Demostraciones del problema del polígono de área máxima

Natalia Hernández, Felipe Castro, Dara Meneses

Diciembre 2023

1. Preguntas

1. Demuestre que la función objetivo es el área del polígono

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_v - 1} r_{i+1} r_i sen(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

2. Pruebe que el número de elementos no cero en $\nabla^2 f(x)$ es $11(n_v - 1) - 8$

3. Pruebe que la primera restricción, $r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j cos(\theta_i - \theta_j) \leq 1$ con $1 \leq i < n_v, i < j \leq n_v$ es equivalente a que el diámetro del polígono sea menor o igual a uno.

2. Demostraciones

2.1. Por demostrar: el área del polígono equivale a la función objetivo

Sea n vértices del polígono. Podemos hacer la transformación a coordenadas polares (r_i, θ_i). Partiendo del punto $(0, 0)$ se pueden crear triángulos tomando el origen, el vértice i y el vértice $i - 1$ como se muestra en la *Figura 1.*

Por ejemplo, en la figura anterior el triángulo 1 está dado por v_0,v_1 y v_3. Tomando la longitud de estos triángulos como r_i como base entonces podemos calcular la altura de la siguiente manera: $r_{i+1} sin(\theta_{i+1} - \theta_i)$ De todo lo anterior obtenemos que el área de cada triángulo es

$$A_i = \frac{1}{2} r_{i+1} r_i sen(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

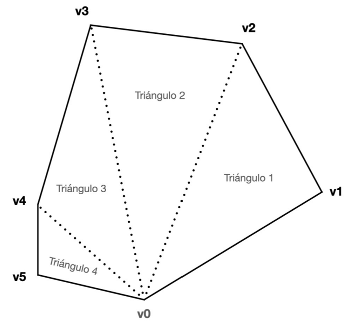

Figura 1: Calcular el área del polígono a través de triángulos

Dado que el área total es la suma de las areas de los $n-1$ triángulos, obtenemos que el área del polígono está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_v-1} r_{i+1}r_i sen(\theta_{i+1}-\theta_i)$$

De lo anterior se puede concluir que la función objetivo es el área del polígono.

2.2. Por demostrar: el número de elementos no cero en $\nabla^2 f(x)$ es $11(n_v-1)-8$

Calculando la matriz Hessiana de $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_v-1} r_{i+1}r_i sen(\theta_{i+1}-\theta_i)$. Notemos que es una función que depende de r_i, r_{i+1}, θ_i y θ_{i+1} para cada $i \in \{1,...,n_v-1\}$
Por lo que la hessiana se puede definir por bloques

$$\begin{bmatrix} H_{rr} & H_{r\theta} \\ H_{\theta r} & H_{\theta\theta} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Donde cada bloque corresponde a las hessianas por pares.

2.2.1. Calcular elementos no cero de H_{rr}

- $\frac{\partial f}{\partial r_i} = \frac{1}{2} r_{i+1} sen(\theta_{i+1}-\theta_i) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r_i^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_{i+1}} = \frac{1}{2} sen(\theta_{i+1}-\theta_i)$
- $\frac{\partial f}{\partial r_{i+1}} = \frac{1}{2} r_i sen(\theta_{i+1}-\theta_i) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r_{i+1}^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r_{i+1} \partial r_i} = \frac{1}{2} sen(\theta_{i+1}-\theta_i)$

Notemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial r_i^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial r_{i+k}} = 0$ para $k \in \{2,3,...,n_v-1\}$ entonces existen $2(n_v-2)$ elementos no cero en H_{rr}

2.2.2. Calcular elementos no cero de $H_{r\theta}$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial \theta_i} = -\frac{1}{2} r_{i+1} cos(\theta_{i+1}-\theta_i)$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial \theta_{i+1}} = \frac{1}{2} r_{i+1} cos(\theta_{i+1} - \theta_i)$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial r_{i+1} \partial \theta_i} = \frac{1}{2} r_i cos(\theta_{i+1} - \theta_i)$

Notemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial r_i \partial \theta_{i+k}} = 0$ para $k \in \{2, 3, ..., n_v - 1\}$ entonces existen $2(n_v - 2) + n_v - 1$ elementos no cero en $H_{r\theta}$

2.2.3. Calcular elementos no cero de $H_{\theta\theta}$ y $H_{\theta r}$

Análogamente al subcaso 2.2.2, $H_{\theta\theta}$ y $H_{\theta r}$ tienen $2(n_v - 2) + n_v - 1$ elementos no cero

2.3. Calcular el número total de elementos no ceros de $\nabla^2 f(x)$

Sumando:

$$
\begin{aligned}
& 2(n_v - 2) + 3[(2(n_v - 2) + n_v - 1)] \\
&\qquad = 2n_v - 4 + 3(2n_v - 4 + n_v - 1) \\
&\qquad = 2n_v - 4 + 6n_v - 12 + 3n_v - 3 \\
&\qquad = 11n_v - 19 \\
&\qquad = 11(n_v - 1) - 8
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el número total de elementos no cero es $11(n_v - 1) - 8$

2.4. Por demostrar: la primera restricción, $r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j cos(\theta_i - \theta_j) \leq 1$ con $1 \leq i < n_v, i < j \leq n_v$ es equivalente a que el diámetro del polígono sea menor o igual a uno

Sea $j > i$ tomamos el triangulo formado por los vertices $(0, 0), (r_i, \theta_i), (r_j, \theta_j)$. Definimos el ángulo del triángulo formado desde el origen como $\Theta = \theta_j - \theta_i$

Definamos d_{ji} como la distancia entre los dos vértices. Tenemos que los lados del triangulo son $d_{j(i)}$, r_i y r_j, entonces podemos aplicar la ley de cosenos de la siguiente manera:

$$d_{ji}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j cos(\theta_j - \theta_i)$$

Por la primera restricción

$$r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j cos(\theta_j - \theta_i) \leq 1 \Rightarrow d_{ji}^2 \leq 1$$

Lo que significa que la distancia entre cualesquiera pares de vértices es menor o igual a 1. Recordemos que el diámetro D de un polígono es la mayor distancia entre todas las diagonales y lados.

$$\therefore D = max\{d_{ij}\} \leq 1, 1 \leq i < j \leq n_v$$

$$\begin{array}{lrll}
\text{Min} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} r_{i+1}r_i \operatorname{sen}(\theta_{i+1}-\theta_i) & & \\
\text{s.a.} & 1 - r_i^2 - r_j^2 + 2r_ir_j\cos(\theta_j - \theta_i) & \geq 0 & 1 \leq i < j \leq n \\
 & 1 - r_i & \geq 0 & 1 \leq i \leq n \\
 & r_i & \geq 0 & 1 \leq i \leq n \\
 & \theta_{i+1} - \theta_i & \geq 0 & 1 \leq i \leq n-1 \\
 & \pi - \theta_i & \geq 0 & 1 \leq i \leq n \\
 & \theta_i & \geq 0 & 1 \leq i \leq n
\end{array}$$