Terceiro EP: Revisão da tentativa

Iniciado em	quarta, 6 mai 2020, 18:57
Estado	Finalizada
Concluída em	terça, 12 mai 2020, 05:14
Tempo empregado	5 dias 10 horas
Avaliar	Ainda não avaliado

Questão 1

Completo

Vale 1,00 ponto(s).

Marcar questão

Texto da questão

Esta questão vale 70% da nota do EP.

Um modelo simples para a propagação de uma epidemia é o modelo **SIR** (**s**uscetíveis, **i**nfectados, **r**ecuperados), que em sua versão original é definido sem preocupações com a distância entre cada indivíduo. (Na linguagem da mecânica estatística, diz-se que se trata de um modelo de "campo médio".) O modelo fornece uma maneira de estimar a evolução da epidemia ao longo do tempo, que é variável independente, representada por t, e é medido em dias.

A ideia é que uma certa região (uma cidade, por exemplo) contém N indivíduos, e inicialmente há $I(0)$ desses indivíduos infectados por uma doença. Indivíduos suscetíveis, cujo número é representado por $S(t)$, são aqueles que, ao entrar em contato com os infectados, podem tornar-se infectados. Por sua vez, os indivíduos infectados curam-se espontaneamente ao longo do tempo, tornando-se indivíduos recuperados, que não mais transmitem a doença e cujo número é representado por $R(t)$.

Eis as hipóteses do modelo.

- A epidemia se propaga em uma escala de tempo suficientemente curta para que não haja aumento significativo no número de indivíduos suscetíveis, seja por nascimentos ou por migrações. Mas pode haver diminuição desse número, pelo contato com indivíduos infectados.
- Cada indivíduo tem em média um certo número b de contatos próximos por dia, sendo um contato próximo definido como aquele que permite a transmissão da doença por um indivíduo infectado. Dos b contatos que

cada indivíduo infectado tem por dia, uma fração $S(t)/N$ se dá com indivíduos suscetíveis, de modo que o número de novos infectados por dia é igual a $b \times (S(t)/N) \times I(t)$.

- Uma fração k dos indivíduos infectados cura-se espontaneamente a cada dia. Por exemplo, se o tempo médio de cura da doença é de três dias, cerca de um terço dos infectados ficarão recuperados a cada dia.

Com base nas hipóteses, podemos escrever as equações diferenciais que descrevem o modelo. Para a evolução temporal do número de indivíduos suscetíveis, devemos ter

$$\frac{dS}{dt} = -b\,\frac{S(t)}{N}\,I(t),$$

com o sinal negativo vindo do fato de que cada novo infectado representa uma diminuição no número de indivíduos suscetíveis. Dividindo ambos os termos da equação acima por N e definindo as frações $s(t) \equiv S(t)/N$ e $i(t) \equiv I(t)/N$ de indivíduos suscetíveis e infectados, obtemos

$$\frac{ds}{dt} = -b\,s(t)i(t)\,. \quad (1)$$

Definindo também a fração $r(t) \equiv R(t)/N$ de indivíduos recuperados, e lembrando da última hipótese acima, a evolução temporal de $r(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dr}{dt} = k\,i(t)\,. \quad (2)$$

Finalmente, dado que a soma das diferentes frações deve ser igual a 1, ou seja,

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1,$$

segue que a equação que fornece a evolução temporal de $i(t)$ é

$$\frac{di}{dt} = b\,s(t)i(t) - k\,i(t)\,. \quad (3)$$

1. Escreva um programa para integrar as equações (1), (2) e (3) até o final da epidemia, ou seja, até que a fração de infectados torne-se desprezivelmente pequena. Utilize o método de integração que considerar apropriado, e indique no campo de texto abaixo que estratégias utilizou para concluir que os resultados são confiáveis e que a epidemia chegou ao fim. Para este item, utilize $i(0) = 10^{-6}$, $b = 1/2$ e $k = 1/14$. Produza gráficos das frações de infectados e de recuperados em função do tempo. Descreva no campo de texto abaixo o comportamento da fração de infectados em função do tempo.
2. Suponha que a fração da população total que pode ser atendida simultaneamente em um certo dia pelo sistema de saúde seja de 4×10^{-4}, e que uma fração de 5×10^{-2} dos indivíduos infectados precise de

atendimento a cada dia. Mantendo o valor de k, determine (com dois algarismos significativos) qual deve ser o máximo valor de b para "achatar a curva" de infectados de tal forma a nunca ultrapassar a capacidade de atendimento. Compare a fração máxima de recuperados ao final da epidemia correspondente a esse valor de b com a fração obtida se $b = 1/2$.

No campo de texto, interprete esse resultado em termos de quantos dias um indivíduo infectado deve permanecer sem ter contatos com indivíduos suscetíveis.

Envie seu programa pelo campo de submissão abaixo.

Item 1

- Para garantir que os resultados sao confiaveis utilizei o metodo de Bulirsch-Stoer, pois sabemos que a quantidade

  $s(t)+i(t)+r(t)=1$

  eh consevada em t.
  E observamos que para cada passo $|s(t)+i(t)+r(t)-1| \leq prec$.

  ```
  Total de passos em que |s(t)+i(t)+r(t)-1|>prec: 0
  ```

- Em primeiro momento nao ha recuperados na populacao, assim os contaminados aumentam. Conforme a doenca se espalha, o numero de suscetiveis diminui freando o crescimento dos infectados ate que a velocidade em que se curam fica maior. A partir deste momento, a quantidade de infectados diminui com seu fator de decaimento exponecial se tornando mais predominante.

Item 2

- `O maximo valor de b para "achatar a curva" de infectados de tal forma a nunca ultrapassar a capacidade de atendimento eh 0.083`

- Eh interessante observar que para sair do regime em que a doenca nao satura o sistema de atendimento precisamos sair tambem do regime em que a pandemia atinge toda a populacao, para o K dado.

  ```
  A fracao maxima de recuperados ao final da pandemia para b = 0.083:
  0.265
  ```

  ```
  A fracao maxima de recuperados ao final da pandemia para b = 1/2:
  0.999
  ```

- `A quantidade de dias que um individuo infectado deve permanecer sem ter contatos com individuos suscetiveis eh aprox. 12 dias.`

Questão 2

Completo

Vale 1,00 ponto(s).

Marcar questão

Texto da questão

Esta questão vale 30% da nota do EP.

A reação de Belousov-Zhabotinsky é um oscilador químico, um coquetel de substâncias químicas que, quando aquecido, passa por uma série de reações que fazem oscilar entre dois extremos as concentrações químicas. Pode-se adicionar à reação um corante que muda de cor dependendo das concentrações, de modo a acompanhar a cor da mistura alternar-se enquanto a mistura permanece aquecida.

Para esse tipo de oscilador químico, o físico Ilya Prigogine formulou um modelo matemático que batizou de "bruxelador", em homenagem a Bruxelas, cidade em que morava. As equações do bruxelador são

$$\frac{dx}{dt} = 1 - (b+1)x + ax^2y, \qquad \frac{dy}{dt} = bx - ax^2y\,.$$

Aqui, x e y representam concentrações de substâncias químicas e a e b são constantes positivas.

Escreva um programa para resolver essas equações para o caso $a = 1$ e $b = 3$, com condições iniciais $x = y = 0$, utilizando o algoritmo de Bulirsch-Stoer adaptativo com uma precisão mínima de 10^{-10} por unidade de tempo tanto para x quanto para y. Calcule uma solução de $t = 0$ e $t = 20$, inicialmente utilizando um único intervalo de tempo de tamanho $H = 20$. Permita um máximo de 8 passos de ponto médio modificado em um intervalo antes de dividi-lo em 2 e tentar novamente.

Faça um só gráfico contendo suas soluções para x e y em função do tempo, e utilize pontos para marcar os limites de cada intervalo de tempo. Você deve observar que os pontos tornam-se mais próximos nas regiões em que as variáveis mudam mais rapidamente.

Envie seu programa pelo campo abaixo.