

Vetores

1. Soma de vetores e multiplicação por escalar

2.3.3 Problemas Resolvidos

- 1) Determinar o vetor \vec{w} na igualdade $3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$, sendo dados $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.

```
C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exerciciosomaemultiplicacaoporescalar\bin\Debug\exerciciosomaemultiplicacaoporescalar.exe"
Digite apenas 'S' para soma ou 'M' para multiplicacao por escalar' z
s
Resolucao do exercicio 2.3.3, pagina 21, livro 'Geometria AnalYTica' de Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle:

Vetor u: (3.00,-1.00)
Vetor v: (-2.00,4.00)

Vetor w: (-3.50,2.00)

Process returned 0 (0x0) execution time : 1.540 s
Press any key to continue.
```

Exemplo:

- 1) Seja $u = \langle -1, 3 \rangle$ e $v = \langle 4, 7 \rangle$. Ache as componentes dos vetores:

- (a) $u + v$ (b) $3u$ (c) $2u - v$

```
C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exerciciosomaemultiplicacaoporescalar\bin\Debug\exerciciosomaemultiplicacaoporescalar.exe"
Digite apenas 'S' para soma ou 'M' para multiplicacao por escalar' z
m
Resolucao do exercicio do site da UFRJ (http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precaculo/sala/conteudo/capitulos/cap9is4.html):
Escolha o item a ser resolvido: a, b ou c.
a

a) Calcular u + v:
Resposta da a) --> (3.00,10.00)

Process returned 0 (0x0) execution time : 2.684 s
Press any key to continue.
```

2. Ângulo;

- 1) Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.

```
C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1º Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P08 - Retas(Angulo).exe"
Digite o vetor diretor do r1: -1 1 -2
Digite o vetor diretor do r2: 2 1 1
O angulo eh: 60.00

Process returned 0 (0x0) execution time : 87.167 s
Press any key to continue.
```

3. Módulo

- 1) Dados os pontos A(2, -1) e B(-1, 4) e os vetores $\vec{u} = (-1, 3)$ e $\vec{v} = (-2, -1)$, determinar
a) $|\vec{u}|$

```
C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1 Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P02 - Vetores(Modulo)
        V = (x,y)
Digite x:
-1
Digite y:
3
|v| = 3.16

Process returned 0 (0x0)  execution time : 10.737 s
Press any key to continue.
```

WINTERLE P. Vetores e Geometria Analítica. Pearson Education. São Paulo, 2007

4. Produto escalar;

Problemas Propostos

- 1) Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular

- a) $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$ c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
b) $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$ d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

```
C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\GAAL - 2017-1\exercicioproductoescalar\bin\Debug\exercicioproductoescalar.exe"
Resolução do exercício 1, página 36, livro 'Vetores e Geometria Analítica' de Paulo Winterle.

Você deseja calcular a), b), c) ou d)? Digite apenas a letra correspondente.
a

a) Calcular 2u . (-v)
Resposta a) --> -2.00

Process returned 0 (0x0)  execution time : 4.057 s
Press any key to continue.
```

5. Produto Vetorial;

- 3) Dados os pontos A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) e C(2, -1, -3), determinar o ponto D tal que
 $\vec{AD} = \vec{BC} \times \vec{AC}$.

```

C:\ "C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exercicioprodutovetorial\bin\Debug\exercicioprodutovetorial.exe"
Resolucao do exercicio 3, pagina 46, livro 'Vetores e Geometria Analitica' de Paulo Winterle.

0 vetor BC eh: (-1,-1,-4)
0 vetor AC eh: (0,-2,-2)

0 vetor AD eh: (-6,-2,2)

0 o ponto D eh: (-4,-1,1)

Process returned 0 (0x0) execution time : 0.017 s
Press any key to continue.

```

6. Produto misto;

- 1) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcular
 a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ b) $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

```

C:\ "C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exercicioprodutomisto\bin\Debug\exercicioprodutomisto.exe"
Resolucao do exercicio 1, pagina 52, livro 'Vetores e Geometria Analitica' de Paulo Winterle.

Voce deseja calcular a) ou b)? Digite apenas a letra correspondete.
a

Vetor u= (3,-1,1)
Vetor v= (1,2,2)
Vetor w= (2,0,-3)

Resposta a) -->: -29

Process returned 0 (0x0) execution time : 1.260 s
Press any key to continue.

```

```

C:\ "C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\PP - 2017-1\Code - 2017-1\exercicioprodutomisto\bin\Debug\exercicioprodutomisto.exe"
Resolucao do exercicio 1, pagina 52, livro 'Vetores e Geometria Analitica' de Paulo Winterle.

Voce deseja calcular a) ou b)? Digite apenas a letra correspondete.
b

Vetor w= (3,-1,1)
Vetor u= (1,2,2)
Vetor v= (2,0,-3)

Resposta b) -->: -29

Process returned 0 (0x0) execution time : 1.034 s
Press any key to continue.

```

Retas

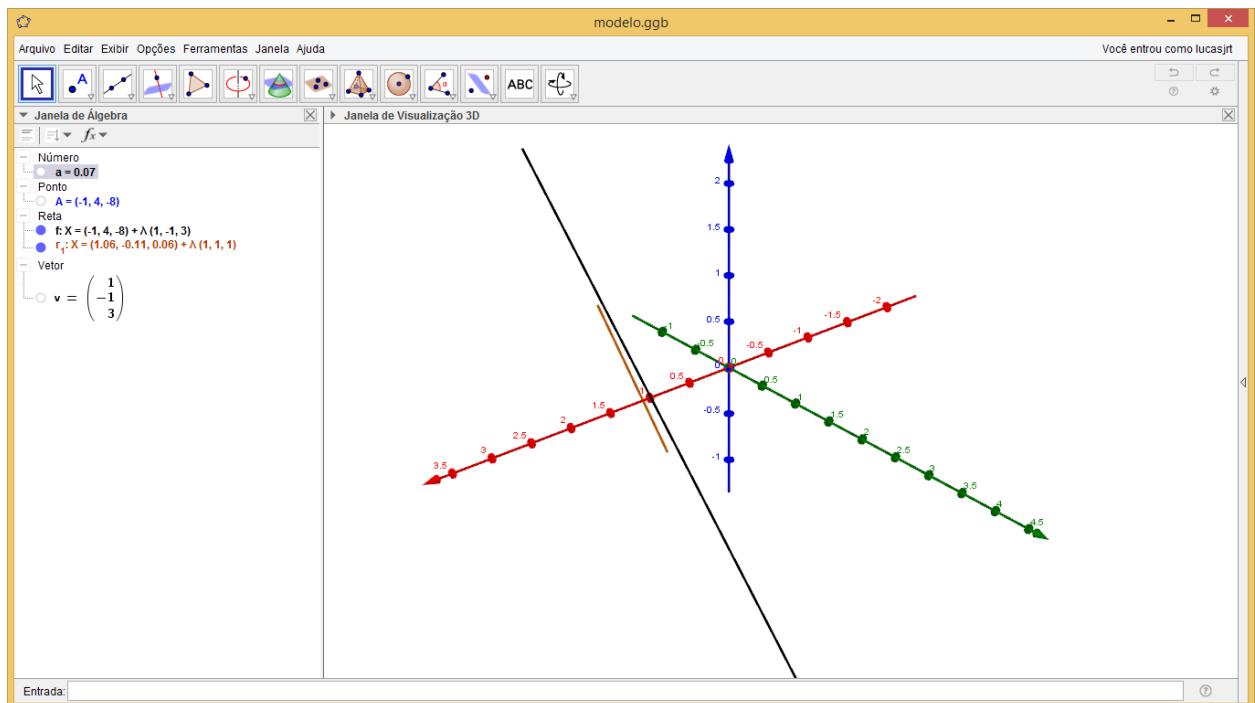
7. Posição relativa;

7.1.

- Dado o enunciado do livro “Vetores e Geometria analítica – Paulo Winterle”, página 121:

$$\text{b)} \quad r_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4} \quad \text{e} \quad r_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 3t \end{cases}$$

- Inserindo as duas retas, podemos verificar que elas são reversas, pois há uma distância de 0,07 u.d. (unidade de distância) entre elas:



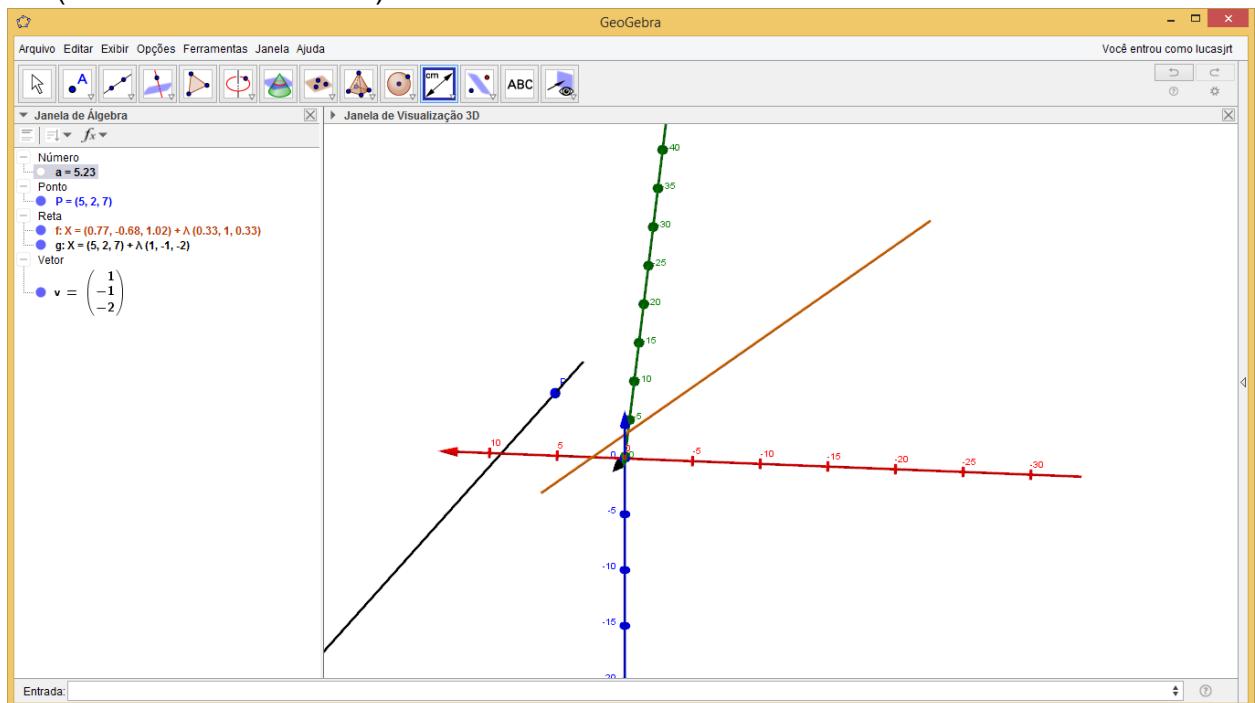
7.2.

- Dado o enunciado do livro “Geometria Analítica” de Alfredo Steinbruch, página 137:

24) Calcular o ponto de interseção das retas

$$b) \quad r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad e \quad s: \begin{cases} x = 5+t \\ y = 2-t \\ z = 7-2t \end{cases}$$

- Temos que as retas são reversas, pois a distância entre elas é de 5.23 u. d. (unidades de distância)



8. Ângulo entre retas;

21) Determinar o ângulo entre as seguintes retas:

a) $r_1 : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $r_2 : \frac{x}{2} = \frac{y + 6}{1} = \frac{z - 1}{1}$

```
"C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1º Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P03 - Vetc.exe"
v = ( x, y, z )
u = (x1,y1,z1)

Digite x:1
Digite y:1
Digite z:4
Digite x1:-1
Digite y1:2
Digite z1:2
    v = (1.00, 1.00, 4.00)
    u = (-1.00, 2.00, 2.00)
O angulo entre os dois vetores eh 45.0

Process returned 0 (0x0)  execution time : 15.292 s
Press any key to continue.
```

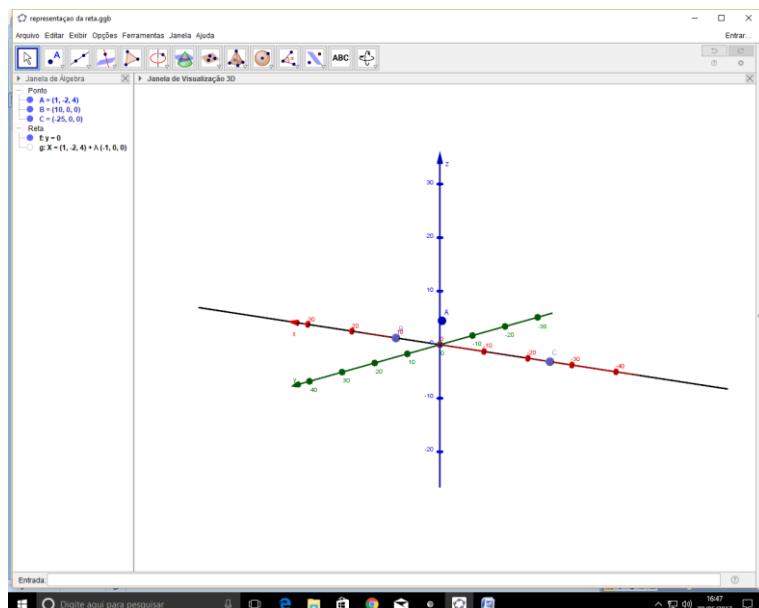
WINTERLE P. Vetores e Geometria Analítica. Pearson Education. São Paulo, 2007

9. Representação;

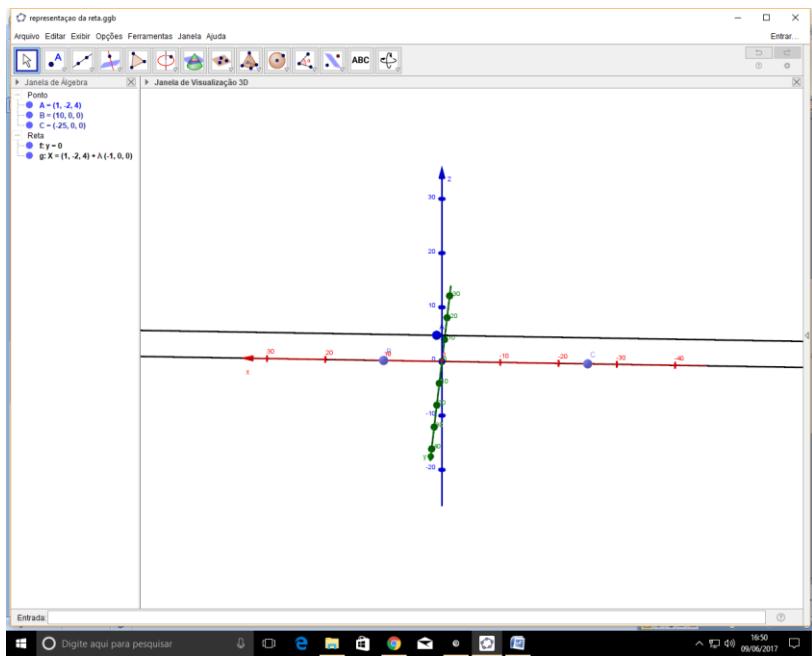
Enunciado –Determine a equação da reta que passa por A(1,-2,,4) e é paralela ao eixo X:

Usando o programa Geogebra :

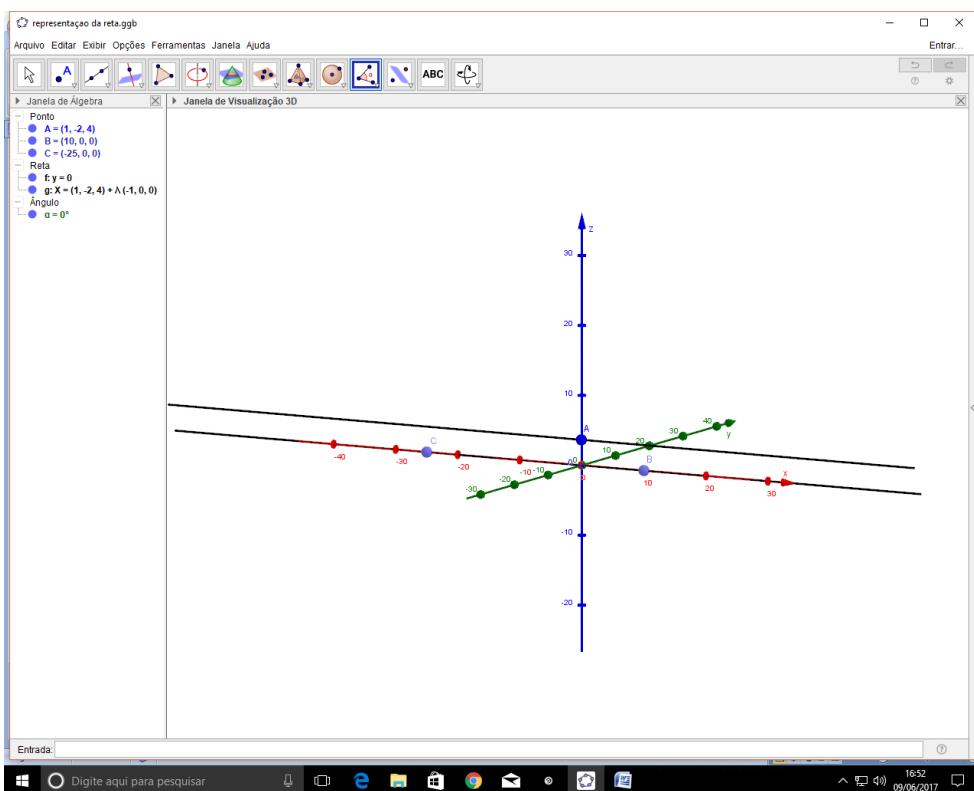
- Insere-se o ponto A;
- Define-se uma reta sobre o eixo x (como na imagem abaixo);



➤ Usando da função de criação de reta apartir de um ponto e reta ;

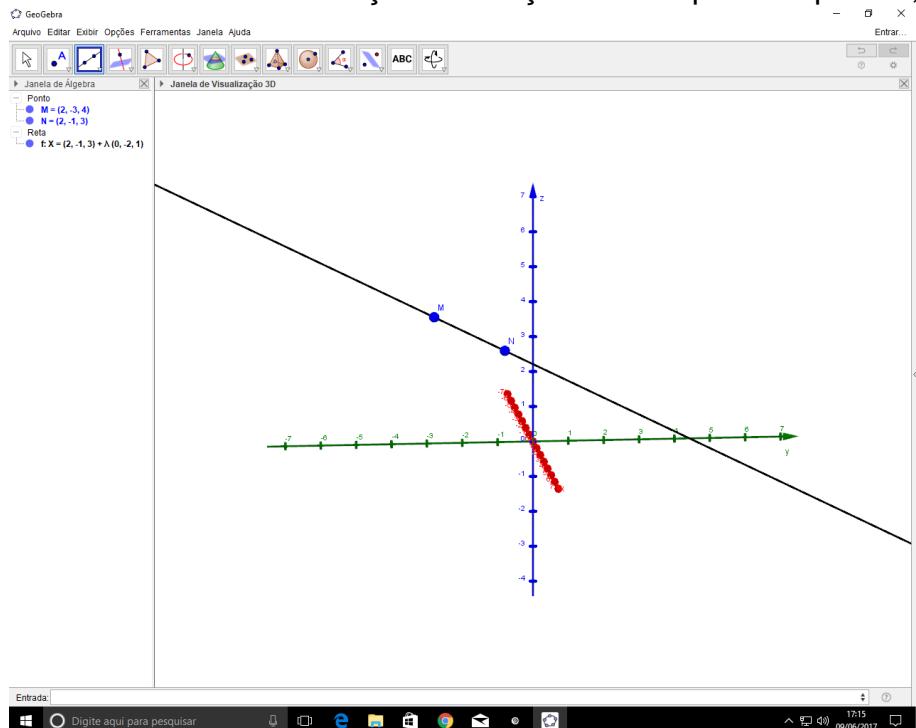


➤ Obtemos a reta paralela ao eixo dos x;



Enunciado- Determine a equação da reta que passa pelos pontos M (2, -3, 4) e N (2, -1, 3):

- Insere-se os pontos M e N;
- Utilizamos a função de criação de reta por dois pontos;



- Obtemos a reta que passa pelos pontos M e N;

Planos

10. Posição relativa entre planos;

10.1.

- Dado o enunciado do livro de Alfredo Steinbruch, página 183:

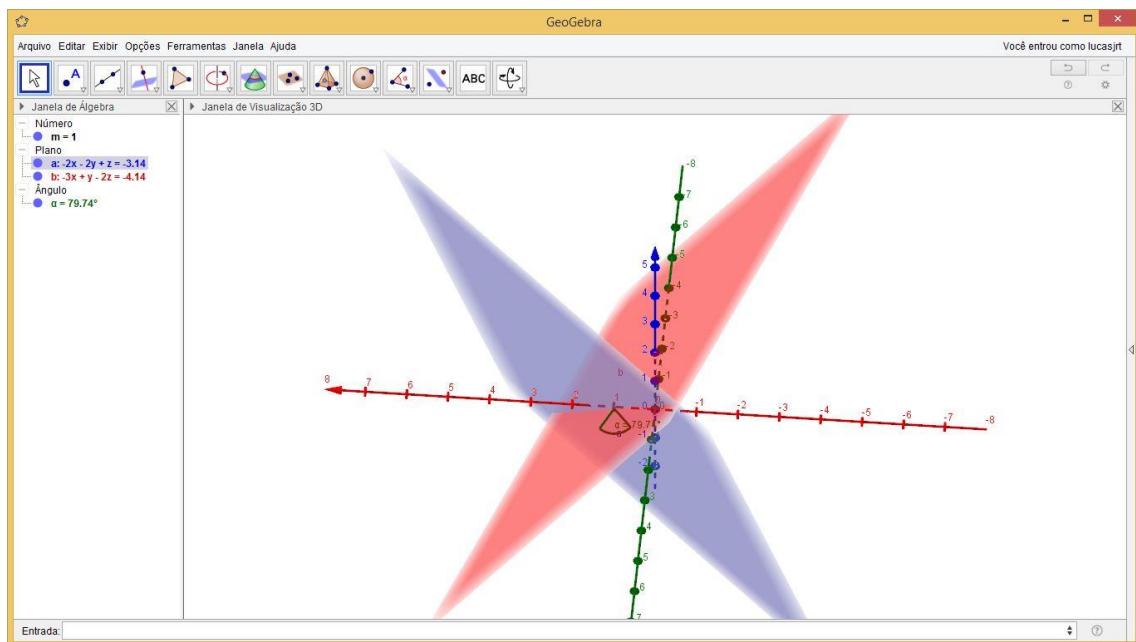
36) Determinar m de modo que os planos

$$\pi_1 : 2mx + 2y - z = 0 \quad \text{e}$$

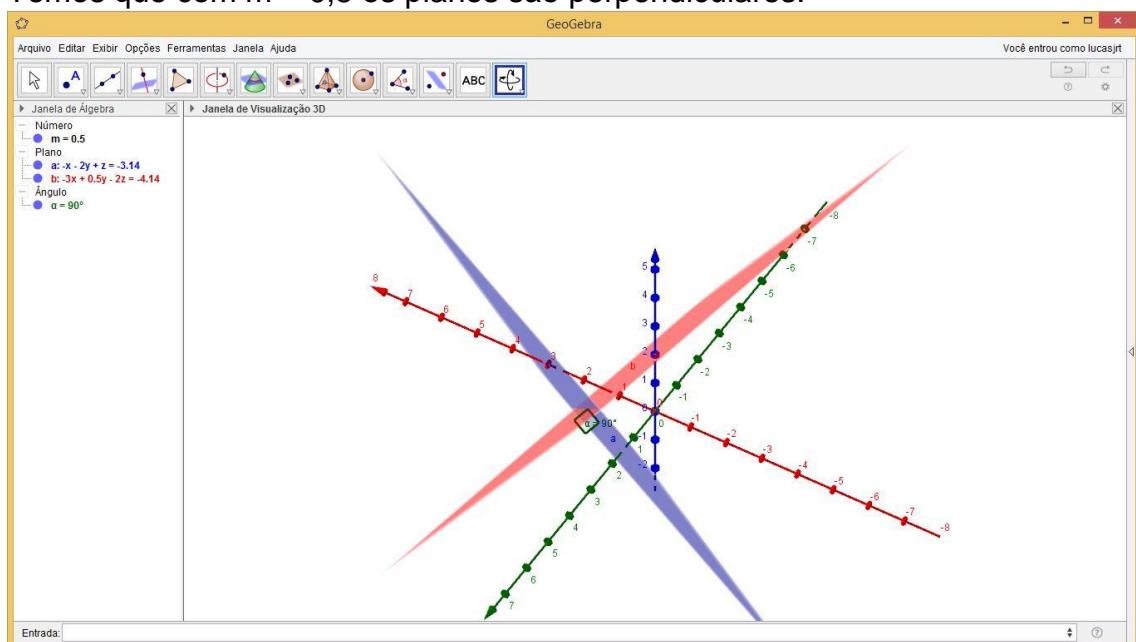
$$\pi_2 : 3x - my + 2z - 1 = 0$$

sejam perpendiculares.

- Inserindo a equação dos planos com um controle deslizante m valendo 1, temos que o ângulo entre os planos é de $79,74^\circ$:



- Temos que com $m = 0,5$ os planos são perpendiculares:



10.2.

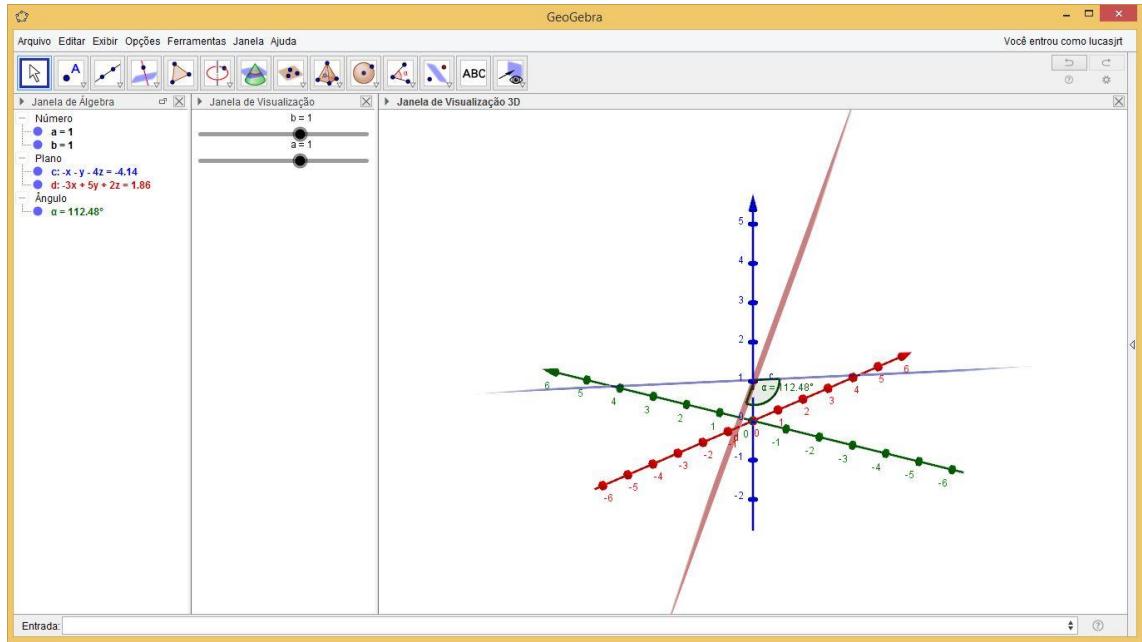
- Dado o enunciado do livro “Geometria Analítica” de Alfredo Steinbruch, página 183:

35) Determinar a e b , de modo que os planos

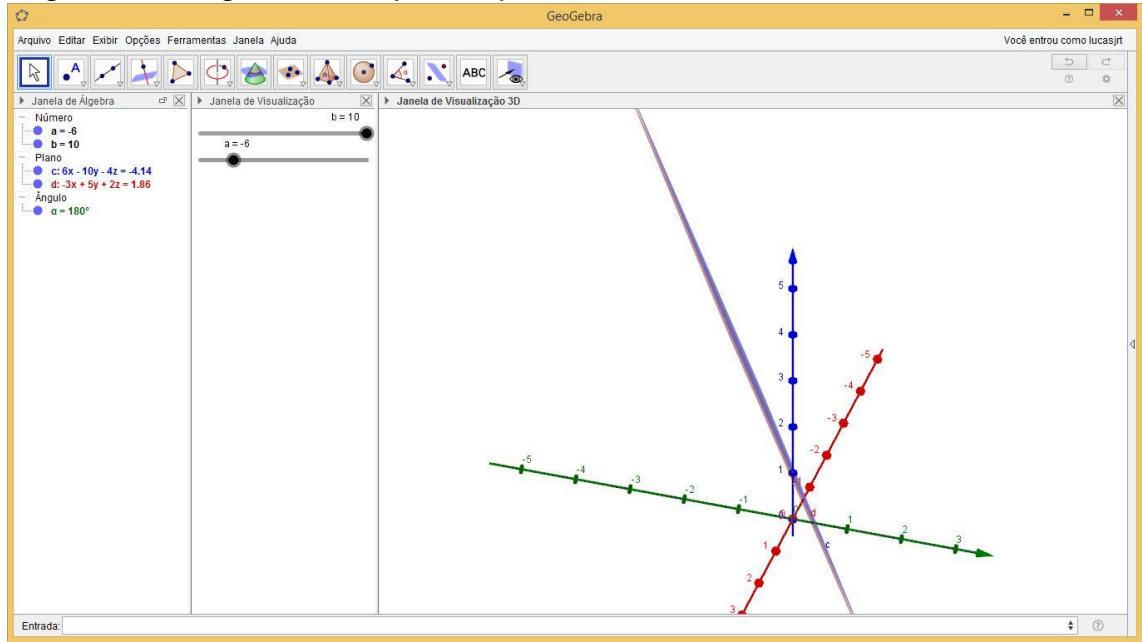
$$\pi_1: ax + by + 4z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: 3x - 5y - 2z + 5 = 0$$

sejam paralelos.

- Inserimos dois controles deslizantes “a” sendo 1, e “b”, a equação dos dois planos e verificamos o ângulo formado entre os dois planos é de $112,48^\circ$:



- Podemos ver que com “ b ” sendo 10 e “ a ” sendo -6, os dois planos formam um ângulo de 180 graus, ou seja, são paralelos:



11. Ângulo entre planos;

11.1.

- Dado o enunciado do livro “Geometria Analítica” de Alfredo Steinbruch, página 169:

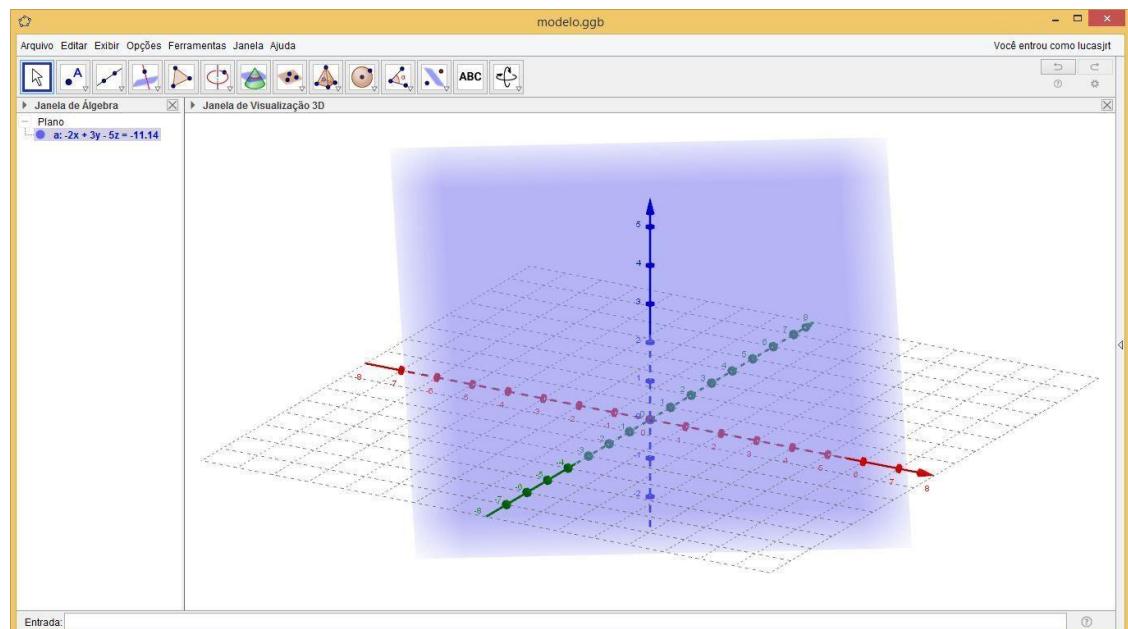
10) Determinar o ângulo entre os planos

$$\pi_1: 2x - 3y + 5z - 8 = 0$$

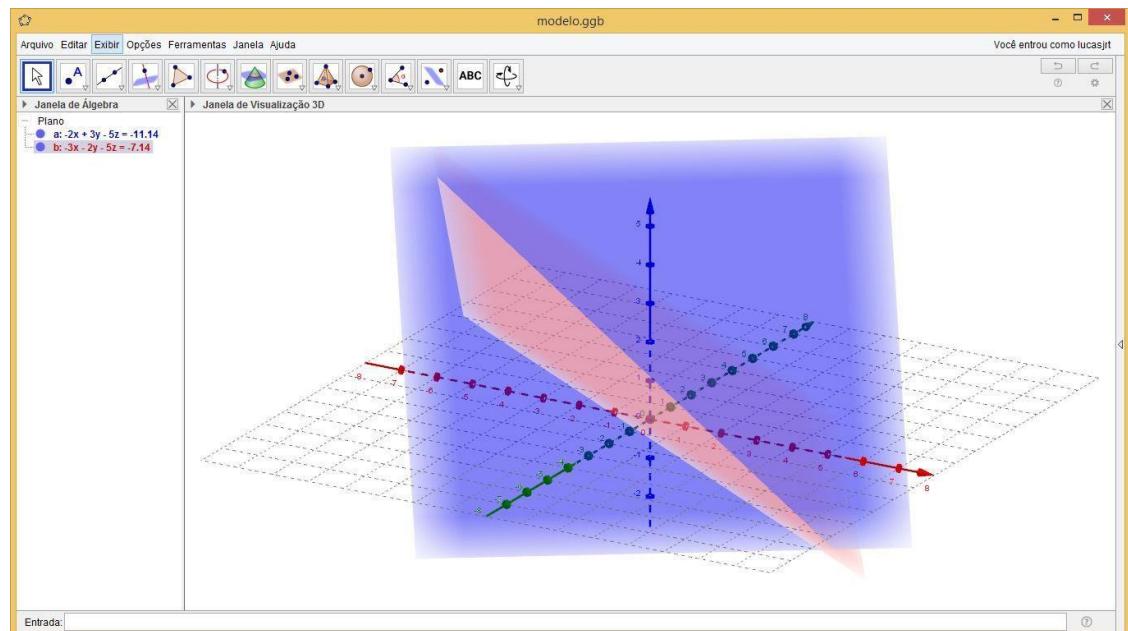
e:

$$\pi_2: 3x + 2y + 5z - 4 = 0$$

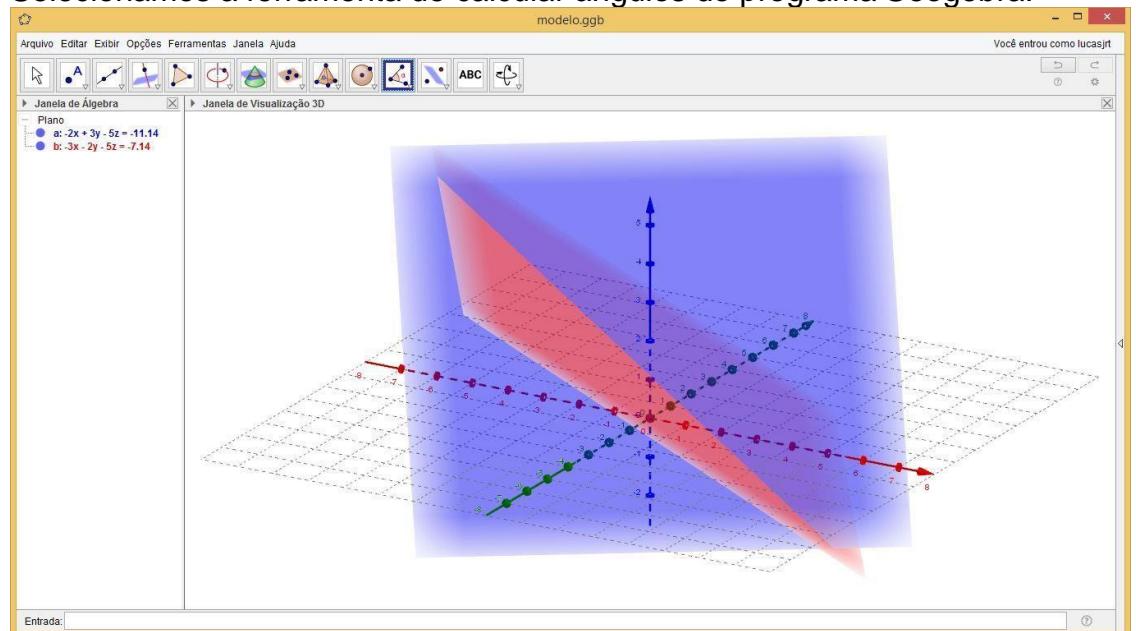
- Primeiro inserimos a equação do primeiro plano:



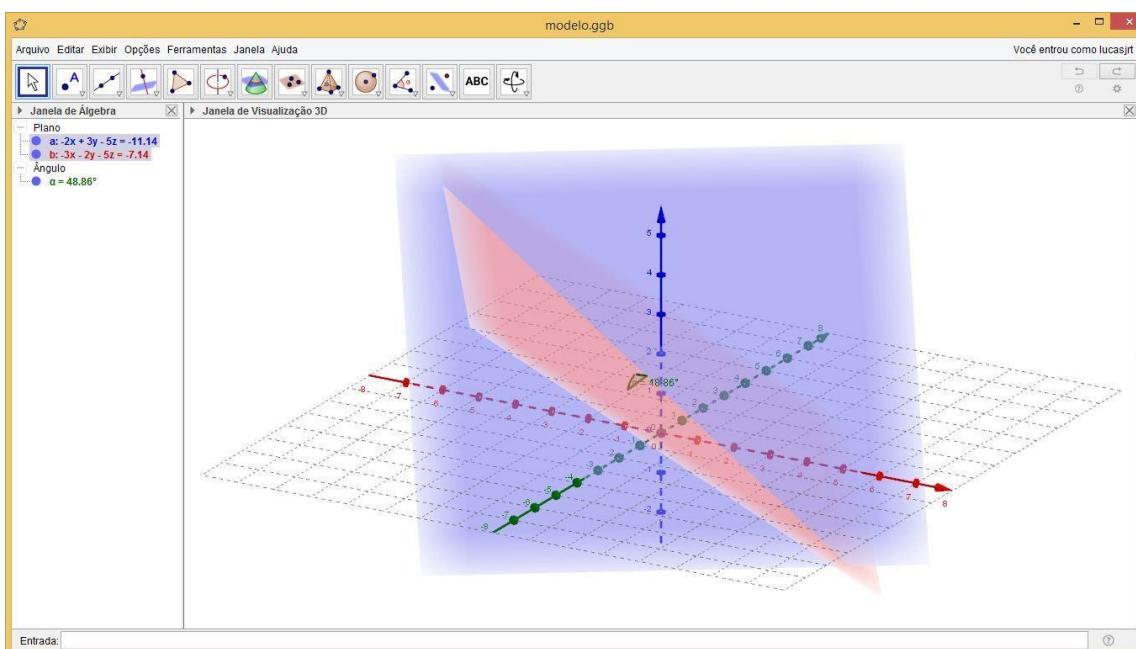
- Depois, inserimos a equação do segundo plano:



- Selecionamos a ferramenta de calcular ângulos do programa Geogebra:



- Logo em seguida, selecionamos os dois planos para calcular o ângulo:



- Obtemos que o ângulo entre os planos é de $48,86^\circ$.

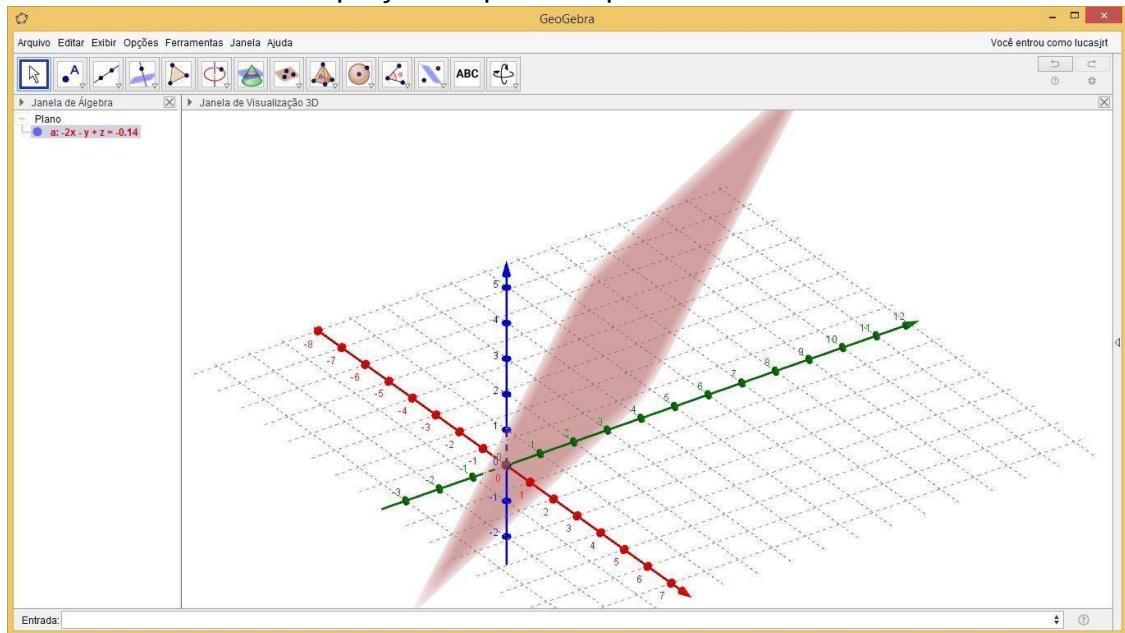
11.2.

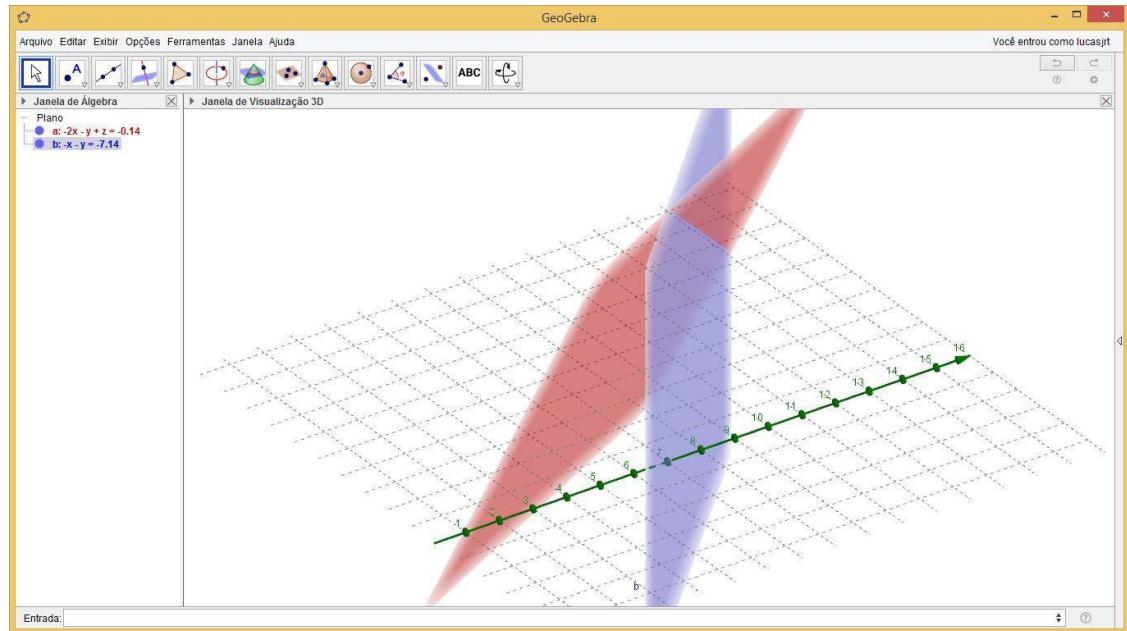
- Dado o enunciado do livro “Vetores e Geometria Analítica” de Paulo Winterle, página 136:

Determinar o ângulo entre os planos

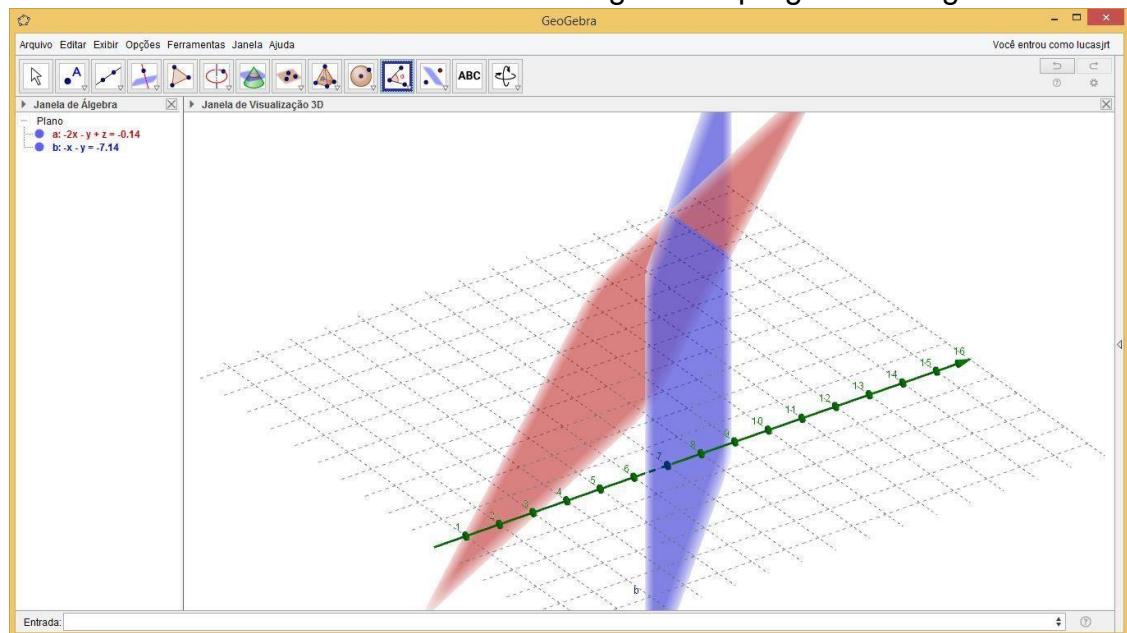
$$\pi_1: 2x + y - z + 3 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: x + y - 4 = 0.$$

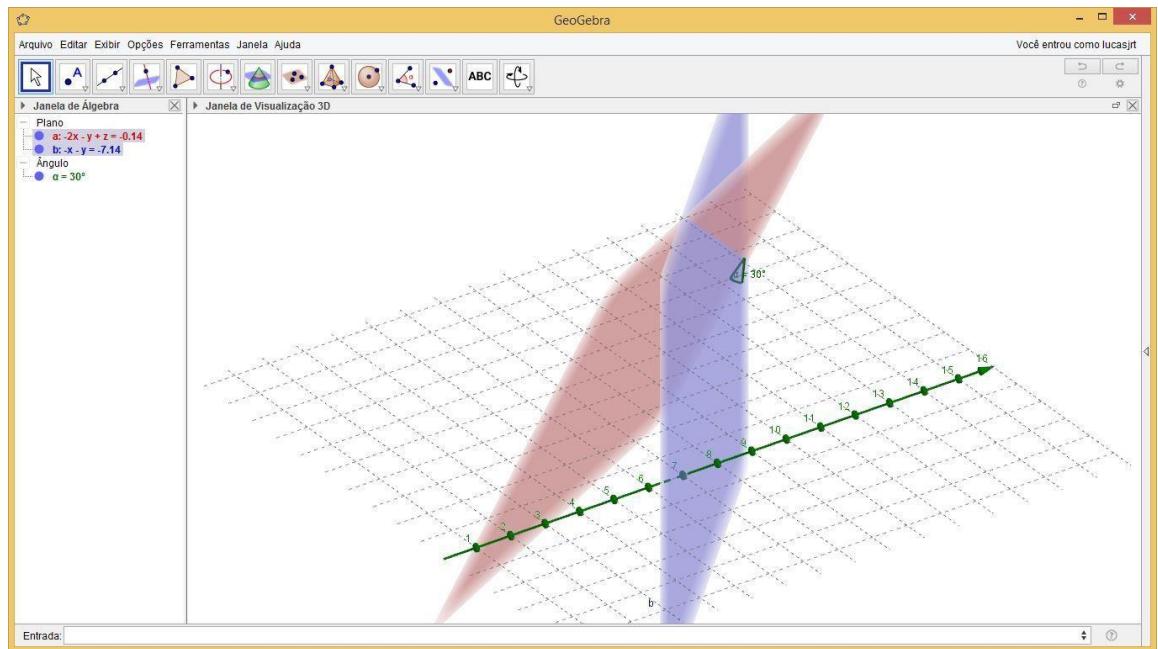
- Primeiro inserimos a equação do primeiro plano:





- Selecionamos a ferramenta de calcular ângulos do programa Geogebra:



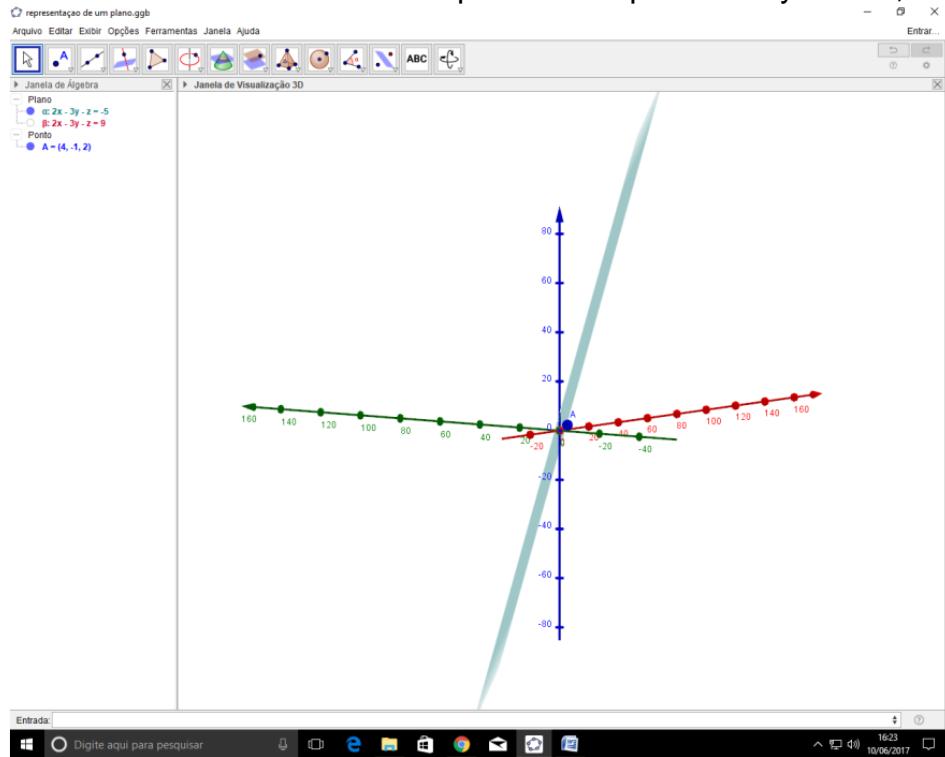


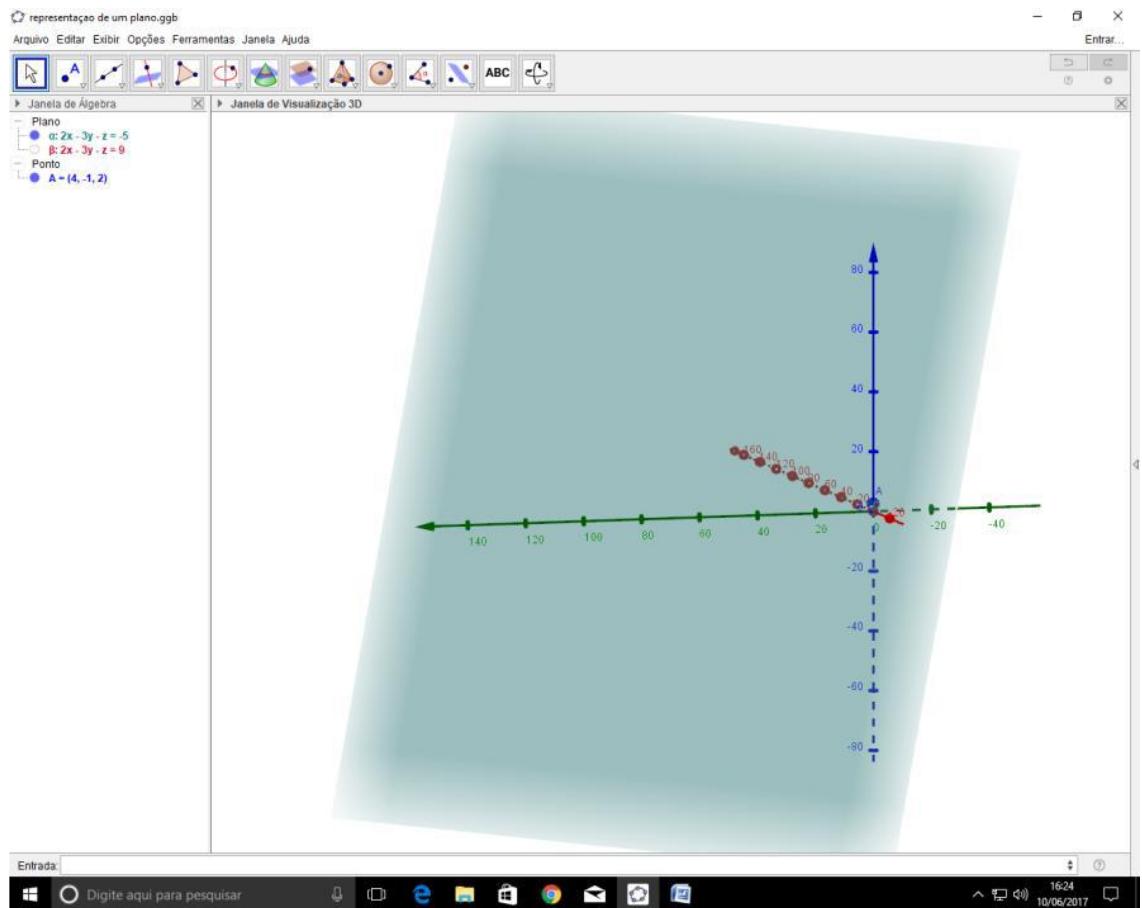
- Obtemos que o ângulo entre os planos é de 30° .

12. Representação;

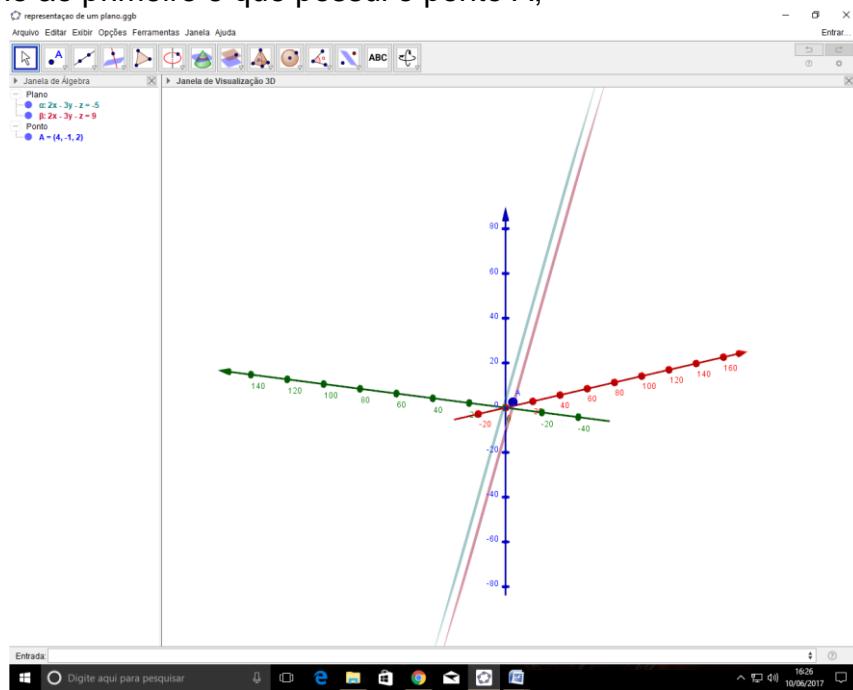
Enunciado –Determine a equação geral do plano paralelo ao plano $2x - 3y - z + 5 = 0$ e que contém o ponto A (4, -1, 2):

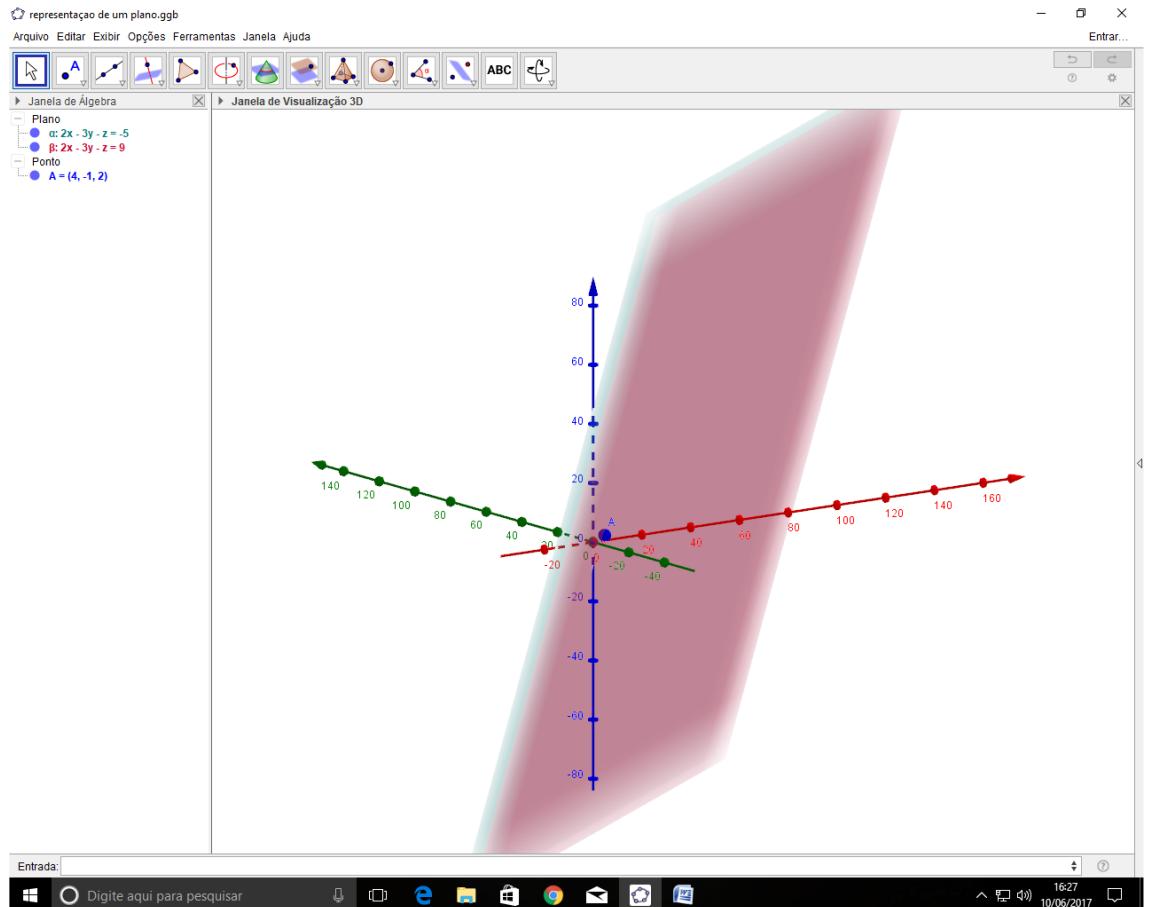
- Primeiro inserimos o ponto A e o plano $2x - 3y - z + 5 = 0$:





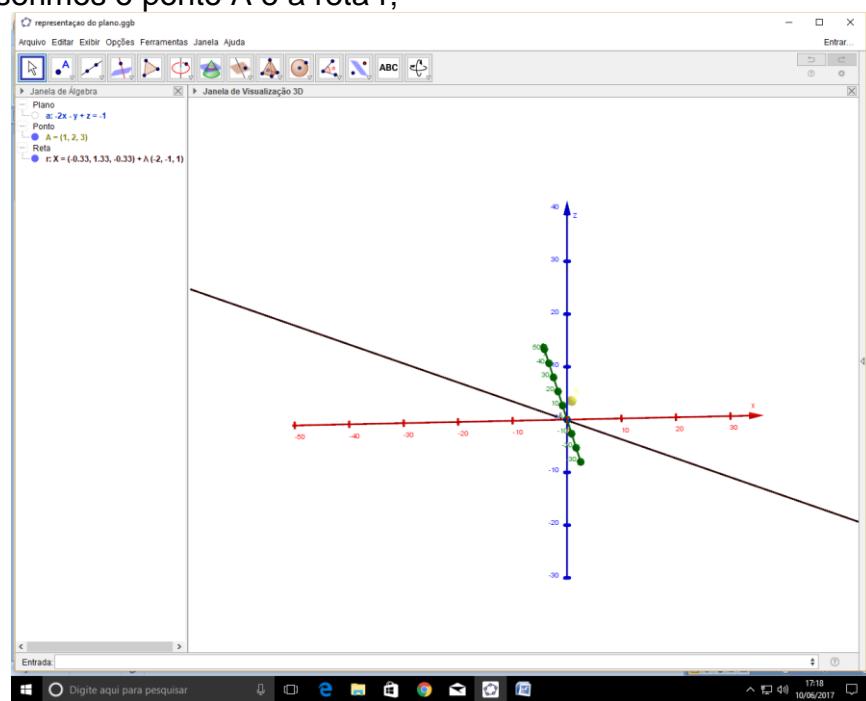
- Usamos a função de criação de planos paralelos e obtemos um plano beta paralelo ao primeiro e que possui o ponto A;



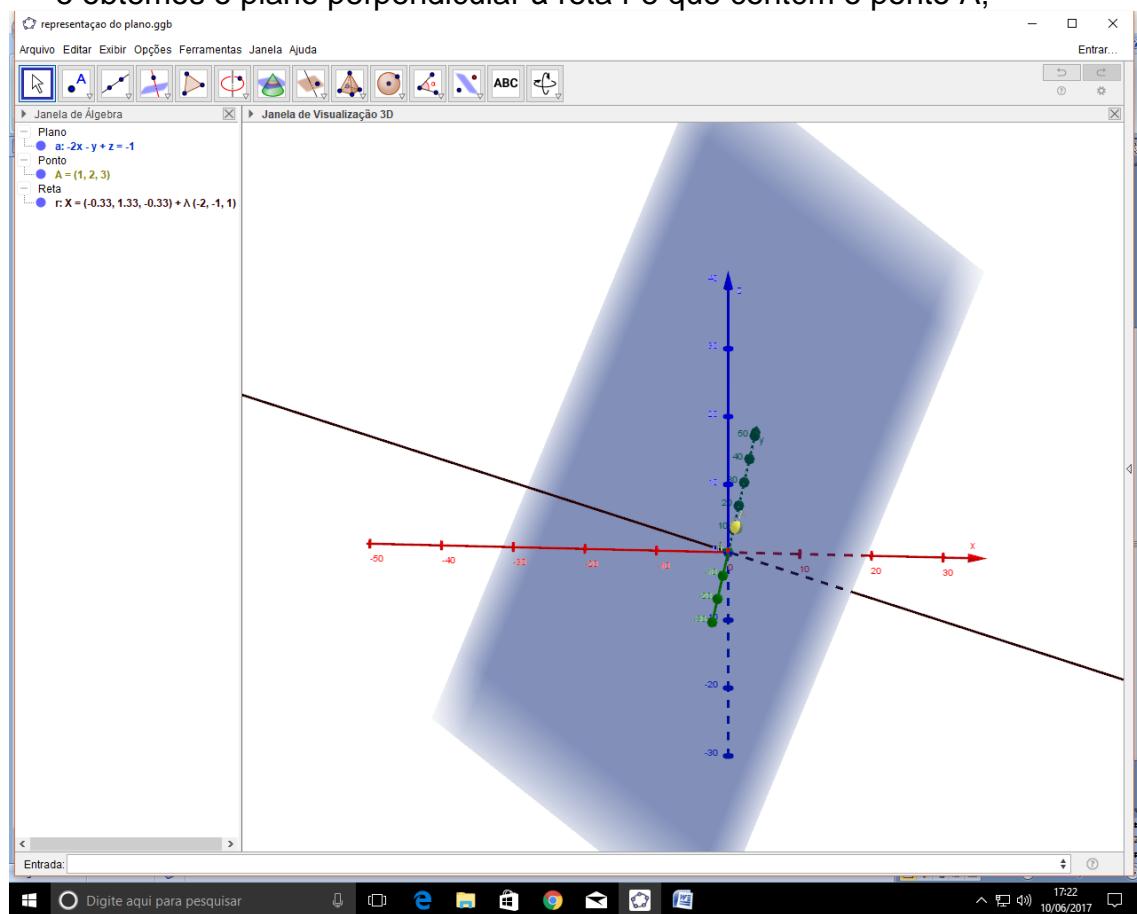


Enunciado –Determine a equação geral do plano perpendicular à reta $r:x=2y-3$, $z=-y+1$ e que contém o ponto A (1, 2, 3):

➤ Inserimos o ponto A e a reta r;



- Usamos a função de inserir planos por um ponto e reta perpendicular e obtemos o plano perpendicular à reta r e que contém o ponto A;



Distâncias

13. Distância entre dois pontos;

6.1.1 Problema Resolvido

1) Calcular a distância entre os pontos $P_1(7, 3, 4)$ e $P_2(1, 0, 6)$.

```
C:\Users\Bianca\Desktop\Facul\GAAL - 2017-1\exerciciodistanciaentre dois pontos\bin\Debug\exerciciodistanciaentre dois pontos.exe"
Resolucao do exercicio 6.1.1, pagina 190, livro 'Vetores e Geometria Analitica' de Paulo Winterle.

O programa calcula a distancia entre os pontos A e B.

Digite as coordenadas do ponto A no modelo (x,y,z):
7
3
4

Digite as coordenadas do ponto B no modelo (x,y,z):
1
0
6

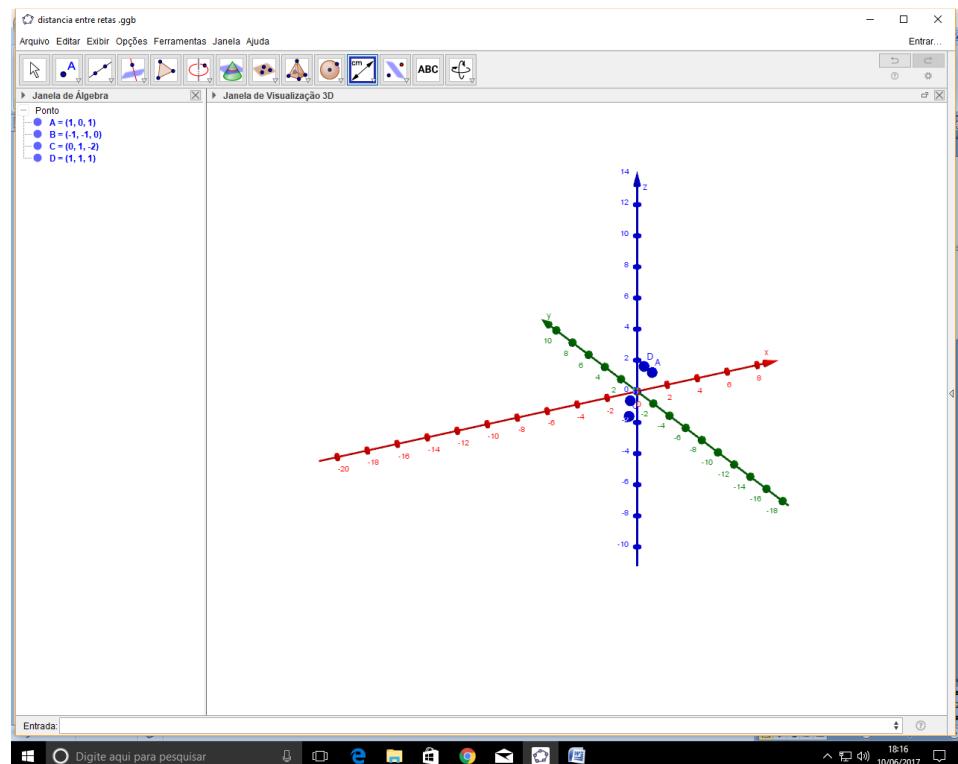
A distancia entre os pontos A e B eh: 7.00

Process returned 0 (0x0)  execution time : 7.802 s
Press any key to continue.
```

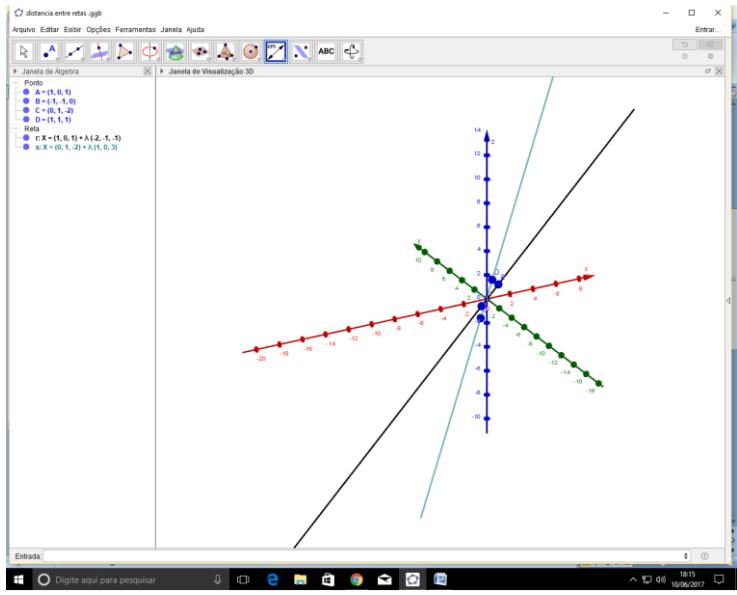
14. Distância entre retas;

Enunciado-Calcular a distância entre as retas r e s, em que r passa pelos pontos A (1,0,1) e B (-1, -1,0) e a reta s passa pelos pontos C (0,1, -2) e D (1,1,1):

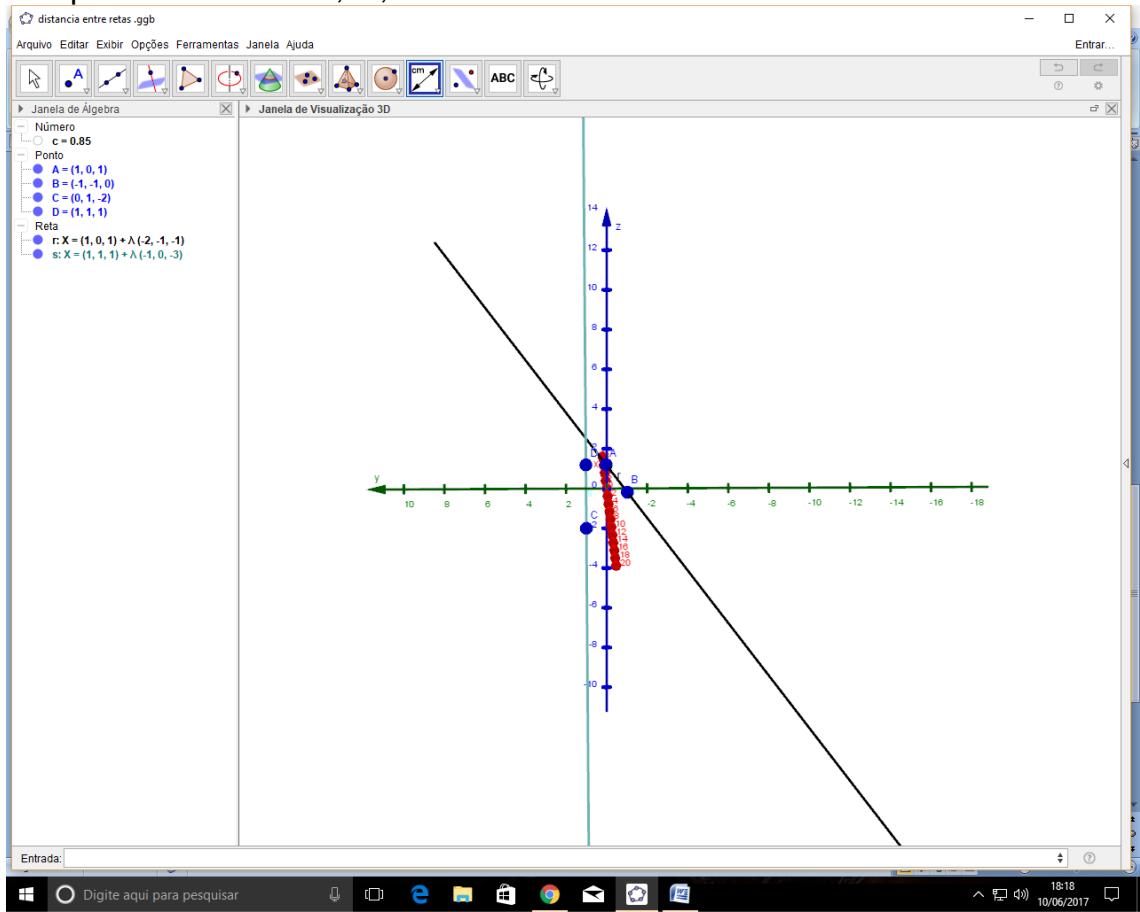
- Inserimos a os pontos A, B, C e D;



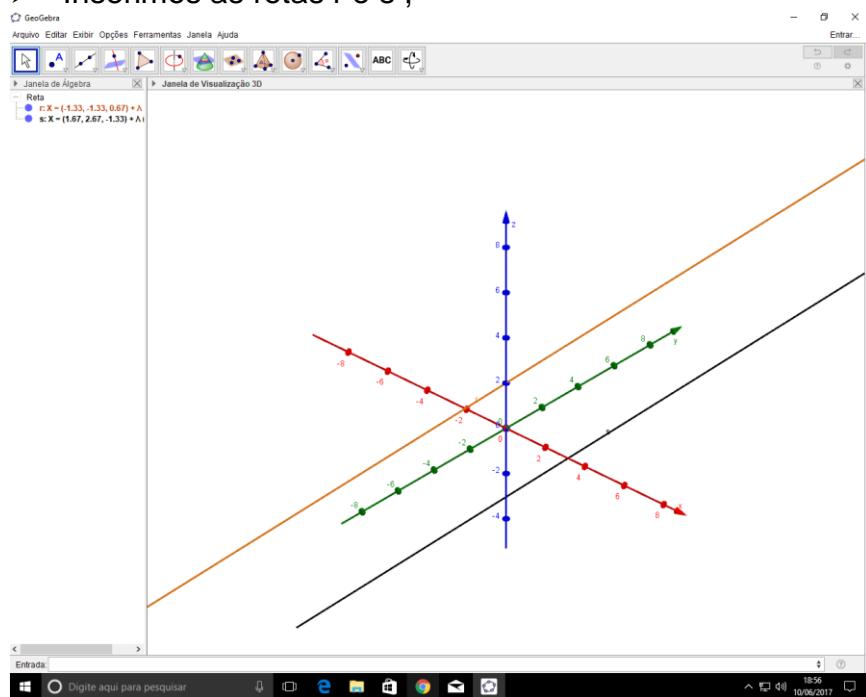
- Através da função de retas a partir de dois pontos usamos a os pontos A e B para criar uma reta r e os pontos C e D para criar uma reta s;



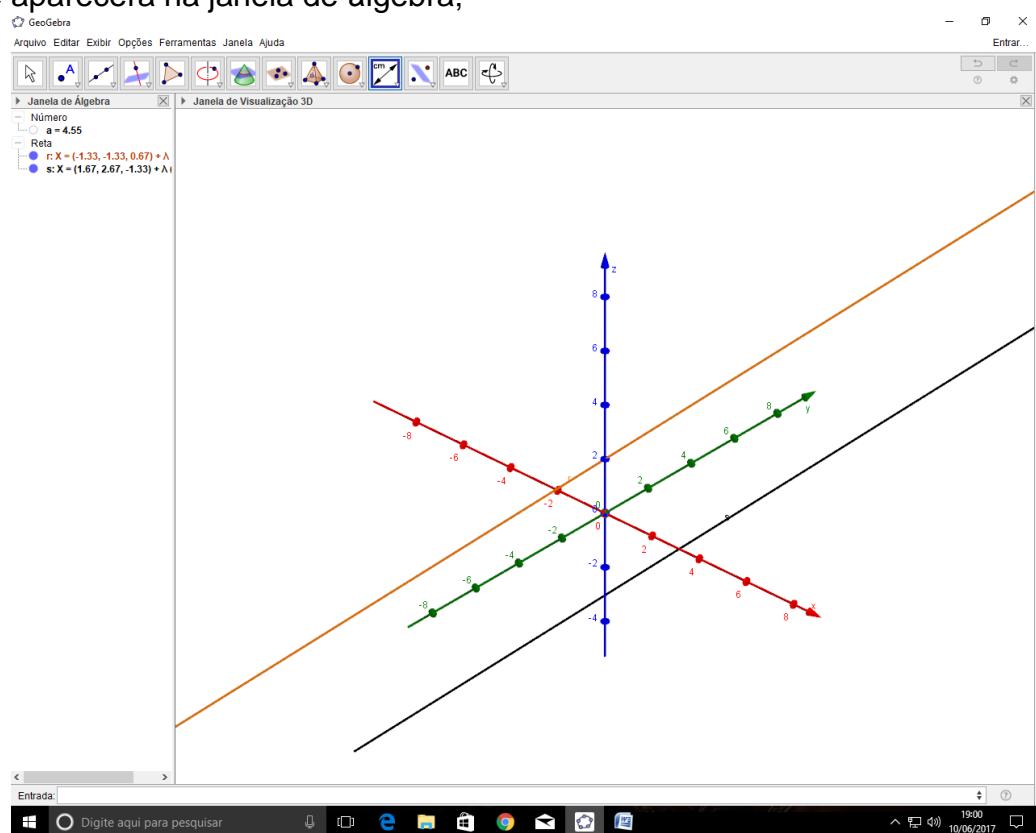
- Usamos a função de distância entre retas e na janela de álgebra aparece o valor da distância entre as retas r e s que é de aproximadamente 0,85;



Enunciado - calcular a distância entre as retas $r: x=y=z-2$ e $s: y=x+1, z=x-3$:
 ➤ Inserimos as retas r e s ;



➤ Usamos a função distancia para calcularmos a distância entre as retas r e s , que aparecerá na janela de álgebra;



15. Distância entre planos;

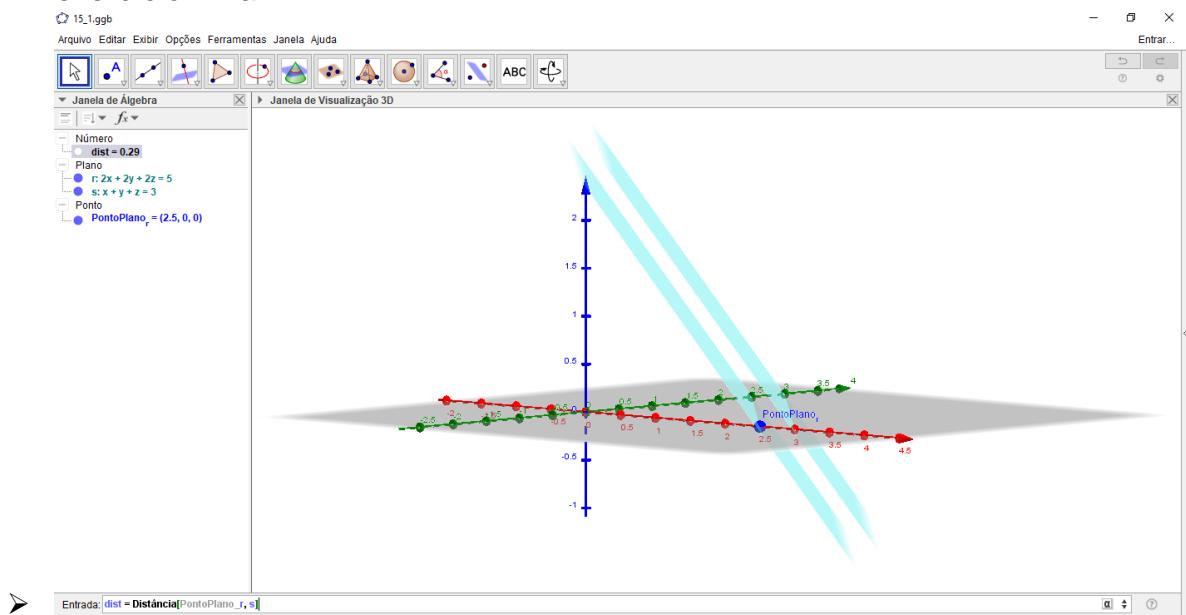
15.1.

11) Calcular a distância entre os planos paralelos:

$$a) \pi_1 : 2x + 2y + 2z - 5 = 0 \quad e \quad \pi_2 : x + y + z - 3 = 0$$



- Para resolução deste exercício foi obtido um ponto qualquer que passa por um dos planos (no caso foi utilizado o ponto $(2.5, 0, 0)$ que passa pelo plano r) e em com esse ponto mais o outro plano (aqui chamado de s) foi utilizada a função distância do Geogebra:
- Distância[<Ponto>, <Objeto>] no caso: Distância[PontoPlano_r, s]
- Exercício retirado do livro: Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, p.203, exercício 11-a



$$\text{Entrada: } \text{dist} = \text{Distância}[\text{PontoPlano}_r, s]$$
$$\frac{\sqrt{3}}{6}$$

➤ Resposta: ~ 0.29 ou

15.2.

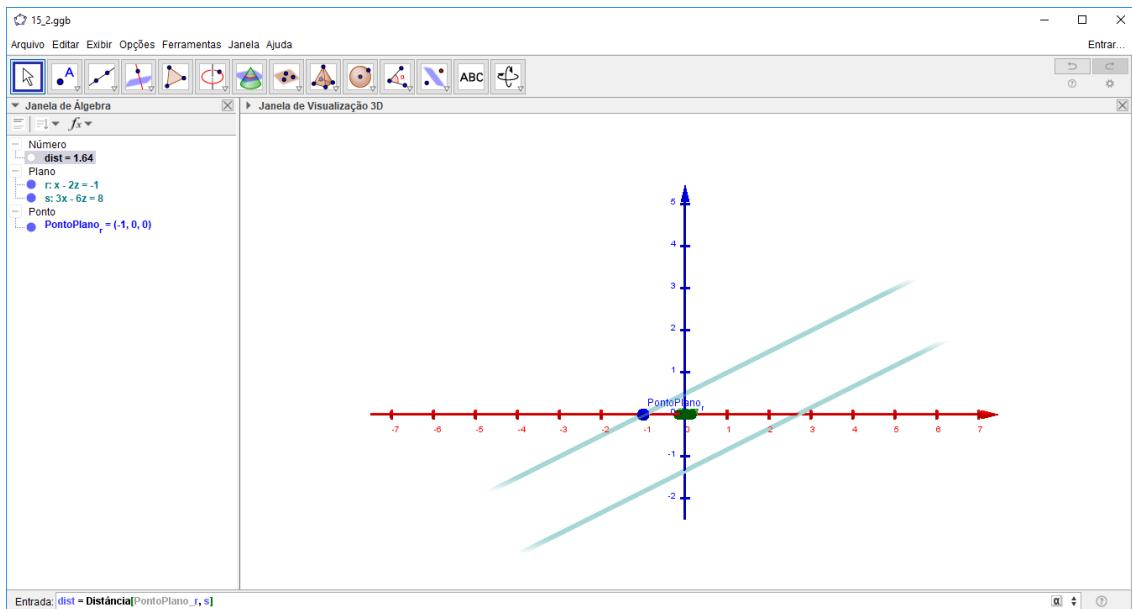
Calcular a distância entre os planos paralelos:

$$b) \pi_1 : x - 2z + 1 = 0 \quad e \quad \pi_2 : 3x - 6z - 8 = 0$$

Para resolução deste exercício foi obtido um ponto qualquer que passa por um dos planos (no caso foi utilizado o ponto $(-1, 0, 0)$ que passa pelo plano r) e em com esse ponto mais o outro plano (aqui chamado de s) foi utilizada a função distância do geogebra :

Distância[<Ponto>, <Objeto>] no caso: Distância[PontoPlano_r, s]

Exercício retirado do livro: Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, p.203, exercício 11-b



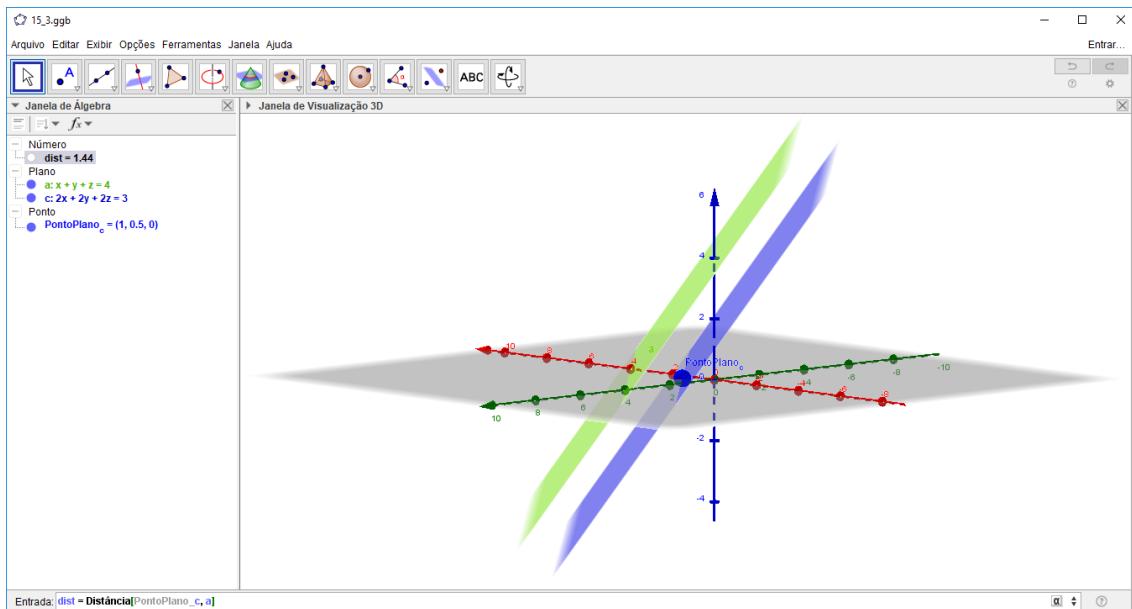
$$\text{Resposta: } \sim 1.64 \text{ ou } \frac{11}{3\sqrt{5}}$$

15.3.

02. Os planos $\alpha_1: x + y + z - 4 = 0$ e $\alpha_2: 2x + 2y + 2z - 3 = 0$ são paralelos. Determinar a distância entre eles.

Exercício retirado do livro Álgebra Vetorial e Geometria Analítica / Jacil J. Venturi 10. de página 181

Para resolução deste exercício foi obtido um ponto qualquer que passa por um dos planos (no caso foi utilizado o ponto $(1,0,5,0)$ que passa pelo plano c) e em com esse ponto mais o outro plano (aqui chamado de 'a') foi utilizada a função distância do geogebra :



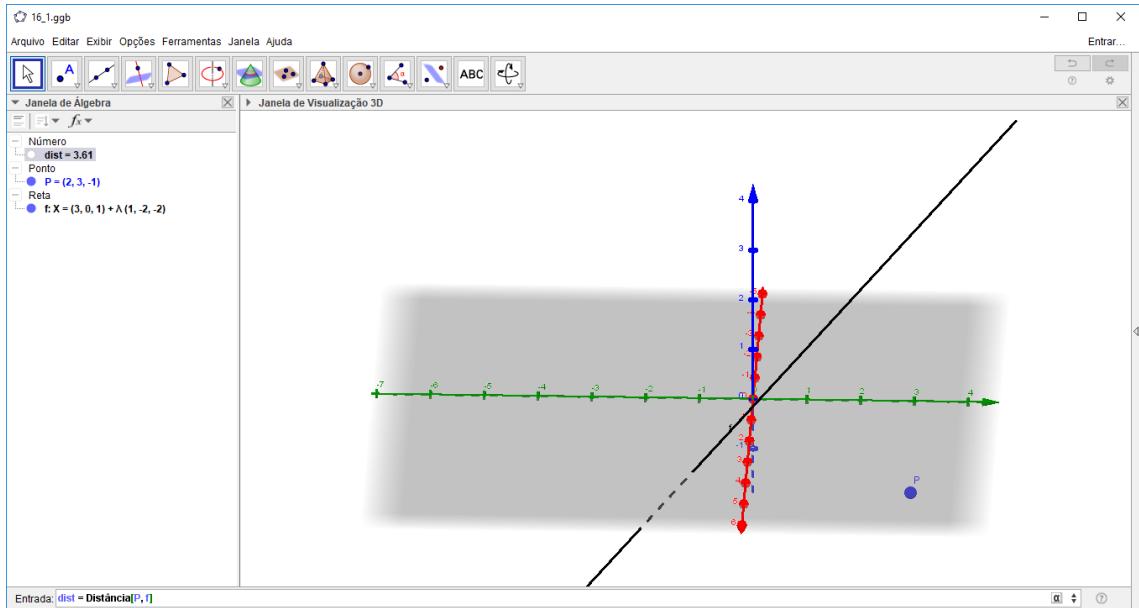
Distância[<Ponto>, <Objeto>] no caso: Distância[PontoPlano_c,a].

Resposta: $\sim 1,44$ ou $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

16. Distância entre ponto e reta;

16.1.

- *Achar a distância do ponto P à reta r*
- 3) $P(2, 3, -1)$ $r : x = 3 + t$ $y = -2t$ $z = 1 - 2t$
- Para resolver o exercício primeiramente deve-se obter a partir equação da reta um ponto e um vetor diretor, uma das possibilidades é o ponto $(3, 0, 1)$ e o vetor diretor $(1, -2, -2)$.
- Sendo assim adiciona-se o ponto dado $P = (2, 3, -1)$ e a reta com a entrada “ $f=Reta[(3, 0, 1), Vetor[(1, -2, -2)]]$ ”.
- Após isso é só usar a função distância: Distância[P, f]
- Exercício retirado do livro: Vectors e Geometria Analítica - Paulo Winterle, p.157, exercício 3



➤ Resultado: ~ 3.61 ou $\frac{\sqrt{117}}{3}$

16.2.

Achar a distância do ponto P à reta r

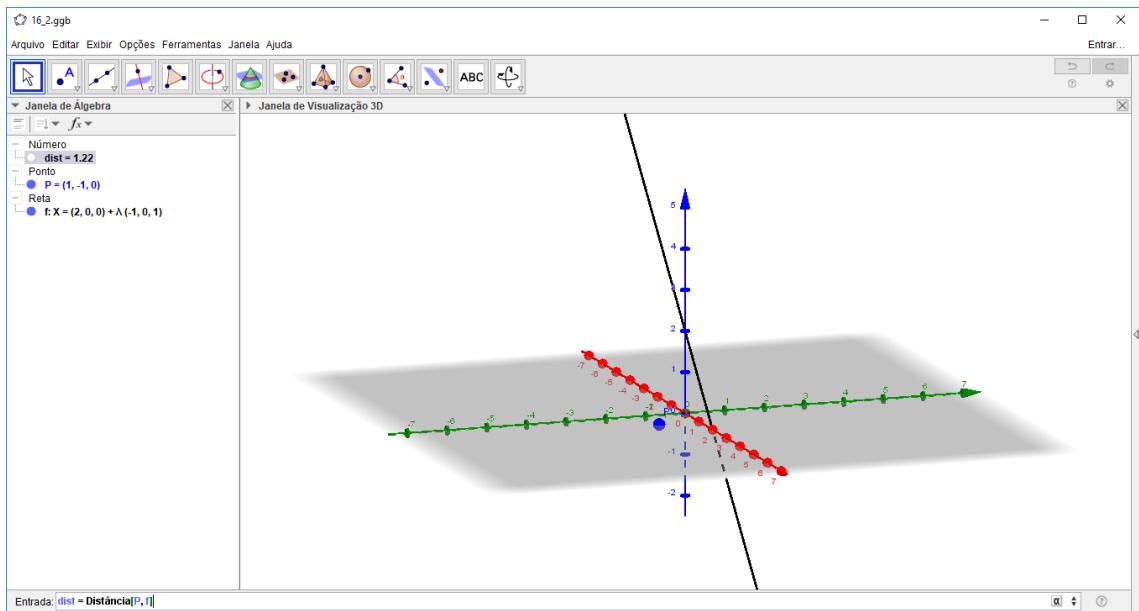
$$4) \quad P(1, -1, 0) \quad r : x = 2 - t \quad y = 0 \quad z = t$$

Para resolver o exercício primeiramente deve-se obter a partir equação da reta um ponto e um vetor diretor, uma das possibilidades é o ponto $(2,0,0)$ e o vetor diretor $(-1,0,1)$.

Sendo assim adiciona-se o ponto dado $P= (1, -1, 0)$ e a reta com a entrada “ $f=Reta[(2,0,0), Vetor[(-1,0,1)]]$ ”.

Após isso é só usar a função distância: Distância[P, f]

Exercício retirado do livro: Vetores e Geometria Analítica - Paulo Winterle, p.157, exercício 3



$$\text{Resposta: } \sim 1,22 \text{ ou } \frac{\sqrt{6}}{2}$$

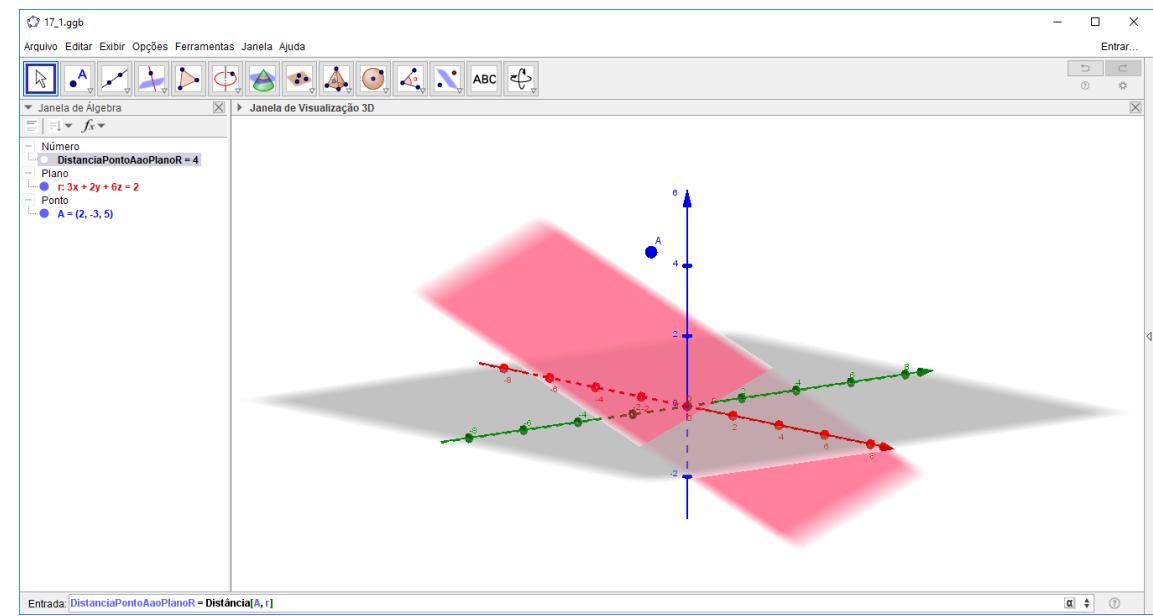
17. Distância entre ponto e plano;

17.1.

7) Achar a distância do ponto $P(2, -3, 5)$ ao plano

$$\pi: 3x + 2y + 6z - 2 = 0.$$

- Para resolver o exercício após inserir o ponto e o plano utiliza-se a função distância do Geogebra: Distância [PontoPlano_r,s]
- Exercício retirado do livro: Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, p.202, exercício 7



➤ Resposta: 4

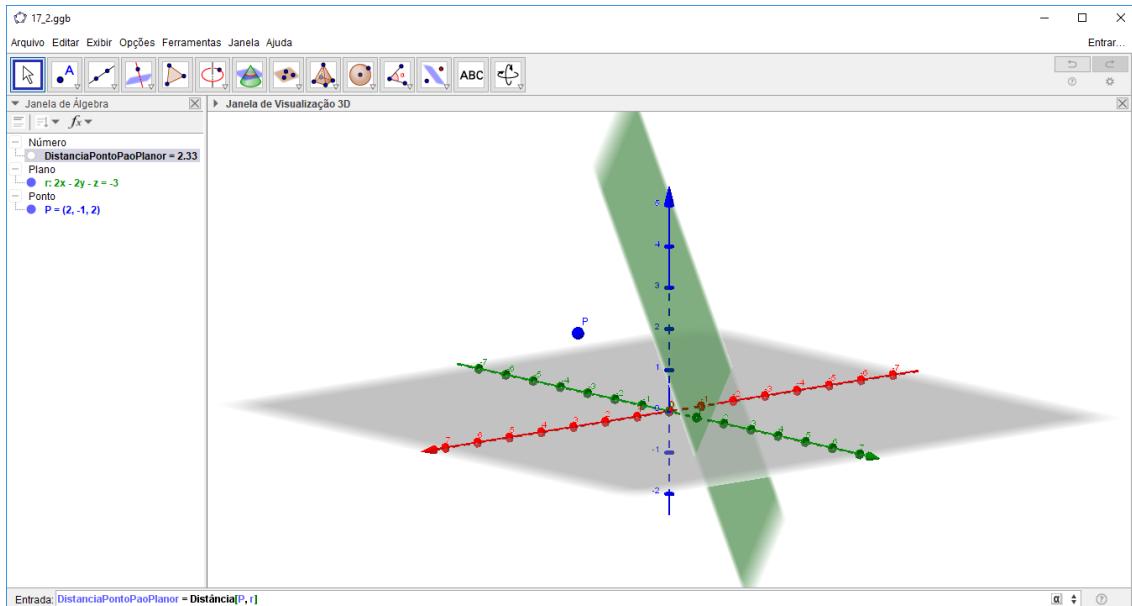
17.2.

6) Determinar a distância do ponto $P(2, -1, 2)$ a cada um dos planos:

$$a) \pi: 2x - 2y - z + 3 = 0$$

Para resolver o exercício após inserir o ponto e o plano utiliza-se a função distância do Geogebra: `Distância[PontoPlano_r,s]`

Exercício retirado do livro: Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, p.202, exercício 6-a

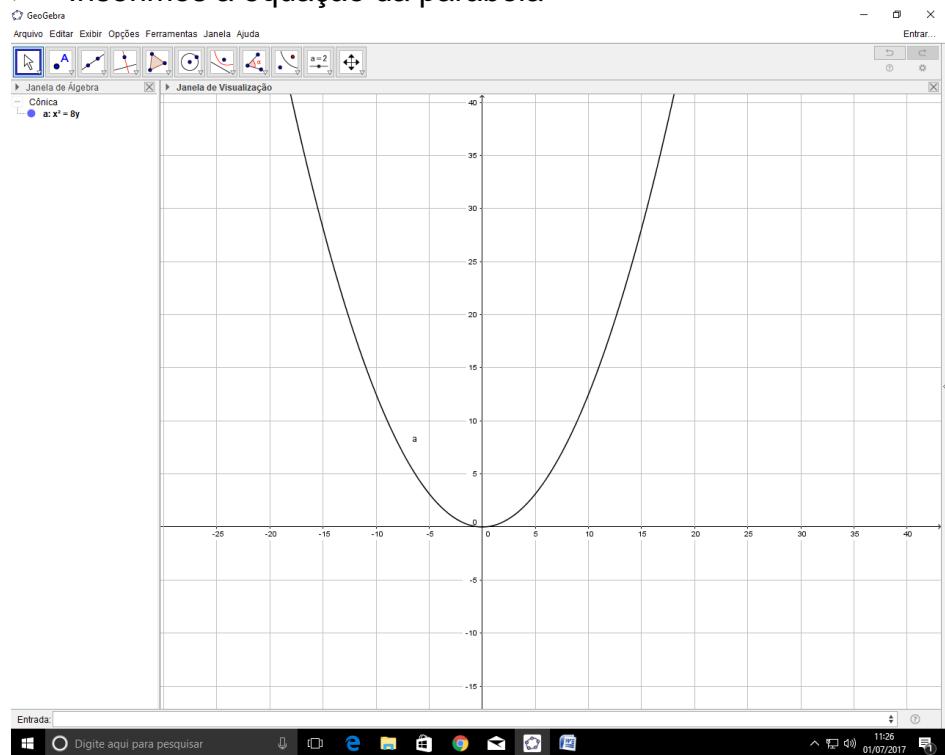


Resposta: ~2,33 ou $7/3$

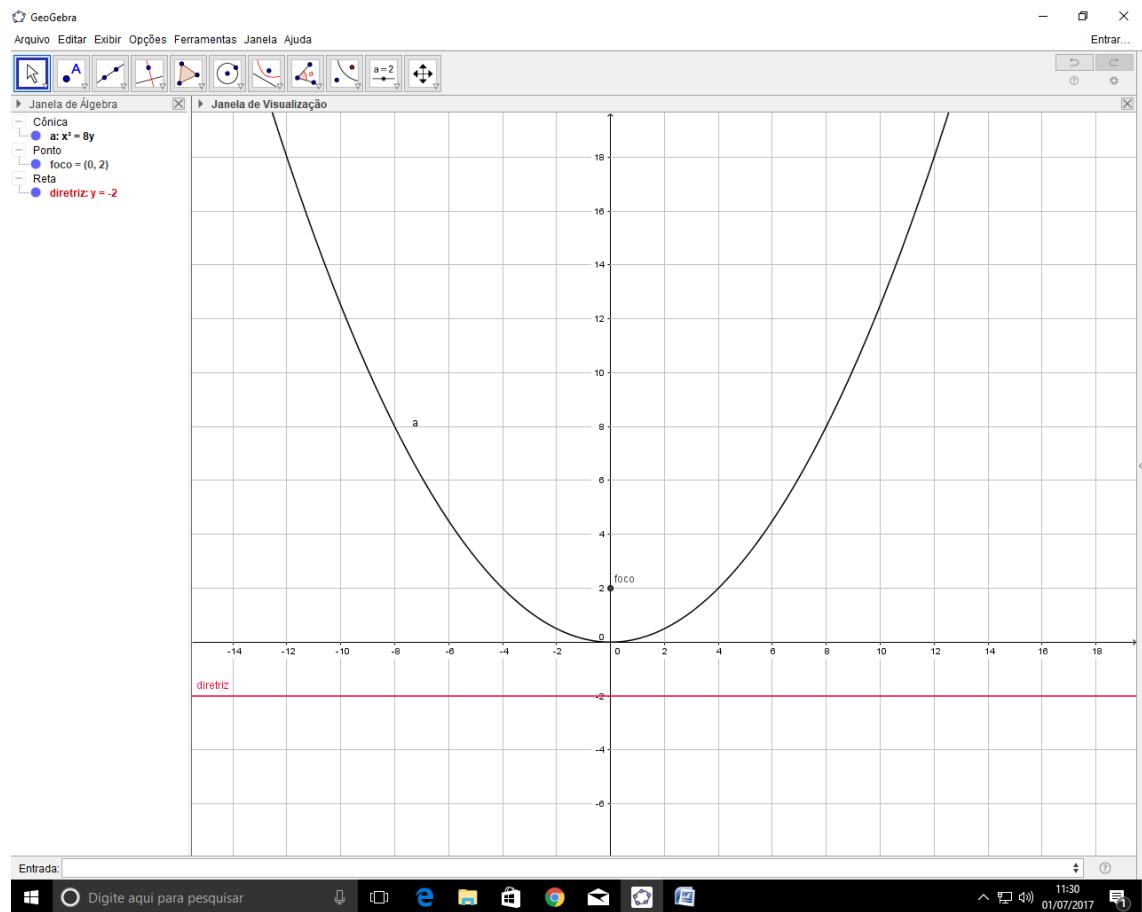
18. Parábola;

Enunciado-determinar o foco e a equação da diretriz da parábola $X^2=8y$:

- Inserimos a equação da parábola

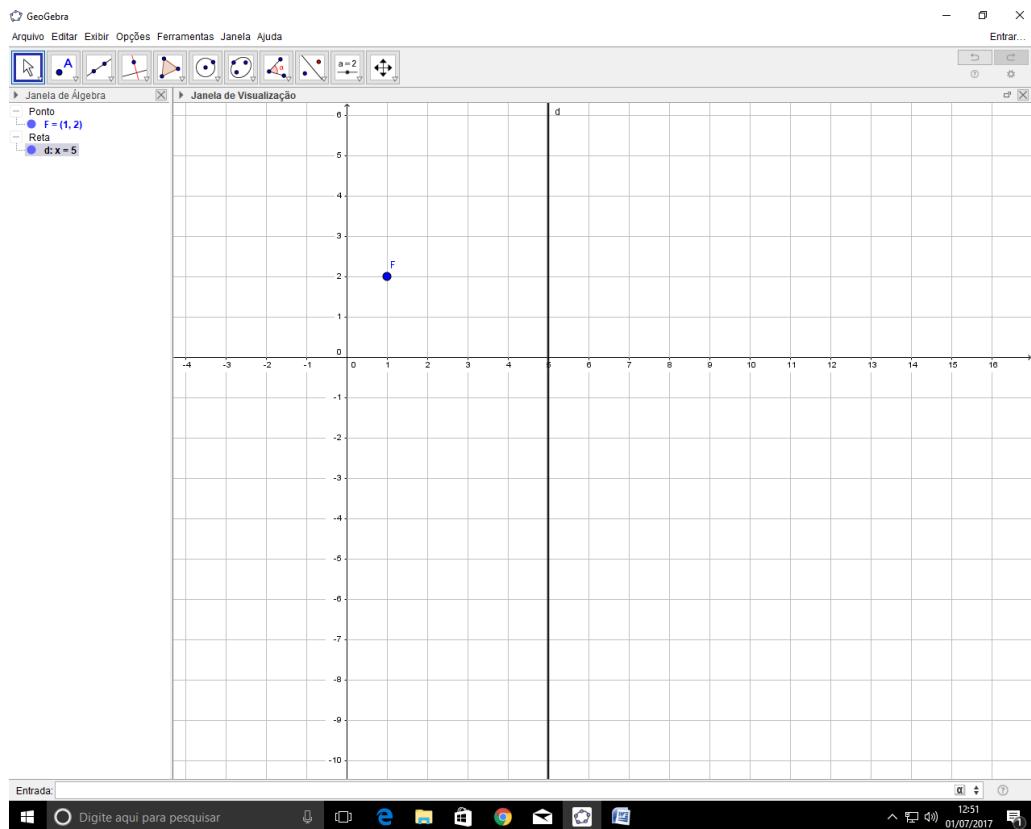


- Usamos as funções foco, e diretriz, oferecidas pelo programa para calcularmos, ambos.

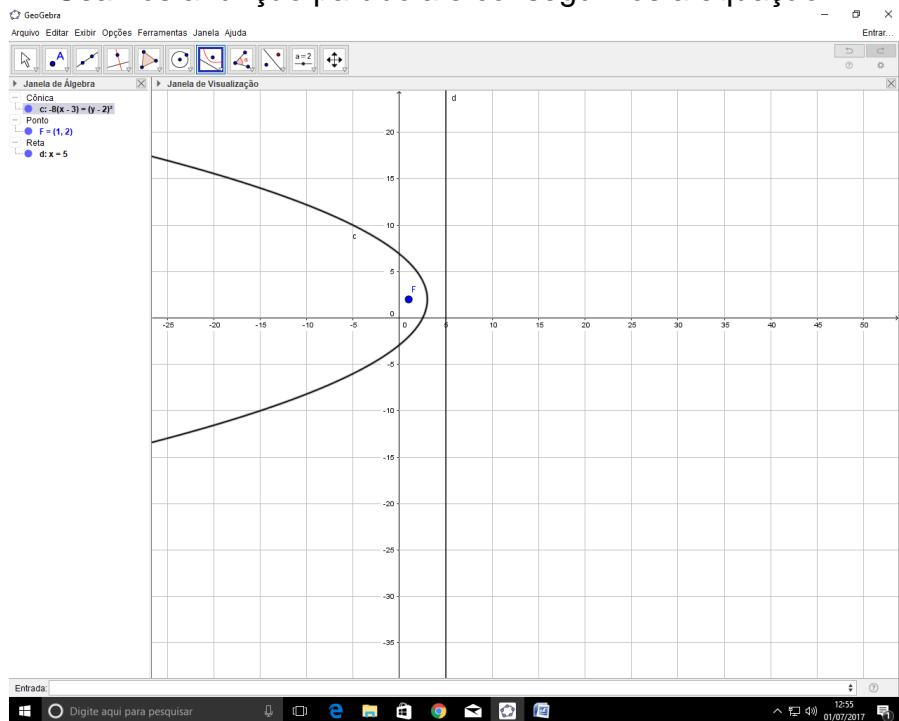


Enunciado-Determinar a equação da parábola de foco em F (1,2), sendo x=5 a equação da diretriz.

- Inserimos as informações do Foco e da diretriz.



➤ Usamos a função parábola e conseguimos a equação



Obtemos a equação da parábola $-8(x-3) = (y-2)^2$.

19. Elipse;

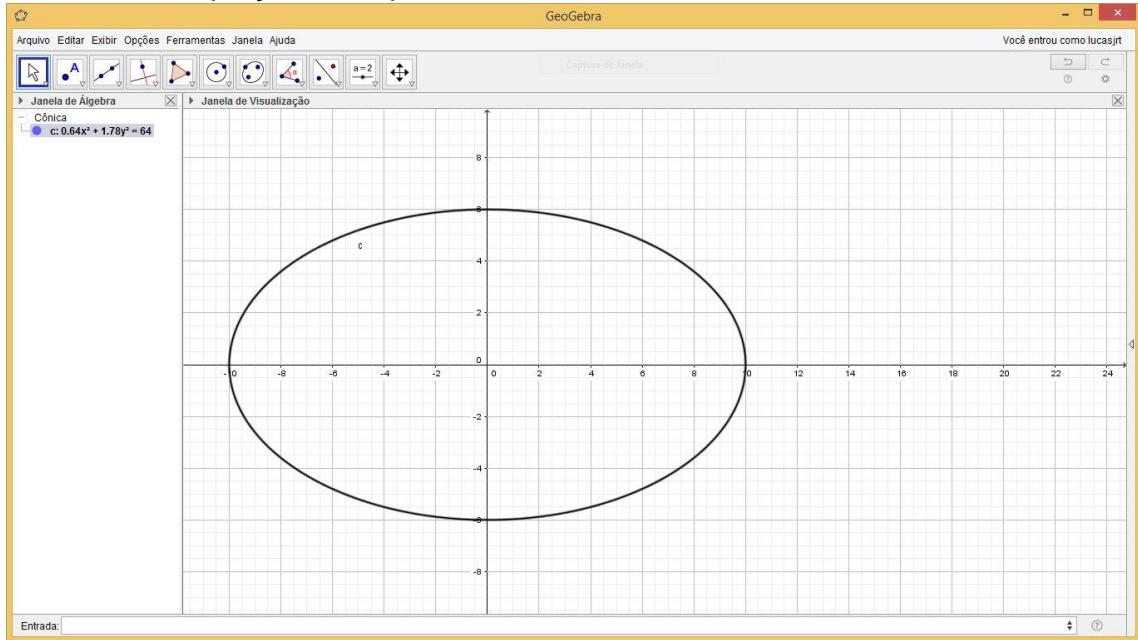
19.1.

➤ Dado o enunciado do livro de Alfredo Steinbruch, página 241:

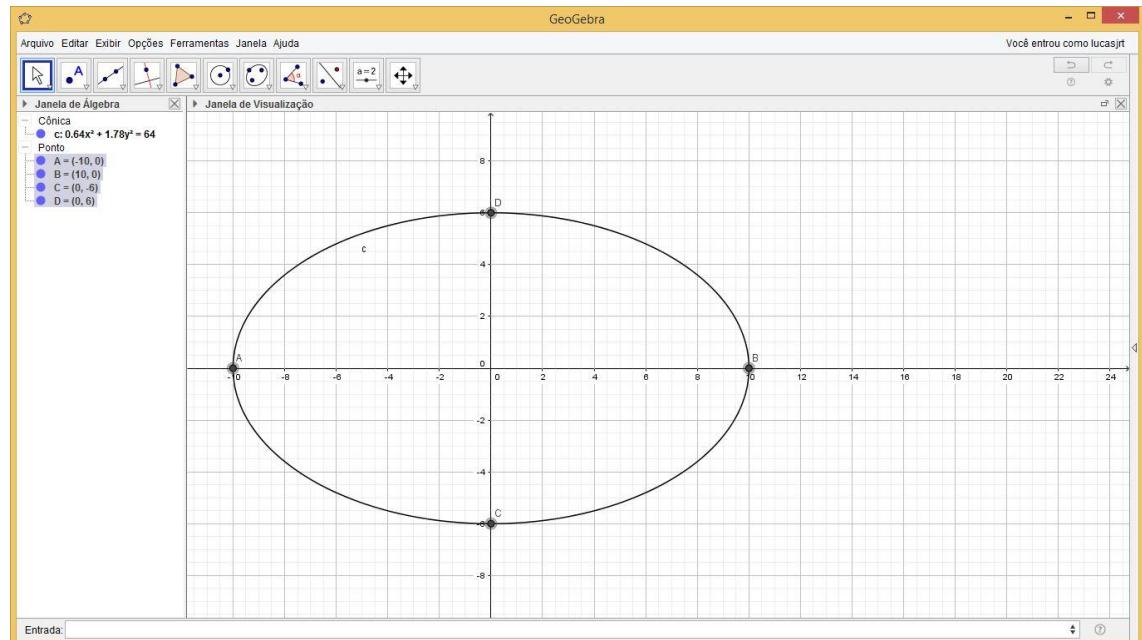
Em cada um dos problemas 1 a 8, determinar os vértices A_1 e A_2 , os focos e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

$$1) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

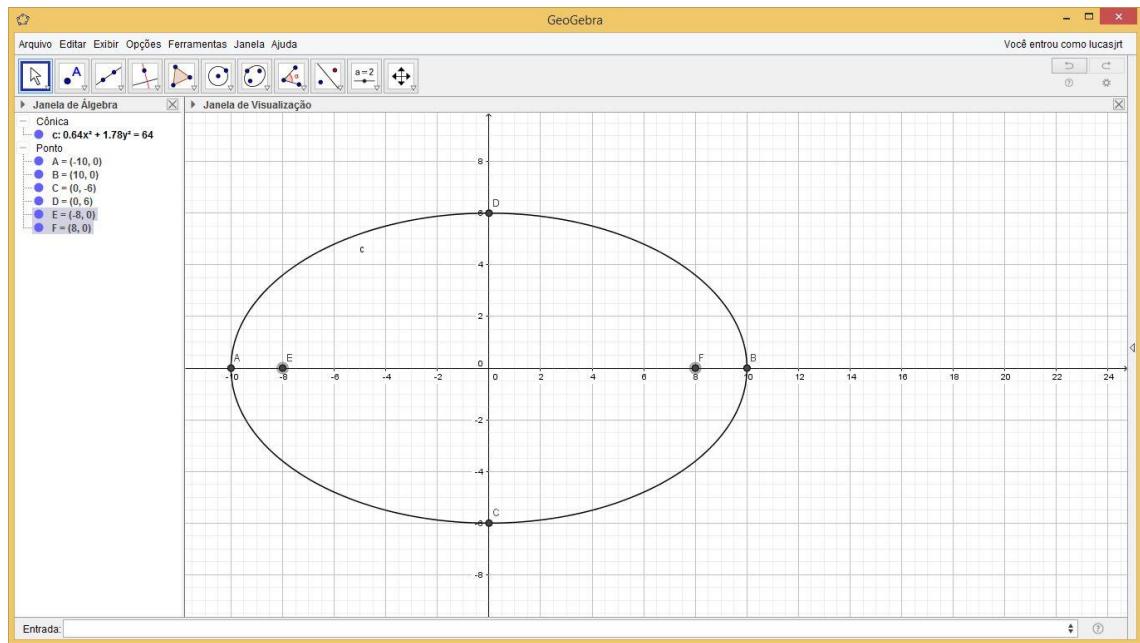
➤ Inserimos a equação da elipse:



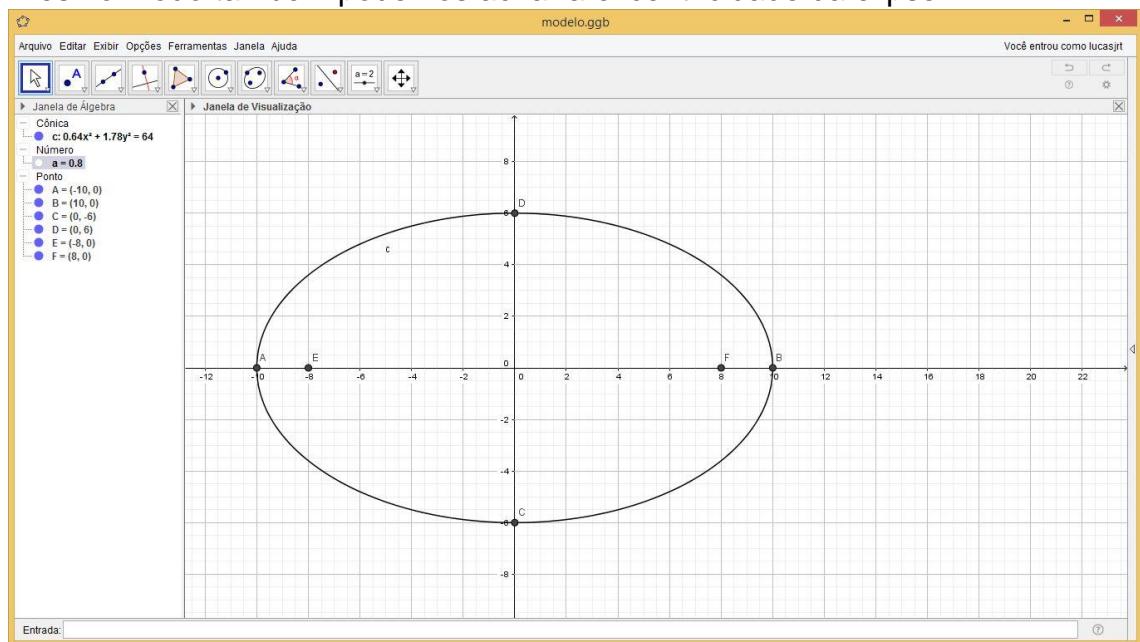
➤ Digitamos vértice para achar os quatro vértices da elipse:



➤ Digitamos foco para achar os focos da elipse:



- Do mesmo modo também podemos achar a excentricidade da elipse:

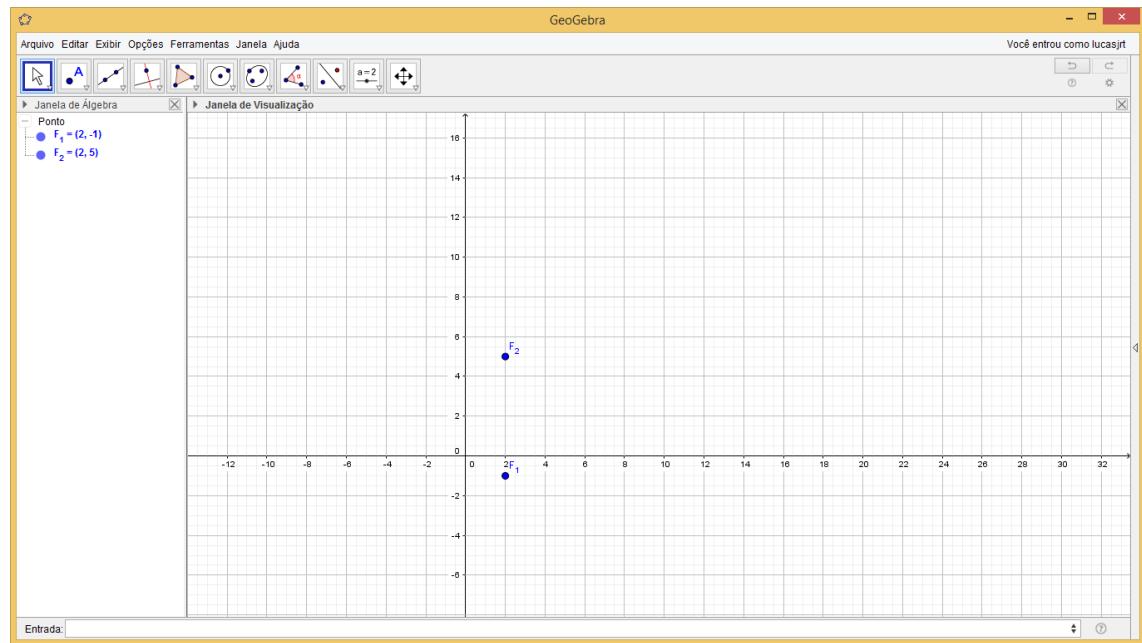


19.2.

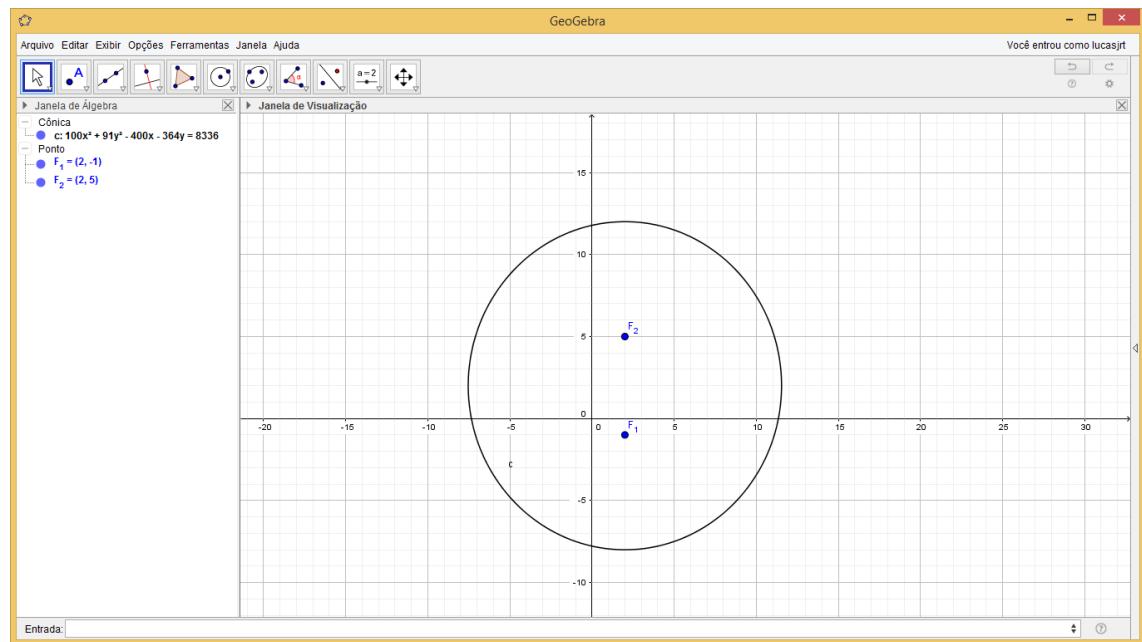
- Dado o enunciado do livro de Alfredo Steinbruch, página 242:

16) eixo maior mede 10 e focos $F_1(2, -1)$ e $F_2(2, 5)$.

- Inserimos os dois focos:



- Inserimos o comando “Elipse” no Geogebra e entramos com dois focos e o segmento maior, e assim obtemos a elipse:



20. Hipérbole;

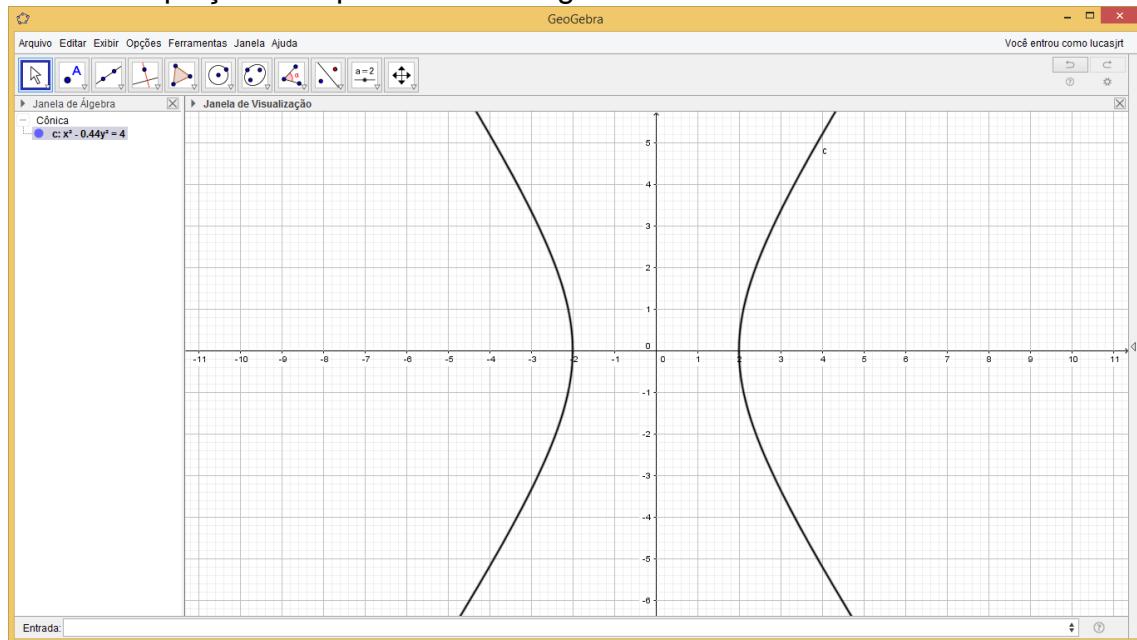
20.1.

- Dado o seguinte enunciado do livro “Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle”:

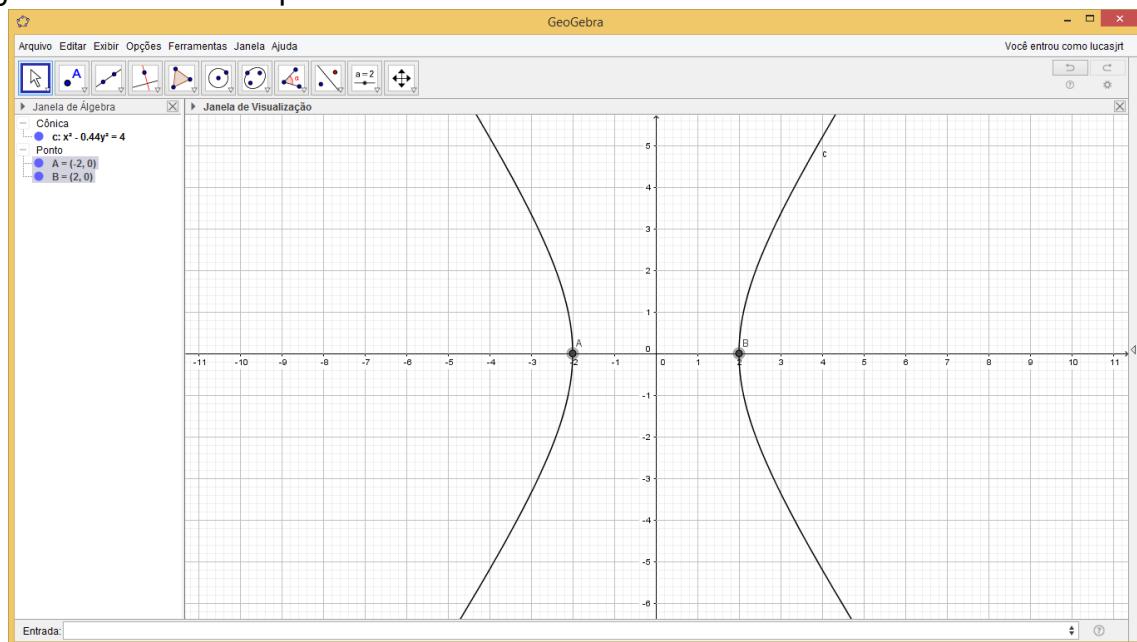
Em cada um dos problemas de 1 a 12, esboçar o gráfico e determinar os vértices, os focos, a excentricidade e equações das assíntotas das hipérboles dadas.

$$1) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

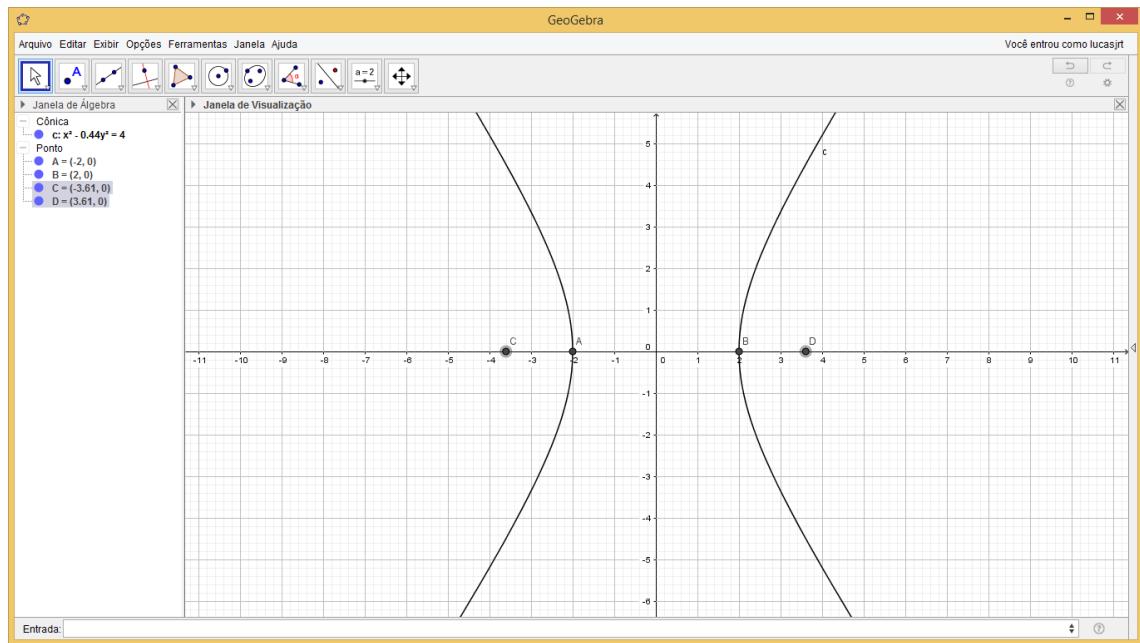
- Inserimos a equação da hipérbole no Geogebra:



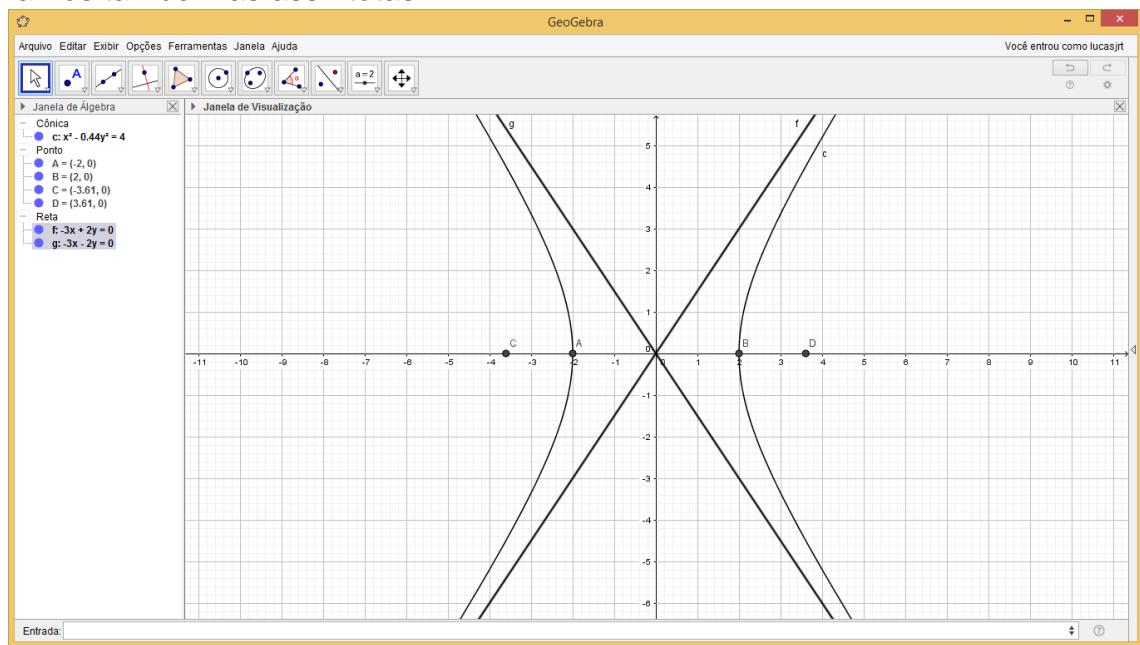
- Digitamos o comando para achar os vértices:



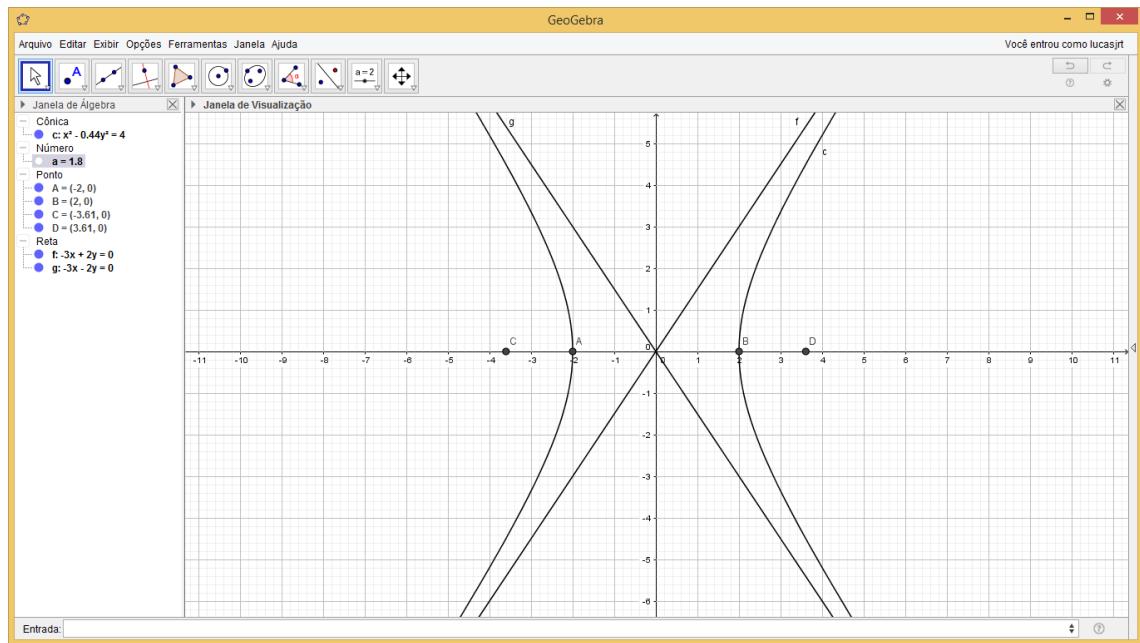
- Do mesmo modo achamos os focos:



➤ Achamos também as assíntotas:

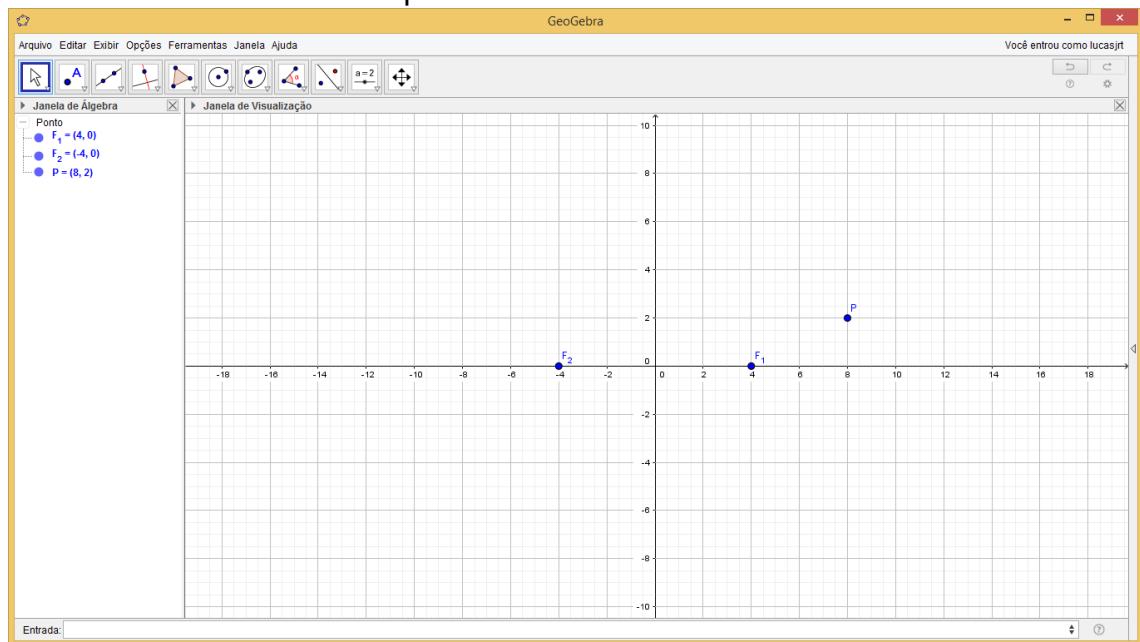


➤ E também encontramos a sua excentricidade:

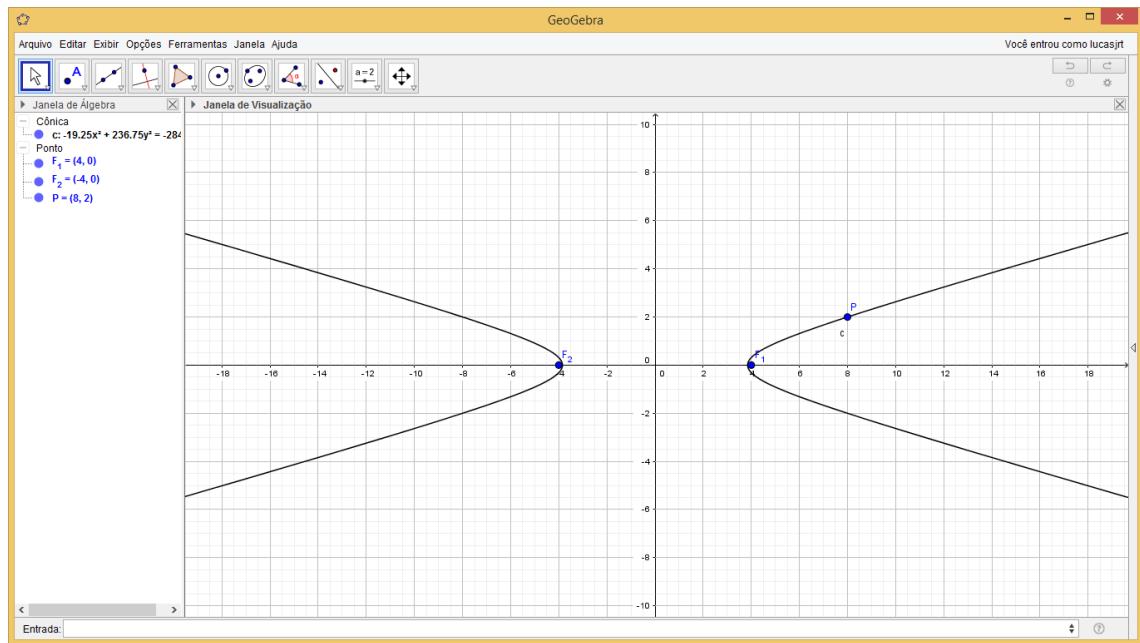


20.2.

- Dado o enunciado do livro “Vetores e Geometria Analítica – Paulo Winterle”:
23) vértices $A(\pm 4, 0)$ e passando por $P(8,2)$;
- Inserimos os dados fornecidos pelo enunciado:



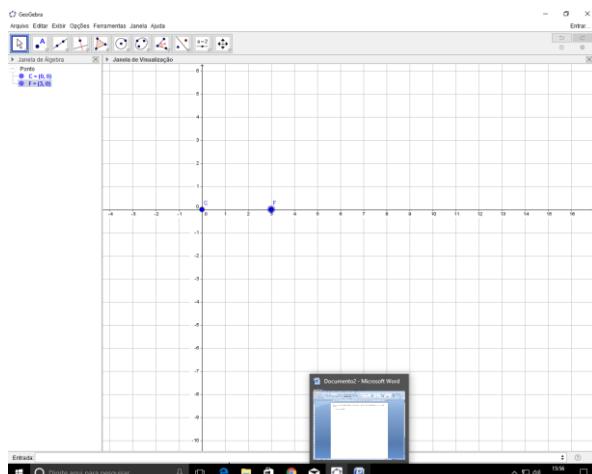
- Digitamos o comando para criar uma hipérbole por 3 pontos e obtemos o seguinte gráfico:



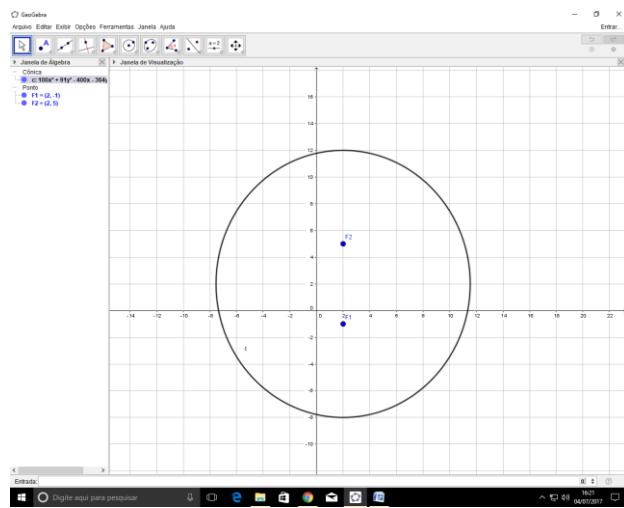
21. Representação;

Enunciado-determine a equação da elipse que possui focos em $F_1(2, -1)$ e $F_2(2, 5)$ e o eixo maior mede 10.

- Inserimos os dados;

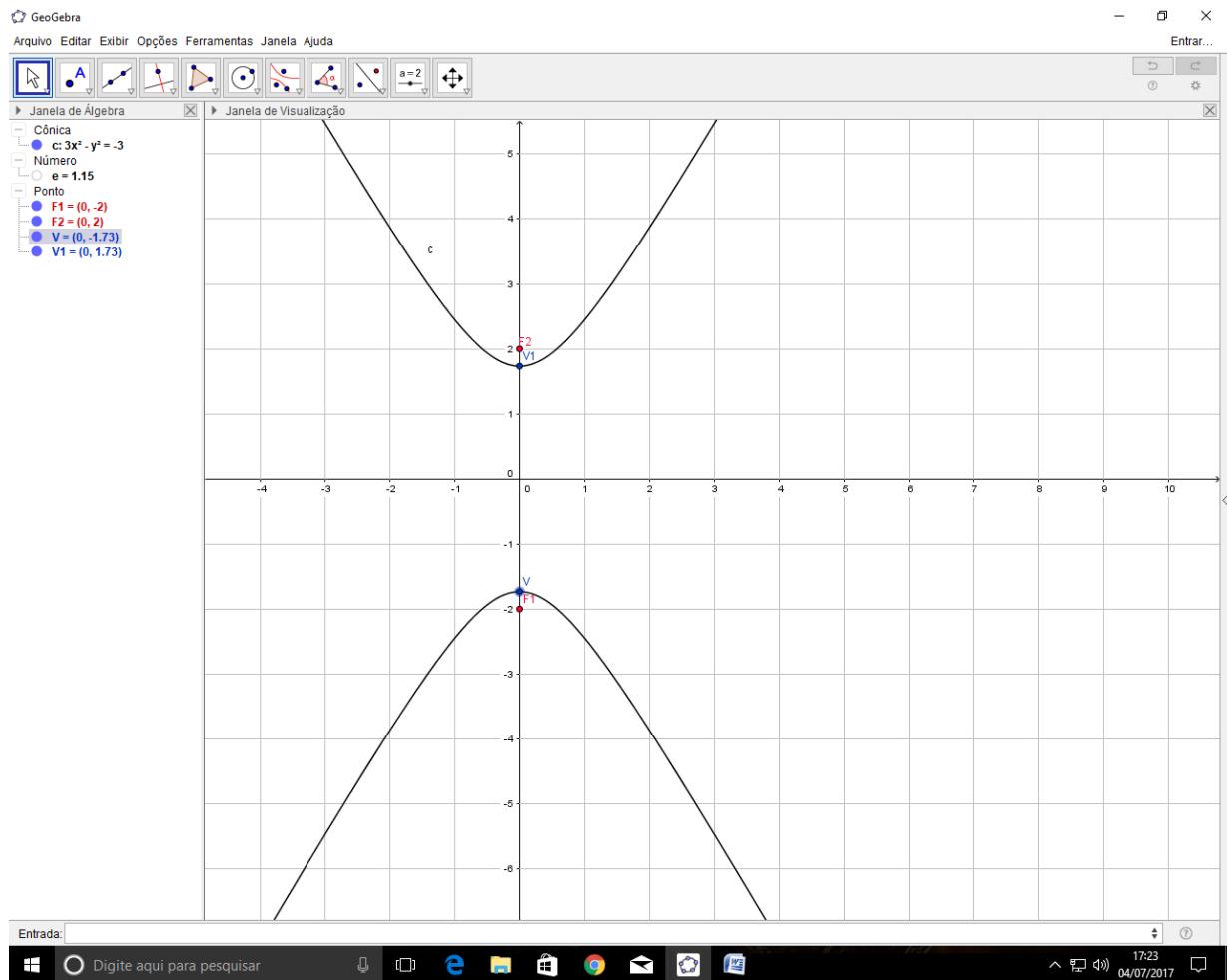


- Usamos a função elipse e recebemos a formula;



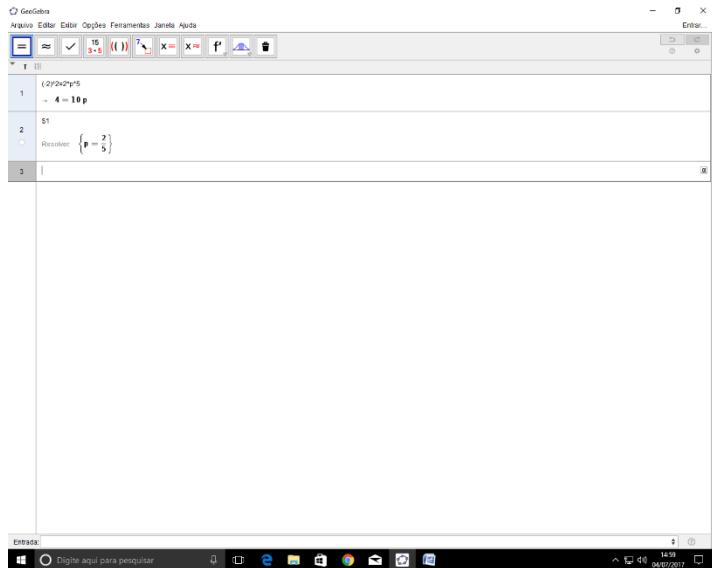
Enunciado-determine os vértices, os focos e a excentricidade da hipérbole de equação $3x^2-y^2+3=0$;

- Inserimos a equação e usamos as funções para achar cada dado pedido;

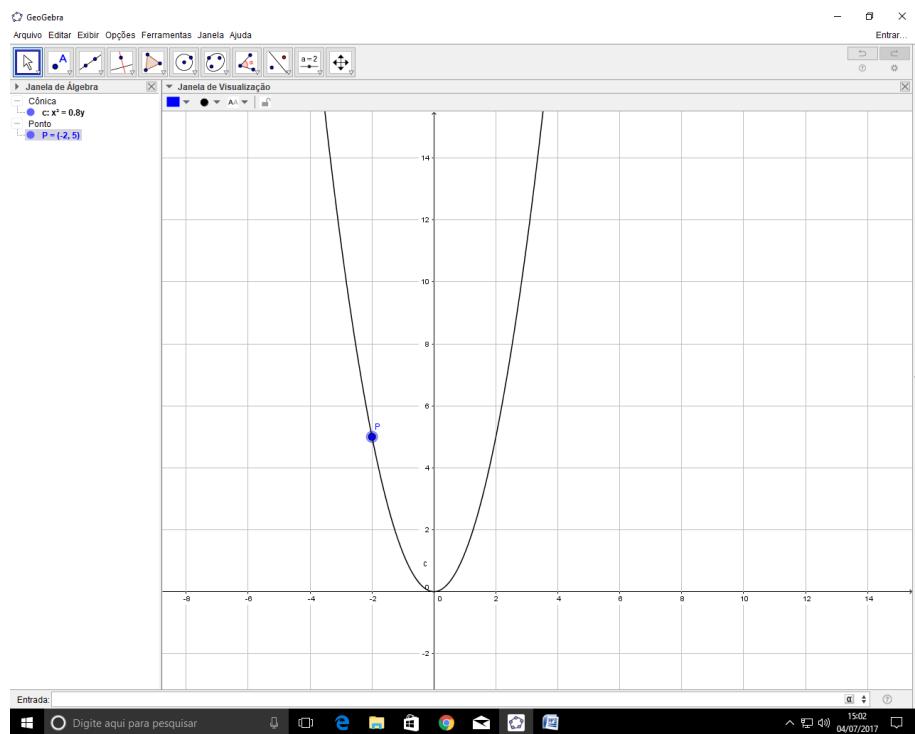


Enunciado-Determine a equação de cada uma das parábolas, sabendo que o vértice é $v(0,0)$ e passa pelo ponto $P(-2,5)$ concavidade para cima.

- A equação da parábola é do tipo $x^2=2py$, portanto basta substituir P.



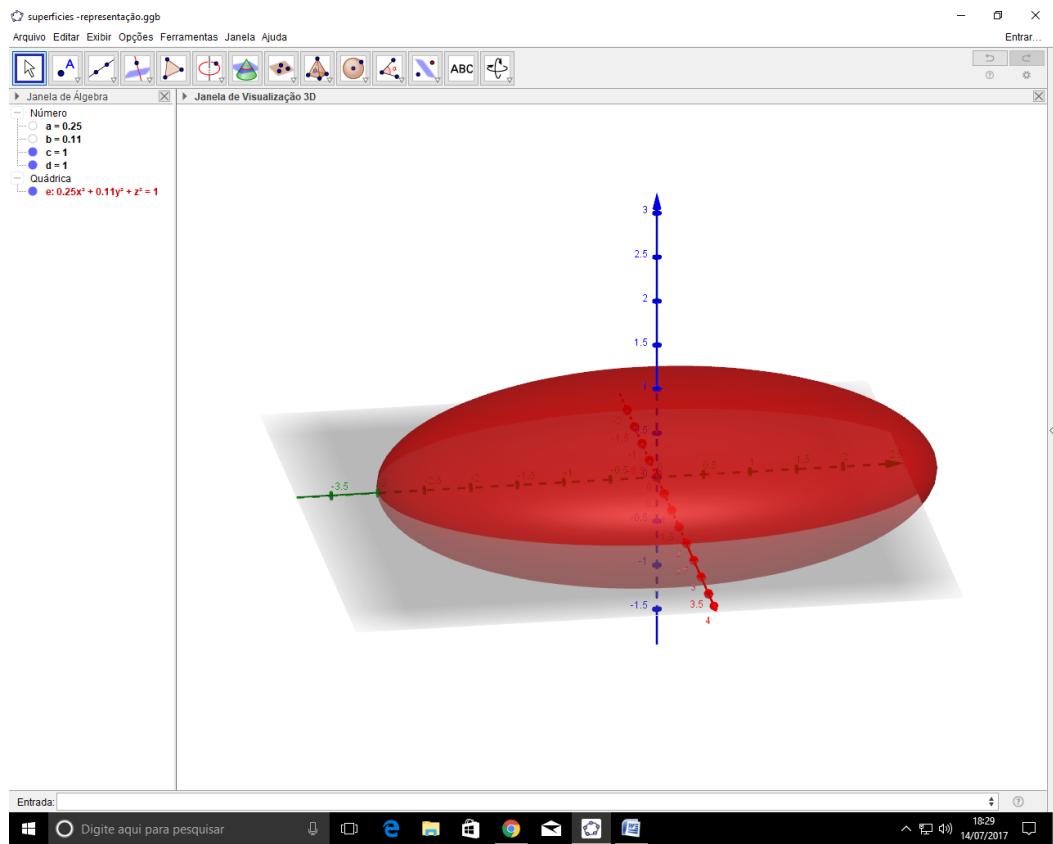
- Obtemos o valor de p e o substituímos da equação geral, que fica $x^2=2(2/5)*y$.



Superfície 22. Representação;

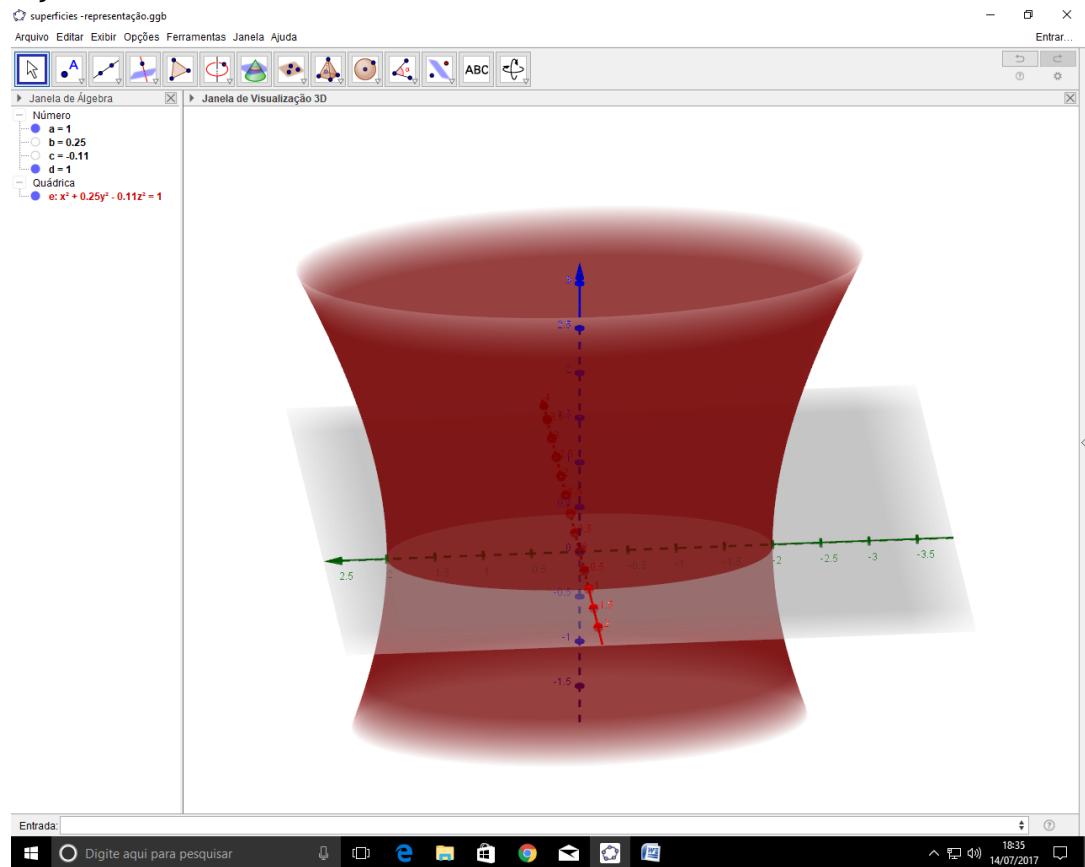
Representação de algumas superfícies de equações específicas.

- Elipsoide
- Equação: $x^2/4+y^2/9+z^2/1=1$



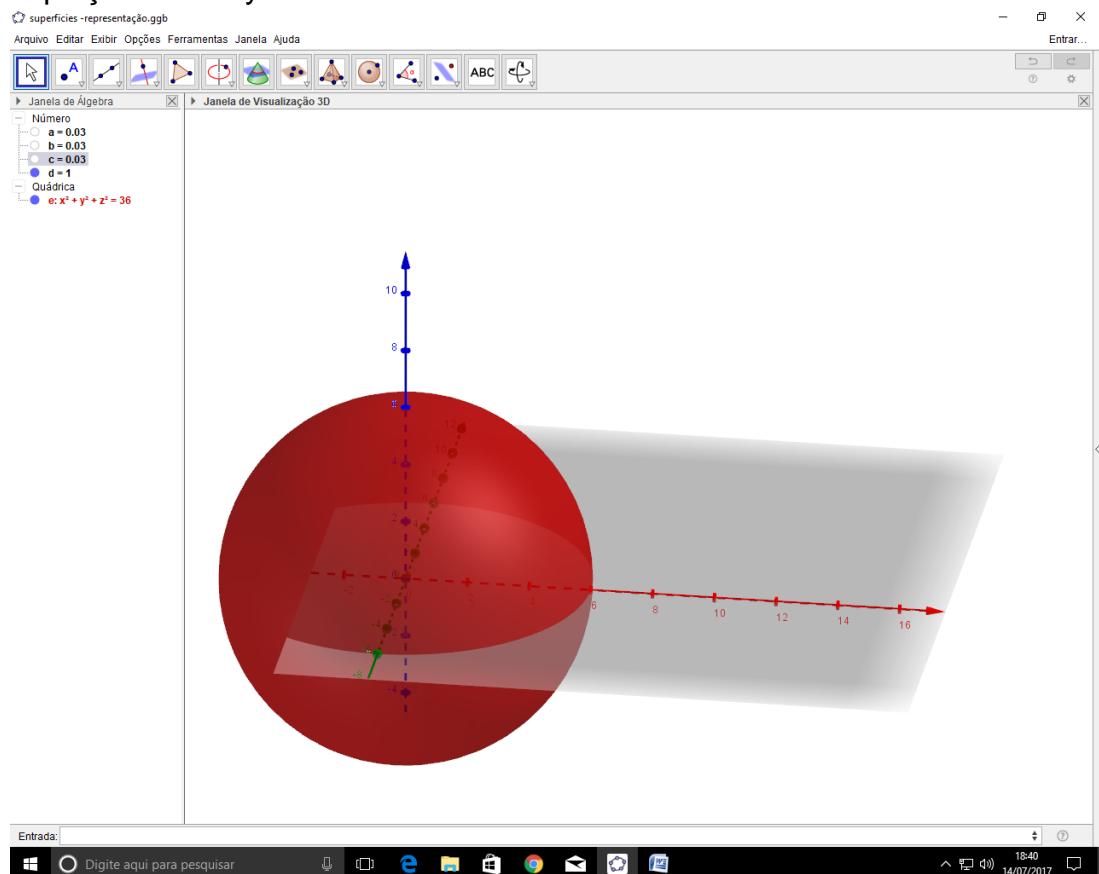
➤ Hiperboloide de uma folha

$$\text{Equação: } x^2/1 + Y^2/4 - z^2/9 = 1$$



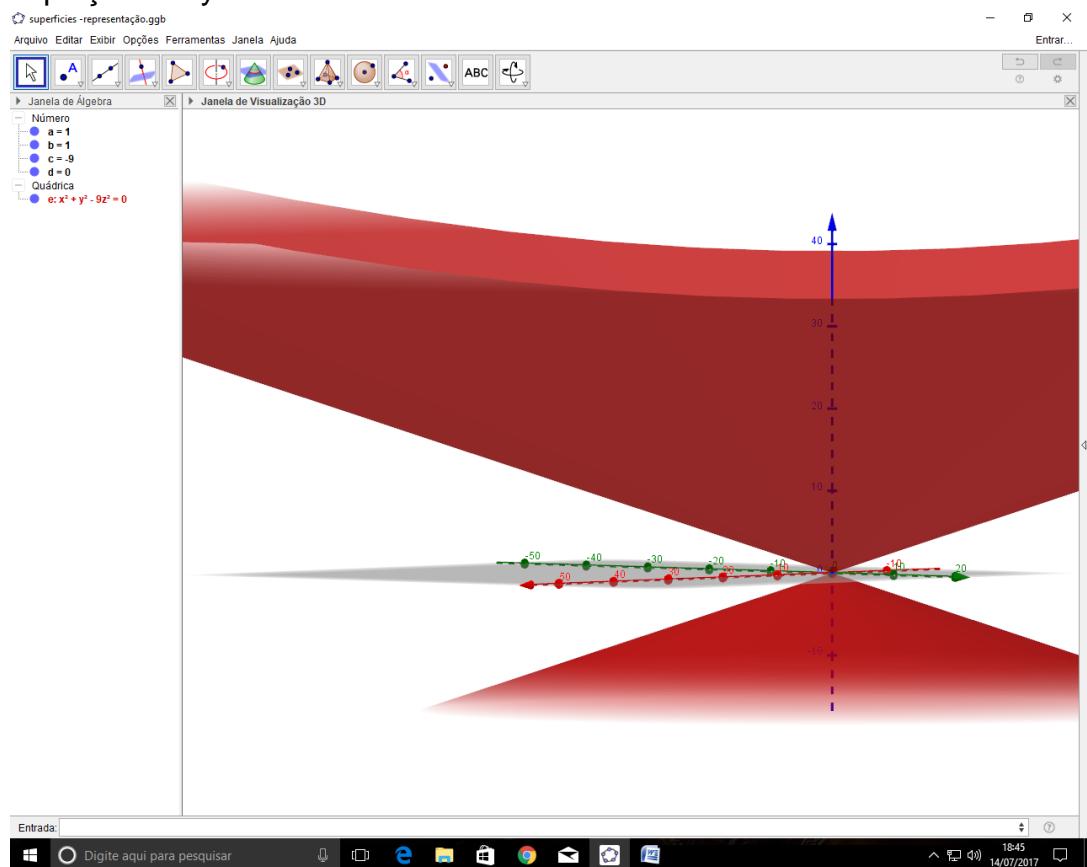
➤ Superfície esférica:

$$\text{Equação: } x^2/36 + y^2/36 + z^2/36 = 1$$



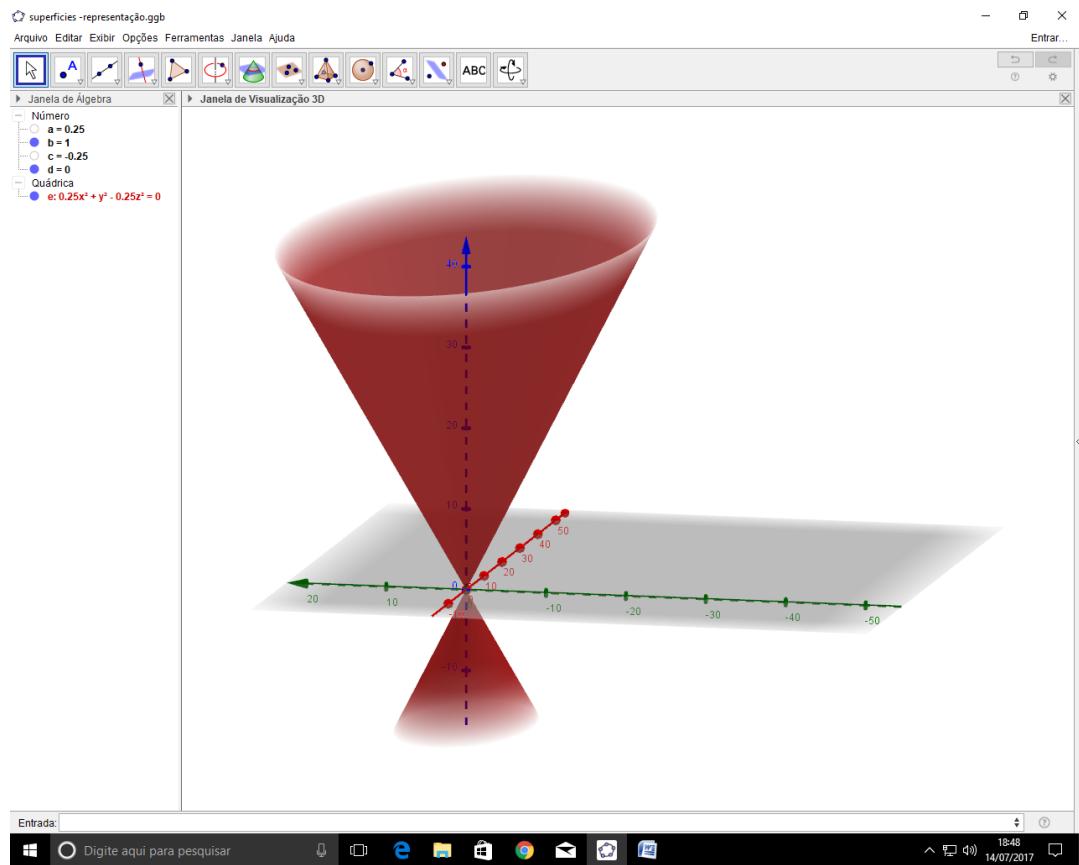
➤ Parabolóide circular:

Equação: $x^2 + y^2 = 9z$



➤ Superfície cônica:

Equação: $x^2/4 + y^2/4 - z^2/4 = 0$



STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Mcgraw-hill, 1987.

Matrizes

23. Operações;

- O programa desenvolvido em C consegue calcular a soma, subtração e multiplicação de matrizes e também a multiplicação de matrizes por algum número real.

1. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = [2 \quad -1]$$

Encontre:

- a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
- b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

- Exercício retirado do livro: Álgebra linear / José Boldrini – 3. de página 11.

- a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

```
Este programa realiza as seguintes operacoes com matrizes:  
1 - Adicao de matrizes  
2 - Subtracao de matrizes  
3 - Multiplicacao entre matrizes  
4 - Multiplicacao de matriz por numero real  
0 - SAIR
```

```
*****  
Digite o numero correspondente ao que deseja fazer: 1
```

```
O programa ira somar uma matriz A com outra B (A+B)  
Digite o tamanho das matrizes. (Ex: 2 3 equivale a matriz 2X3)  
2 3  
Digite a matriz A:  
A[1][1]1  
A[1][2]2  
A[1][3]3  
A[2][1]2  
A[2][2]1  
A[2][3]-1  
Digite a matriz B:  
A[1][1]-2  
A[1][2]0  
A[1][3]1  
A[2][1]3  
A[2][2]0  
A[2][3]1
```

```
Matriz A: | 1.00 2.00 3.00 |
           | 2.00 1.00 -1.00 |
Matriz B: | -2.00 0.00 1.00 |
           | 3.00 0.00 1.00 |
A+B :| -1.00 2.00 4.00 |
      | 5.00 1.00 0.00 |

Digite ENTER para retornar ao menu principal.....
```

- O programa soma as duas matrizes, para isso ele soma os elementos correspondentes para cada posição e mostra como resposta a soma das duas matrizes.

b) A.C

```
Este programa realiza as seguintes operacoes com matrizes:
1 - Adicao de matrizes
2 - Subtracao de matrizes
3 - Multiplicacao entre matrizes
4 - Multiplicacao de matriz por numero real
0 - SAIR
-----
Digite o numero correspondente ao que deseja fazer: 3
```

```
O programa ira multiplicar uma matriz A com outra B (A*B)
Digite o tamanho da matriz A: (Ex: 2 3 equivale a matriz 2X3)
2 3
Digite a matriz A:
A[1][1]1
A[1][2]2
A[1][3]3
A[2][1]2
A[2][2]1
A[2][3]1
Digite o tamanho da matriz B: (Ex: 2 3 equivale a matriz 2X3)
3 1
Digite a matriz B:
A[1][1]-1
A[2][1]2
A[3][1]4
```

```
Matriz A: |  1.00   2.00   3.00  |
           |  2.00   1.00  -1.00  |

Matriz B: |  -1.00  |
           |   2.00  |
           |   4.00  |

Matriz A.B: |  15.00  |
           |  -4.00  |

Digite ENTER para retornar ao menu principal.....
```

- Dado duas matrizes e seus tamanhos, o programa calcula a multiplicação entre elas, para isso primeiramente verifica-se se é possível tal multiplicação, caso positivo ele calcula e mostra na tela a multiplicação entre elas.

24. Determinante;

3. Calcule $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

```
C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1 Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P24 - Determinante.exe"
Na matriz:
    a11 a12 a13
    a21 a23 a23
    a31 a32 a33
Digite o valor de 'a11': 2
Digite o valor de 'a12': 0
Digite o valor de 'a13': -1
Digite o valor de 'a21': 3
Digite o valor de 'a22': 0
Digite o valor de 'a23': 2
Digite o valor de 'a31': 4
Digite o valor de 'a32': -3
Digite o valor de 'a33': 7
    Na matriz:
2.0  0.0  -1.0
3.0  0.0  2.0
4.0  -3.0  7.0
D = 21.00

Process returned 0 (0x0)  execution time : 27.980 s
Press any key to continue.
```

BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L., WETZLER, G. W.
Álgebra Linear. UNICAMP. 3^a ed., editora HARBRA Ltda., São Paulo,
1980.

25. Inversa;

```
C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1 Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P24 - Determinante.exe"
Na matriz:
    a11 a12 a13
    a21 a23 a23
    a31 a32 a33
Digite o valor de 'a11': 2
Digite o valor de 'a12': 0
Digite o valor de 'a13': -1
Digite o valor de 'a21': 3
Digite o valor de 'a22': 0
Digite o valor de 'a23': 2
Digite o valor de 'a31': 4
Digite o valor de 'a32': -3
Digite o valor de 'a33': 7
    Na matriz:
2.0  0.0  -1.0
3.0  0.0  2.0
4.0  -3.0  7.0
D = 21.00

Process returned 0 (0x0)  execution time : 27.980 s
```

1. Calcule a inversa, se existir, da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

```
Digite os elementos de sua matriz 2x2:  
A[1][1] = 1  
A[1][2] = 2  
A[2][1] = 3  
A[2][2] = 4.
```

- Inseridos os números da matriz 2x2 no programa desenvolvido em C, ele calcula, caso exista, a matriz inversa.

```
Matriz :| 1.00  2.00 |  
        | 3.00  4.00 |  
  
Inversa :|-2.00  1.00 |  
        | 1.50 -0.50 |  
  
Process returned 0 (0x0)  execution time : 3.284 s  
Press any key to continue.
```

- É feito da seguinte maneira: Primeiramente é calculado o determinante da matriz, caso seja diferente de 0 ele prossegue com os cálculos, trocando os elementos das posições a₁₁ com o a₂₂, e trocando o sinal dos números correspondentes as posições a₁₂ e a₂₁, após feito isso, é dividido cada elemento da matriz pelo determinante e assim obtida e mostrada a matriz inversa.

Sistemas

26. Crie programas ou modelagens que resolvam sistemas;

$$\text{i) } 9x - y = 2,$$

$$x + 4y = 0$$

```
C:\Users\Diego\OneDrive\UFU\1 Período\GAAL\Trabalho GAAL Thay\P26 - Sistemas.exe"
No sistema
    Ax + By = d
    A1x + B1y = c
Digite o valor de 'A': 9
Digite o valor de 'B': -1
Digite o valor de 'd': 2
Digite o valor de 'A1': 1
Digite o valor de 'B1': 4
Digite o valor de 'c': 0
        9.0x + -1.0y = 2.0
        1.0x + 4.0y = 0.0
Sistema possível e determinado (PD)
S: {0.2, -0.1}

Process returned 0 (0x0)  execution time : 17.330 s
Press any key to continue.
```

BEAN, S. E. P. C.;

KOZAKEVICH D. N. Álgebra Linear I. 2^a Edição. Florianópolis, 2011