Logica e Inteligencia Artificial

Ulises Jeremias Cornejo Fandos,[1] Lucas Di Cunzolo,[2] and Federico Ramón Gasquez[3]

[1] *13566/7, Licenciatura en Informatica, Facultad de Informatica, UNLP*

[2] *13572/5, Licenciatura en Informatica, Facultad de Informatica, UNLP*

[3] *13598/6, Licenciatura en Informatica, Facultad de Informatica, UNLP*

compiled: September 18, 2018

1. Ejercicio 1

Sean A, B fbfs que cumplen que $(\neg A \vee B)$ es tautología. Sea C una fbf cualquiera. Determinar, si es posible, cuáles de las siguientes fbfs son tautologías y cuáles contradicciones. Justificar las respuestas.

1. $((\neg(A \to B)) \to C)$

   Sean las variables de enunciados p y q, sabemos que

   $$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q) \tag{1}$$

   es tautología. De la proposición *1.10* se deduce que para formas enunciativas cualesquiera A, B,

   $$(\neg A \vee B) \leftrightarrow (A \to B) \tag{2}$$

   es tambien una tautología. Por lo tanto, $(\neg A \vee B)$ es logicamente equivalente a $(A \to B)$ y, reemplazando en el enunciado original, queda la siguiente formula:

   $$((\neg(\neg A \vee B)) \to C \tag{3}$$

   Luego, sabemos por hipótesis que $(\neg A \vee B)$ es siempre verdadero para todo par de enunciados A, B, pues es una tautología. Entonces, dado que el antecedente del enunciado 3, sabemos que el mismo será *falso* para todo par de enunciados A, B. Finalmente, independientemente del valor de verdad de la fbf C, sabemos que el enunciado completo será siempre verdadero, pues la unica configuración posible que permite que una implicación sea falsa es cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

   Por lo tanto, la fbf $((\neg(A \to B)) \to C)$ es una tautología.

2. $(C \to ((\neg A) \vee B))$

   Sean A, B fbfs, sabemos que $((\neg A) \vee B)$ es una tautología por hipotesis. Luego, dado el enunciado

   $$(C \to ((\neg A) \vee B)) \tag{4}$$

   sabemos que el consecuente de la implicación que lo define será siempre verdadero, pues como meciona anteriormente, el mismo es una tautología. Finalmente, independientemente del valor de verdad de la fbf C, la implicación será siempre verdadera, pues la unica configuración posible que permite que una implicación sea falsa es cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Dado que esta configuración no tiene lugar en el enunciado, el valor de verdad es siempre verdadero.

Por lo tanto, la fbf $(C \rightarrow ((\neg A) \vee B))$ es una tautología.

3. $((\neg A) \rightarrow B)$

   Sean A, B fbfs, sabemos que $((\neg A) \vee B)$ es una tautología por hipotesis. Luego, dado el enunciado

$$((\neg A) \rightarrow B) \tag{5}$$

   comparamos el valor de verdad del enunciado $((\neg A) \rightarrow B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$ para verificar que se mantenga el valor de verdad. Si el mismo da una tautología, entonces el enunciado 5 será una tautología.

   HACERRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRR!

2. Ejercicio 2

¿Es cierto que dadas A y B fbfs cualesquiera, siempre ocurre que si A y $A \rightarrow B$ son tautologías entonces B también lo es? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.

La forma de argumentación planteada se compone de dos premisas. Dadas dos fbfs cualquiera, A, B, la primer premisa será de la forma $A \rightarrow B$ y la segunda será A. Luego, siendo las premisas tautologías, evaluamos los casos en los que la implicación que define a la primer premisa sea verdadera. Es decir, siendo A una tautología, nos quedamos con el caso en el que B no haga del valor de la implicación una falsedad.

Por lo tanto, siendo A una fbf siempre verdadera, B debe ser verdadera para que $A \rightarrow B$ siga siendo una tautología y mantenga su valor de verdad.

Es por esto que, dadas las premisas A y $A \rightarrow B$, si las mismas son tautologías, B también lo es.

Ejemplo

Sean A: Hoy es martes, B: Juan se irá a trabajar. Luego, $A \rightarrow B$: Si hoy es martes, entonces Juan se irá a trabajar. Si A y $A \rightarrow B$ entonces B, se cumple y es válido.

Finalmente, este argumento es válido, pero esto no nos dice nada sobre si las premisas requeridas por el argumento son verdaderas. Para que este argumento sea un argumento sólido además de válido las premisas deberán ser verdaderas.

Un argumento válido pero sin solidez podría ser o no falso. El argumento de ejemplo solo es sólido los martes y cuando en efecto, se sabe que Juan realmente va a trabajar los martes.

3. Ejercicio 3

Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos $\wedge, \vee, \neg$. Sea A' la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada $\wedge$ por $\vee$ y cada $\vee$ por $\wedge$. ¿Si A es una tautología, A' también lo es? Justificar. Ejemplificar con algunos ejemplos escritos en lenguaje natural.

Sea p una variables enunciativa cualquiera y sea $A = p \vee \neg p$, luego A es tautología.

Luego, sea $A' = p \wedge \neg p$, por definición de A', la misma no es tautología sino una contradicción. Luego, podemos ver que no para todo A que sea una tautología se cumple que A' tambien lo sea, por lo que es falso.

4. Ejercicio 5

¿Es cierto que en el Cálculo de Enunciados pueden escribirse dos fbfs que tengan diferentes letras de proposición y aún así ambas fbfs sean lógicamente equivalentes?. Fundar.

Al momento de evaluar la equivalencia lógica de dos fbfs, en el cálculo de enunciados, se ignora en cierta forma la composición interna de las mismas siendo que lo único relevante será siempre el valor de verdad resultante de cada una.

5. Ejercicio 6

Determinar cuáles de las siguientes fbfs son lógicamente implicadas por la fbf $(A \wedge B)$. Fundamentar. Def. de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.

i- A

$((A$	$\wedge$	$B)$	$\rightarrow$	$A)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	F	V	V	F
F	F	F	V	F

Luego, dado que la implicación es una tautología, $(A \wedge B)$ implica logicamente a A.

ii- B

$((A$	$\wedge$	$B)$	$\rightarrow$	$B)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

Luego, dado que la implicación es una tautología, $(A \wedge B)$ implica logicamente a B.

iii- $A \vee B$

$((A$	$\wedge$	$B)$	$\rightarrow$	$(A$	$\vee$	$B))$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F

Luego, dado que la implicación es una tautología, $(A \wedge B)$ implica logicamente a $A \vee B$.

iv- $\neg A \vee B$

$((A$	$\wedge$	$B)$	$\rightarrow$	$((\neg$	$A)$	$\vee$	$B))$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	F

Luego, dado que la implicación es una tautología, $(A \wedge B)$ implica logicamente a $\neg A \vee B$.

v- $\neg B \rightarrow A$

$((A$	$\wedge$	$B)$	$\rightarrow$	$((\neg$	$B)$	$\rightarrow$	$A))$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	F	F	F

Luego, dado que la implicación es una tautología, $(A \wedge B)$ implica logicamente a $\neg B \rightarrow A$.

vi- $A \leftrightarrow B$

Luego, dado que la implicación es una tautología, $(A \wedge B)$ implica logicamente a $A \leftrightarrow B$.

$((A$	$\wedge$	$B)$	$\rightarrow$	$(A$	$\leftrightarrow$	$B)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F

$((A$	$\wedge$	$B)$	$\rightarrow$	$(A$	$\rightarrow$	$B)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F

vii- $A \rightarrow B$

Luego, dado que la implicación es una tautología, $(A \wedge B)$ implica logicamente a $A \rightarrow B$.

viii- $\neg B \rightarrow \neg A$

$((A$	$\wedge$	$B)$	$\rightarrow$	$((\neg$	$A)$	$\rightarrow$	$(\neg$	$B))$
V	V	V	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	F	V	V	F	V	V	F

Luego, dado que la implicación es una tautología, $(A \wedge B)$ implica logicamente a $\neg B \rightarrow \neg A$.

ix- $B \rightarrow \neg A$

$((A$	$\wedge$	$B)$	$\rightarrow$	$(B$	$\rightarrow$	$(\neg$	$A)))$
V	V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	V	V	F

Luego, dado que la implicación no es una tautología, $(A \wedge B)$ no implica logicamente a $B \rightarrow \neg A$.

6. Ejercicio 8

Sea A una fbf donde aparecen sólo los conectivos $\wedge$, $\neg$. Sea A' la fbf que se obtiene a partir de A reemplazando cada $\wedge$ por $\vee$ y cada letra de proposición por su negación (o sea, cada p por $\neg p$, cada q por $\neg q$, etc.). ¿Es cierto que A' es lógicamente equivalente a $\neg A$? Fundamentar. Ejemplificar con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.

Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ variables de enunciado, y sean $A = ((\neg p_1) \wedge (\neg p_2) \wedge \ldots \wedge (\neg p_n))$ y $A' = ((p_1) \vee (p_2) \vee \ldots \vee (p_n))$. Se cumple que

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} (\neg p_i) \right) \tag{6}$$

es logicamente equivalente a

$$\left(\neg \left(\bigvee_{i=1}^{n} p_i \right) \right) \tag{7}$$

, pues el mismo es un caso especial de la proposición 1.15 y se plantea en el corolario 1.16. El mismo se cumple siempre independientemente del valor de verdad de las variables de enunciado.

7. Ejercicio 9

Sea $\#$ el operador binario definido como $p\#q =_{def} (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Def. de implicación lógica, ver def. 1.7 del Hamilton.

8. Ejercicio 10

Demostrar que las siguientes fórmulas son lógicamente equivalentes.

i- $(p \rightarrow q)$ es lógicamente equivalente a $(\neg p \vee q)$

$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$((\neg$	$p)$	$\vee$	$q))$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F

ii- $(p \leftrightarrow q)$ es lógicamente equivalente a $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$

$((p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\rightarrow$	$q)))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F