

## Vetores

### 1. Soma de vetores e multiplicação por escalar

#### 2.3.3 Problemas Resolvidos

- 1) Determinar o vetor  $\vec{w}$  na igualdade  $3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$ , sendo dados  $\vec{u} = (3, -1)$  e  $\vec{v} = (-2, 4)$ .

```
[ ] "C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exerciciosomaemultiplicacaoporescalar\bin\Debug\exerciciosomaemultiplicacaoporescalar.exe"
Digite apenas 'S' para soma ou 'M' para multiplicacao por escalar' z
s
Resolucao do exercicio 2.3.3, pagina 21, livro 'Geometria AnalYtica' de Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle:
Vetor u: (3.00,-1.00)
Vetor v: (-2.00,4.00)

Vetor w: (-3.50,2.00)

Process returned 0 (0x0)    execution time : 1.540 s
Press any key to continue.
```

#### Exemplo:

- 1) Seja  $u = <-1, 3>$  e  $v = <4, 7>$ . Ache as componentes dos vetores:

- (a)  $u + v$     (b)  $3u$    (c)  $2u - v$

```
[ ] "C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exerciciosomaemultiplicacaoporescalar\bin\Debug\exerciciosomaemultiplicacaoporescalar.exe"
Digite apenas 'S' para soma ou 'M' para multiplicacao por escalar' z
m
Resolucao do exercicio do site da UFRJ (http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap91s4.html):
Escolha o item a ser resolvido: a, b ou c.
a

a) Calcular u + v:
Resposta da a) --> (3.00,10.00)

Process returned 0 (0x0)    execution time : 2.684 s
Press any key to continue.
```

## 2. Ângulo

- 1) Calcular o ângulo entre os vetores  $\vec{u} = (1, 1, 4)$  e  $\vec{v} = (-1, 2, 2)$ .

```
[ ] "C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1 Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P08 - Retas(Angulo).exe"
Digite o vetor diretor do r1: -1 1 -2
Digite o vetor diretor do r2: 2 1 1
O angulo eh: 60.00

Process returned 0 (0x0)    execution time : 87.167 s
Press any key to continue.
```

### 3. Módulo

- 1) Dados os pontos A(2, -1) e B(-1, 4) e os vetores  $\vec{u} = (-1, 3)$  e  $\vec{v} = (-2, -1)$ , determinar  
a)  $|\vec{u}|$

```
C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1º Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P02 - Vetores(Modulo)
V = (x,y)
Digite x:
-1
Digite y:
3
|v| = 3.16

Process returned 0 (0x0)  execution time : 10.737 s
Press any key to continue.
```

WINTERLE P. Vetores e Geometria Analítica. Pearson Eucation. São Paulo, 2007

### 4. Produto escalar

## Problemas Propostos

- 1) Dados os vetores  $\vec{u} = (2, -3, -1)$  e  $\vec{v} = (1, -1, 4)$ , calcular

- a)  $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$       c)  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$   
b)  $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$       d)  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

```
C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\GAAL - 2017-1\exercicioprodutoescalar\bin\Debug\exercicioprodutoescalar.exe"
Resolução do exercício 1, página 36, livro 'Vetores e Geometria Analítica' de Paulo Winterle.

Você deseja calcular a), b), c) ou d)? Digite apenas a letra correspondente.
a

a) Calcular 2u . (-v)
Resposta a) --> -2.00

Process returned 0 (0x0)  execution time : 4.057 s
Press any key to continue.
```

### 5. Produto Vetorial

- 3) Dados os pontos A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) e C(2, -1, -3), determinar o ponto D tal que  
 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$ .

```

C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exercicioprodutovetorial\bin\Debug\exercicioprodutovetorial.exe"
Resolucao do exercicio 3, pagina 46, livro 'Vetores e Geometria Analitica' de Paulo Winterle.

0 vetor BC eh: (-1,-1,-4)
0 vetor AC eh: (0,-2,-2)

0 vetor AD eh: (-6,-2,2)

0 o ponto D eh: (-4,-1,1)

Process returned 0 (0x0) execution time : 0.017 s
Press any key to continue.

```

## 6. Produto misto

- 1) Dados os vetores  $\vec{u} = (3, -1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 2, 2)$  e  $\vec{w} = (2, 0, -3)$ , calcular  
 a)  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$       b)  $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

```

C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exercicioprodutomisto\bin\Debug\exercicioprodutomisto.exe"
Resolucao do exercicio 1, pagina 52, livro 'Vetores e Geometria Analitica' de Paulo Winterle.

Voce deseja calcular a) ou b)? Digite apenas a letra correspondete.
a

Vetor u= (3,-1,1)
Vetor v= (1,2,2)
Vetor w= (2,0,-3)

Resposta a) -->: -29

Process returned 0 (0x0) execution time : 1.260 s
Press any key to continue.

```

```

C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exercicioprodutomisto\bin\Debug\exercicioprodutomisto.exe"
Resolucao do exercicio 1, pagina 52, livro 'Vetores e Geometria Analitica' de Paulo Winterle.

Voce deseja calcular a) ou b)? Digite apenas a letra correspondete.
b

Vetor w= (3,-1,1)
Vetor u= (1,2,2)
Vetor v= (2,0,-3)

Resposta b) -->: -29

Process returned 0 (0x0) execution time : 1.034 s
Press any key to continue.

```

## Retas

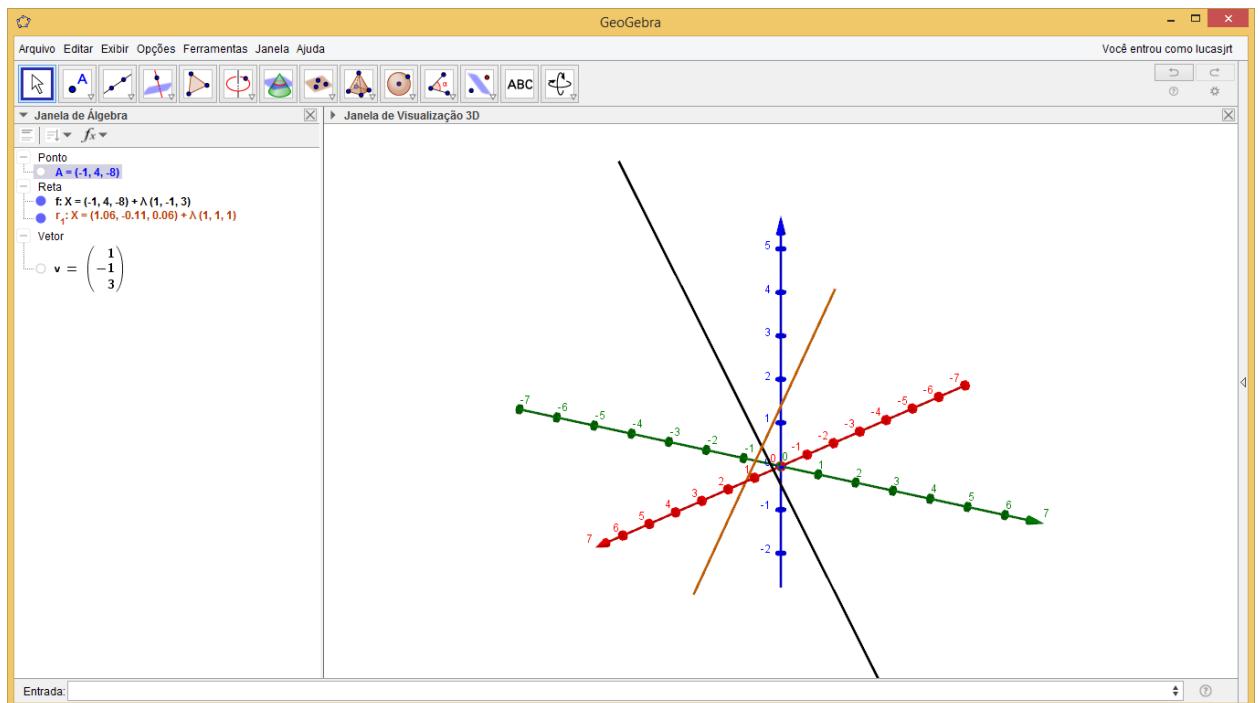
### 7. Posição relativa

#### 7.1.

- Dado enunciado do livro “Vetores e Geometria analítica – Paulo Winterle”, página 121:

$$b) r_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 3t \end{cases}$$

- Inserindo as duas retas, podemos verificar que elas são reversas, pois há uma distância de 0,07 u.d.(unidade de distância) entre elas:



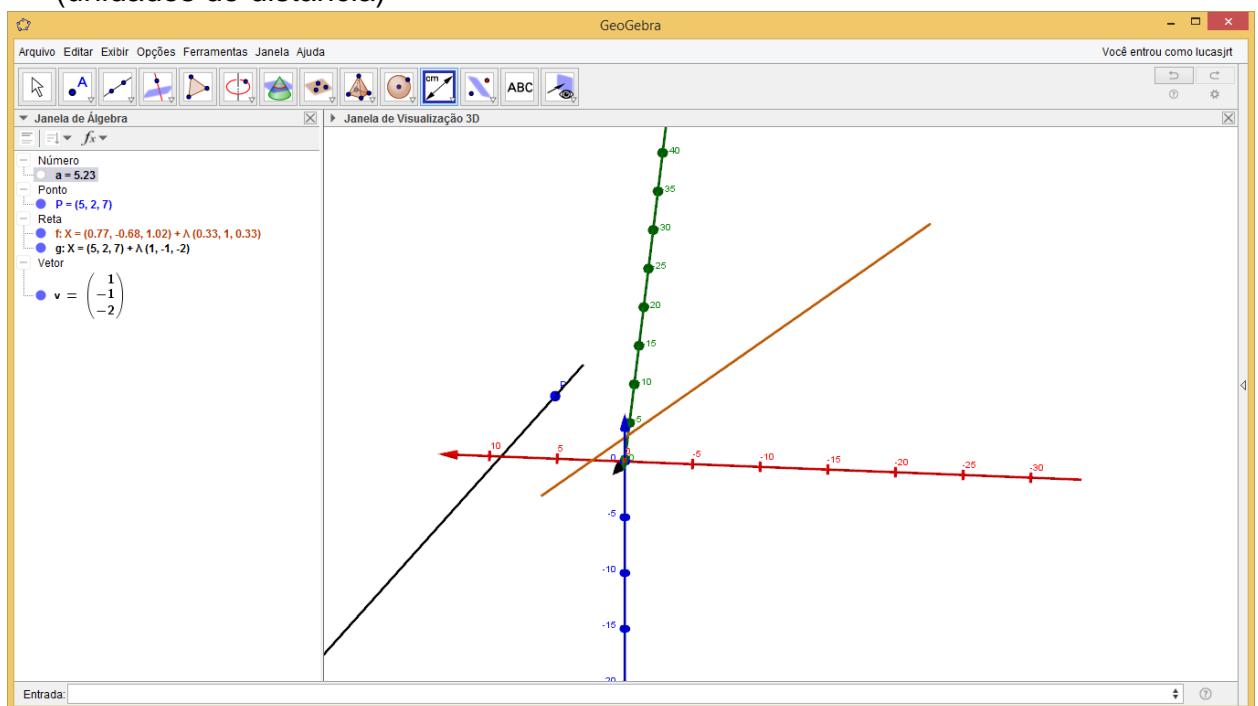
## 7.2.

- Dado o enunciado do livro de Alfredo Steinbruch, página 137:

24) Calcular o ponto de interseção das retas

$$b) \quad r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

- Temos que as retas são reversas, pois a distância entre elas é de 5.23 u. d. (unidades de distância)



## 8. Ângulo entre retas

21) Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

a)  $r_1 : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$  e  $r_2 : \frac{x}{2} = \frac{y + 6}{1} = \frac{z - 1}{1}$

```
"C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1º Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P03 - Vectores\exemplo.exe"
v = (x, y, z)
u = (x1,y1,z1)
Digite x:1
Digite y:1
Digite z:4
Digite x1:-1
Digite y1:2
Digite z1:2
v = (1.00, 1.00, 4.00)
u = (-1.00, 2.00, 2.00)
O angulo entre os dois vetores eh 45.0

Process returned 0 (0x0) execution time : 15.292 s
Press any key to continue.
```

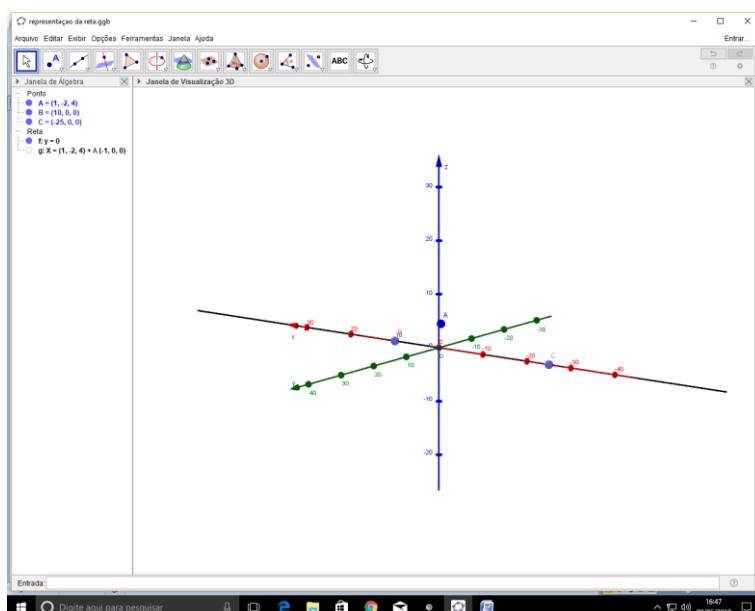
WINTERLE P. Vetores e Geometria Analítica. Pearson Eucation. São Paulo, 2007

## 9. Representação

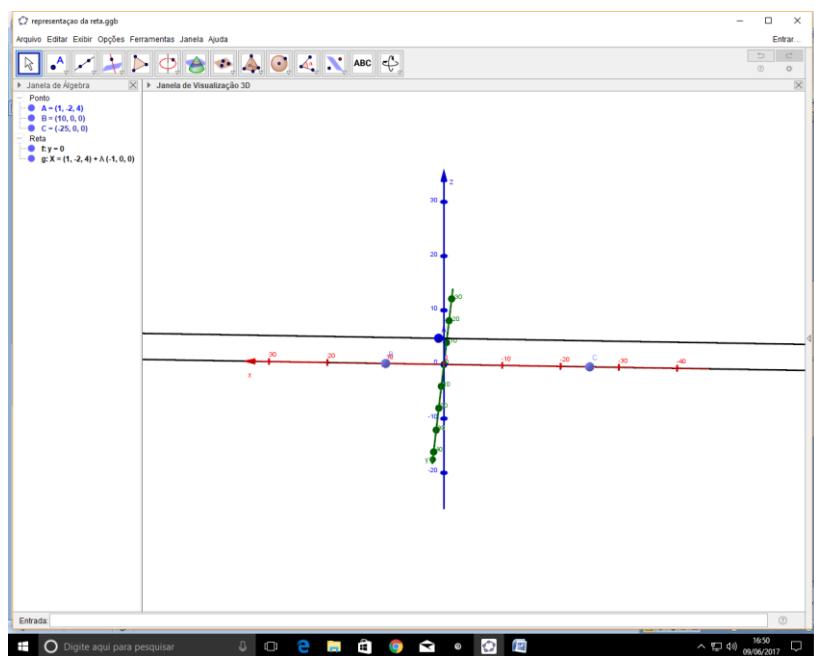
Enunciado –Determine a equação da reta que passa por A(1,-2,,4) e é paralela ao eixo X:

Usando o programa Geogebra :

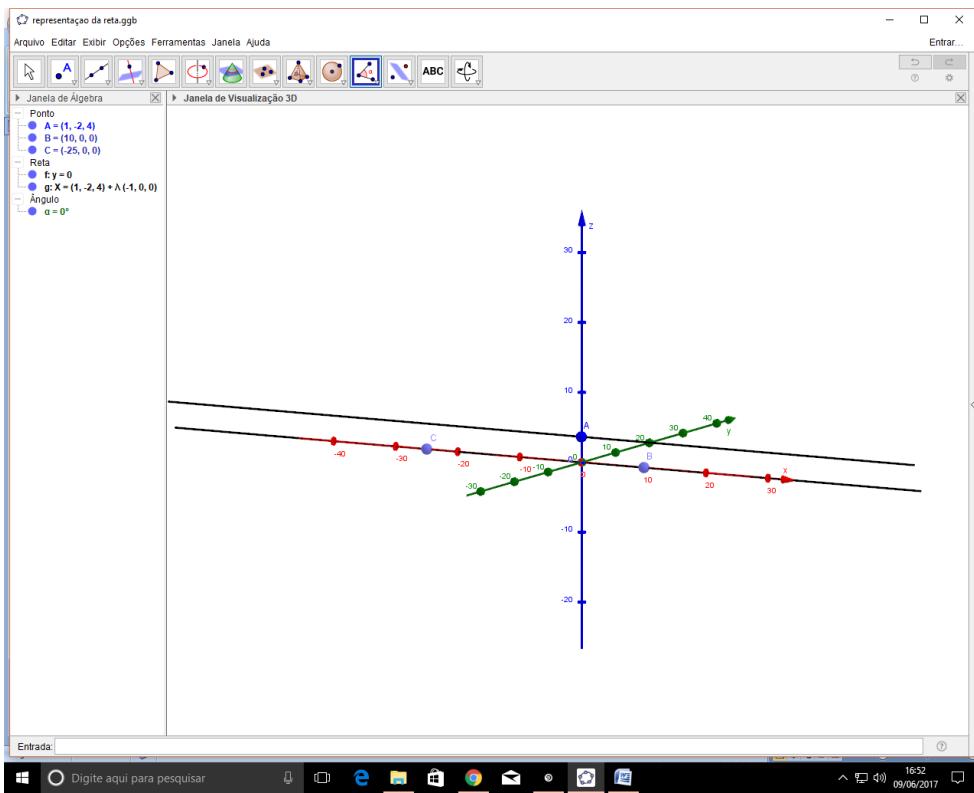
- Insere-se o ponto A;
- Define-se uma reta sobre o eixo x (como na imagem abaixo);



- Usando da função de criação de reta apartir de um ponto e reta ;



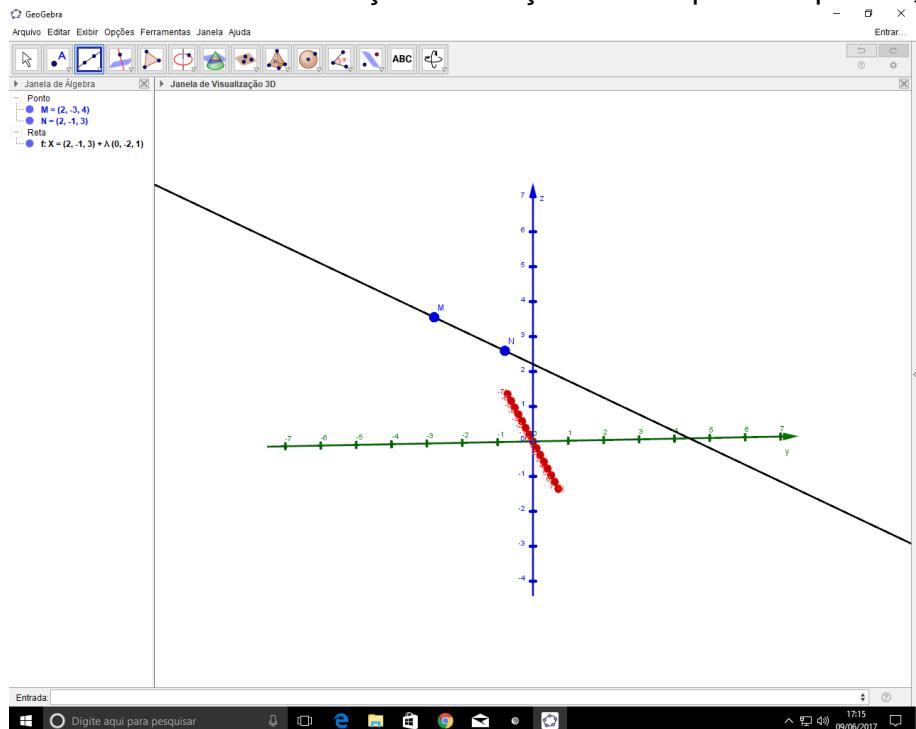
➤ Obtemos a reta paralela ao eixo dos x;



Enunciado –Determine a equação da reta que passa pelos pontos M(2,-3,4)eN(2,-1,3):

➤ Insere-se os pontos M e N;

- Utilizamos a função de criação de reta por dois pontos;



- Obtemos a reta que passa pelos pontos M e N;

## Planos

### 10. Posição relativa entre planos;

#### 10.1.

- Dado o enunciado do livro de Alfredo Steinbruch, página 183:

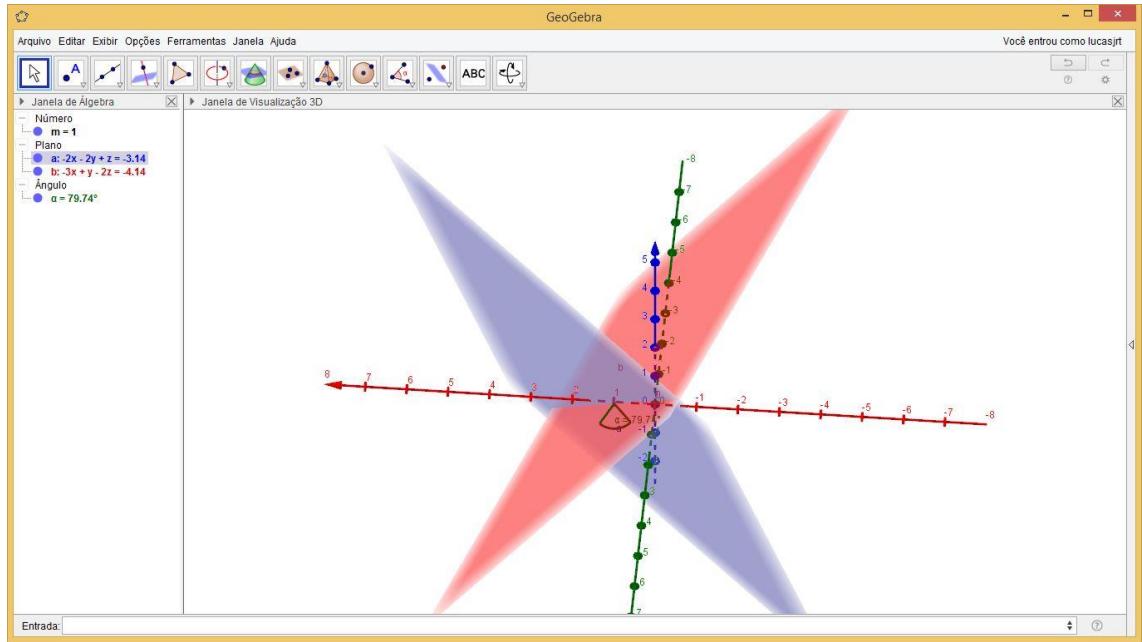
36) Determinar m de modo que os planos

$$\pi_1: 2mx + 2y - z = 0 \quad \text{e}$$

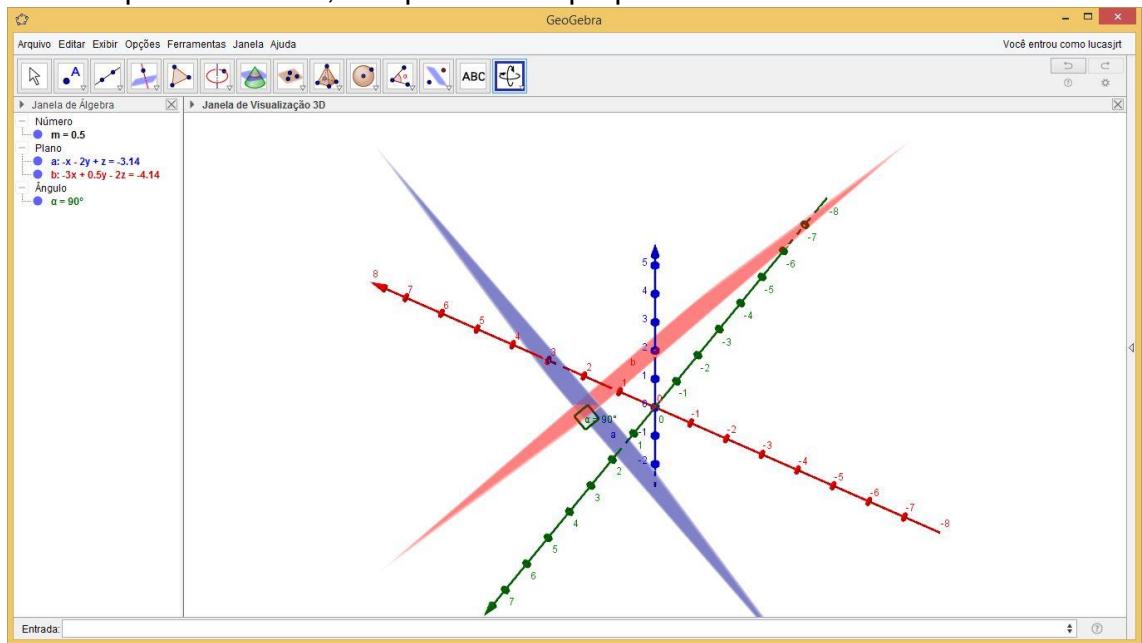
$$\pi_2: 3x - my + 2z - 1 = 0$$

sejam perpendiculares.

- Inserindo a equação dos planos com um controle deslizante m valendo 1, temos que o ângulo entre os planos é de  $79,74^\circ$ :



- Temos que com  $m = 0,5$  os planos são perpendiculares:



## 10.2.

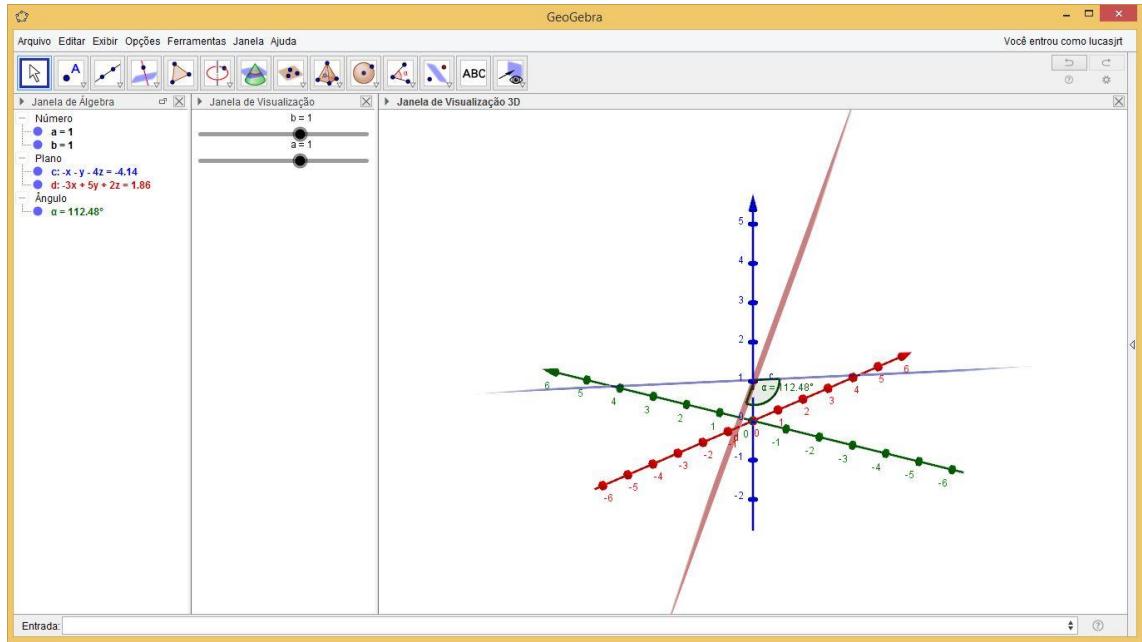
- Dado o enunciado do livro de Alfredo Steinbruch, página 183:

35) Determinar  $a$  e  $b$ , de modo que os planos

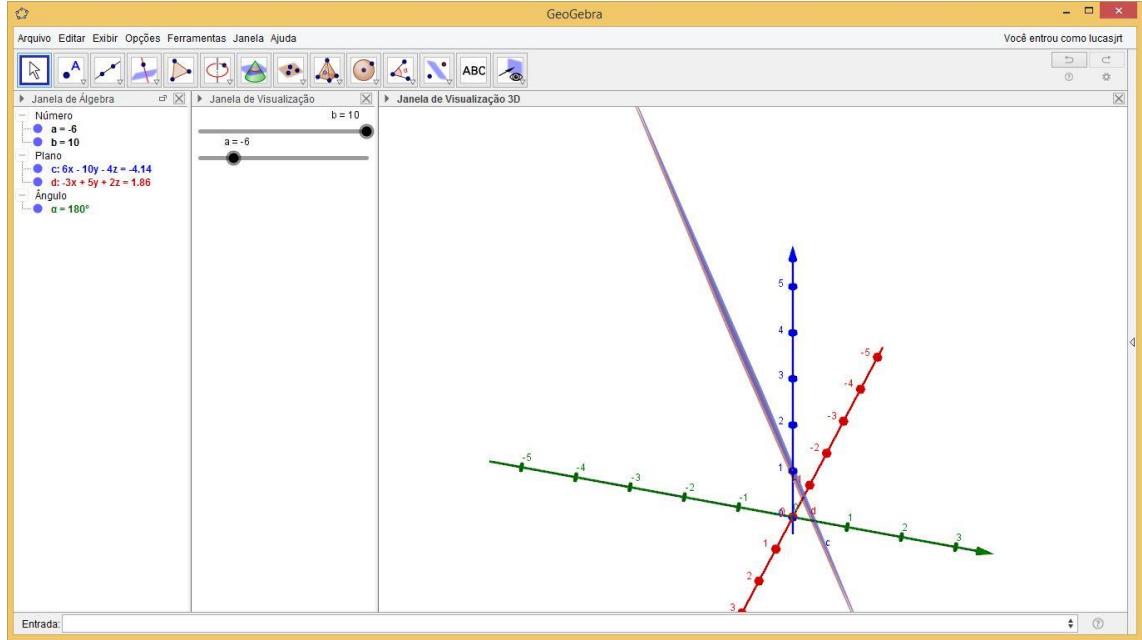
$$\pi_1: ax + by + 4z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: 3x - 5y - 2z + 5 = 0$$

sejam paralelos.

- Inserimos dois controles deslizantes “a” sendo 1, e “b”, a equação dos dois planos e verificamos o ângulo formado entre os dois planos é de  $112,48^\circ$ :



- Podemos ver que com “b” sendo 10 e “a” sendo -6, os dois planos formam um ângulo de 180 graus, ou seja, são paralelos:



## 11. Ângulo entre planos;

### 11.1.

- Dado o enunciado do livro de Alfredo Steinbruch, página 169:

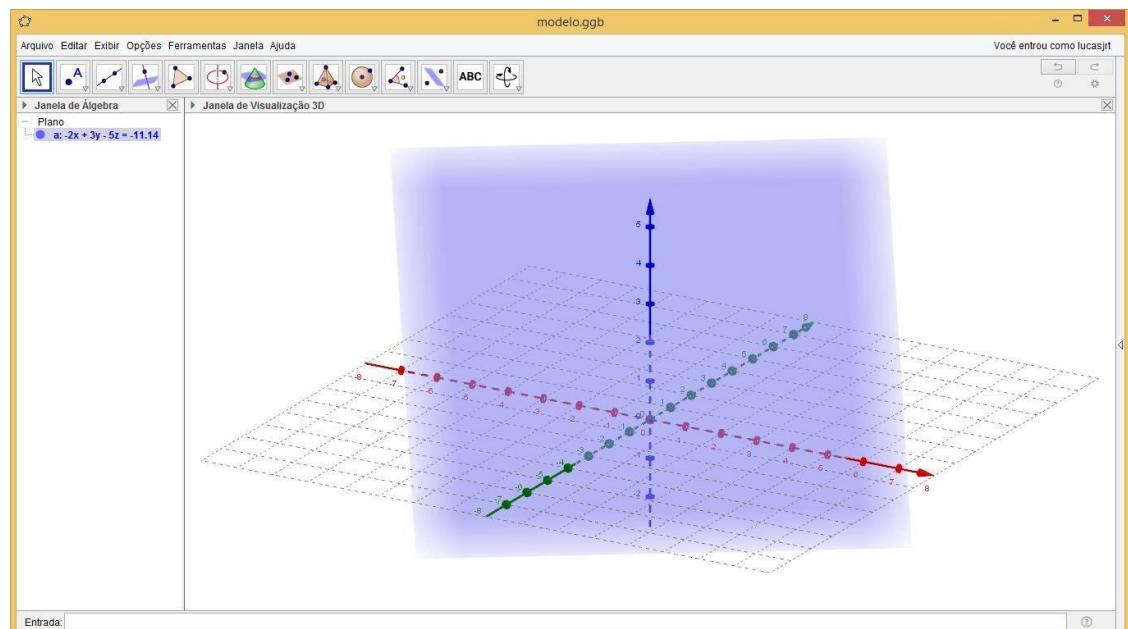
## 10) Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1: 2x - 3y + 5z - 8 = 0$$

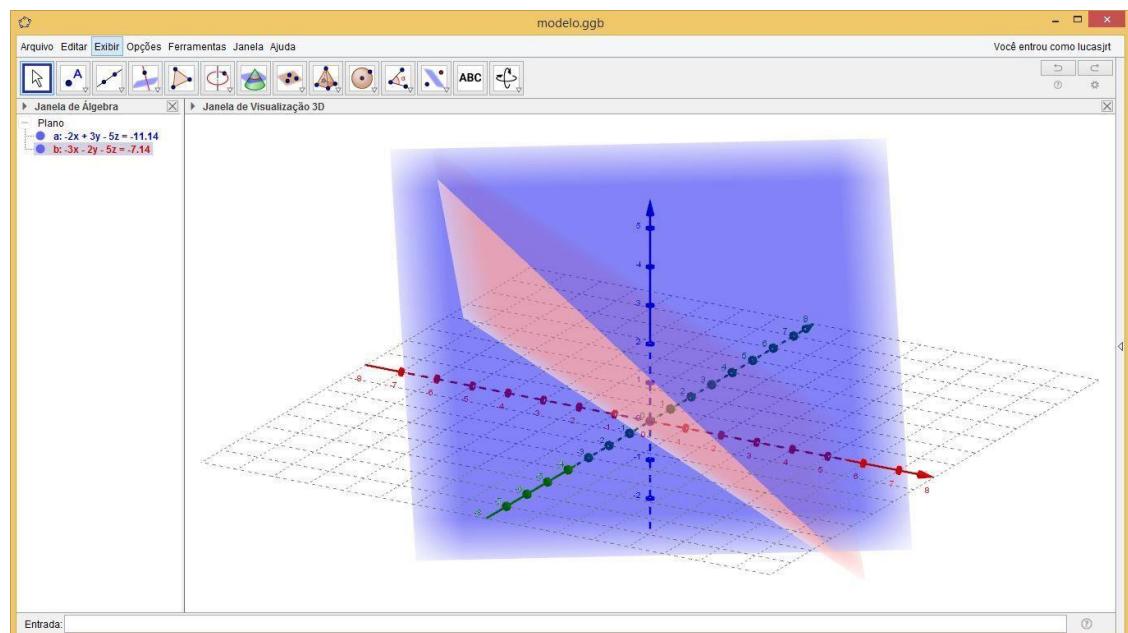
e:

$$\pi_2: 3x + 2y + 5z - 4 = 0$$

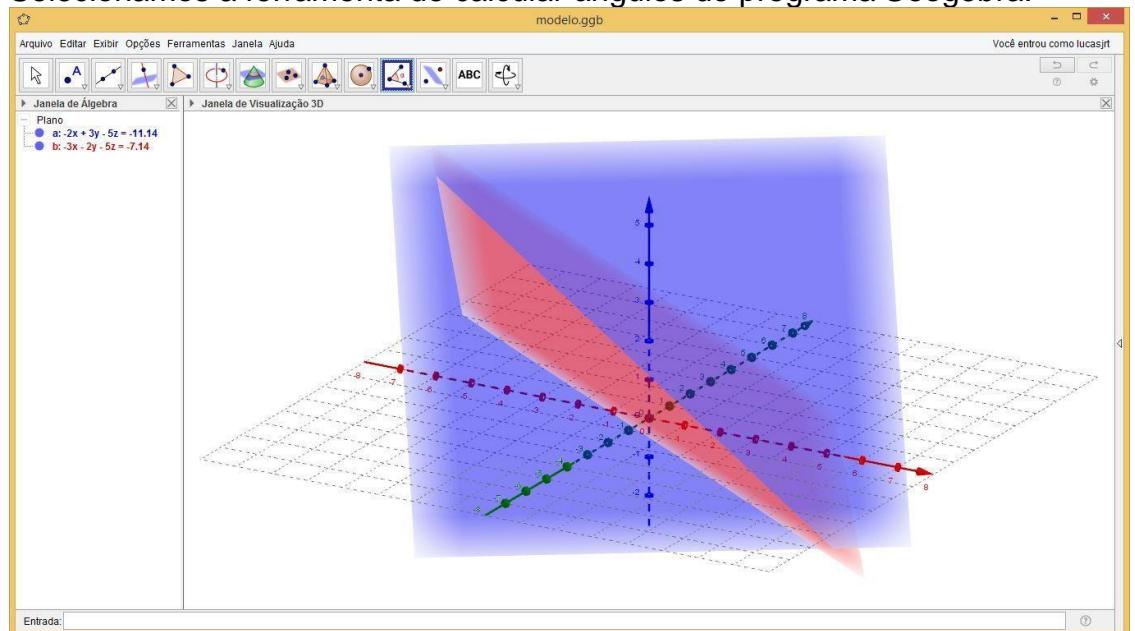
- Primeiro inserimos a equação do primeiro plano:



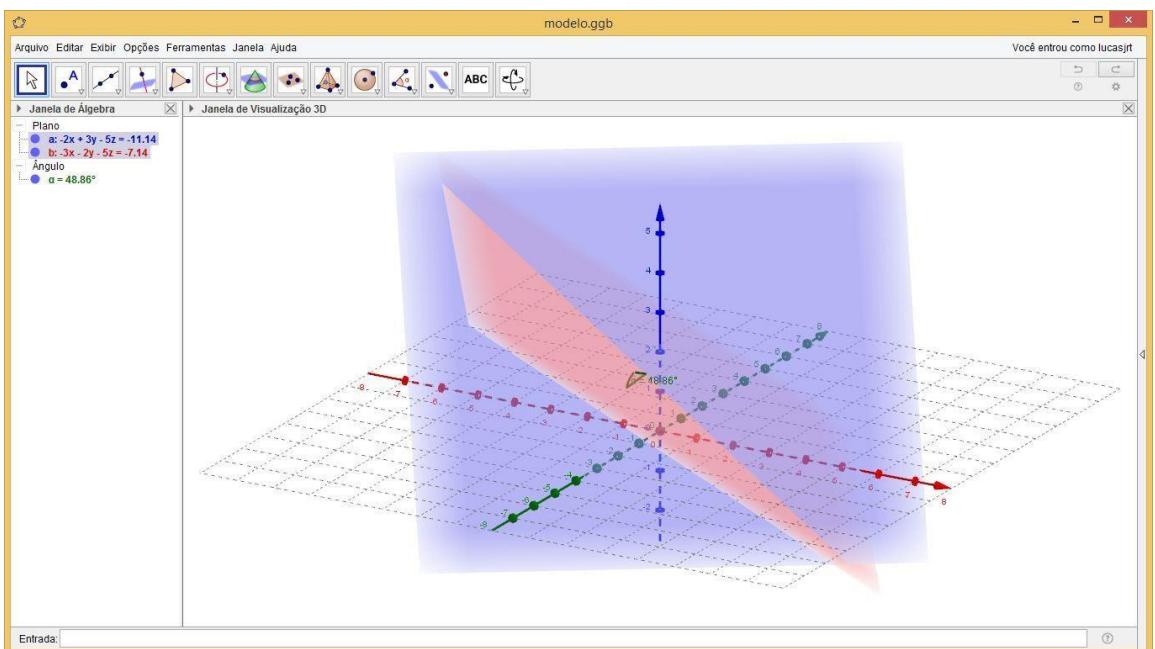
- Depois inserimos a equação do segundo plano:



- Selecionamos a ferramenta de calcular ângulos do programa Geogebra:



- Logo em seguida, selecionamos os dois planos para calcular o ângulo:



- Obtemos que o ângulo entre os planos é de  $48,86^\circ$ .

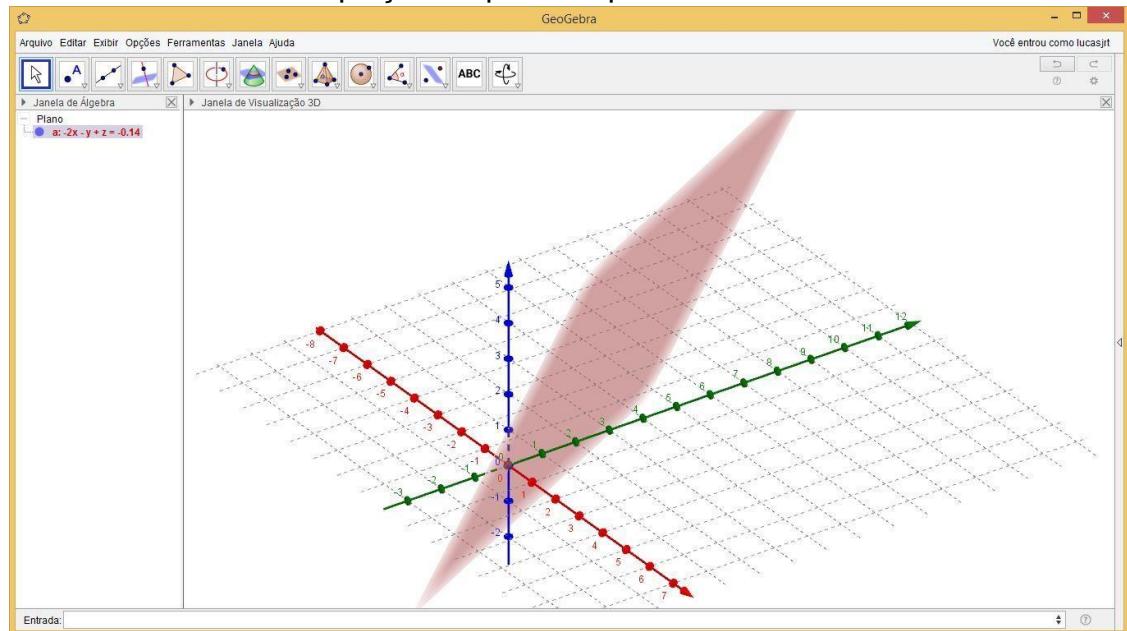
## 11.2.

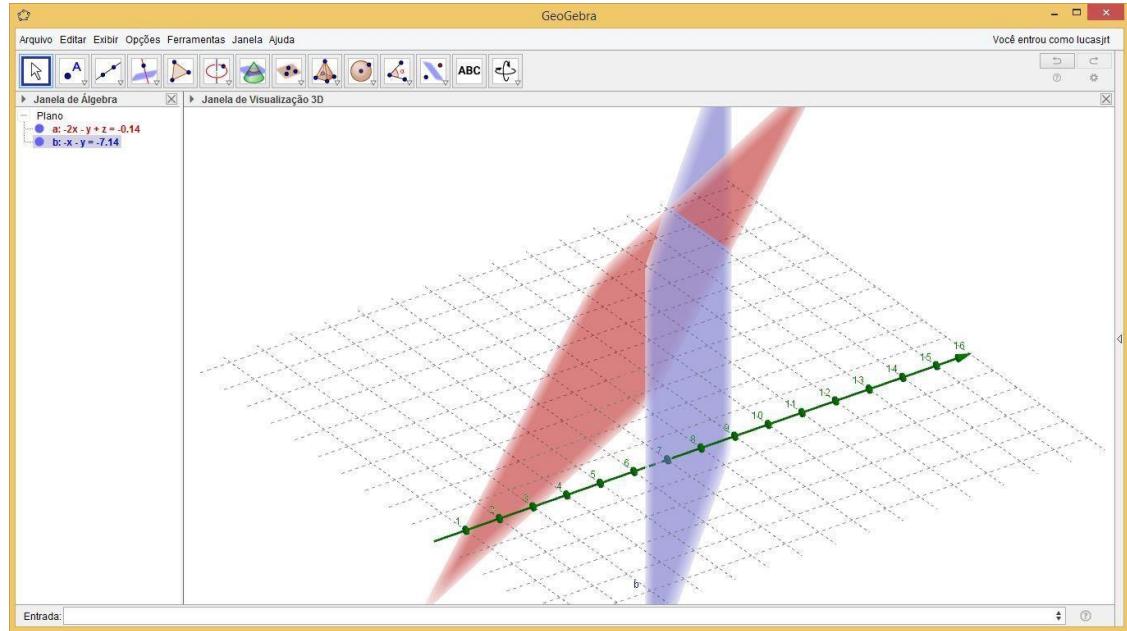
- Dado o enunciado do livro Vetores e Geometria Analítica de Paulo Winterle, página 136:

Determinar o ângulo entre os planos

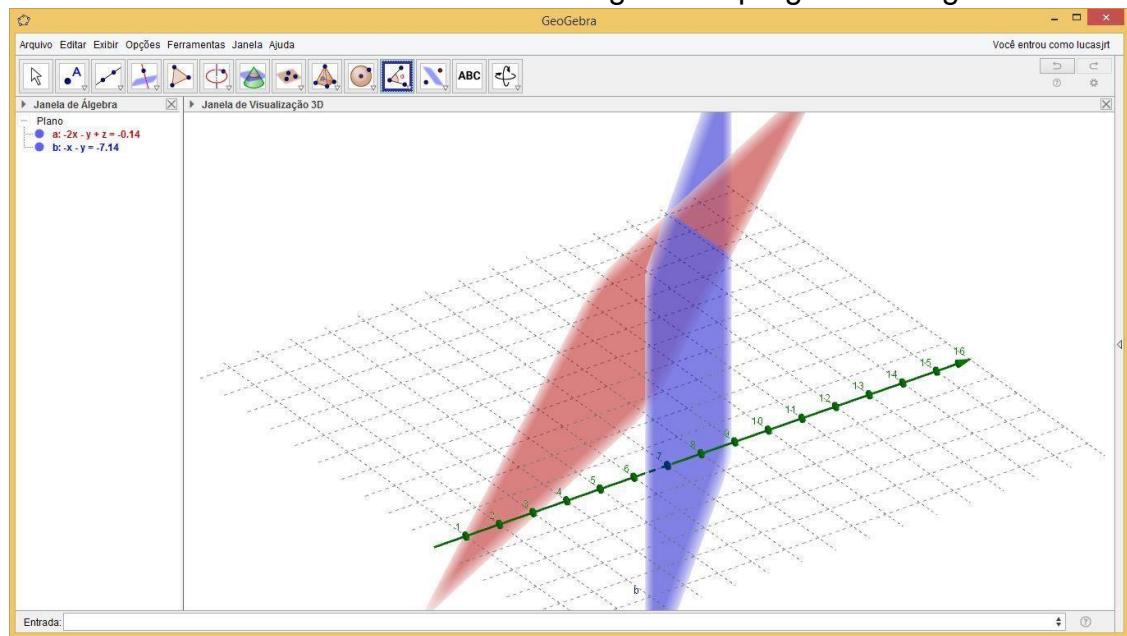
$$\pi_1: 2x + y - z + 3 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: x + y - 4 = 0.$$

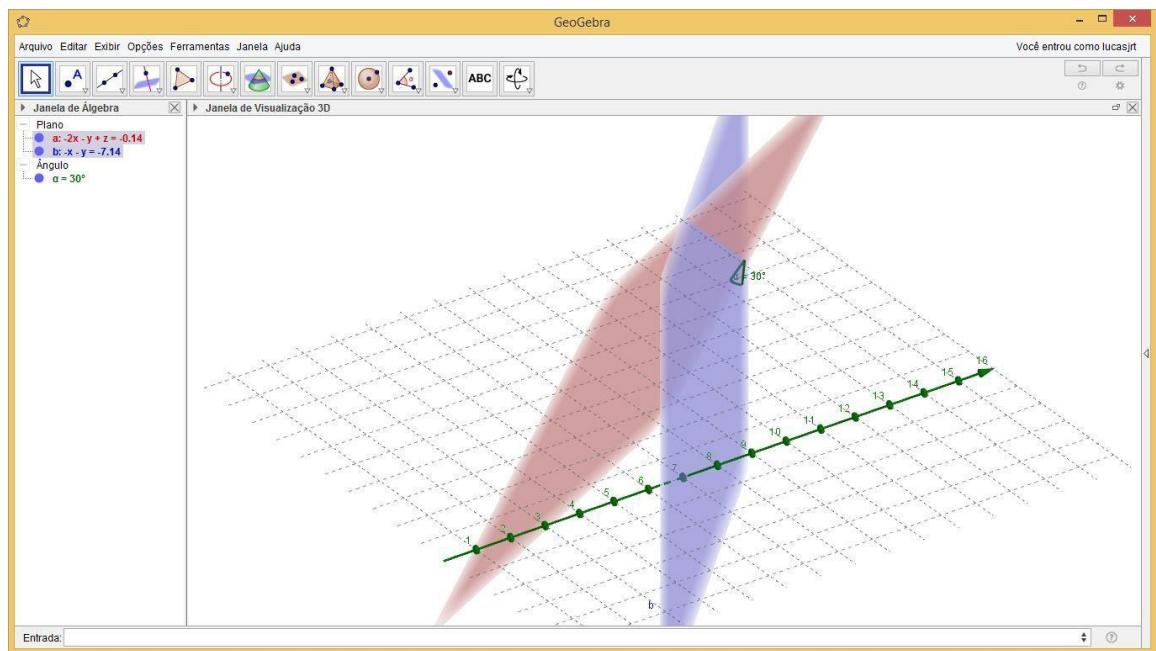
- Primeiro inserimos a equação do primeiro plano:





- Selecionamos a ferramenta de calcular ângulos do programa Geogebra:



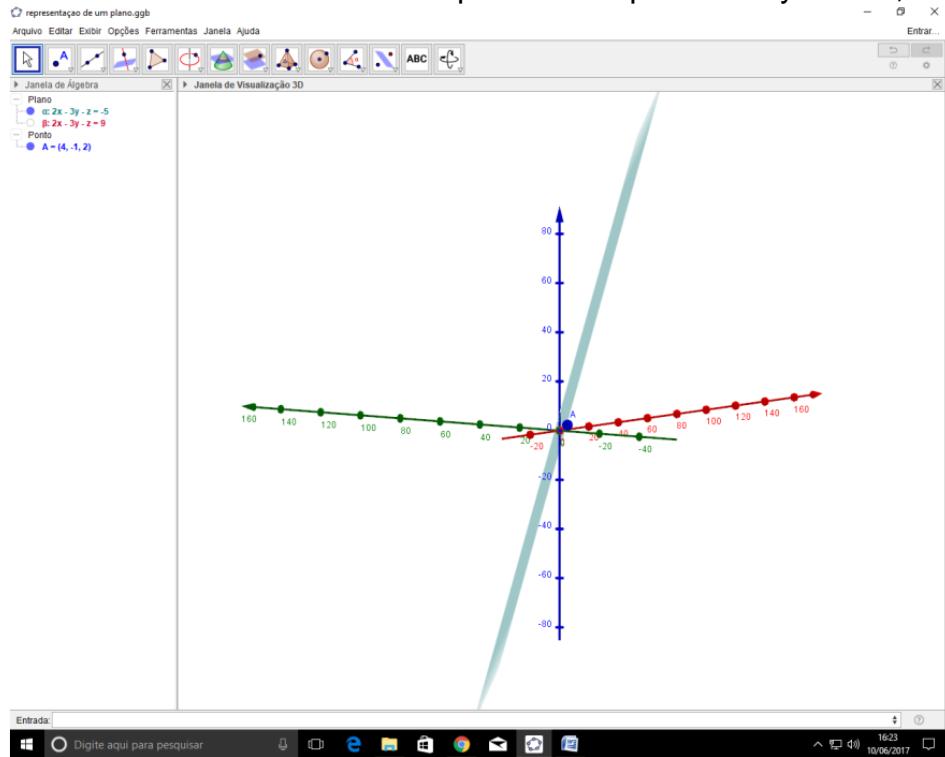


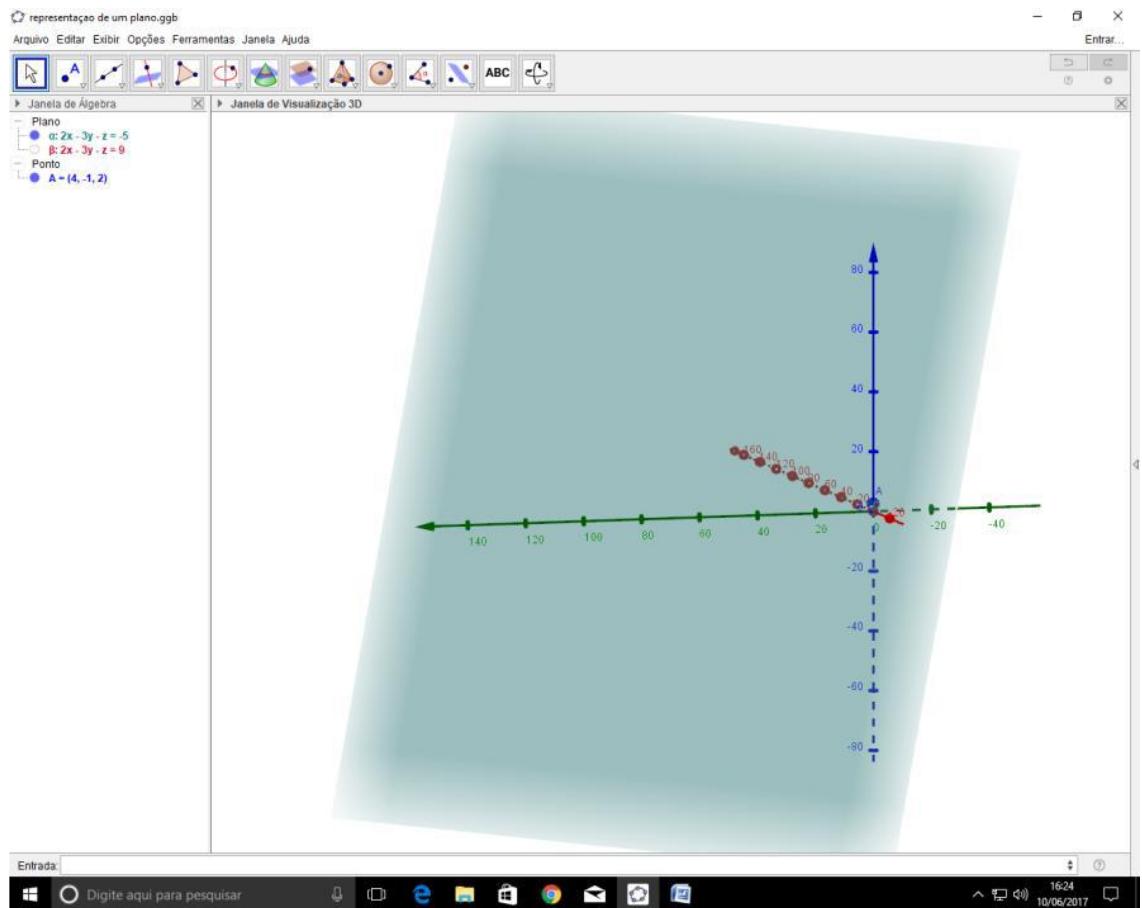
- Obtemos que o ângulo entre os planos é de  $30^\circ$ .

## 12. Representação;

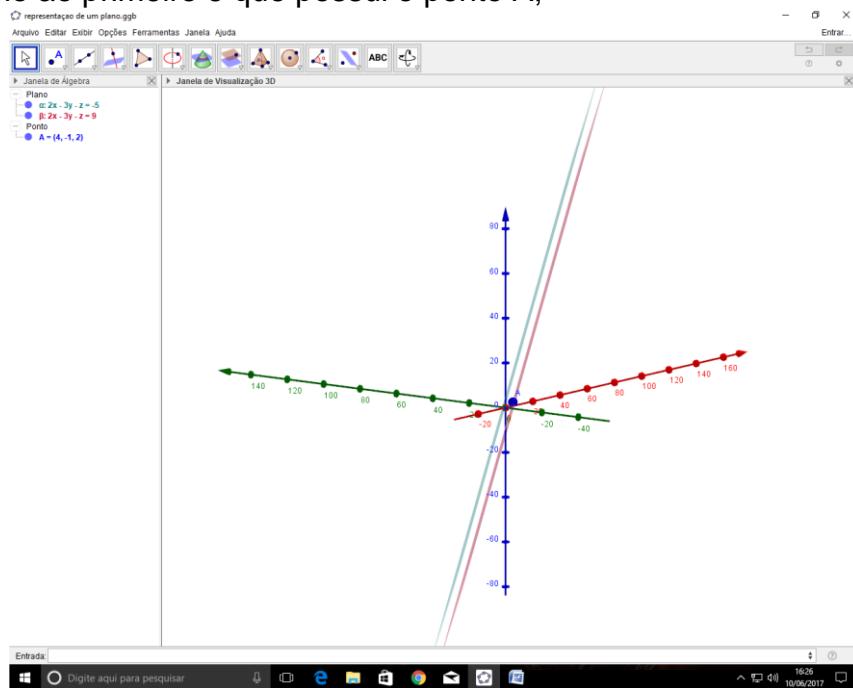
Enunciado –Determine a equação geral do plano paralelo ao plano  $2x - 3y - z + 5 = 0$  e que contém o ponto A(4, -1, 2):

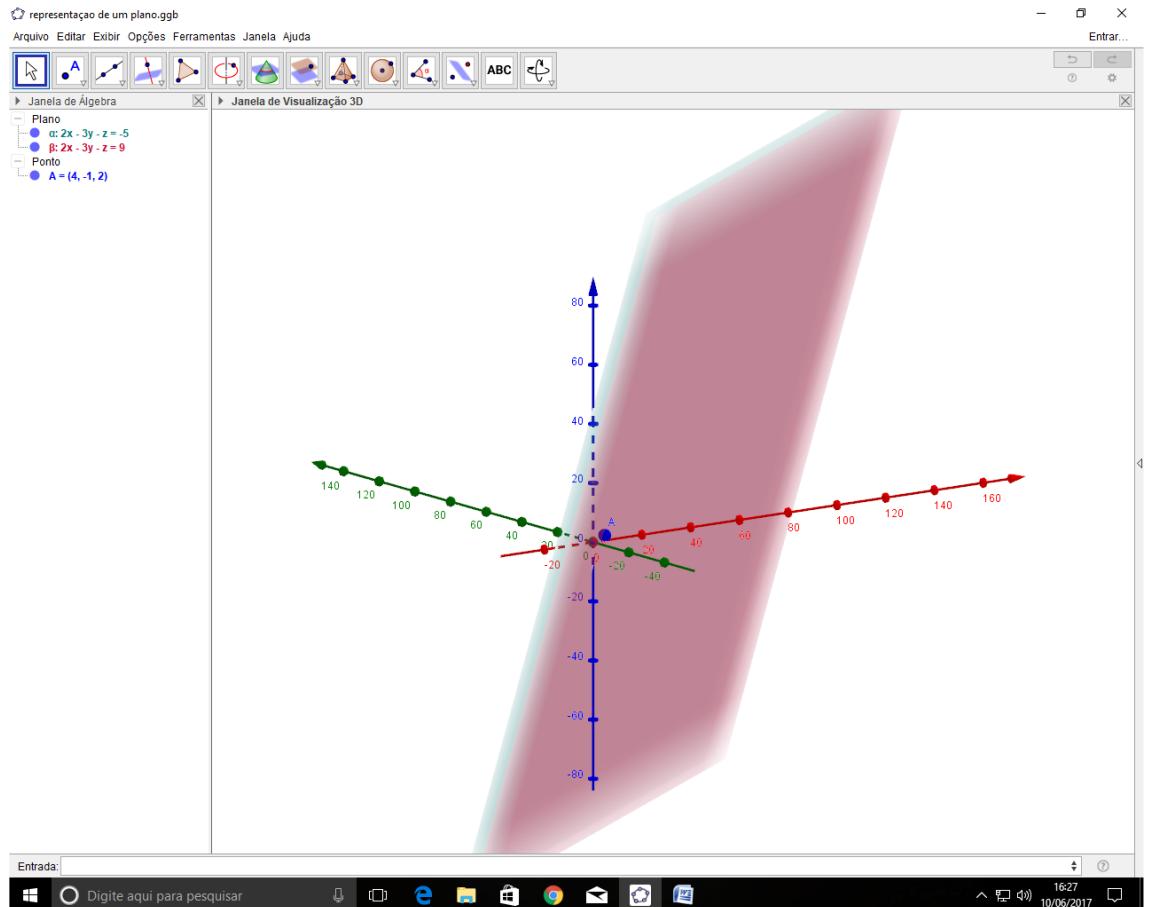
- Primeiro inserimos o ponto A e o plano  $2x - 3y - z + 5 = 0$ :





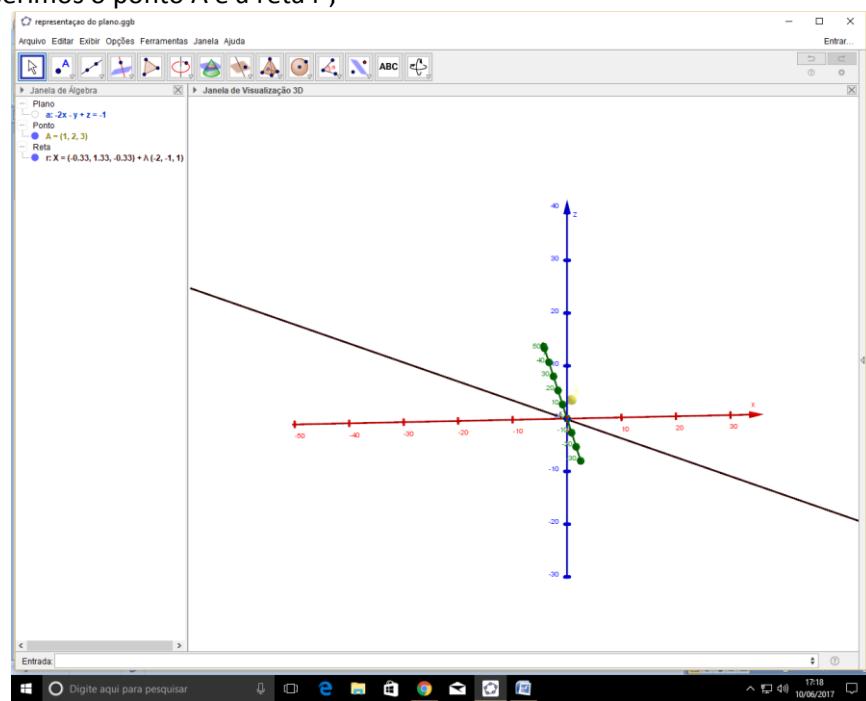
- Usamos a função de criação de planos paralelos e obtemos um plano beta paralelo ao primeiro e que possui o ponto A;



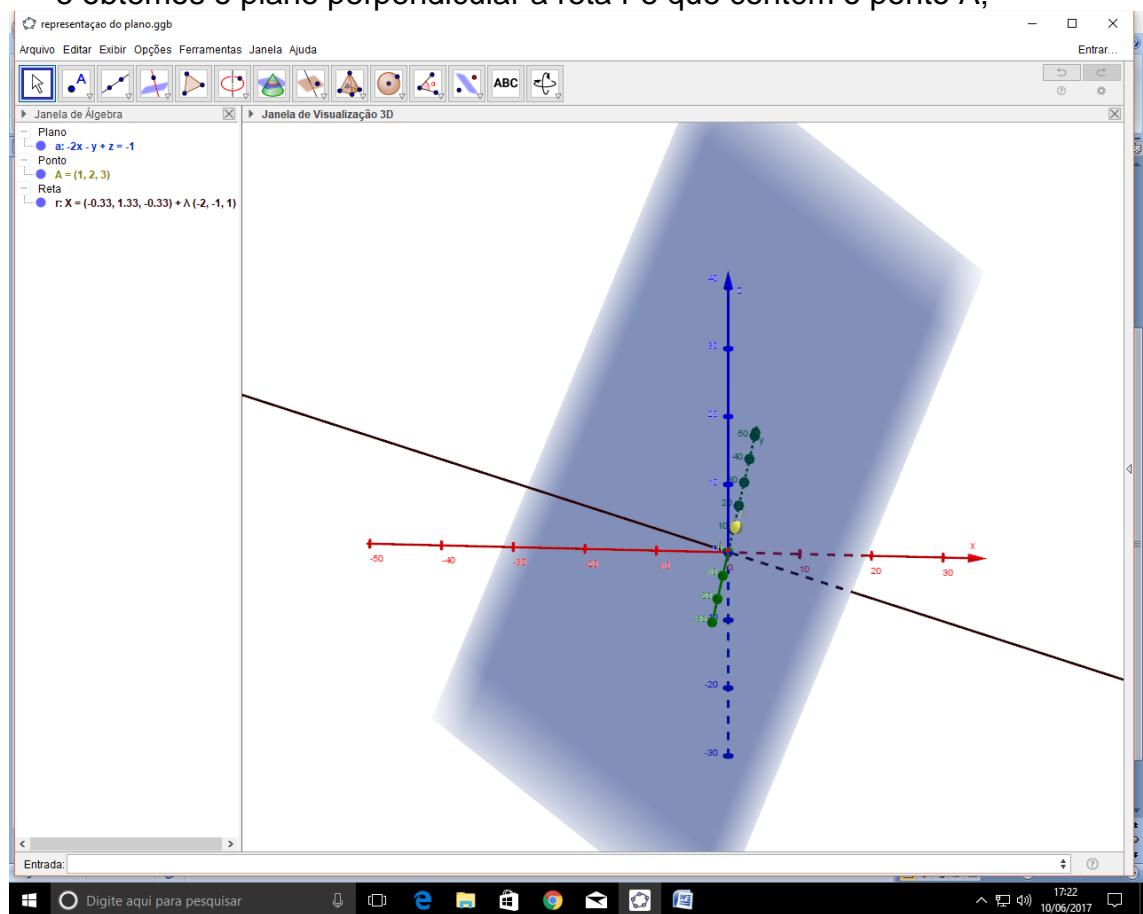


Enunciado –Determine a equação geral do plano perpendicular à reta  $r: x=2y-3, z=-y+1$  e que contém o ponto A(1,2,3):

➤ Inserimos o ponto A e a reta r ;



- Usamos a função de inserir planos por um ponto e reta perpendicular e obtemos o plano perpendicular a reta r e que contém o ponto A;



## Distâncias

### 13. Distância entre dois pontos;

#### 6.1.1 Problema Resolvido

1) Calcular a distância entre os pontos  $P_1(7, 3, 4)$  e  $P_2(1, 0, 6)$ .

```
C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\GAAL - 2017-1\exerciciodistanciaentre dois pontos\bin\Debug\exerciciodistanciaentre dois pontos.exe"
Resolucao do exercicio 6.1.1, pagina 190, livro 'Vetores e Geometria Analitica' de Paulo Winterle.

O programa calcula a distancia entre os pontos A e B.

Digite as coordenadas do ponto A no modelo (x,y,z):
7
3
4

Digite as coordenadas do ponto B no modelo (x,y,z):
1
0
6

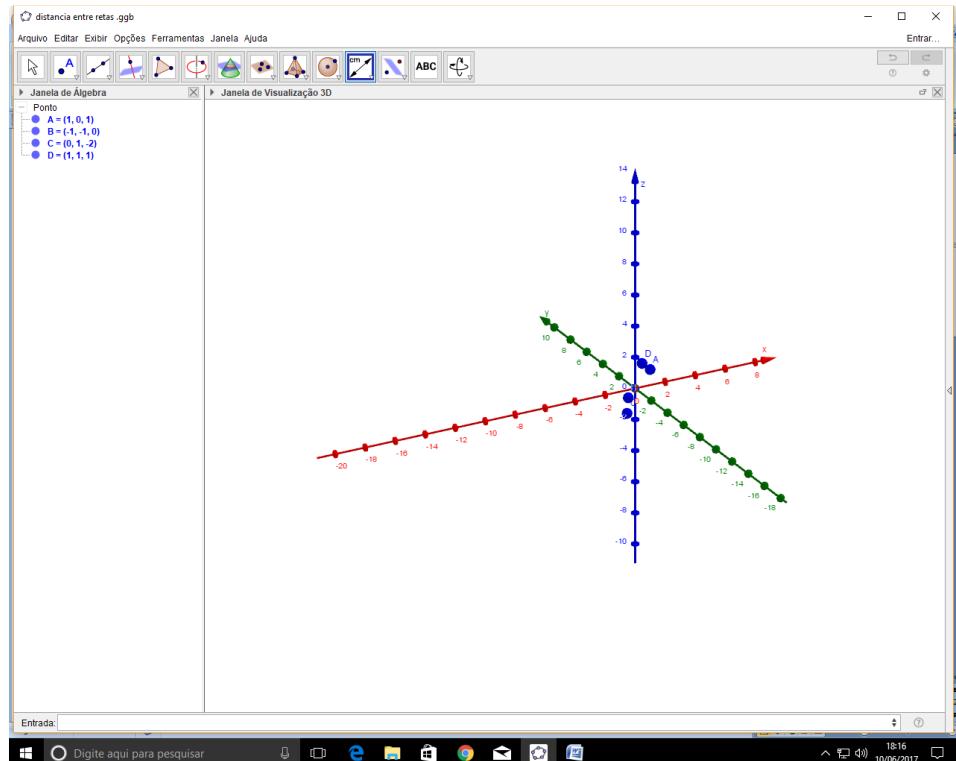
A distancia entre os pontos A e B eh: 7.00

Process returned 0 (0x0)  execution time : 7.802 s
Press any key to continue.
```

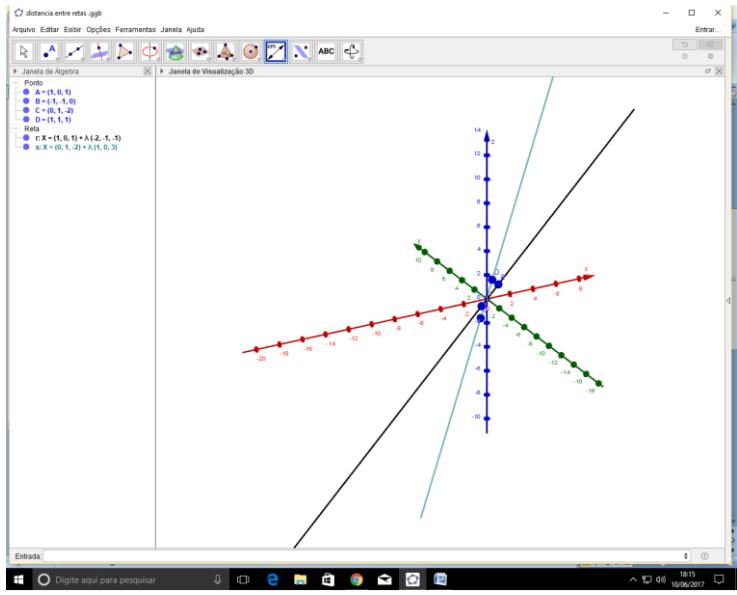
## 14. Distância entre retas;

**Enunciado**-Calcular a distância entre as retas r e s ,em que r passa pelos pontos A(1,0,1) e B(-1,-1,0) e a reta s passa pelos pontos C(0,1,-2) e D(1,1,1):

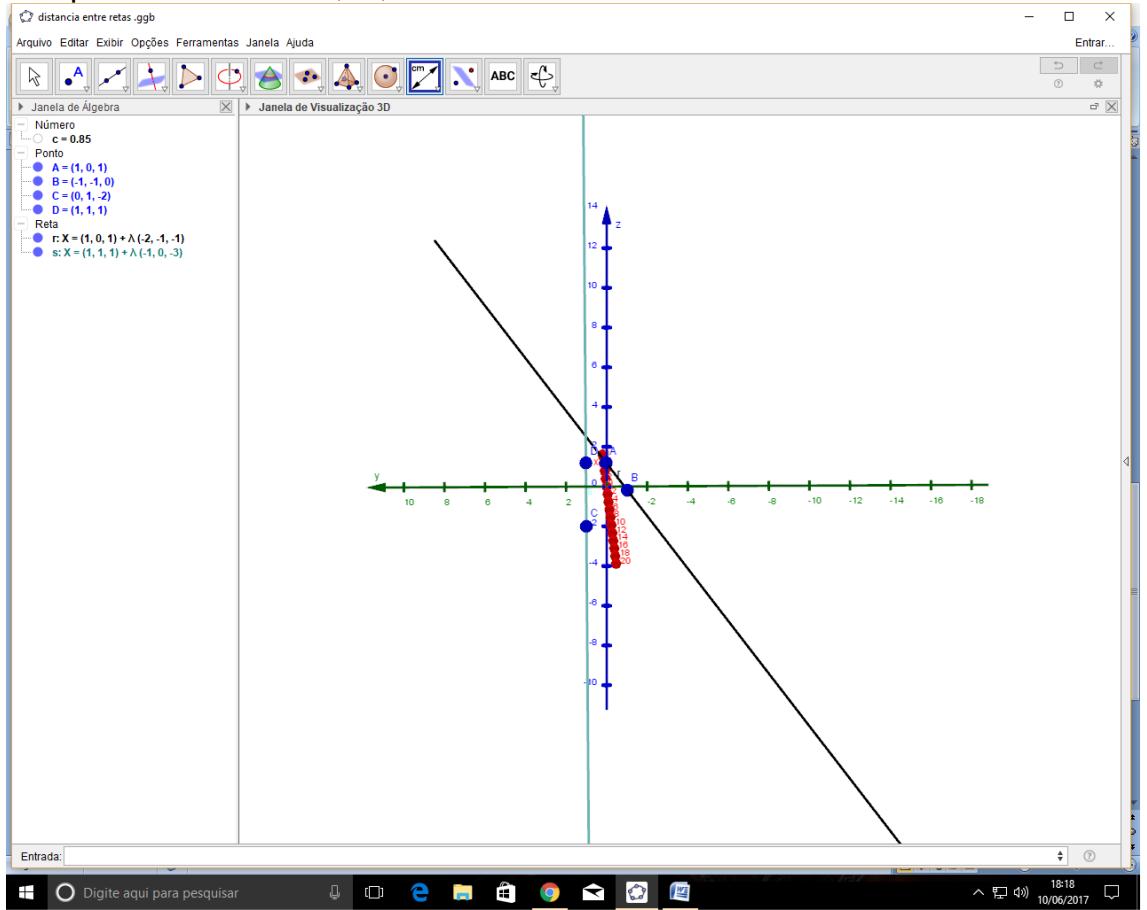
- Inserimos a os pontos A,B,C e D;



- Através da função de retas a partir de dois pontos usamos a os pontos A e B para criar uma reta r e os pontos C e D para criar uma reta s ;

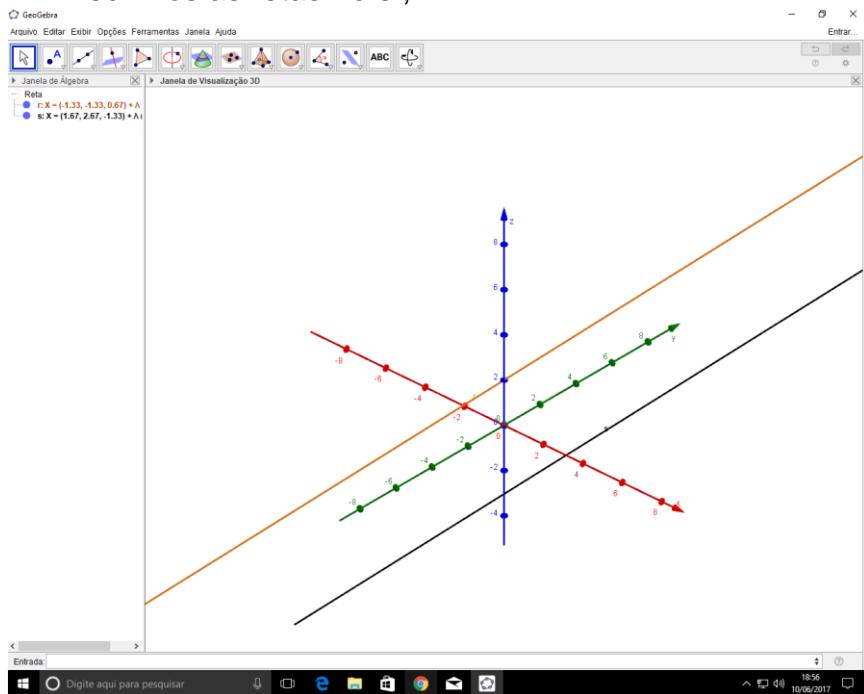


- Usamos a função de distância entre retas e na janela de álgebra aparece o valor da distância entre as retas  $r$  e  $s$  que é de aproximadamente 0,85;

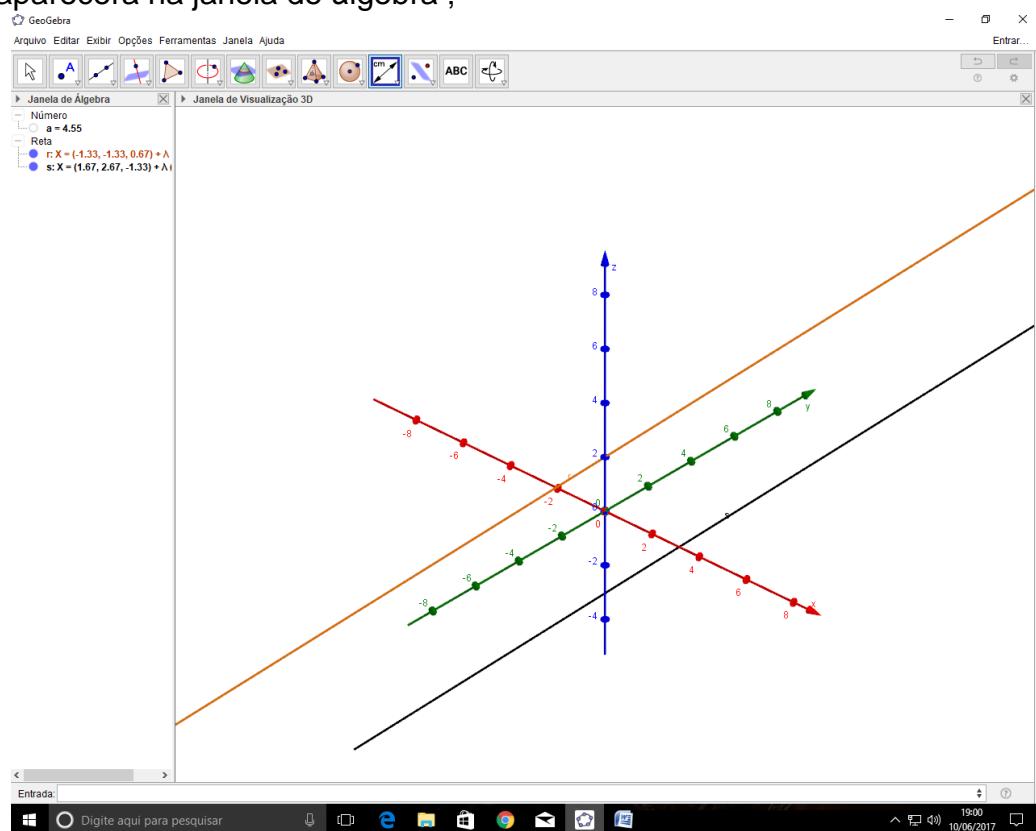


Eunciado-calcular a distância entre as retas  $r: x=y=z-2$  e  $s: y=x+1, z=x-3$ :

➢ Inserimos as retas  $r$  e  $s$ ;



➢ Usamos a função distancia para calcularmos a distância entre as retas  $r$  e  $s$ , que aparecerá na janela de álgebra;



## 15. Distância entre planos;

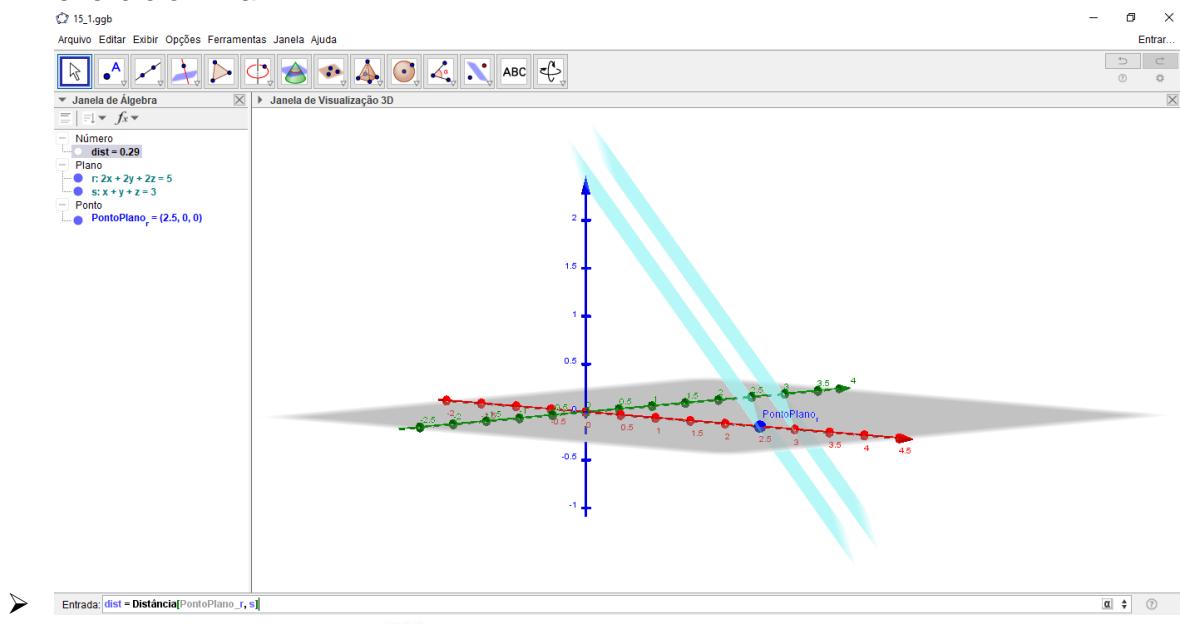
### 15.1.

11) Calcular a distância entre os planos paralelos:

$$a) \pi_1 : 2x + 2y + 2z - 5 = 0 \quad e \quad \pi_2 : x + y + z - 3 = 0$$



- Para resolução deste exercício foi obtido um ponto qualquer que passa por um dos planos (no caso foi utilizado o ponto  $(2.5, 0, 0)$  que passa pelo plano  $r$ ) e em com esse ponto mais o outro plano (aqui chamado de  $s$ ) foi utilizada a função distância do geogebra :
- Distância[ <Ponto>, <Objeto> ] no caso : Distância[PontoPlano\_r,s]
- Exercício retirado do livro: Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, p.203, exercício 11-a



$$\text{➤ Resposta: } \sim 0.29 \text{ ou } \frac{\sqrt{3}}{6}$$

### 15.2.

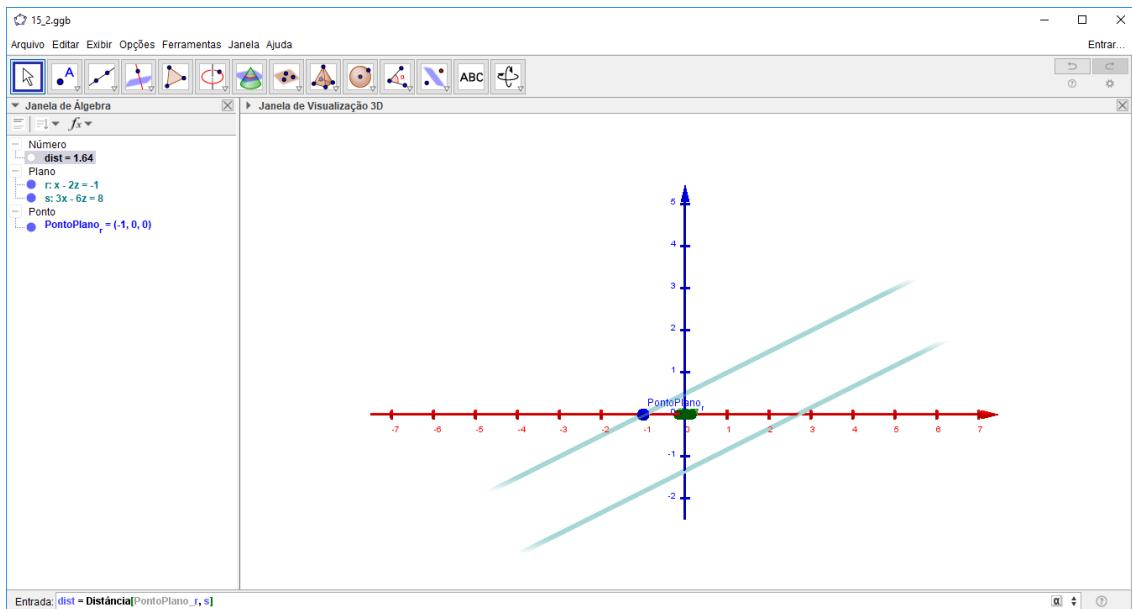
Calcular a distância entre os planos paralelos:

$$b) \pi_1 : x - 2z + 1 = 0 \quad e \quad \pi_2 : 3x - 6z - 8 = 0$$

Para resolução deste exercício foi obtido um ponto qualquer que passa por um dos planos (no caso foi utilizado o ponto  $(-1, 0, 0)$  que passa pelo plano  $r$ ) e em com esse ponto mais o outro plano (aqui chamado de  $s$ ) foi utilizada a função distância do geogebra :

Distância[ <Ponto>, <Objeto> ] no caso: Distância[PontoPlano\_r,s]

Exercício retirado do livro: Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, p.203, exercício 11-b



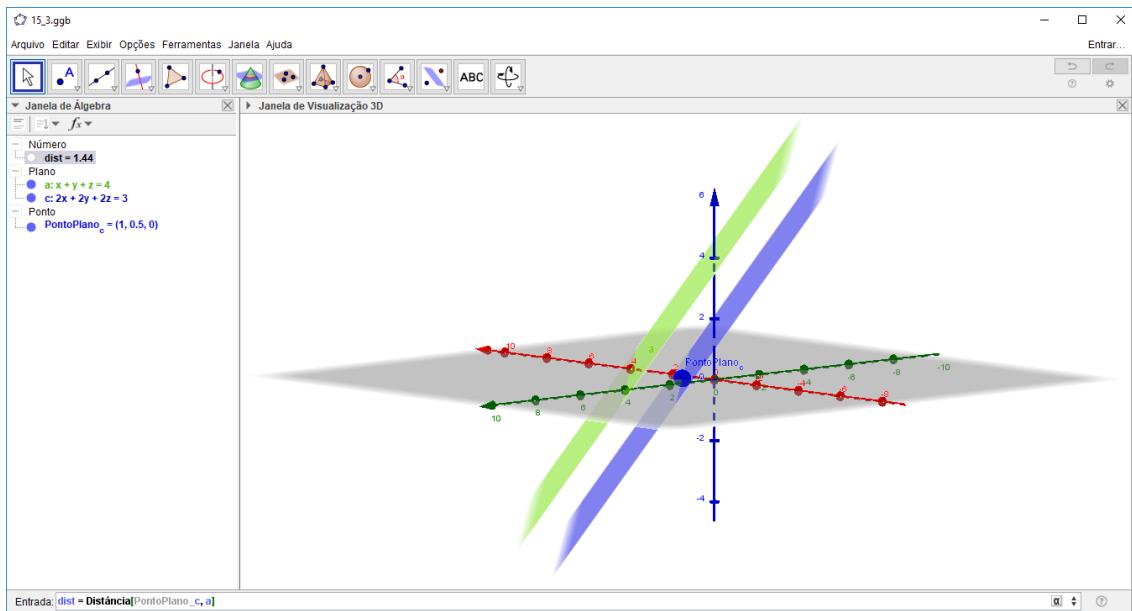
Resposta: ~1.64     $\frac{11}{3\sqrt{5}}$     ou

### 15.3.

- 02.** Os planos  $\alpha_1: x + y + z - 4 = 0$  e  $\alpha_2: 2x + 2y + 2z - 3 = 0$  são paralelos. Determinar a distância entre eles.

Exercício retirado do livro Álgebra Vetorial e Geometria Analítica / Jacil J. Venturi 10.ed página 181

Para resolução deste exercício foi obtido um ponto qualquer que passa por um dos planos (no caso foi utilizado o ponto  $(1,0,5,0)$  que passa pelo plano  $\alpha_1$ ) e em com esse ponto mais o outro plano (aqui chamado de 'a') foi utilizada a função distância do geogebra :



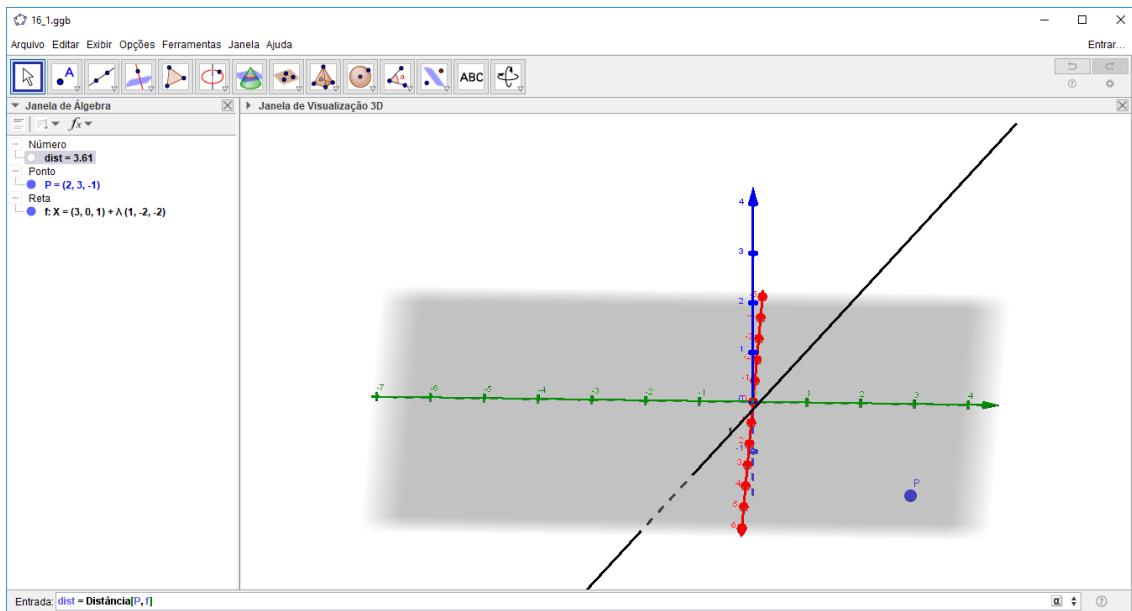
$\text{Distância[ } <\text{Ponto}>, <\text{Objeto}> \text{ ]}$  no caso:  $\text{Distância[PointoPlano\_c,a]}$ .

Resposta:  $\sim 1,44$  ou  $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

## 16. Distância entre ponto e reta;

### 16.1.

- *Achar a distância do ponto  $P$  à reta  $r$*
- 3)  $P(2, 3, -1)$      $r : x = 3 + t$      $y = -2t$      $z = 1 - 2t$
- Para resolver o exercício primeiramente deve-se obter a partir equação da reta um ponto e um vetor diretor, uma das possibilidades é o ponto  $(3,0,1)$  e o vetor diretor  $(1,-2,-2)$ .
- Sendo assim adiciona-se o ponto dado  $P=(2,3,-1)$  e a reta com a entrada “ $f=\text{Reta}[(3, 0, 1), \text{Vetor}[(1, -2, -2)]]$ ”.
- Após isso é só usar a função distância:  $\text{Distância}[P, f]$
- Exercício retirado do livro: Vetores e Geometria Analítica - Paulo Winterle, p.157, exercício 3



➤ Resultado:  $\frac{\sqrt{117}}{3} \sim 3.61$  ou

## 16.2.

*Achar a distância do ponto  $P$  à reta  $r$*

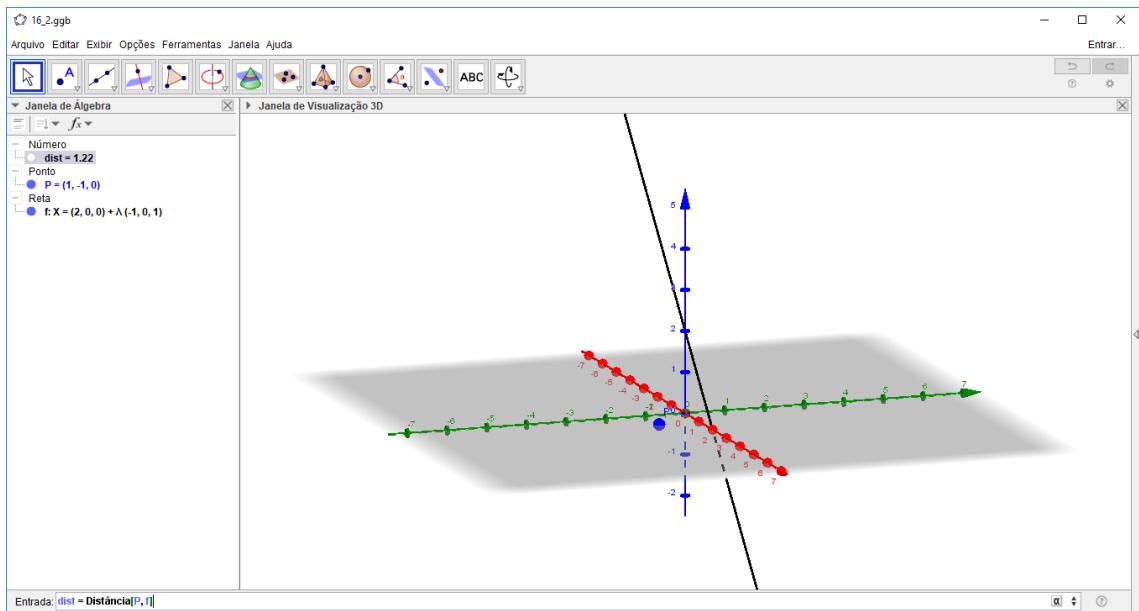
$$4) P(1, -1, 0) \quad r : x = 2 - t \quad y = 0 \quad z = t$$

Para resolver o exercício primeiramente deve-se obter a partir equação da reta um ponto e um vetor diretor, uma das possibilidades é o ponto  $(2,0,0)$  e o vetor diretor  $(-1,0,1)$ .

Sendo assim adiciona-se o ponto dado  $P=(1,-1,0)$  e a reta com a entrada “ $f=Reta[(2,0,0), Vetor[(-1,0,1)]]$ ”.

Após isso é só usar a função distância: Distância[P, f]

Exercício retirado do livro: Vetores e Geometria Analítica - Paulo Winterle, p.157, exercício 3



Resposta:  $\sim 1,22$      $\frac{\sqrt{6}}{2}$     ou

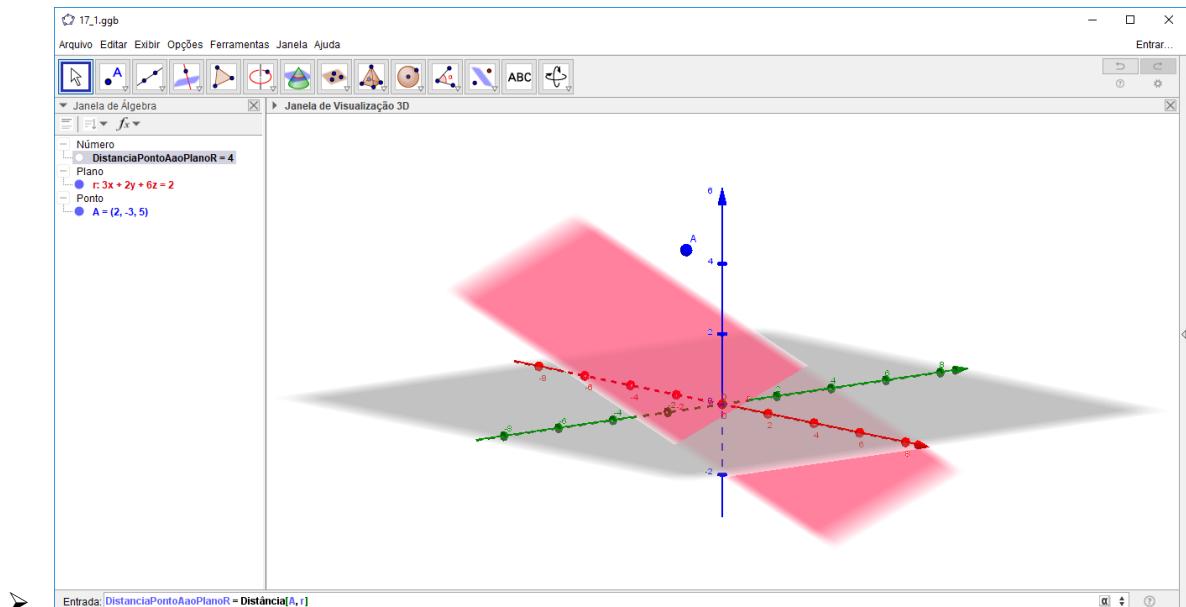
## 17. Distância entre ponto e plano;

### 17.1.

7) Achar a distância do ponto  $P(2, -3, 5)$  ao plano

$$\pi: 3x + 2y + 6z - 2 = 0.$$

- Para resolver o exercício após inserir o ponto e o plano utiliza-se a função distância do geogebra: `Distância[PontoPlano_r,s]`
- Exercício retirado do livro: Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, p.202, exercício 7



➤ Resposta: 4

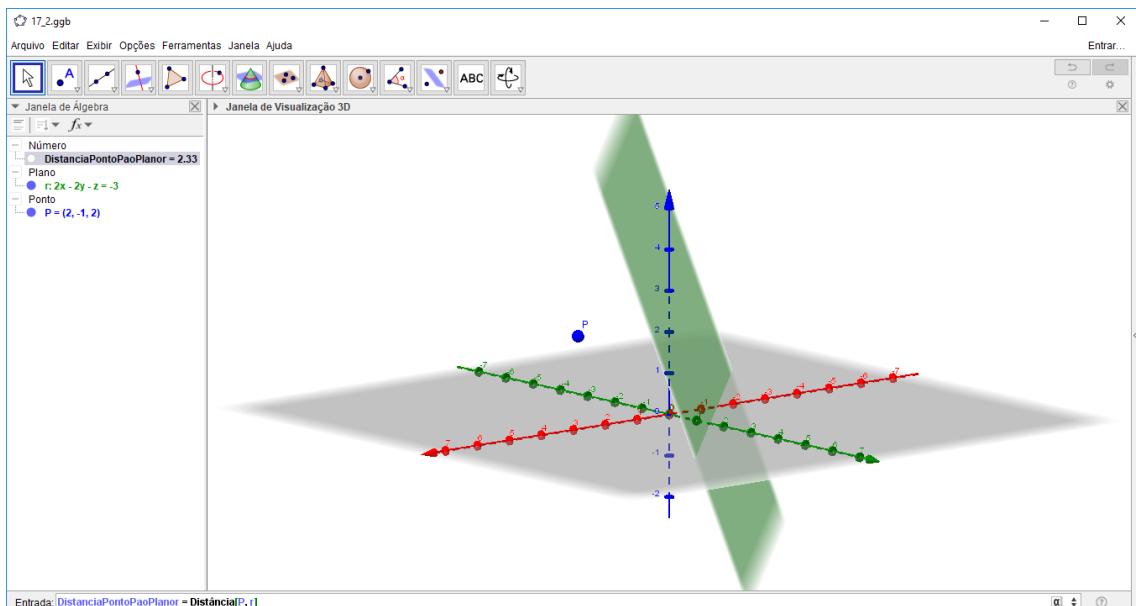
## 17.2.

6) Determinar a distância do ponto  $P(2, -1, 2)$  a cada um dos planos:

a)  $\pi: 2x - 2y - z + 3 = 0$

Para resolver o exercício após inserir o ponto e o plano utiliza-se a função distancia do geogebra: Distância[PontoPlano\_r,s]

Exercício retirado do livro: Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, p.202, exercício 6-a

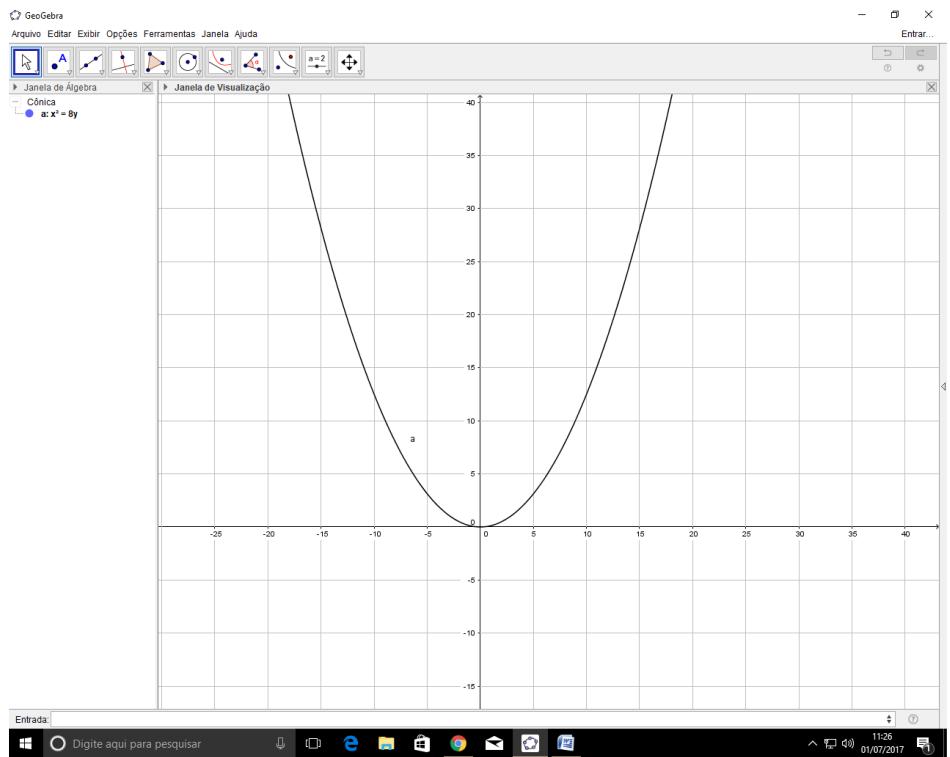


Resposta: ~2,33 ou 7/3

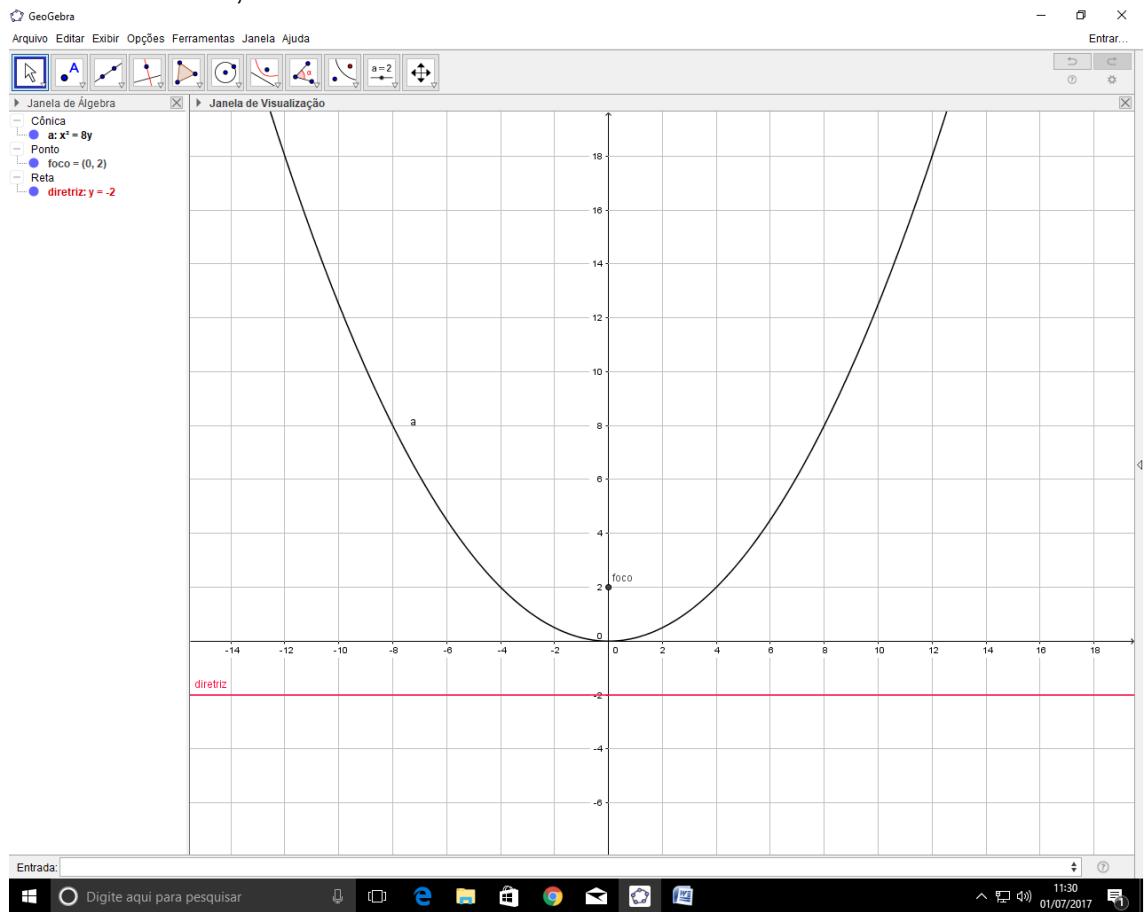
## 18. Parábola;

Enunciado-determinar o foco e a equação da diretriz da parábola  $X^2=8y$ :

➤ Inserimos a equação da parábola .

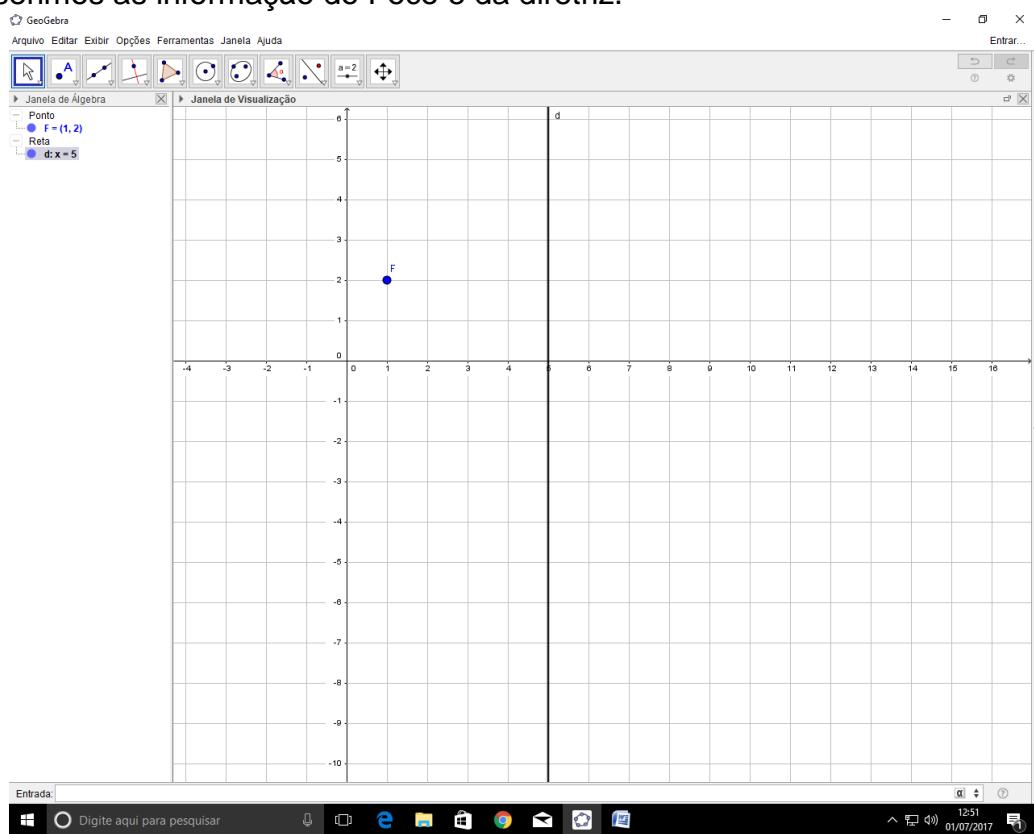


- Usamos as funções foco e diretriz oferecidas pelo programa para calcularmos ,ambos.

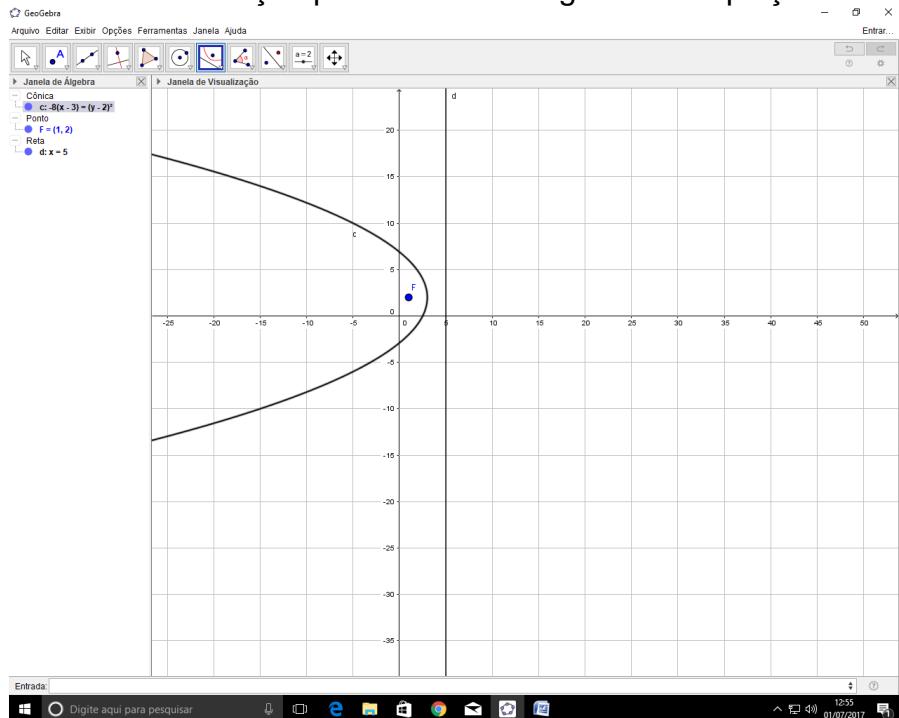


Enunciado-Determinar a equação da parábola de foco em  $F(1,2)$ , sendo  $x=5$  a equação da diretriz.

➤ Inserimos as informação do Foco e da diretriz.



➤ Usamos a função parábola e conseguimos a equação .



Obtemos a equação da parábola  $-8(x-3)=(y-2)^2$ .

## 19. Elipse

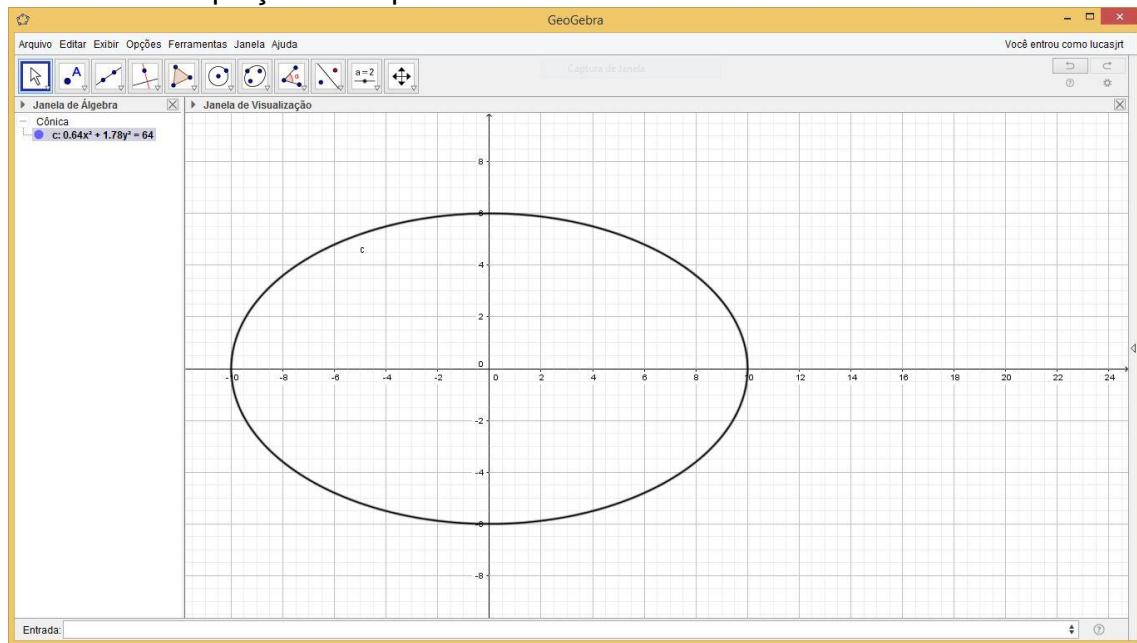
### 19.1.

- Dado o enunciado do livro de Alfredo Steinbruch, página 241:

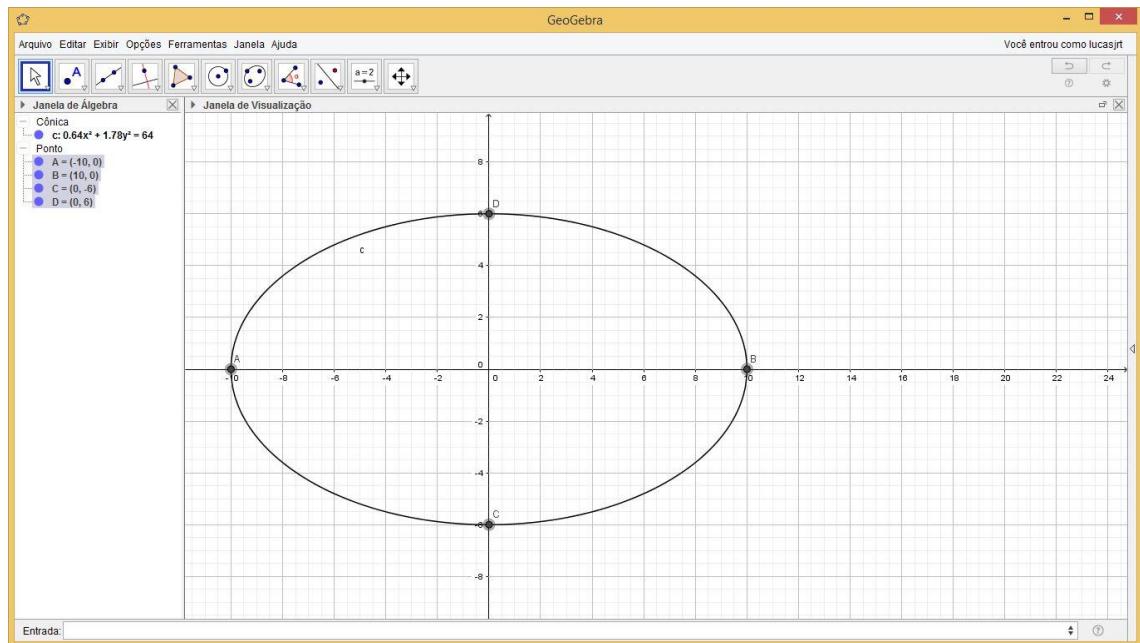
Em cada um dos problemas 1 a 8, determinar os vértices  $A_1$  e  $A_2$ , os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

$$1) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

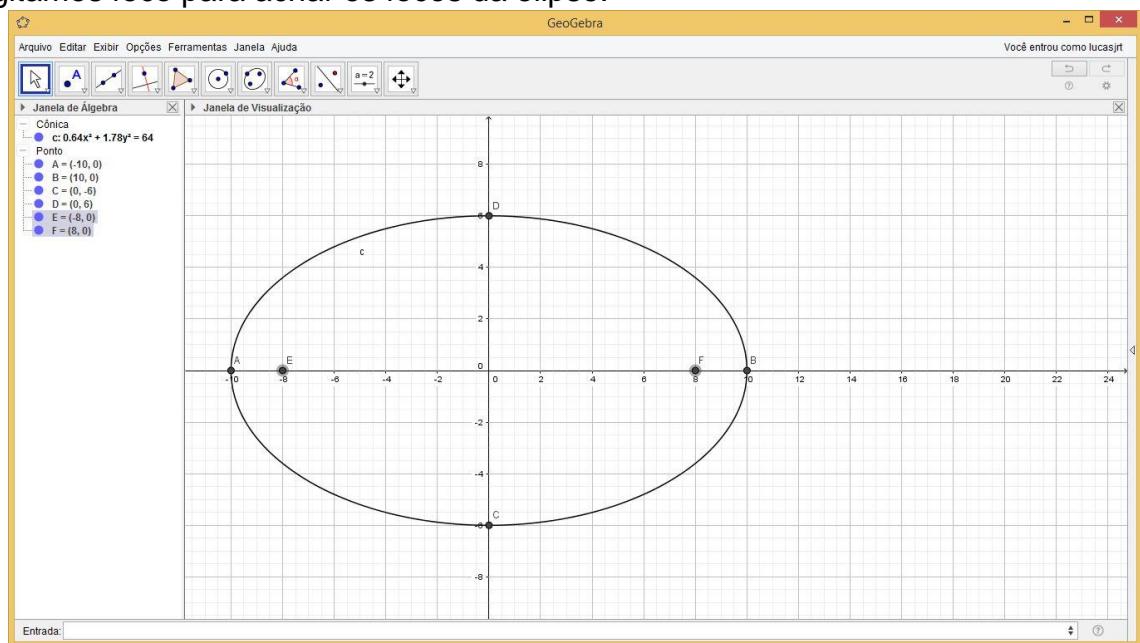
- Inserimos a equação da elipse:



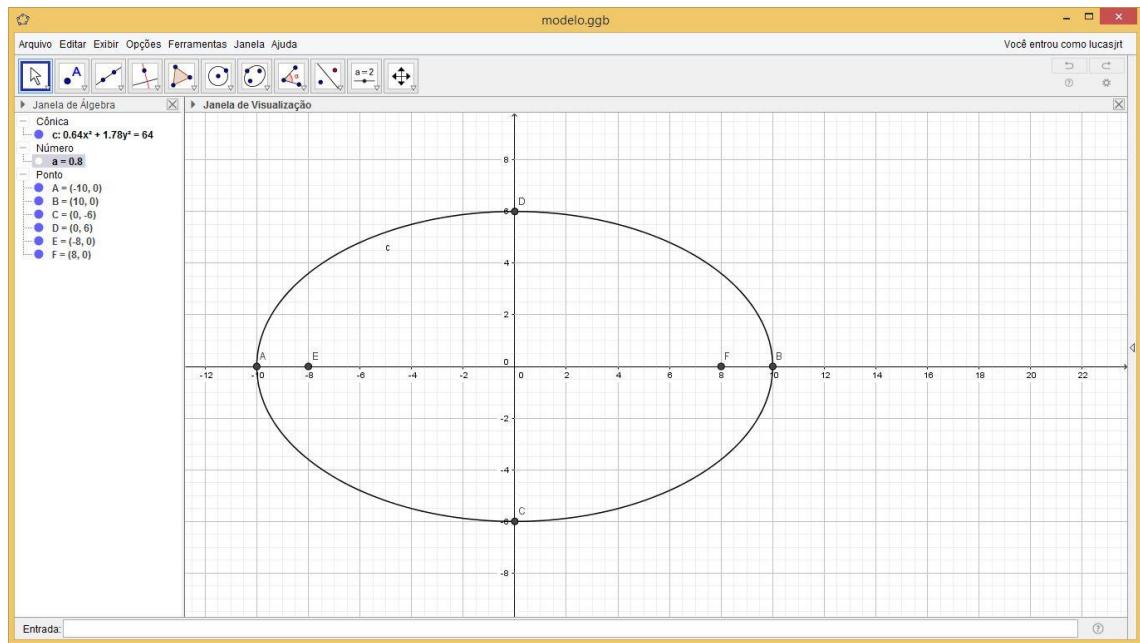
- Digitamos vértice para achar os quatro vértices da elipse:



➤ Digitamos foco para achar os focos da elipse:



➤ Do mesmo modo também podemos achar a excentricidade da elipse:

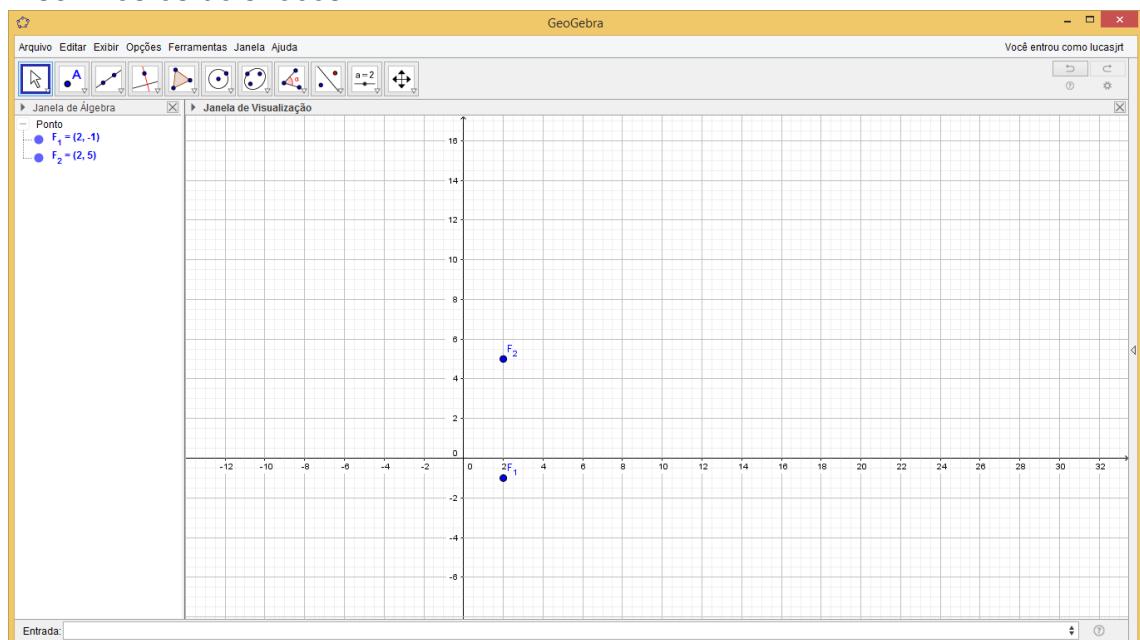


## 19.2.

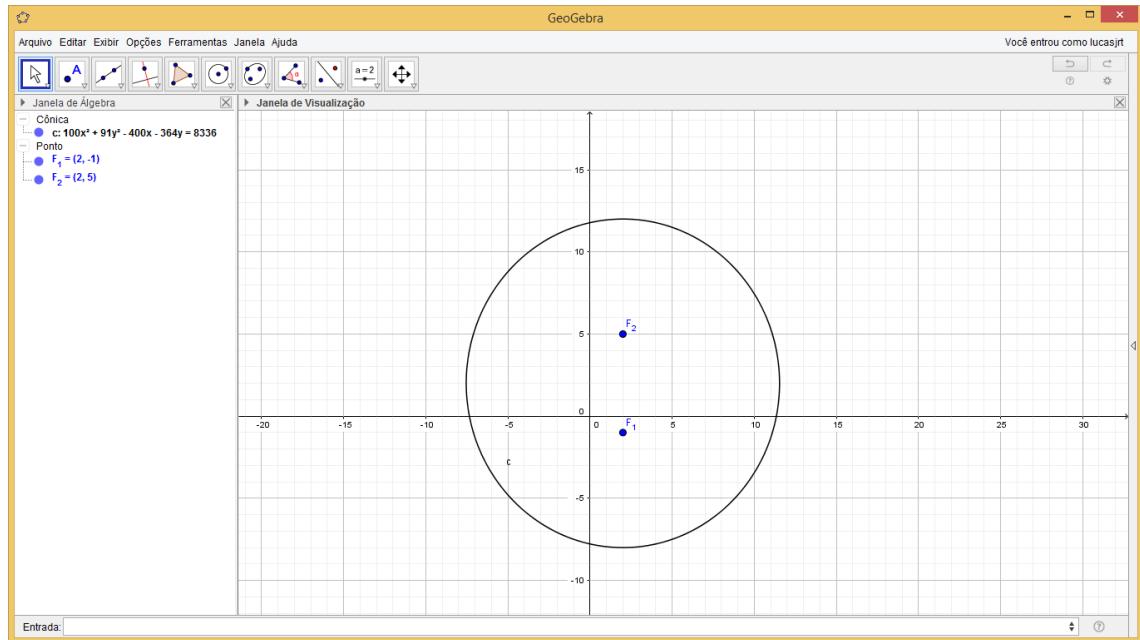
- Dado o enunciado do livro de Alfredo Steinbruch, página 242:

16) eixo maior mede 10 e focos  $F_1(2, -1)$  e  $F_2(2, 5)$ .

- Inserimos os dois focos:



- Inserimos o comando “Elipse” no Geogebra e entramos com dois focos e o segmento maior, e assim obtemos a elipse:



## 20. Hipérbole

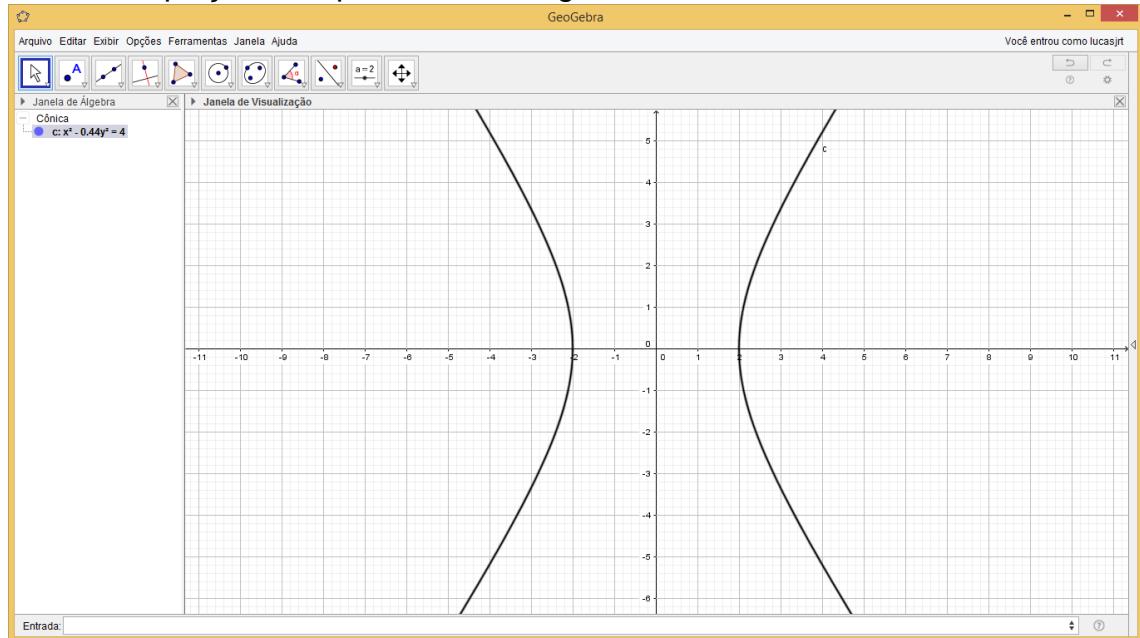
### 20.1.

- Dado o seguinte enunciado do livro “Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle”:

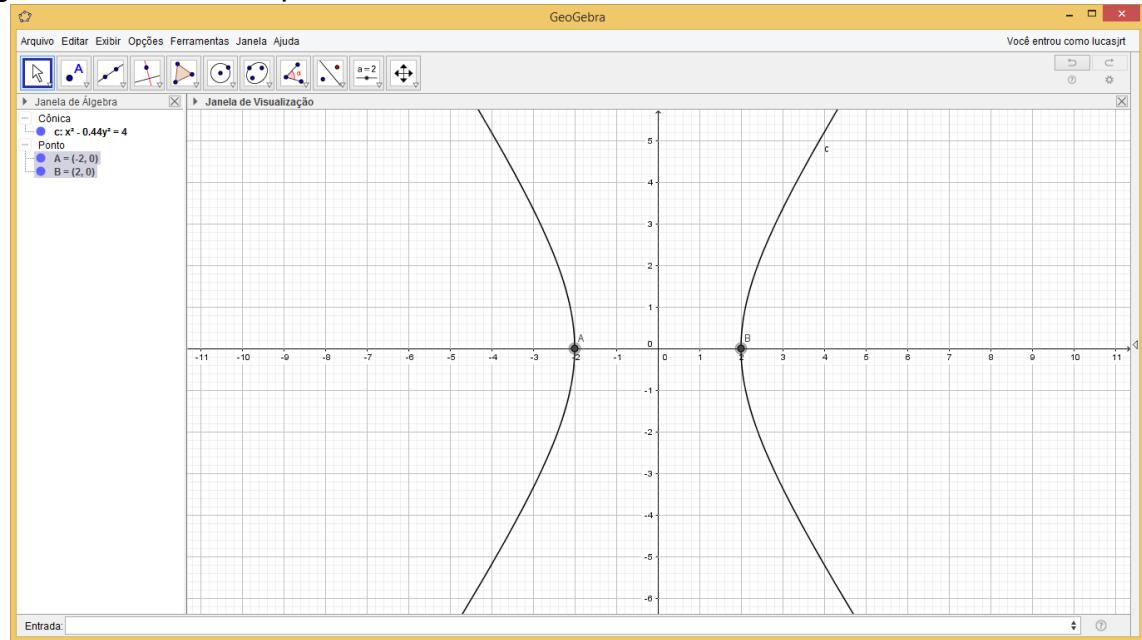
*Em cada um dos problemas de 1 a 12, esboçar o gráfico e determinar os vértices, os focos, a excentricidade e equações das assíntotas das hipérboles dadas.*

$$1) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

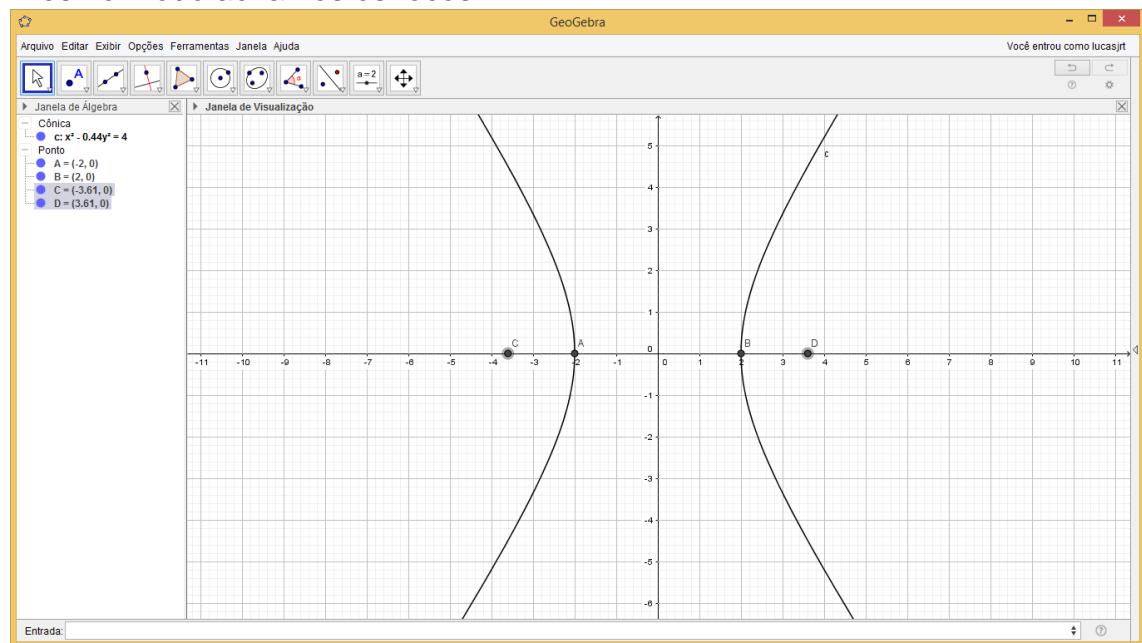
- Inserimos a equação da hipérbole no Geogebra:



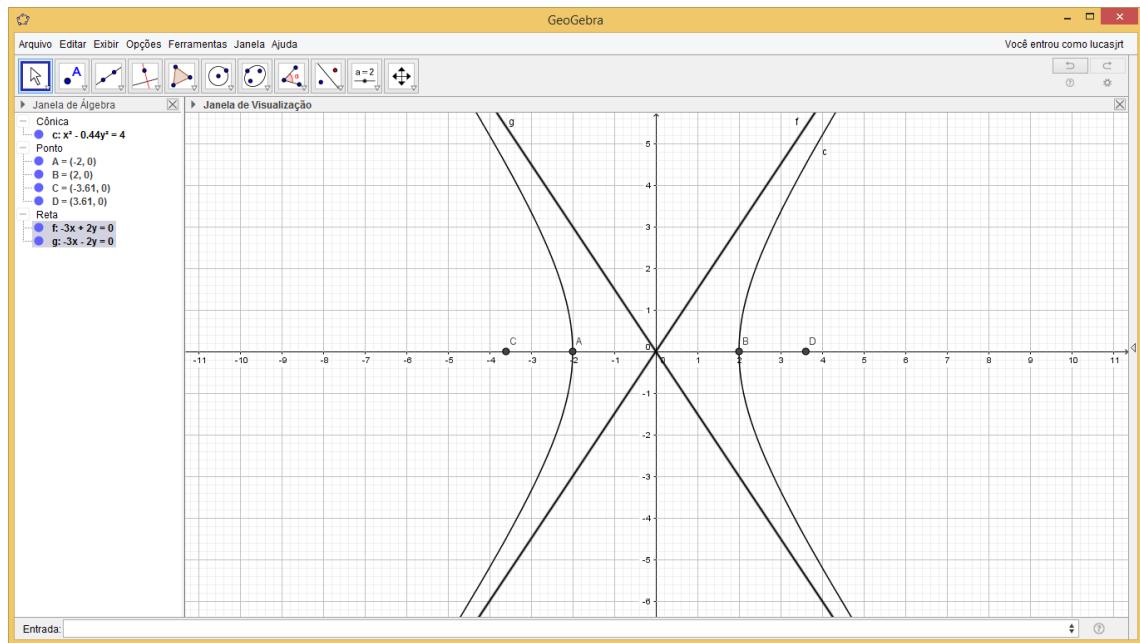
- Digitamos o comando para achar os vértices:



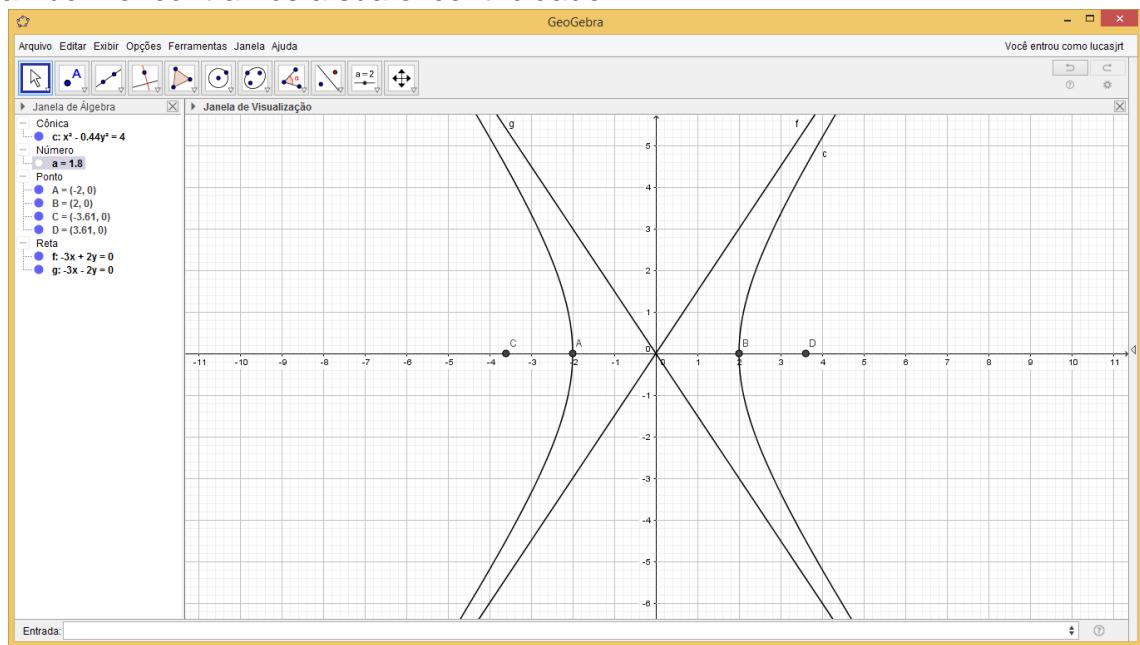
- Do mesmo modo achamos os focos:



- Achamos também as assíntotas:

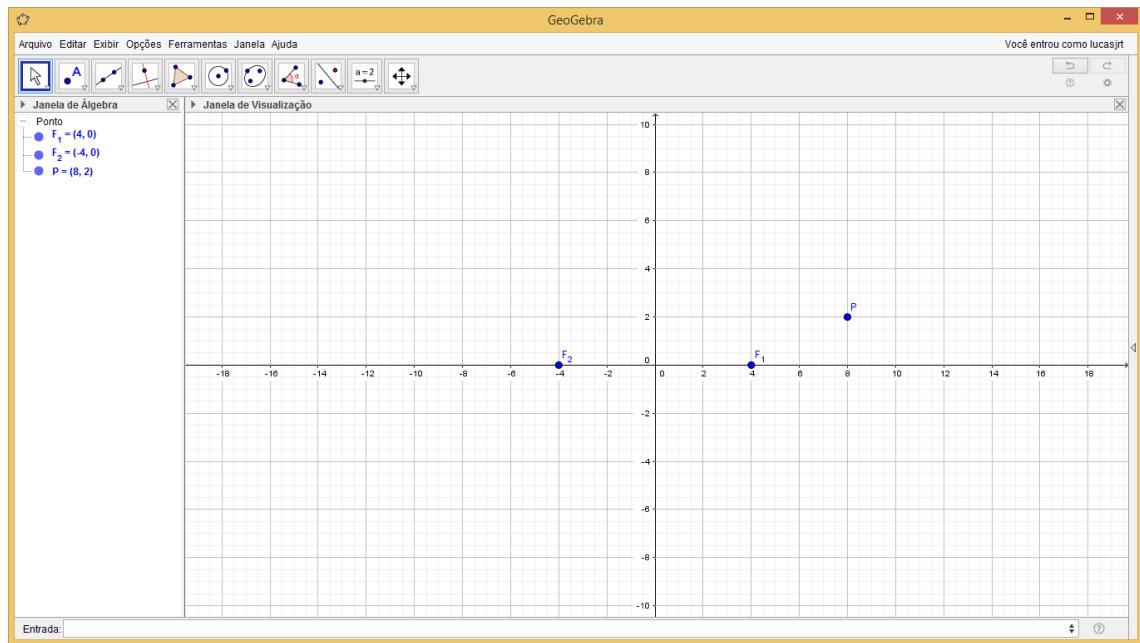


➤ E também encontramos a sua excentricidade:

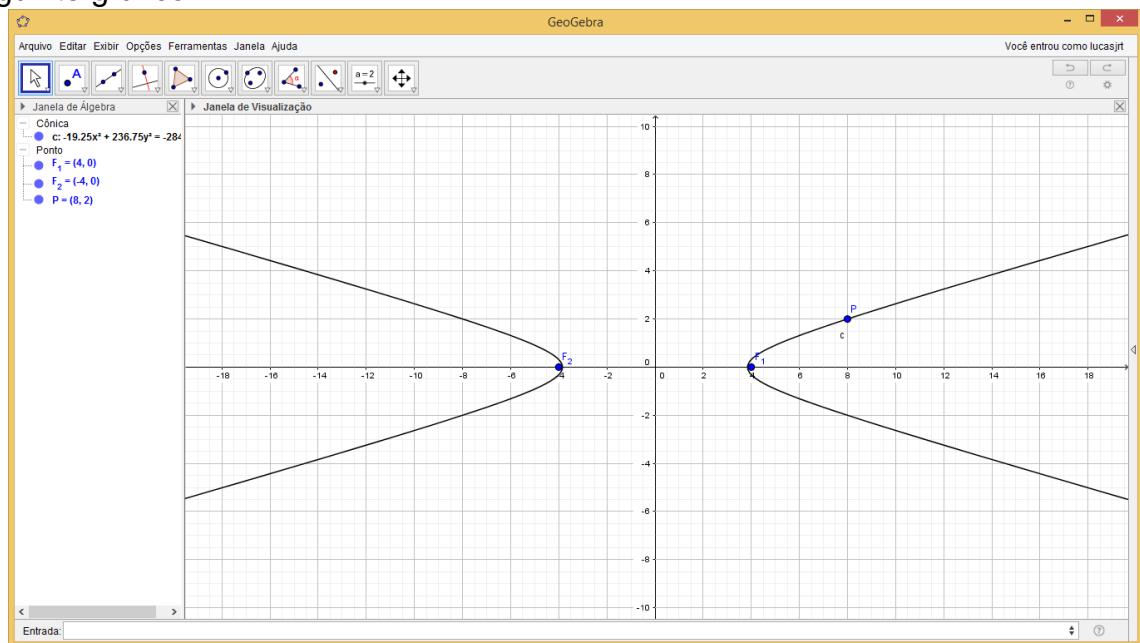


## 20.2.

- Dado o enunciado do livro “Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle”:
- 23) vértices  $A(\pm 4, 0)$  e passando por  $P(8,2)$ ;
- Inserimos os dados fornecidos pelo enunciado:



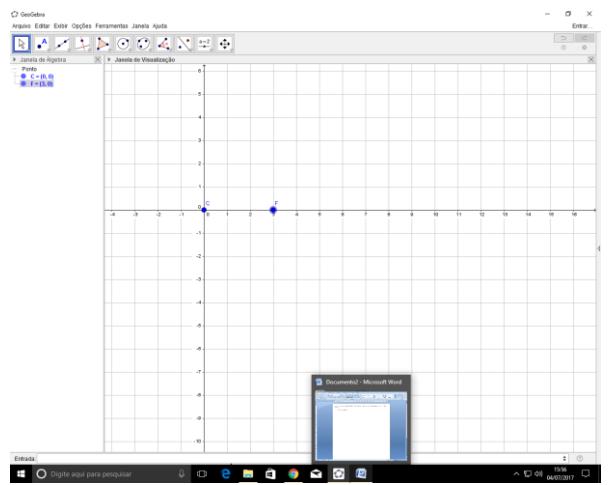
- Digitamos o comando para criar uma hipérbole por 3 pontos e obtemos o seguinte gráfico:



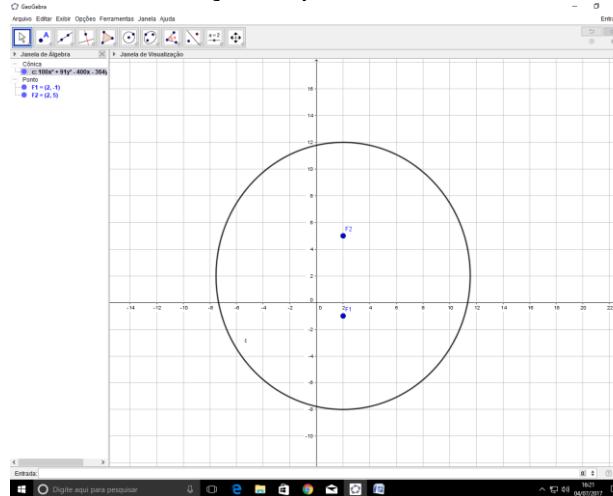
## 21. Representação

Enunciado-determine a equação da elipse que possui focos em F<sub>1</sub>(2,-1) e F<sub>2</sub>(2,5) e o eixo maior mede 10.

- Inserimos os dados ;

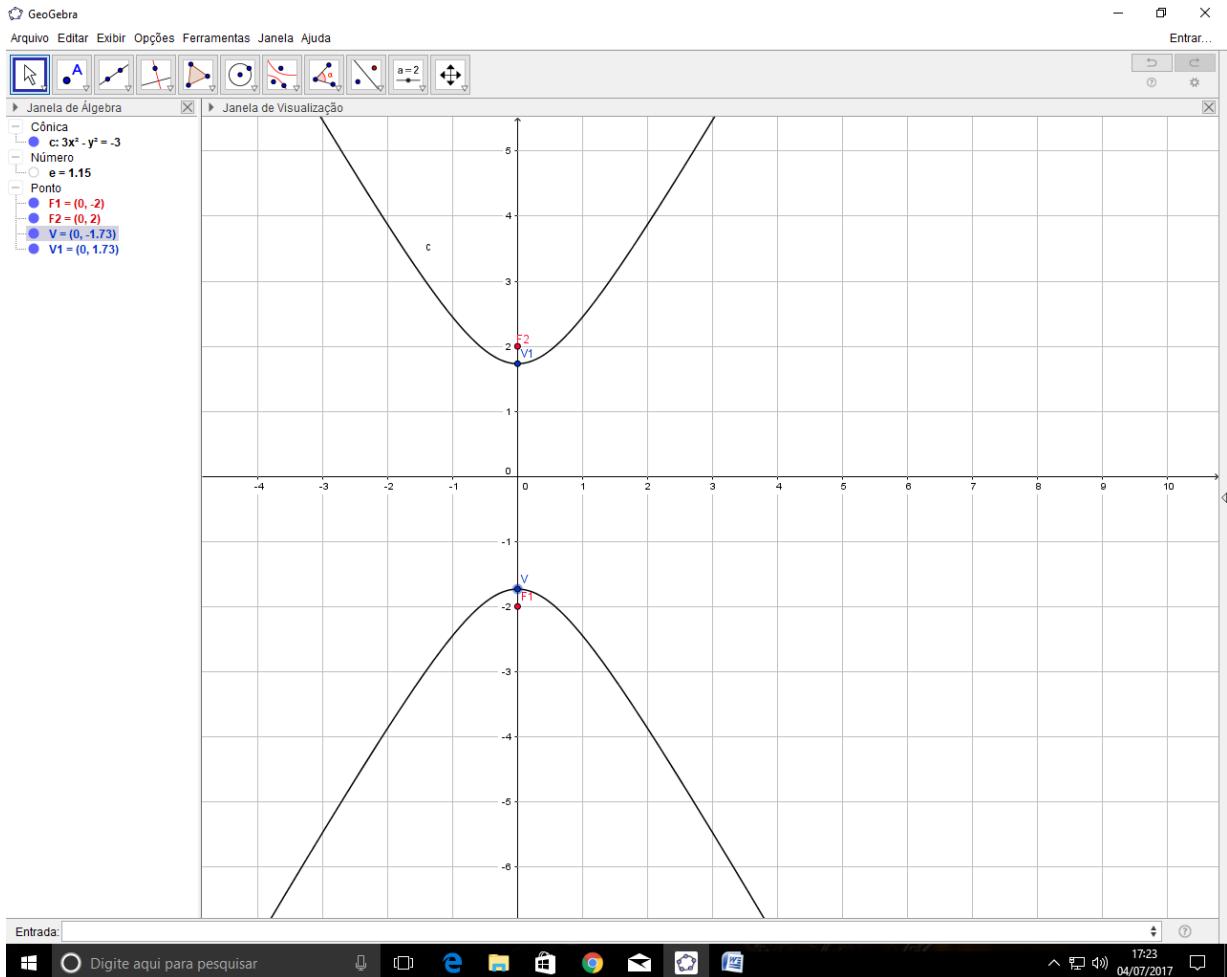


➤ Usamos a função elipse e recebemos a formula;



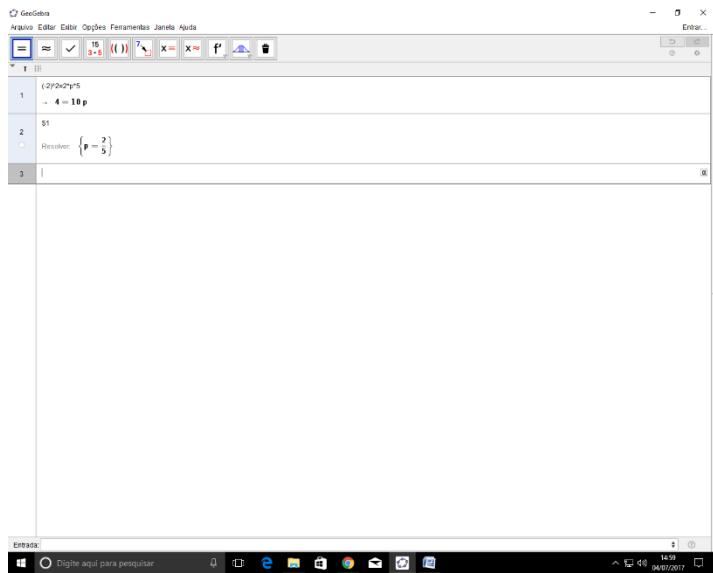
Enunciado-determine os vértices ,os focos e a excentricidade da hipérbole de equação  $3x^2-y^2+3=0$ ;

- Inserimos a equação e usamos as funções para achar cada dado pedido;

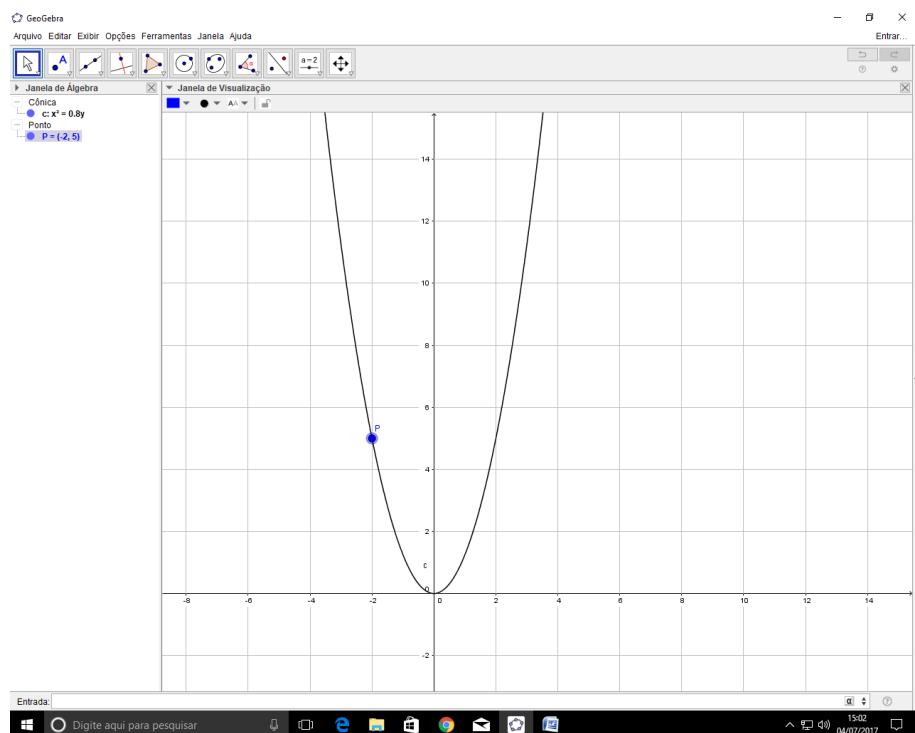


Enunciado-Determine a equação de cada uma das parábolas ,sabendo que o vértice é  $v(0,0)$  e passa pelo ponto  $P(-2,5)$  concavidade para cima.

- A equação da parábola é do tipo  $x^2=2py$  ,portanto basta substituir P .



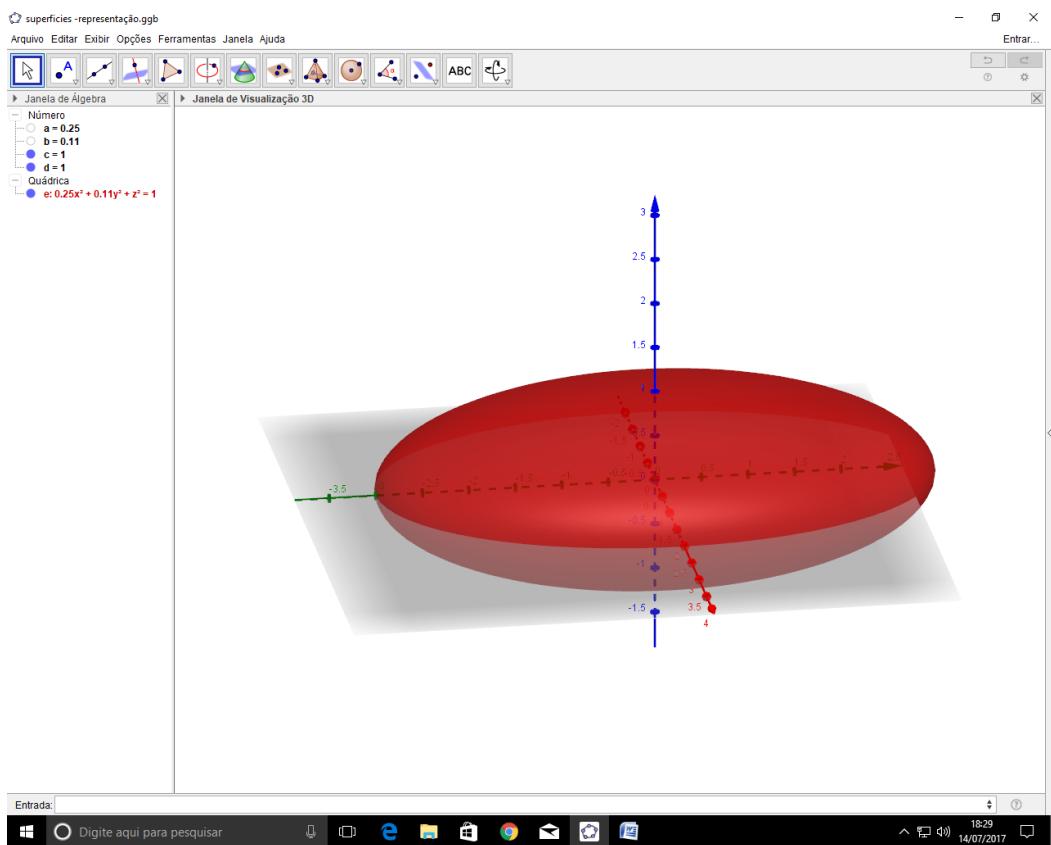
- Obtemos o valor de  $p$  e o substituímos da equação geral , que fica  $x^2=2(2/5)*y$ .



## Superfície 22. Representação;

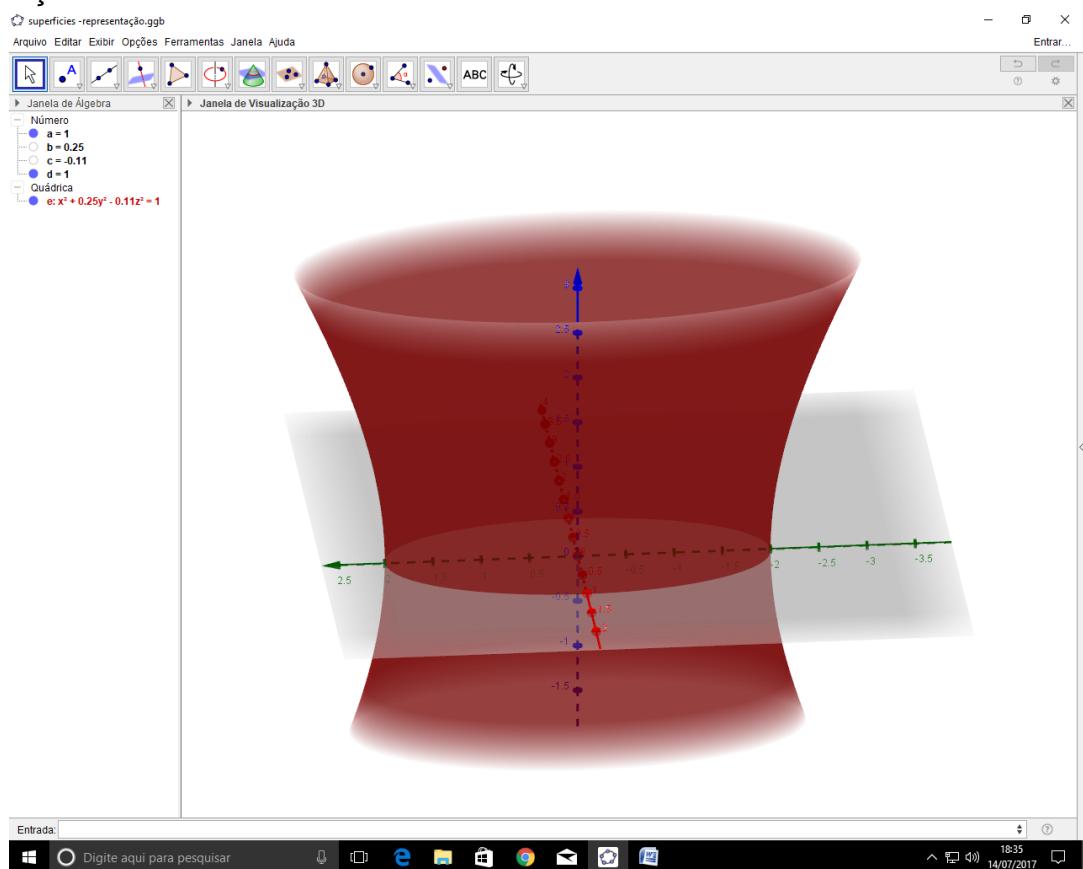
Representação de algumas superfícies de equações específicas.

- Elipsóide
- Equação : $x^2/4+y^2/9+z^2/1=1$



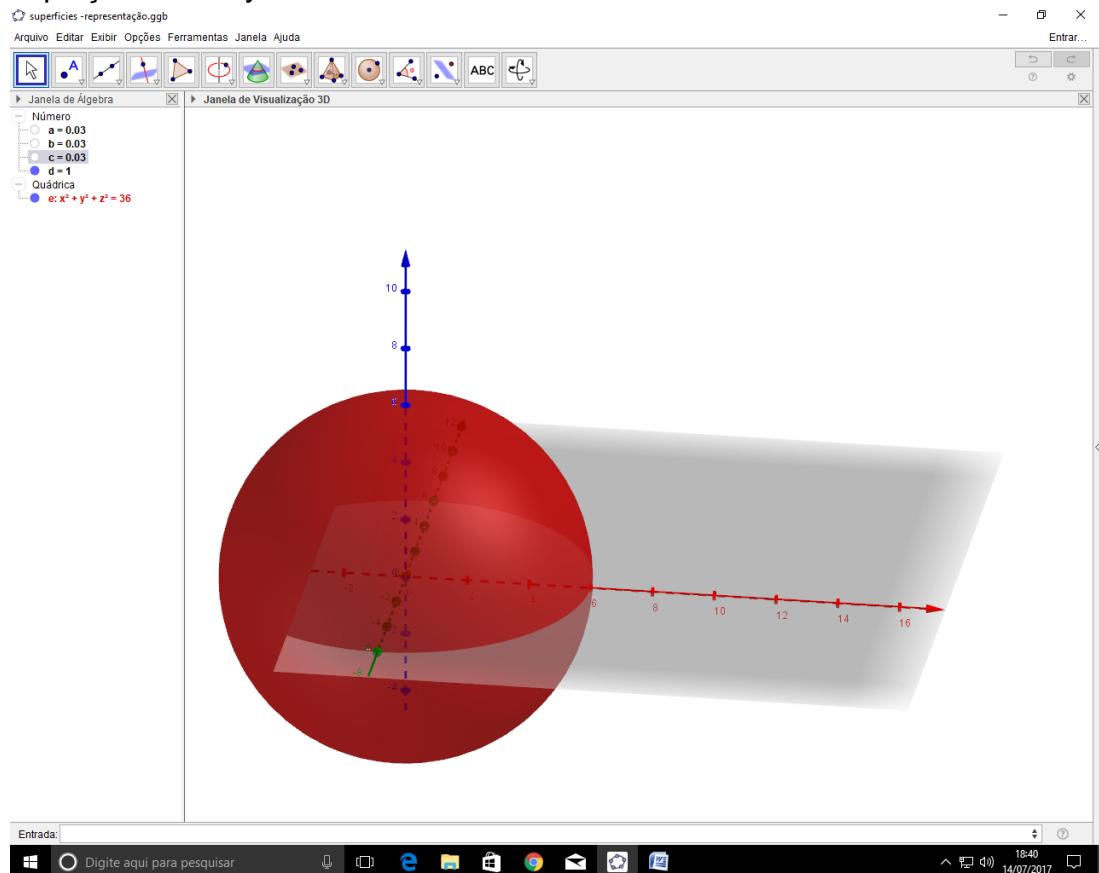
## ➤ Hiperboloide de um folha

Equação : $x^2/1+Y^2/4-z^2/9=1$



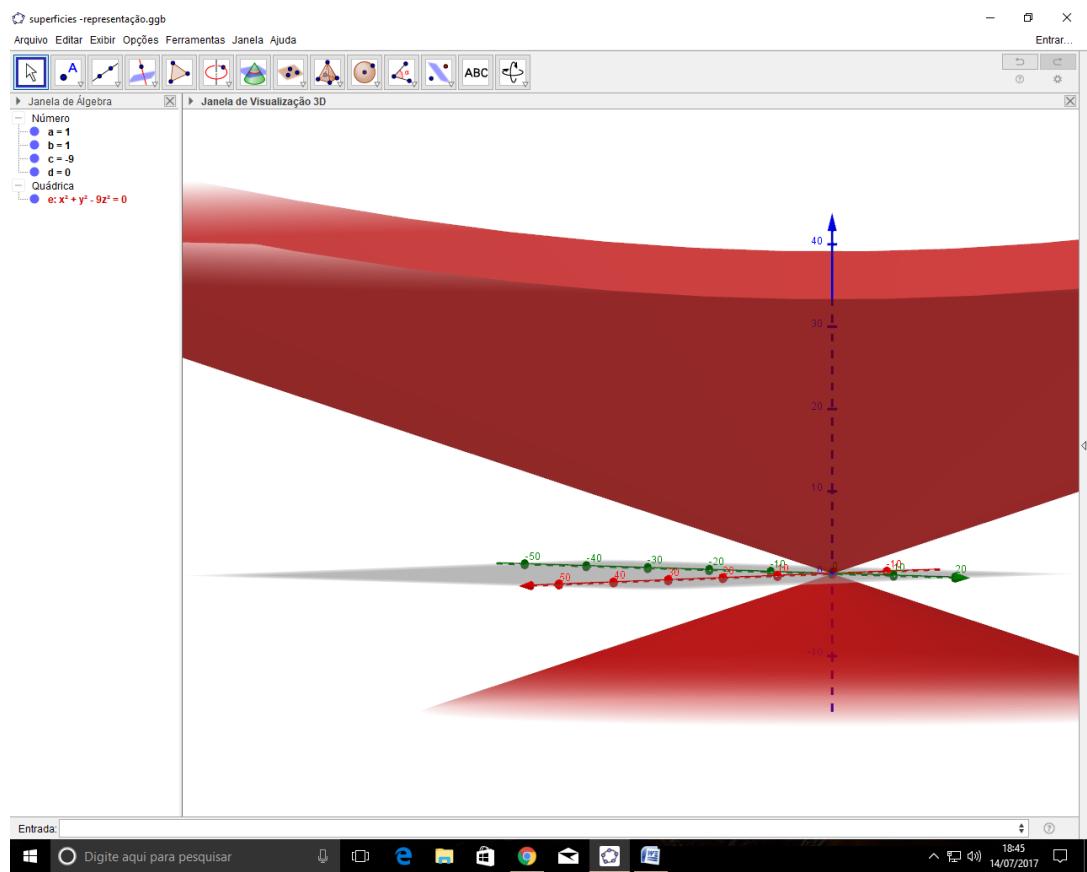
➤ Superfície esférica :

$$\text{Equação : } x^2/36 + y^2/36 + z^2/36 = 1$$

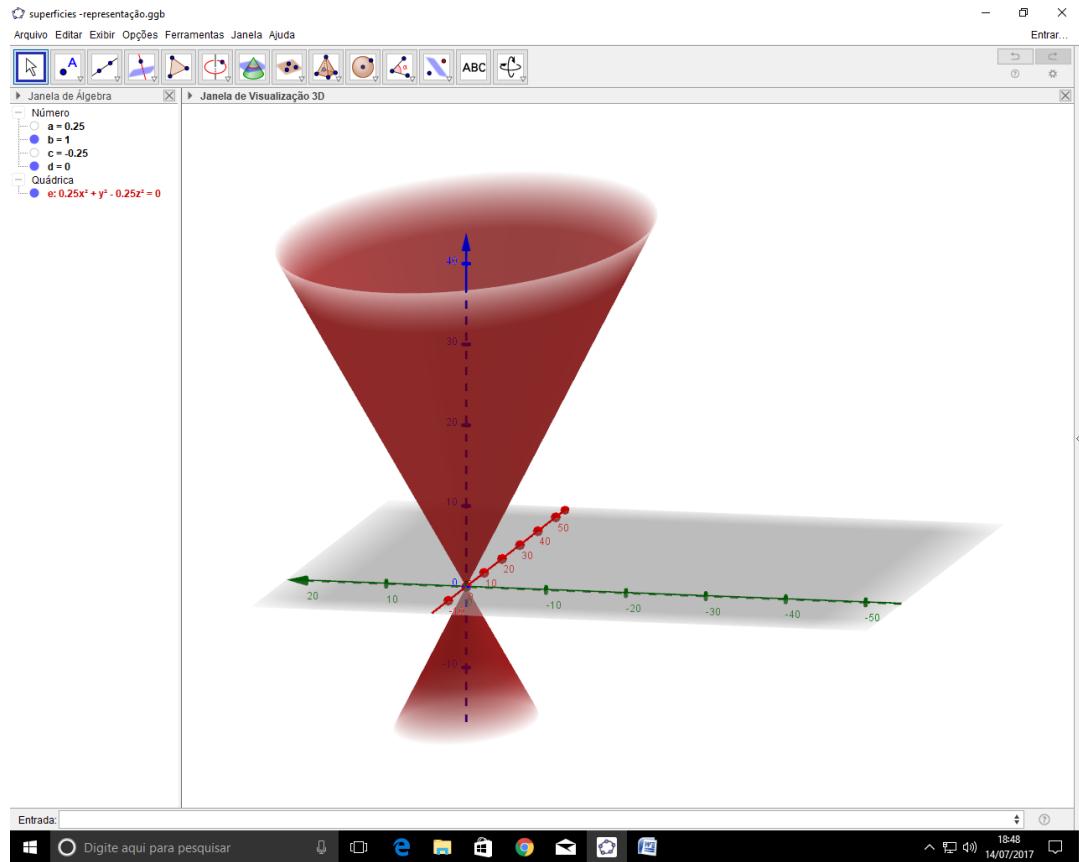


➤ Parabolóide circular:

$$\text{Equação : } x^2 + y^2 = 9z$$



➤ Superfície cônica :  
Equação:  $x^2/4 + y^2/4 - z^2/4 = 0$



## Matrizes

### 23. Operações;

- O programa desenvolvido em C consegue calcular a soma, subtração e multiplicação de matrizes e também a multiplicação de matrizes por algum numero real.

1. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = [2 \quad -1]$$

Encontre:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

- Exercício retirado do livro: Álgebra linear / José Boldrini – 3.ed pagina 11.

- a)  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

```
Este programa realiza as seguintes operacoes com matrizes:  
1 - Adicao de matrizes  
2 - Subtracao de matrizes  
3 - Multiplicacao entre matrizes  
4 - Multiplicacao de matriz por numero real  
0 - SAIR
```

```
*****  
Digite o numero correspondente ao que deseja fazer: 1
```

```
O programa ira somar uma matriz A com outra B (A+B)  
Digite o tamanho das matrizes. (Ex: 2 3 equivale a matriz 2X3)  
2 3  
Digite a matriz A:  
A[1][1]1  
A[1][2]2  
A[1][3]3  
A[2][1]2  
A[2][2]1  
A[2][3]-1  
Digite a matriz B:  
A[1][1]-2  
A[1][2]0  
A[1][3]1  
A[2][1]3  
A[2][2]0  
A[2][3]1
```

```
Matriz A: | 1.00 2.00 3.00 |
           | 2.00 1.00 -1.00 |
Matriz B: | -2.00 0.00 1.00 |
           | 3.00 0.00 1.00 |
A+B :| -1.00 2.00 4.00 |
      | 5.00 1.00 0.00 |

Digite ENTER para retornar ao menu principal.....
```

- O programa soma as duas matrizes, para isso ele soma os elementos correspondentes para cada posição e mostra como resposta a soma das duas matrizes.

b) A.C

```
Este programa realiza as seguintes operações com matrizes:
1 - Adição de matrizes
2 - Subtração de matrizes
3 - Multiplicação entre matrizes
4 - Multiplicação de matriz por número real
0 - SAIR
-----
Digite o número correspondente ao que deseja fazer: 3.
```

```
O programa ira multiplicar uma matriz A com outra B (A*B)
Digite o tamanho da matriz A: (Ex: 2 3 equivale a matriz 2X3)
2 3
Digite a matriz A:
A[1][1]1
A[1][2]2
A[1][3]3
A[2][1]2
A[2][2]1
A[2][3]1
Digite o tamanho da matriz B: (Ex: 2 3 equivale a matriz 2X3)
3 1
Digite a matriz B:
A[1][1]-1
A[2][1]2
A[3][1]4
```

```
Matriz A: |  1.00   2.00   3.00  |
           |  2.00   1.00  -1.00  |

Matriz B: |  -1.00  |
           |  2.00  |
           |  4.00  |

Matriz A.B: |  15.00  |
           |  -4.00  |

Digite ENTER para retornar ao menu principal.....
```

- Dado duas matrizes e seus tamanhos, o programa calcula a multiplicação entre elas, para isso primeiramente verifica-se se é possível tal multiplicação, caso positivo ele calcula e mostra na tela a multiplicação entre elas.

## 24. Determinante;

3. Calcule  $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

```
C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1 Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P24 - Determinante.exe"
Na matriz:
    a11 a12 a13
    a21 a23 a23
    a31 a32 a33
Digite o valor de 'a11': 2
Digite o valor de 'a12': 0
Digite o valor de 'a13': -1
Digite o valor de 'a21': 3
Digite o valor de 'a22': 0
Digite o valor de 'a23': 2
Digite o valor de 'a31': 4
Digite o valor de 'a32': -3
Digite o valor de 'a33': 7
    Na matriz:
2.0  0.0  -1.0
3.0  0.0  2.0
4.0  -3.0  7.0
D = 21.00

Process returned 0 (0x0)  execution time : 27.980 s
Press any key to continue.
```

BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L., WETZLER, G.  
W.. Álgebra Linear. UNICAMP. 3<sup>a</sup> ed., editora HARBRA Itda, São Paulo,  
1980.

## 25. Inversa;

```
C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1 Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P24 - Determinante.exe"
Na matriz:
    a11 a12 a13
    a21 a23 a23
    a31 a32 a33
Digite o valor de 'a11': 2
Digite o valor de 'a12': 0
Digite o valor de 'a13': -1
Digite o valor de 'a21': 3
Digite o valor de 'a22': 0
Digite o valor de 'a23': 2
Digite o valor de 'a31': 4
Digite o valor de 'a32': -3
Digite o valor de 'a33': 7
    Na matriz:
2.0  0.0  -1.0
3.0  0.0  2.0
4.0  -3.0  7.0
D = 21.00

Process returned 0 (0x0)  execution time : 27.980 s
```

1. Calcule a inversa, se existir, da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

```
Digite os elementos de sua matriz 2x2:  
A[1][1] = 1  
A[1][2] = 2  
A[2][1] = 3  
A[2][2] = 4.
```

- Inseridos os números da matriz 2x2 no programa desenvolvido em C, ele calcula, caso exista, a matriz inversa.

```
Matriz :| 1.00  2.00 |  
        | 3.00  4.00 |  
  
Inversa :|-2.00  1.00 |  
        | 1.50 -0.50 |  
  
Process returned 0 (0x0)  execution time : 3.284 s  
Press any key to continue.
```

- É feito da seguinte maneira: Primeiramente é calculado o determinante da matriz, caso seja diferente de 0 ele prossegue com os cálculos, trocando os elementos das posições a<sub>11</sub> com o a<sub>22</sub>, e trocando o sinal dos números correspondentes as posições a<sub>12</sub> e a<sub>21</sub>, após feito isso, é dividido cada elemento da matriz pelo determinante e assim obtida e mostrada a matriz inversa.

## Sistemas

**26. Crie programas ou modelagens que resolvam sistemas.**

i)  $9x - y = 2,$

$x + 4y = 0$

```
C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1 Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P26 - Sistemas.exe"
No sistema
    Ax + By = d
    A1x + B1y = c
Digite o valor de 'A': 9
Digite o valor de 'B': -1
Digite o valor de 'd': 2
Digite o valor de 'A1': 1
Digite o valor de 'B1': 4
Digite o valor de 'c': 0
        9.0x + -1.0y = 2.0
        1.0x + 4.0y = 0.0
Sistema possível e determinado (PD)
S: {0.2, -0.1}

Process returned 0 (0x0)  execution time : 17.330 s
Press any key to continue.
```

BEAN, S. E. P. C.;  
 KOZAKEVICH D. N. Álgebra Linear I. 2<sup>a</sup> Edição. Florianópolis, 2011