Proyecto I
Optimización Numérica
Programación Cadrática
Clasificación con Separadores Lineales

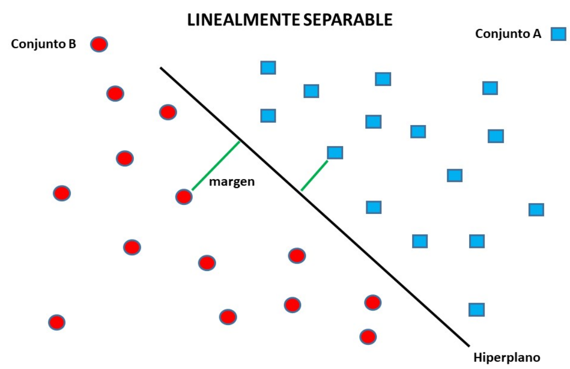
1 Introducción

Definición. Decimos que los conjuntos
$\mathbb{A} = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s\}$, $\mathbb{B} = \{x_{s+1},\ x_{s+2},\ \ldots,\ x_{s+r}\} \subset \mathbb{R}^n$, son **linealemente separables** si y sólo si existe un hiperplano, $\mathcal{H}(w,\ \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid w^T x + \beta = 0\}$, tal que

$$w^T x_i + \beta < 0, \quad \text{para todo } \ x_i \in \mathbb{A}$$

y

$$w^T x_i + \beta > 0, \quad \text{para todo } \ x_i \in \mathbb{B}.$$



En diversas aplicaciones se tienen dos conjuntos finitos de vectores como $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ que ueden indicar correr spam o no, o puntos en el cuerpo humano indicando celulas sanas o enfermas. Se necesita conocer si ambos conjuntos son linealmente separables o no. En caso de ser separables, se tiena una clasificación de los datos con el hiperplano $\mathcal{H}(w,\ \beta)$ y al llegar un nuevo vector y se determina en la zona donde estaraá el nuevo vector, por ejemplo se clasifica si el nuevo correo electrónico es spam o no.

2 Formulación del Modelo

Sean

$$\mathbb{A} = \{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s\} \subset \mathbb{R}^n,$$

y

$$\mathbb{B} = \{x_{s+1},\ x_{s+2},\ \ldots,\ x_{s+r}\} \subset \mathbb{R}^n,$$

para los cuales se debe determinar un hiperplano,

$$\mathcal{H}(w,\ \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid w^T x + \beta = 0\},$$

tal que

$$w^T x_i + \beta < 0, \quad \text{para todo } \ x_i \in \mathbb{A}$$

y

$$w^T x_i + \beta > 0, \quad \text{para todo } \ x_i \in \mathbb{B}.$$

Lema. Sea $\mathcal{H}(w,\ \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid w^T x + \beta = 0\}$, donde $w \neq 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$. La distancia de y al conjunto $\mathcal{H}$ esta determinada por

$$d(y,\ \mathcal{H}(w,\ \beta)) = \frac{|w^T y + \beta|}{\|w\|_2}.$$

El margen de los conjuntos $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ y $\mathcal{H}(w,\ \beta)$ se define como

$$\textbf{Min} \quad \frac{|w^T\ x_i + \beta|}{\|w\|_2}$$

$$x_i \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B},$$

El problema sería

$$\begin{array}{ll} \textbf{Max} & \left(\text{Min } \{\frac{|w^T\ x_i+\beta|}{\|w\|_2} \mid x_i \in \mathbb{A}\cup\mathbb{B}, \}\right) \\ (w,\ \beta) & \\ \textbf{Sujeto a} & w^T x_i + \beta < 0,\ \ x_i \in \mathbb{A} \\ & w^T x_i + \beta > 0,\ \ x_i \in \mathbb{B} \end{array}$$

Por escalamiento, podemos pedir que

$$\textbf{Min}\{|w^T\ x_i + \beta| \ \mid\ x_i \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}\} = 1$$

El problema se convierte

$$\begin{array}{ll} \textbf{Max} & \frac{1}{\|w\|_2} \\ (w,\ \beta) & \\ \textbf{Sujeto a} & \min\{|w^T\ x_i + \beta| \ \mid\ x_i \in \mathbb{A}\cup\mathbb{B}\} = 1 \\ & w^T x_i + \beta < 0,\ \ x_i \in \mathbb{A} \\ & w^T x_i + \beta > 0,\ \ x_i \in \mathbb{B} \end{array}$$

por la primer restricción de desigualdad se obtiene

$$\begin{array}{ll} \textbf{Max} & \frac{1}{\|w\|_2^2} \\ (w,\ \beta) & \\ \textbf{Sujeto a} & \textbf{Min}\{|w^T\ x_i + \beta|\ \ x_i \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}\} = 1 \\ & w^T x_i + \beta \leq -1,\ \ x_i \in \mathbb{A} \\ & w^T x_i + \beta \geq 1,\ \ x_i \in \mathbb{B} \end{array}$$

La formulación final del problema es

$$\begin{array}{ll} \textbf{Min} & (1/2) w^T w \\ (w,\ \beta) & \\ \text{Sujeto a} & w^T x_i + \beta \leq -1,\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s \\ & w^T x_i + \beta \geq 1,\ \ i = s+1,\ s+2,\ \ldots,\ s+r, \end{array}$$

con las variables $w \in \mathbb{R}^n,\ \beta \in \mathbb{R}$.

3 Proyecto

Escriba en Matlab un método de puntos interiores para el problema cuadrático general:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Min} & \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \textbf{Sujeto a} & \mathbf{F}\mathbf{x} \geq \mathbf{d}, \end{array} \tag{1}$$

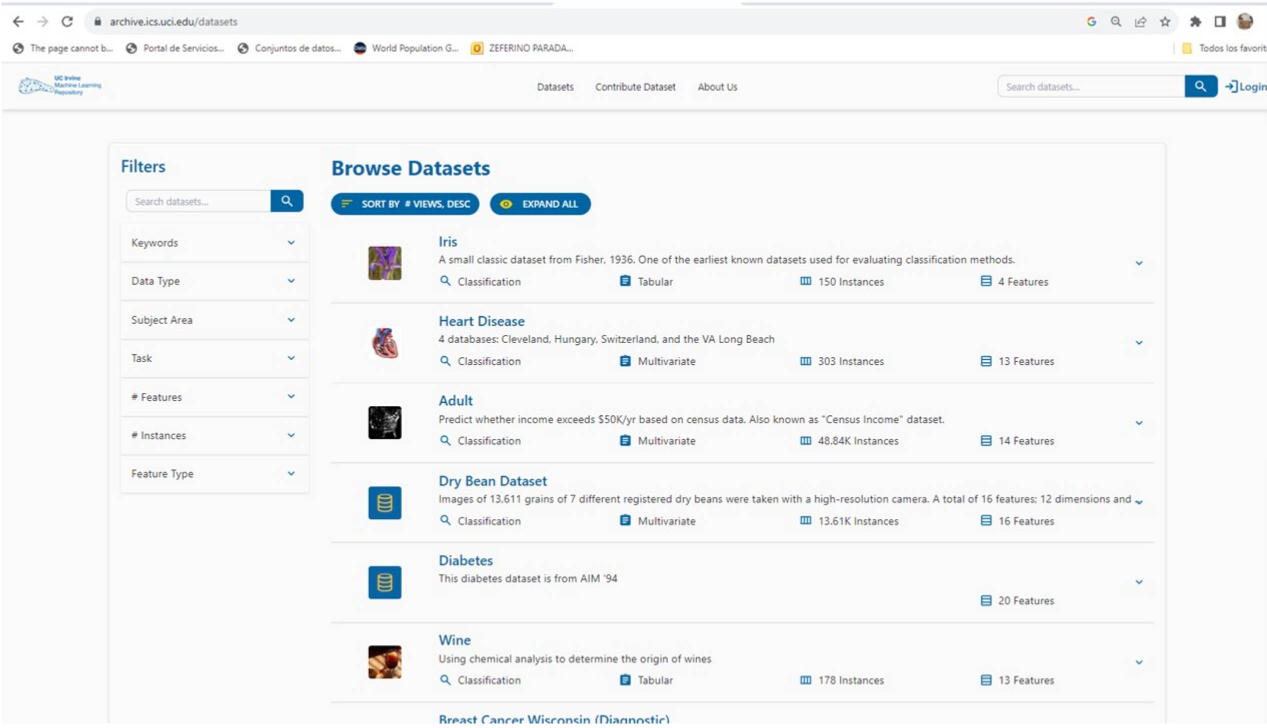
con $\mathbf{Q}$ matriz simétrica positiva definida.

function $[\mathbf{x},\ \mu,\ \mathbf{iter}] = \mathit{qpintpoint}2(\mathbf{Q},\ \mathbf{F},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d})$
% **x** solución óptima del problema.
% μ multiplicador de Lagrange asociado a la restricción $\mathbf{F}\mathbf{x} \geq \mathbf{d}$.
% **iter** número de iteraciones en el proceso.
% La tolerancia para las condiciones necesarias de primer orden es
% $tol = 1e-05$.
% Número máximo de iteraciones es $\mathbf{maxiter} = 100$.

4 Datos

Usaremos los datos de la Universidad de California en Irvine:

https://archive.ics.uci.edu/datasets



Los datos son de:

1. Iris.
2. Wine.
3. Breast cancer.

Los datos deben estudiarlos y entenderlos, en caso necesario llenar algunas entradas sin dato y pasarlos a un archivo que Matlab pueda interpretar en forma sencilla.

5 Qué Entregar

Equipos de a lo más tres personas.

1. Programa: *qpintpoint2.m*
2. Scrip live file . *separacion.mlx*, donde obtenga los valores de w y β en la pantalla y la graficaciones de: $\mathbb{A}^T w - e$ y $\mathbb{B}^T w - e$. Estas gráficas muestran la separación de los conjuntos con respecto al signo, positivo o negativo, que deben tener los puntos con respecto la hiperplano.
3. Enviar por Canvas la base de datos que usaron.

4. Programas con los nombres y clave única de los integrantes del equipo y documentación d elos códigos.

5. Entrega por Canvas, **jueves 12 de octubre de 2023 a las 16:00 horas**. Una entrega por cada equipo.

6. Presentación: **jueves 12 de octubre de 2023 a las 16:00 horas**

6 Calificación

Concepto	**Comentarios y Sugerencias**	**Ponderaión**	**Calificación**
Parte Teórica		**20**	
Programación		**30**	
Resultado Numérico		**30**	
Graficación		**10**	
Presentación		**10**	
TOTAL de puntos		**100**	