

Projeto 3 – FDTD 2D

As equações de Maxwell

George Alexandre Gantus
EESC e ICMC
Universidade de São Paulo
São Carlos - SP, Brasil
Email: georgegantus@usp.br

Renata Oliveira Brito
EESC e ICMC
Universidade de São Paulo
São Carlos - SP, Brasil
Email: renata.oliveira.brito@usp.br

Victor Felipe Domingues do Amaral
EESC e ICMC
Universidade de São Paulo
São Carlos - SP, Brasil
Email: victoramaral@usp.br

Abstract—Relatório final apresentado ao professor Leonardo André Ambrosio sobre uma das avaliações do SEL0612 - Ondas eletromagnéticas. Desenvolvimento de algoritmo que permite a visualização dos campos elétrico e magnético, fornecendo um ótimo ponto de partida para quaisquer estudos posteriores em eletromagnetismo computacional.

I. INTRODUÇÃO

O objetivo deste projeto é explorar conceitos computacionais em eletromagnetismo discretizando as equações de Maxwell e trabalhando em duas dimensões espaciais, usando como referência o capítulo 3 do livro [1], para isso foram resolvidos os problemas 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 e 3.9 deste mesmo capítulo.

As equações de Maxwell descrevem como cargas e correntes servem como fontes de campos elétricos e magnéticos. Elas representam um conjunto de equações diferenciais ou integrais que descrevem o que chamamos de eletromagnetismo clássico, onde campos elétricos E e magnéticos H são as grandezas físicas de interesse. Para então simularmos de uma maneira numérica esses campos, utilizaremos o método FDTD (*Finite-Difference Time-Domain*).

A. Problema proposto 3.1:

Mostre analiticamente que a Lei de Gauss para campo elétrico:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (1)$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2)$$

e para campo magnético:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (4)$$

podem ser derivada da Lei de Faraday:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} - \vec{M} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} - \oint_A \vec{M} \cdot d\vec{A} \quad (6)$$

e da Lei de Ampère:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \vec{J} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = -\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} - \oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (8)$$

para o caso de espaço livre de fonte.

B. Problema proposto 3.2:

Mostre analiticamente que uma equação de onda escalar equivalente a:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \quad (9)$$

pode ser obtida para o modo TEM polarizado em y com direção x de

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{fonte_y} + \sigma E_y) \right] \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[-\frac{\partial E_y}{\partial x} - (M_{fonte_z} + \sigma^* H_z) \right] \quad (11)$$

C. Problema proposto 3.3:

Faça um programa computacional que modela ondas planas na direção x 1D propagando em uma malha uniforme com componentes de campo E_z e H_y . Use as equações (12), (13) e (14) como o algoritmo de escalonamento do tempo. Assume $H_x = 0$ e $j + 1/2$ subscritos podem ser negligenciados. Suponha que o espaço livre esteja em toda parte da malha e use o intervalo de tempo $\Delta t = \Delta x/v$. Termine a malha em E_z componentes na extremidade esquerda e direita. Defina E_z no limite extremo da malha esquerda para uma função de tempo específica, como a função degrau unitário, um pulso Gaussiano ou uma senoide. Com isso, irradiará uma propagação para a direita de um pulso Gaussiano ou de uma onda senoidal na malha pela ação do algoritmo de Yee. Defina $E_z = 0$ no limite extremo da malha direita para simular a presença de um condutor elétrico perfeito. Mostre que o condutor elétrico perfeito atua como um espelho que reflete a onda incidente. Compare as propriedades de reflexão dos componentes E_z e H_y da onda.

D. Problema proposto 3.4:

Repita o problema 3.3, mas termina a malha com um componente $H_y = 0$ no limite extremo direito, para simular a presença de um condutor magnético perfeito. Compare as propriedades de reflexão de ondas dos componentes E_z e H_y da onda devido à presença do condutor magnético perfeito.

E. Problema proposto 3.5:

Repita o problema 3.3, mas use agora o intervalo de tempo $\Delta t = 0,99\Delta x/v$.

F. Problema proposto 3.6:

Repita o problema 3.3, mas use agora o intervalo de tempo $\Delta t = 1,01\Delta x/v$.

G. Problema proposto 3.7:

Faça um programa computacional que modele a propagação 2D de ondas cilíndricas da TM_z em uma malha Yee uniforme. Use as seguintes equações para o algoritmo de escalonamento de tempo

$$\begin{aligned}
 E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= C_a(m) E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n-1/2} + C_b(m) \left(H_y|_{i,j+1/2}^n - H_y|_{i-1,j+1/2}^n + H_x|_{i-1/2,j}^n - H_x|_{i-1/2,j+1}^n - J_{fonte_z}|_{i-1/2,j+1/2}^n \Delta \right) \\
 H_y|_{i-1,j+1/2}^n &+ H_x|_{i-1/2,j}^n - H_x|_{i-1/2,j+1}^n - J_{fonte_z}|_{i-1/2,j+1/2}^n \Delta \\
 m &= \text{MEDIA}_{E_z}|_{i-1/2,j+1/2} \\
 H_x|_{i-1/2,j+1}^{n+1} &= D_a(m) H_x|_{i-1/2,j+1}^n + D_b(m) \left(E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+3/2}^{n+1/2} - M_{fonte_x}|_{i-1/2,j+1}^{n+1/2} \Delta \right) \\
 m &= \text{MEDIA}_{H_x}|_{i-1/2,j+1} \\
 H_y|_{i,j+1/2}^{n+1} &= D_a(m) H_y|_{i,j+1/2}^n + D_b(m) \left(E_z|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - M_{fonte_y}|_{i,j+1/2}^{n+1/2} \Delta \right) \\
 m &= \text{MEDIA}_{H_y}|_{i,j+1/2}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Suponha células quadradas, isto é, $\Delta x = \Delta y \equiv \Delta$, espaço livre em qualquer lugar da malha e um passo $\Delta t = \Delta/(v\sqrt{2})$ no tempo. Finalize a malha em $E_z = 0$ componentes em seus limites externos, simulando a presença de Condutores Elétricos Perfeitos (PECs). Defina um único componente E_z localizado no centro da malha para uma função de tempo específica, como a função degrau unitário, um pulso Gaussiano ou uma senoide. Isso irá gerar uma propagação radial do degrau unitário, onda Gaussiana ou senoidal na malha por conta do algoritmo YEE. Realize visualizações dos campos E_z , H_x e H_y da onda de saída distribuída dentro da malha em um número de tempos instantâneos antes e depois que a onda atingir o limite externo da grade. Compare as propriedades de simetria espacial desses campos em relação ao centro da grade em que a excitação é aplicada.

H. Problema proposto 3.8:

Repita o problema da subseção I-G, mas preencha a malha com um meio condutor eletricamente uniforme. Varie a condutividade para cima a partir de zero e observe como a onda de saída é atenuada.

I. Problema proposto 3.9:

Repita o problema da subseção I-G, mas agora use um passo de tempo de $\Delta t = 1,0005\Delta/(v\sqrt{2})$

II. EQUAÇÕES DE MAXWELL PARA TRÊS DIMENSÕES

Começaremos nossa análise enunciando as equações de Maxwell em um contexto tridimensional que são dadas pela Lei de Faraday (equações (5) e (6)), Lei de Ampère (equações (7) e (8)), Lei de Gauss para o campo elétrico (equações (1) e (2)) e Lei de Gauss para o campo magnético (equações (3) e (4)). Dessas equações temos abaixo a definição dos símbolos que as compõe juntamente com suas unidades em (MKS):

- \vec{E} : Campo elétrico [*volt/metro*]
- \vec{D} : Densidade de fluxo [*coulomb/metro*²]
- \vec{H} : Campo magnético [*ampere/metro*]
- \vec{B} : Densidade de fluxo magnético [*weber/metro*²]
- A : Superfície arbitrária 3D
- $d\vec{A}$: Vetor diferencial normal a superfície A [*metro*²]
- \oint_C : Contorno fechado que limita a superfície A
- $d\vec{l}$: Vetor de tamanho diferencial que caracteriza o contorno l [*metro*]
- \vec{J} : Densidade de corrente elétrica [*ampere/metro*²]
- \vec{M} : Densidade de corrente magnética equivalente [*volt/metro*²]

As equações de Maxwell são um conjunto de equações que compõem a base do eletromagnetismo clássico, juntamente com o eletromagnetismo como um todo, foram peças essenciais para a revolução tecnológica que se iniciou no final do século XIX. E neste trabalho fazem parte do nosso objeto de estudo.

Em materiais lineares, isotrópicos e não dispersivos, temos as seguintes relações de proporção:

$$\begin{aligned}
 \vec{D} &= \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}; \\
 \vec{B} &= \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

onde:

- ϵ : Permissividade elétrica [*farad/metro*]
- ϵ_r : Permissividade elétrica relativa [sem dimensão escalar]
- ϵ_0 : Permissividade elétrica do espaço livre [$8,85410^{-12}$ farads/metro]
- μ : Permeabilidade magnética [*henry/metro*]
- μ_r : Permeabilidade relativa [sem dimensão escalar]
- μ_0 : Permeabilidade magnética do espaço livre [$4\pi 10^{-7}$ henrys/metro]

Nas equações de Maxwell podemos perceber que \vec{J} e \vec{M} podem agir como fontes independentes dos campos elétrico (\vec{E}) e magnético (\vec{H}), para continuar nossa análise vamos dividir \vec{J} e \vec{M} em duas partes cada, onde a primeira parte representa a

parcela da fonte independente e a segunda representa a perda por conversão em energia térmica:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{J}_{fonte} + \sigma \vec{E}; \\ \vec{M} &= \vec{M}_{fonte} + \sigma^* \vec{H}\end{aligned}\quad (16)$$

onde σ representa a condutividade elétrica em [siemens/metro] e σ^* representa a perda magnética equivalente em [ohms/metro]. Podemos substituir agora as equações (15) e (16) nas equações (5) e (7), fornecendo assim as equações de Maxwell em materiais lineares, isotrópicos, não dispersivos e sem perdas:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} - \frac{1}{\mu} (\vec{M}_{fonte} + \sigma^* \vec{H}) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{\varepsilon} (\vec{J}_{fonte} + \sigma \vec{E}) \quad (18)$$

Escrevendo os componentes vetoriais dos operadores rotacionais de (17) e (18) em coordenadas cartesianas é obtido o seguinte sistema:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - (M_{fonte_x} + \sigma^* H_x) \right] \quad (19)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - (M_{fonte_y} + \sigma^* H_y) \right] \quad (20)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - (M_{fonte_z} + \sigma^* H_z) \right] \quad (21)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (J_{fonte_x} + \sigma E_x) \right] \quad (22)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{fonte_y} + \sigma E_y) \right] \quad (23)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (J_{fonte_z} + \sigma E_z) \right] \quad (24)$$

chegando assim em um sistema de 6 equações diferenciais parciais de (19) à (24), formando assim a base do algoritmo numérico FDTD para interações de ondas eletromagnéticas 3D com objetos genéricos. A malha espacial do FDTD deve ser estruturada para que as relações da Lei de Gauss estejam implícitas nas posições dos componentes vetoriais dos campos \vec{E} e \vec{H} da malha e nas operações numéricas de derivação de espaço nesses componentes que modelam a ação do operador rotacional.

III. REDUÇÃO A 2D

Vamos assumir que a estrutura que está sendo modelada se estende até o infinito na direção z , sem alterar a forma ou a posição de sua seção transversal. Se a onda incidente também for uniforme na direção z , todas as derivadas parciais dos campos em relação a z devem ser iguais a zero. Sob essas condições, o conjunto completo das equações de rotacionais de Maxwell dadas de (19) à (24) reduz a:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[-\frac{\partial E_z}{\partial y} - (M_{fonte_x} + \sigma^* H_x) \right] \quad (25)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_{fonte_y} + \sigma^* H_y) \right] \quad (26)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - (M_{fonte_z} + \sigma^* H_z) \right] \quad (27)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - (J_{fonte_x} + \sigma E_x) \right] \quad (28)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{fonte_y} + \sigma E_y) \right] \quad (29)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (J_{fonte_z} + \sigma E_z) \right] \quad (30)$$

A. Modo TM_z

Considere as equações de (25) à (30) de acordo com os componentes do vetor de campo. Por exemplo, tome o primeiro grupo como (25), (26) e (30), onde envolve apenas H_x , H_y e E_z . E então chamamos esse conjunto de componentes de campo como *modo magnético transversal em relação a z* (TM_z), em duas dimensões:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[-\frac{\partial E_z}{\partial y} - (M_{fonte_x} + \sigma^* H_x) \right] \quad (31)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_{fonte_y} + \sigma^* H_y) \right] \quad (32)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (J_{fonte_z} + \sigma E_z) \right] \quad (33)$$

B. Modo TE_z

Depois podemos considerar o segundo grupo, (28), (29) e (27) onde envolve apenas E_x , E_y e H_z . E então chamamos esse conjunto de componentes de campo como *modo elétrico transversal em relação a z* (TE_z), em duas dimensões:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - (J_{fonte_x} + \sigma E_x) \right] \quad (34)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{fonte_y} + \sigma E_y) \right] \quad (35)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - (M_{fonte_z} + \sigma^* H_z) \right] \quad (36)$$

Com isso é possível de se notar que os modos TM_z e TE_z não contêm componentes vetoriais de campo comuns. Assim, esses modos podem existir simultaneamente sem interações mútuas para estruturas compostas de materiais isotrópicos ou materiais anisotrópicos que não possuem componentes fora da diagonal nos tensores constitutivos. Os modos TM_z e TE_z constituem as duas maneiras possíveis pelos quais os problemas 2D de interação com ondas eletromagnéticas podem ser formuladas para o caso de derivadas parciais zero na direção z .

IV. REDUÇÃO A 1D

A. Modo TEM com polarização z e direção x

Supondo que não existe excitação no campo eletromagnético e que não existe qualquer variação na geometria modelada, ambos na direção y . Fazendo isso, as derivadas parciais do campo em relação a y e a z são iguais a zero, e a que a estrutura de interação consiste em um espaço infinito com possíveis camadas de material na direção x . Com isso, o modo TM_z 2D das equações de Maxwell em coordenadas retangulares, dadas nas equações (31), (32) e (33) se reduz a:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}(M_{fonte_x} + \sigma^* H_x) \quad (37)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_{fonte_y} + \sigma^* H_y) \right] \quad (38)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - (J_{fonte_z} + \sigma E_z) \right] \quad (39)$$

Assumindo $M_{fonte_x} = 0$ para todos os tempos, e $H_x = 0$ em $t = 0$, então da equação (37) implica que $\partial H_x / \partial t = 0$ em $t = 0$. Como não há mudanças em H_x , pois nada a excita, no início da observação, então permanece zero. Com isso temos um conjunto de equações envolvendo H_y e E_z . E então chamamos esse conjunto como *onda eletromagnética transversal (TEM)* polarizada em z com direção x , em uma dimensão:

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (M_{fonte_y} + \sigma^* H_y) \right] \quad (40)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - (J_{fonte_z} + \sigma E_z) \right] \quad (41)$$

B. Modo TEM com polarização y e direção x

Assumindo novamente que todas as derivadas parciais em relação a y são iguais a zero, o TE_z 2D das equações de Maxwell em coordenadas retangulares dadas nas equações (34), (35) e (36) se reduzem a:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon}(J_{fonte_x} + \sigma E_x) \quad (42)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{fonte_y} + \sigma E_y) \right] \quad (43)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[-\frac{\partial E_y}{\partial x} - (M_{fonte_z} + \sigma^* H_z) \right] \quad (44)$$

Assumindo $J_{fonte_x} = 0$ para todo o tempo, e $E_x = 0$ em $t = 0$, então da equação (42) temos que $\partial E_x / \partial t = 0$ em $t = 0$. Como não há mudanças em E_x , pois nada a excita, no início da observação, então permanece zero. Com isso temos um conjunto de equações envolvendo E_y e H_z . E então chamamos esse conjunto como *onda eletromagnética transversal (TEM)* polarizada em y com direção x , em uma dimensão:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{fonte_y} + \sigma E_y) \right] \quad (45)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[-\frac{\partial E_y}{\partial x} - (M_{fonte_z} + \sigma^* H_z) \right] \quad (46)$$

V. EQUIVALÊNCIA À EQUAÇÃO DE ONDA 1D

Considerando o modo TEM 1D dado em (40) e (41). Derivamos a partir desse modo uma equação de onda escalar 1D homogênea, sem perdas para H_y assumindo que $M_{fonte_y} = J_{fonte_z} = 0$ e $\sigma^* = \sigma = 0$. Primeiro, deriva parcialmente a equação (40) em relação a t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} \quad (47)$$

agora derivamos parcialmente a equação (41) em relação a x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \quad (48)$$

Como a ordem da derivada parcial não é relevante, devido à linearidade do sistema, podemos substituir as derivadas em relação a t e a x de E_z na equação (48) nas derivadas em relação a t e a x de E_z na equação (47), obtendo assim a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} \quad (49)$$

onde $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Com isso temos que a equação 49 representa uma equação de onda escalar 1D para H_y . O fator de proporcionalidade v , que seria a velocidade de fase, está relacionado à permeabilidade de permissividade do meio, para o espaço livre em que $\mu = \mu_0$ e $\varepsilon = \varepsilon_0$, $v \approx 3 \times 10^8$ [m/s] (velocidade da luz no espaço livre).

Agora para obtermos a equação de onda escalar 1D homogênea, sem perdas para E_z assumindo que $M_{fonte_y} = J_{fonte_z} = 0$ e $\sigma^* = \sigma = 0$. Primeiro, deriva parcialmente a equação (41) em relação a t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial t} \quad (50)$$

e pegando a derivada em relação a x da equação (40), temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \quad (51)$$

substituindo as derivadas parciais t e x de H_y da equação (51) nas derivadas parciais x e t de H_y da equação (50), obtemos:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \quad (52)$$

onde $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Com isso temos que a equação (52) representa uma equação de onda escalar 1D para E_z .

Agora para obtermos a equação de onda escalar 1D homogênea, sem perdas para E_y assumindo que $M_{fonte_y} = J_{fonte_z} = 0$ e $\sigma^* = \sigma = 0$. Primeiro, deriva parcialmente a equação (45) em relação a t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} \quad (53)$$

e pegando a derivada em relação a x da equação (46), temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (54)$$

substituindo as derivadas parciais t e x de H_z da equação (54) nas derivadas parciais x e t de H_z da equação (53), obtemos:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (55)$$

onde $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Com isso temos que a equação (55) representa uma equação de onda escalar 1D para E_y .

Agora para obtermos a equação de onda escalar 1D homogênea, sem perdas para H_z assumindo que $M_{fonte_y} = J_{fonte_z} = 0$ e $\sigma^* = \sigma = 0$. Primeiro, deriva parcialmente a equação (46) em relação a t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} \quad (56)$$

agora derivamos parcialmente a equação (45) em relação a x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad (57)$$

substituímos as derivadas em relação a t e a x de E_y na equação (57) nas derivadas em relação a t e a x de E_y na equação (56), obtendo assim a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad (58)$$

onde $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. Com isso temos que a equação (58) representa uma equação de onda escalar 1D para H_z . O fator de proporcionalidade v que apareceu nas equações (49), (52), (55) e (58) é o mesmo. Com isso, temos que o modo TEM 1D de (40) e (41), fornece ondas de propagação de componentes E e H que viajam em v .

VI. O ALGORITMO YEE

O algoritmo de Yee é responsável pelo surgimento de um conjunto de equações, baseadas no método das diferenças finitas, para o sistema das equações de Maxwell. O algoritmo de Yee possui muita importância pois sua base é muito robusta. O algoritmo de Yee resolve tanto o campo elétrico quanto o campo magnético, no tempo e no espaço, usando as Equações rotacionais de Maxwell. Usando informações do campo elétrico e do campo magnético a solução encontrada torna-se precisa, para um maior número de estruturas, do que resolvendo apenas um deles. Desse modo, podemos modelar as propriedades elétricas e magnéticas do material de maneira direta. Outro fato importante é que ao resolver para ambos os campos, podemos modelar os comportamentos únicos de cada um deles já que ambos estão presentes. Outro ponto importante é que o algoritmo de Yee deixa os componentes de \vec{E} e \vec{H} ordenados no espaço de modo que cada componente de \vec{E} possui em sua volta quatro componentes de \vec{H} e vice-versa. Essa organização permite uma visualização simples de como o espaço está sendo preenchido por um vetor interligado representantes da Lei de Ampere e Lei de Faraday.

Além disso podemos enumerar mais algumas vantagens dessa malha espacial:

- Permite que as expressões para as derivadas usadas no operador rotacional possuam uma natureza relacionada

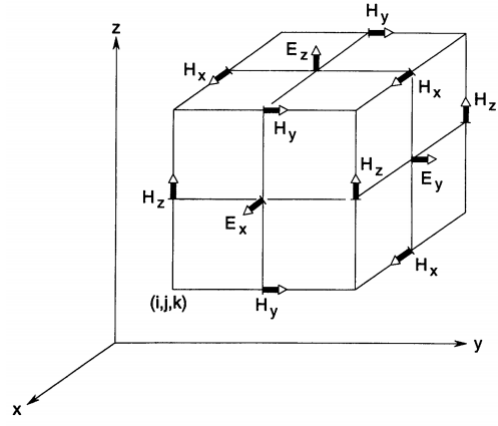


Fig. 1. Posicionamento das componentes vetoriais dos campos elétricos e magnéticos na célula unitária - Cubo de Yee. Figura extraída da referência [1].

a diferenças centrais e que possuam uma precisão de segunda ordem.

- Adotando essa malha a continuidade do campo elétrico e magnético são naturalmente mantidas através da interface de diferentes materiais se um dos eixos escolhidos for paralelo a interface do material, neste caso não precisamos reforçar as condições de contorno na superfície basta especificar a permissividade e permeabilidade do material em cada posição do componente dos campos elétricos e magnéticos. Isso leva a uma aproximação baseada em passos para a superfície do material e para a geometria interna de sua estrutura.
- Esse tipo de malha juntamente com as operações de diferença central reforçam implicitamente ambas as leis de Gauss. Portanto o método de Yee possui uma abordagem que não utiliza divergentes em relação aos campos elétricos e magnéticos na ausência de carga elétrica e magnética livre.

Além de possuir essa organização espacial o algoritmo de Yee centraliza os componentes de \vec{E} e \vec{H} no tempo formando um arranjo que ficou conhecido como arranjo de saltos. Desse modo todos os cálculos de \vec{E} no espaço modelado ficam totalmente armazenados na memória para um ponto específico no tempo usando valores já conhecidos para \vec{H} , em seguida todos os cálculos de \vec{H} são armazenados na memória desta vez utilizando os valores de \vec{E} que acabamos de obter. Continuando o processo até que o limite dos nossos passos temporais seja alcançado. Essa abordagem possui alguns pontos que precisam ser levantados:

- Essa abordagem em saltos é totalmente explícita e evita os problemas envolvidos no cálculo de múltiplas equações e inversão de matrizes
- Também como no caso espacial, as expressões de diferença finita para as derivadas possuem natureza de diferenças centrais e também possuem uma precisão de segunda ordem.
- O algoritmo baseado em passos temporais é não dissipativo

tivo, ou seja, os modos de onda numérica se propagando na malha não sofrem de um decaimento oriundo de um fator não físico.

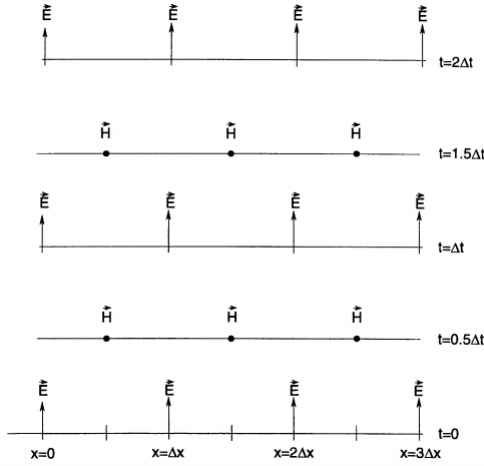


Fig. 2. Gráfico de espaço-tempo do algoritmo de Yee para um exemplo de onda de propagação 1D mostrando o uso de diferenças centrais para derivadas espaciais e o método do pulo do sapo para as derivadas temporais. Figura extraída da referência [1].

A. Notação para diferenças finitas

A notação utilizada por Yee também foi utilizada em ambos os trabalhos anteriores e novamente a adotaremos aqui. Sendo assim uma função qualquer u avaliada no tempo e no espaço possui a seguinte forma:

$$u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u_{i,j,k}^n \quad (59)$$

onde Δx , Δy , Δz e Δt são respectivamente os tamanho de cada passo nas direções x, y, z e t no tempo. Sendo n, i, j e k números inteiros correspondentes ao número do passo atual. Yee utilizou diferenças finitas centrais para obter as expressões das derivadas parciais do espaço e do tempo, tais expressões são de fácil programação e possuem precisão de segunda ordem. A expressão seguinte apresenta um exemplo de derivada parcial em relação a uma das variáveis utilizando diferenças finitas centrais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \\ = \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \end{aligned} \quad (60)$$

Aqui podemos perceber que houve um incremento de $+1/2$ no passo da coordenada x . Yee optou por essa notação pois tinha a intenção de separar \vec{E} e \vec{H} no espaço por apenas metade do tamanho de um passo, desse modo em relação ao eixo x por exemplo, cada representante de \vec{E} fica espaçado por um intervalo de Δx no entanto, a distância entre um representante de \vec{H} e \vec{E} seria de apenas $\Delta x/2$, esta abordagem

também foi replicada para os outros eixos. Quanto ao tempo, também foi utilizado-se a mesma abordagem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \\ = \frac{u_{i,j,k}^{n+1/2} - u_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \end{aligned} \quad (61)$$

Novamente temos em n o incremento de $\pm 1/2$ representando uma diferença finita sobre $\pm 1/2\Delta t$ novamente com o intuito de separar os vetores de \vec{E} e \vec{H} em intervalos de $1/2\Delta t$ a fim de implementar o algoritmo em saltos.

B. Expressões de diferenças finitas para as equações de Maxwell em três dimensões

A partir deste tópico vamos aplicar a notação vista no item anterior e obter aproximações para as equações de Maxwell. Primeiro vamos considerar a equação referente ao campo elétrico no eixo x . Da equação (22) aplicaremos a substituição das derivadas utilizando a aproximação por diferenças centrais, temos:

$$\begin{aligned} \frac{E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \\ \left(\frac{H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - H_z|_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i,j+1/2,k+1}^n - H_y|_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} - \right. \\ \left. J_{\text{fonte } x}|_{i,j+1/2,k+1/2}^n - \sigma_{i,j+1/2,k+1/2} E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^n \right) \end{aligned} \quad (62)$$

Aqui já podemos perceber que todas as posições no tempo do lado da direita da equação estão sendo calculados para o passo n no tempo, incluindo o campo elétrico, no entanto, nossa malha não admite medidas do campo elétrico no ponto $n\Delta t$ sejam armazenados, para resolver esse problema vamos utilizar uma aproximação para o termo do campo elétrico medido no tempo $n\Delta t$.

$$E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^n = \frac{E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}}{2} \quad (63)$$

Aqui escolhemos utilizar uma aproximação baseada na média aritmética dos pontos que serão armazenados na memória. Agora podemos substituir a equação (63) na equação

(62) obtendo:

$$\frac{E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \left(\frac{H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - H_z|_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i,j+1/2,k+1}^n - H_y|_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} - \frac{J_{\text{fonte}_x}|_{i,j+1/2,k+1/2}^n}{2} \right) \quad (64)$$

Agora vamos isolar os termos repetidos do campo elétrico e isolar o tempo do ponto $(n + 1/2)\Delta t$, temos:

$$\left(1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \right) E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \right) E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \left(\frac{H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - H_z|_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i,j+1/2,k+1}^n - H_y|_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} - J_{\text{fonte}_x}|_{i,j+1/2,k+1/2}^n \right) \quad (65)$$

Agora vamos dividir ambos os lados da equação por $(1 + \sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t/2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2})$ obtendo:

$$E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \left[\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right] E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right) \left(\frac{H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - H_z|_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} - \frac{H_y|_{i,j+1/2,k+1}^n - H_y|_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} - J_{\text{fonte}_x}|_{i,j+1/2,k+1/2}^n \right) \quad (66)$$

Utilizando o mesmo procedimento podemos escrever expressões de diferenças finitas baseadas no algoritmo de Yee

para as componentes E_y e E_z do campo elétrico.

$$E_y|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i-1/2,j+1,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}} \right) E_y|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n-1/2} + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}} \right) \left(\frac{H_x|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^n - H_x|_{i-1/2,j+1,k}^n}{\Delta z} - \frac{H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - H_z|_{i-1,j+1,k+1/2}^n}{\Delta x} - J_{\text{fonte}_y}|_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^n \right) \quad (67)$$

$$E_z|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i-1/2,j+1/2,k+1}\Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1/2,k+1}\Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}} \right) E_z|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n-1/2} + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1/2,k+1}\Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}} \right) \left(\frac{H_y|_{i,j+1/2,k+1}^n - H_y|_{i-1,j+1,k+1}^n}{\Delta x} - \frac{H_x|_{i-1/2,j+1,k+1}^n - H_x|_{i-1/2,j,k+1}^n}{\Delta y} - J_{\text{fonte}_z}|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^n \right) \quad (68)$$

Usando o mesmo procedimento podemos obter as equações de diferença finita para as componentes do campo magnético.

$$H_x|_{i-1/2,j+1,k+1}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i-1/2,j+1,k+1}^*\Delta t}{2\mu_{i-1/2,j+1,k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1,k+1}^*\Delta t}{2\mu_{i-1/2,j+1,k+1}}} \right) H_x|_{i-1/2,j+1,k+1}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i-1/2,j+1,k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1,k+1}^*\Delta t}{2\mu_{i-1/2,j+1,k+1}}} \right) \left(\frac{E_y|_{i-1/2,j+1,k+3/2}^{n+1/2} - E_y|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{E_z|_{i-1/2,j+3/2,k+1}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2}}{\Delta y} - M_{\text{fonte}_x}|_{i-1/2,j+1,k+1}^{n+1/2} \right) \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
H_y|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1} &= \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+1/2,k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+1/2,k+1}}} \right) \\
H_x|_{i,j+1/2,k+1}^n &+ \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i,j+1/2,k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+1/2,k+1}}} \right) \\
\left(\frac{E_z|_{i+1/2,j+1,k+1}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+1,k+1}^{n+1/2}}{\Delta x} \right. & \\
- \frac{E_x|_{i,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2} - E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} & \\
\left. - M_{fonte_y}|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2} \right) & \quad (70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1} &= \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+1,k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+1,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1,k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+1,k+1/2}}} \right) \\
H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n &+ \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i,j+1,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1,k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+1,k+1/2}}} \right) \\
\left(\frac{E_x|_{i,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \right. & \\
- \frac{E_y|_{i+1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} & \\
\left. - M_{fonte_z}|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1/2} \right) & \quad (71)
\end{aligned}$$

Agora temos em mão um sistema de equações envolvendo as expressões de diferenças finitas para o campo elétrico e para o campo magnético, de modo que é possível obter o termo seguinte na sequência, em relação ao tempo, em função de termos anteriores.

C. Região do espaço com uma variação contínua de propriedades do material

Para implementar as equações anteriores na situação onde temos uma variação contínua das propriedades do material dependendo da posição vamos definir e armazenar as seguintes atualizações dos coeficientes para cada componente dos campos elétricos e magnéticos. Atualizando os componentes em função da posição (i, j, k) no campo elétrico temos:

$$C_a|_{i,j,k} = \left(1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}} \right) \quad (72)$$

$$C_{b_1}|_{i,j,k} = \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k} \Delta_1} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}} \right) \quad (73)$$

$$C_{b_2}|_{i,j,k} = \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k} \Delta_2} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}} \right) \quad (74)$$

Já para o campo magnético temos:

$$D_a|_{i,j,k} = \left(1 - \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{2\mu_{i,j,k}} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{2\mu_{i,j,k}} \right) \quad (75)$$

$$D_{b_1}|_{i,j,k} = \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k} \Delta_1} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{2\mu_{i,j,k}} \right) \quad (76)$$

$$D_{b_2}|_{i,j,k} = \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k} \Delta_2} \right) / \left(1 + \frac{\sigma_{i,j,k}^* \Delta t}{2\mu_{i,j,k}} \right) \quad (77)$$

Nas equações (72) à (77), Δ_1 e Δ_2 representam os dois incrementos possíveis para malha espacial usando diferenças finitas em cada tipo de campo. Tomando como exemplo um cubo temos $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ e portanto $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ o que implica em $C_{b_1} = C_{b_2}$ e $D_{b_1} = D_{b_2}$ desse modo reduzimos o armazenamento necessário para apenas dois coeficientes que variam no espaço para cada campo. Agora vamos atualizar as equações para os componentes do campo elétrico e magnético levando em conta a variação das propriedades do material.

$$\begin{aligned}
E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= C_{a,E_x}|_{i,j+1/2,k+1/2} E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} \\
C_{b,E_x}|_{i,j+1/2,k+1/2} &\left(H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - H_z|_{i,j,k+1/2}^n \right. \\
&\quad \left. + H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n \right. \\
&\quad \left. - H_z|_{i,j,k+1/2}^n - J_{fonte_y}|_{i-1/2,j+1/2,k+1/2}^n \Delta \right) \quad (78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_y|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2} &= C_{a,E_y}|_{i-1/2,j+1,k+1/2} E_y|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n-1/2} \\
C_{b,E_y}|_{i-1/2,j+1,k+1/2} &\left(H_x|_{i-1/2,j+1,k+1}^n - H_x|_{i-1/2,j+1,k}^n \right. \\
&\quad \left. + H_z|_{i-1,j+1,k+1/2}^n \right. \\
&\quad \left. - H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - J_{fonte_y}|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^n \Delta \right) \quad (79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2} &= C_{a,E_z}|_{i-1/2,j+1/2,k+1} E_z|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n-1/2} \\
C_{b,E_z}|_{i-1/2,j+1/2,k+1} &\left(H_y|_{i,j+1/2,k+1}^n - H_y|_{i-1,j+1/2,k+1}^n \right. \\
&\quad \left. + H_x|_{i-1/2,j,k+1}^n \right. \\
&\quad \left. - H_x|_{i-1/2,j+1,k+1}^n - J_{fonte_z}|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^n \Delta \right) \quad (80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_x|_{i-1/2,j+1,k+1}^{n+1} &= D_{a,H_x}|_{i-1/2,j+1,k+1} H_x|_{i-1/2,j+1,k+1}^n \\
D_{b,H_x}|_{i-1/2,j+1,k+1} &\left(E_y|_{i-1/2,j+1,k+3/2}^{n+1/2} - E_y|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2} \right. \\
&\quad \left. + E_z|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+3/2,k+1}^{n+1/2} - M_{fonte_x}|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2} \Delta \right)
\end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned}
H_y|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1} &= D_{a,H_y}|_{i,j+1/2,k+1} H_y|_{i,j+1/2,k+1}^n \\
D_{b,H_y}|_{i,j+1/2,k+1} &\left(E_z|_{i+1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2} \right. \\
&\quad \left. + E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - E_x|_{i,j+1/2,k+3/2}^{n+1/2} - M_{fonte_y}|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2} \Delta \right)
\end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned}
H_z|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1} &= D_{a,H_z}|_{i,j+1,k+1/2} H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n \\
D_{b,H_z}|_{i,j+1,k+1/2} &\left(E_x|_{i,j+3/2,k+1/2}^{n+1/2} - E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \right. \\
&\quad \left. + E_y|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2} - E_y|_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2} - M_{fonte_z}|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1/2} \Delta \right)
\end{aligned} \quad (83)$$

Na implementação do algoritmo não foi necessário levar em consideração a variação das propriedades do material pois os problemas apenas envolviam materiais com propriedades eletromagnéticas constantes.

D. Redução para o caso bidimensional, casos TM_z e TE_z

As equações vistas nos tópicos anteriores podem ser propriamente adaptadas para os casos bidimensionais TM_z e TE_z . Neste caso assumiremos que todas as derivadas parciais em relação a z são iguais a zero, e levaremos em conta as seguintes condições:

- O conjunto de componentes (E_z, H_z, H_y) presentes na malha em cada corte do plano k , $k+1$ e etc são idênticos e podem ser representados por apenas um desses conjuntos, o que chamamos de modo TM_z
- O conjunto de componentes (H_z, H_x, H_y) presentes na malha em cada corte do plano $k+1/2$, $k+3/2$ e etc, são idênticos e podem ser representados por apenas um desses conjuntos, o que chamamos de modo TE_z
- Os modos TM_z e TE_z são totalmente desacoplados um do outro.

Para obter o correspondendo bidimensional que representa o modo TM_z escreveremos as equações (80), (81) e (82) onde definimos todas as derivadas parciais em relação a z como

sendo nulas e como não há variação em k omitiremos seu índice. Além disso, para nos aproximarmos do algoritmo que implementamos já assumiremos que o meio em questão é um meio homogêneo e portanto C_a , C_b , D_a e D_b são constantes.

$$\begin{aligned}
E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= C_a E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n-1/2} \\
C_b(H_y|_{i,j+1/2}^n - H_y|_{i-1,j+1/2}^n) &+ H_x|_{i-1/2,j+1}^n - J_{fonte_z}|_{i-1/2,j+1/2}^n \Delta
\end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned}
H_x|_{i-1/2,j+1}^{n+1} &= D_a H_x|_{i-1/2,j+1}^n \\
D_b(E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+3/2}^{n+1/2} - M_{fonte_x}|_{i-1/2,j+1}^{n+1/2} \Delta)
\end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned}
H_y|_{i,j+1/2}^{n+1} &= D_a H_y|_{i,j+1/2}^n \\
D_b(E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - E_z|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} - M_{fonte_y}|_{i,j+1/2}^{n+1/2} \Delta)
\end{aligned} \quad (86)$$

Para obter o correspondendo bidimensional que representa o modo TE_z escreveremos as equações (78), (79) e (83), onde definimos todas as derivadas parciais em relação a z como sendo nulas e como não há variação em k omitiremos seu índice. Além disso, para nos aproximarmos do algoritmo que implementamos já assumiremos que o meio em questão é um meio homogêneo e portanto C_a , C_b , D_a e D_b são constantes.

$$\begin{aligned}
E_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} &= C_a E_x|_{i,j+1/2}^{n-1/2} \\
C_b(H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - H_z|_{i,j,k+1/2}^n - J_{fonte_x}|_{i,j+1/2}^n \Delta)
\end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned}
E_y|_{i-1/2,j+1}^{n+1/2} &= C_a E_y|_{i-1/2,j+1}^{n-1/2} \\
C_b(H_z|_{i-1,j+1,k+1/2}^n - H_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - J_{fonte_y}|_{i-1/2,j+1}^n \Delta)
\end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned}
H_z|_{i,j+1}^{n+1} &= D_a H_x|_{i,j+1}^n \\
D_b(E_x|_{i,j+3/2}^{n+1/2} - E_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} + E_y|_{i-1/2,j+1}^{n+1/2} - E_y|_{i+1/2,j+1}^{n+1/2} - M_{fonte_z}|_{i,j+1}^{n+1/2} \Delta)
\end{aligned} \quad (89)$$

VII. DETALHES DA IMPLEMENTAÇÃO

Para a implementação do programa optou-se pelo uso da linguagem de programação *Python* pela afinidade dos integrantes do grupo com a linguagem e por esta oferecer ferramentas e bibliotecas que facilitam o desenvolvimento de uma solução numérica, as bibliotecas utilizadas foram:

- *Matplotlib* - Para a exibição dos gráficos
- *Scipy* - Utilizada para fornecer constantes científicas
- *Math* - Oferecer uma maior variedade de recursos matemáticos

- *Numpy* - Facilitar as operações com matrizes e vetores

Além disso podemos ressaltar que a escolha por *Python* foi importante pois esta linguagem permite que o código escrito possua uma alta legibilidade. O código desenvolvido encontra-se no repositório do *Github*, dentro da pasta Trabalho 3, cujo link encontra-se no fim deste relatório, quanto a implementação utilizamos os conceitos desenvolvidos até aqui para implementar o algoritmo de Yee em seu caso bidimensional.

VIII. RESULTADOS OBTIDOS E ANÁLISES.

A. Resolução do problema proposto 3.1

Partindo da Lei de Ampère sem fontes temos:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (90)$$

integrando em relação a t , ambos os lados da equação (90), obtemos:

$$\vec{D} = \int \left\{ \left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{k} \right] dt \right\} \quad (91)$$

Da equação (1), temos que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{\partial}{\partial x} \int \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) dt + \frac{\partial}{\partial y} \int \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) dt + \frac{\partial}{\partial z} \int \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dt \quad (92)$$

passando a derivada pra dentro e unindo as integrais, obtemos o seguinte resultado como queríamos demonstrar:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \int \left[\frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial z} \right] dt \quad (93)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \int 0 dt \implies \nabla \cdot \vec{D} = 0$$

Partindo da Lei de Faraday temos:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (94)$$

integrando em relação a t , ambos os lados da equação (94), obtemos:

$$\vec{B} = - \int \left\{ \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k} \right] dt \right\} \quad (95)$$

Assim como na equação (3), aplicaremos o divergente em ambos os lados, passando a derivada pra dentro e unindo as integrais, obtendo assim o seguinte resultado como queríamos demonstrar:

$$\nabla \cdot \vec{B} = - \int \left[\frac{\partial E_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial E_x}{\partial y \partial z} \right] dt \quad (96)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = - \int 0 dt \implies \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

B. Resolução do problema proposto 3.2

Para obtermos um equivalente analítico para a equação (52), iremos considerar inicialmente $M_s = J_s = 0$ e $\sigma = \sigma^* = 0$, sendo assim temos:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (97)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (98)$$

derivando ambos os lados da equação (98) em relação a t temos:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x} \quad (99)$$

derivando ambos os lados da equação (97) em relação a x temos:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t \partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (100)$$

substituindo a equação (100) na equação (99), temos:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (101)$$

considerando $\frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = v$ temos:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (102)$$

em que é análogo a equação de onda escalar (52).

Podemos repetir este procedimento para o campo H

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_y}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} \quad (103)$$

e

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} = - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad (104)$$

substituindo a equação (104) na equação (103) obtemos:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad (105)$$

sendo $v^2 = \frac{1}{\mu \varepsilon}$ temos:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad (106)$$

em que é análogo a equação de onda escalar (52).

C. Resolução do problema proposto 3.3

O código da implementação encontra-se no repositório do Github. Com a implementação do algoritmo foi possível obter os seguintes gráficos 3 e 4.

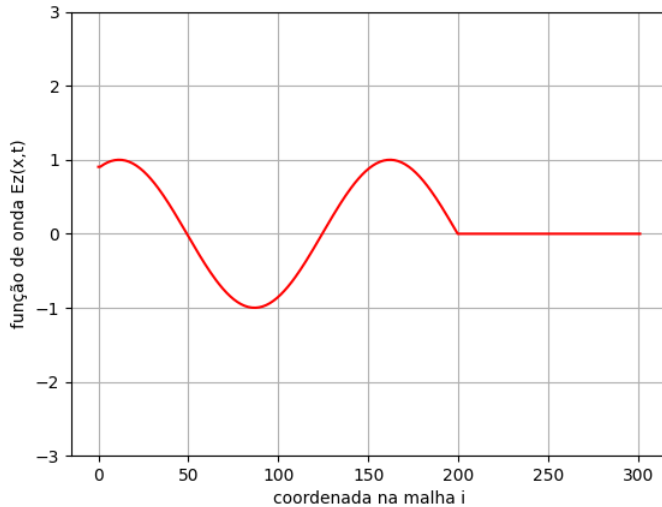


Fig. 3. Gráfico do pulso se propagando.

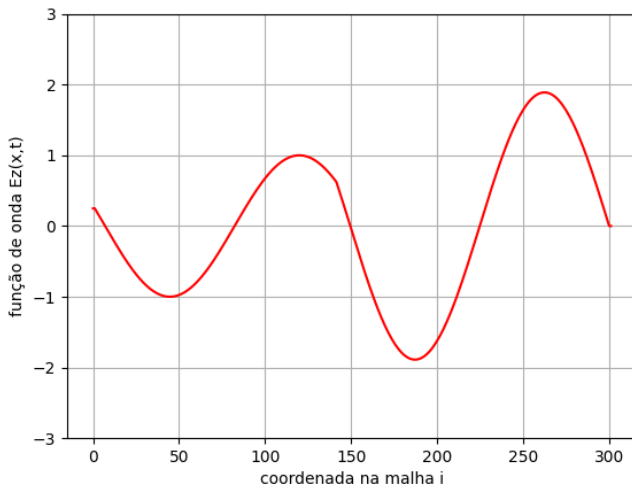


Fig. 4. Gráfico do pulso sofrendo reflexão.

No código implementado é possível exibir uma animação para obter um resultado visual mais completo, com diferentes pontos no tempo.

D. Resolução do problema proposto 3.4

O código da implementação encontra-se no repositório do Github. Com a implementação do algoritmo foi possível obter o seguinte gráfico 5:

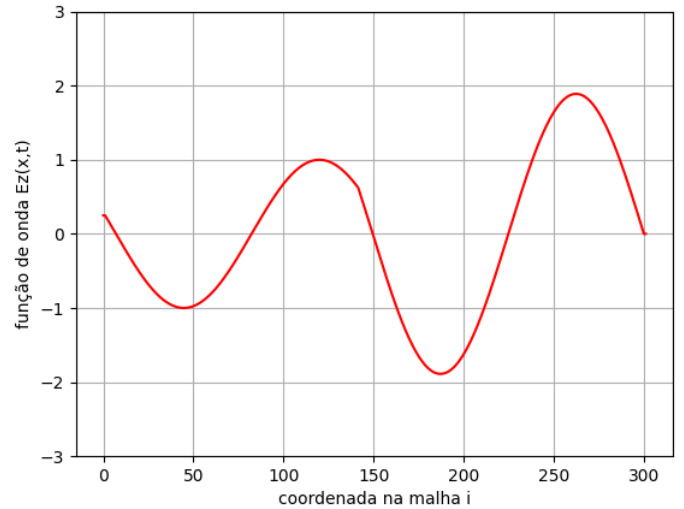


Fig. 5. Gráfico de pulso se propagando.

E. Resolução do problema proposto 3.5

Neste exercício, percebemos que a entrada senoidal se comporta bem sem ruídos, porém a entrada degrau sofre de ruídos. As imagens 6 e 7 exemplificam.

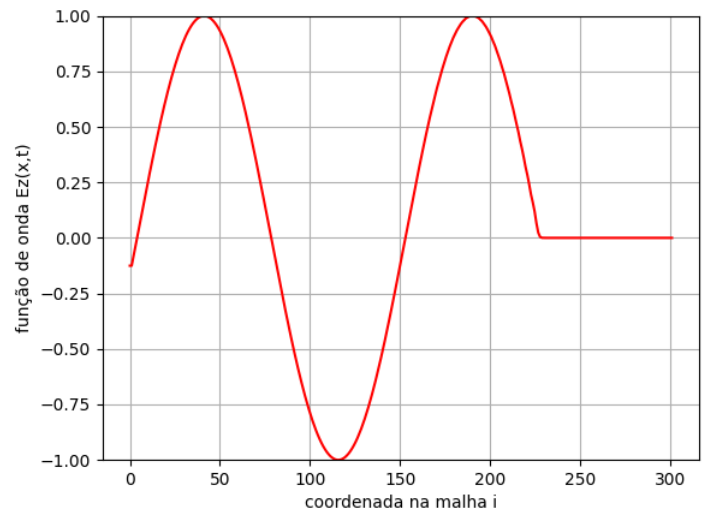


Fig. 6. Entrada senoidal

O código da implementação encontra-se no repositório do Github.

F. Resolução do problema proposto 3.6

Neste exercício, utilizamos o conceito de estabilidade. No exercício em questão, para $1.01v/\Delta$, o algoritmo se torna instável, como na figura 8.

O código da implementação encontra-se no repositório do Github.

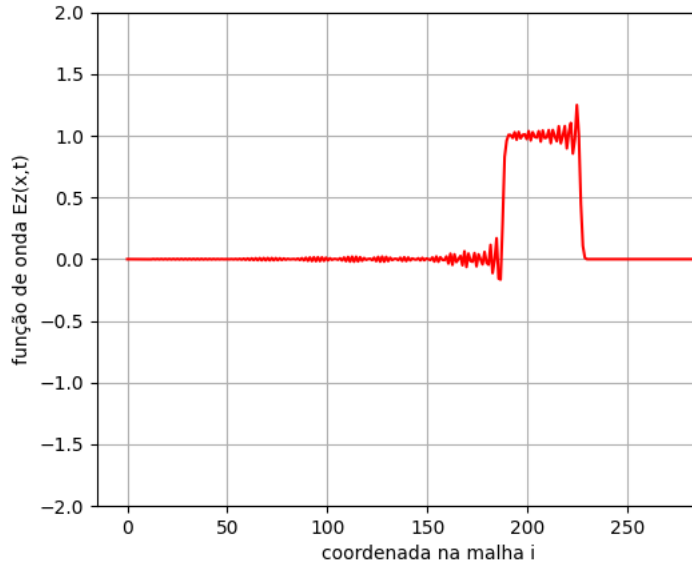


Fig. 7. Pulso distorcido

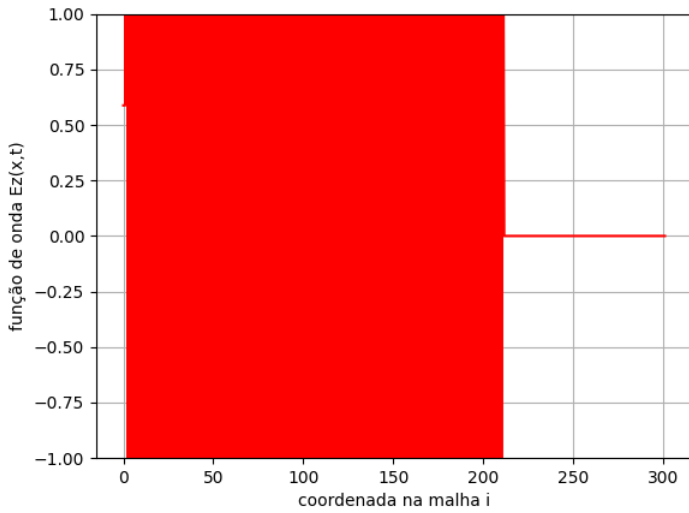


Fig. 8. Algoritmo instável

G. Resolução do problema proposto 3.7

Para este problema, utilizamos uma fonte senoidal. A frequência da fonte foi escolhida de modo que ao tempo sejam completados 4 ciclos. Os valores de σ e σ^* foram considerados nulos. A imagem 9 mostra o campo E_z .

O código da implementação encontra-se no repositório do Github.

H. Resolução do problema proposto 3.8

Para o exercício 3.8, foi considerado $\sigma = 5 \times 10^{-4}$. Podemos perceber uma certa atenuação do campo. É possível verificar na imagem 10.

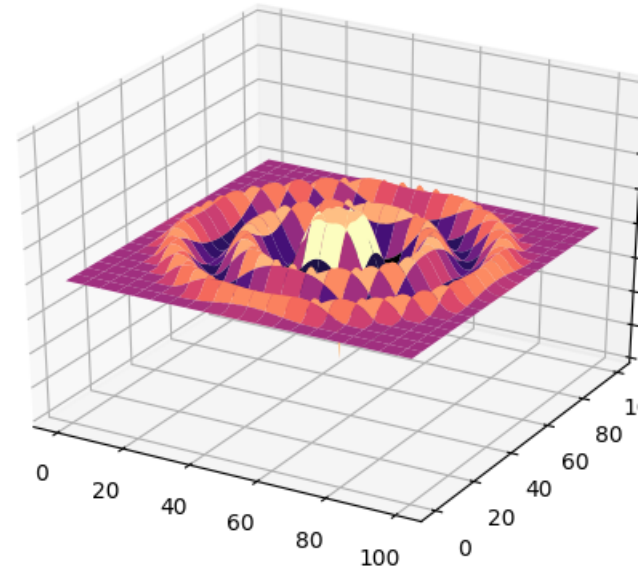


Fig. 9. Campo Elétrico E_z

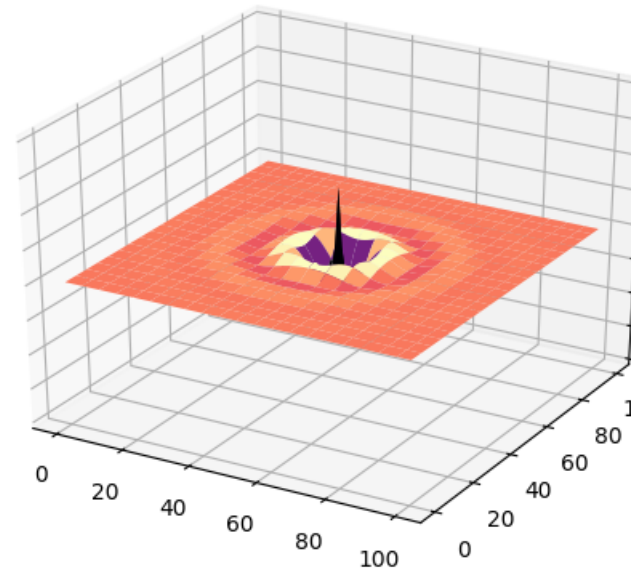


Fig. 10. Campo Elétrico E_z

O código da implementação encontra-se no repositório do Github.

I. Resolução do problema proposto 3.9

Para o exercício 3.9, implementamos uma entrada degrau. Percebemos que há ruídos no gráfico devido sua instabilidade.

O gráfico está representado pela figura 11.

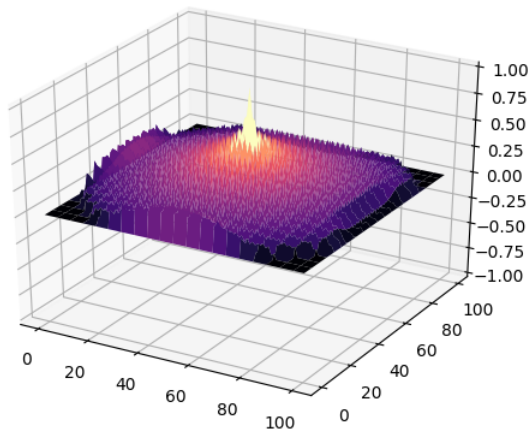


Fig. 11. Entrada degrau

O código da implementação encontra-se no repositório do Github.

IX. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos com a implementação do algoritmo de Yee foram satisfatórios, assim como visto nos itens anteriores foi possível resolver uma grande variedade de exercícios propostos, apresentando assim uma simulação para vários tipos de situação possível utilizando o algoritmo de Yee. Além disso o objetivo do trabalho 3 também foi atingido já que conseguimos colocar em prática uma série de conceitos que desenvolvemos durante o semestre, com os conhecimentos que adquirimos foi possível obter uma discretização para as equações de Maxwell utilizando o método das diferenças finitas e utilizar essa discretização para resolver os problemas propostos. Desse modo conseguimos unir o conhecimento de eletromagnetismo, ondas eletromagnéticas e computação.

REFERENCES

- [1] A. Taflov e S. C. Hagness. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference TimeDomain Method*. Norwood: Artech House, 2a. ed., 2000.
- [2] DAVID B. DAVIDSON. *Computational electromagnetics for rf and microwave engineering*. Cambridge University Press 2005
- [3] M. N. O. Sadiku. *Elementos de Eletromagnetismo*. Porto Alegre: Bookman, 3a. ed., 2004.

<https://github.com/felfipe/OndasEletromagFDTD>