

FILTRE DE KALMAN

Projet d'Expertise – Master 1 MSS

2024/2025

Lola DAMBRINE
Félicia DOSSOU
Marie KANE

supervisé par M.GENADOT

Table des matières

1	Introduction	3
2	Filtre de Kalman en dimension 1	4
2.1	Théorie	4
2.2	Construction du filtre de Kalman	5
2.3	Algorithme	14
2.3.1	Choix des paramètres	14
2.3.2	Condition d'arrêt	16
2.4	Simulations	16
2.4.1	Résultats	17
2.4.2	Analyse de la variance	17
3	Extension en dimension supérieure	18
3.1	Théorie	18
3.2	Algorithme	21
3.2.1	Choix des paramètres	21
3.2.2	Condition d'arrêt	22
3.3	Simulations	22
3.3.1	Modélisation	23
3.3.2	Résultats	28
3.3.3	Analyse de la covariance	30
3.4	Augmentation des dimensions	32
4	Filtre de Kalman étendu (EKF)	34
4.1	Théorie	34
4.2	Algorithme	36
4.3	Simulations	36
4.3.1	Modélisation	37
4.3.2	Résultats	39
4.3.3	Analyse de la covariance	40
5	Conclusion	41
6	Annexes	43

1 Introduction

Le filtre de Kalman, développé par **Rudolf E. Kálmán** en 1960, est un algorithme récursif d'estimation optimal sous certaines hypothèses (linéarité et bruit gaussien) [13]. Il permet d'estimer l'état d'un système dynamique à partir de mesures incomplètes, bruitées ou incertaines, en combinant de manière cohérente un modèle prédictif et des observations. Concrètement, il repose sur deux étapes fondamentales : la **prédiction**, où l'état futur du système est anticipé via un modèle dynamique, et la **mise à jour (ou correction)**, qui ajuste cette prédiction à l'aide des nouvelles mesures disponibles. Ce processus aboutit à une estimation optimale au sens des moindres carrés, accompagnée d'une quantification précise de l'incertitude [12].

Sa robustesse, sa simplicité algorithmique et sa capacité à s'exécuter en temps réel ont conduit à son adoption massive dans des domaines aussi variés que la navigation spatiale — il a notamment été un élément clé du système de navigation des **missions Apollo de la NASA vers la Lune** [13] —, la robotique (*guidage et localisation de véhicules autonomes*), la finance (*modélisation de séries temporelles financières*), le traitement du signal (*suivi de cibles radar, filtrage audio et vidéo*), l'aéronautique (*suivi de trajectoires et estimation de position des avions*), ou encore la fusion de données issues de capteurs (*Lidar, GPS, capteurs inertiels*) pour les véhicules autonomes [13]. Le filtre de Kalman a également donné naissance à de nombreuses variantes (**filtre de Kalman étendu**, **filtre unscented**, etc.), permettant de traiter des systèmes non linéaires ou des distributions non gaussiennes [14, 15].

Dans ce rapport, nous proposons une **exploration progressive du filtre de Kalman**, en commençant par son fonctionnement en dimension 1. Cette première étape repose sur une étude théorique inspirée du sujet de modélisation de l'**agrégation de mathématiques 2008** [1], qui présente les fondements du filtre dans un cadre simplifié mais rigoureux. Nous y détaillerons la construction mathématique, l'algorithme étape par étape et les choix de paramètres clés, avant d'illustrer le comportement du filtre à l'aide de **simulations numériques**, ce qui permettra de mieux comprendre ses performances et ses limites.

Dans un second temps, nous généraliserons cette approche au cas **multidimensionnel**, où les états, mesures et incertitudes deviennent vectoriels ou matriciels. Cette extension implique des adaptations algébriques importantes, notamment le traitement des **matrices de covariance** [6, 9]. Nous testerons cette version avancée du filtre sur des données réelles issues d'un **vol parabolique**, afin d'évaluer concrètement son efficacité en contexte expérimental, tout en discutant des éventuelles limites et pistes d'amélioration.

Enfin, nous aborderons le cas plus complexe du **filtre de Kalman étendu (EKF)**, qui permet de traiter les situations où les équations du système sont **non linéaires**. Cette généralisation repose sur une **linéarisation locale** des fonctions d'évolution et d'observation, et nécessite l'utilisation de **jacobiennes**. Nous appliquerons l'EKF à un **modèle de pendule simple**, à partir de données réelles extraites d'une vidéo, pour illustrer concrètement son fonctionnement, ses atouts mais aussi ses limites face à des dynamiques non linéaires.

2 Filtre de Kalman en dimension 1

2.1 Théorie

Le modèle s'inspire d'un scénario concret : un avion se déplaçant entre Paris et Londres, suivi par un radar, dont la trajectoire réelle s'écarte d'une trajectoire idéale pour diverses raisons telles que la météo, les turbulences, ou encore l'imprécision du pilote. Les mesures fournies par le radar sont bruitées, et l'objectif est d'estimer la position réelle de l'avion au fil du temps à partir de ces observations incomplètes.

Le problème auquel nous sommes confrontés est le suivant : à chaque instant n , nous observons une mesure bruitée Y_n de l'état réel X_n , et nous souhaitons reconstruire le plus fidèlement possible cette variable cachée. Plus précisément, la filtration générée par les observations $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ constitue notre canal d'information.

Modèle

Le modèle en dimension 1 que nous allons étudier est le suivant :

[1]

$$\begin{cases} X_0 = W_0 \\ X_{n+1} = aX_n + W_{n+1}, & \text{pour } n \geq 1 \\ Y_{n+1} = X_{n+1} + V_{n+1}, & \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

où

X_n : état réel du système à l'instant n ,
 Y_n : mesure observée à l'instant n ,
 W_n : bruit de système (perturbations aléatoires),
 V_n : bruit de mesure (incertitudes du capteur).

Les variables aléatoires W_n et V_n sont supposées **gaussiennes, centrées et indépendantes**, ce qui est une hypothèse classique justifiée par le théorème central limite.

On note :

$$W_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \quad V_n \sim \mathcal{N}(0, \tau^2).$$

Le paramètre σ^2 reflète l'intensité des perturbations du système. Plus il est grand, plus le système est instable ou soumis à des variations aléatoires importantes (ex. turbulences, erreurs de pilotage). À l'inverse, une faible valeur signifie que le système est plus régulier.

Le paramètre τ^2 quantifie l'incertitude sur les mesures. Un capteur peu précis ou soumis à beaucoup de bruit aura une grande variance, tandis qu'un capteur de haute qualité aura une faible variance.

Objectif : Estimer au mieux X_n à partir des observations Y_0, Y_1, \dots, Y_n .

Dans un contexte gaussien, l'estimateur optimal au sens L^2 est l'espérance conditionnelle :

$$\hat{X}_n = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n]$$

C'est celui qui minimise l'erreur quadratique moyenne $\mathbb{E}[(X_n - \hat{X}_n)^2]$.

Rôle du paramètre a

Nous allons maintenant discuter le rôle du paramètre a , qui mesure l'inertie du système, c'est-à-dire la dépendance entre deux états successifs. Cette interprétation joue un rôle crucial dans l'analyse du comportement de la trajectoire estimée, notamment en lien avec la stabilité du système.

Si $a \approx 1$, l'état évolue lentement et conserve fortement les valeurs passées.

À l'inverse, si $a \approx 0$, l'évolution de l'état est dominée par le bruit W_n , donc très sensible aux perturbations.

On peut alors faire les conjectures suivantes :

$|a| < 1$ s'il y a un pilote dans l'avion :

Si $a \geq 1$, la suite (X_n) devient instable et peut "exploser", car elle suit une dynamique géométrique divergente. En revanche, avec un pilote aux commandes, les erreurs sont continuellement corrigées : l'état est contrôlé et on espère que la trajectoire converge vers une direction stable.

$a \in]-1, 0[$ signifie que le pilote est en phase d'apprentissage :

Cela reflète une correction trop brutale des erreurs, ce qui entraîne des oscillations de la trajectoire. C'est un comportement typique d'un pilote débutant qui réagit de manière excessive et instable aux écarts par rapport à la trajectoire attendue.

2.2 Construction du filtre de Kalman

Nous construisons ici les équations récursives du filtre. L'objectif est de déterminer, à chaque instant n , l'estimateur optimal de X_n connaissant les observations Y_0, \dots, Y_n , c'est-à-dire :

$$\hat{X}_n = \mathbb{E}[X_n | Y_0, \dots, Y_n].$$

Pour établir les formules de récurrence du filtre de Kalman, nous nous appuyons sur les propriétés des vecteurs gaussiens conditionnels. Ces résultats sont essentiels pour simuler et évaluer le filtre numériquement.

Afin d'exprimer explicitement \hat{X}_n , il est nécessaire de comprendre le comportement d'une variable gaussienne conditionnée à une autre. Le lemme suivant fournit ce résultat dans le cas bidimensionnel et constitue la base du calcul des mises à jour du filtre.

Lemme 2.1 – Loi conditionnelle d'un vecteur gaussien dans \mathbb{R}^2 [1]

Soit (X, Y) un vecteur gaussien dans \mathbb{R}^2 tel que $\mathcal{L}(X)$ soit la loi $\mathcal{N}(\mu, \gamma^2)$ et que $\mathcal{L}(Y | X)$ soit la loi $\mathcal{N}(\alpha X + \beta, \delta^2)$. Alors la loi conditionnelle de X sachant Y est donnée par :

$$\mathcal{L}(X | Y) = \mathcal{N}\left(\rho^2 \left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{\alpha(Y - \beta)}{\delta^2}\right), \rho^2\right)$$

avec

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{\delta^2}$$

Démonstration

Nous commençons par la preuve de la formule de l'espérance conditionnelle dans le cas gaussien, qui nous sera utile dans cette démonstration.

Espérance conditionnelle dans le cas gaussien

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles tel que le vecteur

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

alors l'espérance conditionnelle de X sachant Y est donnée par :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \mu_X + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)} (Y - \mu_Y)$$

En effet, par définition, dans le cas gaussien, la loi conditionnelle $X | Y = y$ est une loi normale dont l'espérance est affine en y . On cherche à exprimer cette espérance uniquement en termes des moments du couple (X, Y) .

On note :

$$X = \mu_X + \sigma_X Z_1, \quad Y = \mu_Y + \sigma_Y (\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2)$$

où (Z_1, Z_2) sont deux variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Dans cette représentation, Z_1 et Z_2 sont les composantes principales. On peut alors écrire X en fonction de Y :

Sachant $Y = y$, on peut écrire :

$$Z_1 = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \quad Y = \mu_Y + \sigma_Y (\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2)$$

On considère l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[\mu_X + \sigma_X Z_1 | Y] = \mu_X + \sigma_X \mathbb{E}[Z_1 | Y]$$

Il est connu que, pour un vecteur gaussien, le conditionnement d'une variable sur l'autre donne une loi normale, et que :

$$\mathbb{E}[Z_1 | Y] = \frac{\text{Cov}(Z_1, Y)}{\text{Var}(Y)} (Y - \mu_Y)$$

Or :

$$\text{Cov}(Z_1, Y) = \text{Cov}(Z_1, \mu_Y + \sigma_Y (\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2)) = \rho \sigma_Y \text{Var}(Z_1) = \rho \sigma_Y$$

Donc :

$$\mathbb{E}[Z_1 | Y] = \frac{\rho\sigma_Y}{\text{Var}(Y)}(Y - \mu_Y)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X | Y] = \mu_X + \sigma_X \cdot \frac{\rho\sigma_Y}{\text{Var}(Y)}(Y - \mu_Y) = \mu_X + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}(Y - \mu_Y)$$

car $\text{Cov}(X, Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y$.

□

Ce qui achève cette preuve préliminaire.

Le vecteur (X, Y) est gaussien, donc toutes ses lois marginales et conditionnelles sont normales.

Calcul de l'espérance de Y

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y | X]] = \mathbb{E}[\alpha X + \beta] = \alpha\mu + \beta$$

Décomposition de la variance de Y

On applique la décomposition classique :

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\mathbb{E}[Y | X]) + \mathbb{E}[\text{Var}(Y | X)]$$

Or :

$$\mathbb{E}[Y | X] = \alpha X + \beta \Rightarrow \text{Var}(\mathbb{E}[Y | X]) = \alpha^2 \text{Var}(X) = \alpha^2 \gamma^2,$$

et comme $\text{Var}(Y | X) = \delta^2$, constante, on a :

$$\text{Var}(Y) = \alpha^2 \gamma^2 + \delta^2$$

Calcul de la covariance $\text{Cov}(X, Y)$

On écrit :

$$Y = \alpha X + \beta + \varepsilon, \quad \text{où } \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \delta^2), \text{ indépendant de } X$$

Donc :

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, \alpha X + \beta + \varepsilon) = \alpha \text{Cov}(X, X) = \alpha \gamma^2$$

Espérance conditionnelle de X sachant Y

Par la formule générale du couple gaussien, démontrée plus haut, on a :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[X] + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}(Y - \mathbb{E}[Y])$$

En remplaçant :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \mu + \frac{\alpha \gamma^2}{\alpha^2 \gamma^2 + \delta^2}(Y - \alpha\mu - \beta)$$

Développons :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \frac{\delta^2 \mu + \alpha \gamma^2(Y - \beta)}{\alpha^2 \gamma^2 + \delta^2}$$

Variance conditionnelle de X sachant Y

On utilise :

$$\text{Var}(X | Y) = \gamma^2 - \frac{(\text{Cov}(X, Y))^2}{\text{Var}(Y)} = \gamma^2 - \frac{(\alpha \gamma^2)^2}{\alpha^2 \gamma^2 + \delta^2} = \frac{\gamma^2 \delta^2}{\alpha^2 \gamma^2 + \delta^2}$$

Mise en forme canonique avec ρ^2

On pose :

$$\frac{1}{\rho^2} := \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{\delta^2} \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \frac{\gamma^2 \delta^2}{\alpha^2 \gamma^2 + \delta^2}$$

Dès lors :

$$\mathbb{E}[X | Y] = \rho^2 \left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{\alpha(Y - \beta)}{\delta^2} \right), \quad \text{Var}(X | Y) = \rho^2$$

Par conséquent, on a bien

$$X | Y \sim \mathcal{N} \left(\rho^2 \left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{\alpha(Y - \beta)}{\delta^2} \right), \rho^2 \right), \quad \text{où} \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{\delta^2}.$$

□

Nous allons maintenant appliquer ce résultat au cadre du filtre de Kalman. Grâce au lemme précédent, nous pouvons exprimer explicitement la loi conditionnelle de X_n sachant les observations Y_0, \dots, Y_n comme une loi normale. En procédant par récurrence, nous établirons les formules de mise à jour de l'estimateur \hat{X}_n et de la variance conditionnelle P_n . La proposition suivante donne l'expression explicite de ces deux quantités.

Proposition 2.1 – Formules du filtre de Kalman [1]

La loi de X_{n+1} sachant Y_0, \dots, Y_{n+1} est la loi normale $\mathcal{N}(\hat{X}_{n+1}, P_{n+1})$ où :

$$\hat{X}_{n+1} = a\hat{X}_n + \frac{P_{n+1}}{\tau^2}(Y_{n+1} - a\hat{X}_n) \quad \text{et} \quad P_{n+1} = \frac{a^2\tau^2 P_n + \sigma^2\tau^2}{a^2 P_n + \sigma^2 + \tau^2}.$$

Démonstration

Nous procédons par récurrence.

Initialisation

Nous avons

$$Y_0 = X_0 + V_0$$

avec $X_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $V_0 \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$ indépendamment.

D'après le lemme 2.2, la loi conditionnelle de X_0 sachant Y_0 est :

$$X_0 | Y_0 \sim \mathcal{N}(\hat{X}_0, P_0),$$

avec :

$$\hat{X}_0 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} Y_0, \quad P_0 = \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}.$$

En effet,

$$\mathcal{L}(X_0 | Y_0) = \mathcal{L}(X_0 | X_0 + V_0), \quad \text{avec } X_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ et } V_0 \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$$

On rappelle le lemme 2.2.

Lemme 2.2 – Loi conditionnelle d'un vecteur gaussien dans \mathbb{R}^2 [1]

Soit (X, Y) un vecteur gaussien dans \mathbb{R}^2 tel que :

- $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \gamma^2)$,
- $\mathcal{L}(Y | X) = \mathcal{N}(\alpha X + \beta, \delta^2)$.

Alors, la loi conditionnelle de X sachant Y est donnée par :

$$\mathcal{L}(X | Y) = \mathcal{N}\left(\rho^2 \left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{\alpha(Y - \beta)}{\delta^2}\right), \rho^2\right), \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\alpha^2}{\delta^2}.$$

En posant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma^2 = \sigma^2$ et $\delta^2 = \tau^2$, et en appliquant le lemme 2.2, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_0 | Y_0) &= \mathcal{N}\left(\rho^2 \left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{Y_0}{\delta^2}\right), \rho^2\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{\tau^2 \sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2} \left(\frac{Y_0}{\tau^2}\right), \frac{\tau^2 \sigma^2}{\tau^2 + \sigma^2}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{\sigma^2 Y_0}{\tau^2 + \sigma^2}, \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}\right) \end{aligned}$$

Ce qui conclut l'initialisation.

Récurrance

Prenons n arbitrairement fixé. On suppose que

$$X_n | Y_0, \dots, Y_n \sim \mathcal{N}(\hat{X}_n, P_n) \quad \text{avec} \quad \hat{X}_n = a \frac{P_n}{\tau^2} (Y_n - a \hat{X}_{n-1}), \quad \text{et} \quad P_n = \frac{a^2 \tau^2 P_{n-1} + \tau^2 \sigma^2}{a^2 P_{n-1} + \sigma^2 + \tau^2} \quad (1)$$

On veut montrer que cela est aussi vrai pour l'entier suivant : $n + 1$, c'est-à-dire que :

$$X_{n+1} | Y_0, \dots, Y_{n+1} \sim \mathcal{N}(\hat{X}_{n+1}, P_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \hat{X}_{n+1} = a \frac{P_{n+1}}{\tau^2} (Y_{n+1} - a \hat{X}_n), \quad \text{et} \quad P_{n+1} = \frac{a^2 \tau^2 P_n + \tau^2 \sigma^2}{a^2 P_n + \sigma^2 + \tau^2} \quad (2)$$

Pour faire cela, nous allons procéder en 2 étapes : une étape de **prédiction** et une étape de **filtrage**.

1) Etape de prédiction

On sait que :

$$X_{n+1} = aX_n + W_{n+1}, \quad (3)$$

avec $W_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendant de X_n .

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n] &= \mathbb{E}[aX_n + W_{n+1} | Y_0, \dots, Y_n] \\ &= a\mathbb{E}[X_n | Y_0, \dots, Y_n] + \mathbb{E}[W_{n+1}] \quad \text{par indépendance} \\ &= a\mathbb{E}[X_n | Y_0, \dots, Y_n] \quad \text{car} \quad \mathbb{E}[W_{n+1}] = 0 \\ &= a\hat{X}_n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_{n+1}|Y_0, \dots, Y_n) &= a^2 \text{Var}(X_n|Y_0, \dots, Y_n) + \text{Var}(W_{n+1}) \\ &= a^2 \text{Var}(X_n|Y_0, \dots, Y_n) + \sigma^2 \text{ car } \text{Var}(W_{n+1}) = \sigma^2 \\ &= a^2 P_n + \sigma^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence.}\end{aligned}$$

On a ainsi,

$$\mathcal{L}(X_{n+1}|Y_0 \dots Y_n) = \mathcal{N}(a\hat{X}_n, a^2 P_n + \sigma^2)$$

2) Etape de filtrage

On sait que :

$$Y_n = X_n + V_n,$$

où $V_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$.

Donc

$$\mathcal{L}(Y_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n) = \mathcal{L}(X_n + V_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n)$$

On calcule l'espérance conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n] &= \mathbb{E}[X_n + V_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n] \\ &= \mathbb{E}[X_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n] + \mathbb{E}[V_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n] \\ &= X_n + \mathbb{E}[V_n] \quad \text{par indépendance de } V_n \\ &= X_n \quad \text{puisque } V_n \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)\end{aligned}$$

On calcule maintenant la variance :

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n) &= \text{Var}(X_n + V_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n) \\ &= \text{Var}(X_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n) + \text{Var}(V_n) \quad \text{par indépendance} \\ &= \mathbb{E}[(X_n - \mathbb{E}[X_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n])^2 | Y_0, \dots, Y_n, X_n] + \text{Var}(V_n) \\ &= \mathbb{E}[(X_n - X_n)^2 | Y_0, \dots, Y_n, X_n] + \text{Var}(V_n) \\ &= 0 + \text{Var}(V_n) \\ &= \tau^2\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\mathcal{L}(Y_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n) = \mathcal{N}(X_n, \tau^2)$$

En appliquant la formule de Bayes conditionnelle, qui stipule :

Proposition 2.2 – Formule de Bayes conditionnelle [1]

Soit $(X, Y, Y_0, \dots, Y_{n-1})$ un vecteur gaussien dans \mathbb{R}^{n+1} tel que :

- la loi de X sachant Y_0, \dots, Y_{n-1} soit $\mathcal{N}(\mu, \gamma^2)$,
- la loi de Y sachant Y_0, \dots, Y_{n-1}, X soit $\mathcal{N}(X, \delta^2)$.

Alors la loi de X sachant Y_0, \dots, Y_{n-1}, Y est la loi normale :

$$\mathcal{N}\left(\rho^2 \left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{Y}{\delta^2}\right), \rho^2\right) \quad \text{où} \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Y_n|Y_0, \dots, Y_n, X_n) &= \mathcal{N}(X, \tau^2) = \mathcal{N}(X_n, \delta^2) \\ \mathcal{L}(X_{n+1}|Y_0 \dots Y_n) &= \mathcal{N}(a\hat{X}_n, a^2P_n + \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu, \gamma^2)\end{aligned}$$

En posant : $\mu = a\hat{X}_{n-1}$, $\gamma^2 = a^2P_{n-1} + \sigma^2$, $X = X_{n-1}$, $Y = Y_{n-1}$ et $\delta^2 = \tau^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^2} &= \frac{1}{a^2P_{n-1} + \sigma^2} + \frac{1}{\tau^2} \\ &= \frac{\tau^2 + a^2P_{n-1} + \sigma^2}{\tau^2 a^2P_{n-1} + \tau^2 \sigma^2} \\ \implies \rho^2 = P_n &= \frac{\tau^2 a^2P_{n-1} + \tau^2 \sigma^2}{\tau^2 + a^2P_{n-1} + \sigma^2}\end{aligned}$$

D'après la formule de Bayes conditionnelle, nous avons :

$$\hat{X}_n = \rho^2 \left(\frac{a\hat{X}_{n-1}}{a^2P_{n-1} + \sigma^2} + \frac{Y_n}{\tau^2} \right).$$

En remplaçant ρ^2 par P_n , nous obtenons :

$$\hat{X}_n = P_n \left(\frac{a\hat{X}_{n-1}}{a^2P_{n-1} + \sigma^2} + \frac{Y_n}{\tau^2} \right).$$

Nous réécrivons le premier terme en mettant $a\hat{X}_{n-1}$ en facteur :

$$\begin{aligned}\hat{X}_n &= P_n \left(\frac{a\hat{X}_{n-1}}{a^2P_{n-1} + \sigma^2} + \frac{Y_n}{\tau^2} - \frac{a\hat{X}_{n-1}}{\tau^2} + \frac{a\hat{X}_{n-1}}{\tau^2} \right) \\ &= a\hat{X}_{n-1} + P_n \left(\frac{Y_n - a\hat{X}_{n-1}}{\tau^2} \right)\end{aligned}$$

En utilisant l'expression de P_n :

$$P_n = \frac{a^2\tau^2P_{n-1} + \sigma^2\tau^2}{a^2P_{n-1} + \sigma^2 + \tau^2},$$

nous pouvons finalement écrire :

$$\hat{X}_n = a\hat{X}_{n-1} + \frac{P_n}{\tau^2}(Y_n - a\hat{X}_{n-1}).$$

□

Nous avons ainsi obtenu une expression récursive pour la variance conditionnelle P_n , qui représente l'incertitude sur l'estimation de X_n à l'instant n . Il est naturel de s'interroger sur le comportement de cette suite.

P_n converge-t-elle vers une valeur limite ?

Si oui, **cette limite dépend-elle du paramètre a ?**

Explorons ces questions à l'aide d'une analyse précise de la fonction de récurrence définie par P_n .

Evolution temporelle de P_n en fonction de a

$$P_n = \frac{a^2\tau^2 P_{n-1} + \sigma^2\tau^2}{a^2 P_{n-1} + \sigma^2 + \tau^2},$$

$$P_n = f(P_{n-1}), \quad \text{avec } f : x \rightarrow P_n = \frac{a^2\tau^2 x + \sigma^2\tau^2}{a^2 x + \sigma^2 + \tau^2}$$

Etude des variations de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a^2\tau^2(a^2x + \sigma^2 + \tau^2) - a^2(a^2\tau^2x + \sigma^2\tau^2)}{(a^2x + \sigma^2 + \tau^2)^2} \\ &= \frac{a^4\tau^2x + a^2\sigma^2\tau^2 + a^2\tau^4 - a^4\tau^2x - a^2\sigma^2\tau^2}{(a^2x + \sigma^2 + \tau^2)^2} \\ &= \frac{a^2\tau^4}{(a^2x + \sigma^2 + \tau^2)^2} > 0 \text{ donc } f \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f = \frac{a^2\tau^2}{a^2} = \tau^2$$

On rappelle qu'ici, $P_0 = \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} < \tau^2$. Par conséquent, (P_n) est croissante et majorée par τ^2 . Donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, (P_n) converge.

Cas particulier : Si $a = 0$, alors $P_n = \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2} = P_0$. La suite est alors stationnaire.

La limite éventuelle P_∞ de la suite (P_n) vérifie une équation quadratique en fonction de a , σ^2 et τ^2 . Cette équation peut s'écrire :

$$a^2x^2 + x(\sigma^2 + \tau^2 - a^2\tau^2) - \sigma^2\tau^2 = 0$$

Elle admet une unique solution positive, qui constitue la limite de la variance conditionnelle lorsque le filtre atteint un régime stationnaire. Lorsque $|a|$ est proche de 1, cette limite se rapproche de τ^2 , c'est-à-dire de la variance du bruit de mesure : le filtre peine à réduire l'incertitude. En revanche, pour des valeurs faibles de $|a|$, la mémoire du système est plus courte, et P_∞ diminue rapidement.

Ces résultats sont cohérents avec l'interprétation physique du paramètre a . Un pilote expérimenté, corrigeant progressivement les erreurs, correspond à une valeur $a > 0$ proche de 1 : l'estimation est plus lisse mais l'incertitude persiste plus longtemps. À l'inverse, un pilote en apprentissage, avec un comportement oscillant (valeurs de $a < 0$), génère une dynamique instable du système estimé, ce qui se répercute dans la trajectoire de P_n avant sa stabilisation.

Récapitulatif

Pour bien distinguer les différentes phases du filtre de Kalman, on adopte les notations suivantes :

- Le symbole **tilde** (\sim) est utilisé pour désigner les **valeurs prédites à l'instant $n+1$** , obtenues à partir de l'information disponible à l'instant n . Par exemple : \tilde{x}_{n+1} , \tilde{P}_{n+1} .
- Le symbole **chapeau** ($\hat{}$) est utilisé pour représenter les **estimations corrigées** après mise à jour avec la mesure observée. Par exemple : \hat{x}_{n+1} , \hat{P}_{n+1} .

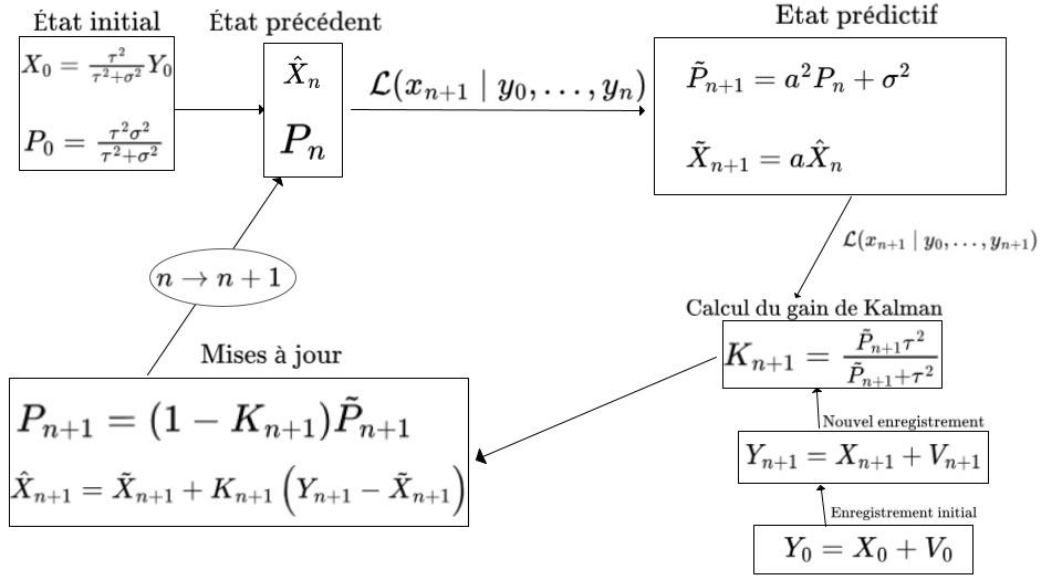


FIGURE 1 – Déroulement d'une itération du filtre de Kalman en dimension 1 [4]

Le filtre de Kalman se déroule en deux grandes phases : la **prédiction** et la **mise à jour**.

Dans la **phase de prédiction**, on utilise l'état estimé au temps n pour calculer l'état prévu au temps suivant $n+1$, ainsi que l'incertitude associée. Cette étape repose uniquement sur le modèle dynamique, sans utiliser d'observation.

Une fois la nouvelle observation disponible, on passe à la **phase de mise à jour**. On commence par calculer le gain de Kalman, qui permet de pondérer la confiance entre le modèle et la mesure. On utilise ensuite cette observation pour corriger l'état prédit : on compare la mesure attendue avec la mesure réelle, et on ajuste l'estimation en conséquence.

Enfin, on met à jour l'incertitude associée à cette estimation corrigée. L'ensemble de ces opérations constitue une itération complète du filtre de Kalman, que l'on répète à chaque pas de temps.

2.3 Algorithme

Soient $V_n \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$, $W_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $|a| < 1$ un réel et ε un réel fixé.

Algorithm 1 Filtre de Kalman en dimension 1 1

Entrées : N, a, σ, τ^2, M

Initialisation :

Générer M simulations indépendantes

for chaque simulation **do**

$X_0 \leftarrow W_0, Y_0 \leftarrow X_0 + V_0$

$\hat{X}_0 \leftarrow \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} Y_0$

$P_0 \leftarrow \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}$

for $n = 1$ à N **do**

Générer $W_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $V_n \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$

$X_n \leftarrow aX_{n-1} + W_n$

$Y_n \leftarrow X_n + V_n$

$P_n \leftarrow \frac{a^2 \tau^2 P_{n-1} + \sigma^2 \tau^2}{a^2 P_{n-1} + \sigma^2 + \tau^2}$

$\hat{X}_n \leftarrow a\hat{X}_{n-1} + \frac{P_n}{\tau^2} (Y_n - a\hat{X}_{n-1})$

end for

end for

Sortie $\mathbb{E}[X_n], \mathbb{E}[\hat{X}_n], \text{Var}(X_n), \text{Var}(\hat{X}_n)$ et P_n

2.3.1 Choix des paramètres

Quel que soit le choix initial de la variance σ_0 , l'algorithme du filtre de Kalman en dimension 1 converge toujours vers une valeur stable. Si la variance initiale est surestimée, elle décroît au fil des itérations. Si elle est sous-estimée, elle augmente progressivement. Dans les deux cas, la dynamique de l'algorithme compense et conduit vers une solution unique.

Ce comportement peut être justifié par le théorème suivant :

Théorème 2.1 [2]

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $w > 0$. On considère la suite définie par :

$$\sigma_{n+1} = a^2 \sigma_n + w.$$

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout σ_0 , la suite σ_n converge vers une limite $\sigma > 0$.
- (ii) L'équation de point fixe $\sigma = a^2 \sigma + w$ admet une solution unique $\sigma > 0$.
- (iii) On a $|a| < 1$.

Ce résultat garantit la stabilité du filtre, mais en pratique, pour initialiser correctement les paramètres du modèle, on peut s'appuyer sur des estimateurs de maximum de vraisemblance. Ceux-ci permettent d'estimer au mieux les variances inconnues à partir des données observées, afin d'améliorer les performances du filtre dès les premières itérations.

Proposition 2.3 [1]

Les estimateurs obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance sont :

$$\hat{a}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_{k-1}X_k}{\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2},$$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{a}_n X_{k-1})^2.$$

Démonstration

$$\mathcal{L}(a, \sigma, X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n} \prod_{k=1}^n \exp\left(-\frac{(X_k - aX_{k-1})^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\ln(\mathcal{L}(a, \sigma, X_1, \dots, X_n)) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{k=1}^n \frac{(X_k - aX_{k-1})^2}{2\sigma^2}$$

$$\ln(\mathcal{L}(a, \sigma, X_1, \dots, X_n)) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (X_k - aX_{k-1})^2$$

On dérive en fonction de a :

$$\frac{d \ln(\mathcal{L}(a, \sigma, X_1, \dots, X_n))}{da} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (2a_n X_{k-1}^2 - 2X_k X_{k-1})$$

Trouvons \hat{a}_n tel que

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (2\hat{a}_n X_{k-1}^2 - 2X_k X_{k-1}) = 0$$

$$\iff \sum_{k=1}^n \hat{a}_n X_{k-1}^2 = \sum_{k=1}^n X_k X_{k-1}$$

$$\iff \hat{a}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_{k-1}X_k}{\sum_{k=1}^n X_{k-1}^2}$$

Maintenant, on dérive en fonction de σ :

$$\frac{d \ln(\mathcal{L}(a, \sigma, X_1, \dots, X_n))}{d\sigma} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{k=1}^n (X_k - aX_{k-1})^2$$

Trouvons $\hat{\sigma}_n$ tel que

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{k=1}^n (X_k - aX_{k-1})^2 = 0$$

$$\iff \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{k=1}^n (X_k - aX_{k-1})^2 = \frac{n}{2\sigma^2}$$

$$\iff \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (X_k - aX_{k-1})^2 = n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n (X_k - aX_{k-1})^2}$$

Nous avons donc,

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{a}_n X_{k-1})^2$$

□

2.3.2 Condition d'arrêt

Pour vérifier que l'algorithme a atteint un état stable, il est nécessaire de définir un critère de convergence pertinent. Une méthode naturelle consiste à observer l'évolution de la variance des estimations au fil du temps. Cette approche repose sur la décomposition suivante, qui relie la variance totale de l'état à deux sources distinctes d'incertitude :

Décomposition de la variance [6]

Dans le cadre du filtre de Kalman, la variance totale de la variable cachée X_n peut se décomposer en deux termes :

$$\text{Var}(X_n) = P_n + \text{Var}(\hat{X}_n),$$

où P_n est la variance conditionnelle (déterministe) donnée par le filtre, et \hat{X}_n l'estimation de X_n . Cette formule repose sur la décomposition classique de la variance :

$$\text{Var}(X_n) = \mathbb{E}[\text{Var}(X_n|\mathcal{F}_n)] + \text{Var}(\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n]).$$

Cette relation met en évidence deux façons de définir un critère d'arrêt :

- Sur la base de la variance des estimations $\text{Var}(\hat{X}_n)$, en fixant un seuil en dessous duquel on considère que l'estimation est suffisamment précise.
- En surveillant l'évolution de P_n d'une itération à l'autre. Si sa variation devient négligeable, cela signifie que le filtre a atteint un régime stationnaire.

En pratique, pour garantir un arrêt même en l'absence de convergence stricte, on fixera un nombre maximal d'itérations à ne pas dépasser.

2.4 Simulations

Pour évaluer les performances du filtre de Kalman, nous générons de multiples trajectoires indépendantes des variables X_n , Y_n et \hat{X}_n jusqu'à un instant final fixé. Les moyennes et variances empiriques calculées à chaque pas de temps permettent ainsi de confirmer les propriétés théoriques du filtre sur un grand nombre de trajectoires.

2.4.1 Résultats

Le schéma suivant illustre le comportement du filtre de Kalman pour $N = 100$ étapes, avec les paramètres $a = 0.9$, $\sigma^2 = 0.2$ et $\tau^2 = 0.4$, à partir de 1000 simulations indépendantes.

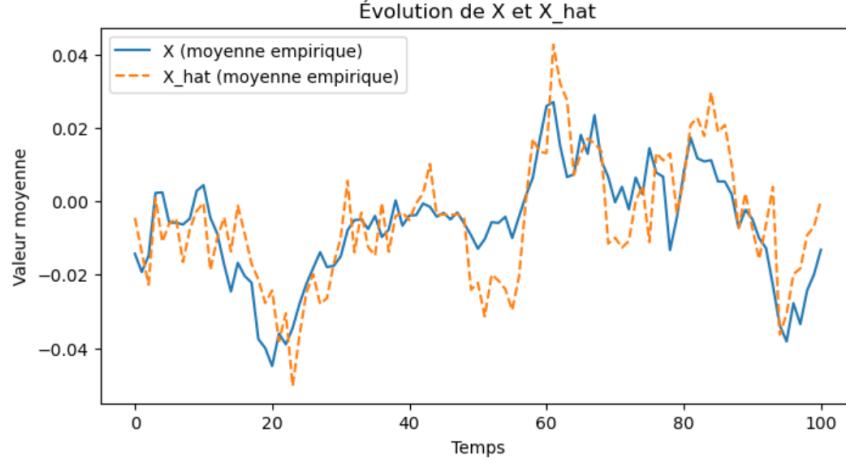


FIGURE 2 – Comparaison entre l'état réel X_n et l'estimation \hat{X}_n moyennée sur 1000 simulations.

On observe que les deux courbes suivent des tendances très proches, confirmant que le filtre parvient à suivre la dynamique du système malgré le bruit présent dans les observations. L'écart entre X_n et \hat{X}_n reste globalement faible, ce qui témoigne d'un bon compromis entre la confiance accordée au modèle et celle accordée aux mesures. Ces résultats illustrent la capacité du filtre à produire des estimations stables et peu biaisées à partir de mesures bruitées.

2.4.2 Analyse de la variance

On illustre l'évolution temporelle des trois variances suivantes : la variance totale de X_n , la variance empirique des estimations \hat{X}_n , et la variance conditionnelle P_n fournie par le filtre de Kalman.

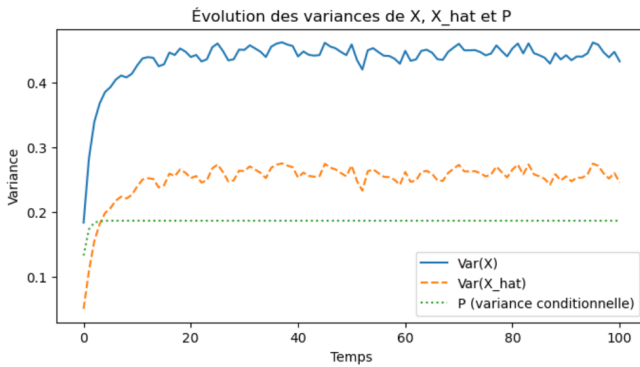


FIGURE 3 – Décomposition de la variance de X_n

La variance totale $\text{Var}(X_n)$ converge rapidement vers une valeur stationnaire relativement élevée, tandis que la variance conditionnelle P_n , déterministe, atteint une valeur limite plus faible. Entre les deux, la variance empirique de \hat{X}_n reflète la variabilité des estimations à travers les simulations. L'évolution de ces trois courbes confirme la validité de la décomposition théorique $\text{Var}(X_n) = \mathbb{E}[P_n] + \text{Var}(\hat{X}_n)$, la somme des deux courbes inférieures expliquant celle du dessus. La stabilité rapide de P_n indique que le filtre atteint rapidement un régime stationnaire, et la régularité de $\text{Var}(\hat{X}_n)$ témoigne d'estimations cohérentes entre trajectoires simulées.

Ainsi, le filtre parvient à fournir une estimation efficace de l'état caché, tout en maintenant une incertitude quantifiée à travers P_n .

3 Extension en dimension supérieure

3.1 Théorie

Après avoir détaillé le fonctionnement du filtre de Kalman dans le cas unidimensionnel, nous généralisons désormais ce cadre au cas multidimensionnel, afin de traiter des systèmes dynamiques décrits par des vecteurs d'état et des matrices de transition.

Modèle

Le modèle en dimension supérieure que nous allons étudier est le suivant :

[2]

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + w_n \\ y_n = Cx_n + v_n \end{cases}$$

où

x_n : état caché du système à l'instant n , $x_n \in \mathbb{R}^n$

y_n : mesure observée à l'instant n , $y_t \in \mathbb{R}^m$

A : matrice de transition, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

C : matrice d'observation, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

w_n : bruit de processus, $w_n \sim \mathcal{N}(0, W)$, $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$

v_n : bruit de mesure, $v_n \sim \mathcal{N}(0, V)$, $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Les bruits w_n et v_n sont supposés gaussiens, centrés, indépendants entre eux et indépendants de l'état initial $x_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma_0)$.

Rôle des paramètres A et C

Les matrices A et C jouent un rôle central dans le filtre de Kalman. La matrice A décrit la dynamique du système : elle indique comment l'état évolue d'un instant à l'autre. Une valeur élevée des coefficients de A traduit un système fortement autocorrélé, tandis qu'une valeur faible indique une dynamique lente ou amortie. La matrice C , quant à elle, relie l'état caché aux observations mesurables. Elle contrôle la façon dont les mesures y_n renseignent sur l'état x_n : plus C est « riche », plus les observations contiennent d'information sur l'état réel.

Le filtre de Kalman permet d'estimer, de manière récursive, l'état caché du système à partir des observations bruitées. À chaque pas de temps, il combine la prédiction issue du modèle avec l'information apportée par la nouvelle observation. Plus précisément, il calcule :

$$\hat{x}_n = \mathbb{E}[x_n \mid y_0, \dots, y_{n-1}] \quad \text{et} \quad \Sigma_n = \text{Cov}(x_n \mid y_0, \dots, y_{n-1}),$$

où \hat{x}_n est l'estimation de l'état et Σ_n la covariance de l'erreur d'estimation.

Formules récursives du filtre de Kalman [2]

À chaque itération, le filtre se décompose en deux étapes : la prédiction (à partir du modèle dynamique) et la mise à jour (correction par l'observation).

Les équations suivantes permettent d'effectuer cette mise à jour :

— **Gain de Kalman :**

$$K_n = -A\Sigma_n C^\top (C\Sigma_n C^\top + V)^{-1}$$

Le gain de Kalman pondère la différence entre la prédiction et l'observation. Il ajuste l'estimation selon la précision des mesures et la confiance accordée au modèle.

— **Mise à jour de l'état estimé :**

$$\hat{x}_{n+1} = (A + K_n C)\hat{x}_n - K_n y_n$$

Cette équation combine la prédiction $A\hat{x}_n$ avec une correction proportionnelle à l'erreur d'observation.

— **Mise à jour de la covariance :**

$$\Sigma_{n+1} = (A + K_n C)\Sigma_n A^\top + W$$

Elle permet de mettre à jour l'incertitude de l'estimation, en tenant compte du bruit de processus et de la structure du modèle.

Lorsque le système atteint un régime stationnaire (c'est-à-dire que la dynamique et les incertitudes se stabilisent), les matrices Σ_n et K_n convergent vers des matrices fixes, notées respectivement Σ et K . On peut alors utiliser les équations du filtre dans leur forme asymptotique, dite **régime permanent**, ce qui simplifie l'implémentation :

$$\hat{x}_{n+1} = (A + KC)\hat{x}_n - Ky_n$$

Ce régime permet un calcul plus rapide et stable, notamment utile pour les systèmes temps réel ou embarqués.

Récapitulatif

De même on garde les notations :

- Le symbole **tilde** (\sim) pour désigner les **valeurs prédites à l'instant $n + 1$**
- Le symbole **chapeau** ($\hat{}$) pour représenter les **estimations corrigées** après la mise à jour

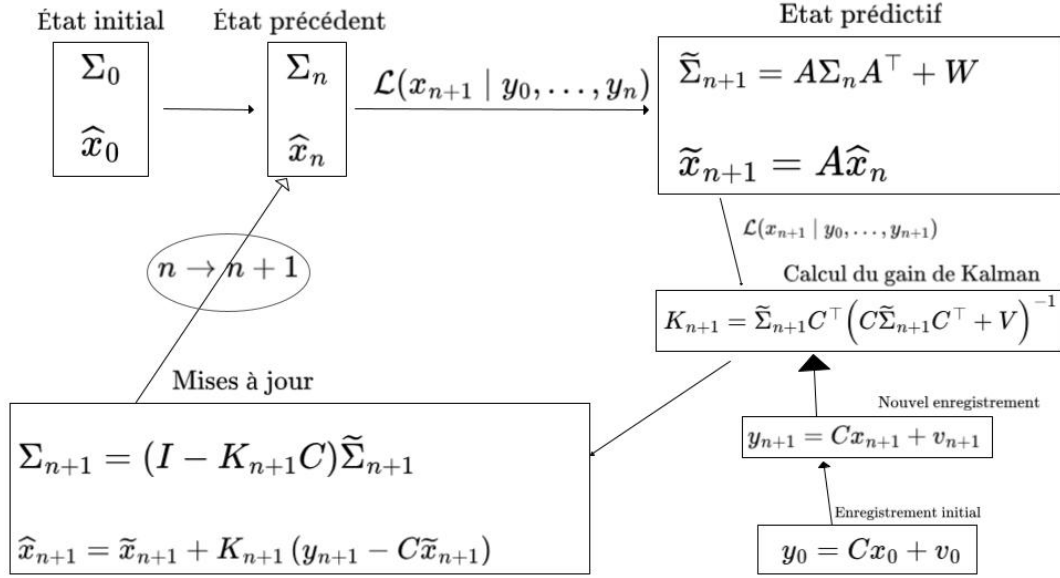


FIGURE 4 – Déroulement d'une itération du filtre de Kalman en multi-dimension [4]

Le principe général du filtre de Kalman reste identique dans le cas multi-dimensionnel : il s'agit toujours d'alterner une phase de **prédiction**, basée sur le modèle dynamique, et une phase de **mise à jour**, basée sur l'observation.

Cependant, les calculs sont généralisés à des vecteurs et des matrices. L'état est désormais représenté par un vecteur, et son incertitude par une matrice de covariance. Pour prendre en compte les interactions entre dimensions, on introduit des matrices intermédiaires : la matrice A pour la dynamique du système, et la matrice C pour le lien entre l'état et l'observation.

Ces matrices permettent d'adapter les équations du filtre aux systèmes complexes. Les étapes de calcul du gain de Kalman, de la correction de l'état et de la mise à jour de la covariance restent conceptuellement identiques, mais sont réalisées dans un cadre matriciel.

3.2 Algorithme

Algorithm 2 Filtre de Kalman en dimension n

Entrées : matrices A, C, W, V , état initial \hat{x}_0 , covariance initiale Σ_0 , observations y_n

for $t = 1$ à N **do**

1. **Prédiction de l'état :**

$$\tilde{x}_n \leftarrow A\tilde{x}_{n-1}$$

$$\tilde{\Sigma}_n \leftarrow A\Sigma_{n-1}A^\top + W$$

2. **Calcul du gain de Kalman :**

$$K_n \leftarrow \tilde{\Sigma}_n C^\top (C\tilde{\Sigma}_n C^\top + V)^{-1}$$

3. **Mise à jour avec la mesure :**

$$\hat{x}_n \leftarrow \tilde{x}_n + K_n(y_n - C\tilde{x}_n)$$

$$\Sigma_n \leftarrow (I - K_n C)\tilde{\Sigma}_n$$

end for

Sortie : estimations de l'état \hat{x}_n pour chaque instant n

3.2.1 Choix des paramètres

De même, dans le filtre de Kalman multi-dimensionnel, le choix des conditions initiales Σ_0 n'a pas d'impact sur la convergence asymptotique du filtre. En effet, quelle que soit la valeur initiale, la suite Σ_n converge vers une solution stable. Si la valeur initiale est trop grande, Σ_n décroît, et si elle est trop petite, elle croît. Dans tous les cas, la dynamique finit par équilibrer les effets contraires et converge vers une solution unique.

Cette convergence est gouvernée par l'équation de Riccati stationnaire [5] :

$$\Sigma = A\Sigma A^\top + W - A\Sigma C^\top (C\Sigma C^\top + V)^{-1} C\Sigma A^\top,$$

qui exprime un équilibre, une valeur stable, entre deux forces opposées :

- l'incertitude augmente naturellement à cause du bruit de processus W ,
- l'incertitude diminue grâce aux mesures informatives, pondérées par V .

L'équation de Riccati cherche donc une valeur stable pour la matrice de covariance, celle qui équilibre l'apport du bruit et celui des observations.

Théorème 3.1 [2]

Soit $W \succ 0$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour toute matrice initiale Σ_0 , la suite $\Sigma_{n+1} = A\Sigma_n A^\top + W$ converge vers une matrice Σ .
- (ii) L'équation de Lyapunov $A\Sigma A^\top - \Sigma + W = 0$ admet une solution unique avec $\Sigma \succ 0$.
- (iii) La matrice A est de Schur-stable.

Remarque : Le rayon spectral $\rho(A)$ est la plus grande valeur propre (en module) de A . On dit que A est Schur-stable si $\rho(A) < 1$, ce qui équivaut à $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = 0$.

En pratique, on initialisera l'algorithme avec des valeurs aléatoires, sans que cela n'affecte la convergence du filtre sous les hypothèses du modèle.

3.2.2 Condition d'arrêt

Dans le cas multidimensionnel, on adopte le même principe en surveillant l'évolution de la matrice de covariance des estimations.

Décomposition de la covariance [6]

Dans le filtre de Kalman, la covariance totale de l'état X_n se décompose comme suit :

$$\text{Cov}(X_n) = P_n + \text{Cov}(\hat{X}_n),$$

où P_n est la covariance conditionnelle (déterministe) fournie par le filtre, et $\text{Cov}(\hat{X}_n)$ représente la variabilité des estimations sur différentes réalisations (méthodes Monte Carlo).

Cette relation découle de la formule générale :

$$\text{Cov}(X_n) = \mathbb{E}[P_n] + \text{Cov}(\hat{X}_n),$$

En dimension supérieure, les deux critères de convergence vus en dimension 1 s'appliquent donc sur des matrices :

- Pour vérifier que P_n évolue peu, on calcule la norme de la différence entre deux itérations successives, typiquement la norme de Frobenius : $\|P_{n+1} - P_n\|_F$, et on arrête lorsque cette norme est inférieure à un seuil fixé.
- Pour $\text{Cov}(\hat{X}_n)$, qui n'est pas accessible directement, on l'estime à l'aide de simulations Monte Carlo sur plusieurs trajectoires, puis on observe si sa trace (ou sa norme) décroît au fil du temps.

En pratique, on utilise souvent un nombre maximal d'itérations pour garantir un arrêt, même si la convergence n'est pas parfaitement atteinte.

3.3 Simulations

Nous nous intéressons à l'extension du filtre à plusieurs dimensions, appliquée à un cas concret : l'analyse de données issues d'un vol parabolique (vol 0G).

Ces vols permettent de simuler des environnements en microgravité et sont utilisés dans le cadre d'études neuroscientifiques, notamment pour comprendre le fonctionnement du système vestibulaire en gravité modifiée ainsi que les mécanismes du mal des transports.

Le protocole expérimental a été mené dans le cadre du programme GRAVISM, encadré par l'Université de Bordeaux et le CNRS [3]. L'expérience se déroule à bord de l'Airbus A310 Zéro-G, qui exécute une série de 31 paraboles au large de l'Atlantique.

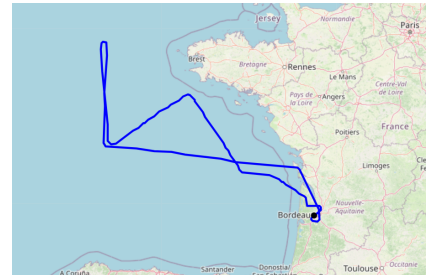


FIGURE 5 – Trajectoire du vol

Chaque parabole comprend une phase d'hypergravité (1.8g), suivie de 22 secondes de microgravité (0g), puis d'une nouvelle phase d'hypergravité. Ces variations permettent d'observer les réactions physiologiques et neurologiques des participants en condition de gravité fluctuante.

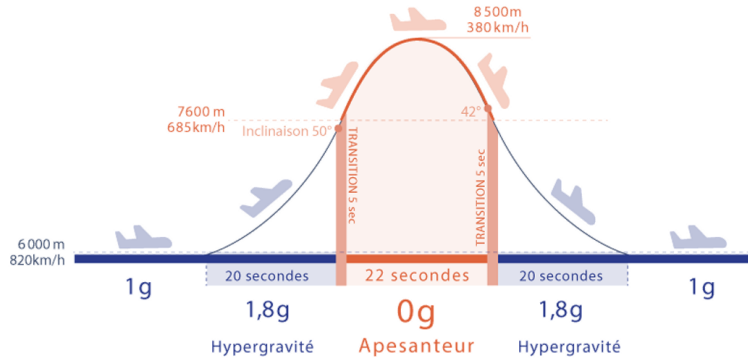


FIGURE 6 – Illustration des étapes d'une parabole [3]

Les données enregistrées comprennent notamment : le temps (en secondes depuis minuit UTC), les accélérations selon les axes Jx, Jy, Jz (dans le référentiel de l'avion), la position GPS (longitude, latitude), l'altitude (en pieds), la vitesse (en nœuds), ainsi que d'autres paramètres comme la pression cabine, le roulis, le tangage et l'assiette de l'avion.

Notre objectif est d'estimer l'altitude, ainsi que la vitesse verticale de l'avion à partir des mesures d'accélération Jz et du temps. Comme le mouvement de l'avion pendant les paraboles suit une trajectoire parabolique, la dynamique de l'altitude peut être modélisée par les équations du mouvement uniformément accéléré.

3.3.1 Modélisation

Pour mettre en place un filtre de Kalman, il est indispensable de disposer d'un modèle physique décrivant l'évolution du système. Dans notre cas, le mouvement vertical de l'avion suit une dynamique classique de type mouvement uniformément accéléré.

Prédictions

Le filtre a besoin d'un modèle pour prédire l'état du système à chaque instant. Ce modèle repose sur les équations du mouvement uniformément accéléré.

Équations du mouvement uniformément accéléré [7]

$$v(t) = v_0 + at \quad (\text{vitesse en fonction du temps } t)$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (\text{position en fonction du temps } t)$$

Dans notre cas, la position correspond à la hauteur verticale de l'avion, soit l'altitude z_n . La vitesse

devient la vitesse verticale \dot{z}_n , et l'accélération a_n est dérivée des mesures du capteur inertiel embarqué (Jz), corrigée de la gravité terrestre.

On cherche donc à estimer l'altitude z_n et la vitesse verticale \dot{z}_n à chaque instant. L'état du système est défini par le vecteur :

$$x_n = \begin{bmatrix} z_n \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} \quad \text{où } z_n = \text{altitude,} \quad \dot{z}_n = \text{vitesse verticale}$$

Avec un pas de temps constant Δn , l'évolution de cet état suit :

$$x_{n+1} = Ax_n + Ba_n + w_n$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta n^2 \\ \Delta n \end{bmatrix}, \quad a_n = (Jz_n - 1) \cdot g$$

Le terme $w_n \sim \mathcal{N}(0, W)$ modélise l'incertitude sur l'évolution du système, et $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ est l'accélération gravitationnelle.

Les matrices A et B , dites "matrices d'adaptation", modélisent la dynamique du système : A prédit l'évolution naturelle de l'état, et B intègre l'effet de l'accélération mesurée.

Nous pouvons factoriser cette équation afin d'identifier la matrice de notre modèle théorique en pratique.

On a :

$$Ax_n = \begin{bmatrix} z_n + \Delta n \dot{z}_n \\ \dot{z}_n \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad Ba_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta n^2(Jz_n - 1)g \\ \Delta n(Jz_n - 1)g \end{bmatrix}$$

Alors :

$$Ax_n + Ba_n = \begin{bmatrix} z_n + \Delta n \dot{z}_n + \frac{1}{2}\Delta n^2(Jz_n - 1)g \\ \dot{z}_n + \Delta n(Jz_n - 1)g \end{bmatrix}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$Ax_n + Ba_n = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J & \Delta n \\ \Delta n J & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_n \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta n^2 g \\ \Delta n g \end{bmatrix}$$

On obtient alors une nouvelle équation :

$$x_{n+1} = Ax_n + b$$

où :

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J & \Delta n \\ \Delta n J & 1 \end{bmatrix}, \quad b = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta n^2 g \\ \Delta n g \end{bmatrix},$$

Remarque :

La matrice b ne dépend pas de n puisque dans notre cas, Δn est constant et vaut 0.01 seconde.

Analyse de la stabilité de la matrice \mathbf{A}

Il est important de vérifier que la matrice de transition \mathbf{A} est stable, c'est-à-dire que son rayon spectral est strictement inférieur à 1, afin de garantir l'existence d'une solution stationnaire à l'équation de Riccati et la convergence du filtre de Kalman à long terme.

Calcul des valeurs propres

On cherche les valeurs propres λ telles que :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J - \lambda & \Delta n \\ \Delta n J & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J - \lambda\right)(1 - \lambda) - \Delta n \cdot \Delta n J &= 0 \\ \Rightarrow (1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J)(1 - \lambda) - \lambda(1 - \lambda) - \Delta n^2 J &= 0\end{aligned}$$

Développons :

$$\begin{aligned}(1)(1 - \lambda) + \frac{1}{2}\Delta n^2 J(1 - \lambda) - \lambda(1 - \lambda) - \Delta n^2 J &= 0 \\ (1 - \lambda) + \frac{1}{2}\Delta n^2 J(1 - \lambda) - \lambda(1 - \lambda) - \Delta n^2 J &= 0 \\ (1 - \lambda)(1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J - \lambda) - \Delta n^2 J &= 0\end{aligned}$$

Forme canonique

On peut aussi écrire l'équation caractéristique sous la forme standard :

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = 0$$

où :

$$\begin{aligned}\text{Tr}(A) &= \left(1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J\right) + 1 = 2 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J \\ \det(A) &= (1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J)(1) - \Delta n \cdot \Delta n J = 1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J - \Delta n^2 J = 1 - \frac{1}{2}\Delta n^2 J\end{aligned}$$

Donc l'équation devient :

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J\right)\lambda + \left(1 - \frac{1}{2}\Delta n^2 J\right) = 0$$

Stabilité du système

Pour que le système $x_{n+1} = Ax_n$ soit asymptotiquement stable, il faut que toutes les valeurs propres λ vérifient :

$$|\lambda| < 1$$

Cela dépend des valeurs de Δn .

On a :

$$\det(A) = 1 - \frac{1}{2}\Delta n^2 J$$

Pour que $|\lambda| < 1$, une condition nécessaire est :

$$|\det(A)| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left| 1 - \frac{1}{2}\Delta n^2 J \right| < 1$$

Ce qui donne :

$$-1 < 1 - \frac{1}{2}\Delta n^2 J < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \Delta n^2 J < 2$$

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}\Delta n^2 J & \Delta n \\ \Delta n J & 1 \end{bmatrix}$$

est stable si et seulement si :

$$0 < \Delta n^2 J < 2$$

Dans notre cas, la différence entre le temps n et le temps $n + 1$: Δn est de 0.01 seconde, donc $\Delta n^2 \in]0, 2[$, notre matrice est donc stable.

Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Pour des systèmes échantillonnés plus lentement (Δn plus grand), ou avec des accélérations plus instables (valeurs de J plus élevées), la quantité $\Delta n^2 J$ peut dépasser la borne de stabilité, entraînant alors une divergence numérique potentielle. Ce phénomène est bien documenté dans la littérature sur les systèmes dynamiques discrets [16].

Ce cas n'est pas rare dans les systèmes embarqués à faible fréquence d'échantillonnage ou lorsque les modèles dynamiques sont mal adaptés. Malgré cela, le filtre de Kalman reste un outil robuste : même en présence de divergences modérées dans le modèle interne, il peut fournir de bonnes estimations à court terme, grâce à la mise à jour régulière par les observations [12, 17].

En pratique, même si la dynamique interne diverge légèrement (cracking), les corrections apportées à chaque itération via les mesures (i.e., la mise à jour du Kalman gain) permettent souvent de compenser cette instabilité modérée. Cela rend le filtre de Kalman particulièrement précieux en navigation inertielle, robotique ou traitement du signal, où les systèmes ne sont pas toujours parfaitement modélisés mais doivent rester exploitables en temps réel. [18, 19]

Observations

Le système ne fournit qu'une seule mesure directe : l'altitude z_n , bruitée.

Le modèle d'observation est donc :

$$y_n = Cx_n + v_n, \quad \text{avec } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

où $v_n \sim \mathcal{N}(0, V)$ représente le bruit de mesure sur l'altitude.

On observe donc uniquement la première composante de l'état, à savoir l'altitude, via la matrice C .

En revanche, la vitesse verticale \dot{z}_n n'est pas mesurée directement. Pour tenter de l'approcher sans filtre, on peut utiliser une dérivée numérique de l'altitude :

$$\dot{z}_n \approx \frac{z_n - z_{n-1}}{\Delta n}$$

Cependant, cette méthode simple est très sensible au bruit et produit des valeurs instables. Le filtre de Kalman, lui, offre une estimation plus robuste de la vitesse, obtenue indirectement à partir de la dynamique du système et des mesures successives d'altitude. Ainsi, la vitesse est bien une *grandeur estimée*, tandis que l'altitude reste une *grandeur mesurée puis corrigée*.

Estimations

Le filtre de Kalman combine à chaque instant la prédiction fournie par le modèle physique, la mesure observée et les incertitudes liées au modèle et à la mesure (bruits W et V).

Il calcule un **état estimé** qui représente le meilleur compromis entre la prédiction et l'observation. On obtient ainsi une estimation optimisée de la vitesse verticale (non mesurée), et une version corrigée de l'altitude mesurée.

En résumé : l'altitude est observée puis corrigée, tandis que la vitesse est estimée par cohérence avec les équations du mouvement.

Valeurs réelles

Dans la réalité, les valeurs "réelles" de l'état (altitude et vitesse exactes) sont inconnues. On ne peut pas les mesurer directement.

Pour évaluer la performance du filtre, on compare donc ses estimations aux mesures observées, tout en gardant à l'esprit que ces observations sont elles-mêmes bruitées. La proximité entre estimation et mesure donne un indice de qualité, mais ne garantit pas l'exactitude absolue de l'état.

Cette modélisation dynamique permet d'exploiter la structure du mouvement pour améliorer la précision des mesures, lisser les fluctuations, et reconstituer une vitesse non mesurée directement. Le filtre de Kalman permet ainsi de surpasser les limitations des données brutes, en fournissant une estimation plus cohérente et moins sensible au bruit.

Paramétrisation

Pour appliquer le filtre de Kalman à nos données issues du vol parabolique, nous avons choisi les paramètres suivants :

- Pas de temps : $\Delta n = 0.01$ sec correspondant à la fréquence d'échantillonnage des données capteurs.
- Matrice de transition A : calculée dynamiquement en fonction de Δn et de l'accélération mesurée Jz_n , comme décrit plus haut. Cette matrice intègre les lois du mouvement uniformément accéléré.
- Matrice de covariance du bruit du processus W :

$$W = \text{diag}(1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4}).$$

Ces valeurs traduisent une incertitude modérée sur l'évolution de l'état (altitude et vitesse).

- Matrice de bruit de mesure V fixée à

$$V = 1 \times 10^{-2}$$

Ce qui reflète une certaine incertitude dans la mesure de l'altitude due aux capteurs embarqués.

- Matrice d'observations $C = [1 \ 0]$: seule l'altitude est mesurée directement.

- État initial x_0 pris comme le premier point mesuré pour l'altitude, et vitesse initiale estimée par dérivée finie lissée.
- Covariance initiale Σ_0 définie comme une matrice diagonale :

$$\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_{\text{altitude}}^2, \sigma_{\text{vitesse}}^2) = \text{diag}(0.01, 0.01).$$

Ces choix ont été faits pour refléter à la fois les caractéristiques physiques du vol et les limitations expérimentales des capteurs. Ils permettent au filtre de converger rapidement vers des estimations stables, tout en restant suffisamment sensible aux mesures observées.

3.3.2 Résultats

Observations et estimation réalisées sur une unique trajectoire parabolique.

Vitesse

On commence par visualiser l'évolution de la vitesse verticale, estimée à partir du filtre de Kalman, et on la compare à celle obtenue par dérivation directe des mesures d'altitude.

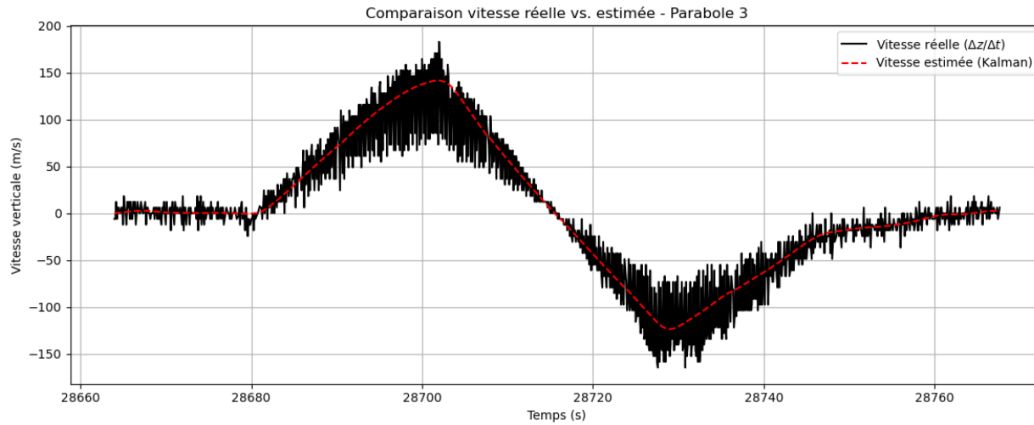


FIGURE 7 – Comparaison vitesse réelle vs. estimée

La courbe estimée est nettement plus lisse et régulière que celle obtenue par différences finies, qui présente de fortes oscillations dues au bruit de dérivation. Le filtre agit ici comme un lisseur, en réduisant les fluctuations parasites tout en capturant fidèlement la tendance générale du mouvement vertical.

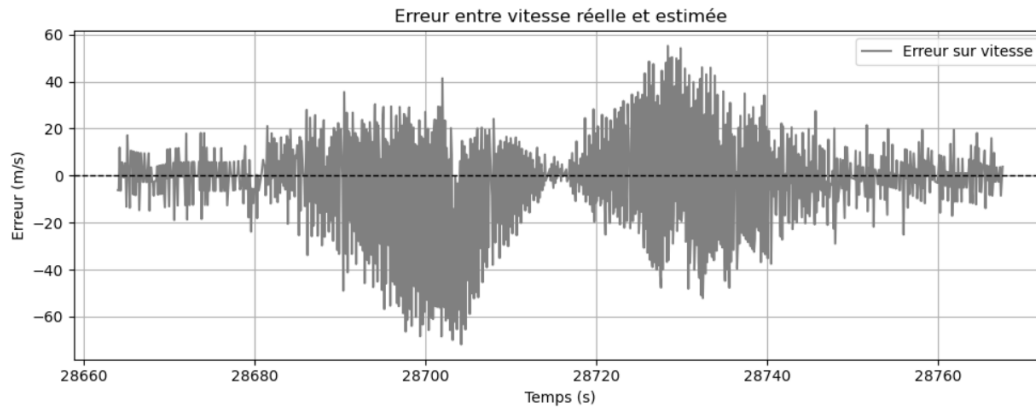


FIGURE 8 – Evolution de l’erreur entre la vitesse réelle et la vitesse estimée par le filtre de Kalman

L’erreur reste globalement centrée autour de zéro, avec des pics plus marqués dans les zones à forte accélération. Ces écarts peuvent s’expliquer par le décalage temporel introduit par le filtre, ou par les imprécisions liées à la dérivation des mesures brutes.

Altitude

Après avoir estimé la vitesse verticale à l’aide du filtre de Kalman, on utilise cette estimation pour reconstituer l’évolution de l’altitude et la comparer aux mesures d’altitude fournies par le capteur.

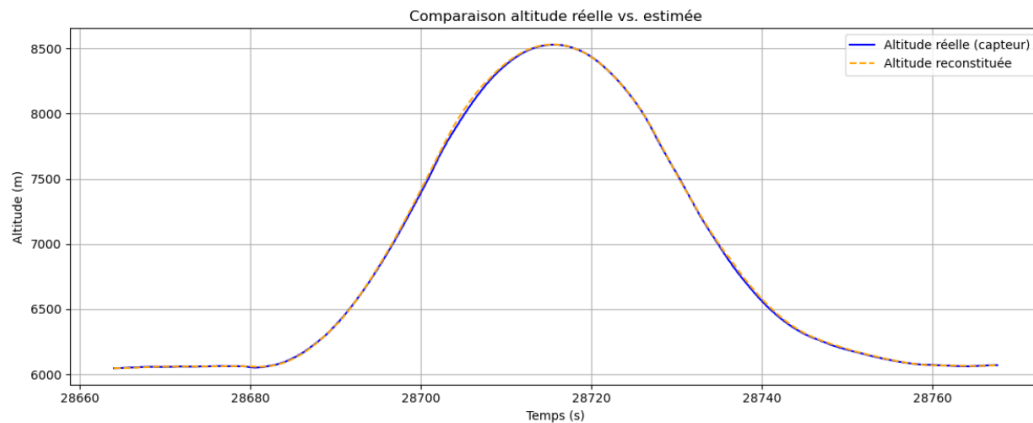


FIGURE 9 – Comparaison altitude réelle vs. reconstituée

On observe que l’altitude estimée suit fidèlement la forme générale de la trajectoire réelle tout en étant légèrement plus lisse, ce qui traduit la capacité du filtre à réduire le bruit sans distordre significativement la dynamique du vol.

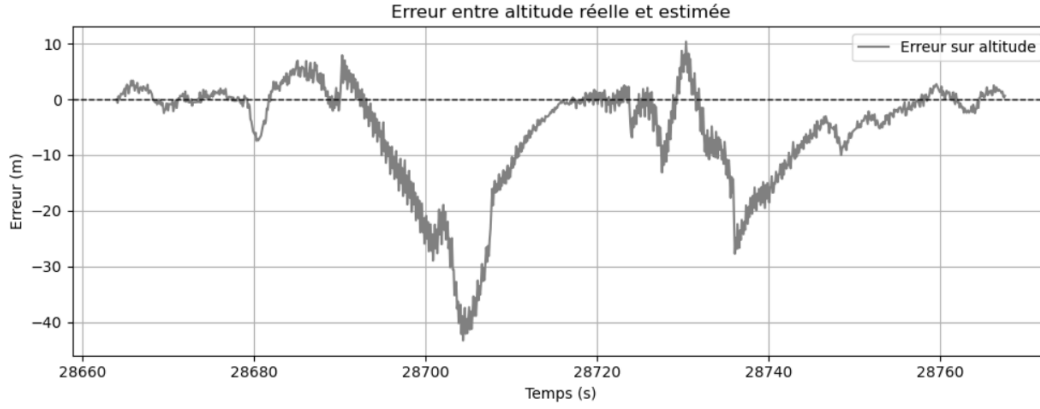


FIGURE 10 – Evolution de l'erreur entre l'altitude réelle et l'altitude estimée par le filtre de Kalman

Les pics d'erreur apparaissent principalement lors des variations rapides d'altitude, ce qui indique que le filtre réagit avec un léger décalage dans ces zones de transition. En revanche, dans les phases plus stables, l'erreur reste contenue, témoignant d'une bonne capacité du filtre à suivre l'état réel du système.

3.3.3 Analyse de la covariance

Pour visualiser l'incertitude sur l'estimation de l'état (z_n, v_n) , on utilise une ellipse de confiance construite à partir de la matrice de covariance empirique obtenue par simulation Monte Carlo. Mathématiquement, cela repose sur la décomposition spectrale de la matrice de covariance : les valeurs propres correspondent aux variances principales, et les vecteurs propres aux directions principales de dispersion du nuage de points. L'ellipse est centrée sur la moyenne des estimations, orientée selon les vecteurs propres, et ses axes sont proportionnels aux racines carrées des valeurs propres (écarts-types).

L'ellipse représente ainsi la région dans laquelle on s'attend à retrouver environ 95 % des estimations si les hypothèses de normalité sont vérifiées. Cet outil géométrique permet donc d'évaluer la précision et la fiabilité du filtre de Kalman dans l'espace des états estimés.

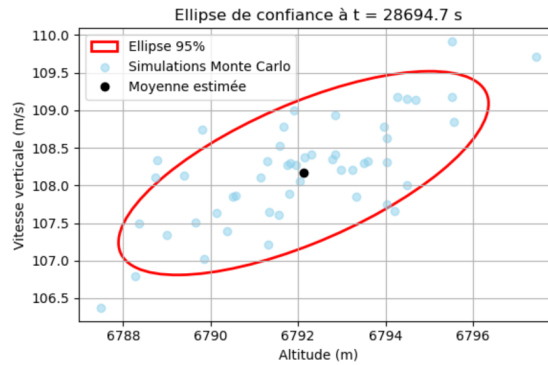


FIGURE 11 – Ellipse de confiance au dernier instant de la parabole

On remarque que l'ellipse est allongée dans une direction qui reflète la corrélation entre altitude et vitesse. La majorité des points simulés se trouvent bien à l'intérieur de cette ellipse, ce qui confirme la cohérence entre la variance estimée et la dispersion effective des trajectoires. La vérité terrain reste proche du nuage de points mais légèrement en bordure de l'ellipse, ce qui peut s'expliquer par une légère sous-estimation de l'incertitude par le filtre à cet instant.

En traçant les ellipses à différents temps sur un même graphique, on visualise directement l'évolution de l'incertitude dans le plan des états, ainsi que l'orientation de la variance induite par la dynamique du système.

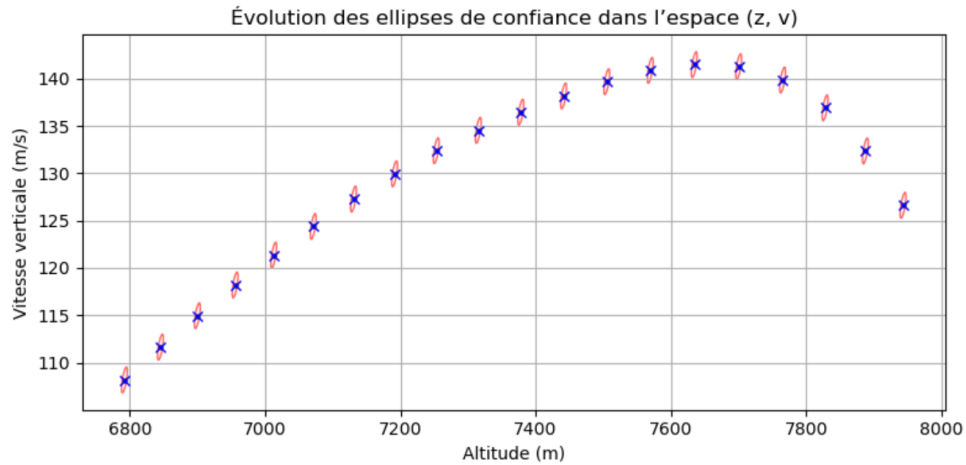


FIGURE 12 – Évolution des ellipses de confiance dans le plan (altitude, vitesse)

En zoomant, on découvre que les ellipses se déplacent au cours du temps tout en suivant globalement la trajectoire réelle.

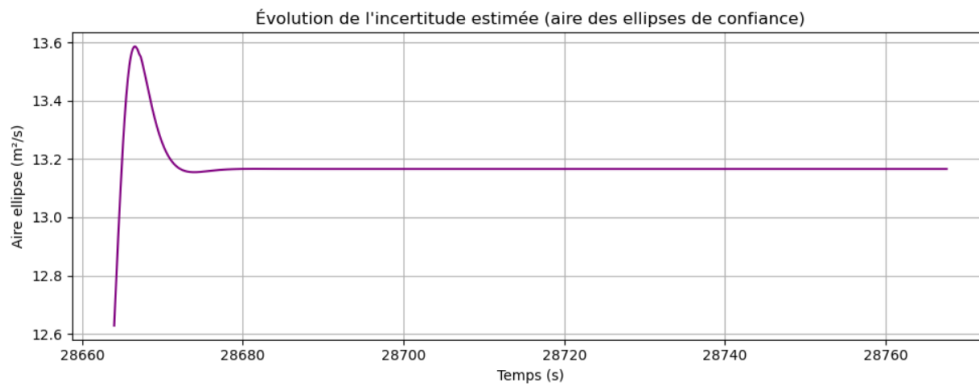


FIGURE 13 – Évolution des ellipses de confiance dans le plan (altitude, vitesse)

On observe que l'aire des ellipses de confiance se stabilise rapidement, signe que l'incertitude estimée par le filtre devient constante au cours du temps.

3.4 Augmentation des dimensions

Il est possible d'étendre ce vecteur pour estimer d'autres variables physiques liées au mouvement. Par exemple, dans le cas d'un vol parabolique, on peut introduire un vecteur d'état à six composantes :

$$x_n = \begin{bmatrix} z_n \\ \dot{z}_n \\ \ddot{z}_n \\ P_n \\ v_{h,n} \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

où z_n est l'altitude, \dot{z}_n la vitesse verticale, \ddot{z}_n l'accélération verticale, P_n la pression cabine, $v_{h,n}$ la vitesse horizontale ou encore θ_n le tangage...

Cette généralisation ne modifie pas fondamentalement le principe du filtre de Kalman. Cependant, il devient nécessaire d'adapter la matrice de transition d'état A pour modéliser l'évolution temporelle de chaque composante et d'ajuster la matrice d'observation C pour indiquer quelles variables sont réellement mesurées. On n'oublie pas également de dimensionner les matrices de covariance Q et R en conséquence.

Cela permet de coupler les informations entre elles pour lisser encore davantage les erreurs. Cette extension rend le modèle plus robuste et mieux adapté à des situations complexes.

Par exemple, en plus de l'altitude et de la vitesse verticale déjà traitées précédemment, nous cherchons à estimer trois autres grandeurs accessibles dans les données du vol parabolique : l'accélération verticale, la pression cabine et le tangage.

Accélération verticale : elle est dérivée de la mesure inertielle Jz , en appliquant la correction gravitationnelle $a_z = (Jz - 1) \cdot g$. Le filtre de Kalman permet de lisser cette mesure bruitée pour mieux suivre les phases de vol (gravitée, zéro-G...).

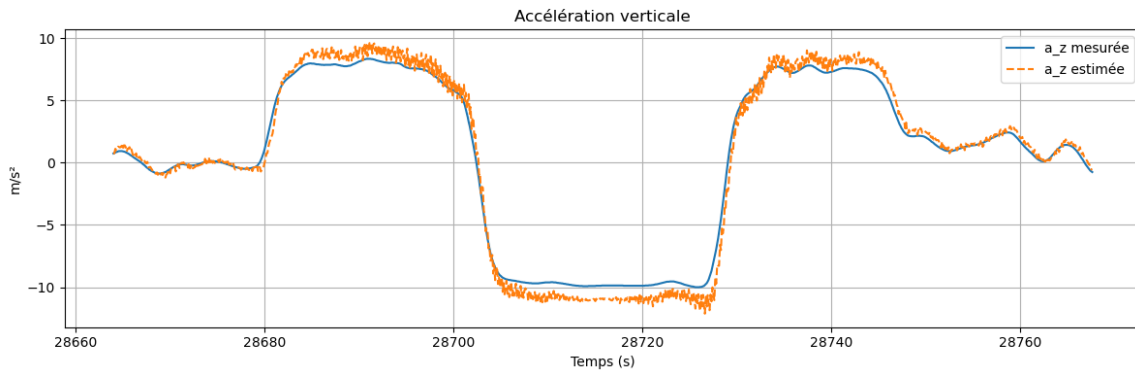


FIGURE 14 – Accélération verticale mesurée vs. estimée par filtre de Kalman

Pression cabine : mesurée directement en hPa, elle fluctue légèrement durant le vol. Son estimation via le filtre affine permet de corriger les perturbations locales tout en conservant la dynamique lente de la pression réelle.

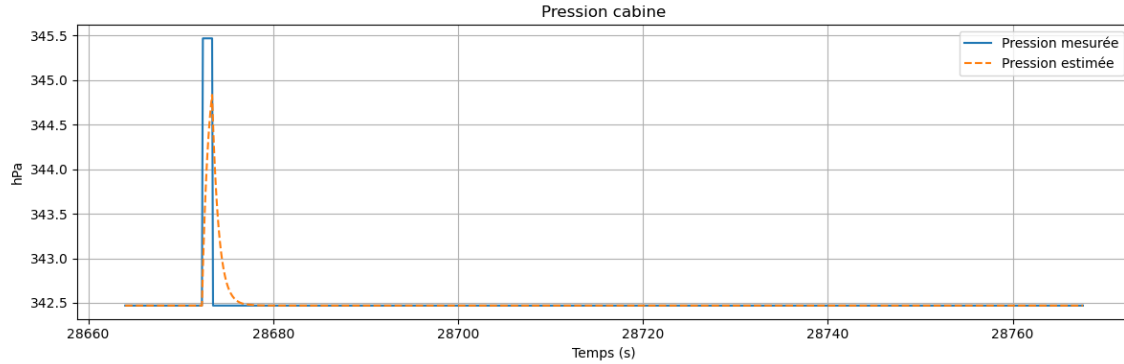


FIGURE 15 – Pression cabine mesurée et estimée par filtre de Kalman

Tangage (pitch) : exprimé en degrés, il indique l'inclinaison de l'avion. En filtrant la série temporelle associée, on lisse les oscillations rapides tout en conservant la tendance générale du mouvement.

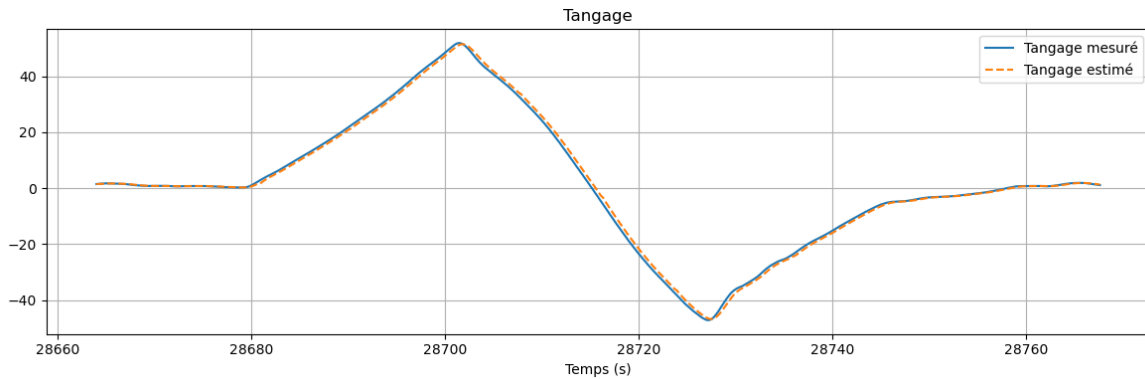


FIGURE 16 – Tangage mesuré et estimé par filtre de Kalman

Dans les trois cas, le filtre de Kalman joue efficacement son rôle de lisseur. Il réduit significativement le bruit des mesures tout en préservant leur dynamique. On observe que les estimations sont plus stables et moins sensibles aux fluctuations locales que les mesures directes. Cela montre que l'extension multidimensionnelle du filtre permet de combiner diverses sources d'information de manière cohérente et robuste, offrant ainsi une vision plus fidèle de l'état réel du système.

En dimension supérieure, la représentation graphique directe de la variance devient difficile. Plusieurs alternatives permettent toutefois d'en analyser le comportement. Une première approche consiste à suivre l'évolution des valeurs propres de la matrice de covariance P_n , qui renseignent sur l'ampleur de l'incertitude dans les directions principales. Une seconde option consiste à observer la trace de P_n , qui fournit une mesure globale de l'incertitude estimée par le filtre. Enfin, lorsque seules certaines composantes de l'état nous intéressent, on peut projeter la matrice P_n sur des sous-espaces bidimensionnels et visualiser les ellipses de confiance associées, comme cela a été fait dans le cas bidimensionnel.

4 Filtre de Kalman étendu (EKF)

4.1 Théorie

Le filtre de Kalman étendu (EKF) est une généralisation du filtre de Kalman classique, conçu pour traiter des systèmes **non linéaires**. Il repose sur une **linéarisation locale** des équations du modèle à l'aide d'un développement de Taylor d'ordre 1 autour de l'estimation courante.

Il est notamment utilisé en robotique, en navigation ou en suivi d'objets, lorsque la dynamique du système ou la fonction d'observation ne peut pas être modélisée linéairement. Grâce à sa souplesse, l'EKF permet d'estimer des états à partir de mesures bruitées, même dans des contextes complexes. Toutefois, sa précision dépend fortement de la validité de la linéarisation.

Développement de Taylor d'ordre 1

Soit une fonction vectorielle non linéaire $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Le filtre de Kalman étendu repose sur une **approximation locale** de cette fonction autour d'un point x_0 via un développement limité d'ordre 1 :

$$f(x) \approx f(x_0) + J_f(x_0)(x - x_0),$$

où $J_f(x_0)$ est la **jacobienne** de f évaluée en x_0 . Cette matrice contient toutes les dérivées partielles premières :

$$J_f(x_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right]_{1 \leq i, j \leq d}$$

Cette approximation permet d'appliquer le filtre de Kalman dans un cadre non linéaire, en remplaçant localement le modèle par sa version linéarisée.

Modèle

Le modèle de kalman étendu que nous allons étudier est le suivant :

[9]

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) + w_n \\ y_n = h(x_n) + v_n \end{cases}$$

où

x_n : état caché du système à l'instant n , $x_n \in \mathbb{R}^n$

y_n : mesure observée à l'instant n , $y_n \in \mathbb{R}^m$

$f(x_n)$: fonction non linéaire de transition d'état

$h(x_n)$: fonction non linéaire d'observation

w_n : bruit de processus, $w_n \sim \mathcal{N}(0, Q)$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$

v_n : bruit de mesure, $v_n \sim \mathcal{N}(0, R)$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Rôle des fonctions f et h

Le principe général du filtre de Kalman reste le même : prédiction puis mise à jour, mais dans le cas étendu, les équations sont adaptées à des systèmes non linéaires à l'aide de fonctions f et h linéarisées à chaque étape.

- $f(x)$: la **fonction de transition**, qui modélise l'évolution de l'état dans le temps. Elle remplace la matrice A du filtre linéaire. Elle permet de prédire l'état futur à partir de l'état actuel en tenant compte de la dynamique du système.
- $h(x)$: la **fonction d'observation**, qui relie l'état du système à la mesure observée. Elle remplace la matrice C du modèle linéaire. Elle permet de prédire la mesure attendue à partir de l'état estimé.

Ces fonctions peuvent être non linéaires, et sont linéarisées à chaque pas de temps à l'aide de leur Jacobienne pour pouvoir appliquer les étapes classiques du filtre de Kalman (prédiction, mise à jour). On utilise alors :

$$F_n = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad H_n = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Récapitulatif

Les notations sont les mêmes qu'auparavant :

- Le symbole **tilde** (\sim) pour désigner les **valeurs prédites à l'instant $n+1$**
- Le symbole **chapeau** ($\hat{}$) pour représenter les **estimations corrigées** après la mise à jour

De plus, on note $F_n = \frac{\partial f}{\partial x}|_{\hat{x}_n}$ est la jacobienne de f évaluée en \hat{x}_n et $H_n = \frac{\partial h}{\partial x}|_{\hat{x}_{n+1|n}}$ la jacobienne de h autour de l'état prédit.

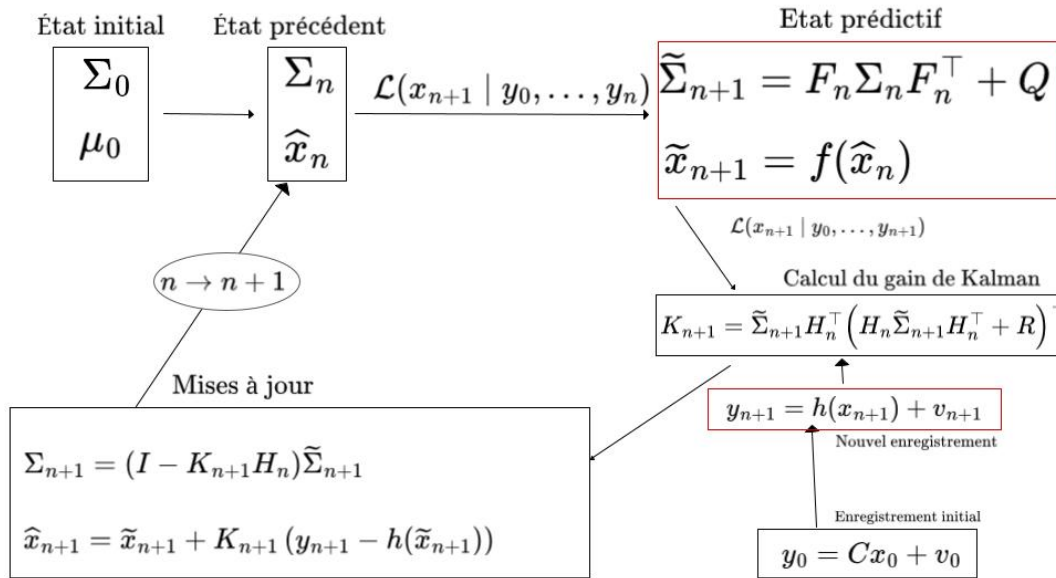


FIGURE 17 – Déroulement d'une itération du filtre de Kalman étendu

Le principe général du filtre de Kalman reste identique dans le cas non linéaire : on alterne une phase de **prédiction**, fondée sur l'évolution du système, et une phase de **mise à jour**, basée sur les observations.

Cependant, les équations doivent être adaptées aux fonctions non linéaires. L'évolution de l'état n'est plus donnée par une matrice constante A , mais par une fonction f , que l'on linéarise à chaque étape autour de l'estimation courante. Il en est de même pour la fonction d'observation h , approximée localement par sa jacobienne H .

Ce recours à la linéarisation permet de conserver la structure matricielle du filtre de Kalman, tout en l'adaptant à des dynamiques et observations plus réalistes. Le gain de Kalman, la correction de l'état, et la mise à jour de la covariance conservent la même logique que dans le cas linéaire, mais sont recalculés à chaque itération en fonction de ces approximations locales.

4.2 Algorithme

Algorithm 3 Filtre de Kalman étendu (EKF)

Entrées : fonctions f , h , jacobienes F_n , H_n , bruits Q , R , état initial \hat{x}_0 , covariance initiale Σ_0 , observations y_n

for $t = 1$ à N **do**

1. **Prédiction de l'état (non linéaire) :**

$$\tilde{x}_n \leftarrow f(\hat{x}_{n-1})$$

$$\tilde{\Sigma}_n \leftarrow F_n \Sigma_{n-1} F_n^\top + Q$$

2. **Calcul du gain de Kalman :**

$$K_n \leftarrow \tilde{\Sigma}_n H_n^\top (H_n \tilde{\Sigma}_n H_n^\top + R)^{-1}$$

3. **Mise à jour avec la mesure :**

$$\hat{x}_n \leftarrow \tilde{x}_n + K_n (y_n - h(\tilde{x}_n))$$

$$\Sigma_n \leftarrow (I - K_n H_n) \tilde{\Sigma}_n$$

end for

Sortie : estimations de l'état \hat{x}_n pour chaque n

4.3 Simulations

Un exemple physique classique de système non linéaire est le **pendule simple**. Il s'agit d'un objet ponctuel suspendu à un point fixe par un fil inextensible, qui oscille librement sous l'effet de la gravité. Ce système présente une dynamique non linéaire en position, notamment lorsque les angles sont importants, ce qui en fait un excellent cas d'étude pour illustrer le fonctionnement du filtre de Kalman étendu.

Les données utilisées proviennent d'un fichier CSV généré automatiquement à partir de vidéos, grâce à un outil de suivi visuel du pendule développé avec OpenCV [10]. On dispose ainsi des coordonnées (x, y) et de l'angle du pendule (en degrés) à différents instants.

Son mouvement est décrit par le système différentiel suivant :

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \quad \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$$

avec :

- θ : angle par rapport à la verticale (rad),
- $\dot{\theta}$: vitesse angulaire (rad/s),
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$: accélération gravitationnelle,
- $L = 1 \text{ m}$: longueur du fil du pendule.

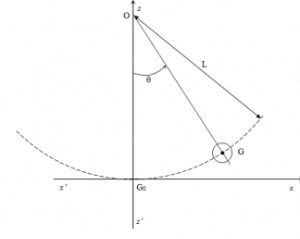


FIGURE 18 – Illustration pendule [11]

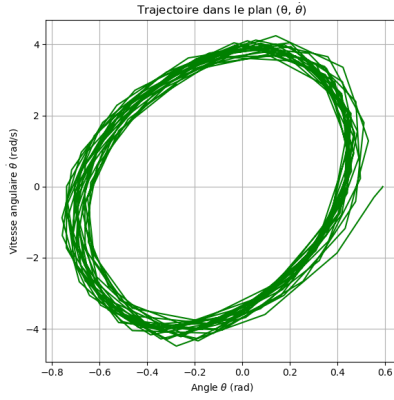


FIGURE 19 – Trajectoire du pendule

Nous convertissons d'abord les angles en radians avec la formule :

$$\theta \text{ (rad)} = \theta \text{ (deg)} \times \frac{\pi}{180}$$

Pour estimer la vitesse angulaire réelle $\dot{\theta}_n$, on applique une différence finie sur les angles :

$$\dot{\theta}_n \approx \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\Delta t}$$

Ces données (angle, vitesse angulaire) alimentent ensuite un filtre de Kalman étendu pour améliorer les estimations en présence de bruit.

4.3.1 Modélisation

Pour mettre en œuvre un filtre de Kalman étendu, il est nécessaire de disposer d'un modèle dynamique non linéaire décrivant l'évolution de l'état. Dans notre cas, il s'agit du mouvement d'un *pendule simple*, dont l'état à l'instant n est donné par :

$$x_n = \begin{bmatrix} \theta_n \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad \text{où } \theta_n = \text{angle}, \quad \dot{\theta}_n = \text{vitesse angulaire}$$

Prédictions

Le modèle du pendule étant non linéaire, on applique directement la fonction f qui représente sa dynamique :

$$f(x_n) = \begin{bmatrix} \theta_n + \Delta n \cdot \dot{\theta}_n \\ \dot{\theta}_n - \Delta n \cdot \frac{g}{L} \sin(\theta_n) \end{bmatrix}$$

Cela revient à utiliser un *schéma d'Euler explicite* pour propager l'état.

Schéma d'Euler explicite

Le schéma d'Euler est une méthode d'intégration numérique permettant d'approximer la solution d'un système différentiel de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

À partir d'une condition initiale x_0 , on calcule une approximation de la solution à pas de temps Δt constant :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \cdot f(x_n, t_n)$$

Linéarisation locale

Comme le modèle est non linéaire, on le **linéarise localement** autour de l'estimation courante à l'aide de la *matrice Jacobienne* $F_n = \frac{\partial f}{\partial x}$:

$$F_n = \begin{bmatrix} 1 & \Delta n \\ -\Delta n \cdot \frac{g}{L} \cos(\theta_n) & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice approxime localement l'effet du système sur l'état. Le terme $\cos(\theta)$ provient de la dérivée de $\sin(\theta)$.

Observations

On suppose que la mesure observée est :

$$y_n = h(x_n) = \theta_n + v_n \quad \text{où } v_n \sim \mathcal{N}(0, R)$$

avec $H = \frac{\partial h}{\partial x} = [1 \quad 0]$.

Prédiction de la covariance

La matrice de covariance P_n est prédite par :

$$\tilde{\Sigma}_{n+1} = F_n \tilde{\Sigma}_n F_n^\top + Q$$

Estimations

On met à jour l'estimation de l'état à partir de la mesure :

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= \tilde{\Sigma}_{n+1} H_n^\top (H \tilde{\Sigma}_{n+1} H_n^\top + R)^{-1} \\ \hat{x}_{n+1} &= \tilde{x}_{n+1} + K_{n+1} (y_{n+1} - h(\tilde{x}_{n+1})) \\ \Sigma_{n+1} &= (I - K_{n+1} H_n) \tilde{\Sigma}_{n+1} \end{aligned}$$

Valeurs réelles

Les vraies trajectoires du système sont générées en intégrant numériquement le modèle non linéaire exact du pendule à partir des conditions initiales. Elles servent de référence pour évaluer la qualité des estimations fournies par le filtre. Mais l'état réel reste inconnu et les estimations sont comparées aux mesures bruitées.

Paramétrisation

Les paramètres numériques utilisés pour le filtre de Kalman étendu sont choisis en cohérence avec la dynamique du pendule et les données simulées.

- Pas de temps $\Delta t = 0.01$ s : fixé par la fréquence d'échantillonnage.
- Covariance du bruit de processus :

$$Q = \text{diag}(1 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-4})$$

Ces valeurs traduisent une faible incertitude sur l'évolution de l'angle θ et une incertitude un peu plus marquée sur sa dérivée $\dot{\theta}$.

- Covariance du bruit de mesure :

$$R = 1 \times 10^{-2}$$

supposée connue ou ajustée empiriquement en fonction du capteur utilisé.

- Matrice d'observation $H = [1 \ 0]$: seule l'angle est mesuré directement.
- État initial : $\theta_0 = 30^\circ$ (converti en radians), $\dot{\theta}_0 = 0$.
- Covariance initiale :

$$P_0 = I_2$$

indiquant une incertitude modérée sur les deux composantes de l'état.

Ces choix permettent une bonne convergence du filtre sans pour autant écraser les mesures. La linéarisation locale, combinée à une modélisation physique fidèle, garantit une estimation robuste des états du système non linéaire.

4.3.2 Résultats

Les résultats sont présentés sur un tour complet de pendule.

Angle θ

Nous observons ici l'évolution de l'angle du pendule, en comparant la valeur estimée par le filtre à une référence considérée comme "vraie" (donnée simulée) et à la valeur bruitée mesurée dans les données initiales. Le filtre permet d'atténuer considérablement le bruit sans trop lisser la courbe.

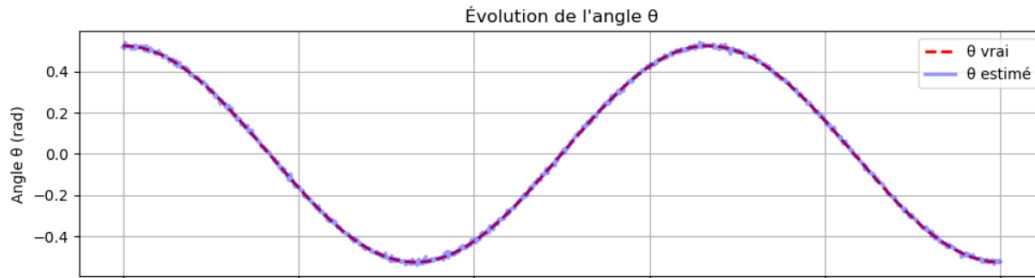


FIGURE 20 – Comparaison entre θ_{vrai} et $\theta_{\text{estimé}}$

On constate que l'angle estimé suit très fidèlement la tendance du signal réel.

Vitesse angulaire $\dot{\theta}$

La vitesse angulaire n'est pas directement mesurée mais reconstruite à partir de la dynamique du pendule via la fonction $f(x)$. Cela permet d'estimer cette grandeur non observable à partir de la seule mesure de l'angle.

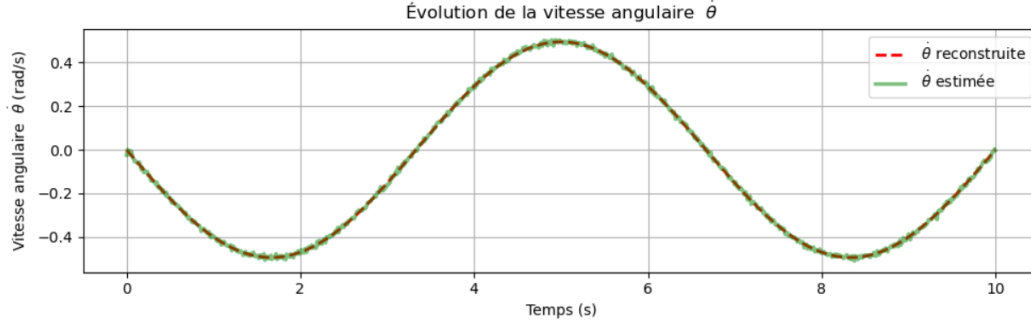


FIGURE 21 – Comparaison entre $\dot{\theta}_{\text{reconstruite}}$ et $\dot{\theta}_{\text{estimé}}$

On retrouve une bonne cohérence entre la vitesse estimée et la “vérité terrain” simulée.

4.3.3 Analyse de la covariance

Pour mieux visualiser l'évolution de l'incertitude sur les états estimés $(\theta, \dot{\theta})$, on effectue une simulation de Monte Carlo sur 50 trajectoires bruitées et on trace les ellipses de confiance issues des matrices de covariance empiriques.

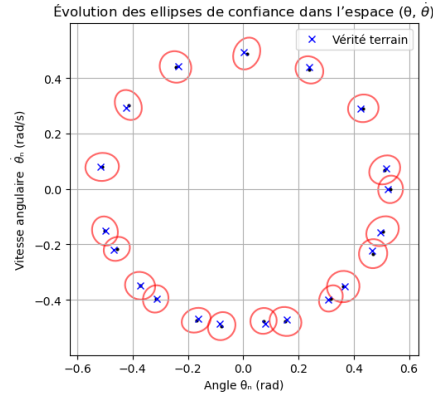


FIGURE 22 – Évolution des ellipses de confiance dans l'espace $(\theta, \dot{\theta})$

Contrairement à l'intuition, les ellipses d'incertitude ne se resserrent pas, ce qui traduit une variance estimée stable dans le temps. Cela peut venir d'un bruit de mesure important, d'une mauvaise linéarisation du modèle ou d'un bruit de processus Q mal calibré.

5 Conclusion

Ce rapport a proposé une étude progressive et rigoureuse du filtre de Kalman, en partant du cas unidimensionnel jusqu’à ses extensions aux systèmes multidimensionnels et non linéaires [12, 9]. À chaque étape, nous avons cherché à concilier une compréhension théorique fine, une mise en œuvre algorithmique concrète et une interprétation des résultats obtenus.

Nous avons d’abord introduit le filtre dans un cadre linéaire simple, en dimension 1, où les équations peuvent être manipulées explicitement [1]. Cette version de base nous a permis de comprendre les mécanismes essentiels du filtre : prédiction, gain de Kalman, mise à jour de l’estimation, et évolution de la variance conditionnelle [13, 2]. Les simulations ont mis en évidence la convergence rapide de la variance, la stabilité du filtre, et l’influence des paramètres comme le bruit de mesure ou la dynamique du système.

Nous avons ensuite généralisé le modèle à la dimension supérieure, en tenant compte des interactions vectorielles et matricielles [9]. Cette version matricielle du filtre conserve la structure conceptuelle du cas scalaire, mais fait apparaître des objets plus complexes tels que les matrices de covariance et les jacobiniennes [6]. Les simulations sur des données expérimentales (vol parabolique) ont montré que le filtre reste efficace en pratique, même en présence de bruit important et de mesures partielles [3].

Enfin, nous avons abordé le filtre de Kalman étendu (EKF), adapté aux systèmes non linéaires [14]. En introduisant une étape de linéarisation locale des fonctions de transition et d’observation, nous avons pu conserver le formalisme matriciel tout en élargissant le champ d’application du filtre. Les résultats obtenus sur un système non linéaire (le pendule) montrent que l’EKF permet de suivre efficacement l’état réel, à condition que la non-linéarité ne soit pas trop forte ou mal modélisée [8, 10].

Les différentes versions du filtre partagent une structure commune — prédiction, observation, correction — mais diffèrent par leur capacité à s’adapter à la complexité du système modélisé [12]. Le filtre linéaire est rapide, robuste et optimal sous hypothèses gaussiennes, tandis que l’EKF introduit une souplesse nécessaire pour traiter des systèmes réalistes, au prix d’une approximation locale [9].

En perspective, ce travail ouvre naturellement sur plusieurs directions possibles :

- l’étude de variantes plus avancées comme le filtre de Kalman Unscented (UKF) ou les filtres particulaires, qui permettent de traiter des non-linéarités plus fortes ou des bruits non gaussiens [15] ;
- l’implémentation de ces filtres dans des systèmes embarqués ou des contextes temps réel, avec des contraintes computationnelles ;
- et plus généralement, le lien avec les méthodes d’apprentissage séquentiel, où le filtrage s’inscrit dans une logique de décision adaptative et de traitement de données en flux.

Au-delà de l’algorithme lui-même, le filtre de Kalman nous invite à penser l’estimation non comme une valeur figée, mais comme un équilibre dynamique entre incertitude, observation et modèle.

Références

- [1] J.-B. Bardet et F. Malrieu (2008). *Filtre de Kalman-Bucy*, Agrégation externe de mathématiques, Université de Rennes 1.
- [2] Lessard, L. (2021). *Steady-state Kalman filter*, Lecture 12, Advanced Control Systems.
- [3] Guillaud, E., et Bonnard, T. (2019). *GRAVISMES : Intégration vestibulaire en gravité modifiée et mal des transports*, Université de Bordeaux, CNRS, INCIA.
- [4] Van Biezen, M. (2015). *Special Topics – The Kalman Filter (Playlist)*, YouTube.
- [5] *Équation de Riccati*, Wikipédia (2024).
- [6] *Law of covariance*, Wikipédia (2024).
- [7] Alloprof. *Démonstrations des formules du MRUA*. Consulté en avril 2025
- [8] Rowland, M. et Liu, E. *GIT HUB Extended Kalman Filter on a Pendulum*. Dynamax, 2023.
- [9] Jaulin, L. *Le filtre de Kalman étendu*. Polycopié ENSTA Bretagne, 2022.
- [10] GitHub – supreme-gg-gg. *Pendulum Tracking Project*.
- [11] Superprof. *Étude expérimentale du pendule simple*. Consulté en mai 2025.
- [12] Dan Simon, Wiley *Optimal State Estimation*. 2006. 1em
- [13] Wikipédia. *Filtre de Kalman* — Wikipédia
- [14] Wikipedia (en). *Extended Kalman filter*
- [15] Wikipedia (en). *Unscented Kalman filter*
- [16] Ogata, Katsuhiko (1995). *Discrete-Time Control Systems*, Pearson
- [17] Grewal, Mohinder S. and Andrews, Angus P. (2008). *Kalman Filtering : Theory and Practice Using MATLAB*, Wiley
- [18] Thrun, Sebastian and Burgard, Wolfram and Fox, Dieter (2005). *Probabilistic Robotics*, MIT Press
- [19] Titterton, David H. and Weston, John L. (2004). *Strapdown Inertial Navigation Technology*, The Institution of Engineering and Technology

6 Annexes

Listing 1 – Simulation du filtre de Kalman 1D

```
def kalman_1D(N, a, sigma2, tau2):  
  
    X = np.zeros(N+1)  
    Y = np.zeros(N+1)  
    X_hat = np.zeros(N+1)  
    P = np.zeros(N+1)  
  
    # Initialisation  
    W0 = np.random.normal(0, np.sqrt(sigma2))  
    V0 = np.random.normal(0, np.sqrt(tau2))  
    X[0] = W0  
    Y[0] = X[0] + V0  
  
    P[0] = (sigma2 * tau2) / (sigma2 + tau2)  
    X_hat[0] = (sigma2 / (sigma2 + tau2)) * Y[0]  
  
    for n in range(1, N+1):  
        Wn = np.random.normal(0, np.sqrt(sigma2))  
        Vn = np.random.normal(0, np.sqrt(tau2))  
  
        # Prediction  
        X[n] = a * X[n-1] + Wn  
        Y[n] = X[n] + Vn  
  
        # Mises a jour  
        P[n] = (a**2 * tau2 * P[n-1] + sigma2 * tau2) / (a**2 * P[n-1] + sigma2 + tau2)  
        X_hat[n] = a * X_hat[n-1] + (P[n] / tau2) * (Y[n] - a * X_hat[n-1])  
  
    return X, Y, X_hat, P
```

Listing 2 – Simulation du filtre de Kalman 2D (altitude + vitesse)

```
def simulation_kalman_2D(fichier, show=True):

    df = pd.read_excel(fichier_donnees)

    # Initialisation
    g = 9.81
    dt = df['Seconds'].diff().median()
    df['a_z'] = (df['Jz (g)'] - 1.0) * g
    df['v_real'] = df['Altitude (m)'].diff() / df['Seconds'].diff()
    df['v_real'] = df['v_real'].fillna(method='bfill')

    n = len(df)
    X_est = np.zeros((n, 2))
    P = np.eye(2)
    A = np.array([[1, dt],
                  [0, 1]])
    B = np.array([[0.5 * dt**2],
                  [dt]])
    C = np.array([[1, 0]])
    Q = np.array([[1e-2, 0],
                  [0, 1e-2]])
    R = np.array([[1e2]])

    X = np.array([[df.loc[0, 'Altitude (m)'],
                  [0]])

    for k in range(n):
        a = df.loc[k, 'a_z']
        y = df.loc[k, 'Altitude (m)']

        # Predictions
        X = A @ X + B * a
        P = A @ P @ A.T + Q

        # Mises a jour
        K = P @ C.T @ np.linalg.inv(C @ P @ C.T + R)
        X = X + K @ (y - C @ X)
        P = (np.eye(2) - K @ C) @ P

    X_est[k, :] = X.flatten()

    df['z_kalman'] = X_est[:, 0]
    df['v_kalman'] = X_est[:, 1]

    return df
```

Listing 3 – Filtre de Kalman étendu (angle + vitesse angulaire)

```

# Import des donnees
df = pd.read_csv("positions.csv")
theta_deg = df["Angle(deg)"].values
theta = np.deg2rad(theta_deg)
t = df["Time(s)"].values
dt = np.diff(t, prepend=t[0])

# Vecteurs deetat
N = len(t)
x_est = np.zeros((N, 2))
P = np.eye(2)
Q = np.diag([1e-5, 1e-4])
R = np.array([[1e-2]])

# Initialisation
x_est[0] = [theta[0], 0.0]

# EKF
for n in range(1, N):
    dtn = dt[n]
    th, om = x_est[n-1]

    # Prediction non lineaire (Euler)
    f = np.array([
        th + dtn * om,
        om - dtn * (9.81) * np.sin(th)
    ])

    # Jacobienne locale
    F = np.array([
        [1, dtn],
        [-dtn * 9.81 * np.cos(th), 1]
    ])

    P = F @ P @ F.T + Q

    # Observation
    H = np.array([[1, 0]])
    K = P @ H.T @ np.linalg.inv(H @ P @ H.T + R)

    z = theta[n]
    x_est[n] = f + K @ (z - H @ f)
    P = (np.eye(2) - K @ H) @ P

```