

MARCHE DE L'ÉLÉPHANT

Projet Algorithmes Stochastiques – Master 1 MSS

Félicia DOSSOU
Marie KANE
Noah KOLLIN
Arthur LECAMUS

2024/2025

Table des matières

Introduction	3
Étude des espérances conditionnelles	4
Question 1	4
Question 2	4
Construction de la martingale associée	5
Question 3	6
Étude du processus croissant	7
Question 4	7
Convergence presque sûre	9
Question 5	9
LFDGN et théorème central limite	12
Question 6	12
Cas critique et superdiffusif	15
Question 7	15
Récapitulatif	19
Simulations numériques	20
Question 8	20
Question 9	21
Estimation du paramètre mémoire	22
Question 10	22
Références	24
Annexes	25

1 Introduction

Ce projet s'inscrit dans le cadre de l'étude de processus stochastiques à mémoire, à travers un modèle riche : la marche de l'éléphant. Introduit par Schütz et Trimper en 2004, ce modèle modifie la marche aléatoire classique en intégrant une mémoire totale, c'est-à-dire une dépendance de chaque pas à l'ensemble des pas précédents. La marche aléatoire est définie de la manière suivante :

À l'instant 0, l'éléphant est situé à l'origine : $S_0 = 0$.

À l'instant 1, il va vers la droite au point 1 avec probabilité q ou vers la gauche au point -1 avec probabilité $1 - q$, avec $0 < q < 1$. Ensuite, à l'instant n , l'éléphant choisit uniformément au hasard un instant k entre 1 et n , puis :

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_k & \text{avec probabilité } p, \\ -X_k & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases}$$

où le paramètre $p \in [0, 1]$ représente la mémoire de la marche de l'éléphant. La position de la marche de l'éléphant est alors donnée par :

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

À chaque instant $n \geq 1$, on a où $X_{n+1} = \alpha_{n+1}X_{\beta_{n+1}}$ où α_{n+1} et β_{n+1} sont deux variables aléatoires indépendantes avec α_{n+1} de loi de Rademacher $R(p)$ et β_{n+1} de loi uniforme discrète $U(\{1, \dots, n\})$.

L'objectif de ce projet est d'analyser rigoureusement, dans différents régimes de mémoire, le comportement asymptotique de la position de l'éléphant S_n , en mettant en œuvre des outils classiques de la théorie des martingales. Ce rapport explore l'étude de l'espérance conditionnelle, la construction d'une martingale associée et l'analyse du processus croissant, avant d'aborder la convergence presque sûre et le théorème central limite. Il se conclut par des simulations numériques et l'estimation du paramètre mémoire.

2 Étude des espérances conditionnelles

Nous commençons par étudier le comportement conditionnel de la variable X_{n+1} , représentant le $(n+1)$ -ème pas du processus. Cela nous éclaire sur la façon dont la mémoire agit sur les dépendances entre les pas successifs.

Question 1 Montrons que l'on a $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{(2p-1)}{n} S_n$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\alpha_{n+1} X_{\beta_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] \\
 &= \mathbb{E}[\alpha_{n+1}] \cdot \mathbb{E}[X_{\beta_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n] \\
 &= (2p-1) \cdot \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n X_{\beta_{n+1}} \mathbb{1}_{\beta_{n+1}=k} \mid \mathcal{F}_n \right] \\
 &= (2p-1) \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\beta_{n+1}=k}] \cdot \sum_{k=1}^n X_k \\
 &= (2p-1) \cdot \mathbb{P}(\beta_{n+1} = k) \cdot \sum_{k=1}^n X_k \\
 &= (2p-1) \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n X_k \\
 &= \frac{(2p-1)}{n} S_n
 \end{aligned}$$

Cette expression conditionnelle met en évidence une dépendance entre la prochaine valeur X_{n+1} et la somme cumulée des valeurs précédentes S_n , ce qui suggère une structure récurrente dans le comportement du processus.

Nous cherchons à présent à relier $\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$ à S_n . Nous verrons que cette relation permet d'introduire un coefficient γ_n tel que :

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \gamma_n S_n \quad \text{p.s.}$$

Question 2 On en déduit l'égalité presque sûre

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \gamma_n S_n \quad \text{avec} \quad \gamma_n = \frac{n+2p-1}{n} \\
 \mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[S_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\
 &= \mathbb{E}[S_n \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \\
 &= S_n + \frac{(2p-1)}{n} S_n \\
 &= \frac{(n+2p-1)}{n} S_n \\
 &= \gamma_n S_n
 \end{aligned}$$

Cette formulation sera utile dans l'étude ultérieure du comportement asymptotique de la marche.

3 Construction de la martingale associée

Nous avons mis en évidence à la question précédente une dynamique conditionnelle de type linéaire entre S_{n+1} et S_n . Cette structure est typique des modèles à mémoire, et permet la construction d'une martingale adaptée.

Nous considérons la suite $M_n = a_n S_n$, où (a_n) est une suite déterministe donnée, choisie de manière à centrer le processus. L'objectif ici est de montrer que, pour ce choix de a_n , la suite (M_n) forme bien une martingale réelle adaptée à la filtration naturelle du processus.

Soit (M_n) la suite définie par $M_n = a_n S_n$ avec $a_1 = 1$ et pour $n \geq 2$,

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}$$

Rappel sur la fonction Gamma

La fonction Gamma est définie, pour tout $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Elle vérifie la relation de récurrence :

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x),$$

et généralise la factorielle $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$.

Développement asymptotique (formule de Stirling) :

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a :

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}$$

En particulier, on utilise fréquemment l'approximation suivante :

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+\alpha)} \sim n^{-\alpha} \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

ce qui permettra de simplifier des expressions dans les questions 5 et 6.

Pour définir le processus croissant $\langle M \rangle_n$ et afin de pouvoir appliquer les théorèmes de convergence des martingales, il est nécessaire de montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable.

Question 3 Montrons que (M_n) est une martingale de carré intégrable.

Définitions : Martingale et Martingale de carré intégrable

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ une filtration et $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires.

Martingale : On dit que (M_n) est une *martingale* (adaptée à la filtration \mathcal{F}_n) si

- M_n est \mathcal{F}_n -mesurable pour tout $n \geq 0$,
- $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$ pour tout n ,
- $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$ pour tout $n \geq 0$.

Martingale de carré intégrable : Une martingale (M_n) est dite *de carré intégrable* si

$$\mathbb{E}[X_n^2] < \infty \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Soit la suite définie par

$$M_n = \alpha_n S_n,$$

$$|M_n| = \alpha_n |S_n| \leq \alpha_n \Rightarrow \forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}(|M_n|) < \infty,$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\alpha_{n+1} S_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= \alpha_{n+1} \mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= \alpha_{n+1} \gamma_n S_n \\ &= \left(\prod_{k=1}^n \gamma_k^{-1} \right) \gamma_n S_n \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} \right) S_n \\ &= \alpha_n S_n \\ &= M_n \end{aligned}$$

Donc (M_n) est une martingale.

De plus,

$$|M_n|^2 = \alpha_n^2 S_n^2 \leq \alpha_n^2 n^2 \Rightarrow \forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}(|M_n|^2) < \infty$$

Donc (M_n) est une martingale de carré intégrable.

Cette construction jouera un rôle central dans l'analyse asymptotique de la marche, en permettant d'appliquer des résultats classiques sur les martingales.

4 Étude du processus croissant

Une fois la martingale $M_n = a_n S_n$ introduite, il est naturel de s'intéresser à sa variation quadratique, essentielle dans l'analyse asymptotique du processus.

L'étude du processus croissant $\langle M \rangle_n$ permettra d'établir les conditions nécessaires à l'application de résultats de convergence.

Nous allons ici exprimer explicitement ce processus croissant à partir de la dynamique conditionnelle de M_n , en mettant en évidence les deux composantes principales qui le structurent.

Question 4 Prouvons que son processus croissant $\langle M \rangle_n$ est donné par

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n a_k^2 - (2p-1)^2 \xi_n \quad \text{où} \quad \xi_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left(\frac{S_k}{k} \right)^2$$

On va d'abord calculer :

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_{n+1} - \langle M \rangle_n &= \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[(a_{n+1} S_{n+1} - a_n S_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[(a_{n+1} (S_{n+1} - \frac{a_n}{a_{n+1}} S_n))^2 \mid \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1}}{\prod_{k=1}^n \gamma_k} = \gamma_n$ et on pose $a = 2p-1$

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_{n+1} - \langle M \rangle_n &= \mathbb{E} \left[a_{n+1}^2 (S_{n+1} - \gamma_n S_n)^2 \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= a_{n+1}^2 \mathbb{E} \left[\left(S_n + X_{n+1} - \frac{n+a}{n} S_n \right)^2 \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= a_{n+1}^2 \mathbb{E} \left[\left(S_n + X_{n+1} - S_n - \frac{a}{n} S_n \right)^2 \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= a_{n+1}^2 \mathbb{E} \left[\left(X_{n+1} - \frac{a}{n} S_n \right)^2 \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= a_{n+1}^2 \mathbb{E} \left[X_{n+1}^2 - \frac{2a}{n} X_{n+1} S_n + \left(\frac{a}{n} S_n \right)^2 \mid \mathcal{F}_n \right] \\ &= a_{n+1}^2 \left(\mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] - \frac{2a}{n} \mathbb{E}[X_{n+1} S_n \mid \mathcal{F}_n] + \left(\frac{a}{n} \right)^2 \mathbb{E}[S_n^2 \mid \mathcal{F}_n] \right) \end{aligned}$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n \in \{-1, 1\} \quad \Rightarrow \quad X_n^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = 1$

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_{n+1} - \langle M \rangle_n &= a_{n+1}^2 \left(1 - \frac{2a}{n} S_n \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] + \left(\frac{a}{n} \right)^2 S_n^2 \right) \\ &= a_{n+1}^2 \left(1 - \frac{2a}{n} S_n \frac{a}{n} S_n + \left(\frac{a}{n} S_n \right)^2 \right) \\ &= a_{n+1}^2 \left(1 - 2 \left(\frac{a}{n} S_n \right)^2 + \left(\frac{a}{n} S_n \right)^2 \right) \\ &= a_{n+1}^2 \left(1 - \left(\frac{a}{n} S_n \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \mathbb{E}[(M_1 - M_0)^2 \mid \mathcal{F}_1] + \sum_{k=2}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \mathbb{E}[(a_1 S_1)^2 \mid \mathcal{F}_1] + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[(M_{k+1} - M_k)^2 \mid \mathcal{F}_k]
\end{aligned}$$

$$\text{Or, } a_1 S_1 = S_1 = X_1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow (a_1 S_1)^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 (1 - (\frac{a}{k} S_k)^2) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 - a^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 (\frac{S_k}{k})^2 \\
&= \sum_{k=1}^n a_k^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left(\frac{S_k}{k}\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^n a_k^2 - (2p-1)^2 \xi_n \quad \text{où} \quad \xi_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left(\frac{S_k}{k}\right)^2
\end{aligned}$$

L'expression obtenue pour le processus croissant $\langle M \rangle_n$ est structurée explicitement en fonction des coefficients a_k et des termes S_k . Elle sera essentielle pour évaluer la variance asymptotique de la martingale M_n et pour établir des résultats de convergence.

5 Convergence presque sûre

Nous sommes désormais en mesure d'analyser le comportement asymptotique du processus croissant $\langle M \rangle_n$, de notre martingale .

Dans la marche de l'éléphant, les propriétés asymptotiques de $\langle M \rangle_n$ sont fortement influencées par le paramètre de mémoire p . Ce dernier détermine à la fois la vitesse de croissance de la marche et la forme de ses fluctuations. L'objectif est ici d'établir une convergence presque sûre de $\langle M \rangle_n$ normalisé par une puissance appropriée de n , ce qui ouvrira la voie à une analyse plus complète du comportement de la marche.

Question 5 Si la mémoire de l'éléphant vérifie

$$0 \leq p < \frac{3}{4}$$

on déduit alors par la loi forte des grands nombres pour les martingales, la convergence presque sûre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{3-4p}} = \ell \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{\Gamma(2p)^2}{3-4p}$$

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n a_k^2 - (2p-1)^2 \xi_n \\ &= v_n - (2p-1)^2 \xi_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où, } v_n &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma(k) \Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)} \right]^2 \\ &= \Gamma(2p)^2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+2p-1)} \right]^2 \end{aligned}$$

Posons $a = 2p - 1$, alors :

$$v_n = \Gamma(1+a)^2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+a)} \right]^2$$

On utilise le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma(x+\alpha) \sim \Gamma(x)x^\alpha$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+a)} &\sim \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)n^a} \sim \frac{1}{n^a} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+a)} \right]^2 \sim \frac{1}{n^{2a}} \\ \Rightarrow v_n &\sim (\Gamma(1+a))^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2a}} \end{aligned}$$

Convergence de la série

$$\begin{aligned}
 0 \leq p < \frac{3}{4} &\Rightarrow 0 \leq 2p < \frac{3}{2} \\
 &\Rightarrow -1 < 2p - 1 < \frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow a < \frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow 2a < 1
 \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2a}}$ diverge et

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2a}} &\approx \int_1^n \frac{1}{x^{2a}} dx \\
 &\sim \frac{1}{1-2a} n^{1-2a} \\
 &= \frac{1}{n^{3-4p}} n^{3-4p} \quad (\text{si } 2a \neq 1) \iff (\text{si } p < 3/4)
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$v_n \sim \Gamma(2p)^2 \frac{n^{3-4p}}{3-4p}$$

Or, on sait grace à la Loi Forte des grands nombre pour les Martingales :

Loi Forte des grands nombres pour les Martingales

Soit (M_n) une martingale réelle de carré intégrable, et soit $\langle M \rangle_n$ son processus croissant.

Si $\langle M \rangle_n \rightarrow \infty$, alors :

$$\frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{presque sûrement.}$$

De plus, on a :

$$\frac{M_n^2}{\langle M \rangle_n} = \mathcal{O}(\log \langle M \rangle_n) \quad \text{presque sûrement.}$$

$$\begin{aligned}
 M_n^2 &= \mathcal{O}(\langle M \rangle_n (\log(\langle M \rangle_n))^{1+\gamma}) \quad \forall \gamma > 0 \\
 &= \mathcal{O}(v_n \log(v_n)^{1+\gamma}) \\
 &= \mathcal{O}(n^{3-4p} \log(n)^{1+\gamma}) \\
 &\Rightarrow (a_n S_n)^2 = \mathcal{O}(n^{3-4p} \log(n)^{1+\gamma}) \\
 &\Rightarrow \left(\frac{S_n}{n^{2p-1}}\right)^2 = \mathcal{O}(n^{3-4p} \log(n)^{1+\gamma}) \\
 &\Rightarrow S_n^2 = \mathcal{O}(n^{3-4p} \log(n)^{1+\gamma} n^{4p-2}) \\
 &\Rightarrow S_n^2 = \mathcal{O}(n \log(n)^{1+\gamma}) \\
 &\Rightarrow \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 = \mathcal{O}\left(\frac{\log(n)^{1+\gamma}}{n}\right) \\
 &\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n)^{1+\gamma}}{n} = 0 \\
 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 = 0 \\
 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0
 \end{aligned}$$

Lemme de Toeplitz

Soit (b_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$, soit (x_n) une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et si $A_n = \sum_{k=1}^n b_k$, alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{A_n} = x$$

Ici, si on pose $b_n = a_n^2$, $A_n = v_n$ et $x_n = (\frac{S_n}{n})^2$

(b_n) est bien une suite de nombres réels positifs telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(2p)^2 \frac{n^{3-4p}}{3-4p} \\ &= +\infty \quad (\text{car } p < 3/4 \Rightarrow 3-4p > 0) \end{aligned}$$

x_n est bien une suite de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{S_n}{n})^2 = 0$

Et $A_n = v_n = \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k$

Ainsi, d'après le Lemme de Toeplitz,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_k x_k}{A_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2 (\frac{S_k}{k})^2}{v_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{S_n}{n})^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Cependant, comme $\xi_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 (\frac{S_k}{k})^2$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\xi_n}{v_n} = 0 \quad \text{p.s.} \quad \Longleftrightarrow \quad \xi_n = o(v_n)$$

Enfin, on a donc

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n = v_n - a^2 \xi_n = v_n - a^2 o(v_n) &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_n} - a^2 \frac{o(v_n)}{v_n} = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{3-4p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n^{3-4p}} = \frac{\Gamma(2p)^2}{3-4p} \end{aligned}$$

Ce résultat permet de caractériser précisément la croissance du processus quadratique $\langle M \rangle_n$ dans le régime diffusif. La constante limite ℓ , dépendant uniquement de p , jouera un rôle clé dans les résultats asymptotiques ultérieurs.

6 LFDGN et théorème central limite

Ayant obtenu la convergence presque sûre du processus croissant $\langle M \rangle_n$ dans le régime diffusif, il devient naturel de s'intéresser au comportement asymptotique de la position S_n .

Dans ce cadre, nous allons montrer que la marche présente à la fois une convergence presque sûre vers zéro, et une normalité asymptotique après renormalisation appropriée.

Question 6 Soit un processus de marche de l'éléphant avec mémoire $0 \leq p < \frac{3}{4}$. On souhaite montrer, à l'aide de la loi forte des martingales et du théorème central limite pour les martingales, que l'on a la convergence presque sûre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad ,$$

ainsi que la normalité asymptotique

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3-4p}\right).$$

On a déjà montré dans la question 5 que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0$$

On sait que $M_n = a_n S_n$ avec $a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(a+1)}{\Gamma(n+a)}$. On rappelle qu'en utilisant le comportement asymptotique de la fonction Γ , on a $\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n+a)} \sim \frac{1}{n^a}$

Ainsi, $a_n \sim \frac{\Gamma(a+1)}{n^a} = \frac{\Gamma(2p)}{n^{2p-1}}$ et donc $S_n = \frac{M_n}{a_n} \sim \frac{n^{2p-1}}{\Gamma(2p)} M_n$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{\sqrt{n}} &= \frac{n^{2p-1}}{\Gamma(2p)\sqrt{n}} M_n \\ &= \frac{M_n}{\sqrt{n^{3-4p}\Gamma(2p)^2}} \end{aligned}$$

Théorème Central Limite pour les Martingales

Soit (M_n) une martingale réelle de carré intégrable, et soit $\langle M \rangle_n$ son processus croissant.
Soit (b_n) une suite déterministe, positive et croissante vers l'infini.

On suppose que :

1. Il existe une constante $\ell \geq 0$ telle que :

$$\frac{\langle M \rangle_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \ell.$$

2. La condition de Lindeberg est satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\Delta M_k^2 \cdot \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \varepsilon \sqrt{b_n}} \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

avec $\Delta M_k = M_k - M_{k-1}$

Alors :

$$\frac{M_n}{\sqrt{b_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \ell).$$

Soit la suite (b_n) la suite déterministe, positive et croissante vers l'infini définie par $b_n = n^{3-4p}\Gamma(2p)^2$,
 (M_n) la martingale définie par $M_n = a_n S_n$ et $\langle M \rangle_n$ son processus croissant.

1. D'après la question 5, on a que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{3-4p}} = \frac{\Gamma(2p)^2}{3-4p} &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{3-4p}\Gamma(2p)^2} = \frac{1}{3-4p} \\ &\iff \frac{\langle M \rangle_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \ell \quad \text{avec } \ell = \frac{1}{3-4p} \\ &\implies \frac{\langle M \rangle_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \ell \end{aligned}$$

2. Condition de Lindeberg :

(*)

$$\begin{aligned} |\Delta M_k| \geq \varepsilon \sqrt{n^{3-4p}} &\iff \Delta M_k^2 \geq \varepsilon^2 n^{3-4p} \\ &\iff \frac{1}{\Delta M_k^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^{3-4p}} \end{aligned}$$

(**)

$$\begin{aligned} \Delta M_{k+1} &= M_{k+1} - M_k \\ &= a_{k+1} S_{k+1} - a_k S_k \\ &= a_{k+1} \left(S_{k+1} - \frac{a_k}{a_{k+1}} S_k \right) \\ &= a_{k+1} (S_{k+1} - \gamma_k S_k) \\ &= a_{k+1} \left(S_{k+1} - \left(1 + \frac{a}{k}\right) S_k \right) \\ &= a_{k+1} \left(S_k + X_{k+1} - S_k - \frac{a}{k} S_k \right) \\ &= a_{k+1} \left(X_{k+1} - \frac{a}{k} S_k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |\Delta M_{k+1}| = a_{k+1} \left| X_{k+1} - \frac{a}{k} S_k \right| \\
&\Rightarrow |\Delta M_{k+1}| \leq a_{k+1} \left(|X_{k+1}| + |a| \cdot \left| \frac{S_k}{k} \right| \right) \\
&\Rightarrow |\Delta M_{k+1}| \leq a_{k+1} (1 + |a|) \\
&\Rightarrow |\Delta M_k|^4 \leq a_k^4 (1 + |a|)^4 \leq a_k^4
\end{aligned}$$

(***)

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)} \\
&= \frac{\Gamma(k)\Gamma(a+1)}{\Gamma(k+a)} \\
&\sim \frac{\Gamma(a+1)}{k^a} \\
\Rightarrow a_k^4 &\sim \frac{\Gamma(a+1)^4}{k^{4a}} \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k^4 &\sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{4a}} \approx \int_1^n \frac{1}{x^{4a}} dx \sim \frac{n^{1-4a}}{1-4a}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{3-4p}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\Delta M_k^2 \cdot \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \varepsilon \sqrt{n^{3-4p}}} \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right] &= \frac{1}{n^{3-4p}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\Delta M_k^4}{\Delta M_k^2} \cdot \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \varepsilon \sqrt{n^{3-4p}}} \middle| \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2 (n^{3-4p})^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [\Delta M_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}] \quad (*) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2 (n^{3-4p})^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [a_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}] \quad (**) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2 (n^{3-4p})^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \\
&\sim \frac{1}{\varepsilon^2 (n^{3-4p})^2} \frac{n^{1-4a}}{1-4a} \quad (***) \\
&= \frac{n^{5-8p}}{\varepsilon^2 n^{6-8p}} \\
&\sim \frac{1}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0
\end{aligned}$$

Alors, d'après le Théorème Central Limite pour les martingales :

$$\begin{aligned}
\frac{M_n}{\sqrt{n^{3-4p}\Gamma(2p)^2}} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \ell) \\
&\iff \\
\frac{S_n}{\sqrt{n}} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{1}{3-4p})
\end{aligned}$$

Ces deux résultats confirment que dans le régime $0 \leq p < \frac{3}{4}$, la marche de l'éléphant reste centrée autour de zéro à long terme, avec des fluctuations régies par une loi normale dont la variance dépend explicitement du paramètre de mémoire p .

7 Cas critique et superdiffusif

Les résultats précédents ont mis en évidence un comportement classique de type diffusif lorsque le paramètre de mémoire p est strictement inférieur à $\frac{3}{4}$. Toutefois, ce comportement change radicalement à la frontière critique (lorsque $p = \frac{3}{4}$), et plus encore dans le régime superdiffusif (i.e lorsque $p > \frac{3}{4}$).

Ces deux cas, bien qu'issus de la même dynamique de base, donnent lieu à des comportements asymptotiques différents. Nous étudions ces derniers dans cette question.

Question 7 Etablissons des résultats analogues dans le cas critique où la mémoire $p = 3/4$. Que pouvons-nous dire si la mémoire $3/4 < p \leq 1$?

Cas critique $p = \frac{3}{4}$

Dans cette section, on a

$$\begin{aligned} p &= \frac{3}{4} \\ 3 - 4p &= 1 \\ a &= 2p - 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Montrons que $\frac{S_n}{\sqrt{n \ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$

D'après la loi forte des grands nombres appliquées aux martingales,

$$\frac{M_n^2}{\langle M \rangle_n} = \mathcal{O}(\ln \langle M \rangle_n)$$

De plus, on sait que

$$\langle M \rangle_n \sim v_n \text{ et que } v_n = \mathcal{O}(\ln(n))$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{M_n^2}{\langle M \rangle_n} &\sim \frac{M_n^2}{v_n} \\ &\sim \frac{M_n^2}{\ln(n)} \\ &= \mathcal{O}(\ln \langle M \rangle_n) \\ &\sim \mathcal{O}(\ln(v_n)) \\ &= \mathcal{O}(\ln(\ln(n))) \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} \frac{M_n^2}{\ln(n)} &= \frac{a_n^2 S_n^2}{\ln(n)} \\ &= \frac{n a_n^2 S_n^2}{n \ln(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } na_n^2 &= n\Gamma(2p)^2 \left(\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+2p-1)} \right)^2 \\
&= n\Gamma(3/2)^2 \frac{\Gamma(k)^2}{\Gamma(k+1/2)^2} \\
&\sim n\Gamma(3/2)^2 \frac{1}{(n^{1/2})^2} \\
&\sim \Gamma(3/2)^2 \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\frac{M_n^2}{\ln(n)} &\sim \mathcal{O}(\ln(\ln(n))) \\
\iff \frac{a_n^2 S_n^2}{\ln(n)} &\sim \mathcal{O}(\ln(\ln(n))) \\
\iff \frac{na_n^2 S_n^2}{n\ln(n)} &\sim \mathcal{O}(\ln(\ln(n))) \\
\iff \frac{S_n}{\sqrt{n\ln(n)}} &\sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\ln(\ln(n))}\right) \\
\iff \frac{S_n}{\sqrt{n\ln(n)}} &\sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}}\right)
\end{aligned}$$

Par croissance comparée on a $\sqrt{\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0 \implies \frac{S_n}{\sqrt{n\ln(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$

Montrons que $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} &= \frac{M_n}{a_n \sqrt{n \log n}} \\
&= \frac{n^{2p-1} M_n}{\sqrt{\Gamma(2p)^2 n \log n}} \\
&= \frac{M_n}{\sqrt{n^{3-4p} \ln(n) \Gamma(2p)^2}} \\
&= \frac{M_n}{\sqrt{\ln(n) \Gamma(2p)^2}}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer avec le TCL que

$$\frac{M_n}{\sqrt{b_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{avec} \quad b_n = \ln(n) \Gamma(2p)^2$$

1. Etude de la convergence de $\frac{\langle M \rangle_n}{b_n}$

$$\langle M \rangle_n = v_n - (2p-1)^2 \xi_n = v_n - \frac{1}{4} \xi_n$$

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Gamma(k)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \right)^2 \\
&= \Gamma(\frac{3}{2})^2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} \right)^2 \\
&\sim \Gamma(\frac{3}{2})^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
&\sim \Gamma(\frac{3}{2})^2 \int_1^n \frac{1}{k} dk \\
&= \ln(n)\Gamma(\frac{3}{2})^2 \\
&= b_n
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\langle M \rangle_n}{b_n} \sim \frac{b_n - \frac{1}{4}\xi_n}{b_n} = 1 - \frac{\xi_n}{4b_n}$$

Soit (a_k^2) une suite de réels positifs, on a $\sum_{k=1}^n a_k^2 \sim b_n = \ln(n)\Gamma(\frac{3}{2})^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} +\infty$

Soit $((\frac{S_n}{n})^2)$ une suite de réels tel que $(\frac{S_n}{n})^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 0$ et $A_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$

Alors d'après le lemme de Toeplitz,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2 \left(\frac{S_k}{k} \right)^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n} \right)^2 = 0$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n} \ln(n)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_n}{\sqrt{n} \ln(n)} \quad \forall n \geq 2$$

$$\iff \frac{\xi_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 0$$

$$\iff \frac{\xi_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 0$$

$$\iff \xi_n = o(b_n)$$

Finalement

$$\frac{\langle M \rangle_n}{b_n} \sim \frac{b_n - \frac{1}{4}\xi_n}{b_n} = 1 - \frac{\xi_n}{4b_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 1$$

2. Condition de Lindeberg :

$$\begin{aligned}
\text{On a } & \frac{1}{\ln(n)\Gamma(3/2)^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\Delta M_k^2 \cdot \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \varepsilon \sqrt{\ln(n)\Gamma(3/2)}} \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
&= \frac{1}{\ln(n)\Gamma(3/2)^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\Delta M_k^4}{\Delta M_k^2} \cdot \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \varepsilon \sqrt{\ln(n)\Gamma(3/2)}} \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2 \ln(n)^2 \Gamma(3/2)^4} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [\Delta M_k^4 \mid \mathcal{F}_{k-1}] \quad \text{car } \Delta M_k^2 \geq \varepsilon^2 \ln(n)\Gamma(3/2)^2 \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2 \ln(n)^2 \Gamma(3/2)^4} \sum_{k=1}^n a_k^4 \\
\text{Or, } & \sum_{k=1}^n a_k^4 = \Gamma(3/2)^4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+1/2)} \right)^2 \sim \Gamma(3/2)^4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (\text{d'après "6"}) \\
&\sim \frac{1}{\varepsilon^2 \ln(n)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s} 0 \quad (\text{Riemann}) \\
&\Rightarrow \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [\Delta M_k^2 \cdot \mathbb{1}_{|\Delta M_k| \geq \varepsilon \sqrt{b_n}} \mid \mathcal{F}_{k-1}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0
\end{aligned}$$

Ainsi, **1.** et **2.** \Rightarrow D'après le TCL pour les martingales :

$$\frac{M_n}{\sqrt{b_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \iff \frac{S_n}{\sqrt{n \ln(n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Cas superdiffusif $\frac{3}{4} < p \leq 1$

Dans le cas où $p = 3/4$, on a $\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ et $\frac{S_n - n^{2p-1}L}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4p-3}\right)$

avec $L = \frac{1}{\Gamma(2p)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k$

On a

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} v_n < +\infty, \\
& \langle M \rangle_n \leq v_n, \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \langle M \rangle_n < +\infty.
\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$M_n = a_n S_n = \sum_{k=1}^n a_k \varepsilon_k.$$

Par la loi forte des grands nombres pour les martingales, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k \quad \text{p.s}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n = M \quad \text{p.s}$$

Or

$$a_n \sim \frac{\Gamma(2p)}{n^{2p-1}}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{2p-1}} = \frac{M}{\Gamma(2p)}.$$

Autrement dit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(2p)}{n^{2p-1}} S_n = M,$$

$$\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{2p-1}} = \frac{M}{\Gamma(2p)}.$$

Ainsi

$$L = \frac{1}{\Gamma(2p)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varepsilon_k$$

Il n'y a donc plus de normalité asymptotique : la marche s'oriente dans une direction aléatoire dès les premiers pas, et cette orientation est amplifiée au fil du temps — c'est un comportement de type "auto-renforcement".

Récapitulatif

	Diffusif $0 \leq p < \frac{3}{4}$	Critique $p = \frac{3}{4}$	Superdiffusif $\frac{3}{4} < p \leq 1$
LGN	$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$	$\frac{S_n}{\sqrt{n} \log n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$	$\frac{S_n}{n^{2p-1}} \xrightarrow{\mathbb{L}^4} L$
TCL	$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3-4p}\right)$	$\frac{S_n}{\sqrt{n} \log n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$	$\frac{S_n - n^{2p-1}L}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4p-3}\right)$

8 Simulations numériques

Après avoir établi les résultats théoriques dans les trois régimes (diffusif, critique, superdiffusif), il est pertinent de les confronter à une approche numérique. La simulation de trajectoires de la marche de l'éléphant nous permet de visualiser la convergence presque sûre et la normalité asymptotique obtenues précédemment.

Question 8 Nous créons un premier code Python permettant de visualiser la convergence presque sûre et la normalité asymptotique de la marche de l'éléphant dans le cas où la mémoire $0 \leq p < 3/4$.

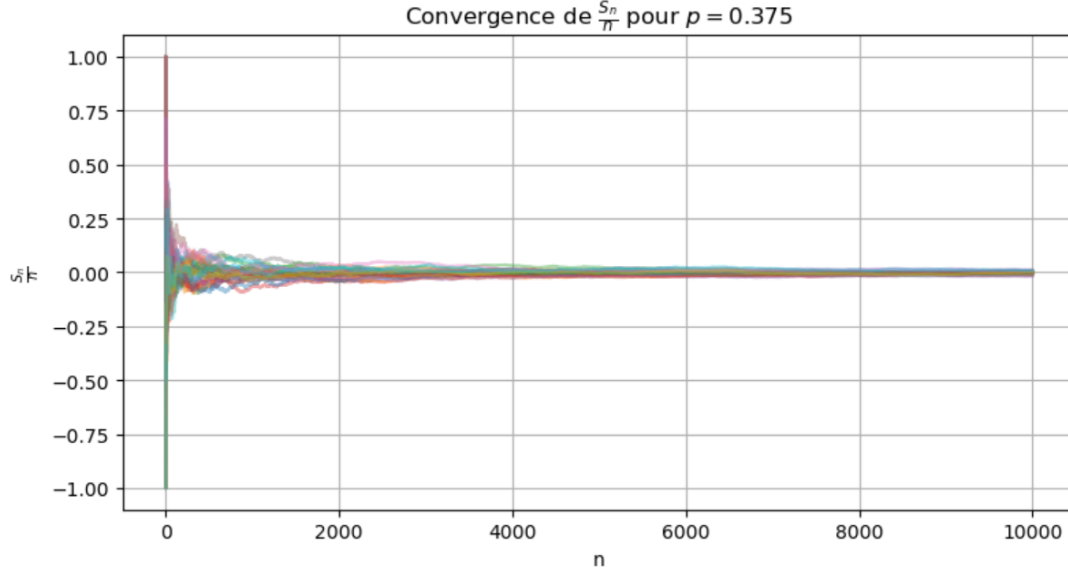
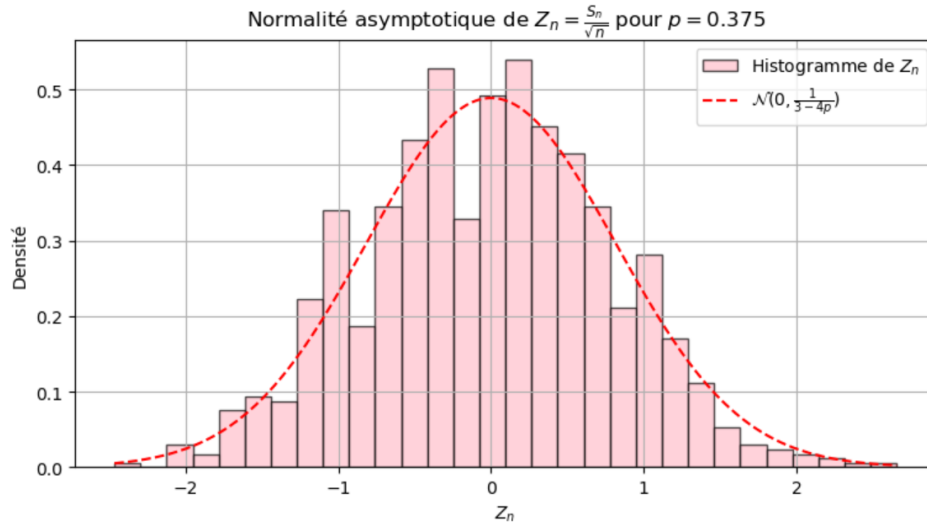


FIGURE 1 – Simulation marche de l'éléphant de 10 000 pas

Les simulations menées dans le régime diffusif confirment les résultats théoriques. On observe une convergence systématique de la moyenne normalisée S_n/n vers zéro. Les trajectoires de la marche de l'éléphant restent proches les unes des autres, traduisant une convergence forte.



L'étude de la normalité asymptotique à travers les histogrammes de S_n/\sqrt{n} montre que les valeurs simulées

suivent bien une loi normale. La densité théorique, superposée aux données, épouse parfaitement la forme des histogrammes. Cela valide les résultats de convergence en loi dans le régime diffusif.

Question 9 Nous créons un second code Python pour étudier la convergence presque sûre de la marche de l'éléphant dans le cas où la mémoire $3/4 < p \leq 1$.

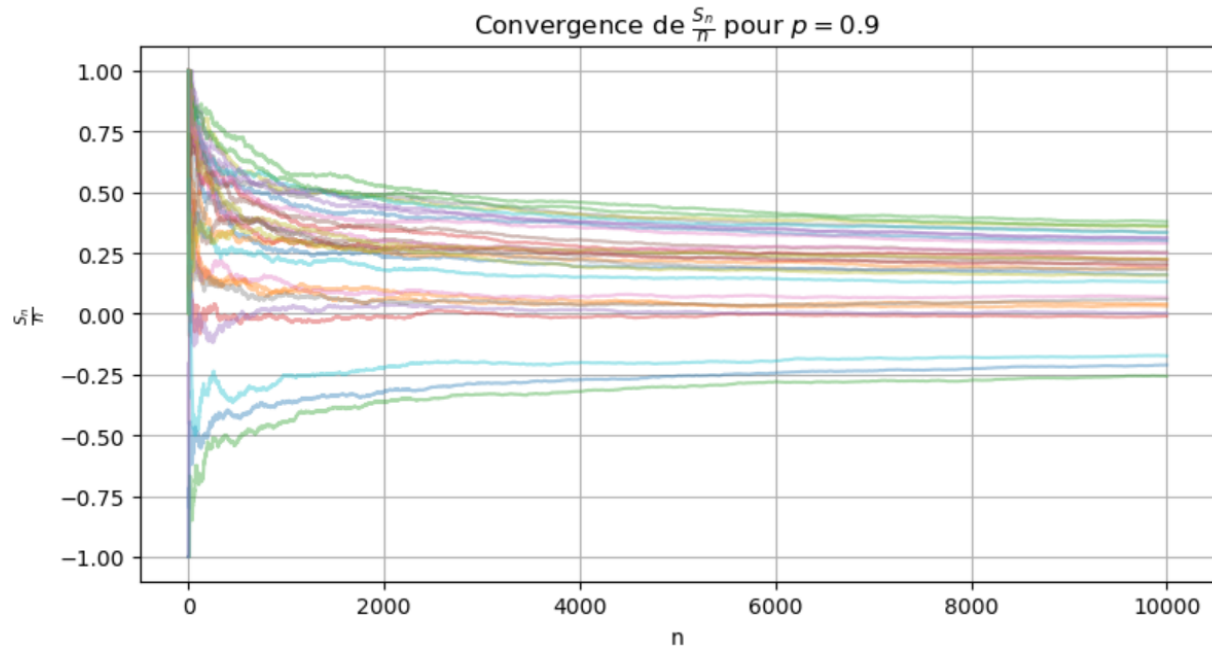


FIGURE 2 – Simulation marche de l'éléphant de 10 000 pas

Dans le régime superdiffusif, les simulations révèlent une rupture nette de comportement par rapport au régime diffusif.

Lorsque le paramètre mémoire est fort, les marches simulées ne convergent plus vers zéro. La normalisation classique ne permet pas de stabiliser les trajectoires, et celles-ci semblent diverger ou se stabiliser lentement vers une constante aléatoire.

9 Estimation du paramètre mémoire

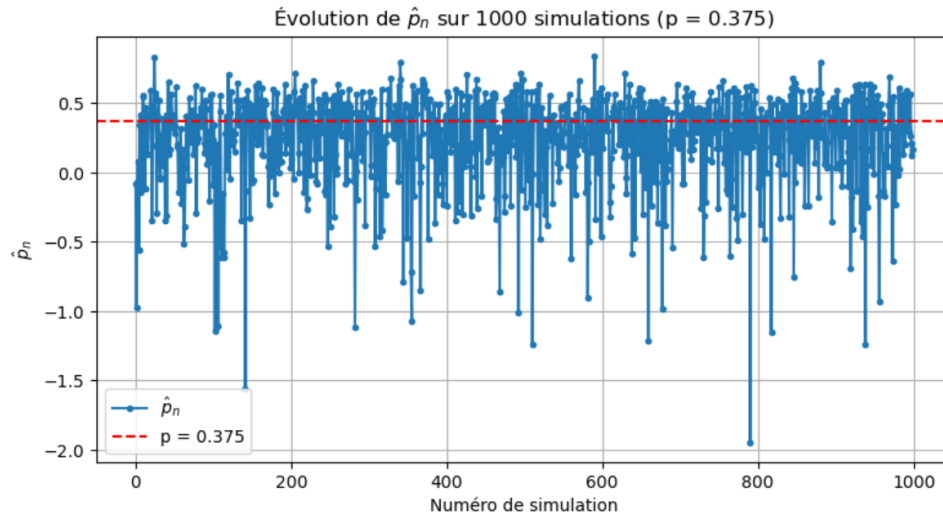
Enfin, au-delà de la compréhension théorique du modèle, se pose la question inverse : peut-on, à partir de données simulées, retrouver la valeur du paramètre de mémoire p ?

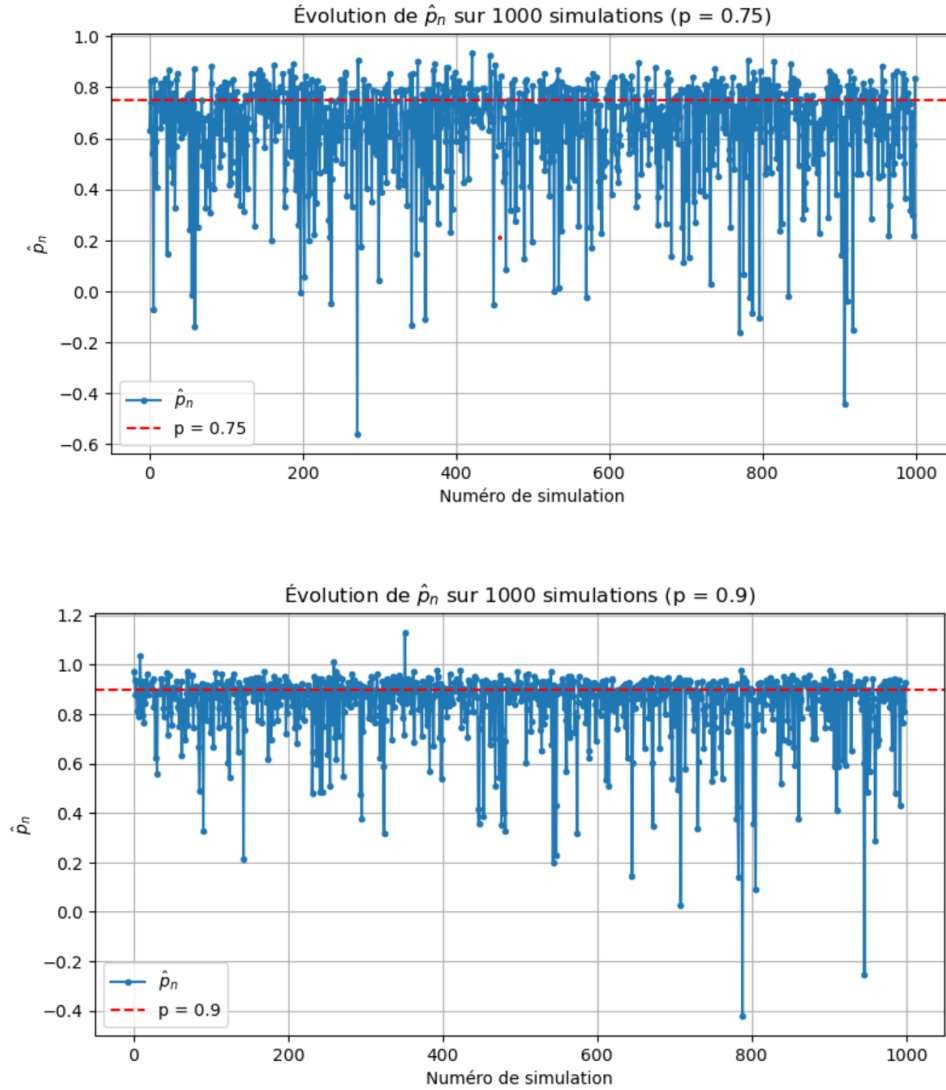
Nous abordons cette problématique en nous plaçant dans un cadre d'estimation statistique, en considérant un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance. L'objectif est d'évaluer numériquement son comportement asymptotique.

Question 10 On propose d'estimer la mémoire de l'éléphant p par l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance défini, pour tout $n \geq 2$, par

$$\hat{p}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k} \left(X_{k+1} + \frac{S_k}{k} \right)}{2 \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{S_k}{k} \right)^2}.$$

Étudions par simulation le comportement asymptotique de l'estimateur \hat{p}_n dans les trois cas $0 \leq p < 3/4$, $p = 3/4$ et $3/4 < p \leq 1$.





Les simulations du quasi-estimateur du maximum de vraisemblance \hat{p}_n montrent une nette différence de comportement selon la valeur réelle de p . Lorsque p est proche de 1, les estimations sont très précises et concentrées autour de la vraie valeur. En revanche, lorsque p est petit, les estimations sont bien plus dispersées.

Ce phénomène s'explique par la nature même de la marche : lorsque p est faible, la dépendance à la mémoire est réduite, les trajectoires sont plus erratiques, et l'information statistique disponible pour estimer p est faible. À l'inverse, pour p élevé, la mémoire est marquée, les trajectoires sont plus régulières et permettent une estimation plus stable. Cela montre que la précision de l'estimateur dépend fortement du régime de mémoire dans lequel on se trouve.

10 Références

Références

- [1] Bernard Bercu, *Cours Martingales MSS*, Université de Bordeaux, 2025.
- [2] Bernard Bercu, *A Martingale Approach for the Elephant Random Walk*, arXiv preprint, 2017.
- [3] *Théorème de Silverman-Toeplitz*, Wikipédia.
- [4] *Fonction gamma*, Wikipédia.
- [5] Lucile Laulin, *Autour de la marche aléatoire de l'éléphant*, 2022.

11 Annexes

```
1 def marche_elephant(n, p):
2     S = [0]
3     X = []
4     for i in range(1, n+1):
5         if i == 1:
6             x = 1 if np.random.rand() < p else -1
7         else:
8             k = np.random.randint(0, i-1)
9             x = X[k] if np.random.rand() < p else -X[k]
10        X.append(x)
11        S.append(S[-1] + x)
12    return np.array(S[1:]), np.array(X)
13
14 S, _ = marche_elephant(n, p)
```

Listing 1 – Marche de l'éléphant

```
1 def estimateur_p(S, X):
2     n = len(S)
3     numerateur = 0
4     denominateur = 0
5     for k in range(1, n-1):
6         Sk_sur_k = S[k] / (k+1)
7         numerateur += Sk_sur_k * (X[k+1] + Sk_sur_k)
8         denominateur += Sk_sur_k ** 2
9     return numerateur / (2 * denominateur)
10
11 S, X = marche_elephant(n, p)
12 p_hat = estimateur_p(S, X)
```

Listing 2 – Estimateur p