Logica e Inteligencia Artificial

Ulises Jeremias Cornejo Fandos,[1] Lucas Di Cunzolo,[2] and Federico Ramón Gasquez[3]

[1] *13566/7, Licenciatura en Informatica, Facultad de Informatica, UNLP*

[2] *13572/5, Licenciatura en Informatica, Facultad de Informatica, UNLP*

[3] *13598/6, Licenciatura en Informatica, Facultad de Informatica, UNLP*

compiled: October 16, 2018

1. Ejercicio 1

Sean A , B y C tres fórmulas bien formadas (fbfs) del sistema formal L. Dar una demostración sintáctica en L de los siguientes teoremas. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

i. $\vdash_L ((\neg A \to A) \to A)$

(1)	$(\neg A \to A)$	*hipótesis*
(2)	$(\neg A \to (\neg\neg(\neg A \to A) \to \neg A))$	(L_1)
(3)	$(\neg\neg(\neg A \to A) \to \neg A) \to (A \to \neg(\neg A \to A))$	(L_3)
(4)	$(\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A)))$	$(2), (3), SH$
(5)	$(\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))) \to ((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A)))$	(L_2)
(6)	$(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A))$	$(4), (5) MP$
(7)	$(\neg A \to \neg(\neg A \to A))$	$(1), (6) MP$
(8)	$(\neg A \to \neg(\neg A \to A)) \to ((\neg A \to) \to A)$	(L_3)
(9)	$(\neg A \to A) \to A$	$(7), (8) MP$
(10)	A	$(1), (9) MP$

Así pues, $(\neg A \to A) \vdash_L A$.

$\therefore \vdash_L ((\neg A \to A) \to A)$, por el Teorema de Deducción.

ii. $\vdash_L (\neg\neg B \to B)$

Para este caso se escribe a continuación la demostración en L.

(1)	$((B \to ((B \to B) \to B)) \to (B \to (B \to B)) \to (B \to B))$	(L_2)
(2)	$(B \to ((B \to B) \to B))$	(L_1)
(3)	$((B \to (B \to B)) \to (B \to B))$	$(1), (2) MP$
(4)	$(B \to (B \to B))$	(L_1)
(5)	$(B \to B)$	$(3), (4) MP$
(6)	$(\neg\neg B \to B)$	

iii. $\vdash_L ((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$

El enunciado tiene la forma sintáctica del axioma L_3. Luego, alcanza con instanciar una única vez el axioma para dar una demostración sintáctica del teorema.

2. Ejercicio 2

Sean A , B y C tres fórmulas bien formadas (fbfs) del sistema formal L. Dar una demostración sintáctica en L para la siguiente deducción. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

i. $\{((A \to B) \to C), B\} \vdash_L (A \to C)$

(1)	$((A \to B) \to C)$	*hipótesis*
(2)	B	*hipótesis*
(3)	A	*hipótesis*

3. Ejercicio 3

Sea $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $n > 0$, un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que $\Gamma \vdash_L A$. ¿Es cierto que si Γ es satisfactible entonces $\vdash_L A$?. Fundar.

El enunciado es falso. Sabemos a partir del mismo que Γ es un conjunto de fbfs tal que $\Gamma \vdash_L A$. Luego, que Γ sea satisfactible, no nos dice nada respecto de A. Es decir, que A podría ser tranquilamente una contingencia deducible a partir de Γ, y en ese caso no sería válido decir que $\vdash_L A$ para cualquier A.

Por ejemplo, nosotros podríamos tener el siguiente conjunto de fbfs, $\Gamma = \{C, B, C \to A\}$. Luego, A es una contingencia deducible a partir de Γ, pero no necesariamente se cumple que $\vdash_L A$.

4. Ejercicio 4

Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que $\Gamma \vdash_L A$. ¿Es cierto que para todo Γ_i tal que $\Gamma_i \subset \Gamma$, $\Gamma_i \vdash_L A$?. Fundar.

El enunciado es falso. Supongamos un conjunto de fbfs $\Gamma = \{C, B, C \to A\}$, luego sabemos que, siendo $\{C, C \to A\} \subset \Gamma$, podemos afirmar que se puede deducir A a partir de ambos, es decir, que $\{C, C \to A\} \vdash_L A$.

Sin embargo, no podemos afirmar lo mismo de $\{B\}$, incluso cuando $\{B\} \subset \Gamma$. Es decir, no se cumple que $\{B\} \vdash_L A$. Por lo tanto es falso.

5. Ejercicio 5

Sean Γ y Γ_0 conjuntos de fbfs del C. de Enunciados. ¿Es cierto que para todo Γ existe algún $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que si $\Gamma \vdash_L A$ entonces $\Gamma_0 \vdash_L A$?. Fundar. Nota: relacionar con ejercicio 10.

Sabemos a partir del enunciado que, $\Gamma \vdash_L A$. Luego, podemos afirmar que existe un $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash_L A$, y es por ejemplo, cuando $\Gamma_0 = \Gamma$.

Luego, podemos afirmar que dado una Γ_0 que cumpla la condición establecida, $Con_L(\Gamma_0) = Con_L(\Gamma)$.

6. Ejercicio 9

¿Es posible que para algún Γ dado, en algún sistema formal F, $Con_F(\Gamma)$ sea infinito?. Ejemplificar.

Si, esto puedo darse cuando el conjunto de enunciados Γ permite deducir una contradicción. Luego, Γ podría deducir cualquier fbf del sistema formal F y podría darse entonces que $Con_F(\Gamma)$ sea infinito. Un ejemplo de esto es el propuesto en el ejercicio 10.

7. Ejercicio 10

Sea $\Gamma = \{r, \neg s, s \vee \neg r\}$. Calcular $Con_L(\Gamma)$

Sabemos por definición que $Con_L(\Gamma) = \{A / \Gamma \vdash_L A\}$, es decir, $Con_L(\Gamma) = \{A / \{r, \neg s, s \vee \neg r\} \vdash_L A\}$.

Podemos demostrar facilmente que a partir de dicho conjunto Γ se puede llegar a una contradicción. Luego, sabemos que a partir de Γ se puede deducir cualquier cosa. Finalmente, $Con_L(\Gamma)$ es el conjunto de todas las fbfs de L.