UNC Universidad Nacional de Córdoba FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Análisis Numérico 3
Entrega 2

Santiago Fada

27 Octubre 2024

Todo el código sen encuentra disponible en Google colab

Ejercicio 6

Considere la siguiente ecuación de convección-difusión de estado estacionario

$$\epsilon u'' - u' = -1, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 3.$$

para algún ϵ dado.

(a) Verifique que la solución exacta es

$$u(x) = 1 + x + \left(\frac{e^{x/\epsilon} - 1}{e^{1/\epsilon} - 1}\right).$$

(b) Compare los siguientes métodos para $\epsilon = 0.3, 0.1, 0.05, 0.0005$.

(i) Esquema de diferencias finitas centrada,

$$\epsilon \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = -1.$$

(ii) Esquema de diferencias finitas central-upwind:

$$\epsilon \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = -1.$$

Realice el análisis de refinamiento de grilla para cada caso, para determinar el orden de precisión. Grafique la solución encontrada y la exacta para $h = 0.1$, $h = \frac{1}{25}$, y $h = 0.01$.

(iii) ¿Qué método diría que es mejor? Justificar.

Respuesta

(a) Para verificar que $u(x) = 1 + x + \left(\frac{e^{x/\epsilon}-1}{e^{1/\epsilon}-1}\right)$ es solución de el problema de valores iniciales, primero verifiquemos las condiciones iniciales.

$$u(0) = 1 + 0 + \frac{e^{0/\epsilon} - 1}{e^{1/\epsilon} - 1} = 1$$

$$u(1) = 1 + 1 + \frac{e^{1/\epsilon} - 1}{e^{1/\epsilon} - 1} = 3$$

por lo que la función u cumple las condiciones de contorno, ahora verifiquemos la ecuación diferencial, para eso calculemos u', u''.

$$u'(x) = 1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{e^{x/\epsilon}}{e^{1/\epsilon} - 1}$$
$$u''(x) = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{e^{x/\epsilon}}{e^{1/\epsilon} - 1}$$

uniendo lo anterior:

$$\epsilon u''(x) - u'(x) = \frac{1}{\epsilon} \frac{e^{x/\epsilon}}{e^{1/\epsilon} - 1} - 1 - \frac{1}{\epsilon} \frac{e^{x/\epsilon}}{e^{1/\epsilon} - 1} = -1$$

con esto demostramos que $u(x)$ es solución de problema de valores iniciales dado.

(b) Antes de poder comparar los esquemas, haremos el desarollo de los mismos, luego plantearemos casos que notamos donde un método es mejor por sobre otro, estimaremos el orden de convergencia para finalmente dar una conclusión final.

En ambos casos la idea es similar, buscaremos reemplazar la función u, por un conjunto de elementos discretos $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$, que buscamos encontrar, para esto se hacen distintas aproximaciones a lo que son las derivadas en la ecuación diferencial usando un paso discreto $h = (b-a)/n$.

1) Esquema basado en diferencias finitas centradas.

$$\epsilon \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = -1$$

o equivalentemente, al multiplicar miembro a miembro por h^2:

$$\epsilon(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) - (U_{i+1} - U_{i-1})\frac{h}{2} = -h^2$$

$$\iff (\epsilon + h/2)U_{i-1} - 2\epsilon U_i + (\epsilon - h/2)U_{i+1} = -h^2$$

De esta forma obtuvimos una condición general para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, sin embargo aun no hemos considerado los casos borde es decir $i = 1$ o $i = n-1$.

Para $i = 1$:

$$(\epsilon + h/2)U_0 - 2\epsilon U_1 + (\epsilon - h/2)U_2 = -h^2$$

$$\iff -2\epsilon U_1 + (\epsilon - h/2)U_2 = -h^2 - (\epsilon + h/2)$$

puesto que $U_0 = u(0) = 1$ y es un dato de problema.

Por otro lado para $i = n-1$ usaremos que $U_n = u(1) = 3$.

$$(\epsilon + h/2)U_{n-2} - 2\epsilon U_{n-1} + (\epsilon - h/2)U_n = -h^2$$

$$\iff (\epsilon + h/2)U_{n-2} - 2\epsilon U_{n-1} = -h^2 - 3(\epsilon - h/2)$$

Con esto ya podremos armar un sistema lineal de la forma $AU = b$ donde:

$$A = \begin{bmatrix} -2\epsilon & \epsilon - h/2 & 0 & \cdots & & & \\ \epsilon + h/2 & -2\epsilon & \epsilon - h/2 & \cdots & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \cdots & \epsilon + h/2 & -2\epsilon & \epsilon - h/2 \\ & & & \cdots & 0 & \epsilon + h/2 & -2\epsilon \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -h^2 - (\epsilon + h/2) \\ -h^2 \\ \vdots \\ -h^2 \\ -h^2 - 3(\epsilon - h/2) \end{bmatrix}$$

Donde $A \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ es una matriz tridiagonal con entradas -2ϵ en la diagonal principal y $(\epsilon - h/2)$ y $(\epsilon + h/2)$ en la supra y sub diagonal respectivamente, por otro lado los vectores $U, b \in \mathbb{R}^{n-1}$.

El código para resolver el problema de valores iniciales con el método de diferencias finitas centradas sera el siguiente:

```
def method1_Df_centradas(e, f, a=0, b=1, ua=1, ub=3, n=1000):
    # Ejercicio 6.b.1 resolucion de ecuacion por diferencias finitas centradas
    h = (b-a)/n
    x = np.linspace(a, b, n+1)[1:-1]

    sup = np.diag(np.ones(n-2) , k=1)  * (e - h/2)
    inf = np.diag(np.ones(n-2) , k=-1) * (e + h/2)
    diag =  np.identity(n-1) * -2 * e

    A = sup + inf + diag

    F = h**2 * f(x)
    F[0]  = F[0]  - ua * (e + h/2)
    F[-1] = F[-1] - ub * (e - h/2)

    U = np.linalg.solve(A, F) # Resolver sistema lineal

    # Agregamos datos dados del problema
    x_full = np.concatenate(([a], x, [b]))
    U_full = np.concatenate(([ua], U, [ub]))

    return x_full, U_full

```

2) Veamos ahora el esquema de diferencias finitas central-upwind.

$$\epsilon \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = -1.$$

o, equivalentemente, al multiplicar por h^2

$$\epsilon U_{i-1} - 2\epsilon U_i + \epsilon U_{i+1} - hU_i + hU_{i+1} = -h^2$$

$$\iff (\epsilon + h)U_{i-1} - (2\epsilon + h)U_i + \epsilon U_{i+1} = -h^2$$

Donde nuevamente tenemos una condición general para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, sin embargo consideremos los mismos casos borde por separado, es decir que pasa en $i = 1$ o $i = n - 1$.

Primero veamos que pasa con $i = 1$ nuevamente usamos que $u(0) = U_0 = 1$ llegando a:

$$-(2\epsilon + h)U_1 + \epsilon U_2 = -h^2 - (\epsilon + h)$$

Por su parte en $i = n - 1$ volvemos a usar la condición inicial de $u(1) = U_n = 3$ para así obtener la expresión:

$$(\epsilon + h)U_(n - 2) - (2\epsilon + h)U_{n-1} = -h^2 - 3\epsilon$$

Una vez que tenemos la condición general así como los dos casos particulares, podemos armar nuevamente un sistema de la forma $AU = b$, en este caso las dimensiones A, U, b serán las mismas que en esquema de diferencias finitas centradas, esto suele pasar con cualquier esquema del estilo, por lo que la ventaja de un método por sobre otro no suele ser el costo computacional en estos casos, salvo que el metodo genere una matriz especial lo cual veremos mas adelante.

Finalmente, para el esquema de diferencias finitas central-upwind el sistema quedara como:

$$A = \begin{bmatrix} -(2\epsilon+h) & \epsilon & 0 & \cdots & & & \\ \epsilon+h & -(2\epsilon+h) & \epsilon & \cdots & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \cdots & \epsilon+h & -(2\epsilon+h) & \epsilon \\ & & & \cdots & 0 & \epsilon+h & -(2\epsilon+h) \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -h^2-(\epsilon+h) \\ -h^2 \\ \vdots \\ -h^2 \\ -h^2-3\epsilon \end{bmatrix}$$

```python
def method2_Df_upwind(e, f, a=0, b=1, ua=1, ub=3, n=1000):
    # Ejercicio 6.b.2 resolucion de ecuacion por diferencias finitas upwind
    h = (b-a)/n
    x = np.linspace(a, b, n+1)[1:-1]

    sup = np.diag(np.ones(n-2) , k=1)  * e
    inf = np.diag(np.ones(n-2) , k=-1) * (e + h)
    diag =  np.identity(n-1) * -(2*e + h)

    A = sup + inf + diag

    F = h**2 * f(x)
    F[0]  = F[0]  - ua * (e + h)
    F[-1] = F[-1] - ub * e

    U = np.linalg.solve(A, F)  # Resolver sistema lineal

    # Agregamos datos dados del problema
    x_full = np.concatenate(([a], x, [b]))
    U_full = np.concatenate(([ua], U, [ub]))

    return x_full, U_full

```

3) Comparación de ambos esquemas.

Para ver que método es mejor primero veamos primero algunas resoluciones, para un $h = 0.05$ fijo, primer variemos ϵ.

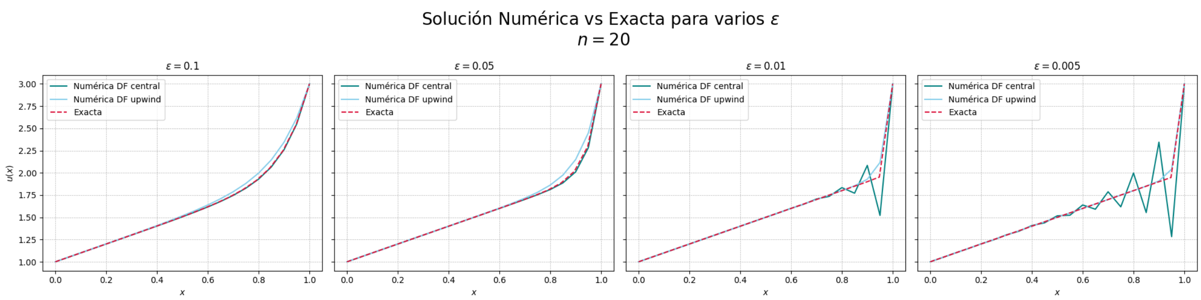

Figure 1: Comparación de métodos, variando ϵ

Lo primero que notamos es que la solución exacta(graficada en linea de puntos y en color rojo) tiende a ser no diferenciable en $x = 1$ a medida que $\epsilon \to 0$. Sin embargo vemos algo muy curioso, para un valor de ϵ mas grande, la aproximación basada en diferencias finitas centrada se aproxima mucho mejor que la aproximación basada en el esquema upwind, sin embargo a medida que ϵ se va haciendo mas pequeño, el esquema upwind va siendo mas certero mientras que el esquema tradicional tiende a tener un comportamiento mas errático e inestable, puesto que oscila al rededor de la solucion exacta .

Veamos ahora que sucede en el caso contrario, es decir que pasa si dejamos ϵ fijo pero vamos variando n, consecuente vamos variando el paso h, primero veamos como afecta este parámetro si $\epsilon = 0.1.$ y luego cuando $\epsilon = 0.005$, es decir cuando la esta diferneciabilidad en $x = 1$ se hace mas presente.

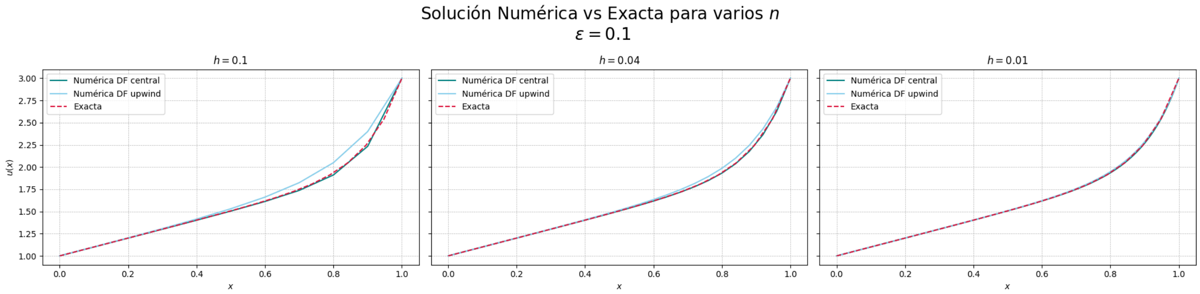

Figure 2: Comparación de métodos, variando h con ϵ “grande“.

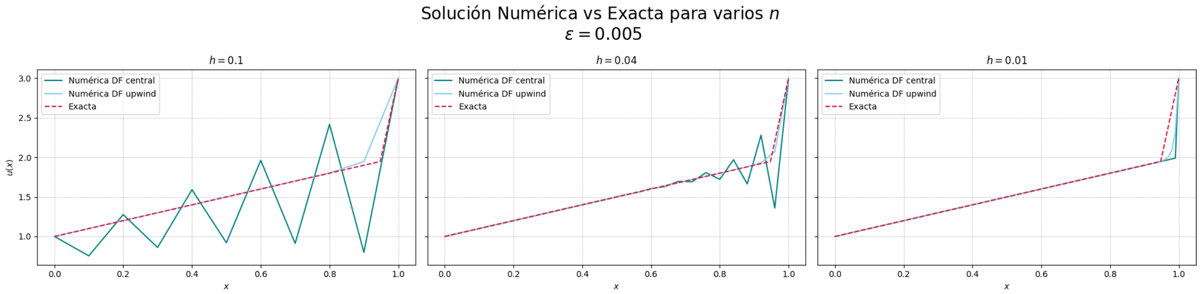

Figure 3: Comparación de métodos, variando h con ϵ “pequeño“

Se observa un comportamiento esperado cuando ϵ es mayor, ya que si bien el esquema de diferencias finitas centradas presenta un mejor rendimiento, la diferencia entre ambos métodos es mínima cuando h es suficientemente pequeño. Sin embargo, al reducir ϵ, el esquema centrado muestra errores significativos, relacionado con esta inestabilidad de la que hablamos antes, muy notorio cuando usamos un paso de integración grande, mientras que el esquema upwind mantiene un error considerablemente menor en esas mismas condiciones. A medida que el paso de integración h disminuye, ambos métodos tienden a converger hacia la solución exacta, con el esquema upwind mostrando una mayor precisión, sin embargo aun podemos ver que el mayor error se da cerca de este punto crítico en $x = 1$ para ambos métodos.

Intentemos estimar el orden de convergencia de ambos métodos. Por un lado, sabemos que el esquema basado en diferencias finitas centradas tiene un orden de convergencia teórico de $O(h^2)$, mientras que el método upwind presenta un error de truncamiento de orden $O(h)$, lo que lo hace menos preciso en teoría. Sin embargo, al utilizar diferencias finitas hacia atrás para la derivada primera, el esquema upwind reduce la posibilidad de oscilaciones, mejorando la estabilidad de la solución.

La razón de esta inestabilidad radica en la estructura de la matriz generada por cada método, por un lado notamos que la matriz del esquema upwind es diagonalmente dominante cuando $\epsilon \to 0$. Esto no ocurre en el método basado en diferencias finitas centradas, lo cual explica matemáticamente por qué con este último método se obtienen soluciones inestables y oscilatorias, mientras que el esquema upwind no presenta dicho problema.

Veamos como se condice esta convergencia con resultados prácticos, para eso realicemos un refinamiento de grilla.

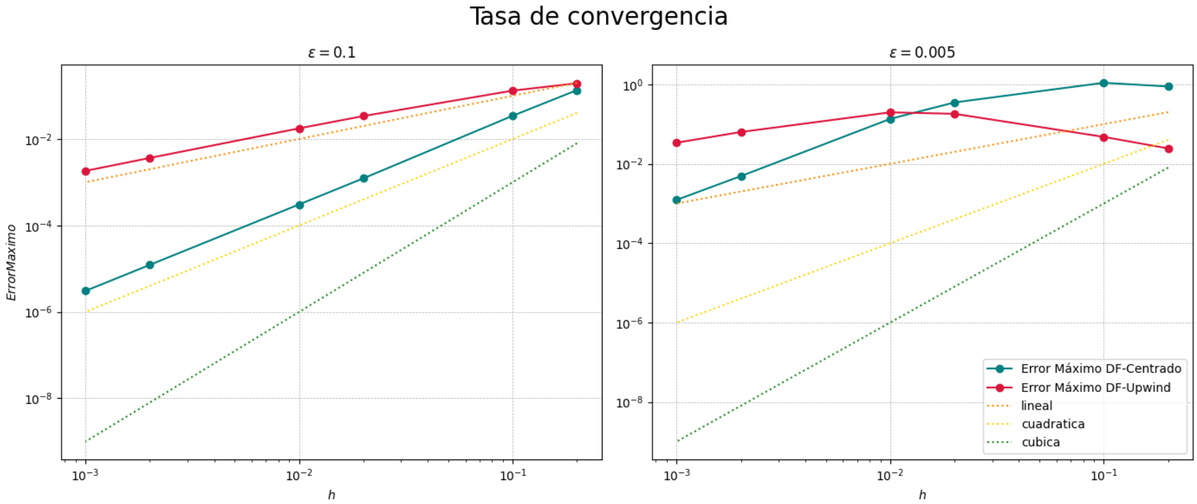

Figure 4: Tasas de convergencia estimadas, escala logarítmica

Ver que el análisis de grilla arroja resultados muy distintos para diferentes valores de ϵ, por simplicidad se realizara la interpretación solo para $\epsilon = 0.1$ que como podemos notar es donde los resultados teóricos de error, se condicen con los resultados de error máximo.

Finalmente, si tuviera que elegir un método, consideraría dos aspectos fundamentales: el valor de ϵ y el costo computacional aceptable, determinado por el tamaño de h. Si es posible utilizar un paso discreto pequeño, es probable que ambos métodos funcionen de manera eficiente; sin embargo, el esquema upwind parece aproximar mejor el punto de interés. Por otro lado, cuando tanto h como ϵ son relativamente grandes, el esquema centrado muestra un mejor rendimiento. El caso crítico surge cuando h no puede ser pequeño y ϵ es pequeño; en esta situación, el uso del esquema upwind es prácticamente obligatorio.

Ejercicio 11

Aplique el método de diferencias finitas y el método de Newton para encontrar una solución numérica al modelo no lineal del péndulo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\sin\theta = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$$
$$\theta(0) = \theta_1, \quad \theta(2\pi) = \theta_2,$$

donde K, θ_1 y θ_2 son parámetros. Compare la solución con el modelo linealizado

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = 0.$$

Respuesta