Questão 1
Completo
Vale 1,00 ponto(s).

A dinâmica de um oscilador harmônico amortecido e forçado é descrita pela equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \rho\frac{dx}{dt} + F_{\text{ext}}\cos(\omega_{\text{ext}}t),$$

em que x mede a deformação da mola, m é a massa do oscilador, k é a constante da mola, ρ é um coeficiente de viscosidade e F_{ext} é a amplitude de uma força externa harmônica de frequência angular ω_{ext}.

Como visto na disciplina de Física 2, essa equação diferencial tem solução analítica expressa como

$$x(t) = x_{\text{trans}}(t) + x_{\text{est}}(t),$$

em que $x_{\text{est}}(t)$ é a **solução estacionária**, determinada apenas pela força externa e dada por

$$x_{\text{est}} = A_{\text{ext}}\cos(\omega_{\text{ext}}t + \phi),$$

com

$$A_{\text{ext}} = \frac{F_{\text{ext}}/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{\text{ext}}^2\right)^2 + \gamma^2\omega_{\text{ext}}^2}}, \qquad \phi = -\arccos\frac{\omega_0^2 - \omega_{\text{ext}}^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{\text{ext}}^2\right)^2 + \gamma^2\omega_{\text{ext}}^2}},$$

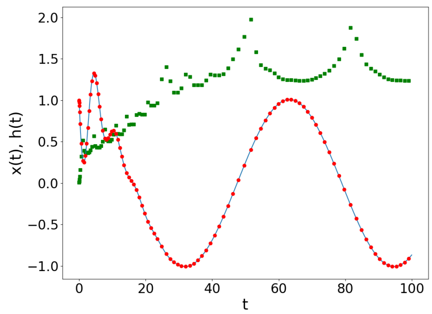
sendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ a **frequência natural** de oscilação do sistema e $\gamma = \rho/m$. Já $x_{\text{trans}}(t)$ é o **transiente da solução**, que carrega as informações das condições iniciais e, no limite de amortecimento subcrítico, pode ser escrito como

$$x_{\text{trans}}(t) = e^{-\gamma t/2}\left[\alpha\cos(\omega t) + \beta\,\text{sen}(\omega t)\right],$$

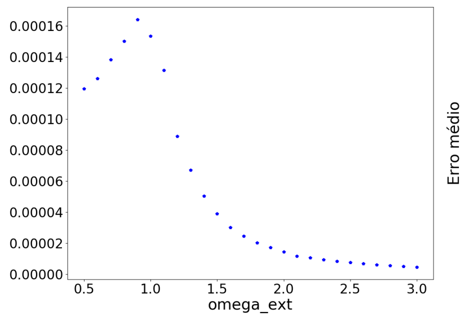
em que α e β são constantes e

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

1. Transforme a equação diferencial de segunda ordem em duas equações diferenciais de primeira ordem, usando as técnicas que aprendeu.
2. Escreva um programa para integrar numericamente as equações resultantes de $t = 0$ até $t = 100$, supondo $k = 1$, $m = 1$, $\rho = 0.4$, $F_{\text{ext}} = 1$, $\omega_{\text{ext}} = 0.1$ e partindo da posição inicial $x_0 = 1$ com uma velocidade inicial $v_0 = -1$. (Todas as unidades estão no SI.) Para realizar a integração numérica, utilize um método adaptativo com extrapolação local, baseado no algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem, impondo uma precisão de 10^{-4} na deformação da mola por unidade de tempo, e partindo de um tamanho inicial de passo de 10^{-2}. Seu programa deve produzir um gráfico que mostre, em função do tempo, a solução exata como uma curva contínua, a solução numérica em pontos vermelhos e o tamanho de cada passo numérico em pontos verdes. Envie seu programa pelo campo mais abaixo. Você deve obter um gráfico semelhante ao da figura a seguir.



3. Com base no programa escrito para o item anterior, escreva um outro programa que produza um gráfico do erro médio cometido em função da frequência ω_{ext} da força externa, quando essa frequência assume valores que vão de $\omega_{\text{ext}} = 0.5$ até $\omega_{\text{ext}} = 3$ com intervalo de 0.1. Os demais parâmetros são iguais aos do item anterior. Esse programa também deve ser submetido pelo campo abaixo, e deve produzir uma figura semelhante à mostrada abaixo.



A que você atribui o pico no erro médio observado para $\omega_{\text{ext}} = 1$?

questao1_3.py

questao1_1e2.py

Histórico de respostas

Passo	Hora	Ação	Estado	Pontos
1	6/04/2020 16:59	Iniciada	Ainda não respondida	

Passo	Hora	Ação	Estado	Pontos
2	8/04/2020 06:01	Salvou: {$a}	Resposta salva	

Questão **2**

Completo

Vale 1,00 ponto(s).

O oscilador harmônico bidimensional tem sua evolução temporal governada pela equação diferencial

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r},$$

em que $\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y$ é um vetor de duas componentes que quantifica o desvio na posição do oscilador em relação ao equilíbrio. Escrevendo $k = m\omega^2$, obtemos

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r},$$

equação vetorial que é equivalente a duas equações escalares

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y.$$

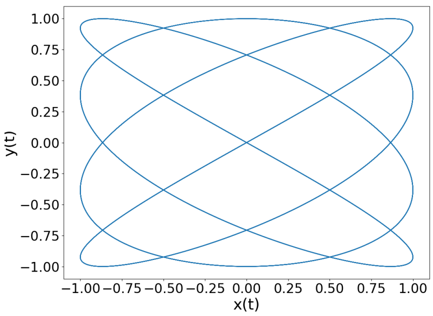
Essa última equação pode ser generalizada para produzir o caso geral de oscilações bidimensionais,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_x^2 x \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_y^2 y,$$

com frequências angulares diferentes para as direções x e y.

Se as frequências ω_x e ω_y forem **comensuráveis**, ou seja, se sua razão for um número racional, a trajetória do oscilador no plano xy é periódica. Do contrário, a trajetória é aberta, e jamais se repete. As curvas produzidas por esse oscilador bidimensional são chamadas de **figuras de Lissajous**.

Converta as últimas duas equações diferenciais escalares de segunda ordem acima em quatro equações diferencias ordinárias de primeira ordem. Utilize as equações resultantes para escrever um programa que as integre numericamente, através de um método adaptativo com extrapolação local baseado no algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem. Imponha uma precisão por unidade de tempo que produza curvas suaves, e parta de condições iniciais $x(0) = 0$, $v_x(0) = 1$, $y(0) = 1$ e $v_y(0) = 0$. Fixe $\omega_x = 1$ e teste diversos valores para ω_y, tentando obter trajetórias fechadas e abertas. Ajuste o tempo de integração em cada caso até se convencer da natureza da trajetória. Um exemplo de trajetória obtida para $\omega_y = 3/4$ está mostrada na figura a seguir.



Também é interessante variar as condições iniciais e observar como as curvas se modificam.

Submeta seu programa pelo campo abaixo.

questao2.py

Histórico de respostas

Passo	Hora	Ação	Estado	Pontos
1	6/04/2020 16:59	Iniciada	Ainda não respondida	
2	8/04/2020 06:01	Salvou: {$a}	Resposta salva	
3	**8/04/2020 06:01**	**Tentativa finalizada**	**Completo**	

◄ Gravação da aula do dia 1 de abril

Seguir para...

Exercícios (PARA REVISÃO) ►