, lidamos com o fenômeno das ondas nas linhas de transmissão, assim como lidamos com a propagação de energia ponto a ponto no espaço livre ou nos dielétricos.

As linhas de transmissão, de uma forma geral, tem a característica de que os elementos (resistores, capacitores e indutores) ou interconexões entre eles podem ser considerados elementos concentrados se o atraso de tempo na propagação pelos elementos for desprezível, e caso forem grandes o suficiente, podem ser considerados elementos distribuídos, assim as características resistivas, capacitivas e indutivas devem ser avaliadas em uma base de valor por unidade de distância. Se transformam em elementos de circuitos distribuídos ao longo de sua extensão, os quais possuem impedâncias que contribuirão para o problema.

A regra básica é considerar os elementos como distribuídos caso o atraso de tempo ao longo das dimensões do elemento for da ordem do intervalo de tempo de interesse mais curto. No caso de variação harmônica no tempo, essa condição levaria a uma diferença de fase mensurável entre cada extremidade do dispositivo em questão.

C. Propagação das ondas em linhas de transmissão

A figura 2 mostra uma linha sem perdas, ou seja, em um tempo específico toda a potência colocada na linha na extremidade inicial chega em sua extremidade final. A bateria de tensão V_0 é conectada em um ponto logo a frente da chave S_1 para usarmos quando a chave é fechada no instante tem tempo $t = 0$, pois assim $V^+ = V_0$, e esta tensão começa a passar com uma certa velocidade, da bateria até chegar no resistor de carga R . A linha tracejada (frente de onda) na figura representa a fronteira instantânea entre a linha que foi carregada e onde circula a corrente I^+ , e o restante que ainda vai sentir a tensão e a corrente. Na frente de onda a corrente e a tensão são descontínuas.

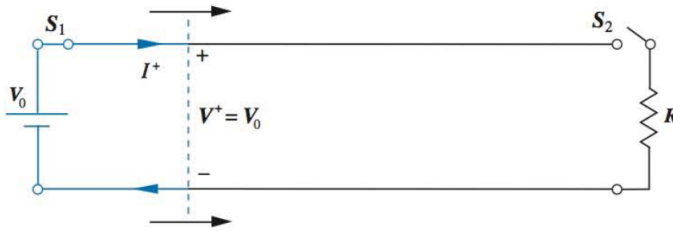


Fig. 2. Circuito de uma linha de transmissão básica, mostrando ondas de tensão e corrente tendo início quando a chave S_1 é fechada.

Conforme a linha vai se carregando, a frente de onda se move da esquerda para a direita com uma velocidade v , quando atinge a extremidade, uma quantidade das ondas de tensão e corrente são refletidas dependendo do tipo de carga que está conectada à linha. Caso a chave S_2 esteja aberta, a carga estará desconectada, logo a quantidade das ondas de tensão e corrente que serão refletidas é inteira, porém se a chave for fechada, a quantidade será uma fração.

Chegamos no ponto que precisamos entender como calcular v , é necessário notar que a linha de transmissão condutora possui capacitância e indutância, nas quais serão expressas em seu valor por unidade de comprimento. Para isso construiremos um modelo de linha de transmissão usando capacitores e indutores concentrados conforme a figura 11.

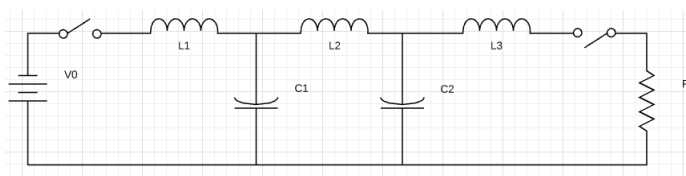


Fig. 3. Modelo de linha de transmissão usando capacitores e indutores concentrados, todos os valores de indutâncias são iguais assim como o de capacitância.

Quando fechamos a primeira chave junto com a bateria V_0 a corrente começa a aumentar em L_1 possibilitando o carregamento de C_1 . À medida que C_1 se aproxima da carga máxima a corrente em L_2 começa a aumentar permitindo que C_2 se carregue em seguida. A frente de onda nesse caso, pode ser colocada no ponto entre capacitores adjacentes que exibem maior diferença entre seus níveis de carregamento. A frente de onda começa a se deslocar da esquerda para a direita conforme acontece os carregamentos, e sua velocidade depende de quão rápido cada indutor consegue alcançar seu estado de corrente máxima e o quão rápido cada capacitor é capaz de carregar até o máximo. Esperamos que a velocidade da onda seja inversamente proporcional a uma função que envolva o produto da indutância pela capacitância, em uma linha de transmissão sem perdas a velocidade da onda é dada por $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (mostraremos melhor na seção II-D), onde L e C são especificados por unidade de comprimento.

O resistor é a característica de rede de formação de pulsos, caso a chave dele seja ligada.

Agora, podemos supor que a existência de tensão e corrente através e entre os condutores da linha de transmissão implica a existência de campos elétricos e magnéticos no espaço em volta dos condutores. E então é possível fazer a análise de linhas de transmissão.

D. Equações

Nesta seção vamos obter as equações diferenciais, conhecidas como equações de onda, nas quais a tensão e a corrente devem satisfazer em uma linha de transmissão uniforme. Para isso temos o modelo na figura 4 que nos auxiliara a escrever duas equações de circuitos, e utilizaremos elas para obter as equações de onda.

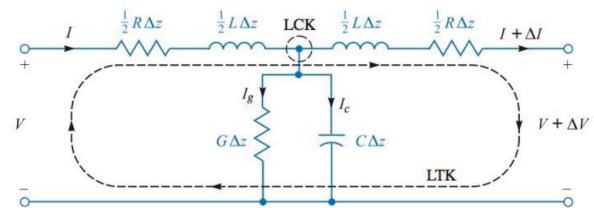


Fig. 4. Modelo de elementos concentrados para uma seção curta de linha de transmissão com perdas.

No modelo temos as constantes primárias da linha de transmissão, todas por unidade de comprimento. Na quais são:

- L , indutância;
- C , capacitância;
- G , condutância em paralelo;
- R , resistência em série.

Conhecendo a frequência e as dimensões podemos determinar todos esses valores. Utilizamos a condutância em paralelo para modelar a corrente de fuga que pode ocorrer ao longo da linha pelo dielétrico. Fazemos a suposição de que o dielétrico pode assumir uma condutividade σ_d em adição à constante dielétrica ϵ_r sendo que a última afeta a capacitância. A

resistência em série esta associada com qualquer condutividade finita σ_c nos condutores. R, G são responsáveis por perdas de potencia na transmissão.

Consideramos a propagação na direção a_z , conforme mostra o círculo tracejado na figura 4, vamos determinar como e qual intensidade a tensão e a corrente de saída são alteradas quanto a seus valores de entrada, e quando o seu comprimento se aproxima de um valor muito pequeno, assim teremos duas equações diferenciais que serão, uma a taxa de variação da tensão em relação a a_z , e outra a taxa de variação da corrente em relação a a_z .

Temos que na figura 4 que os valores da tensão e da corrente inicial é V, I e a final é $V + \Delta V$ e $I + \Delta I$, na qual devemos determinar essas diferenças. Usaremos as leis de Kirchhoff para isso.

Vamos aplicar a lei de Kirchhoff das tensões (LTK) no caminho fechado, que envolve o comprimento inteiro:

$$V = \frac{1}{2}RI\Delta z + \frac{1}{2}L\frac{\partial I}{\partial t}\Delta z + \frac{1}{2}L\left(\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial \Delta I}{\partial t}\right)\Delta z + \frac{1}{2}R(I + \Delta I)\Delta z + (V + \Delta V) \quad (1)$$

Fazendo $\frac{\Delta V}{\Delta z}$ em relação a Equação (1) obtemos:

$$\frac{\Delta V}{\Delta z} = -(RI + L\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{2}L\frac{\partial \Delta I}{\partial t} + \frac{1}{2}R\Delta I) \quad (2)$$

Temos que:

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial t}\Delta z \text{ e } \Delta V = \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z \quad (3)$$

Substituindo (3) na Equação (2) resultamos em:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -(1 + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial}{\partial z})(RI + L\frac{\partial I}{\partial t}) \quad (4)$$

Quando Δz se aproxima de zero a Equação (4) se simplifica e fica da seguinte maneira:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -(RI + L\frac{\partial I}{\partial t}) \quad (5)$$

Encontramos a primeira equação que procurávamos. Para a segunda vamos utilizar a lei de Kirchhoff das correntes (LCK), no nó indicado na figura 4, sendo que a tensão no nó será $V + \frac{\Delta V}{2}$:

$$I = I_g + I_c + (I + \Delta I) = G\Delta z(V + \frac{\Delta V}{2}) + C\Delta z\frac{\partial}{\partial t}(V + \frac{\Delta V}{2}) + (I + \Delta I) \quad (6)$$

Utilizando a Equação (3) e simplificando teremos:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(1 + \frac{\Delta z}{2}\frac{\partial}{\partial z})(GV + C\frac{\partial V}{\partial t}) \quad (7)$$

Quando Δz se aproxima de zero a Equação (7) se simplifica e fica da seguinte maneira:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -(GV + C\frac{\partial V}{\partial t}) \quad (8)$$

E então encontramos nossa segunda equação.

As equações diferenciais encontradas (5) e (8) quando acopladas, descrevem a evolução da corrente e da tensão em qualquer linha de transmissão. Na qual pela teoria chamamos de equações do telegrafista. Resolvendo-as nos dá a equação de onda para a linha de transmissão.

Fazendo a derivada da Equação (5) em relação a z e da Equação (8) em relação a t obtemos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -R\frac{\partial I}{\partial z} - L\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} \quad (9)$$

e

$$\frac{\partial I}{\partial z \partial t} = -G\frac{\partial V}{\partial t} - C\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (10)$$

E então substituímos as equações (8) e a (10) na equação (9), resultando em:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial V}{\partial t} + RGV \quad (11)$$

Agora fazemos a derivada da Equação (5) em relação a t e da Equação (8) em relação a z obtemos uma equação para a corrente que tem a forma idêntica a equação (11):

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial I}{\partial t} + RGI \quad (12)$$

Com as equações (11) e (12), obtivemos as equações de onda gerais para a linha de transmissão.

E. Linhas de transmissão sem perdas: Propagação

Propagação sem perdas nos diz que a potência não é dissipada, ou desviada de alguma maneira à medida que a onda viaja ao longo da linha de transmissão. No nosso modelo, a propagação sem perdas ocorre quando R e G são iguais a zero. Com isso as equações (11) e (12) ficam:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \text{ e } \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (13)$$

Mostraremos então a solução para as equações e mostraremos que estão corretas. A solução para a função da tensão é da forma:

$$V(z, t) = f_1(t - \frac{z}{v}) + f_2(t + \frac{z}{v}) = V^+ + V^- \quad (14)$$

Onde v é a velocidade da onda e é constante, e f_1 e f_2 podem ser quaisquer funções. Os argumentos de f_1 e f_2 indicam, respectivamente, um trânsito das funções nos sentidos progressivo e regressivo de z , e associamos os símbolos V^+ e V^- para indicar os sentidos respectivamente.

Verificamos agora que funções que possuem formas para os argumentos como os da Equação (14) são soluções das equações (13). Para isso derivamos parcialmente f_1 , em relação a z e a t , utilizando a regra da cadeia obtemos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial(t - \frac{z}{v})} \frac{\partial(t - \frac{z}{v})}{\partial z} = -\frac{1}{v}f_1 \quad (15)$$

e

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial(t - \frac{z}{v})} \frac{\partial(t - \frac{z}{v})}{\partial t} = \dot{f}_1 \quad (16)$$

E fazendo as derivadas parciais segundas em relação a z e a t novamente, obtemos:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \ddot{f}_1 \text{ e } \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = \ddot{f}_1 \quad (17)$$

Os resultados obtidos na equação (17), podem ser substituídos na equação da tensão da (13), obtendo-se:

$$\frac{1}{v^2} \ddot{f}_1 = LC \ddot{f}_1 \quad (18)$$

E com isso encontramos a expressão para o calculo da velocidade da onda para a propagação sem perdas:

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (19)$$

O mesmo resultado será verdadeiro para a corrente, uma vez que a relação das duas são praticamente idênticas, basta realizar os mesmos procedimentos, ainda sim conhecido como relação entre tensão e corrente.

Voltando para as equações do telegrafista, agora considerando ($R = G = 0$), temos:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \quad (20)$$

e

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (21)$$

Utilizamos a função para a tensão, substituindo a Equação (14) na Equação (20) e usar a regra da cadeia temos:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{Lv} (f_1 - f_2) \quad (22)$$

Integrando a equação (22) no tempo, obtemos a corrente expressa pelos componentes de propagação progressiva e regressiva:

$$I(z, t) = \frac{1}{Lv} [f_1(t - \frac{z}{v}) - f_2(t + \frac{z}{v})] = I^+ + I^- \quad (23)$$

O fator $1/Lv$ que apareceu na equação (23) multiplica a tensão para se obter a corrente, dessa forma identificamos o produto Lv como a impedância característica Z_0 da linha sem perdas. Z_0 é definida como a razão da tensão pela corrente em uma onda única que se propaga. Utilizando a equação (19), podemos escrever Z_0 da seguinte maneira:

$$Z_0 = Lv = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (24)$$

Das equações (14) e (23) observamos que:

$$V^+ = Z_0 I^+ \quad (25)$$

e

$$V^- = -Z_0 I^- \quad (26)$$

Esses resultados podem ser vistos na figura 5, onde temos uma tensão progressiva e regressiva se propagando, as correntes que estão associadas a essas tensões circularão em sentidos opostos. O sinal negativo da equação (26), assegura que uma corrente negativa estará associada com a onda regressiva que se propaga tendo polaridade positiva. A corrente é dita como positiva devido seu sentido horário de circulação na linha, e negativa caso anti-horário.

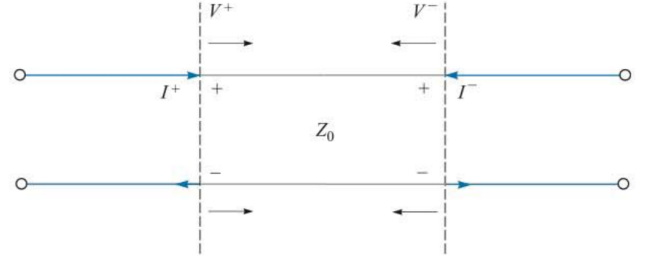


Fig. 5. Sentido das correntes em ondas que possuem polaridade positiva da tensão

III. FINITE-DIFFERENCE TIME-DOMAIN, FDTD

O algoritmo de tempo finito de diferença finita (FDTD) funciona fazendo o uso das equações do telegrafista e aproximando todas as derivadas como diferenças finitas. O sistema é incrementado em pequenas etapas de tempo e conforme o tempo vai passando temos a solução. De uma maneira virtual, qualquer sistema físico governado por uma equação diferencial parcial dependente do tempo (PDE) pode ser facilmente simulado através do uso do FDTD.

Vimos que fazendo as derivadas parciais das equações do telegrafista, chegamos nas equações da onda. Porém faremos a análise em cima das equações do telegrafista considerando linha de transmissão sem perdas ($R = G = 0$) usaremos as equações diferenciais de primeira ordem (20) e (21), onde V e I dependem de z e t ($V(z, t)$, $I(z, t)$), que representam a tensão e a corrente instantâneas na posição z e no tempo t .

Como os computadores possuem uma capacidade finita de armazenamento em memória, a primeira etapa na aplicação do FDTD é definir uma malha, que será um conjunto de pontos discretos no espaço e no tempo que provarão nossas funções. Para fazer essa malha é necessário fixar um espaçamento na grade de Δz no espaço e um tempo Δt .

Vemos na figura 6, que os pontos nesta grade podem ser designados como (z_k, t_n) onde:

$$z_k = (k - 1)\Delta z, k = 1, 2, \dots, K \quad (27)$$

$$t_n = (n - 1)\Delta t, n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (28)$$

Agora que as funções de tensão e corrente foram amostradas em uma grade finita e discreta, estamos prontos para definir

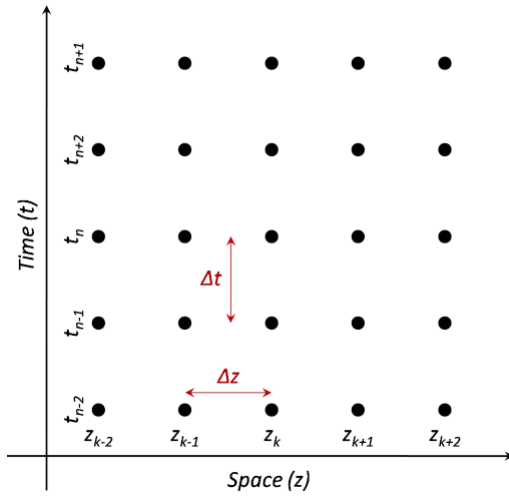


Fig. 6. Uma malha FDTD simples definida no espaço e no tempo

um estêncil, que é uma aproximação numérica para a derivada que usa pontos vizinhos ao longo da malha. Por exemplo, a derivada espacial que atua na função de tensão pode ser aproximada através do uso de uma diferença finita direta:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \approx \frac{v(z + \Delta z, t) - v(z, t)}{\Delta z} \quad (29)$$

Nesse ponto, adotaremos uma convenção na notação de $v(z_k, t_n)$ substituindo por v_k^n , o k representa o ponto no espaço da grade e o n representa o ponto no tempo. Usando essa notação, reescrevemos a (29) como:

$$\frac{\partial}{\partial z} v_k^n \approx \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta z} \quad (30)$$

Porem para minimizar o erro dessa aproximação, aproximaremos todos os nossos derivativos usando o método da diferença central, pois é mais preciso do que diferenças para frente ou para trás. Usaremos então a seguinte aproximação:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \approx \frac{v(z + \Delta z, t) - v(z - \Delta z, t)}{2\Delta z} \quad (31)$$

Reescrevendo com v_k^n temos:

$$\frac{\partial}{\partial z} v_k^n \approx \frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta z} \quad (32)$$

De forma similar para equação da corrente teremos:

$$\frac{\partial}{\partial t} i_k^n \approx \frac{i_k^{n+1} - i_k^{n-1}}{2\Delta t} \quad (33)$$

Usando essas novas expressões nas equações (20) e (21), do telegrafista teremos:

$$\frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2\Delta z} = -R i_k^n - L \frac{i_k^{n+1} - i_k^{n-1}}{2\Delta t} \quad (34)$$

e

$$\frac{i_{k+1}^n - i_{k-1}^n}{2\Delta z} = -G v_k^n - C \frac{v_k^{n+1} - v_k^{n-1}}{2\Delta t} \quad (35)$$

Ainda sim, podemos melhorar o algoritmo. Matematicamente, não há razão para que a tensão e as correntes devam ser definidas ao longo dos mesmos pontos da grade no espaço e no tempo. Para isso suponha que redefinamos todas as nossas amostras para existir em incrementos de meio passo um ao outro. Então mudamos a convenção da malha de v_k^n para $v_{k+1/2}^n$ e i_k^n para $i_k^{n+1/2}$, ficando com uma nova malha como mostra a figura 7.

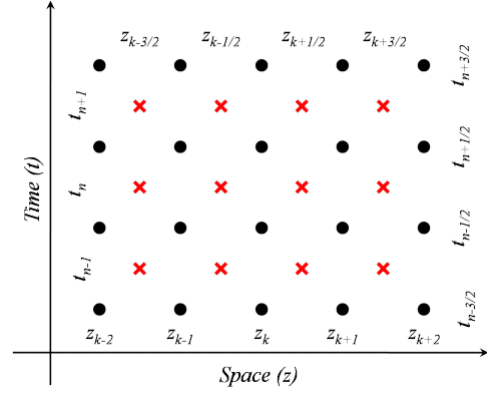


Fig. 7. Nova malha do FDTD, os X vermelhos representam amostras de tensão, e os círculos pretos representa amostras de corrente

Redefinimos a malha dessa maneira para que possamos aproximar as derivadas espacial em v e em i como:

$$\frac{\partial}{\partial z} v_k^n \approx \frac{v_{k+1/2}^n - v_{k-1/2}^n}{\Delta z} \quad (36)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} i_k^n \approx \frac{i_k^{n+1/2} - i_k^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (37)$$

A derivada espacial em v , centrada em torno do ponto k , é definida em termos dos pontos espaciais $k + 1 = 2$ e $k - 1 = 2$. A aproximação da diferença central abrange apenas um comprimento de Δz em vez de $2\Delta z$.

Com essa nova aproximação, colocando nas equações do telegrafista sem perdas, ficamos com:

$$\frac{v_{k+1/2}^n - v_{k-1/2}^n}{\Delta z} = -R i_k^n - L \frac{i_k^{n+1/2} - i_k^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (38)$$

e

$$\frac{i_{k+1}^{n+1/2} - i_k^{n+1/2}}{\Delta z} = -G v_{k+1/2}^n - C \frac{v_{k+1/2}^{n+1} - v_{k+1/2}^n}{\Delta t} \quad (39)$$

No entanto, os termos em i_k^n e $v_{k+1/2}^{n+1/2}$ não se encaixam nos seus pontos da grade apropriados. Para corrigir isso, redefinimos esses termos pelo valor médio entre os dois pontos temporais mais próximos ao longo do estêncil.

Conforme a figura 8 temos para $v_{k+1/2}^{n+1/2}$ o novo valor de:

$$v_{k+1/2}^{n+1/2} \approx \frac{v_{k+1/2}^{n+1} + v_{k+1/2}^n}{2} \quad (40)$$

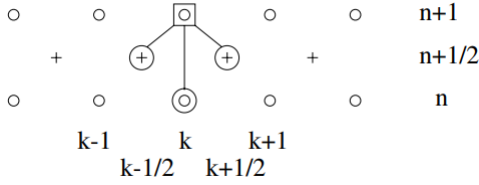


Fig. 8. Estêncil da tensão

E conforme a figura 9 temos para i_k^n o novo valor de:

$$i_k^n \approx \frac{i_k^{n+1/2} + i_k^{n-1/2}}{2} \quad (41)$$

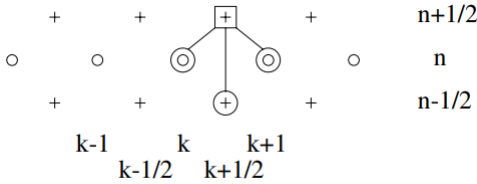


Figure 2.5 The current stencil.

Fig. 9. Estêncil da tensão

Com essas novas considerações conseguimos então encontrar uma nova expressão para as equações do telegrafista (sem perdas), representando uma aproximação numérica direta, que pode ser calculada por um computador:

$$\frac{v_{k+1/2}^n - v_{k-1/2}^n}{\Delta z} = -\frac{1}{2}R(i_k^{n+1/2} + i_k^{n-1/2}) - L \frac{i_k^{n+1/2} - i_k^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (42)$$

e

$$\frac{i_{k+1}^{n+1/2} - i_k^{n+1/2}}{\Delta z} = -\frac{1}{2}G(v_{k+1/2}^{n+1} + v_{k+1/2}^n) - C \frac{v_{k+1/2}^{n+1} - v_{k+1/2}^n}{\Delta t} \quad (43)$$

A partir disso vamos isolar o "próximo termo" da corrente ou tensão das equações, desse modo conseguiremos escrever o próximo termo a ser calculado em função de termos já conhecidos fazendo assim com que possamos simular a linha de transmissão usando um método iterativo..

$$i_k^{n+1/2} = c1(v_{k+1/2}^n - v_{k-1/2}^n) + c2i_k^{n-1/2} \quad (44)$$

e

$$v_{k+1/2}^{n+1} = c3(v_{k+1/2}^{n+1/2} - i_k^{n+1/2}) + c4v_{k+1/2}^n \quad (45)$$

Onde as constantes $c1$, $c2$, $c3$ e $c4$ são:

$$c1 = -\frac{2\Delta t}{2\Delta z L} \quad (46)$$

$$c2 = 1 \quad (47)$$

$$c3 = -\frac{2\Delta t}{2\Delta z C} \quad (48)$$

$$c4 = 1 \quad (49)$$

IV. DESCRIÇÃO DO CÓDIGO

O código consiste em utilizar o método FDTD para calcular o valor da tensão e corrente em diferentes pontos do tempo e espaço em uma linha de transmissão, de modo a simular o seu transiente. Para isso utilizamos a linguagem de programação python, que oferece uma série de bibliotecas que facilitam o cálculo e a exibição dos resultados. Inicialmente importamos as bibliotecas necessárias, matplotlib, numpy e math, definimos as constantes envolvidas no problema sendo que algumas dessas constantes precisaram ser calculadas a partir dos dados informados na descrição do trabalho/projeto.

Para observar os resultados, optamos por simular uma linha de transmissão de 1000 metros, esse valor pode ser facilmente alterado ao substituir o valor da variável l . A partir disso dividimos a linha de transmissão em $kmax$ intervalos de modo que cada intervalo fossem igualmente espaçados obtendo assim um passo na variável Δz que representa o Δz no eixo z . A partir disso calculamos a variável Δt que representa o Δt (tamanho dos passos no eixo do tempo) de modo a manter a estabilidade do algoritmo ou seja Δt foi escolhido de modo a sempre ser menor ou igual a $\frac{\Delta z}{V_p}$ (escolhemos $0,5 * \frac{\Delta z}{V_p}$).

Além disso declaramos as estruturas responsáveis por armazenar os dados obtidos e atribuir a elas as condições iniciais envolvidas. Em uma linha de transmissão sem perdas de impedância característica Z_0 ligada a um gerador de pulsos de tensão V_g com impedância interna Z_g ao ligarmos o gerador a corrente de partida apenas "enxerga" a as impedâncias Z_g e Z_0 sendo assim podemos descrever a situação inicial da linha da seguinte forma:

Condições iniciais, $V(0,0)$ pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$V(0,0) = \frac{V_g * Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (50)$$

e

$$I(0,0) = \frac{V(0,0)}{Z_0} \quad (51)$$

Em uma linha de transmissão sem perdas podemos obter o valor de L e C em função da impedância característica Z_0 da linha de transmissão e da velocidade de propagação do sinal na linha de transmissão:

$$L = \frac{Z_0}{V_p} \quad (52)$$

e

$$C = \frac{1}{V_p * Z_0} \quad (53)$$

Onde V_p é a velocidade de propagação do sinal na linha de transmissão, equação (19).

Quando chegamos ao final de nossa linha de transmissão devemos levar em consideração as condições impostas pela carga que conectamos aos seus terminais, de modo que devemos levar isso em consideração no último passo de cada iteração do algoritmo. Quando deixamos a linha curto circuito (impedância da carga = 0) sabemos que a diferença de potencial entre os terminais da linha de transmissão no ponto final é de 0V, já quando a linha está em circuito aberto (impedância da carga $\rightarrow \infty$) a constante gamaL assume o valor infinito.

De acordo com a teoria das linhas de transmissão, podemos calcular as constantes gamaS e gamaL através das seguintes equações:

$$\text{gamaS} = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (54)$$

$$\text{gamaL} = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} \quad (55)$$

Essas equações dizem respeito aos coeficientes de reflexão relativos à linha de transmissão. Enquanto gamaS diz respeito à reflexão no gerador, gamaL diz respeito à reflexão na carga, no fim da linha. Quando esses coeficientes atingem o valor 0, a onda não é refletida. Já quando o coeficiente de reflexão é infinito, a onda é totalmente refletida. O código desenvolvido permite o ajuste das impedâncias tanto na carga como no gerador. Além disso, os coeficientes de reflexão são demonstrados posteriormente no gráfico.

Após isso, começamos a iteração a fim de calcular a tensão e corrente em cada ponto do tempo e espaço, para isso adicionamos aos laços de repetição as condições de contorno adequadas para cada caso. Vale ressaltar que a fim de obter mais eficiência computacional durante a iteração deixamos de fora a multiplicação da tensão por uma constante pois é mais eficiente efetuar essa multiplicação no final da iteração, a fim de evitar cálculos repetitivos. Após isso o código seguinte trata da exibição dos dados em dois gráficos animados que apresentam a tensão e a corrente ao longo da linha de transmissão, cada frame representa um ponto no tempo de modo que podemos observar a variação da tensão e da corrente na linha de transmissão com o passar do tempo.

Note que para alterar entre os casos que foram pedidos para o trabalho, basta alterar o valor da impedância da carga Z_l no código usando $Z_l = \text{math.inf}$ para um circuito aberto, $Z_l = 0$ para representar um curto circuito e $Z_l = 100$ para uma impedância na carga de 100Ω. Para alterar as fontes de tensão, existem duas funções, $\text{fonte}_1()$ e $\text{fonte}_2()$ que representam os geradores e podem ser postas no trecho de código relativo à condição inicial. No código há um comentário mencionando esta parte.

V. RESULTADOS OBTIDOS E ANÁLISES.

Com relação aos resultados, devido a existirem muitos casos e estes serem cortes que variam no tempo, optamos por gravar vídeos, os quais estão contidos neste link <https://github.com/felfipe/OndasEletromagFDTD/tree/master/videos>. Para exemplificar, podemos ver na figura abaixo um corte da tensão e corrente se propagando na linha de transmissão, antes de ser refletida. Na outra figura mais abaixo, podemos ver esta mesma linha em um corte de tempo posterior, no qual a onda já foi parcialmente refletida. Em ambos os casos, a impedância da carga é de 100 ohms.

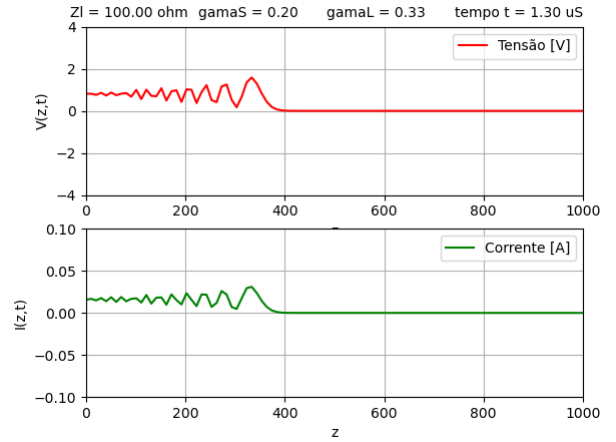


Fig. 10. Onda se propagando no sentido da carga em uma linha de transmissão

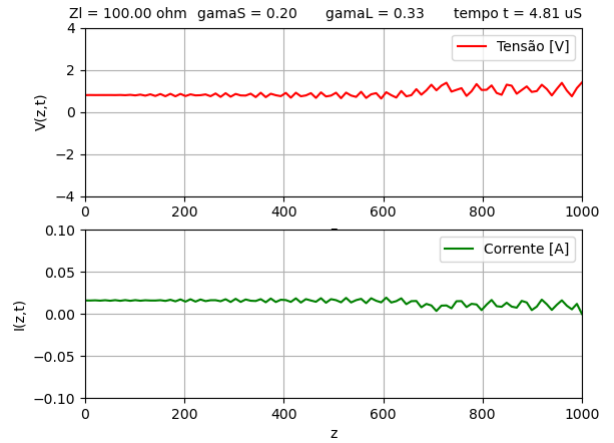


Fig. 11. Onda refletida uma linha de transmissão

Os resultados obtidos foram satisfatórios pois pudemos observar os resultados teóricos do transiente nas linhas de transmissão na simulação de modo que conseguimos observar os efeitos da reflexão do sinal e também o tempo de propagação da informação na linha de transmissão em diferentes casos. No casos em que a linha estava em aberto ($Z_0 = \text{math.inf}$), notamos que a onda é completamente refletida na carga. Para a

primeira fonte, temos que a tensão ao longo da linha converge para o valor da tensão no gerador (regime permanente). Já para o pulso da fonte 2, o pulso também é refletido e a tensão na linha converge para 0 devido aos efeitos dissipativos de Z_g . Em ambos os casos a corrente converge para 0.

Quando a linha estava em curto ($Z_0 = 0$), observamos que a onda também é refletida, entretanto parcialmente. Ao longo do tempo, podemos observar que em ambos os casos, tanto na fonte 1 como na fonte 2, a tensão converge para 0. Entretanto, para a fonte 1, a corrente converge para um valor constante positivo (energia proveniente do gerador), enquanto que para a fonte 2 (pulso), a corrente converge para 0 pois não há fonte constante de energia.

Já quando a impedância da carga é de 100Ω , há reflexão parcial nos dois lados da linha de transmissão. Agora, para a fonte 1, observamos que, diferentemente do primeiro caso, a tensão sobre a linha converge para um valor diferente de 2. Mais especificamente, este valor é algo próximo de 1.143V, mesma tensão obtida a partir de um divisor de tensão entre Z_g e Z_l . A corrente para a fonte 1 converge para um valor constante positivo também. Já para a fonte 2, há a reflexão parcial e os valores de tensão e corrente convergem para 0.

Sendo assim todos os resultados obtidos pela simulação foram condizentes com o que era esperado a partir da análise teórica. Podemos observar diferentes sinais sendo propagados ao longo da linha em posições e tempos específicas, algo que não poderia ser feito facilmente através de contas matemáticas. Podemos observar também para onde os sinais convergem no fim de cada simulação. Por fim, percebemos a importância do ambiente computacional para a simulação de transientes nas linhas de transmissão.

REFERENCES

- [1] William H. Hayt Jr., John A. Buck, "Eletromagnetismo"; tradução: Marco Aurélio de Oliveira Schroeder; revisão técnica: Antonio Pertence Júnior. - Porto Alegre: AMGH, 8. ed., 2013.
- [2] M. N. O. Sadiku. Elementos de Eletromagnetismo. Porto Alegre: Bookman, 3a. ed., 2004.
- [3] J. R. Nagel. The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Algorithm. Acesso através do link: <https://utah.instructure.com/courses/297816/assignments/1750259>
- [4] DAVID B. DAVIDSON "Computational electromagnetics for rf and microwave engineering" Cambridge University Press 2005