

INTRODUÇÃO AO CAOS  
Um curso básico, com simulações  
numéricas e análise de dados  
experimentais.



José Carlos Sartorelli

3 de agosto de 2017

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Sistema de Lorenz . . . . .	6
1.1.1	Convecção de Rayleigh-Bernard . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Equações diferenciais não lineares.</b>	<b>10</b>
2.1	Equações diferenciais autônomas . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Propriedades de Sistemas caóticos</b>	<b>16</b>
3.1	Parâmetros de controle . . . . .	17
3.2	Bacias de atração . . . . .	18
3.3	Seção de Poincaré . . . . .	19
3.4	Reconstrução do espaço de fases . . . . .	21
3.5	Pontos fixos/estabilidade . . . . .	24
3.6	Bifurcações . . . . .	30
3.6.1	Bifurcação sela-nó . . . . .	30
3.6.2	Bifurcação de Hopf . . . . .	31
3.7	Expoentes de Lyapunov . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Exemplos de Sistemas caóticos - Fluxo</b>	<b>37</b>
4.1	Circuitos eletrônicos . . . . .	37
4.1.1	Circuito oscilador linear . . . . .	38
4.1.2	Circuito de Matsumoto-Chua (MC) . . . . .	40
4.1.3	Lab1: Análise de dados experimentais do Circuito de MC . . . . .	46
4.1.4	Circuito de Rössler - Desafio . . . . .	47
4.2	Sistemas Mecânicos . . . . .	47
4.2.1	Pêndulo paramétrico . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Mapas</b>	<b>50</b>
5.1	Mapas unidimensionais . . . . .	50
5.1.1	Mapa logístico . . . . .	52

5.1.2	Pontos fixos/estabilidade . . . . .	55
5.1.3	Mapa quadrático . . . . .	57
5.1.4	expoente de Lyapunov . . . . .	58
5.1.5	Cenário de Feigenbaum . . . . .	59
5.2	Mapas bidimensionais . . . . .	60
5.2.1	mapa de Hénon . . . . .	61
5.2.2	Pontos fixos/estabilidade . . . . .	61
5.2.3	Mapa do círculo . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Exemplos de sistemas caóticos/Mapas</b>	<b>63</b>
6.1	Dinâmica de formação de gotas d'água . . . . .	63
6.1.1	Lab 2: Análise de dados experimentais: Gotas . . . . .	67
6.2	Dinâmica de formação de bolhas em fluidos viscosos . . . . .	67
6.2.1	Lab 3: Análise de dados experimentais: . . . . .	68
<b>A</b>	<b>Métodos de integração numérica</b>	<b>70</b>
A.1	Método de Euler . . . . .	73
A.2	Método de Euler modificado . . . . .	74
A.2.1	Previsão/correção . . . . .	74
A.3	Método de Runge-Kutta . . . . .	75
<b>B</b>	<b>MatLab</b>	<b>79</b>
B.1	COMMAND WINDOW . . . . .	79
B.1.1	Instruções ou comandos elementares . . . . .	79
B.1.2	Mais operações da biblioteca do MatLaB. . . . .	85
B.2	Funções . . . . .	86
B.2.1	Operações cíclicas. . . . .	88
B.2.2	Operações de comparação . . . . .	89
B.2.3	Funções dentro de funções . . . . .	89
B.3	Comandos diversos . . . . .	91
<b>C</b>	<b>Octave</b>	<b>92</b>
C.1	Instalação . . . . .	92
C.1.1	Windows: . . . . .	92
C.1.2	Linux . . . . .	93
C.1.3	Comandos semelhantes aos do Matlab . . . . .	93
C.1.4	Comandos diferentes dos Matlab: . . . . .	94
<b>D</b>	<b>Atividades</b>	<b>96</b>
<b>E</b>	<b>Exercícios programados:</b>	<b>97</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Vamos utilizar o movimento de um corpo em queda para apresentarmos algumas definições.

Pegue um pedaço de papel e dobre-o. Com uma tesoura corte simultaneamente as duas folhas no formato de um triângulo de 5cm de lado, aproximadamente, marque um dos vértices com uma caneta. Pegue uma das folhas e amasse-a formando uma bolinha. Tomando o vértice de uma mesa como referência deixe a bolinha cair e com um giz marque o ponto atingido no piso (para facilitar e para não sujar o piso coloque uma folha de papel em branco com o centro da folha na vertical que passa pelo vértice da mesa). Repita o procedimento procurando colocar a bolinha *exatamente na mesma posição inicial* da anterior. Repetindo um grande número de vezes você obterá, no papel, uma figura parecida com a mostrada na 1.1(a)

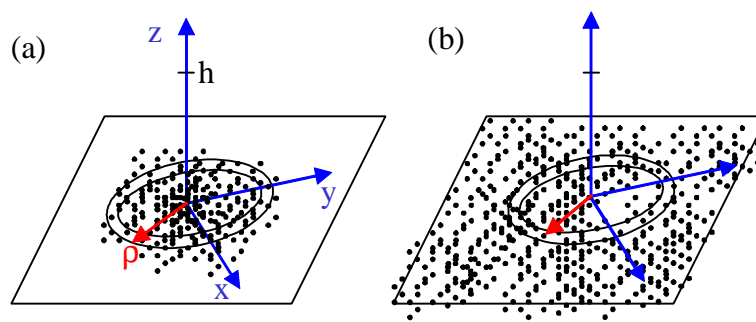


Figura 1.1: O eixo  $z$  está sobre a linha vertical que passa pelo vértice da mesa cuja altura é  $h$ . O piso define o plano  $xy$ .

O movimento da bolinha em queda é descrito pela equação:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1.1)$$

onde  $m$  é a massa da bolinha,  $\vec{F}$  é força que atua na bolinha, cuja forma vamos agora discutir. Se o movimento for no vácuo ou se a resistência do ar for desprezível a bolinha estará sujeita apenas à aceleração da gravidade e a equação 1.1 é reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -g \end{aligned} \quad (1.2)$$

com as condições iniciais  $x(0) = y(0) = 0$  e  $z(0) = h$ , e se a velocidade inicial  $\vec{v}(0) = (v_x(0), v_y(0), v_z(0))$  for nula a solução de equação 1.2 é:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

, portanto a trajetória é a vertical que passa pelo vértice da mesa.

Apesar de sempre atingir o plano  $xy$  próximo do eixo  $z$  por que a bolinha não cai sempre na mesma vertical? Isto não acontece, por que não conseguimos colocar a bolinha *exatamente na mesma condição inicial*. Cada vez que colocamos a bolinha na posição inicial, apesar de todo cuidado que tenhamos tomado, não podemos garantir que ao soltá-la as componentes da velocidade inicial serão nulas, a própria bolinha não é exatamente esférica, e também não tem densidade uniforme e portanto pode sofrer algum torque e rodar em torno de um eixo. Portanto, as condições iniciais são colocadas aleatoriamente em torno de  $x = y = 0, z = h$ , e  $\vec{v} = 0$ , e esta imprecisão nas condições iniciais faz com que a bolinha não siga exatamente a mesma trajetória. Tomando-se um elemento de área  $2\pi\rho d\rho$  (vide figura 1.1(a)) sobre o plano  $xy$  podemos contar o número  $n$  de vezes que a bolinha atingiu esta elemento de área. Quanto mais perto da origem ( $\rho \rightarrow 0$ ) maior é  $n$ . Como as condições iniciais foram colocadas aleatoriamente espera-se que a distribuição por unidade de área  $N(\rho)$  seja uma gaussiana:

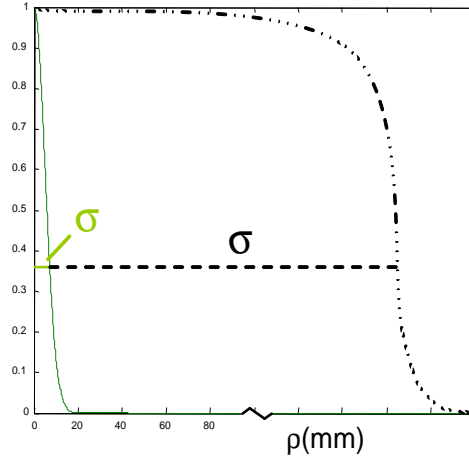


Figura 1.2: Linha contínua: distribuição gaussiana dos pontos do plano  $xy$  atingidos pela bolinha de papel. Linha tracejada: distribuição dos pontos atingidos pela folhinha, que pode ser pensada como sendo gaussiana porém de largura muito grande.

$$N(\rho) = N_0 e^{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}} \quad (1.4)$$

onde  $\sigma$  é a largura da distribuição. Portanto, a bolinha cairá  $\sim 63\%$  do número de lançamentos dentro de uma distância  $\rho$  menor que  $\sigma$ , e podemos dizer que a bolinha cairá sempre na mesma vertical com uma precisão  $\sigma$ .

**Exercício 1** *Demonstre que  $\sim 63\%$  do número de lançamentos cairá dentro de uma distância  $\rho$  menor que  $\sigma$ .*

*Sugestão: Normalize a equação 1.4, a fração é dada pela integral até  $\sigma$ .*

Agora repita o procedimento com a folhinha triangular com a marca vermelha sempre apontando para uma direção de referência, por exemplo uma das arestas da mesa. Agora você verá que a folhinha, na maioria das vezes, não atinge o plano  $xy$  próximo ao eixo  $z$ , e nem a marca vermelha aponta para a mesma direção. Repetindo o procedimento para um número muito grande de vezes você verá que os pontos atingidos são distribuídos uniformemente sobre o plano  $xy$ , conforme ilustrado na figura 1.1(b). A distribuição dos pontos atingidos pode ser pensada como sendo uma distribuição gaussiana muito larga, como ilustrado na figura 1.2.

Neste caso a resistência do ar não pode ser desprezada, a superfície da folhinha também não é plana, e para cada lançamento o efeito da resistência do ar é diferente e a força  $\vec{F}$  (equação 1.1) tem uma forma muito complicada.

O que nos interessa é que no caso da bolinha o movimento é totalmente previsível, isto é, em cada lançamento a bolinha atingirá o plano  $xy$  sempre no mesmo ponto  $z = 0 \pm \sigma$  e sempre com o mesmo intervalo de tempo. No caso da folhinha, o movimento é totalmente imprevisível, pois a probabilidade de cada ponto no plano  $xy$  ser atingido é uniforme. Resumindo, temos dois tipos de movimento um previsível e outro imprevisível para qualquer instante de tempo.

Vamos imaginar uma situação intermediária,. isto é, a distribuição dos pontos é dada figura 1.3.

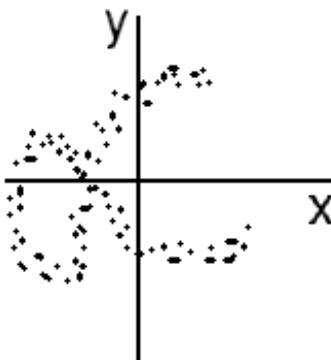


Figura 1.3: Uma distribuição de um lançamento hipotético em que o movimento não é totalmente previsível e nem totalmente imprevisível.

Neste caso você não sabe qual o ponto do plano  $xy$  o objeto lançado atingirá mas sabe que o atingirá em uma certa região aproximadamente delimitada no plano  $xy$ , e cujos pontos atingidos não tem necessariamente uma distribuição gaussiana.

Resumindo, temos sistemas que não apresentam previsibilidade alguma, como o movimento das moléculas de um gás, e que são tratados pela física estatística. Temos também sistemas que são totalmente previsíveis regidos por uma dinâmica linear, e outros que apresentam alguma previsibilidade regidos por uma dinâmica não linear e que foi nomeado por J. A. Yorke por sistemas caóticos, apesar dos amigos terem chamado a sua atenção para a polêmica que este nome poderia gerar. Ambos os casos são sistemas determinísticos.

Dada uma equação diferencial, ela é linear se tiver duas ou mais soluções

cuja combinação linear também é solução da equação. Exemplo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_o^2 x, \quad (1.5)$$

com soluções  $x_1 = A \cos(\omega_o t)$  e  $x_2 = B \sin(\omega_o t)$  e substituindo  $x = A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t)$  no lado esquerdo da equação 1.5:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t))}{dt^2} &= \\ \frac{d^2 A \cos(\omega_o t)}{dt^2} + \frac{d^2 B \sin(\omega_o t)}{dt^2} &= \\ -\omega_o^2 A \cos(\omega_o t) - \omega_o^2 B \sin(\omega_o t) &= -\omega_o^2 x. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Um exemplo de equação diferencial não linear, isto é, a combinação linear de suas soluções não é solução da equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_o^2 x^3. \quad (1.7)$$

Supondo que  $x_1$  e  $x_2$  sejam soluções de 1.7 e que  $x = x_1 + x_2$  temos:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -\omega_o^2 x_1^3 - \omega_o^2 x_2^3 \neq -\omega_o^2 (x_1 + x_2)^3. \quad (1.8)$$

Os sistemas caóticos são aqueles que apresentam alguma previsibilidade, como exemplo podemos pensar nas condições climáticas, que podem ser previstas para um, dois ou três dias, mas não para longos períodos de tempo, como um mês, um ano. Estes sistemas são descritos por uma dinâmica não linear, que usualmente não têm soluções algébricas e precisam ser calculadas numericamente. Os sistemas caóticos apresentam sensibilidade às condições iniciais, isto é, dadas duas condições iniciais próximas uma trajetória se afasta da outra exponencialmente, com ilustrado na 1.4.

Poincaré já havia percebido nos fins do século XIX que sistema de 3 corpos apresentam sensibilidade às condições iniciais. Se a diferença entre as duas condições iniciais for  $\Delta d_o$ , e  $\Delta d$  a diferença entre as duas trajetórias no instante  $t$ , temos  $\Delta d = \Delta d_o e^{\lambda t}$ , onde  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov, portanto os sistemas são definidos como caóticos se tiverem  $\lambda$  positivo, caso contrário os sistemas serão previsíveis. Nos capítulos seguintes veremos quais são as condições necessárias para um sistema não linear apresentar comportamento caótico. Antes vejamos um pouco da história moderna do início do nascimento da teoria do caos nos anos 1960.



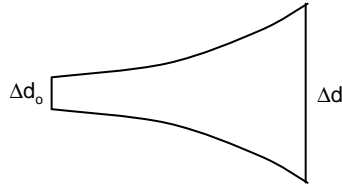


Figura 1.4: Sistemas caóticos apresentam sensibilidade às condições iniciais. Dadas duas condições iniciais próximas uma trajetória diverge da outra exponencialmente.

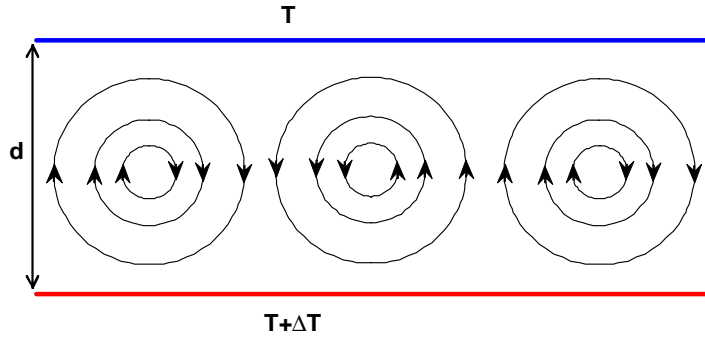


Figura 1.5: Convecção de Rayleigh-Bénard, movimento de um fluido entre duas placas paralelas infinitas mantidas às temperaturas  $T + \Delta T$  (inferior) e  $T$ , respectivamente.

## 1.1 Sistema de Lorenz

### 1.1.1 Convecção de Rayleigh-Bernard

Um fluido colocado entre duas placas paralelas infinitas separadas por uma distância  $d$ , cuja placa inferior é mantida à uma temperatura  $T + \Delta T$ , maior que a da placa superior  $T$ , portanto há transmissão de calor, por condução da placa inferior para a superior através do fluido e um estado de equilíbrio possível é aquele em que o fluido se encontra em repouso. Lord Rayleigh estudando a estabilidade deste sistema observou que se  $\Delta T$  é maior que um certo valor crítico, o equilíbrio torna-se instável, o fluido passa a se movimentar e trajetórias na forma de rolos aparecem, como representadas na figura 1.5, onde as setas indicam o sentido da circulação do fluido. Até um certo valor de  $\Delta T$ , e após um intervalo de tempo, isto é, após um transiente, o movimento do fluido pode tornar-se estacionário, com trajetórias cíclicas. Aumentando ainda mais  $\Delta T$ , outras instabilidades acontecem e aperiodicidades surgem.

Aumentando  $\Delta T$  comportamentos caóticos passam a ser observados.

Este sistema é considerado uma semente na construção da teoria do caos, a partir dos anos 1960. Veja o trecho extraído da ref. [1].

*Nos fins dos anos 1950, um meteorologista do MIT<sup>1</sup> chamado Edward Lorenz adquiriu um computador Royal-McBee LGP-30. Era do tamanho de uma caixa de geladeira, com 16KB de memória em um matagal de válvulas. Ele podia calcular a uma taxa de 60 multiplicações por segundo. Para a época, foi uma surpreendente potência computacional destinada para um único cientista.*

*Lorenz colocou o novo computador para trabalhar, calculando soluções aproximadas de um sistema com 12 equações diferenciais que modela uma atmosfera em miniatura. A comunidade de previsão de tempo estava desenvolvendo modelos lineares sofisticados para previsão. Lorenz chegou à conclusão que haveria um fator fundamental, ainda desconhecido, limitando o sucesso dos modelos lineares. Ele estava tentando demonstrar este ponto procurando soluções da sua atmosfera em miniatura que não fossem periódicas e nem assintoticamente periódica, o que "confundiria" as técnicas de predições lineares.*

*O modelo de atmosfera incluía muitos parâmetros que ele não sabia como estabelecer. O uso de um computador permitiu a ele explorar o espaço de parâmetros de tal maneira que seria impossível de outro modo. Ele fez pequenas variações, por exemplo, em parâmetros que afetaram como a atmosfera foi aquecida de baixo pelos oceanos e continentes. O LGP-30 estava logo produzindo trajetórias ( "longas séries temporais ") que pareciam ser aperiódicas. Além do mais, eles dividiam muitas propriedades qualitativas com o tempo real (condições atmosféricas), como longas e persistentes tendências interrompidas por mudanças rápidas. O computador imprimia as trajetórias em rolos de papel com a velocidade máxima de 6 linhas por minuto. O lampejo de visão veio de uma direção inesperada. Para acelerar a impressão, Lorenz alterou o programa para imprimir, os dados das soluções aproximadas das trajetórias, com apenas 3 algarismos significativos, embora os cálculos serem feitos com muitos mais algarismos de acurácia. Depois de ter inspecionado um determinado resultado, ele decidiu repetir o cálculo para ver o resultado com mais detalhe. Ele digitou os valores iniciais impressos do último cálculo, recomeçou o cálculo e saiu para uma xícara de café. Quando ele voltou, achou que a trajetória tinha inteiramente " ido para outro lugar " das condições iniciais que ele tinha recolocado com 3 algarismos significativos. Primeiramente suspeitando que uma das válvulas havia falhado, ele ficou surpreso que a discrepância ocorria gradualmente: Primeiramente na*

---

<sup>1</sup>NT. Massachusetts Institute of Technology

*última casa decimal, depois na anterior, e eventualmente na anterior desta, e assim por diante. E ainda por cima havia ordem na discrepância: A diferença entre a trajetória original e a recomeçada aproximadamente dobrava a cada quatro dias de simulação. Lorenz concluiu que estava observando sensibilidade às condições iniciais. Sua busca por aperiodicidade havia levado à dependência da sensibilidade.*

*Imaginando a amplitude da descoberta, Lorenz tentou reduzir a complexidade do modelo de 12 equações, para verificar se o resultado não era apenas uma idiossincrasia de um modelo em particular. Devido ao teorema de Poincaré-Bendixson, uma solução caótica não poderia ser achada em um modelo com menos de 3 equações diferenciais, mas o efeito era geral, poderia estar presente em sistemas mais simples, menores que o modelo de 12 equações. Ele não teve sucesso em reduzir o modelo da atmosfera miniatura até 20 anos mais tarde.*

*Nesse meio tempo, em 1961, em visita à Barry Saltzman da Travelers Insurance Company Weather Center em Hartford, Connecticut, foi mostrado a Lorenz um modelo de 7 equações do movimento de convecção de um fluido aquecido por baixo e resfriado em cima. As 7 equações de Saltzman eram elas mesmas a redução de um modelo de equações diferenciais parciais que descrevem a convecção de Rayleigh-Bérnard que estuda como o calor sobe através de um fluido como ar ou água.*

Saltzman havia reduzido o sistema de equações diferenciais parciais para 7 equações através de técnicas de expansão das soluções em séries de Fourier, e substituindo esta no sistema de equações original, mas truncando as séries infinitas para um número pequeno de termos. Lorenz conseguiu reduzir ainda mais as equações obtidas por Saltzman e chegou ao sistema abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma(x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + px - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{1.9}$$

onde os coeficientes são definidos pela fluidinâmica:  $\sigma$  é o número de Prandtl,  $p$  é a razão entre o número de Rayleigh  $Ra$  e o número de Rayleigh crítico  $Ra_{cr}$ . (acesse os endereços abaixo de quiser saber mais)

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/PrandtlNumber.html>

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/RayleighNumber.html>,

$p$  e  $b$  são parâmetros do sistema em particular,  $x$  é proporcional à velocidade do fluido, se  $x > 0$  o movimento é horário. O diâmetro do rolo é

proporcional ao parâmetro  $b$ ;  $y$  é proporcional à diferença de temperaturas de elementos de volume de fluido descendo e ascendendo; e  $z$  descreve a distorção do perfil vertical de temperatura em relação ao perfil de equilíbrio, a qual é linear com a altura.

Portanto, Lorenz na segunda metade do século XX, foi o primeiro a ver na prática, isto é, através de simulações computacionais que certos sistemas apresentam sensibilidade às condições iniciais, e com isto os estudos de sistemas dinâmicos não lineares foram retomados revalorizando a física clássica e a geometria, e uma nova teoria com aplicações multi e poli-disciplinar, das ciências sociais, biológicas, neurais, etc começou a crescer.

## Capítulo 2

# Equações diferenciais não lineares.

O pêndulo simples, um corpo de massa  $m$  suspenso por um fio, de um ponto  $o$ , de massa desprezível e comprimento  $L$ , vide figura 2.1, é um exemplo de um sistema não linear quando posto para oscilar com grande amplitude.

O movimento do pêndulo na ausência de atrito é descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\Omega_0^2 \sin(\theta), \quad (2.1)$$

onde  $\Omega_0^2 = g/L$  é a frequência natural de pequenas oscilações, se supusermos que o movimento se dá apenas no plano  $xy$  o movimento é descrito apenas pela variável  $\theta$ . tendo então o sistema apenas um grau de liberdade.

Normalmente reescrevemos uma equação de segunda ordem como um sistema de duas equações acopladas de primeira ordem, e obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\Omega_0^2 \sin(\theta), \end{aligned} \quad (2.2)$$

e como este sistema não tem uma dependência explícita do tempo é definido como sendo um sistema autônomo de equações diferenciais.

A energia deste oscilador é dada por:

$$E = \frac{mL^2}{2} \omega^2 + mgL(1 - \cos(\theta)) \quad (2.3)$$

é uma constante do movimento uma vez que não há dissipação. Vamos

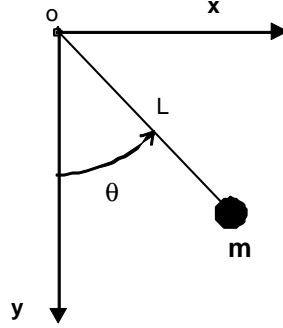


Figura 2.1: Diagrama representando um pêndulo simples e o plano de oscilação.

reescreve-la na forma adimensional:

$$\varepsilon = \frac{E}{mgL} = \frac{\omega^2}{2\Omega_0^2} + 1 - \cos(\theta) = C \quad (2.4)$$

e compará-la com a energia potencial adimensional  $u = 1 - \cos(\theta)$ , representada na figura 2.2.

Se  $\varepsilon > 2$  o pêndulo roda em torno do eixo  $o$ , no sentido horário ou no anti-horário dependendo das condições iniciais. Se  $\varepsilon = 2$  corresponde à uma linha separatriz entre o movimento de rotação e o de oscilação, e neste caso o período é infinito. Se  $\varepsilon < 2$  o movimento é de oscilação em torno dos pontos  $\theta/\pi = 2n$ . Na figura 2.2 temos dois casos representados, um com  $\varepsilon \approx 0.2$  correspondente a um regime de pequenas oscilações e outro com  $\varepsilon \approx 1.8$ . No primeiro caso  $\sin(\theta) \approx \theta$  o sistema é linear e a eq. 2.2 é integrável, isto é, pode ser resolvida analiticamente. No segundo caso o sistema é não linear e a eq.2.2 tem que ser resolvida numericamente, mas apesar de ser não linear o movimento também é periódico. Portanto, para  $\varepsilon < 2$  o período de oscilação pode ser obtido a partir da eq. 2.4

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\Omega_0} \int_{-\theta_M}^{\theta_M} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_M)}} \quad (2.5)$$

que é uma integral elíptica e pode ser calculada numericamente.

**Exercício 2** *Obtenha as equações lineares do pêndulo fazendo a aproximação para pequenas oscilações nas eqs. 2.1, 2.2, 2.3 e 2.5.*

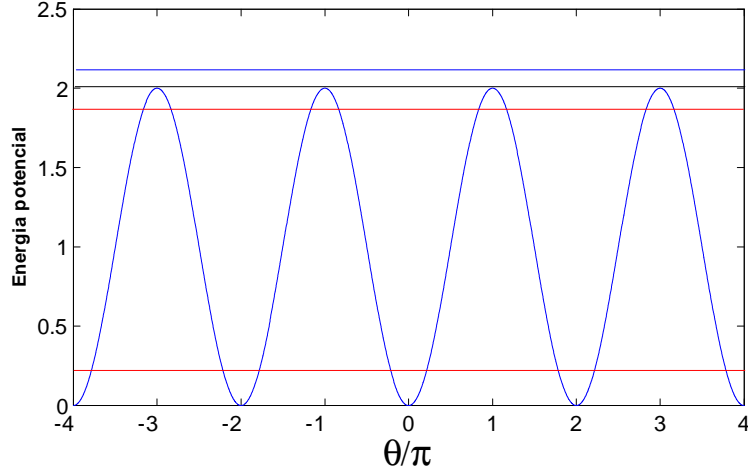


Figura 2.2: Energia potencial (adimensional) do pêndulo simples com período  $T=1s$ . Condições iniciais (linhas horizontais):  $\varepsilon \approx 2.1$ , (azul)  $\omega(0) = 5$ ,  $\theta(0) \approx \pi$ ,  $\varepsilon = 2$  (preto)  $\omega(0) = 0$ ,  $\theta(0) \approx \pi$ ,  $\varepsilon = 1.8$  (vermelho)  $\omega(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 4/5\pi$ ,  $\varepsilon \approx 0.2$  (vermelho)  $\omega(0) = 0$ ,  $\theta(0) = 12/180\pi$ .

As variáveis de um sistema autônomo, como o dado pela eq. 2.2, definem um espaço de fases bidimensional. As soluções destes sistemas, que neste caso é dado por  $\theta$  e  $\omega$ , definem trajetórias no espaço de fases. Para os quatro casos de energia, acima descritos, as trajetórias estão graficadas na figura 2.3, com o mesmo código de cores da figura 2.2. Para  $\varepsilon < 2$ , os movimentos são periódicos em torno dos pontos de equilíbrio  $\theta = 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , onde a velocidade angular  $\omega$  se anula. Para pequenas oscilações trajetórias são elipses cujos semi-eixos crescem com a energia, e continuam como curvas fechadas à medida em que se afasta cada vez mais da condição de pequenas oscilações, este tipo de trajetórias é definido como ciclo limite. Para  $\varepsilon = 2$  o movimento não é limitado, as trajetórias são abertas, mas velocidade angular  $\omega$  também é nula nos pontos  $\theta = (2k + 1)\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , e há um aparente cruzamento das separatrizes nestes pontos por que também foram desenhadas as curvas para  $\omega < 0$ , que são obtidas com a mudança de sinal das condições iniciais (ver legenda da figura 2.2). Portanto, para  $\theta = k\pi$ , onde  $k$  é um inteiro tanto a velocidade angular quanto a aceleração são nulas, como não são pontos de repouso do pêndulo, estes pontos no espaço da fases são definidos como pontos fixos instáveis e são classificados como elípticos para os movimentos periódicos, e como hiperbólicos para os de rotação. Como exemplo de ponto fixo instável temos o ponto de sela, ilustrado figura 2.4, as linhas de aproximação ao ponto (em verde) definem a variedade estável e as

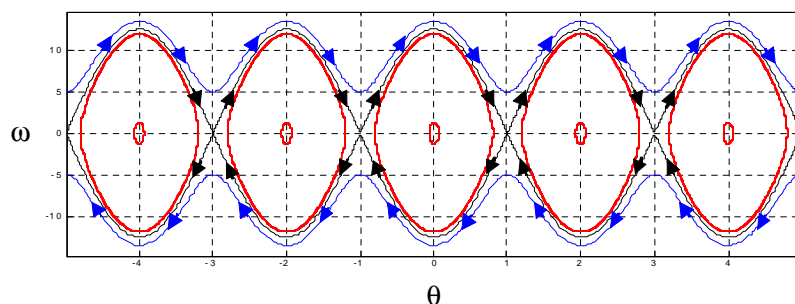


Figura 2.3: Espaço de fases do pêndulo simples sem dissipação. Em azul e preto as trajetórias abertas do movimento de rotação, para  $\varepsilon > 2$  e  $\varepsilon = 2$ , respectivamente. Em vermelho as órbitas do movimento periódico.

de afastamento (em azul) definem a variedade instável.

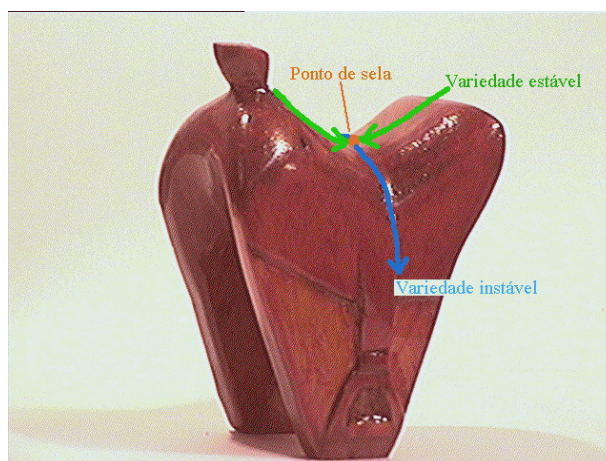


Figura 2.4: Se você soltar uma esfera em um ponto em cima das setas que apontam para o centro da sela ela será atraída para o centro (= variedade estável), se soltar em cima das setas laterais a esfera se afastará do centro (variedade instável).

**Exercício 3** Reescreva a eq. 2.2 incluindo uma força dissipativa proporcional à velocidade angular  $f_{diss} = -b\omega$ , e  $b > 0$ . Desenhe uma possível trajetória no espaço de fases. Obtenha  $\theta$  e  $\omega$  para pequenas oscilações, e desenhe as órbitas para dois valores de energia.



## 2.1 Equações diferenciais autônomas

Um sistema de equações diferenciais é autônomo quando não tem dependência temporal explícita. Um pêndulo simples submetido à uma força externa periódica é descrito pela equação:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\Omega_0^2 \sin(\theta) - b\omega + f_0 \cos(\Omega_p t),$$

que pode ser transformada num sistema autônomo definindo uma nova variável dada por  $\frac{dz}{dt} = \Omega_p = \text{constante}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\Omega_0^2 \sin(\theta) - b\omega + f_0 \cos(z) \\ \frac{dz}{dt} &= \Omega_p \end{aligned} \tag{2.6}$$

e o espaço de fases tridimensional é definido por  $\theta$ ,  $\omega$  e  $z$ .

**Exercício 4** Com  $b = 0$  e  $f_0 = 0$ , desenhe uma possível trajetória neste espaço de fases.

Portanto, dado um sistema autônomo com  $N$  equações acopladas

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}) \tag{2.7}$$

um espaço de fases  $N$  dimensional é definido, com pontos fixos dados por  $\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ . (A estabilidade destes pontos fixos será estudada mais adiante).

A eq.2.7 nos dá a evolução temporal das trajetórias no espaço de fases e tomando uma superfície  $S$  que confina uma certa região do espaço, a integral da eq.2.7 nos dá o fluxo de  $\vec{F}(\vec{r})$  nesta superfícies.

$$\int_S \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \hat{n} ds = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n} ds \tag{2.8}$$

e pelo teorema da divergência, ou de Gauss, que diz que a integral de um campo vetorial contínuo de velocidades com derivadas contínuas sobre uma superfície que delimita uma região fechada de volume  $V$  é igual à integral do divergente deste campo sobre o volume fechado:

$$\int_S \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \hat{n} ds = \int_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \hat{n} ds = \int_V \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) dV, \quad (2.9)$$

então esta equação nos dá a evolução do volume no espaço de fases. Se  $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0$  não há variação de volume, portanto o sistema não é dissipativo e há então conservação da energia. Se  $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) < 0$  há contração de volume e o sistema é dissipativo, e se  $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) > 0$  há expansão de volume.

**Exercício 5** *Mostre que o divergente correspondente à eq. 2.6 é igual a -b.*

Sistemas experimentais como circuitos eletrônicos não lineares; sistemas mecânicos como guindastes de transferência de cargas, que nada mais são do que pêndulos; sistemas de fluidos multifases, como a formação de bolhas de gases em líquidos ou formação de gotas de água na atmosfera; lasers, etc são todos sistemas dissipativos, e o nosso interesse é justamente sobre sistemas dissipativos. Para saber se um sistema é dissipativo basta verificar se  $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) < 0$ , se o sistema de equações autônomas for conhecido. Veremos que nem sempre as equações que descrevem um sistema são conhecidas, ou que os modelos, muitas vezes, não são aproximações adequadas face à complexidade do sistema dinâmico, por exemplo na equação do pêndulo 2.6 simples forçado foi considerado apenas o atrito viscoso, mas experimentalmente além deste termo de dissipação temos o atrito no eixo do pêndulo, tanto o atrito dinâmico quanto o estático e o efeito deste último aparece justamente quando o atrito viscoso é nulo.

## Capítulo 3

# Propriedades de Sistemas caóticos

Definimos como sendo um sistema caótico aquele que apresenta sensibilidade às condições iniciais, isto é, dadas duas condições iniciais que diferem de  $\Delta d_o$  após um intervalo de tempo  $t$  as duas trajetórias divergem exponencialmente  $\Delta d = \Delta d_o e^{\lambda t}$ , onde  $\lambda > 0$  é o expoente de Lyapunov. Uma das propriedades de sistemas dissipativos é que apesar da divergência entre as trajetórias ser exponencial esta divergência não pode crescer indefinidamente senão as trajetórias não serão confinadas em uma região no espaço de fases. Na construção destas trajetórias, a partir das condições iniciais, observa-se um movimento transiente e depois de um certo tempo estas trajetórias correspondem a um movimento estacionário numa região do espaço de fases. Estas trajetórias confinadas, após o transiente, são chamadas de atratores, portanto em sistemas conservativos não há atratores uma vez que as trajetórias no espaço de fases não são contraídas. Veremos outras propriedades utilizando o sistema de Rössler bem como um sistema mais simples bidimensional.



Este sistema de equações diferenciais autônomas é um dos mais simples que apresenta uma grande variedade de trajetórias no espaço de fases ou atratores.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -z - y \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + (x - c)z\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são parâmetros.

### 3.1 Parâmetros de controle

As características de sistemas descritos por equações diferenciais autônomas dependem também de um conjunto de parâmetros, portanto vamos reescrever a eq. 2.7  $N$ -dimensional

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, P),\tag{3.2}$$

onde  $P$  é o conjunto de parâmetros, com  $N_P$  elementos. Como estudar as características de um sistema procurando variar  $N_P$  valores é um trabalho que provavelmente não levará a resultado algum, normalmente fixamos alguns parâmetros e variamos outros de maneira sistemática, a estes últimos damos o nome de parâmetros de controle.

De agora em diante necessitamos das técnicas numéricas de solução de equações diferenciais, vamos aprender alguns métodos de integração e utilizando o Matlab ou Octave para produzir todos os programas para caracterização dos sistemas, portanto estude o Apêndices *Métodos de integração numérica clique etodoNum/aqui* ou para o MatLab clique pendiceMatLab/aqui, ou para o Octave pendiceOctave/aqui.

**Atividade 6** Utilizando o programa de integração numérica que você escreveu obtenha as soluções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  do sistema de Rössler, eq. 3.1, com  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$  e  $c = [5.3, 5.35, 7.75, 7.8, 8.5, 8.55, 8.7, 8.75]$ , passo = 0.01 e  $t_{\max} = 200s$ , condições iniciais:  $x(0) = -0.006$ ,  $y(0) = 0.1$  e  $z(0) = 0.1$ .

**Atividade 7** Para cada valor de  $c$  plote  $x$  vs.  $t$ . Depois considere um transiente de 300s e plote  $x$  vs.  $t$  para  $t > 30s$ .

**Atividade 8** Para cada valor de  $c$ , e com os dados para  $t > 80s$ , construa os atratores plotando em  $x$ ,  $y$  e  $z$  em 3D. Classifique os atratores observando o número de voltas para retornar a um mesmo ponto sobre a trajetória.

## 3.2 Bacias de atração

Você observou diversos atratores em função do parâmetro de controle  $c$ , integrando sempre com as mesmas condições iniciais, agora vamos ver o que acontece com outras condições iniciais.

**Atividade 9** Com  $c = 9$  integre a eq. 3.1 com as seguintes condições iniciais a)  $x(0) = 0.8$ ,  $y(0) = 0.2$  e  $z(0) = 0.2$ , b)  $x(0) = 1.2$ ,  $y(0) = 1.20$  e  $z(0) = 2$ . O que aconteceu de diferente entre os casos a e b? Sempre considere os dados após o transiente.

**Atividade 10** Com  $c = 9$  refaça a atividade anterior (Rössler) com as seguintes condições iniciais I)  $x(0) = 100.8$ ,  $y(0) = 20$  e  $z(0) = 100$ , II)  $x(0) = 100.85$ ,  $y(0) = 20$  e  $z(0) = 100$ . O que aconteceu de diferente entre os casos I e II? Compare também estes resultados com os do exercício anterior. Sempre considere os dados após o transiente.

**Atividade 11** Com  $c = 100$ , refaça a atividade anterior. Compare os resultados.

Definimos *bacia de atração* como sendo o conjunto de condições iniciais que levam a um determinado atrator. Isto significa que para todas as condições iniciais, dentro da bacia de atração, o movimento estacionário é sempre o mesmo atrator, mas isto não significa que as séries temporais obtidas serão sempre iguais. Se as condições iniciais estão fora da bacia de atração a integração do sistema de equações autônomas divergirá. As bacias dependem dos parâmetros do sistema e podem ser contínuas ou fragmentadas.

### 3.3 Seção de Poincaré

No lugar de acompanhar a evolução de trajetórias contínuas obtidas com equações de fluxo, Poincaré introduziu uma maneira de simplificar a visualização da dinâmica de um sistema em uma dimensão menor. Se um sistema é N-dimensional toma-se uma superfície e observa-se o retorno da trajetória a esta superfície, e mede-se os valores das N-1 variáveis que perfuram a superfície em um determinado sentido, dessa maneira o sistema está sendo caracterizado em uma dimensão N-1.

Na figura 3.1 são mostrados dois exemplos de seções de Poincaré para o sistema de Rössler. Na figura 3.1 (a) é mostrado um atrator caótico e na figura 3.1 (b) um atrator periódico. No primeiro caso a seção é um plano paralelo ao plano  $zx$  em  $y = Y_0 = 5$ . À cada volta, a trajetória cruza este plano no sentido de  $y$  crescente, nos pontos  $x_k$  e  $z_k$  ( $k$ -ésima volta), marcados em vermelho, e que formam uma trajetória não contínua bi-dimensional (gráfico de  $x_k$  vs.  $z_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ), chamada de mapa de Poincaré ou de primeiro retorno mostrada na figura 3.1 (A). No segundo caso, a seção é paralela ao plano  $yz$  em  $x = X_0 = 2.5$ , e na figura 3.1 (B) temos o mapa correspondente. O mesmo procedimento pode ser feito no sentido decrescente da variável escolhida.

As soluções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  são obtidas de integrações numéricas, com passo  $\Delta t$ , na forma de séries temporais  $x_n$ ,  $y_n$  e  $z_n$  nos instantes  $t_n = n\Delta t$ , e para construir um mapa de Poincaré é necessária a escolha de um plano para um valor fixo atribuído para uma das variáveis e verificar quando a trajetória cruza este plano, entretanto é praticamente impossível obter

séries temporais que tenham valores coincidentes com o estabelecido. Portanto, é necessário detectar o cruzamento do plano e com os pontos próximos fazer as interpolações necessárias para a obtenção de valores precisos dos valores que vão compor o mapa de Poincaré.

Felizmente existe um método mais simples. Observe na figura 3.1 (b) que os máximos (ou mínimos) locais das variáveis, facilmente obtidos das séries temporais, também refletem características semelhantes aos mapas de

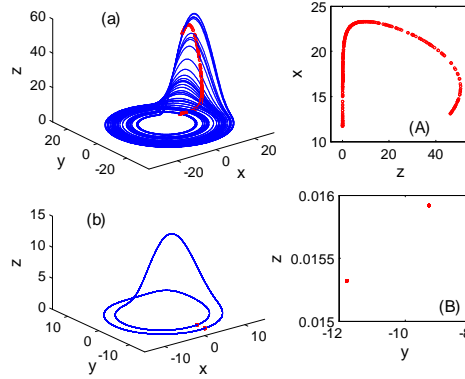


Figura 3.1: Seções de Poincaré do sistema de Rössler. (a)  $a = b = 0.1$  e  $c = 18$ , As trajetórias cruzam o plano  $Y_0 = 5$ , no sentido de  $Y$  crescente, à cada volta definindo os pontos  $x_k$  e  $z_k$ , em (A) mapa de Poincaré. (b)  $a = b = 0.1$  e  $c = 7.5$ , As trajetórias cruzam o plano  $X_0 = 2.5$ , no sentido de  $X$  crescente, em (B) mapa de Poincaré.

Poincaré. Antes de construirmos os mapas correspondentes vejamos o teorema de Takens, que será retomado mais adiante: Uma variável importante de um sistema dinâmico carrega as principais características do sistema, e portanto a medida de apenas uma dessas variáveis é suficiente para a caracterização do sistema. Vamos retomar à atividade 6 no qual foram obtidas as soluções para diversos valores do parâmetro de controle  $c$  :  $c = [5.3, 5.35, 7.75, 7.8, 8.5, 8.55, 8.7, 8.75]$ .

**Atividade 12** Para  $c = 5.3$  plote simultaneamente as séries temporais  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

A trajetória no espaço de fases (sempre após o transiente) que você viu na atividade 6, é uma trajetória que retorna sempre ao mesmo ponto de referência após uma única volta, a que chamamos então de atrator periódico de período 1. No gráfico do exercício anterior é visto que todas as séries temporais, respectivamente, apresentam periodicamente um único máximo.

**Atividade 13** Repita o exercício anterior para  $c = 5.35$  e  $c = 7.75$ .

Com o exercício 6, vê-se agora que são necessárias duas voltas para a trajetória voltar a um mesmo ponto de referência, e os gráficos das séries temporais têm dois valores de máximos locais, com a aparência de que são necessárias duas funções de períodos diferentes para serem reproduzidas, então temos um atrator periódico de período 2, e assim sucessivamente para os

outros valores de  $c$  até chegarmos a um número infinito de períodos, e neste caso temos um atrator caótico.

### 3.4 Reconstrução do espaço de fases

A análise de dados de sistemas caóticos não é igual aos sistemas dinâmicos lineares, nestes últimos quando há um modelo para explicar um determinado fenômeno físico procuramos ajustar as funções dadas pelo modelo à medida experimental, para verificar valores de parâmetros previstos pelo modelo a partir de grandezas fundamentais, por exemplo, num experimento de queda de um corpo no ar o modelo prevê que a velocidade cresce linearmente com o tempo e o coeficiente angular da curva  $V$  vs.  $t$  é a aceleração da gravidade local. E noutro caso, o modelo pode também prever o comportamento de uma grandeza em função de outra e trazer parâmetros que só podem ser obtidos de um experimento, por exemplo um corpo que desliza num plano inclinado o coeficiente de atrito só pode ser obtido experimentalmente, uma vez que não pode ser calculado a partir de grandezas fundamentais.

Nos sistemas caóticos estamos interessados em caracterizar as trajetórias nos espaços de fases e a evolução destas em função de parâmetros de controle, não importando necessariamente se estes parâmetros são obtidos a partir de grandezas fundamentais, uma vez que muitos comportamentos são universais, observados em sistemas tão díspares como os acima descritos, isto é, circuitos eletrônicos, mecânicos biológicos, fluidos, etc. Nos casos lineares acima citados, os modelos são específicos que não exigem mais do que dezenas de dados, enquanto que os caóticos exigem uma grande quantidade de dados, longas séries temporais, e por isso os estudos destes sistemas só tomou impulso com o advento e a popularização de computadores.

Felizmente Takens demonstrou que não precisamos medir todas as variáveis do sistema, através do Teorema de Takens que diz que a medida de uma única variável importante do sistema é suficiente para caracterizar o comportamento de uma dada trajetória no espaço de fases, através de uma reconstrução do espaço de fase feita apenas com esta variável medida.

Suponha que foi medida apenas a variável  $x(t)$  e queremos saber se existe alguma previsão para  $x(t + \tau)$ , ou se  $x(t)$  tem alguma "lembrança" de  $x(t - \tau)$  e até quanto tempo dura. Seja a função  $P(\tau)$  definida pela equação



3.3:

$$P(\tau) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\int_{-L}^L x(t)x(t-\tau)dt}{\int_{-L}^L x(t)x(t)dt} \quad (3.3)$$

Vejamos o comportamento  $P(\tau)$  de acordo com o de  $x(t)$ , mas para qualquer caso temos que para  $\tau = 0$  temos  $P(\tau) = 1$ . Se  $x(t) = \text{constante} = C$

$$P(\tau) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\int_{-L}^L C^2 dt}{\int_{-L}^L C^2 dt} = 1$$

portanto  $P(\tau)$  é constante e igual a 1. Se  $x(t)$  é a medida de uma variável aleatória entre -1 e 1 o produto  $x(t)x(t-\tau)$  também será aleatório entre -1 e 1, portanto  $P(\tau)$  será nulo para todos os valores de  $\tau$  exceto para  $\tau = 0$ . Na figura 3.2 estão ilustrados os comportamentos de um sistema totalmente previsível, a função de auto-correlação é constante para uma série temporal constante, e para um sistema aleatório que não apresenta previsibilidade alguma cuja função de auto-correlação só não é nula na origem.

Do ponto de vista de "lembança", no primeiro caso cada ponto da série temporal "lembra"igualmente de todos os outros pontos anteriores, e no segundo caso cada ponto "lembra"apenas de si mesmo.

Como vimos anteriormente, os sistemas caóticos são aqueles que apresentam alguma previsibilidade, isto é, apenas para tempos curtos, e é de se esperar que a função de auto-correlação para estes casos diminua à medida em que  $\tau$  aumenta como ilustrado pela curva em preto na figura 3.2. Definimos como tempo de correlação  $\tau_c$  como sendo o tempo para o qual podemos considerar o sistema tendo alguma "lembança"do ponto  $x(t-\tau)$ . No caso da função constante acima o tempo de correlação  $\tau_c$  é infinito, no caso aleatório  $\tau_c$  é nulo, se a função de auto-correlação decresce exponencialmente  $\tau_c$  é dado pelo tempo que a exponencial cai para o valor de  $e^{-1}$ , como ilustrado na figura 3.2, se  $P(\tau)$  for uma função oscilatória decrescente consideramos a envoltória para obter  $\tau_c$ . Nos sistemas caóticos não existe uma maneira única de se estimar  $\tau_c$ .

**Atividade 14** Calcule a função de auto-correlação de uma função gaussiana

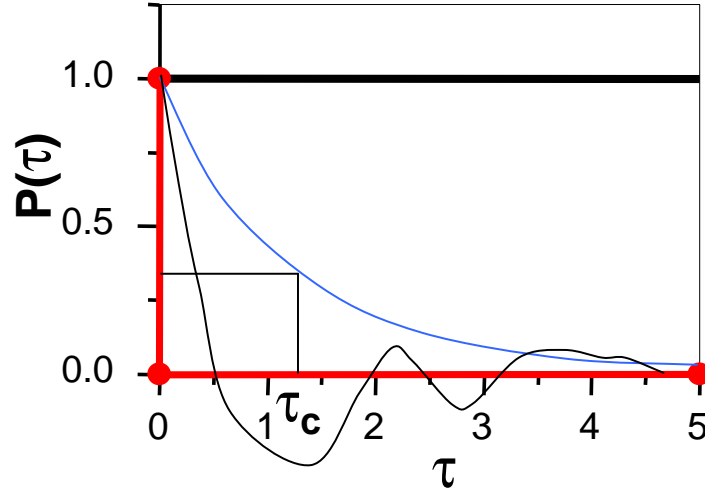


Figura 3.2: Funções de auto-correlação para uma série temporal constante (preto horizontal), aleatória (vermelho), caóticas (azul e preto).

$x(t) = e^{-t^2}$ , de uma exponencial  $x(t) = e^{-t}$  (sugestão: suponha  $t \geq 0$ ), e de uma senoidal  $x(t) = \text{sen}(2 * \pi / T t)$ .

Como não trabalhamos com funções e sim com séries  $x_n = x(n * \text{passo})$ , é conveniente reescrevermos a eq.3.3 na forma discreta

$$P_i = \frac{\sum_{n=1}^{N-i} x_n x_{n+i}}{\sum_{n=1}^{N-i} x_n x_n} \quad (3.4)$$

**Atividade 15** Escreva uma função do MatLab para calcular numericamente a auto-correlação  $P_i$  com a eq. 3.4 tendo como dados de entrada um vetor  $x$ , e o valor máximo  $i_{\max}$ . Construa o gráfico  $P_i$  vs.  $i$ .

**Atividade 16** Com as funções do exercício 14 gere os vetores correspondentes e calcule as respectivas funções de auto-correlação com o programa do exercício anterior.

Para a reconstrução do espaço de fases vamos supor que existe um tempo característico  $\tau_r$ , chamado de tempo de reconstrução ou tempo de atraso.

Nesta reconstrução construímos novas variáveis  $X = x(t)$ ,  $Y = x(t - \tau_r)$ ,  $Z(t - 2\tau_r), \dots$  (nos casos discretos  $X_n = x_n$ ,  $Y_n = x_{n-k}$ ,  $Z_{n-2k}$ ) cujas características das trajetórias no espaço de fases  $xyz \dots$  são preservadas neste novo espaço de fases  $XYZ \dots$ . Entretanto há um preço a ser pago, as trajetórias podem se cruzar se a reconstrução for feita com a mesma dimensão do espaço de fases original, significando que a dimensão de novo espaço de fases é maior que o original. Para a reconstrução do espaço de fases precisamos antes determinar o valor de  $\tau_r$  ( $k$  nos casos discretos), e a função de autocorrelação nos dá um indicativo deste valor, alguns preferem escolher como sendo  $\tau_r$  (ou  $k$ ), a metade do tempo correspondente ao primeiro zero de  $P(\tau)$  ( $P_i$  nos casos discretos), outros preferem escolher  $\tau_r$ , (ou  $k$ ), como sendo o tempo correspondente a  $P(\tau) = \frac{1}{2}$ , (ou  $P_i = \frac{1}{2}$ ), mas a escolha do valor mais adequado é feita testando outros valores próximos de  $\tau_r$ .

**Atividade 17** *Faça a reconstrução do espaço de fases para o sistema Rössler com  $a = b = 0.1$  e  $c = 5, 5.5, 7.8$  e  $18$ .*

Uma vez que uma única variável importante, por exemplo  $x$ , carrega as propriedades do sistema, uma outra maneira de reconstruir um atrator é localizando os máximos locais desta série temporal e construindo os mapas  $x_{n+k}$  vs.  $x_k$ , onde  $n = 1, 2, 3, \dots$  e  $k$  é o passo de reconstrução, para  $k = 1$  o mapa é chamado de primeiro retorno, para  $k = 2$  de segundo retorno e assim sucessivamente. Na figura 3.3 temos um exemplo para o atrator de Rössler de período 8.

### 3.5 Pontos fixos/estabilidade

Os pontos de equilíbrio (fixos) são obtidos para velocidades nulas no espaço de fases, portanto para  $\vec{F}(\vec{r}^*) = 0$  em qualquer instante[6].

Para estudarmos a estabilidade de um ponto fixo devemos investigar o comportamento do sistema na vizinhança do ponto fixo. Se um ponto colocado dentro dessa região evoluir para o ponto fixo este é estável, se afastar do ponto fixo este é instável, conforme ilustrado na figura 3.4.

Seja  $\vec{r} = (x, y, z)$  a solução de um sistema tridimensional, e  $\vec{r}^* = (x^*, y^*, z^*)$  um de seus pontos fixos. Expandindo linearmente a solução ao redor do ponto fixo, e lembrando que  $\vec{F}(\vec{r}^*) = 0$ :

$$\vec{r} = \vec{r}^* + \Delta\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}^*}{dt} + \frac{d\Delta\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}^* + \Delta\vec{r})$$

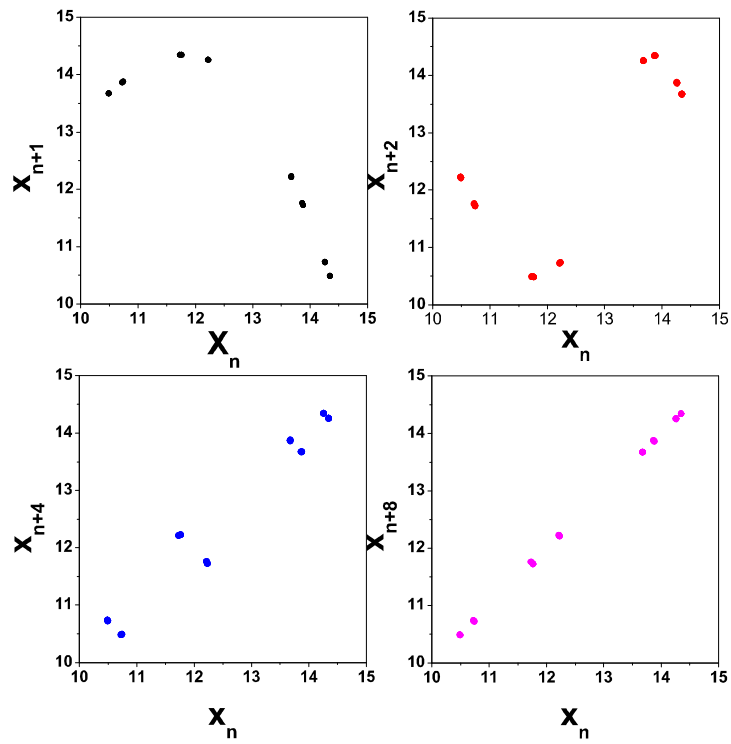


Figura 3.3: Mapas de retorno  $x_{n+k}$  vs.  $x_n$  para  $k = 1, 2, 4$  e  $8$ , construídos com os máximos locais da série temporal do sistema de Rössler  $a = b = 0.1$  e  $c = 8.7$ .

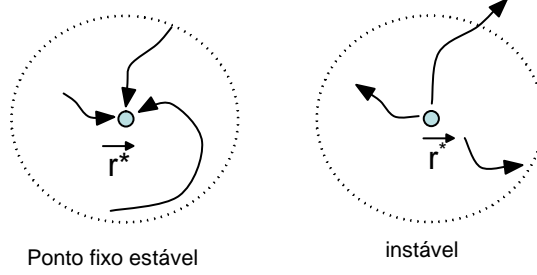


Figura 3.4: Ilustração de um ponto fixo estável e outro instável.

$$\frac{d\Delta\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}^* + \Delta\vec{r}) \approx \overleftrightarrow{J}_* \Delta\vec{r} \quad (3.5)$$

onde  $\overleftrightarrow{J}_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix}$  é a matriz jacobiana cujos elementos são calculados nos pontos fixos. Esta equação pode ser resolvida fazendo uma mudança da base  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  para uma  $(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta})$  na qual a jacobiana é diagonal:  $\overleftrightarrow{J}_{*D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$  onde os  $\lambda$ s são os auto-valores da jacobiana  $\overleftrightarrow{J}_*$  e podem ser reais ou complexos.

Dessa maneira, nesta base as variáveis são nominadas como  $\xi, \eta, \zeta$  e o ponto fixo  $(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$  e temos três equações não acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \lambda_1 \xi \\ \frac{d\eta}{dt} &= \lambda_2 \eta \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \lambda_3 \zeta \end{aligned} \quad (3.6)$$

cujas soluções são:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_o e^{\lambda_1 t} \\ \eta &= \eta_o e^{\lambda_2 t} \\ \zeta &= \zeta_o e^{\lambda_3 t}. \end{aligned}$$

Dado um ponto  $(\xi_o, \eta_o, \zeta_o)$  inicial nas proximidades do ponto fixo se a trajetória evoluir para o ponto fixo, este é estável, se a trajetória se afastar é instável.

O estudo de estabilidade dos pontos fixos com mudança de base normalmente só pode ser feito numericamente, e a dificuldade aumenta com a dimensão do sistema, o número de auto-valores é igual à dimensão do sistema. Por isso veremos alguns resultados utilizando um exemplo em duas dimensões, cujas soluções são  $\xi = \xi_0 e^{\lambda_1 t}$  e  $\eta = \eta_0 e^{\lambda_2 t}$ :

I) Auto-valores reais ( $\hat{\xi} \hat{\eta}$ ) estão no plano real.

I-1) Auto-valores com mesmo sinal

Com auto-valores diferentes  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  reais.

Se os auto-valores são reais e de mesmo sinal, eliminando o tempo destas

equações obtemos as trajetórias no espaço de fases:  $\eta = C \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ , que correspondem à uma família de parábolas.

a)  $\lambda_2$  e  $\lambda_1 < 0$

De qualquer ponto inicial  $(\xi_0, \eta_0)$  no espaço de fases o sistema evoluirá para o ponto fixo  $(\xi^*, \eta^*) = (0, 0)$ , neste ponto todas as trajetórias coincidem, e temos um nó estável.

b)  $\lambda_2$  e  $\lambda_1 > 0$

De qualquer ponto inicial  $(\xi_0, \eta_0)$  no espaço de fases o sistema se afastará do ponto fixo  $(\xi^*, \eta^*) = (0, 0)$  e temos um nó instável.

Com auto-valores iguais,  $\lambda_1 = \lambda_2$  reais.

As trajetórias são dadas por:  $\eta = C\xi$ , que correspondem à uma família de retas que passam pelo ponto fixo  $(\xi^*, \eta^*) = (0, 0)$  e se  $\lambda$ s forem negativos temos um ponto fixo estável, se positivo será instável.

I-2) Auto-valores com sinais diferentes

As trajetórias são dadas por:  $\eta \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = C$  que correspondem à uma família de hipérboles, e por isso é chamado de ponto hiperbólico, não passam pelo ponto fixo  $(\xi^*, \eta^*) = (0, 0)$  exceto se  $C$  for nulo. Se de um ponto inicial  $(0, \eta_0)$  o sistema evoluir para o ponto fixo, o eixo  $\eta$  é definido como a variedade estável, se o sistema se afastar esta variedade será a variedade instável. Temos a mesma situação para o outro eixo se o ponto inicial for  $(\xi_0, 0)$ , vide figura 3.5

Para um ponto inicial A  $(\xi_0, \eta_0)$ , vide figura 3.5, fora de qualquer variedade, o sistema evoluirá em direção ao ponto fixo, atingindo uma distância mínima deste, e em seguida se afastará, ou se tomarmos o ponto B veremos o afastamento do ponto.

II) Auto-valores complexos ( $\hat{\xi} \hat{\eta}$ ) estão no plano complexo.

a)  $\lambda_1$  complexo conjugado de  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 = \alpha + i\omega = \lambda_2^*$ , e  $\alpha \neq 0$

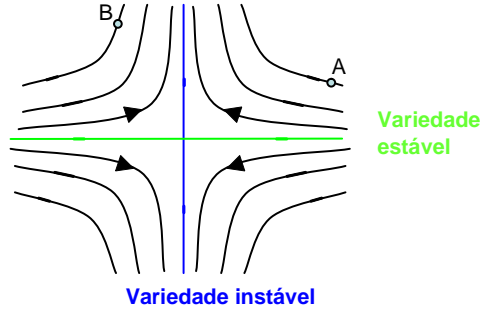


Figura 3.5: Ponto de sela e as variedades. Em verde a estável e em azul a instável.

As soluções são:  $(\xi, \eta) = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} (\xi_0, \eta_0)$ . Portanto, o sistema evolui a partir de um ponto inicial girando o vetor  $(\xi, \eta)$  com frequência  $\omega$  com o seu módulo variando exponencialmente, vide figura 3.6 (A). Se  $\alpha < 0$  o ponto fixo será alcançado, e é chamado de foco estável, se  $\alpha > 0$  o sistema evoluirá afastando-se do ponto fixo, que é chamado de foco instável.

b)  $\alpha = 0$ . Para cada ponto inicial o módulo será constante, então o vetor  $(\xi, \eta)$  descreve circunferências, e o ponto é chamado de ponto vórtice, vide figura 3.6 (B).

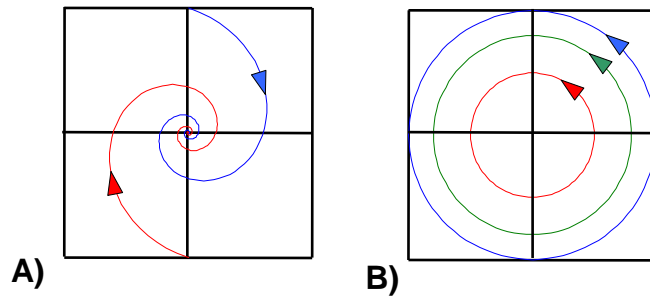


Figura 3.6: A) uma representações de um foco estável, e B) de um vórtice.

Em resumo, para um ponto fixo ser instável basta apenas que a parte real de um de seus auto-valores seja positivo. Este resultado é então generalizado para qualquer dimensão.

**Atividade 18** Mostre que os pontos fixos de Rössler são dados por:  $x^* =$

$$|a| \rho, y^* = -\rho \text{ e } z^* = \rho, \text{ onde } \rho \text{ são as raízes de } |b| + Z^2 |a| - Zc: \rho_+ = \frac{1}{2|a|} \left( c + \sqrt{(c^2 - 4|a||b|)} \right) \text{ e } \rho_- = \frac{1}{2|a|} \left( c - \sqrt{(c^2 - 4|a||b|)} \right).$$

**Atividade 19** Para  $a = 0.1, b = 0.1$  construa os gráficos de  $x^*$  vs.  $c$ ,  $y^*$  vs.  $c$ , e  $z^*$  vs.  $c$ .

As órbitas periódicas também fazem parte de sistemas caóticos, e como partimos de um valor de  $c$  que corresponde a um atrator de período 1 e fomos obtendo atratores de periodicidade maior à medida que  $c$  aumenta até chegarmos a um atrator caótico, foi estabelecida uma maneira de chegarmos às condições para a obtenção de atratores caóticos, que chamamos de *rota para o caos*. Para determinar esta rota é necessário um programa para localizar os máximos locais das séries temporais.

**Atividade 20** Construa um programa (function) para localizar os máximos locais de uma série temporal.

**Atividade 21** Para o sistema de Rössler, construa um programa no qual os parâmetros de entrada devem ser: 1)  $c_{\min}$  e  $c_{\max}$ , 2)  $N$ =número de valores de  $c$ , 3) tempo de integração para o transiente, 4) tempo de integração após o transiente. Neste programa  $c$  deve variar entre os valores mínimos e máximos, para cada valor de  $c$  a função de integração deve ser chamada, e para uma das variáveis os máximos devem ser localizados e plotados para o mesmo valor de  $c$  como abscissa.

**Atividade 22** Para  $c_{\min} = 5$ ,  $c_{\max} = 5.5$ ,  $N = 20$ ; passo de integração = 0.01s,  $t_{\max} = 1000s$ ,  $t_{\text{transiente}} = 300s$ . O que você pode concluir observando o gráfico?

**Atividade 23** Repita o exercício anterior com  $c_{\min} = 7.6$ ,  $c_{\max} = 7.8$ .

Portanto, com esta análise podemos determinar para quais valores de  $c$  temos um atrator periódico de período 1 e para qual valor de  $c$  o atrator passa para período 2 (bifurcação) e assim sucessivamente de período 2 para período 4, depois de 4 para 8 até aparecer a região na qual temos atratores de Rössler caóticos, construindo assim um diagrama chamado de diagrama de bifurcações, que nos define uma *rota para o caos*, que no presente caso é a chamada de Cenário de Feigenbaum ou via duplicações de período.



## 3.6 Bifurcações

### 3.6.1 Bifurcação sela-nó

Dado um sistema descrito por  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r})$

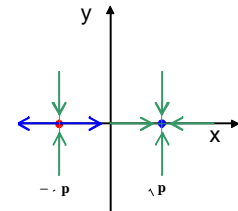
$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dx}{dt} = p - x^2 \\ F_y &= \frac{dy}{dt} = -y \end{aligned} \quad (3.7)$$

desejamos os possíveis pontos fixos, raízes de  $\vec{F}(\vec{r}) = 0$ , e as respectivas estabilidades. Para  $p < 0$ , não há pontos fixos uma vez que  $\vec{F}(\vec{r})$  não tem raízes reais. Para  $p > 0$  temos dois pontos fixos localizados em  $(x_1^*, y_1^*) = (\sqrt{p}, 0)$  e  $(x_2^*, y_2^*) = (-\sqrt{p}, 0)$ . Para vermos a estabilidade dos pontos fixos, devemos achar os autovalores do jacobiana de  $\vec{F}(\vec{r})$  dado por

$$J_o = \begin{vmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

calculado nos dois pontos fixos.

Os autovalores correspondentes são:  $(\lambda_{11}, \lambda_{2,1}) = (-2\sqrt{p}, -1)$  e  $(\lambda_{21}, \lambda_{2,2}) = (2\sqrt{p}, -1)$  que mostram que o ponto fixo  $(x_1^*, y_1^*)$  é um foco estável e  $(x_2^*, y_2^*)$



$(\sqrt{p}, 0)$  foco  
estável e

$(-\sqrt{p}, 0)$ , ponto  
de sela instável.

um ponto de sela instável, conforme ilustrado na figura 3.6.1.

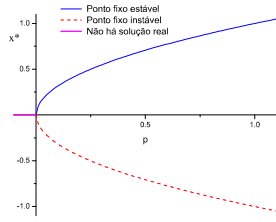


Diagrama de  
bifurcação  $x^*$  vs.  $p$ .

Como  $y^*$  é sempre nulo para qualquer valor de  $p$ , o gráfico  $x^*$  vs.  $p$  é chamado de diagrama de bifurcação e esta ocorre na passagem de  $p$  pelo zero, conforme mostrado na figura 3.6.1.

**Exercício 24** A bifurcação transcritical é descrita pela equação  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r})$ ,

onde  $\vec{F}(\vec{r}) = (ax - x^2, -y)$ , onde  $a$  é o parâmetro de controle pede-se:

- Calcule os pontos fixos.
- Calcule a jacobiana  $J_0$  de  $\vec{F}(\vec{r})$  nos pontos fixos.
- Calcule os auto-valores de  $J_0$ .
- Determine as regiões de estabilidade dos pontos fixos.
- Classifique os pontos fixos.
- Faça um gráfico do diagrama de bifurcações.

**Exercício 25** A bifurcação pitchfork é descrita pela equação  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r})$ ,

onde  $\vec{F}(\vec{r}) = (ax + \epsilon x^3, -y)$ , onde  $a$  é o parâmetro de controle e  $\epsilon = \pm 1$ . Para cada valor de  $\epsilon$ , pede-se:

- Calcule os pontos fixos.
- Calcule a jacobiana  $J_0$  de  $\vec{F}(\vec{r})$  nos pontos fixos.
- Calcule os auto-valores de  $J_0$ .
- Determine as regiões de estabilidade dos pontos fixos.
- Classifique os pontos fixos.
- Faça um gráfico do diagrama de bifurcações.

### 3.6.2 Bifurcação de Hopf

Os sistemas acima apresentam nós como pontos fixos estáveis e pontos de sela como pontos fixos instáveis uma vez que os auto-valores dos jacobianos são reais, e neste caso não são todos reais.

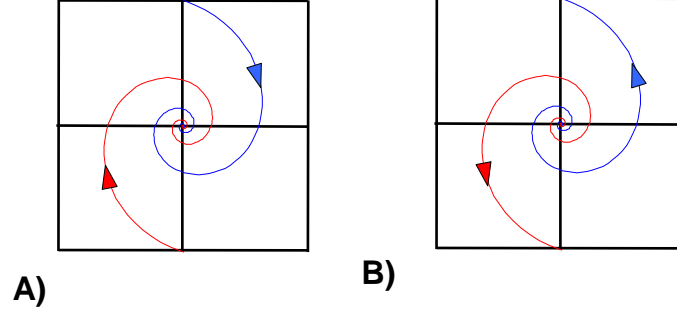


Figura 3.7: A) *foco estável*, B) *foco instável*.

A bifurcação Hopf é descrita pela equação  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r})$ , onde

$$\vec{F}(\vec{r}) = (-\omega y + x(\nu - \epsilon(x^2 + y^2)), \omega x + y(\nu - \epsilon(x^2 + y^2))) \quad (3.9)$$

, onde  $\omega, \nu$  são parâmetros de controle e  $\epsilon = \pm 1$ .

Este sistema tem apenas um ponto fixo  $(x^*, y^*) = (0, 0)$ , e o jacobiana neste ponto é dado por:  $\begin{bmatrix} \nu & -\omega \\ \omega & \nu \end{bmatrix}$  que tem os auto-valores complexos  $\nu + i\omega$  e  $\nu - i\omega$ , portanto o ponto é estável para  $\nu < 0$  e instável para  $\nu > 0$  independente do valor de  $\epsilon$ . Porém esta troca de estabilidade não é do tipo nó  $\Leftrightarrow$  ponto de sela. Para classificarmos este ponto fixo fica mais fácil com o uso de coordenadas polares

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (3.10)$$

e a equação 3.9 é reescrita como:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r\nu - r^3\epsilon \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

e estas equações não são acopladas e podemos integrá-las separadamente, com soluções  $r(t)$  e  $\theta = \omega t$ . Substituindo na equação 3.10 vemos que dada uma condição inicial próxima ao ponto fixo o vetor  $\vec{r}(t)$  girará no plano  $xy$  com velocidade angular  $\omega$  e módulo  $r(t)$  que decairá exponencialmente se  $\nu < 0$  e aumentará exponencialmente se  $\nu > 0$ .

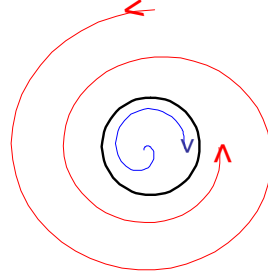


Figura 3.8: Em preto ciclo limite.

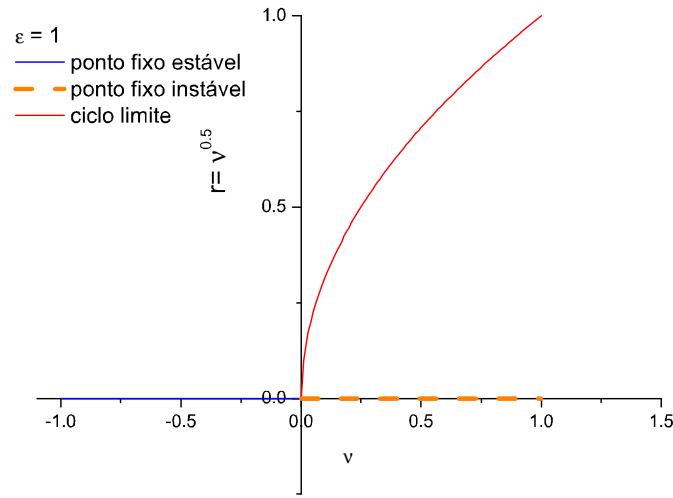


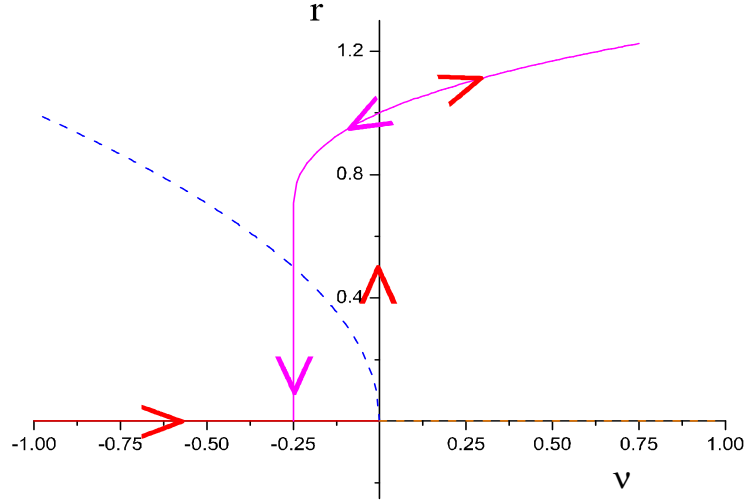
Figura 3.9: Diagrama de bifurcação supercrítica de Hopf.

O resultado mais interessante quando  $r(t)$  for constante, logo para  $\frac{dr}{dt} = 0$  temos duas soluções  $r_1^o = 0$  e  $r_2^o = r = \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}}$ . Devemos considerar dois casos para a segunda solução:

a) para  $\epsilon = 1$ ,  $r(t)$  será real se  $\nu \geq 0$ , como o ponto fixo nesta mesma região é instável e  $\vec{r}(t)$  gira com módulo  $r_2^o \sim \sqrt{\nu}$  constante e temos um ciclo chamado limite, representado em preto na figuras 3.8.

Esta é a chamada bifurcação de Hopf supercrítica., na qual a passagem de um ponto fixo ocorre suavemente para um ciclo limite e vice-versa.

b) Existe um caso no qual surge abruptamente um ciclo limite em  $\nu = 0$  quando aumentamos  $\nu$ . Esta característica é descrita adicionando adequa-



mente termos quadráticos na equação 3.9 e fazendo para  $\varepsilon = -1$ , a equação 3.11 é reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r(\nu + r^2 + r^4) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (3.12)$$

que preserva o ponto fixo  $r_1^o = 0$ . As raízes de  $\nu + r^2 + r^4 = 0$  nos dão os novos raios do ciclo limite. Na figura 3.6.2 vemos que aumentando  $\nu$  ocorre o surgimento abrupto do ciclo limite em  $\nu = 0$  e depois  $r$  segue a linha roxa, vide setas vermelhas. Se variarmos  $\nu$  no sentido decrescente a partir de um valor de  $\nu$  positivo o ciclo limite continua existindo para  $\nu < 0$  até  $\nu = -0.25$  onde abruptamente volta para o ponto fixo estável. Portanto, para  $-0.25 \leq \nu \leq 0$  há coexistência do ponto fixo estável e do ciclo limite estável e a obtenção de cada um deles depende da condição inicial. Este fenômeno é conhecido como histerese.

### 3.7 Expoentes de Lyapunov

Quando acima foi pedida a classificação das diversas trajetórias do sistema de Rössler em função do parâmetro de controle  $c$ , em alguns casos a visualização dos atratores era muito simples, um deles dava uma volta e retornava ao ponto de partida, em outros eram necessárias quatro voltas para retorno, mas em muitos deles era impossível determinar o número de voltas, ou mesmo se

havia retorno ao ponto de partida, neste caso temos um atrator caótico, e nos primeiros exemplos citados temos atratores periódicos de período 1 (uma volta) e período 4 (4 voltas). Essa maneira de caracterizar os atratores não é a mais adequada. Uma maneira é calcular o(s) expoente(s) de Lyapunov em função do parâmetro de controle  $c$ . Existem diversos algoritmos para o cálculo dos expoentes de Lyapunov é muito complexo, e mais complicado ainda quando tratamos de sistemas experimentais que são afetados por ruído. Este cálculo não faz parte do escopo deste livro, e por isso o veremos muito superficialmente.

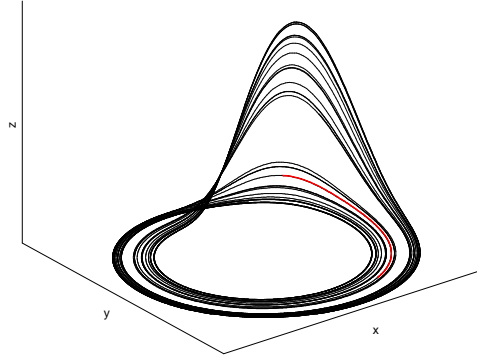


Figura 3.10: Atrator de Rössler.

O expoente de Lyapunov mede a divergência exponencial das trajetórias. Portanto vamos tomar como referência o pedaço em vermelho do atrator mostrado na figura 3.10 para ver como os trechos vizinhos dela divergem, e note que a divergência não é a mesma ao longo de cada eixo. Supondo que a solução no trecho vermelho é  $\vec{r}_o(t)$  e que a solução  $\vec{r}(t)$  em um trecho vizinho é obtida expandindo linearmente a solução em torno de  $\vec{r}_o(t)$  e lembrando que  $\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \vec{F}(\vec{r}_o)$ :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o(t) + \Delta\vec{r}(t)$$

,onde  $\Delta\vec{r}(t)$  é a evolução temporal da diferença entre as duas trajetórias vizinhas.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\Delta\vec{r}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}_o + \Delta\vec{r}) \approx \vec{F}(\vec{r}_o) + \overleftrightarrow{J}_o \Delta\vec{r}$$

$$\frac{d\Delta\vec{r}}{dt} = \overleftrightarrow{J}_o \Delta\vec{r} \quad (3.13)$$

onde  $\overleftrightarrow{J}_o = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix}$  é a matriz jacobiana cujos elementos são cal-

culados em  $\vec{r}_o(t)$  (trecho em vermelho). Para resolvermos a equação 3.13, devemos fazer uma mudança da base  $(\hat{x} \ \hat{y} \ \hat{z})$  para uma  $(\hat{\xi} \ \hat{\eta} \ \hat{\zeta})$ , e esta base

depende de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , na qual a jacobiana é diagonal,  $\overleftrightarrow{J}_{oD} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & & \\ & \Gamma_2 & \\ & & \Gamma_3 \end{bmatrix}$

onde os  $\Gamma$ s são os auto-valores da jacobiana que correspondem aos expoentes de Lyapunov, da trajetória  $\vec{r}_o(t)$  e uma única trajetória vizinha, entretanto existem muitas trajetórias vizinhas a  $\vec{r}_o(t)$ .

Portanto, em uma dada direção  $S_i$ , correspondente à  $i$ -ésima trajetória vizinha, devemos ter  $\frac{dS_i}{dt} = \Gamma_i S_i$ , e  $S_i = S_{oi} e^{\Gamma_i t}$  e deixando o trecho vermelho evoluir para  $t \rightarrow \infty$ , o expoente de Lyapunov  $\Lambda$  será dado pela média das divergências da trajetória vermelha com todas as suas vizinhas.

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_i \ln\left(\frac{S_i}{S_{oi}}\right). \quad (3.14)$$

O número de expoentes é igual à dimensão do sistema de equações homogêneas, e para o caso tridimensional devemos ter um expoente nulo que corresponde à direção ao longo de trajetória, um negativo na direção perpendicular e um terceiro, chamado de maior expoente nos diz se o atrator é periódico se for negativo, e caótico se for positivo.

## Capítulo 4

# Exemplos de Sistemas caóticos - Fluxo

### 4.1 Circuitos eletrônicos

Muitos sistemas dinâmicos podem ser construídos utilizando as propriedades de componentes eletrônicos elementares como capacitores, indutores e resistores, e de elementos mais sofisticados, circuitos integrados, construídos para desempenhar uma determinada função, como diodos, transistores, amplificadores operacionais, etc. Vejamos alguns exemplos:

Como estamos interessados em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem homogêneas, a medida da corrente em um capacitor (capacitância  $C$ ) submetido a uma diferença de potencial  $V(t)$  dependente do tempo é dada por  $i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$  que pode ser usada como lado "esquerdo" de equações diferenciais. A variação de corrente em um indutor (indutância  $L$ ) submetido a uma diferença de potencial  $V(t)$  é dada por  $\frac{di_L}{dt} = -\frac{V}{L}$ , se considerarmos  $V$  e  $i_L$  como variáveis dinâmicas do sistema, já temos um caminho de como duas equações podem se acoplar. Portanto com combinações adequadas de componentes elementares com circuitos integrados podem ser montados incontáveis sistemas autônomos de equações diferenciais.

Um circuito integrado fundamental é o amplificador operacional, vide figura 4.5, que pode ser utilizado para diversas finalidades de acordo com os tipos de conexões feitas entre os seus terminais de entrada  $V_+$ ,  $V_-$  e o terminal de saída  $V_S$ . E para funcionar tem que ser fornecida energia a ele por uma fonte de tensão simétrica através dos terminais de alimentação  $+V_a$  e  $-V_a$ .

Estes amplificadores são construídos com base em duas regras:



a) Não entra e nem sai corrente do operacional pelos terminais  $V_+$ ,  $V_-$ , portanto  $i_+ = i_- = 0$ .

b)  $V_+ = V_-$ , sempre.

Primeiramente veremos com detalhes um circuito não linear simples, o de Matsumoto-Chua, e depois outro mais elaborado.

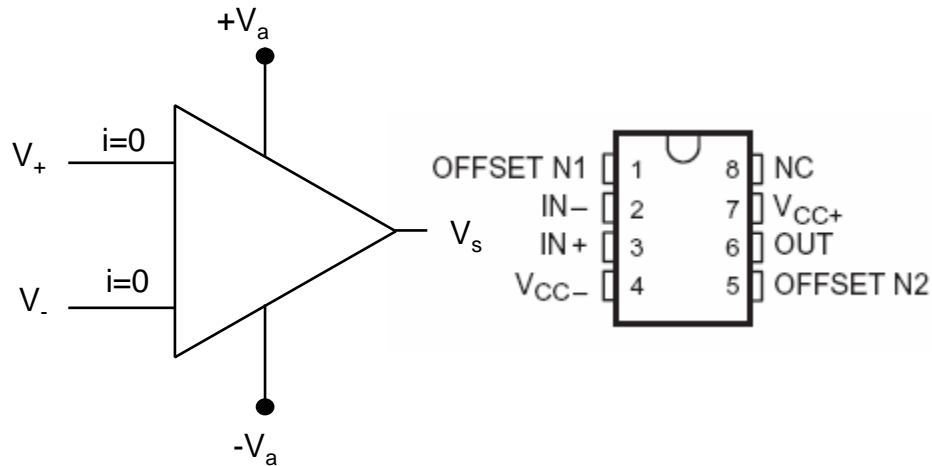


Figura 4.1: Do lado esquerdo o esquema de um amplificador operacional e do lado direito a pinagem de um amplificador 741:  $V_+ = \text{IN}+$  e  $V_- = \text{IN}-$  são tensões de entrada e  $V_s = \text{out}$  é a tensão de saída, e  $V_a = V_{cc+}$  e  $-V_a = V_{cc-}$  são a alimentação do amplificador operacional por uma fonte externa simétrica.

#### 4.1.1 Circuito oscilador linear

Um circuito oscilador é feito da combinação de resistores, capacitores e indutores, sendo que os dois últimos são dispositivos que podem armazenar energia, e são classificados como ativos, e os resistores são chamados de passivos por dissiparem energia. Nos osciladores o armazenamento de energia depende do modo, fonte cc ou ca, que esta é fornecida e como o sistema está conectado à sua fonte tensão.

**Atividade 26** *Escreva a equação que descreve a queda de tensão em um indutor, e a que descreve a corrente em um capacitor.*

Conectando o circuito mostrado na figura 4.2 à uma fonte de tensão cc de uma voltagem  $V$ , e supondo que no instante inicial todos os elementos ativos estejam sem energia acumulada, a corrente fornecida dependerá do tempo e

após um tempo longo a corrente deste estado estacionário será constante, lembrando que só há corrente pelos capacitores enquanto estes estiverem sendo carregados, e que de tensão no indutor enquanto houver variação de corrente teremos uma resistência equivalente entre os pontos A e B que corresponde à uma associação em série de resistores, mas haverá energia acumulada nos capacitores e no indutor que se manterá constante.

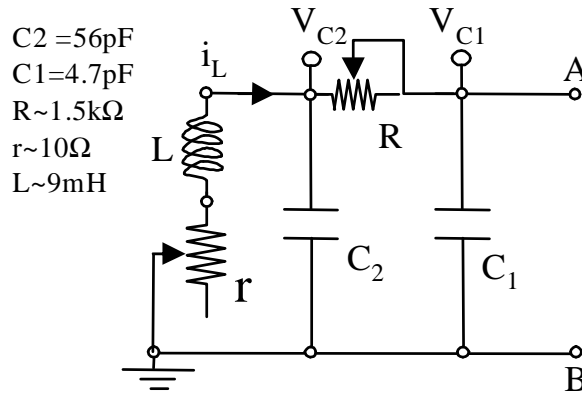


Figura 4.2: Circuito oscilador.

**Atividade 27** Qual é a expressão para a resistência equivalente? E a expressão para a corrente  $I$  fornecida pela fonte de tensão no estado estacionário?

**Atividade 28** Obtenha a expressão para a energia acumulada em cada elemento ativo, em função de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L$ ,  $I$  e  $V$ .

**Atividade 29** Qual a corrente final se a fonte cc for ligada entre  $V_{C2}$  e o terra?

**Atividade 30** Para este caso, obtenha a expressão para a energia acumulada em cada elemento ativo, em função de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L$ ,  $I$  e  $V$ .

Nos casos acima não há estados estacionários oscilantes, isto é, apesar de termos fornecido energia ao sistema os estados oscilantes não foram excitados.

Aplicando uma tensão alternada  $V = V_o \cos(\omega t)$ , onde  $V_o$  é a amplitude e  $f = \omega/2\pi$  a frequência, entre os pontos A e B, a corrente do estado estacionário oscilará com esta mesma frequência e é dada por  $I = \frac{V}{Z_{AB}}$ , onde  $Z_{AB}$  é a impedância do circuito entre os pontos A e B.

**Atividade 31** Qual é a impedância de cada elemento do circuito? Quais têm impedância complexas e quais têm impedância reais?

**Atividade 32** Qual é a impedância entre os pontos A e B em função de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L$ ,  $V_o$  e  $\omega$ ?

A impedância tem a parte real e imaginária, quando a parte imaginária é nula significa que toda a energia fornecida ao circuito será dissipada nos resistores, nesta condição o circuito entrou em ressonância com a fonte, isto é, o circuito passa a oscilar com a frequência natural  $\omega_o$ .

**Atividade 33** Qual é a frequência natural deste circuito?

**Atividade 34** Se a fonte for ligada entre  $V_{C2}$  e o terra, o circuito apresenta a mesma frequência natural?

### 4.1.2 Circuito de Matsumoto-Chua (MC)

Também podemos ligar entre os pontos A e B uma fonte que não é cc e nem ca, basta ligarmos uma fonte que forneça energia que dependa do tempo. Um destes sistemas é conhecido como circuito de Matsumoto-Chua, onde a corrente fornecida é equivalente a um sistema que obedece a lei de Ohm, porém com resistência negativa que depende da tensão aplicada no resistor, que chamaremos de resistor não linear ( $R_{NL}$ ), como mostrado na figura 4.3.

O resistor não linear é um outro circuito elétrico, mostrado na figura 4.4, e a equação contém um amplificador operacional, 2 diodos e alguns resistores. Para facilitar a compreensão, o circuito foi dividido em duas partes, uma delimitada pelo retângulo tracejado na figura 4.4, e a parte restante que contém duas malhas com polarização inversa, sendo que uma delas está delimitada pela elipse tracejada.

Vejamos primeiramente o circuito do retângulo tracejado, redesenhado na figura 4.5, que é o utilizado no circuito de Matsumoto-Chua.

Vamos supor  $V_{E+} = V_c$  e  $i_{E+} = i_c$ , como  $i_+ = 0$  (regra a), no resistor  $r_{s1}$  irá passar a corrente  $i_1 = i_c$ , portanto a queda de tensão em  $r_{s1}$  é dada por

$$V_s - V_c = -r_{s1}i_c \quad (4.1)$$

Como  $V_{E-} = V_B = V_c$ , e como  $i_- = 0$  (regra a), no nó B devemos ter  $i_2 = i_A$  onde  $i_A$  é corrente drenada para o terra através do resistor  $R_A$ , dada por

$$i_A = i_2 = \frac{V_c}{R_A} \quad (4.2)$$

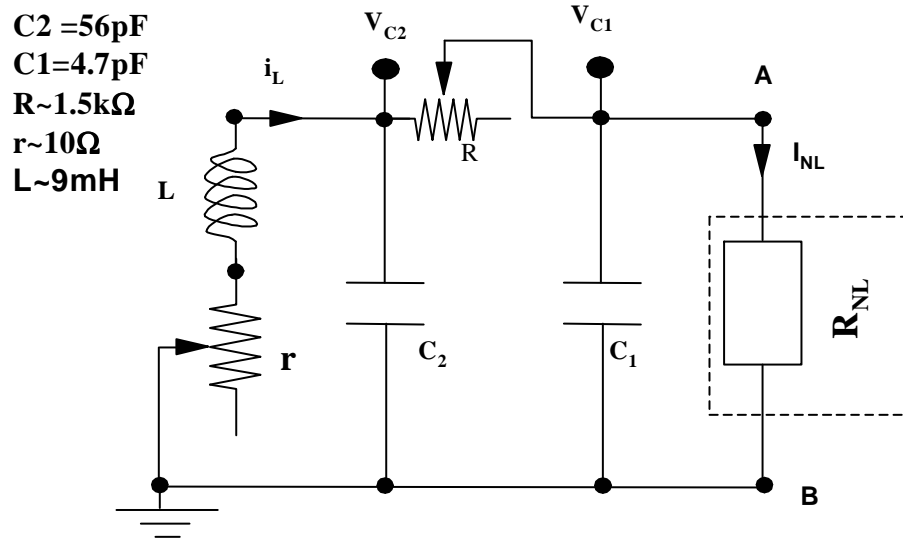


Figura 4.3: Circuito oscilador conectado a um resistor não linear, representado dentro do retângulo tracejado.

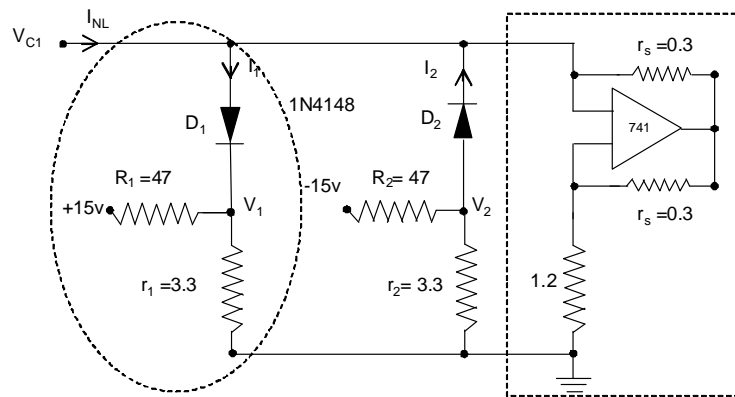


Figura 4.4: Circuito externo conectado ao circuito *resistência negativa*, redesenhado dentro do retângulo tracejado. Os valores das resistências são em  $\text{k}\Omega$ .

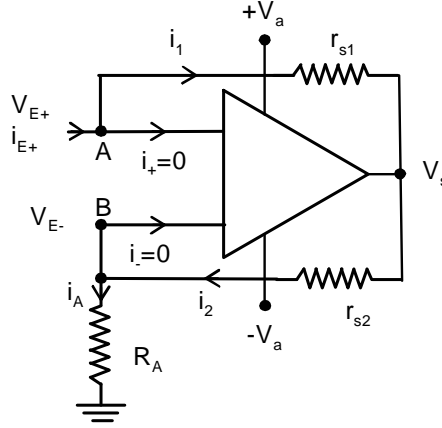


Figura 4.5: Exemplo do uso de um amplificador operacional.

e como  $R_A$  e  $r_{s2}$  estão associados em série a tensão  $V_s$  é dada por

$$V_s = (r_{s2} + R_A)i_2 = (r_{s2} + R_A)\frac{V_c}{R_A} \quad (4.3)$$

que combinada com as equações 4.1, 4.2 e 4.3 obtemos

$$i_c = -\frac{r_{s2}}{r_{s1}R_A}V_c \quad (4.4)$$

Observe que reescrevendo esta equação  $V_c = -\frac{r_{s1}R_A}{r_{s2}}i_c$  temos o equivalente a lei de Ohm porém com uma resistência negativa, que no lugar de dissipar energia pode fornece-la a um circuito externo conectado no ponto A, vide figura 4.6. Daqui para frente vamos chamar este circuito de *resistência negativa*.

Na figura 4.4 é mostrado um circuito conectado ao circuito *resistência negativa* redesenhado dentro do retângulo tracejado. Queremos saber quanto vale a corrente  $I_{NL}$  ao aplicarmos a tensão  $V_{C1}$ . Dois ramos, conectando  $V_{C1}$  ao terra, estão representados, o ramo 1 dentro da elipse tracejada, onde  $D_1$  é um diodo zener que permite a passagem da corrente  $I_1$  apenas no sentido indicado pela seta, e este ramo é alimentado por uma tensão de 15v. O ramo 2 é equivalente ao 1 com as polaridades invertidas.

Para obtermos  $I_{NL}$  como função de  $V_{C1}$  é preciso primeiro analisarmos as possíveis combinações de passagem de corrente pelos diodos  $D_1$  e  $D_2$ . Devido às polaridades de alimentação os dois diodos não podem permitir a passagem de corrente simultaneamente, se um deles está conduzindo o outro não pode conduzir, e também os dois podem não conduzir simultaneamente, portanto

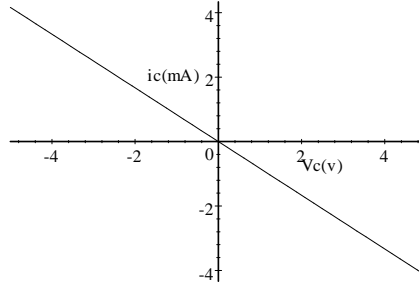


Figura 4.6: Uma curva característica  $i_c$  vs.  $V_c$ , com  $r_{s1} = r_{s2}$  e  $R_A = 1.2k\Omega$ , do circuito ilustrado na figura 4.5.

cada caso tem que ser analisado separadamente. Começando pelo último caso.

$D_1$  e  $D_2$  não estão conduzindo, portanto a corrente  $I_{NL}$  é a corrente que entra no circuito de *resistência negativa* e a equação 4.4 é aplicada diretamente, logo

$$I_{NL} = -\frac{1}{1.2}V_{C1}. \quad (4.5)$$

Se  $D_1$  está conduzindo então  $V_1 = V_{C1}$  e o circuito equivalente é o da figura 4.7, e precisamos então calcular  $I_c^{(1)}$  que é a corrente que vai para o circuito resistência negativa para aplicar a equação 4.4.

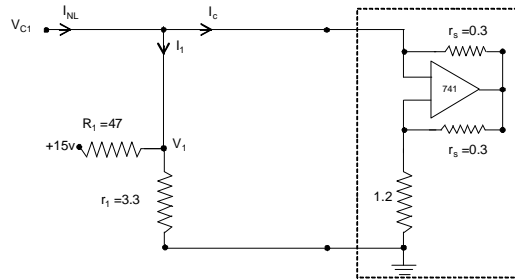


Figura 4.7:  $D_1$  conduzindo.

**Atividade 35** Mostre que  $I_c^{(1)} = I_{NL}^{(1)} - \frac{50.3}{47 * 3.3}V_{C1} - \frac{15}{47}$ .

**Atividade 36** Aplicando o resultado do exercício anterior na equação 4.4 obtenha a função  $I_{NL}^{(1)}(V_{C1})$ .

**Atividade 37** Supondo que  $D_2$  esteja conduzindo obtenha a função  $I_{NL}^{(2)}(V_{C1})$ .

**Atividade 38** Com os dados numéricos mostrados na figura 4.4 plote simultaneamente  $I_{NL}(V_{C1})$ ,  $I_{NL}^{(1)}(V_{C1})$ ,  $I_{NL}^{(2)}(V_{C1})$ .

Este gráfico deve ter a forma mostrada na figura 4.8.

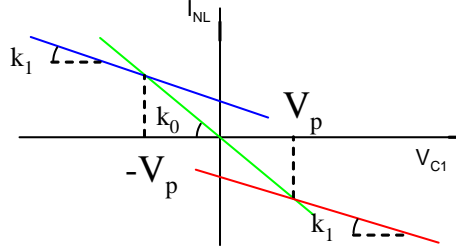


Figura 4.8: Curva característica do circuito mostrado na figura 4.4, que corresponde a um resistor não linear  $R_{NL}$ , com resistência negativa.

**Atividade 39** Determine o valor de  $V_{C1}$  no qual o diodo  $D_1$  passa a conduzir corrente. Calcule o mesmo para o diodo  $D_2$ .

**Atividade 40** Calcule os coeficientes angulares  $m_0$  e  $m_1$  de  $I_{NL}(V_{C1})$ , vide figura 4.8.

Com isto acabamos de construir um circuito não linear, isto é, a corrente não é linear com  $V_{C1}$  para todos os valores de tensão, e é então equivalente a um resistor de resistência negativa, que passaremos a denominar  $R_{NL}$ , como representado dentro do retângulo tracejado na figura 4.3.

**Atividade 41** Aplicando as regras de Kirchhoff no circuito da figura 4.3 obtenha, mostrando todas as passagens, o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dV_{C1}}{dt} &= \frac{V_{C2} - V_{C1}}{RC_1} - \frac{I_{NL}}{C_1} \\ \frac{dV_{C2}}{dt} &= -\frac{V_{C2} - V_{C1}}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2} \\ \frac{di_L}{dt} &= \frac{-V_{C2} - ri_L}{L} \end{aligned} \quad (4.6)$$

e que a corrente que passa pelo resistor não linear pode ser escrita na forma:

$$I_{NL} = k_1 V_{C1} - \frac{k_1 - k_0}{2} (|V + V_p| - |V - V_p|). \quad (4.7)$$

Experimentalmente podemos usar qualquer parâmetro, isto é,  $C_1, C_2, L, r$  ou  $R$  como parâmetros de controle, mas na prática é mais fácil utilizar potenciômetros para  $r$  e  $R$  e medimos  $V_{C1}$ ,  $V_{C2}$  e  $i_L$  que são então as variáveis dinâmicas do sistema que definem o espaço de fases  $V_{C1} \times V_{C2} \times i_L$ . Mas calcular as trajetórias no espaço de fases com a equação 4.6 com os valores dos parâmetros experimentais quase sempre não dá certo, isto, é as soluções divergem. Isto se deve à magnitude dos parâmetros e a variação muito fina requerida das condições iniciais. Felizmente o sistema de equações autônomas 4.6 pode ser reescalonado e as condições iniciais que nos dão bons resultados são mais facilmente obtidas. Fazendo os reescalonamentos:

$$\frac{t}{C_2} \rightarrow t, \frac{C_1}{C_2} \rightarrow C_1, C_2 = 1, \frac{L(H)}{10^6 C_2(F)} \rightarrow L, 10^3 i_L \rightarrow i_L = z, 10^3 I_{NL} \rightarrow I_{NL}, 10^{-3} R \rightarrow R, 10^{-3} r \rightarrow r, x = V_{C1}/V_p, y = V_{C2}/V_p,$$

a equação adimensional é obtida:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_1(y - x - g(x)) \\ \frac{dy}{dt} &= A_2(x - y + z) \\ \frac{dz}{dt} &= -A_3y + A_4z \\ g(x) &= m_1x - \frac{m_1 - m_0}{2}(|x + 1| - |x - 1|), \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde os  $A$ s são parâmetros de controle, e  $m_1$  e  $m_0$  são os coeficientes angulares negativos.

**Atividade 42** *Mostre que este sistema é dissipativo.*

**Atividade 43** *Com  $m_0 = -8/7$ ,  $m_1 = -5/7$ ,  $A_1 = 15.6$ ,  $A_2 = 1$ ,  $A_4 = 0$ , obtenha os espaços de fases para  $A_3 = [50, 35, 33.8, 33.6, 33, 25.58]$  integrando a eq.4.8 com o seu programa de integração numérica por Runge-Kutta de quarta ordem.*

**Atividade 44** *Repita o exercício anterior agora com  $A_4 = [0.1, 0.2, 0.4, 1]$*

**Atividade 45** *Para cada valor de  $A_3$  do exercício 43 calcule as funções de auto-correlação das variáveis  $x, y$  e  $z$  com o programa escrito no exercício 15, e estime  $k$  para cada caso. Faça também a reconstrução de Takens e compare as trajetórias nos dois espaços de fases.*

Construindo um circuito de Chua-Matsumoto com os valores dos parâmetros mostrados na figura 4.3, o circuito oscilador terá uma frequência fundamental de  $\sim 5kHz$ , ou um período  $T \approx 200\mu s$ . Para construir o espaço de



fase  $V_{C1}V_{C2}i_L$ , devemos medir estas três grandezas ( $i_L$  pode ser obtido com a medição da tensão  $V_r$  sobre o resistor  $r$ ) para caracterizar o movimento observado experimentalmente. Para isto devemos medir estas tensões com um Conversor Analógico Digital (ADC), que converte as tensões analógicas para digitais em instantes de tempos regulares. A precisão de conversão é dada pelo número de bits, por exemplo, uma placa ADC de 12 bits tem uma precisão aproximadamente de  $4mV$  para um fundo de escala de  $5V$ . O intervalo de tempo entre uma conversão e a seguinte define a taxa de amostragem, por exemplo, uma taxa de  $1Mamostras/s$  significa que um milhão de conversões serão feitas a cada segundo. Portanto, uma placa ADC é caracterizada pelo número de bits, pela taxa de aquisição máxima, e pelo número de variáveis ou canais que pode medir simultaneamente, a taxa de aquisição de fato utilizada é dada pela taxa máxima dividida pelo número de canais, e cada variável medida recebe o nome de série temporal.

Para caracterizar adequadamente um movimento as séries temporais têm que ser obtidas com período muito menor que o período natural do oscilador, e durante um intervalo de tempo correspondente a duzentos períodos do oscilador. Para este circuito de Matsumoto-Chua significa que um período de amostragem adequado corresponde a  $2\mu s$ , o que dá uma taxa de amostragem de  $500kamostros/s$ , portanto se formos medir as 3 variáveis necessitamos de um ADC de  $1.5Mamostras/s$ . e cada série temporal terá 20.000 pontos. Mas como você viu com as simulações, as trajetórias nos espaços de fase apresentam comportamentos muito variados que dependem dos parâmetros de controle, e logicamente a medição das 3 variáveis gerará uma quantidade enorme de longas séries temporais.

### 4.1.3 Lab1: Análise de dados experimentais do Circuito de MC

**Atividade 46** *Com o dados experimentais, calcule a função de auto-correlação para cada série temporal. Faça um programa para calcular e plotar a função.*

**Atividade 47** *Determine para cada série temporal o tempo de correlação ( $\tau$ ) adequado para a reconstrução do espaço de fases de Takens:  $x = V_{c1}(t - 2\tau)$ ,  $y = V_{c1}(t - \tau)$  e  $z = V_{c1}(t)$ .*

**Atividade 48** *Construa as trajetórias no espaço de fases reconstruído.*

**Atividade 49** *Utilizando o seu programa integrador, procure atratores equivalentes (ou parecidos) aos experimentais variando o parâmetro de controle, repetindo as Atividades 47 e 48 com a variável  $x$ .*

**Atividade 50** *Faça uma função para achar os máximos (e mínimos) de uma série temporal  $\{x_k\}$ .*

**Atividade 51** *Faça uma função para plotar mapas de primeiro retorno  $\max(x)_{k+1}$  vs.  $\max(x)_k$ , onde  $\max(x)$  é o vetor que contém os valores de máximos locais de  $x$ .*

**Atividade 52** *Aplique as Atividades 50 e 51 às séries experimentais e às obtidas com simulação.*

**Atividade 53** *Classifique os seus atratores experimentais (periódicos, caóticos, etc). Faça um esboço dos respectivos mapas de primeiro retorno.*

#### 4.1.4 Circuito de Rössler - Desafio

Monte o circuito de Rössler, cujo esquema está mostrado na figura

4.9 [7], e construa o diagrama de bifurcações experimental tendo como parâmetro de controle um potenciômetro de 250k $\Omega$ .

### 4.2 Sistemas Mecânicos

#### 4.2.1 Pêndulo paramétrico

Suponha que o pivot do pêndulo simples (ponto  $o$  na figura 2.1) oscile senoidalmente ao longo do eixo  $y$ ,  $y_p = a \sin(\Omega t)$ , onde  $a$  é a amplitude de oscilação, e  $\Omega$  a frequência angular. Suponha que pêndulo seja formado por uma haste rígida de comprimento  $L$  e massa nula. Este sistema é descrito pela equação:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L} - \frac{a}{L}\Omega^2 \sin(\Omega t)\right) \sin(\theta), \quad (4.9)$$

onde  $\sqrt{\frac{g}{L}} = \Omega_o$  é a frequência natural de oscilação e  $\Omega$  a frequência da perturbação

Reescrevendo a equação 4.9

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g(t)}{L}\theta \quad (4.10)$$

vemos que ela é formalmente igual à equação 2.1, mas com  $g$  dependente do tempo. Os sistemas que têm parâmetros que dependentes do tempo são chamados de paramétricos.

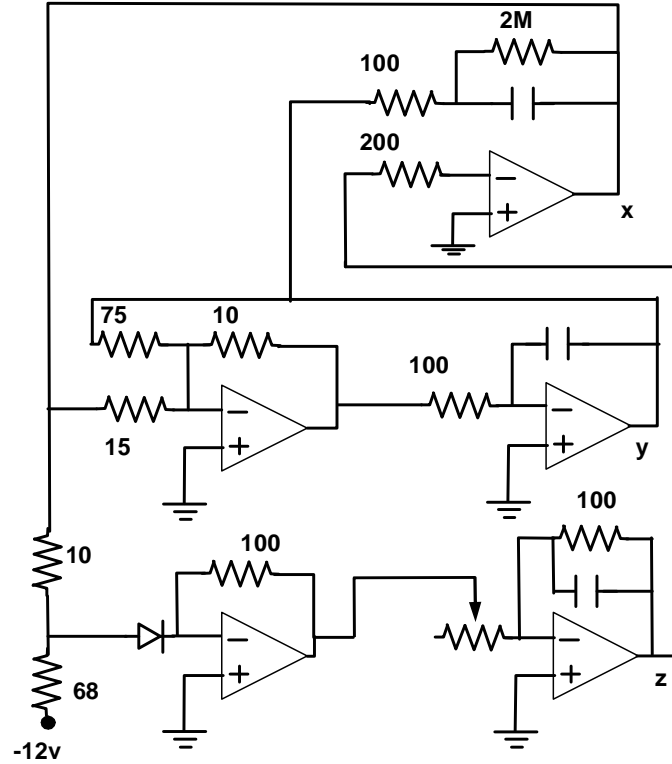


Figura 4.9: Os valores das resistências são em  $k\Omega$ , exceto o indicado por  $2M=2M\Omega$ . Todas as capacitâncias valem  $220\text{ pF}$ , e o parâmetro de controle é dado pelo potenciômetro de  $200k\Omega$ . O diodo é o BA316 e os amplificadores operacionais podem ser 0741.

Para  $a = 0$ , isto é sem a perturbação vertical e periódica, o ponto (no espaço de fases)  $\theta = 0$  e  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 0$  é estável se as condições iniciais forem  $\theta_0 = 0$  e  $\omega_0 = 0$ , para qualquer valor de  $\Omega$ , mas para um valor pequeno de  $a \gtrsim 0$  este ponto perde a estabilidade quando  $\Omega = \Omega_o, 2\Omega_o, \dots$  mesmo que não haja dissipação por atrito. Para vermos para quais valores de  $\Omega$  e  $a$  o ponto fixo é estável, podemos construir um gráfico no qual plotamos um ponto com uma cor quando verificamos que o ponto fixo é estável e com outra cor quando é instável, a este tipo de gráfico damos o nome de espaço de parâmetros. Acesse o endereço [www.ifmo.ru/butikov/](http://www.ifmo.ru/butikov/) e você verá muitas simulações e animações

O ponto  $\theta = \pi$  e  $\omega = 0$  é um ponto fixo instável mas um dos efeitos mais interessantes é que pode ser estabilizado para uma dada região do espaço de parâmetros, isto é, o pêndulo na posição invertida. Se você estiver conectado

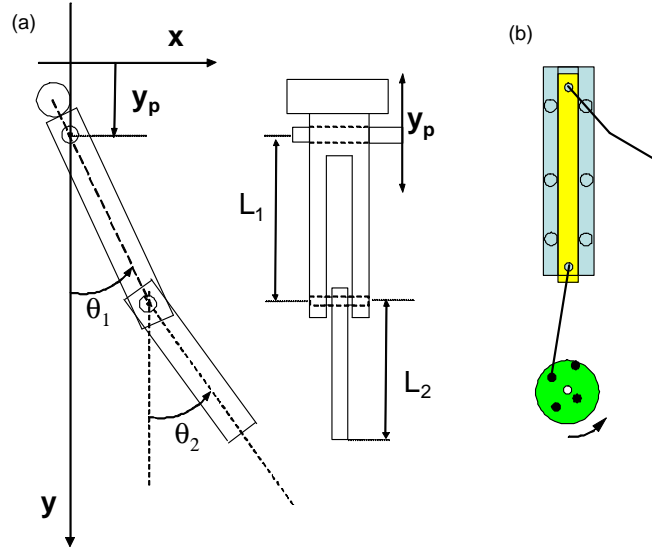


Figura 4.10: Pêndulo duplo paramétrico. O braço-1 ligado ao pivot tem comprimento  $L_1$ , massa  $M_1$ , e o outro braço tem comprimento  $L_2$  e massa  $M_2$ .

à internet poder observar este efeito clicando PenduloSimples.

Na figura 4.10 temos o diagrama de um pêndulo duplo paramétrico.

**Atividade 54** Supondo que  $y_p = A \sin(\Omega t)$ , obtenha a Lagrangeana do pêndulo duplo paramétrico. Obtenha as equações do movimento.

**Atividade 55** Desafio: Com  $L_1 = 19.25 \text{ cm}$ ,  $L_2 = 18.25 \text{ cm}$ ,  $I = 11945 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ ,  $I_2 = 1640 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ ,  $C = 685.7 \text{ g} \cdot \text{cm}$ ,  $\gamma = 2529 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ ,  $R = 131.34 \text{ g} \cdot \text{cm}$ , integre as equações de movimento tendo como parâmetros de controle  $A \in [0 \ 5] \text{ cm}$  e  $\Omega \in [0 \ 20] \text{ Hz}$  e construa as projeções do espaço de fases  $\dot{\theta}_1$  vs.  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_2$  vs.  $\theta_2$  e  $\theta_2$  vs.  $\theta_1$ .

Veja os vídeos aqui: Oscilação com pi e z, aqui: Rotação, aqui: Ponto fixo estabilizado.

# Capítulo 5

## Mapas

### 5.1 Mapas unidimensionais

Com a observação do cruzamento de superfícies por trajetórias (seções de Poincaré) no espaço de fases obtivemos mapas que preservam as propriedades dos atratores, nos exemplos do sistema de Rössler obtivemos mapas bidimensionais. Vamos estudar agora um mapa que é o paradigma de sistema caótico. Vejamos como ele pode ter surgido.

A taxa de crescimento de uma população em um ambiente de comida limitada não pode ser ilimitada. Esta taxa, chamada de crescimento vegetativo (dada pela diferença de nascimentos e mortes de indivíduos, por unidade de tempo), deve ser proporcional à população em um dado instante e também ao número de mortes. Se a quantidade de comida é constante, vide figura 5.1 no início a população cresce rapidamente por que há comida para todos, mas após um tempo longo a quantidade de comida é suficiente para um número fixo de indivíduos, e a taxa de crescimento da população torna-se nula, o número de nascimentos é igual ao número de mortes no mesmo período. A função mostrada na figura 5.1 pertence à família das sigmodais e descrevem a passagem de um patamar para outro.

Verhulst propôs a equação para o crescimento populacional, a chamada de equação logística

$$\frac{dz}{dt} = az(1 - z) \quad (5.1)$$

onde  $z$  é a população no instante  $t$  e  $a$  é um parâmetro a ser determinado. Esta equação é integrável para qualquer valor de  $a$  :

$$z(t) = \frac{1}{1 - \frac{z_0 - 1}{z_0} e^{-at}} \quad (5.2)$$

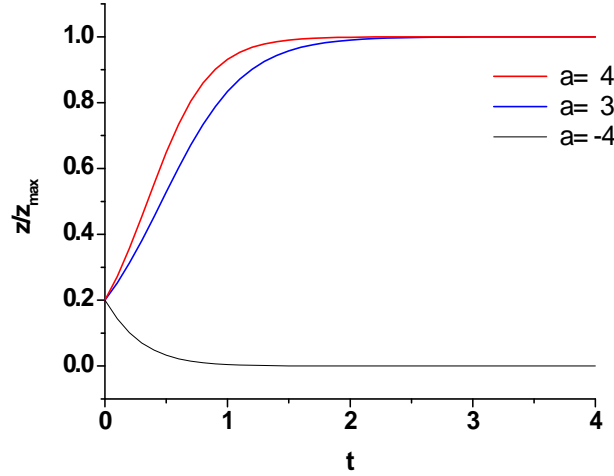


Figura 5.1: Crescimento populacional em um ambiente com uma quantidade de alimento fixa.

onde  $z_0$  é a população inicial.

Vamos supor que a solução algébrica não é conhecida e devido à simplicidade da equação vamos utilizar o método de Euler para fazer a integração numérica. Seja  $z_n$  o valor da população no instante  $n\Delta t$ , se  $\Delta t$  for suficientemente pequeno normalmente utilizamos a aproximação para a derivada mostrada na equação 5.3 :

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \approx \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} \quad (5.3)$$

que combinada com a equação 5.1 obtemos:

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} = az_n(1 - z_n)$$

e com isto obtemos uma relação de recorrência simples, se conhecemos a população no instante  $t_n$  facilmente a calculamos para o instante  $t_{n+1}$ :

$$z_{n+1} = (a\Delta t + 1)z_n - a\Delta t z_n^2 \quad (5.4)$$

e na figura 5.2 são mostradas as curvas obtidas com as equações 5.2 (linha contínua preta) e 5.4 (pontos em vermelho) com diversos valores para o parâmetro  $a$ , indicado no título de cada gráfico. Estes resultados independem do passo  $\Delta t$  de integração e os pontos vermelhos mostram um comportamento inesperado. Isto se deve ao fato que por menor que seja  $\Delta t$  ele sempre será

finito, e a aproximação feita na equação 5.3 nunca será adequada. Portanto, o método de Euler deve ser usado com muito cuidado, ou melhor nunca deve ser usado, mas neste caso os resultados tão surpreendentes revelaram propriedades muito interessantes da equação 5.4, observe que para  $a = 49.95$ ,  $249.75$ ,  $749.25$  até que as soluções estacionárias concordam muito bem apresentando um valor fixo  $z = 1$ ; para  $a = 1048.95$  a solução aproximada apresenta dois valores alternadamente em torno de 1, para  $a = 1248.75$  apresenta 4 valores alternados em torno de 1 e finalmente para  $a = 1498.5$  os valores são todos espalhados.

A equação 5.4 pode ser reescrita de uma maneira mais simples fazendo uma mudança de variável  $x = z \frac{b}{p}$  com  $b = a\Delta t$ ,  $p = b + 1$  com  $x$  no intervalo  $[0, 1]$ :

$$x_{n+1} = px_n(1 - x_n). \quad (5.5)$$

onde  $n$  é o número de iterações.

Esta equação é conhecida como mapa logístico e é o paradigma de sistema caótico. Um mapa é uma função que associa os elementos de um dado conjunto  $A$  com os elementos de outro conjunto  $B$ :  $f : A \mapsto B$ , se  $a \in A$  então existe um único elemento  $f(a) \in B$ . O mapa logístico é um exemplo de mapa unidimensional  $x_{n+1} = f(x_n)$ , mas podemos ter mapas de qualquer dimensão, se  $\vec{r}_{n+1}$  tem  $N$  componentes ou variáveis temos um mapa  $N$ -dimensional  $\vec{r}_{n+1} = \vec{F}(\vec{r}_n)$ , e os comportamentos dos mapas também dependem de parâmetros de controle.

### 5.1.1 Mapa logístico

Com equação 5.6, onde  $p$  é o parâmetro de controle, obtivemos as séries temporais de  $x$ , a partir de uma condição inicial  $x_0$ , mostradas na figura 5.2. Construindo os mapas de primeiro retorno  $x_{n+1}$  vs.  $x_n$  com as soluções estacionárias, veremos atratores de período 1 para  $p=1.1$ ,  $1.5$  e  $2.5$ , um atrator de período 2 para  $p=3.1$ , outro de período 4 para  $p=3.5$ , e um com infinitos períodos para  $p=4$ , que é uma característica de atratores caóticos. Construindo um gráfico destas soluções estacionárias em função de  $p$ , veremos também um diagrama de bifurcações.

$$x_{n+1} = px_n(1 - x_n). \quad (5.6)$$

**Atividade 56** *Escreva um programa para obter as séries temporais  $x_n$ , e para plotar  $x_n$  vs.  $n$  tendo como parâmetros de entrada o parâmetro de controle  $p$ , o número de iterações (cada vez que a equação é aplicada chamamos de iterada), e condição inicial  $x_0$ .*

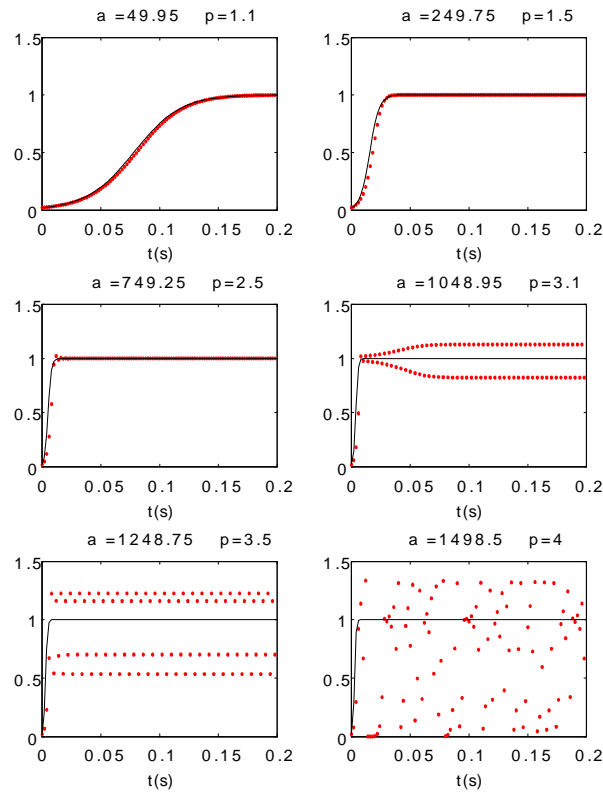


Figura 5.2: A linha contínua em preto foi obtida com a equação 5.2 e os pontos em vermelho com a relação de recorrência, eq. 5.4. Os resultados são independentes do intervalo  $\Delta t$ .



É interessante acompanhar graficamente as iteradas do mapa, conforme mostrado na figura

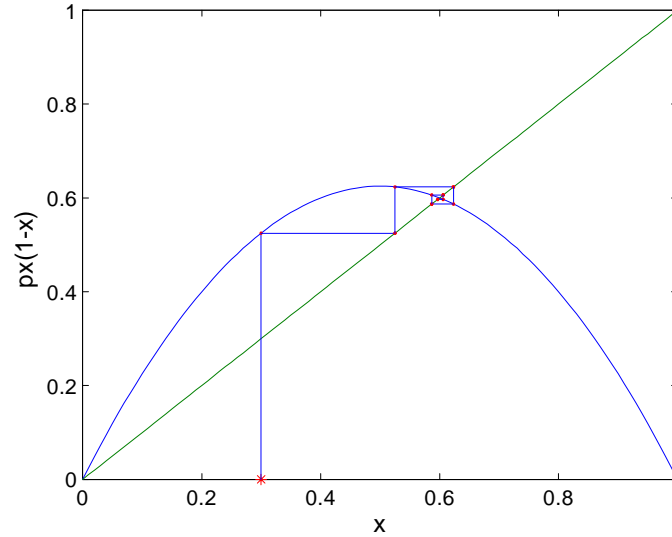


Figura 5.3: E

5.3. Para um dado valor de  $p$ , plotamos a função  $f(x) = px(1 - x)$  (em azul), com  $x$  variando entre 0 e 1, a reta  $y = x$ , (em verde) e o ponto inicial  $(x_0, 0)$  marcado com \*, e desenhamos a reta que une o ponto inicial com o da primeira iterada  $(x_0, x_1)$  e deste ponto até  $(x_1, x_1)$  em cima da reta verde, e para a segunda iterada fazemos  $x_0 = x_1$  e o processo se repete a cada vez que atingimos um ponto em cima da reta verde, e desta maneira podemos visualizar a evolução da série temporal.

**Atividade 57** *Modifique o programa anterior construindo a visualização da evolução da série temporal. Sugestão: Plote primeiro a função  $f(x)$  e a reta e use o comando `hold on`, e dentro de uma operação cíclica ao plote cada ponto, e após cada comando `plot` use o comando `drawnow` seguida do comando `pause(0.1)`.*

**Atividade 58** *Com este programa observe as evoluções para  $p = 1.1, 1.5, 2.5, 3.1, 3.5, 3.7, 3.9$  e  $4.0$ . com  $x_0 = 0.6$ . O que acontece quando é utilizado  $p < 1$ ? E para  $p > 4$ ? Escreva a sua resposta.*

**Atividade 59** *Repita a atividade anterior com  $x_0 = 0.99$  e compare os resultados com os mesmos valores de  $p$  da atividade anterior. Depois refaça o exercício com  $x_0 = -0.01$  e  $x_0 = 1.01$ . O que aconteceu em ambos os casos? Pense em bacia de atração.*

**Atividade 60** Escreva um programa para gerar o diagrama de bifurcações do mapa logístico, com  $p$  variando dentro de um intervalo dado como parâmetro de entrada, e com  $x_0 = 0.6$ , e  $NP$ =número de passos de  $p$ . Para desprezar o transiente com  $NT$  interações (5000 é um bom número) insira nos seu programa: *For*  $k=1:NT$ ;  $x0=p*x0*(1-x0)$ ; *end*; e utilize este valor de  $x_0$  para gerar as séries temporais estacionárias. com  $N$  interações ( $N = 5000$ ). Lembrete: Cada série temporal tem que ser plotada para um mesmo valor da abscissa  $p$ .

**Atividade 61** Usando o programa da atividade anterior, construa o diagrama de bifurcações com  $p_{\min} = 1$  e  $p_{\max} = 4$  e com  $NP = 100$  valores de  $p$ .

**Atividade 62** Baseado no resultado anterior escolha alguns valores de  $p$  e em cada caso escolha um intervalo pequeno  $[p_{\min}, p_{\max}]$  tendo  $p$  como valor médio deste intervalo. Sugestões: Com  $NP = 20$ ;  $p = 3$  e intervalo  $[2.9, 3.1]$ ;  $p = 3.87$  e intervalo  $[3.8, 3.9]$

Você deve ter observado que com  $p \in [1, 3]$  sempre foi obtido um atrator de período 1, e que em  $p = 3$  ocorre uma bifurcação e surgindo um atrator de período 2. Vamos ver como essa bifurcação acontece, e para isto devemos obter os pontos fixos do mapa .

### 5.1.2 Pontos fixos/estabilidade

Um ponto fixo é obtido quando dado um ponto a iteração do mapa nos dá o mesmo valor, é o que acontece no caso dos atratores de período 1. Para achar este ponto fixos fazemos então:

$$x^* = px^*(1 - x^*) \quad (5.7)$$

cujas soluções são:  $x^* = 0$  e  $x^* = \frac{-1+p}{p}$ . Das atividades anteriores sabemos que os atratores periódicos correspondem à segunda solução  $x^* = \frac{-1+p}{p}$ , portanto correspondem a pontos fixos estáveis cuja perda de estabilidade deve ocorrer em  $p = 3$ . Portanto, também precisamos estudar a estabilidade dos pontos fixos.

Para sabermos se um ponto fixo  $x^* = f(x^*)$  de um mapa  $x_{n+1} = f(x_n)$ , é estável devemos estudar a aproximação das iterações de um ponto  $x_0$  próximo ao ponto fixo. Seja

$$x_k(x_0) = f^k(x_0) \quad (5.8)$$

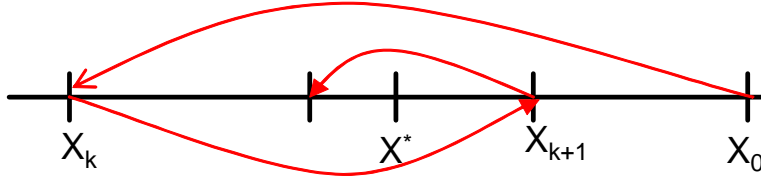


Figura 5.4: Evolução de um mapa a partir de uma condição inicial nas proximidades de ponto fixo.

a  $k$ -ésima iterada do ponto  $x_0$ , isto é,

$$f^k(x) = \overbrace{f(f(f(\dots f(x_0))))}^{k \text{ vezes}} \quad (5.9)$$

e a distância ao ponto fixo é  $|x_k(x_0) - x^*|$  e a distância do ponto da iterada seguinte é  $|x_{k+1}(x_0) - x^*|$ , se esta distância for menor que anterior,

$$|x_{k+1}(x_0) - x^*| < |x_k(x_0) - x^*|, \quad (5.10)$$

as sucessivas iteradas vão se aproximando do ponto fixo, veja ilustração na figura 5.4, portanto é um ponto fixo estável, se ocorrer o afastamento o ponto é instável.

Para facilitar a notação vamos reescrever a equação 5.10, fazendo  $y = x_k = f^k(x_0)$ ,  $x_{k+1} = f(y)$ , e  $x^* = f(x^*)$

$$1 > \frac{|x_{k+1}(x_0) - x^*|}{|x_k(x_0) - x^*|} = \left| \frac{f(y) - f(x^*)}{y - x^*} \right|, \quad (5.11)$$

no limite de  $y \rightarrow x^*$  temos a derivada do mapa calculada no ponto fixo. A expressão para a condição de estabilidade de um mapa unidimensional é dada por:

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{x^*} < 1 \quad (5.12)$$

**Atividade 63** Estude a estabilidade dos pontos fixos acima determinados do mapa logístico em função de  $p$ . Construa um gráfico de  $f(x^*)$  com uma linha contínua no intervalo que cada ponto fixo é estável e com uma linha tracejada no intervalo de instabilidade.

O ponto fixo perde a estabilidade em  $p = 3$  e surge um atrator de período 2 cujas séries temporais apresentam apenas dois valores  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$ , onde  $x^{(1)} = f(x^{(2)})$  e  $x^{(2)} = f(x^{(1)})$ , portanto cada ponto é a segunda iterada do mapa  $x^{(1)} = f(f(x^{(1)}))$ , etc., portanto neste caso os pontos fixos são dados por  $x^* = f^2(x^*) = f(f(x^*))$ .

**Atividade 64** Calcule algebricamente os pontos fixos  $x^* = f^2(x^*) = f(f(x^*))$  em função de  $p$ . Obtenha a expressão, também em função de  $p$ , para a derivada de  $f^2(x)$ .

**Atividade 65** Escreva um programa para plotar  $\left| \frac{d}{dx}(f^2(x)) \right|_{x^*}$  para cada ponto fixo obtido na atividade anterior. Determine para cada um deles os intervalos de estabilidade. Para qual valor de  $p$  ocorre a bifurcação  $2 \rightarrow 4$ ?

### 5.1.3 Mapa quadrático

A equação para o mapa quadrático é dada por:

$$x_{n+1} = C - x_n^2 \quad (5.13)$$

**Atividade 66** Modifique o programa feito na atividade 57 para visualizar a evolução do mapa quadrático. Confira o comportamento no intervalo  $C \in [-0, 25, 2]$ .

**Atividade 67** Construa o diagrama de bifurcação em função de  $C$  no intervalo de  $-0.25$  a  $2$ . Sugestão: Modifique o programa feito para o mapa logístico, atividade 60.

**Atividade 68** Obtenha os pontos fixos  $x^* = f(x^*)$ , e plote-os em função de  $C$ .

**Atividade 69** Estude a estabilidade destes pontos em função de  $C$ .

**Atividade 70** Verifique numericamente que a bacia de atração é dada pelo valor absoluto do ponto fixo instável.

**Atividade 71** Refaça o diagrama de bifurcações e plote simultaneamente o ponto fixo instável.

**Atividade 72** Faça uma mudança de variável  $y = ax + b$  e mostre que um mapa pode ser obtido do outro.

### 5.1.4 expoente de Lyapunov

Vamos supor um mapa unidimensional  $x_{n+1} = f(x_n)$  com uma condição inicial  $x_0$ , e outra muito próxima  $x_0^0$ , portanto a diferença das condições iniciais é  $\Delta x_0 = x_0 - x_0^0$ , e após  $k$  iteradas (lembre-se que  $k$  faz o papel do tempo) para ambas condições iniciais temos  $x_k = f^k(x_0)$  e  $x_k^0 = f^k(x_0^0)$ , e a diferença entre elas é  $\Delta x_k^0 = x_k - x_k^0$ . e utilizando as 5.8 e 5.9 temos:

$$\Delta x_k = (f(f(\dots f(x_0)))) - (f(f(\dots f(x_0^0)))) \approx \Delta x_0 \frac{df^k}{dx} \Big|_{x_0} \quad (5.14)$$

que depois de um número  $k$  muito grande ( $k \rightarrow \infty$ ) de iterações deve crescer exponencialmente:

$$\Delta x_k = \Delta x_0 e^{\lambda k} \quad (5.15)$$

onde  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov. Comparando esta equação com a 5.14 e utilizando o fato que  $a = e^{\ln a}$  ela pode ser reescrita na forma:

$$\Delta x_k = \Delta x_0 e^{\frac{1}{k} \ln \left| \frac{df^k}{dx} \right|_{x_0} k}$$

e tomando o limite  $k \rightarrow \infty$  obtemos o expoente de Lyapunov na forma de derivadas do mapa :

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \left| \frac{df^k}{dx} \right|. \quad (5.16)$$

A derivada  $\frac{df^k}{dx} \Big|_{x_0}$  é calculada aplicando a regra da cadeia, eq. 5.17, para funções de funções

$$\frac{df^k}{dx} = \frac{df}{dx_{k-1}} \frac{df}{dx_{k-2}} \dots \frac{df}{dx_1} \frac{df}{dx_0} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{df}{dx_j} \quad (5.17)$$

e com a propriedade da função logarítmica que  $\ln(a \cdot b \cdot c \dots) = \ln a + \ln b + \ln c \dots$  obtemos a expressão para o expoente de Lyapunov de mapas unidimensionais

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln \left| \frac{df}{dx_j} \right|. \quad (5.18)$$

Tomando o caso particular de  $p = 4$  para o mapa logístico:

$$x_{j+1} = 4x_j(1 - x_j)$$

fazendo uma mudança de variável  $x^2 = \sin^2(\frac{\pi}{2}y)$

$$\sin^2(\frac{\pi}{2}y_{j+1}) = 4\sin^2(\frac{\pi}{2}y_j)\cos^2(\frac{\pi}{2}y_j) = \sin^2(2\frac{\pi}{2}y_j)$$

que é reescrita na forma:

$$y_{j+1} = 2y_j$$

e como  $\frac{df}{dx_j} = 2$  para qualquer  $j$ , obtemos  $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln 2 = \ln 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} 1 = \ln 2$  que é a única situação na qual o expoente é obtido de forma fechada.

Para qualquer valor do parâmetro de controle, a precisão do cálculo numérico deste expoente depende do número de iterações  $k$ , quanto maior o número de iterações mais preciso será o resultado.

**Atividade 73** *Modifique os seus programas de diagramas de bifurcações (atividades 57 e 60) para incluir o cálculo do expoente de Lyapunov, utilizando a equação 5.18, em função do parâmetro de controle. Plote simultaneamente o diagrama de bifurcações e o expoente de Lyapunov em função do parâmetro de controle. Sugestão: para cada mapa calcule a derivada, e para cada série temporal obtida em função do parâmetro de controle calcule  $\lambda$  com a equação 5.18.*

**Atividade 74** *Para valores de parâmetros em que ocorrem bifurcações, expanda o diagrama em torno destes valores e observe os valores do expoente de Lyapunov.*

**Atividade 75** *Pegue uma série temporal  $x$  de um atrator caótico do mapa logístico, calcule o expoente de Lyapunov  $r$  depois adicione um pequeno ruído aleatório ao vetor  $x$  fazendo  $x = x + *0.001 * (0.5 - \text{rand}(\text{size}(x)))$ , e veja o estrago feito no expoente de Lyapunov.*

### 5.1.5 Cenário de Feigenbaum

Você deve ter percebido que o diagrama de bifurcações apresenta uma rota para caos na qual os períodos dos atratores periódicos vão duplicando, isto é, à medida em que aumentamos o valor do parâmetro de controle observamos que o período 1 é seguido do período 2, este do período 4, depois do período 8, e assim sucessivamente até chegarmos a infinitos períodos que correspondem a atratores caóticos. Os intervalos do parâmetro de controle (chamados de janelas), nos quais temos um dado atrator periódico, diminuem com o aumento do parâmetro de controle. Esta sequência de períodos  $2^n$  é chamada de rota para o caos via duplicação de períodos ou cenário de Feigenbaum,

que demonstrou que os sistemas que apresentam este tipo de rota tem constantes universais. Veremos duas delas, uma relacionada com a diminuição do tamanho das janelas e outro relacionado com o tamanho do atrator.

Supondo que  $\mu$  é parâmetro de controle deste tipo de mapas, e vamos chamar de  $\mu_1$  o valor no qual ocorre a bifurcação de  $1 \rightarrow 2$ , de  $\mu_2$  de  $2 \rightarrow 4$ , e assim sucessivamente, portanto  $\mu_k$  de  $2^k \rightarrow 2^{k+1}$ , e o tamanho das janelas de periodicidade  $2^k$  é  $w_k = \mu_{k+1} - \mu_k$ . A variação relativa do tamanho de uma janela em relação ao tamanho da janela seguinte é dada por:

$$\frac{w_k}{w_{k+1}} = \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+2} - \mu_{k+1}}$$

e Feigenbaum mostrou que esta relação tem um valor limite, constante  $\delta$  de Feigenbaum :

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+2} - \mu_{k+1}} = 4.66920\dots$$

Seja  $d_1 = x_2 - x_1$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são os pontos fixos do atrator de período 2 em  $\mu_2$ ,  $d_2 = \max(x) - \min(x)$  onde  $\max(x)$  é o ponto fixo máximo e  $\min(x)$  é o valor mínimo dos pontos fixos, em  $\mu_3$  e assim sucessivamente,  $d_k = \max(x) - \min(x)$  em  $\mu_{k+1}$ . A variação relativa do tamanho do atrator é dada por:

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{d_{k+1}} = 2.50290\dots$$

(Veja estas constantes com 101 algarismos no endereço:

<http://www.mrob.com/pub/muency/feigenbaumconstant.html>).

Devido à estas propriedades é muito difícil observar as janelas de alta periodicidade, tanto as largura das janelas quanto o tamanho dos atratores decaem rapidamente com o aumento do parâmetro de controle.

**Atividade 76** Suponha que a largura da janela de período 2 seja 1, e que o tamanho do atrator também seja 1, calcule a fração que dá a largura da janela de período 16 e a fração relativa ao tamanho do atrator.

## 5.2 Mapas bidimensionais

Como visto na seção 3.3, os mapeamentos obtidos com as seções de Poincaré de fluxos tri-dimensionais são mapas bidimensionais. Para discutir as propriedades de mapas bidimensionais, definidos por  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \vec{F}(x_n, y_n)$ , com mais de um parâmetro de controle, vamos utilizar o mapa que é considerado como um dos mais simples dos mapas bidimensionais, o mapa de Hénon, e veremos mais adiante que mapas do tipo Hénon aparecem em muitos sistemas experimentais.

### 5.2.1 mapa de Hénon

Este mapa é dado por:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n = F_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= bx_n = F_2(x_n, y_n)\end{aligned}\tag{5.19}$$

onde  $a$  e  $b$  são parâmetros de controle. Para  $a = 1.4$  e  $b = 0.3$  temos o atrator de Hénon padrão.

**Atividade 77** *Escreva um programa para obter o atrator de Hénon, plotando  $y_n$  vs.  $x_n$ . Sugestão: a partir de condições iniciais  $x_0$  e  $y_0$ , para eliminar a solução transiente, itere o mapa um número de vezes atualizando a cada iterada os valores de  $x_0$  e  $y_0$  e depois com estes valores obtenha as séries temporais das soluções estacionárias.*

### 5.2.2 Pontos fixos/estabilidade

Para obter os pontos fixos  $(x^*, y^*)$  devemos resolver o sistema de equações

$$\begin{aligned}x^* &= 1 - ax^{*2} + y^* \\ y^* &= bx^*.\end{aligned}$$

**Atividade 78** *Obtenha os pontos fixo do mapa de Hénon em função de  $a$  e  $b$ .*

**Atividade 79** *Plote simultaneamente o mapa de retorno e os pontos fixos do atrator de Hénon.*

**Atividade 80** *Mantendo fixo  $b = 0.3$  obtenha o diagrama de bifurcações variando  $a$  entre 0. e 1.4.*

Determinar a estabilidade destes pontos fixos é mais complicado do que no caso de mapas unidimensionais. Um ponto tomado nas proximidades do ponto fixo pode evoluir para o ponto fixo numa dada direção e divergir em outra direção. Portanto, devemos utilizar uma expansão linear em torno do ponto fixo como feita na seção 3.5 e utilizar a equação 3.5  $\frac{d}{dt}\Delta\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}^* + \Delta\vec{r}) \approx \overleftrightarrow{J}_* \Delta\vec{r}$  juntamente com a matriz jacobiana  $\overleftrightarrow{J}_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}$  calculada

no ponto fixo. Fazendo uma mudança da base  $(\hat{x} \ \hat{y})$  para uma  $(\hat{\xi} \ \hat{\eta})$  na qual a jacobiana é diagonal  $\overleftrightarrow{J}_* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$  obtemos o mapa



$$\begin{aligned}\xi_{n+1} &= \lambda_1 \xi_n \\ \eta_{n+1} &= \lambda_2 \eta_n\end{aligned}$$

e separamos o mapa bidimensional em dois unidimensionais, e para cada variável podemos aplicar a condição de estabilidade dada pela equação 5.12,  $\left| \frac{df}{dx} \right|_{x^*} < 1$ , e com esta condição os tipos de ponto fixos podem ser definidos com análise semelhante à feita na seção 3.5 para fluxos.

### 5.2.3 Mapa do círculo

O mapa do círculo tem sido usado para estudar dois osciladores acoplados, para modelar o batimento cardíaco e movimentos das mãos de humanos, turbulência termo acústica, a dinâmica de uma partícula em um líquido em rotação, e será por nós utilizado para estudar a dinâmica de formação de bolhas de ar em fluidos sob uma perturbação periódica. O mapa do círculo bidimensional é dado por:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + by_n \pmod{1} \\ y_{n+1} &= by_n - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n)\end{aligned}\tag{5.20}$$

onde  $\Omega$  é a relação entre as frequências dos dois osciladores quando desacoplados,  $b$  é um fator de dissipação ou de amortecimento, e  $K$  é a intensidade do acoplamento, e será usado como parâmetro de controle, e  $(\text{mod } 1)$  significa que devemos pegar só a parte fracionária de  $x$  e  $y$ .

**Atividade 81** *Escreva um programa para obter os atratores do mapa do círculo, plotando  $y_n$  vs.  $x_n$ .*

**Atividade 82** *Obtenha o diagrama de bifurcações  $y_n$  vs.  $K$ , com  $K$  variando entre 0 e 5, mantendo  $\Omega$  fixo para os valores 1.0, 1.4, 1.8 e 2.4.*

# Capítulo 6

## Exemplos de sistemas caóticos/Mapas

### 6.1 Dinâmica de formação de gotas d'água

Rössler foi quem sugeriu que a formação de gotas d'água poderia ser um exemplo de sistema caótico, e Shaw mostrou experimentalmente a existência de uma rota para o caos.

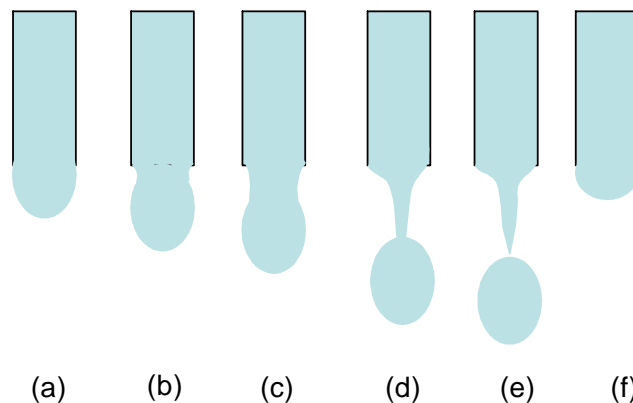


Figura 6.1: Diagrama de uma gota se formando.

Vamos supor que uma torneira está instalada em um reservatório de água, cujas condições de volume, altura da coluna d'água, densidade, viscosidade, temperatura, etc. são mantidas constantes. Na figura 6.1 está representada a formação de uma primeira gota. Na fig. 6.1 (a) temos um volume inicial de água pendente do bico da torneira, e à medida que é introduzida mais água, a coluna pendente distorce-se, vide figs. 6.1 (b) e (c), até formar um longo e

fino pescoço, mostrado em (d). Ao atingir um ponto crítico (veremos adiante o que pode ser este ponto crítico) ocorre a emissão de uma gota ( fig. 6.1 (e) ), e há um recolhimento muito rápido do pescoço e o fluido remanescente ( fig. 6.1 (f) ) dará origem ao início da formação da gota seguinte. Este recolhimento se deve à tensão superficial da água na interface com o ar, e o volume de água remanescente oscila excitado pela energia fornecida por esta força elástica. Portanto, para formar cada gota subsequente o processo de crescimento da coluna pendente se reinicia, mas oscilando com o período que aumenta com o comprimento da coluna, e atingirá o ponto crítico para a emissão da gota que dependerá da condição inicial estabelecida à coluna remanescente. A gota emitida também oscila e em contato com ar a energia de oscilação vai sendo dissipada e a forma final da gota não é esférica e sim oblata.

A dinâmica de formação de gotas d'água em princípio é descrita pela equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, entretanto esta equação é de difícil solução desde de modelá-la para um dado formato de bico da torneira às condições de contorno sobre a superfície da gota em cada instante. Mesmo modelos simplificados, como os unidimensionais exigem longos tempos de computação, tornando inexecutável a obtenção de séries temporais para a construção das trajetórias no espaço de fases.

O modelo mais simples é supor que as oscilações da coluna pendente são descritas por um sistema massa-mola unidimensional dada pela equação 6.1,

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = -ky - bv + mg, \quad (6.1)$$

onde o eixo  $y$  é dirigido para baixo,  $m$  é massa da coluna pendente,  $\frac{dm}{dt}$  é o fluxo de água,  $y$  a posição do seu centro de massa,  $b$  um termo dissipativo relacionado com a viscosidade, e  $k$  a constante de mola relacionada com a tensão superficial. Supondo que a massa aumenta com o tempo até atingir um ponto crítico, existem várias propostas para estabelecer este ponto crítico, uma delas é supor que a gota será ejetada quando o centro de massa atinge um valor pré-estabelecido, ou quando a velocidade do centro de massa atinge um certo valor, e este ponto também define o tempo de formação da gota.

Dessa maneira as séries temporais são obtidas integrando a equação 6.1 para cada gota supondo que as condições iniciais foram estabelecidas pela gota anterior, mas as séries temporais experimentais só podem ser obtidas com filmagens das colunas d'água. Vejamos alguns valores: supondo que estamos observando a formação de gotas a uma taxa de 1gota/s as câmeras de vídeo comuns filmam a 30quadros/s, portanto obteremos em média 30 pontos por gota, que são insuficientes para caracterizar as oscilações da coluna, sendo

então necessárias câmeras especiais que filmam acima de 500quadros/s. Mas para caracterizar um dado comportamento são necessários dados de milhares de gotas, sendo portanto inviável este tipo de estudo. Mas é de se esperar que a as gotas se formam com diferentes tempos de formação e que este seja uma variável suficiente para caracterizar a dinâmica de formação.

A maneira mais simples de estudarmos este sistema é medindo o tempo entre uma gota e outra colocando um feixe horizontal de laser abaixo da torneira ( $\sim 10cm$ ) iluminando um fotodiodo. Uma gota ao cruzar o feixe do laser, espalha a luz e escurece o fotodiodo, como este conduz uma corrente quando iluminado e deixa de conduzir quando a gota começa a cruzar o feixe e volta a conduzir quando a gota termina o cruzamento e os pulsos de corrente podem ser medidos, vide figura 6.2, com uma placa contadora de eventos inserida em um microcomputador.

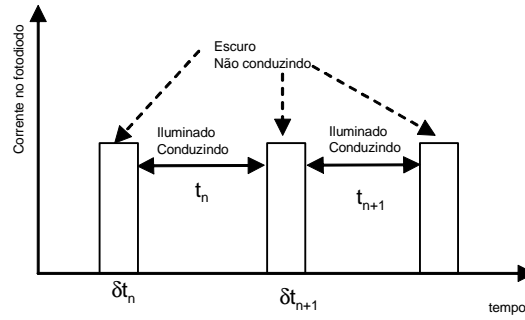


Figura 6.2: Pulsos induzidos no fotodiodo pela passagem das gotas pelo feixe de laser.

Na figura 6.3 temos um diagrama para relacionar o tempo entre gotas e o tempo de formação, mostrando a partir do bico da torneira duas gotas sucessivas em diferentes posições e a posição do feixe de laser. O tempo de viagem da  $n$ -ésima gota até cruzar totalmente o feixe de luz é  $t_{dn}$ , o tempo de passagem desta gota pelo feixe é  $\delta t_n$ , o intervalo de tempo entre o fim da passagem da  $n$ -ésima gota até a  $(n+1)$ -ésima gota começar a cruzar o feixe é  $t_n$ , o tempo total entre gotas é  $T_n = t_n + \delta t_n$

**Atividade 83** Quando a  $n$ -ésima gota é lançada e  $n+1$ -ésima começa a se formar e estará formada após um tempo  $t_{fn+1}$  enquanto, isso a  $n$ -ésima estará em queda e se encontra na posição A no instante  $t_{fn+1}$ . Com o auxílio do diagrama mostrado na figura 6.3 mostre que:  $t_{fn+1} = t_n + \delta t_n + t_{dn} - t_{dn+1} = T_n + t_{dn} - t_{dn+1}$ .

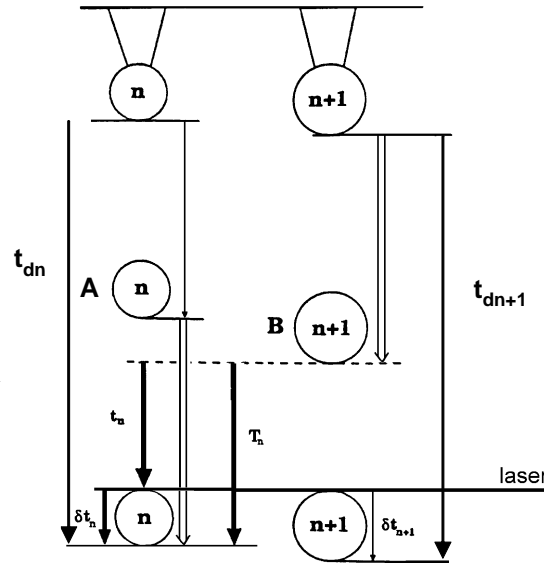


Figura 6.3: Diagrama mostrando os intervalos de tempo relacionados com o tempo de formação.

**Atividade 84** Supondo um número muito grande de gotas calcule o tempo de formação médio.

**Atividade 85** Discuta os valores médios de  $t_{dn}$  e  $t_{dn+1}$ . Eles são iguais?

As medidas dos tempos entre os pulsos ( $t_n$ ) e a duração deles ( $\delta t_n$ ) são afetadas por ruídos de diversas origens, as mais importantes são:

1. vibrações mecânicas da vizinhança: pessoas, veículos, etc geram ondas de choque que se propagam pela estrutura do prédio e perturbam a formação das gotas.
2. Alinhamento do laser: o feixe de luz deve iluminar o fotodiodo após uma colimação dada por um fenda estreita e longa, e estar bem alinhado com o diâmetro da gota.
3. Distância laser-bico: Se o feixe for colocado muito perto do bico as oscilações das gotas serão detetadas, se for colocado muito longe o alinhamento ficará comprometido, por isso deve ser colocado numa posição na qual a gota já atingiu a sua forma final e suficientemente perto do bico para um bom alinhamento dos sistema laser+fotodiodo+gota.

Como o ponto crítico para emissão de gotas corresponde a um valor fixo de uma das variáveis dinâmicas, a medida dos tempos, e/ou dos tempos de passagem, entre gotas é equivalente aos valores de variáveis numa seção de Poincaré das trajetórias no espaço de fases, e lembrando do Teorema de Takens, podemos caracterizar estas dinâmicas reconstruindo os atratores em um pseudo espaço de fases, com as construções de mapas utilizando as séries temporais de  $t_n$  e  $\delta t_n$ , tendo como parâmetro de controle o fluxo d'água obtido com a abertura da torneira.

### 6.1.1 Lab 2: Análise de dados experimentais: Gotas

Os arquivos de dados contêm duas colunas com  $t_n$  e  $\delta t_n$  em microsegundos ( $\delta t_n$  são os tempos de passagem das gotas pelo feixe de laser)

Para cada arquivo:

**Atividade 86** *Separe cada arquivo em duas séries temporais  $t_n$  e  $\delta t_n$  e divida-as por 1000 para obter os valores em ms.*

**Atividade 87** *Calcule os tempos  $T_n$  entre gotas em milissegundos, e calcule a respectiva taxa de gotejamento média  $f = 1 / \langle T \rangle$ .*

**Atividade 88** *Calcule a taxa média de gotejamento em gotas/s.*

**Atividade 89** *Construa os mapas de primeiro retorno  $t_{n+1}$  vs.  $t_n$  e  $\delta t_{n+1}$  vs.  $\delta t_n$ .*

**Atividade 90** *Classifique o tipo de comportamento (periódico, caótico, etc).*

**Atividade 91** *Para cada arquivo, compare os respectivos mapas  $t_{n+1}$  vs.  $t_n$  e  $\delta t_{n+1}$  vs.  $\delta t_n$ . Ambos caracterizam o mesmo comportamento dinâmico? Discuta o ruído em cada mapa.*

**Atividade 92** *Calcule a função de auto-correlação descrevendo a sua forma.*

## 6.2 Dinâmica de formação de bolhas em fluidos viscosos

Na figura 6.4 temos o diagrama de um aparato experimental para o estudo da dinâmica de formação de bolhas de ar em fluidos viscosos (soluções de água e glicerina). Consiste de um tubo transparente, no qual é colocado o fluido, e na parte de baixo é colocado uma agulha de injeção ligada a um reservatório

de ar comprimido, cuja pressão cai muito lentamente e podemos supor que é constante. Um dos parâmetros de controle é o fluxo de ar estabelecido por uma válvula de agulha. O tempo entre bolhas é medido com o sistema laser/fotodiodo, da mesma maneira que no caso de formação de gotas d'água.

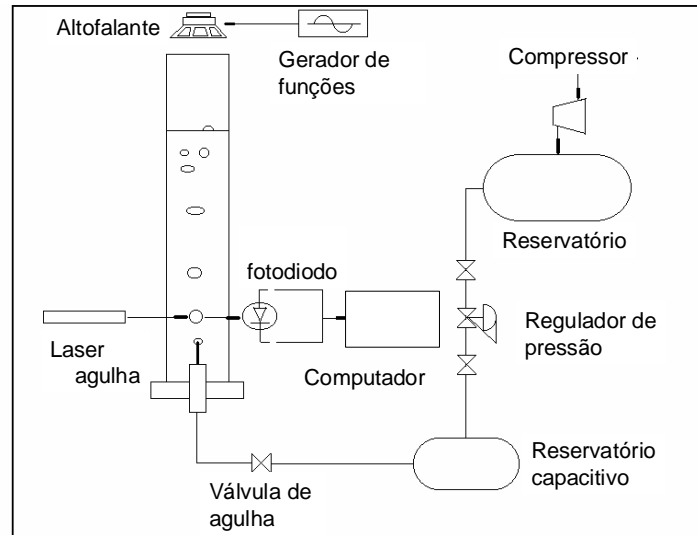


Figura 6.4: Diagrama do aparato experimental para o estudo da dinâmica de formação de bolhas de ar em fluidos viscosos.

Veja uma duplicação de períodos no vídeo em que o fluxo de ar está sendo aumentado gradativamente, inicialmente as bolhas são ejetadas uma a uma periodicamente, e para um dado valor do fluxo as bolhas são ejetadas aos pares clique aqui: [Duplicação 1 ->2](#).

Mantendo fixo o fluxo de ar e aplicando uma onda sonora sintonizada na coluna de ar acima do fluido no tubo, verificamos que amplitude da onda pode ser usada como um parâmetro de controle

### 6.2.1 Lab 3: Análise de dados experimentais:

Os arquivos de dados contêm duas colunas com  $T_n$  e  $T_{n+1}$  em milisegundos.

A frequência da onda sonora que perturba o sistema é  $f_s = 150Hz$  e veja qual é o valor da taxa de borbulhamento sem a onda sonora  $f_b$

Para cada arquivo:

**Atividade 93** Calcule a taxa média  $f_{bp}$  de borbulhamento em bolhas /s.

**Atividade 94** Construa os gráficos de primeiro retorno.



Figura 6.5: Diversos formatos que as bolhas podem ter.

**Atividade 95** *Classifique o tipo de comportamento (periódico, caótico, etc).*

**Atividade 96** *Com o valor de  $\Omega = f_s/f_b$  e  $b = 0.1$ , e com a variável  $y$  do mapa do círculo procure os valores de  $K$  (entre 0 e 3.5) que reproduzam os mapas experimentais.*



# Apêndice A

## Métodos de integração numérica

Vamos introduzir os métodos de integração numérica tomando um exemplo simples cuja solução algébrica é conhecida.

A equação que descreve o decaimento radioativo é dada por:

$$\frac{dN}{dt} = -N/\tau, \quad (\text{A.1})$$

onde  $N$  é o número de núcleos radioativos e  $\sigma$  é a vida média deste núcleo. A solução da equação A.1 é :  $N = N_o e^{-t/\sigma}$ , onde  $N_o$  é o número de núcleos radioativos no instante inicial.

O método mais simples de integração numérica é o método de Euler obtido a partir da definição de derivada de uma função de uma única variável:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}, \quad (\text{A.2})$$

se  $\Delta t$  for suficientemente pequeno podemos escrever:

$$\frac{dN}{dt} \approx \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t}, \quad (\text{A.3})$$

conhecendo-se o número de núcleos no instante  $t$  podemos calcular o número no instante posterior  $t + \Delta t$  combinando as equações A.1 e A.3:

$$N(t + \Delta t) = \left(-\frac{\Delta t}{\tau} + 1\right)N(t). \quad (\text{A.4})$$

$\Delta t$  é definido como sendo o passo de integração, e como a cada passo o tempo é incrementado deste valor, portanto para um dado instante temos  $t = n\Delta t$ , podemos reescrever a equação A.4 na forma:

$$N_{n+1} = \left(-\frac{\Delta t}{\tau} + 1\right)N_n. \quad (\text{A.5})$$

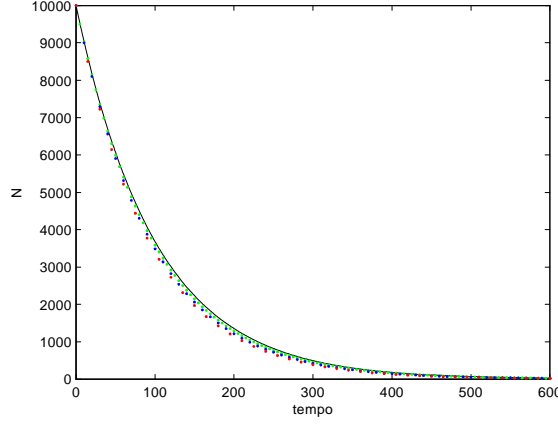


Figura A.1: Linha contínua preta corresponde à solução algébrica dada pela eq. A.1. Pontos verdes passo=5; azuis passo=10 e vermelhos passo=15.

Na figura A.1 a linha contínua preta corresponde à solução algébrica (eq. A.1) e os pontos às soluções numéricas obtidas com a eq. A.5. Observe que quanto menor o passo mais a solução numérica aproxima-se da algébrica.

Para aumentarmos a precisão da nossa solução precisamos diminuir muito o tamanho do passo de integração e fazendo isto aumentaremos muito o tempo de computação, o que pode ser uma tarefa inútil, pois este método requer que  $\frac{dN}{dt}$  seja uma função muito suave. Vejamos um caso quando a função não tem esta característica.

A equação horária do pêndulo simples de comprimento  $L$  é dada por:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g/L \sin(\theta), \quad (\text{A.6})$$

onde  $\theta$  é o ângulo que o pêndulo faz com a vertical, e pode ser transformada em duas equações de primeira ordem acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\Omega_o^2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde  $v$  é a velocidade angular, e  $\omega_o$  a frequência angular. Este sistema só tem solução algébrica para pequenas oscilações,  $\theta \ll 1$ ,

$$\begin{aligned} \omega &= \theta_o \Omega_o \sin(\Omega_o t + \phi) \\ \theta &= \theta_o \cos(\Omega_o t + \phi) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

quando podemos aproximar  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ , (até 15 graus, aproximadamente). Para ângulos maiores este sistema é não linear e só têm soluções numéricas. Como exemplo, vamos resolver o sistema A.7 com  $\Omega_o = 1$ ,  $v(0) = 0$ ,  $m = 1$ , e para diversos valores de  $\theta_o = \theta(0)$ , com o método de Euler:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \omega_n \Delta t + \theta_n \\ \omega_{n+1} &= -\Delta t \text{sen}(\theta_n) + \omega_n\end{aligned}\tag{A.9}$$

e para monitorar a qualidade da solução calcularemos também a energia total:

$$E_{n+1} = ml^2 \frac{\omega_{n+1}^2}{2} + mgl(1 - \cos(\theta_{n+1}))\tag{A.10}$$

e veja os resultados na figura A.2.

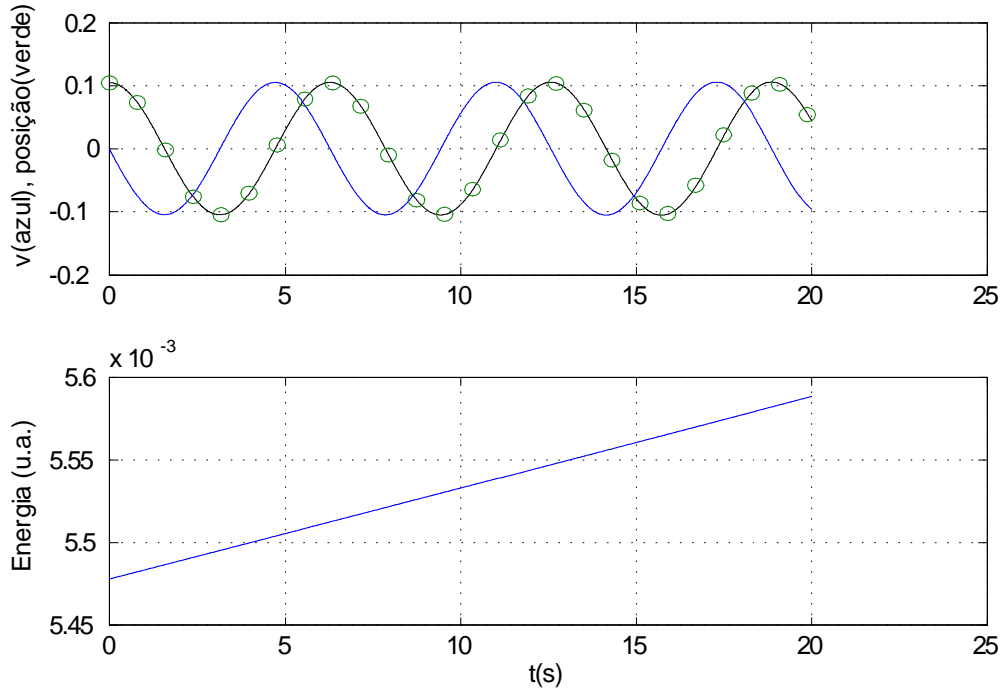
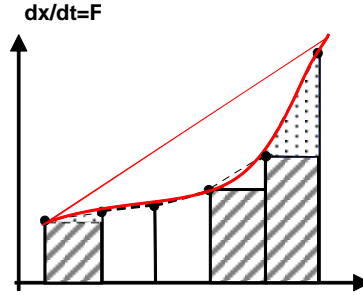


Figura A.2: Superior: Posição angular (verde=círculos+linha), velocidade angular(azul=linha) obtidos com o método de Euler com  $\theta(0) = \pi/30$ ,  $\omega(0) = 0$ ,  $\omega_o = 0$  ( $T=2*\pi$ ). Círculos verdes obtidos com a solução algébrica. Inferior: Energia total. Observe o aumento da energia apesar do passo de integração ser pequeno, devido à instabilidade do método.



## A.1 Método de Euler

Seja uma equação de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad (\text{A.11})$$

por exemplo  $F(t, x) = xt^2$ . Como desejamos a solução  $x(t+h)$ , com um passo  $h$  pequeno, podemos expandir a função em torno do ponto atual  $x(t)$

$$x(t+h) = x(t) + \frac{dx}{dt}h + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2}h^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3x}{dt^3}h^3 + \dots \quad (\text{A.12})$$

cujo resultado em primeira ordem é:

$$x(t+h) = x(t) + F(t, x)h, \quad (\text{A.13})$$

e também vamos supor que a condição inicial é dada pelo ponto  $x_0 = x(t_0)$ .

Na figura A.3 temos o gráfico de uma função  $\frac{dx}{dt}$  qualquer. A solução  $x(t)$  é dada pela área sob a curva contínua.

Seja  $d_0 = F(x_0, t_0)$  e o primeiro valor de  $x$  é dado por  $x_1 = x(t_0+h) = x_0 + d_0h$ , que corresponde à área do retângulo hachurado (entre 0 e 1),  $x_2 = x(t_0+2h) = x(t_0+h) + d_1h = x_1 + d_1h$ , e assim sucessivamente  $x_{n+1} = x(t_0+nh) = x_n + d_nh$ , com  $d_n = F(x_n, t_n)$ . Observe que a qualidade desta aproximação para a área em um intervalo  $h$  depende da suavidade da curva. A área da região (pontilhada) delimitada pelo retângulo hachurado e a curva é o erro cometido no cálculo da integral. Este erro pode ser considerado pequeno em um trecho da curva mas não em outro, compare as superfícies pontilhadas. Como ainda temos de fazer a soma de todos os retângulos situados abaixo de um valor de  $x$  para obter  $y(x)$ , o erro cometido é proporcional ao passo  $h$ .

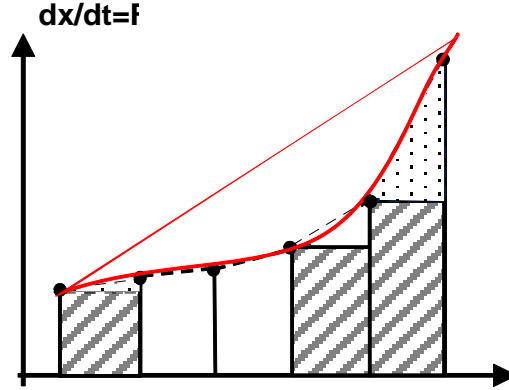


Figura A.3: Gráfico de  $dx/dt = F(x, t)$ . A solução  $x(t)$  é a área sob a curva contínua.

## A.2 Método de Euler modificado

### A.2.1 Previsão/correção

Uma aproximação melhor para a área sob a curva num intervalo  $h$  é a área do trapézio, dada por

$$x_{n+1} = x(t_0 + nh) = x_n + \frac{d_n + d_{n+1}}{2}h, \quad (\text{A.14})$$

mas precisamos calcular a derivada  $d_1 = F(t_0 + nh, x_{n+1})$  em um ponto ainda desconhecido, correspondente justamente ao valor de  $x_{n+1}$  que desejamos obter. No método de Euler modificado fazemos uma aproximação para este trapézio. Como ainda não conhecemos o valor de  $x_n$ , primeiro fazemos uma aproximação (previsão para )  $x_{n+1} \approx x_{p,n+1}$  dada pela área do retângulo (previsão para  $x_{n+1}$ ), e com este valor calculamos a derivada  $d_{n+1} \approx F(t_0 + nh, x_{p,n+1})$ , e com a equação A.14 calculamos  $x_{c,n+1}$  (correção de  $x_{p,n+1}$ ), resumindo temos:

$$\begin{aligned} d_n &= F(t_n, x_n), \quad t_n = t_0 + nh \\ x_{p,n+1} &= x_n + d_n h, \text{ (previsão)} \\ d_{n+1} &= F(t_{n+1}, x_{p,n+1}) \\ x_{n+1} &= x_{c,n+1} = x_n + \frac{d_n + d_{n+1}}{2}h \text{ (correção)}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Observe que para a passagem do método de Euler para o modificado aumentamos o número de operações de 2 para 5 (supondo que  $h/2$  pode ser calculado no início das operações como um novo parâmetro, portanto o tempo de cálculo aumenta duas vezes e meia, aproximadamente. Poderíamos aumentar ainda mais a precisão dos nossos cálculos pegando mais termos da equação A.12, além de aumentarmos o número de operações, muitas destas envolvem exponenciação que é uma operação bem mais lenta que as lineares.

Vamos ver um método que aumenta ainda mais a precisão dos cálculos baseado no método de correção/previsão que ainda utiliza apenas a aproximação de primeira ordem.

### A.3 Método de Runge-Kutta

Neste caso subdividimos cada intervalo de comprimento  $h$  em dois de comprimento  $h/2$ , em cada sub-intervalo aplicamos o método de Euler modificado, na sequência abaixo:

1. Com  $D_0 = F(t_n, x_n)$  fazemos a **previsão** para  $x$  no ponto  $t_n + h/2$  :  
 $x_{p1,n} = x_n + D_0 h/2$ ,
2. Com  $x_{p1,n}$  calculamos  $D_1 = F(t_n + h/2, x_{p1,n})$  e fazemos a **correção** para  $x$  no ponto  $t_n + h/2$ :  
 $x_{c1,n} = x_n + \frac{(D_0 + D_1)}{2} h/2$
3. Com  $x_{c1,n}$  calculamos  $D_2 = F(t_n + h/2, x_{c1,n})$  e fazemos a **previsão** para  $x$  no ponto  $t_n + h$ :  
 $x_{p2,n+1} = x_{c1,n} + D_2 h/2$
4. E finalizamos calculando  $D_3 = F(t_n + h, x_{p2,n})$  com  $x_{p2,n}$  e fazendo a **correção** para  $x$  no ponto  $t_n + h$ :  
 $x_{c2,n+1} = x_{c1,n} + \frac{(D_2 + D_3)}{2} h/2$

Fazendo as substituições obtemos:

$$x_{c2,n+1} = x_n + \frac{(D_0 + D_1)}{2} h/2 + \frac{(D_2 + D_3)}{2} h/2 \rightarrow x_{n+1}, \quad (\text{A.16})$$

portanto a nossa solução é semelhante à de Euler modificado tomando a média de quatro valores das derivadas:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{D_0 + D_1 + D_2 + D_3}{4} h. \quad (\text{A.17})$$

Entretanto foi verificado que melhores resultados são obtidos com a média ponderada das derivadas:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{D_0 + 2D_1 + 2D_2 + D_3}{6}h \quad (\text{A.18})$$

O método de Euler é exato para funções de primeiro grau, e nos outros casos o erro é proporcional a  $h$ , e é chamado método de primeira ordem. O modificado é exato para funções do segundo grau e o erro é proporcional a  $h^2$  e portanto um método de segunda ordem. O método Runge-Kutta é exato pra funções de grau quatro sendo um método de quarta ordem com erro proporcional a  $h^4$ .

**Atividade 97** *Resolva a eq. A.1 do decaimento radioativo, pelo método de Runge-Kutta, de quarta ordem, escrevendo um programa (function) cujos dados de entrada são  $\tau = 100s$ ,  $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$ ,  $\text{passo} = 0.01s$ , e tempo total de integração variável de saída  $N(t)$ .*

**Atividade 98** *Plote, simultaneamente, o resultado numérico obtido pelo método de Runge-Kutta bem como o obtido com a solução analítica da eq. A.1.*

Os dois primeiros métodos foram apresentados para facilitar o entendimento da construção do método de Runge-Kutta, e como são métodos instáveis não devem ser utilizados.

Os programas serão escritos como método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo, apesar de existirem métodos mais rápidos que utilizam passo variável de acordo com o comportamento da função, isto é, se a função varia suavemente em uma região o passo é aumentado se varia rapidamente o passo é diminuído.

Se tivermos um sistema autônomo com mais de uma equação o método tem que ser aplicado simultaneamente a cada variável. Seja o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= F_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= F_3(x, y, z) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

para obtermos as soluções  $x$ ,  $y$  e  $z$  com condições iniciais  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$  e passo  $h$ , devemos calcular  $D_0, D_1, D_2$  e  $D_3$  para cada equação, por isso vamos incluir mais um índice referente a cada derivada.

Com  $D_{x1} = F_1(x, y, z)$ ,  $D_{y1} = F_2(x, y, z)$  e  $D_{z1} = F_3(x, y, z)$  fazemos primeira previsão para  $x$ ,  $y$  e  $z$  no instante  $t_n + h/2$ :  $x_{p1,n} = x_n + D_{x1}h/2$ ,  $y_{p1,n} =$

$y_n + D_{y1}h/2$ ,  $z_{p1,n} = z_n + D_{z1}h/2$ , e depois a primeira previsão, e assim sucessivamente.

**Atividade 99** *Abaixo temos uma listagem de uma possível function para calcular as derivadas. Escreva outra que seja mais simples.*

```
function q=RK4(passo,x0,y0,z0,t0);
% function q=IntegraRK4(FunX,FunY,FunZ,passo,Npontos,x0,y0,z0,t0);

% condições iniciais x0,y0,z0
% t0 instante inicial após transiente
x(1)=x0;
y(1)=y0;
z(1)=z0;
t=t0:passo:(Npontos-1)*passo+t0;
p2=passo/2;
p6=passo/6;
for k=2:Npontos
    n=k-1;
    % *****
    Dx1=FunX(t(n),x(n),y(n),z(n));
    Dy1=FunY(t(n),x(n),y(n),z(n));
    Dz1=FunZ(t(n),x(n),y(n),z(n));
    %-----primeira previsão h/2
    Dx2=FunX(t(n)+p2,x(n)+Dx1*p2,y(n)+Dy1*p2,z(n)+Dz1*p2);
    Dy2=FunY(t(n)+p2,x(n)+Dx1*p2,y(n)+Dy1*p2,z(n)+Dz1*p2);
    Dz2=FunZ(t(n)+p2,x(n)+Dx1*p2,y(n)+Dy1*p2,z(n)+Dz1*p2);
    %-----primeira correção h/2
    Dx3=FunX(t(n)+p2,x(n)+Dx2*p2,y(n)+Dy2*p2,z(n)+Dz2*p2);
    Dy3=FunY(t(n)+p2,x(n)+Dx2*p2,y(n)+Dy2*p2,z(n)+Dz2*p2);
    Dz3=FunZ(t(n)+p2,x(n)+Dx2*p2,y(n)+Dy2*p2,z(n)+Dz2*p2);
    %-----segunda previsão h
    Dx4=FunX(t(k),x(n)+Dx3*passo,y(n)+Dy3*passo,z(n)+Dz3*passo);
    Dy4=FunY(t(k),x(n)+Dx3*passo,y(n)+Dy3*passo,z(n)+Dz3*passo);
    Dz4=FunZ(t(k),x(n)+Dx3*passo,y(n)+Dy3*passo,z(n)+Dz3*passo);
    %-----segunda correção h
    x(k)=x(n)+p6*(Dx1+2*Dx2+2*Dx3+Dx4);
    y(k)=y(n)+p6*(Dy1+2*Dy2+2*Dy3+Dy4);
    z(k)=z(n)+p6*(Dz1+2*Dz2+2*Dz3+Dz4);
end;
q=[x' y' z']; %-----retorno
```



```
———definições das funções——  
function f=FunX(tt,xx,yy,zz);  
fx=...  
%.....  
function fy=FunY(tt,xx,yy,zz);  
fy=...  
%.....  
function fz=FunZ(tt,xx,yy,zz);  
zz=...  
%———FIM———
```

# Apêndice B

## MatLab

O MatLab, o Octave e o SciLab são programas de análise de dados que apresentam ferramentas poderosas de cálculo numérico, porém as instruções do MatLab são mais simples e foram adaptadas no SciLab e Octave. Existem versões destes programas disponíveis na rede para Windows, mas principalmente para Linux, cujas instalações nem sempre são amigáveis ao usuário. Nesta seção usaremos o MatLab para introduzir o método de programação, e na seção seguinte apresentaremos o mesmo texto com as adaptações das instruções para o Octave, bem como as instruções para instalá-lo no Windows. Portanto, escolha o seu sistema operacional preferido e uma das plataformas acima. O Scilab apresenta a mesmas ferramentas porém com uma sintaxe nem sempre equivalente as do MatLab, por isso não vamos apresentar instruções para a sua instalação.

### B.1 COMMAND WINDOW

O programa apresenta várias janelas para atividades específicas. Começaremos com a COMMAND WINDOW, na qual podemos efetuar operações como se tivéssemos uma calculadora. Supondo que você já está com o MatLab operando, a linha de comando para cálculo está disponível quando apresenta o prompt `>>`. Se você não estiver vendo-o clique na janela View e escolha COMMAND WINDOW. Na barra de tarefas há uma janela de navegação para a escolha do seu diretório de trabalho (Current directory). Navegue e escolha o diretório.

#### B.1.1 Instruções ou comandos elementares

Digite

```
>>g=978 e apertando a tecla enter você verá na tela
g=
```

```
978
```

Esta é uma instrução ou comando de atribuição do valor 978 à variável g. Digite agora

```
>>g=978;
```

e apertando a tecla **enter** nada aparecerá na tela uma vez que ; é a operação de não imprimir na tela. Digite agora

```
>> g*g
```

e apertando a tecla **enter** aparecerá na tela 956484.

Portanto, apertar a tecla **enter** é a operação do comando. Para não ficar enfadonho, daqui para frente omitiremos o aviso para apertar a tecla **enter** sempre que estivermos em uma linha com o prompt >> ativado..

```
>>ans=
```

956484, que corresponde a  $978*978$ . O mesmo resultado pode ser obtido com

```
>>g^2
```

então o simbolo ^ é o comando correspondente à operação de exponenciação e o expoente pode ser qualquer número complexo. Digite i e depois enter, surpreso?

Então digite

```
>>pi e obterá
```

```
ans=
```

```
3.1416
```

Digite

```
>>format long
```

e em seguida digite

```
>>ans=
```

```
3.14159265358979.
```

Você pode usar qualquer quantidade de instruções com variáveis de diversos tipos e atribuir o resultado à uma nova variável, por exemplo

```
>>G=g*pi*pi^(pi+0.1*i)
```

As variáveis podem ser maiúsculas ou minúsculas, podem conter diversos caracteres, letras e algarismos, mas são sensíveis ao modo a é diferente de A, ao passo que os comandos só são aceitos em minúsculas. Em qualquer momento que você tiver dúvida sobre uma instrução digite help instrução, exemplo:

```
>>help format
```

e aparecerá na tela todos os formatos disponíveis.

A maioria das instruções do MatLab são iguais às da Linguagem C e Pascal, e abaixo tabelamos algumas:

raíz quadrada de x	<code>sqrt(x)</code> ou <code>x^0.5</code>
coseno de x	<code>cos(x)</code>
seno de x	<code>sin(x)</code>
arco tangente de x	<code>atan(x)</code>
arco coseno	<code>acos(x)</code>
arco seno de x	<code>asin(x)</code>
aproxima x para o inteiro mais próximo	<code>round(x)</code>
parte inteira de um número	<code>fix(x)</code>
$x^y$	<code>x^y</code>
$e^x$	<code>exp(x)</code>
log natural	<code>log(x)</code>
loga base 10	<code>log10(x)</code>

**Atividade 100** Dados  $x=i\pi/2$  e  $y=4.3$  calcule os valores das funções listadas na tabela.

**Atividade 101** As respostas para as funções trigonométricas estão corretas? Senão deram os valores esperados tente o `help` de cada uma delas e veja também as outras sugestões que aparecem no `help`, e encontre uma justificativa para o seu resultado.

Vamos supor que você fez o experimento da queda livre medindo a posição do objeto em intervalos de tempo regulares e os tabelou como abaixo:

$t(s)$	$z(m)$
0	1
0.03	0.996
0.06	0.982
0.09	0.960
0.12	0.930
0.15	0.890
0.18	0.841
0.21	0.784
0.24	0.718
0.27	.643

Primeiramente você tem de introduzir os dados no MatLab e existem diversas maneiras para isto. Vamos ver a maneira mais simples porém a mais trabalhosa, que também tem algumas vantagens sobre as outras maneiras.

Para introduzir os valores de  $z$ , digite a linha abaixo com os números separados por um espaço

```
>>z=[1 0.996 0.982 0.960 0.930 0.890 0.841 0.784 0.718 0.643]
e aparecerá na tela
z =
    1.0000 0.9960 0.9820 0.9600 0.9300 0.8900 0.8410 0.7840
0.7180 0.6430
agora digite
>>z(1) e enter e aparecerá
ans =
     1
digite
>>z(10) e aparecerá
ans =
    0.6430
```

Portanto  $z$  é uma matriz com uma linha e 10 colunas, que chamaremos de matriz linha (ou vetor). Se você quiser que seja uma matriz coluna simplesmente pegue a transposta de  $z$ :

```
>>zt=z' e você verá na tela a matriz coluna (ou vetor).
```

Para introduzir os valores de tempo podemos repetir o procedimento feito para  $z$ , mas como os valores de tempo diferem entre si de uma constante (passo=0.03) entre 0 e 0.27s vamos fazer de uma maneira mais simples. Digite a linha abaixo:

```
>>t=0:0.03:0.27 e verá
t =
    0 0.0300 0.0600 0.0900 0.1200 0.1500 0.1800 0.2100 0.2400
0.2700
```

e o vetor  $t$  foi construído.

Quando você quiser uma variação de uma unidade o passo pode ser omitido.

**Atividade 102** (a) Construa um vetor  $x$  de números inteiros entre 3 e 19.  
(b) Construa um vetor  $y$  de números inteiros entre 23 e -19.

**Atividade 103** Qual a dimensão de cada vetor do exercício anterior? Sugestão: Experimente *help length*.

A instrução que plota os dados no espaço  $xy$  é:

`plot(x,y)`, onde  $x$  e  $y$  são dois vetores de mesma dimensão,  $x$  corresponde aos dados da abcissa e  $y$  das ordenadas.

**Atividade 104** Plote os dados da Tabela 2.

Você deve ter obtido uma parábola desenhada como uma linha contínua, o que não é adequado para um gráfico com dados experimentais, é desejável que os pontos do gráfico apareçam com um símbolo. Então use:

```
>>plot(x,y, 'o')
```

Se não gostou do símbolo o, veja as opções com `help plot`. Se estas foram lidas com atenção você estará em condições de fazer o próximo exercício.

Mas antes veja novos comandos, para dar um título ao gráfico use o comando

```
>>title( 'Meu gráfico')
```

para escrever a legenda do eixo x use

```
>> xlabel( 't(s)')
```

para o eixo y

```
>> ylabel( 'z(m)')
```

para plotar um gráfico em 3 dimensões

```
>>plot3(x,y,z)
```

e as instruções acima também se aplicam para estes gráficos.

**Atividade 105** *Plote simultaneamente os dados da Tabela 2, com o símbolo + em azul e a curva contínua que passa pelos pontos experimentais em amarelo, dando um nome ao gráfico, colocando as unidades do eixo x com a explicação do significado de cada cor, e o nome e a unidade do eixo y.*

Vamos agora plotar a equação 1.3  $[z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2]$ , conhecendo os valores de  $h = 2.0m$ ,  $g = 9.8m/s^2$  e de  $t$  variando entre 0 e 10s, com passo de 0.5s.

Construindo o vetor  $t$  podemos então calcular a posição  $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ , mas para isto precisamos calcular  $t^2$ , isto é, precisamos elevar ao quadrado cada elemento do vetor, que exige uma instrução não presente nas linguagens mais básicas. Se calcularmos  $t^2$  como sendo o produto  $t*t$  aparecerá uma mensagem de erro dizendo que as dimensões ( $n$ ) das duas matrizes devem concordar, podemos obter um valor multiplicando a matriz linha  $t$  por sua transposta ou uma matriz  $n \times n$  multiplicando a transposta de  $t$  por  $t$ .

**Atividade 106** *Faça  $tt$  igual à transposta de  $t$ . Calcule  $t*tt$  e  $tt*t$ .*

Presto,você aprendeu a fazer o produto de matrizes.

Em nenhum dos casos obtemos os valores desejados, a instrução necessária é o `.`, não é erro de digitação a instrução é mesmo o ponto, veja abaixo

```
>>z=h-0.5*g*t.*t
```

```
>>z=h-0.5*g*t.^2
```

portanto, um vetor seguido de um ponto seguido de uma operação diz que esta deve ser feita em cada elemento do vetor. Veja na coluna 1 da Tabela 3 o primeiro caso e na coluna 2 o segundo:

$z(1)=h-0.5*g*t(1)*t(1)$	$z(1)=h-0.5*g*t(1)^2$
$z(2)=h-0.5*g*t(2)*t(2)$	$z(2)=h-0.5*g*t(2)^2$
.	.
.	.
$z(n)=h-0.5*g*t(n)*t(n)$	$z(n)=h-0.5*g*t(n)^2$

**Atividade 107** Calcule  $x = \sqrt{t}$ ,  $xx = \sqrt[3]{t^2}$ ,  $xxx = z \times t$ ,  $yy = \frac{1}{t}$  e  $yyy = \frac{z}{t}$ .

Dentro da janela **COMMAND WINDOW**, digitando **whos** (e enter) você verá a lista de todas as variáveis que você utilizou até agora, mostrando o tamanho de cada matriz juntamente com formato numérico, observe que as constantes aparecem como sendo matrizes  $1 \times 1$ . Estas variáveis são armazenadas em uma área chamada **Workspace** e podem ser conferidas clicando na janela **Desktop** e selecionando a janela **Workspace**. Todos dados do **Workspace** podem ser salvos digitando **save nome do arquivo**, e o arquivo será salvo com a extensão **.mat**. Digitando **clear nome da variável**, a variável será apagada, se digitar apenas **clear** todo o conteúdo armazenado no **Workspace** será apagado.

Esta maneira de introduzir os dados no MatLab é útil quando são em pouca quantidade e os vetores são de pequena dimensão. Se você já tem o seu dado em uma planilha no formato **ascii** e como separador entre as colunas o espaço, como na tabela abaixo cujo arquivo chamaremos de *dados.txt*

1	2	
3	4	
:	5	6
7	8	

estes dados podem ser carregados para o **Workspace** com a in-

strução **load dados.txt**, a extensão também pode ser **dat**, ou qualquer outra que você preferir, desde que os dados estejam escritos em arquivo texto ou **ascii**. Digitando **whos** aparecerá uma matriz  $4 \times 2$  (4 linhas e duas colunas) com o nome **dados**. Supondo que a primeira coluna seja a variável **t** e a segunda **z**, estas podem ser obtidas com a instrução:

**>>t=dados(:,1)** que deve ser lida da seguinte maneira: atribua ao vetor **t** os dados de todas as linhas (:) da coluna 1.

**Atividade 108** Obtenha o vetor **z**.

Também podem se atribuídas à variáveis **a**, **b**, **c**, e **d** os dados das quatro linhas de dados:

**>>a=dados(1,:)** que deve ser lida da seguinte maneira: atribua ao vetor **a** os dados de todas as colunas (:) da linha 1.

**Atividade 109** *Obtenha os vetores  $b$ ,  $c$  e  $d$ .*

Para salvar apenas um vetor, por exemplo  $t$ :

```
>> save t.txt t /ascii
```

Para carregar um arquivo com a extensão `.mat` use simplesmente `load nomedoarquivo` (não há necessidade da extensão) e todas as variáveis serão carregadas para o `Workspace`.

### B.1.2 Mais operações da biblioteca do MatLaB.

As operações, ou que também estamos chamando de comandos são programas da biblioteca do MatLab chamados de funções.

Dado um vetor  $x$ , para saber a dimensão use `d=length(x)`, se é uma matriz linha ou coluna use `whos` ou `s=size(x)`.

Para obter uma matriz unitária  $n \times k$ :

```
>> R=ones(n,k);
```

**Atividade 110** *Obtenha uma matriz linha e outra coluna unitárias.*

**Atividade 111** *Qual o comando que você deve usar para obter uma matriz  $n \times k$  com todos elementos nulos? Isto é, todos elementos são zeros.*

Para obter uma matriz  $r$  de dimensão  $n \times k$  com elementos entre 0 e 1 obtidos aleatoriamente:

```
>> r=rand(n,k);
```

Seja o vetor  $v$

```
>> v=0:0.5:50;
```

Para obter um outro vetor  $H$  igual a  $v$ :

```
>> H=v;
```

e para obter outro que é a matriz transposta de  $v$

```
>> H=v';
```

Para obter um vetor só com os números semi-inteiros de  $v$  à partir de 0.5, observe que este valor é  $v(2)$  e utilize

```
>> vsi=v(2:2:50)
```

onde o primeiro 2 corresponde à  $v(2)$  o segundo é o passo, e se você quiser os valores à partir de  $3.5=v(8)$

```
>> vsi=v(8:2:50)
```

**Atividade 112** *Obtenha um vetor cujos elementos são os números pares de  $V$*



**Atividade 113** *Obtenha um vetor cujos elementos são os números ímpares de  $V$  maiores que 5.*

Para eliminar um valor em uma posição  $n$  e diminuir de 1 a dimensão do vetor, use

```
>>v(n)=[]
```

Dados dois vetores  $F$  e  $G$  de dimensões  $n$ , se forem ambas matrizes linha você pode concatená-los horizontalmente, isto é, obter uma matriz linha de dimensão  $2n$  que contém todos os elementos de  $F$  e  $G$ :

```
>>C=[F G]
```

ou concatená-los verticalmente obtendo uma matriz com duas colunas:

```
>>C=[F' G']
```

e para obter uma matriz com  $n$  colunas e duas linhas

```
>>C=[F
G]
```

Para achar o valor máximo de um vetor  $x$ :

```
>>mx=max(x)
```

**Atividade 114** *Como podemos achar o valor mínimo de um vetor? Experimente usar `help max`*

Para achar a posição do valor  $mx=max(x)$ :

```
>>p=find(x==mx) ou p=find(x==max(x)).
```

Se o valor máximo de  $x$  ocorre mais de uma vez  $p$  será um vetor cujos elementos correspondem às posições dos máximos.

**Atividade 115** *Usando o `help` descubra o comando que calcula o valor médio de um vetor. Sugestão: use a palavra inglesa para médio.*

Cálculos no COMMAND WINDOW são rápidos quando temos poucas operações, mas quando temos cálculos repetitivos estes ficam muito trabalhosos, portanto vamos ver como podemos elaborar programas eficientes.

## B.2 Funções

Os programas em MatLab são chamados de funções e necessitam um editor para serem elaborados em arquivos textos. As versões mais recentes do ML já trazem um editor embutido. Para acessá-lo da janela COMMAND WINDOW devemos clicar em File escolher New e a opção M-file, estes programas têm extensão `.m`, e pode ser abertos em qualquer outro editor de

texto, porém deve ser salvo sempre como arquivo texto. Feito isto aparece o editor a linha 1. A estrutura de uma função é:

```
1 function q=minhafuncao(v1,v2,v3...)
```

A função deve sempre começar pela palavra reservada `function` seguida de uma variável `q` com atribuição dos resultados obtidos pela função que aqui recebeu o nome de `minhafuncao`, que pode ser qualquer nome desde que não seja uma palavra reservada, como por exemplo `exp`, `v1`, `v2`,...são as variáveis que desejamos passar para a função e podem ser vetores, matrizes, ou um conjunto de operações entre variáveis disponíveis no `Workspace`. As funções tem memórias próprias e por isso há necessidade de passarmos os valores de um espaço para outro, por exemplo `q` faz a transferência para o `Workspace`. Como exemplo vamos escrever uma função que plotará o  $\sin(x)$ , o  $\cos(x)$ , e a soma de ambos.

```
1 function q=plotasenocossoma(T,x), onde T é o período e x o
vetor da variável independente, e ambos já estão definidos no Workspace.
```

Mas e amanhã como lembrar o que são `T` e `x`? A solução é dada abaixo

```
1 function q=plotasenocossoma(T,x)
2 % T=período e x=vetor da variável independente
```

Save o programa clicando em `File` e escolhendo `Save As` e aparecerá automaticamente a opção de salvar como `plotasenocossoma.m`

`%` é o comando de comentário, não é uma linha de programa executada, exceto quando ela aparece na linha seguinte à definição `function` quando tem também a função de help do seu programa, digitando no `COMMAND WINDOW` `help plotasenocossoma` aparece impressa na tela a linha número 2. Continuando o programa...

```
1 function q=plotasenocossoma(T,x)
2 % T=período e x=vetor da variável independente
3 xx=2*pi/T*x;
4 s=sin(xx);      % função da biblioteca do MatLab
5 c=cos(xx);      % idem
6 ss=s+c;
7 plot(x,s,'g',x,'b',x,ss,'r');
8 q=s;
```

O programa está pronto, salve-o clicando no ícone do disquete ou clicando `File` e escolhendo `Save`. Encolhendo a janela do editor e voltando `COMMAND WINDOW` o programa pode ser rodado, exemplificando

```
P=5;
t=0:0.5:25;
onde P é o período e t a variável independente,
```

```
y=plotsenocosenosoma(P,t);
```

Como estamos no **COMMAND WINDOW** e a função tem espaço de memória própria o nome das variáveis não precisam ser iguais e sim serem colocadas nas posições adequadas. Portanto, este programa plotará as funções da biblioteca do MatLab seno, cosseno e a soma de ambas e transferirá ao **Workspace** o vetor *s*, que contém os valores do seno no vetor *y*.

**Atividade 116** *Modifique o programa para plotar o produto do seno pelo cosseno. Lembrete: Não esqueça de um comando relacionado ao produto de dois vetores.*

Vamos ver alguns comandos mais sofisticados.

### B.2.1 Operações cíclicas.

Sintaxe para o comando: **for**

```
for j=jinicial:passo:jfinal
```

```
.
```

```
.
```

```
end;
```

Se *jfinal* < *jinitial* um passo negativo terá de ser utilizado.

O comando **for** deve sempre ser finalizado com o comando **end**; , na ausência deste o programa para e aparece uma mensagem de erro. O comando **for** por ser lento só deve ser utilizado quando não há alternativa alguma de usar um outro comando, exemplo:

Podemos calcular o seno do vetor *v* acima usando *s=sin(v)*; ou de maneira mais demorada usando o comando **for**:

```
1 function q=testeseno(v);
```

```
2 s=sin(v);
```

```
3 n=length(v);
```

```
4 for i=1:n
```

```
5     ss(i)=sin(v(i));
```

```
6 end;
```

```
7 q=ss;
```

Se o ponto e vírgula do comando 5 for esquecido, o cálculo ficará mais lento ainda, pois para cada valor de *i* será impresso na tela o vetor *ss* de *ss(1)* até *ss(i)*.

**Atividade 117** *Use help for para mais detalhes.*

**Atividade 118** *Use help while para aprender outro comando cíclico.*

### B.2.2 Operações de comparação

Sintaxe para o comando if

```
if expressão1
    comandos1
elseif expressão2
    comandos2
else
    comandos3
end;
```

Onde *expressão*n são comandos de comparação entre dois números a e b:  $a > b$ ,  $a \geq b$ ,  $a < b$ ,  $a \leq b$ ,  $a == b$  e  $a \sim b$ , esta última significa a diferente de b. Se a *expressão*1 for verdadeira os *comandos*1 serão executados, se for falsa a *expressão*2 será verificada, se verdadeira os *comandos*2 serão executados, se falsa os *comandos*3 serão executados. Se não for necessário verificar a *expressão*2 esta poderá ser suprimida. Observe que a operação toda termina com *end*;. Exemplo:

```
1 function q=testeif;
2 x=rand(100,1); %gera vetor com números
aleatórios entre 0 e 1
3 n=length(x);
4 for i=1:n
5     if x(i)<=0.33
6         ss(i)=sin(x(i)) %calcula o seno
se x é menor que 0.33
7     elseif x(i)>=0.67
8         ss(i)=cos(x(i)).....%calcula o coseno se
x>=0.67
9     else
10        ss(i)=cos(x(i))+sin(x(i)).....%calcula a soma
se 0.33<x<0.67
11    end;
12 end;
13 q=ss;
```

### B.2.3 Funções dentro de funções

De uma função você pode chamar qualquer outra função que esteja gravada no seu diretório de trabalho. Versões recentes do ML permitem que você escreva diretamente uma função dentro de outra. Alguns exemplos:

```
1 function q=fun1(x)
```

```

2 x2=x.*x;
3 q=fun2(x2);
4
5
6
7 function q=fun2(x)
8 q=sin(x)

```

Observe que foram definidas duas funções com as variáveis de transferência e de entrada com os mesmos nomes, respectivamente. Para a função `fun1` o vetor de entrada está definido no **Workspace**, e `q` vai transferir o resultado desta função do seu espaço(1) de memória para o **Workspace**. A função `fun2` tem outro espaço(2) de memória reservada, portanto as variáveis podem ter nomes iguais pois estão em espaços de memória diferentes. Quando `fun2` é chamada na linha 3, o vetor `x2` do espaço(1) é transferido para a `x` do espaço(2) e o resultado obtido `q` é transferido do espaço(2) para o espaço(1).

```

Ainda podemos chamar uma função que chama outra que chama outra
1 function q=fun1(x)
2
3     x2=x.*x;
4     q=fun2(x2);                                % da primeira função chama
a segunda
5 function q=fun2(x)                                % inicio da segunda
6     xs=x.^0.5;
7     q=fun3(xs);                                % fim da segunda e chama a
terceira
8
9
10 function q=fun3(x);                            %inicio da terceira
11 q=sin(x);                                    % fim da terceira e da
primeira também

```

Com isto foram apresentados os comandos básicos para podermos resolver numericamente as equações diferenciais, e nos restringiremos ao método de Runge-Kutta de passo constante. Começaremos com casos simples e depois evoluiremos utilizando os recursos mais sofisticados dos comandos que aprenderão com o uso constante do `help`.

Algumas versões do MatLab não permitem que se escreva funções dentro de funções, então é necessário que você escreva e salve cada função separadamente, e o programa principal é mantido intacto.

## **B.3 Comandos diversos**

`pause` : Pára a execução do programa até uma tecla ser acionada.

`pause(x)`: Pára a execução do programa por x segundos

`drawnow`: Força a plotagem (sem esta instrução a plotagem não ocorrerá necessariamente no instante escolhido)

# Apêndice C

## Octave

### C.1 Instalação

#### C.1.1 Windows:

*Octave* é uma plataforma semelhante ao MatLab, ela tem uma conveniente, porém não muito bonita, interface tipo linha de comando. É uma plataforma livre disponível gratuitamente na rede. O Octave não é um sistema completo, são necessários os programas de visualização gráfica, e um editor de texto para editar os programas, e para obtê-los siga as instruções abaixo:

1) Acesse o site <http://www.cs.wisc.edu/~ghost/gsview/index.htm> e escolha as versões mais recentes dos programas Ghostscript e o GSView e instale-os em seu micro nesta ordem . Observe que cada programa deve ser instalado separadamente.

2) No disco C, crie um diretório chamado `c:\tmp` .

Siga a sequência: Meu Computador → Disco Local (C:)→menu

Arquivo→Novo→Pasta e chame a nova pasta de `tmp`

3) Instale o Octave: <http://waterthrill.org/files/octave-2.1.64-inst.exe>

Também não há necessidade de configurações especiais. Siga o processo de instalação com as opções padrão do instalador.

4) Ao final, será apresentada uma janela de configuração do Octave, tipo terminal-DOS. Será perguntado qual o editor de texto desejado para utilização no Octave. O padrão é o Notepad, que é escolhido se simplesmente clicando Enter. A próxima pergunta refere-se ao Ghostscript, que se os passos anteriores foram seguidos, será automaticamente detectado, bastando então apertar Enter novamente.

Assim como o MatLab os seus programas devem estar gravados no mesmo diretório de trabalho, isto é, você não pode chamar programas de outros diretórios, um exemplo: se o seu diretório de trabalho é o DirTrab e neste

está gravado o programa Prog1, você não poderá chamar programas que não estejam gravados em DirTrab. O diretório padrão é o octave\_files que está dentro do diretório onde foi instalado o Octave.

- 5) Recomenda-se criar um atalho para a pasta "octave\_files",  
"C:\Arquivos de programas\GNU Octave 2.1.64\octave\_files"

onde serão guardados os arquivos .m - Esse atalho facilita a vida pois é o diretório padrão aonde o Octave procura pelos arquivos do usuário.

### C.1.2 Linux

Para usuários de Linux, há pacotes para as principais distribuições, ou então é possível construí-lo a partir do código-fonte, também disponível no mesmo local. Para esses usuários também é interessante instalar o pacote Octave-forge, que contém diversos scripts, funções e extensões para o Octave, incluindo muitas das utilizadas ao longo dessa apostila — na sua maioria, implementações de comandos do Matlab —.

O Octave foi originalmente para ser usado em ambiente Linux, e para usá-lo no Windows costumava depender da emulação de um ambiente Linux via Cygwin. No entanto, agora é possível baixar um instalador (procure por octave-forge-windows em

Após a execução do instalador, não é necessária nenhuma configuração adicional além das duas perguntas feitas ao final do processo: a seleção do editor de texto utilizado (o padrão é o Notepad do Windows, se você estiver familiarizado com algo diferente basta colocar o caminho do executável como resposta); e o caminho do Ghostscript, que é detectado automaticamente pelo instalador se os passos acima tiverem sido seguidos.

### C.1.3 Comandos semelhantes aos do Matlab

Sendo a sintaxe do Octave muito semelhante à do Matlab, é possível seguir todas as partes anteriores da apostila — (**Atenção usuários Linux:** o Octave-forge deve estar instalado para que as funções de plotagem de alto-nível com sintaxe equivalente à do Matlab (p.ex plot3)) possam ser utilizadas.

Contudo, como o Octave tem uma interface “um pouco” mais simples do que o Matlab, antes de começar vamos ver entender algumas características essenciais do programa.

(**Atenção usuários Windows:** o Octave para windows é iniciado, por padrão, em um diretório chamado octave\_files dentro do seu diretório de instalação. Então, basta colocar os arquivos a serem utilizados nesse diretório, ou ir para o desejado com os comandos abaixo.



O padrão é algo do tipo

*c : \Arquivos de Programas\GNU*

*Octavexx.xx\octave\_files*

O modo de passear por diretórios é o seguinte:

*pwd*: mostra o diretório em que você está no momento.

*ls*: lista o conteúdo do diretório

*cd nome do diretório*: vai para o diretório especificado em “nome do diretório”

*mkdir nome*: cria um diretório com o nome fornecido.

A parte gráfica do Octave é baseada no *Gnuplot*, que tem uma sintaxe um pouco complexa. Felizmente, com o Octave-Forge instalado (padrão para Windows), funções de plotagem como as do Matlab podem ser utilizadas. Como vai ser observado, os gráficos são abertos em janelas do Gnuplot. Se você quiser exportar os gráficos como arquivos (para serem usados em trabalhos, por exemplo):

*gset terminal postscript color* : faz com que a saída gráfica não seja na tela, mas em um arquivo Postscript.

*gset terminal jpeg* : faz com que a saída gráfica não seja na tela, mas em um arquivo jpeg.

*gset output "arquivo.xxx"* define o nome do arquivo de saída no formato acima selecionado. Dados os dois comandos acima, o próximo comando do tipo *plot* produzirá sua saída não na tela, mas no arquivo especificado. Se outro formato de saída for desejado, experimente um *gset terminal* sem argumento, e os tipos de saída possíveis serão listados.

Um procedimento simples para exportar gráficos é criar o plot normalmente, sem definir saída nenhuma; então, ajustam-se as legendas dos eixos com *xlabel "nonono"* (ou *ylabel "nonono"*, ou descubra o comando para o eixo *z*); o título do gráfico com *title "nonono"*; pode-se também rodar a curva com o botão direito do mouse, ou mudar o zoom com o botão do meio. Então, quando a figura estiver arrumada, escolhem-se o tipo de arquivo e o nome de saída com os comandos do item anterior, e por último digita-se *replot*.

IMPORTANTE! (e útil):

O comando *help nome do comando* também existe.

### C.1.4 Comandos diferentes dos Matlab:

FUNÇÕES: As funções definidas pelo usuário podem ser qualquer arquivo no diretório de trabalho (ver primeiro item), de nome *nonon.m*. A extensão

*.m* é obrigatória. As funções são então chamadas pelo nome do arquivo, mas sem o *.m*. Por exemplo: para chamar uma função em um arquivo *função.m*, que recebe os argumentos  $A, B, C$  digite **função(A,B,C)**

O comando **save arquivo v1 v2 ...** do Octave salva no arquivo especificado as variáveis  $v_1 \dots v_n$ .

## Apêndice D

### Atividades

# Apêndice E

## Exercícios programados:

1. *Mantendo fixos os parâmetros determinados por Lorenz  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$  (lembre-se que ele levou vinte anos para chegar a este modelo...) e variando  $p = k\delta p$ , onde  $k = 0, 1, 2, \dots$  e  $\delta p$  o passo, e para cada valor de  $p$  o sistema de Lorenz (eq. 1.9), supondo sempre uma dada condição inicial fixa.*
  - (a) *Escreva um programa (function) cujos dados de entrada sejam as condições iniciais, os parâmetros do sistema  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $\delta p =$  passo, como parâmetro controle  $p = k\delta p$ , como acima, para resolver o sistema de Lorenz (eq. 1.9) e obter as variáveis  $xyz$  do sistema, e plotar simultaneamente as soluções  $x$  vs.  $t$ ,  $y$  vs.  $t$  e  $z$  vs.  $t$ , e em seguida o espaço de fases  $xyz$ .*
  - (b) *Obtenha os pontos fixos do sistema de Lorenz. (use a eq. 1.9).*
  - (c) *Quantos pontos fixos você obteve?*
  - (d) *Quais são os pontos estáveis e os instáveis?*
  - (e) *Utilizando o sistema de Lorenz com  $\sigma = 10$  e  $b = 8/3$  estude numericamente a estabilidade dos pontos fixos em função do parâmetro  $p > 0$ . Para isso escreva um programa com o qual os pontos fixos são calculados em função de  $r$  e os auto-valores devem ser obtidos com uma função da biblioteca do MatLab,  $\text{lam}=\text{eig}(J)$ , onde  $J$  é a matriz jacobiana calculada nos pontos fixos, veja detalhes com `help eig`.*
  - (f) *Modifique o seu programa acima, incluindo o programa feito no exercício 1a.*
2. *Rössler: Para  $a=0.1$ ,  $b=0.1$  calcule  $\nabla \cdot \vec{F}$  (eq. 3.1) e mostre que para o sistema de Rössler ser dissipativo devemos ter  $\langle a - c + x \rangle < 0$ .*

*Sugestão: Calcule o valor médio de  $x$  e mostre que é menor que  $c - a$  para  $c > 0.20131215$*

3. Para  $a=0.2$  e  $b=0.2$  obtenha o diagrama de bifurcações de Rössler com  $c$  variando entre 1 e 10).
4. Mapa cúbico

Adaptado por Thiago N. Nogueira, Pedro Carelli e Boris Marin

# Referências Bibliográficas

- [1] K. T. Alligood, T. D. Sauer and J. H. Yorke, *Chaos, An introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag, New York (1997).
- [2] R. W. Daniels, *An Introduction to Numerical Methods and Optimization Techniques*, North Holland, New York (1978).
- [3] G. L. Baker & J. P. Gollub, *Chaotic dynamics, an introduction*, Cambridge University Press, New York (1990).
- [4] P. Bregé, *Order within chaos*, Herman and John Wiley & Sons, Paris (1984).
- [5] A. J. Lichtenberger and M. A. Lieberman, *Regular and stochastic motion*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [6]
- [7] Roberto Paaz e Thomas Braun, Dissertação de Mestrado (RP), Instituto de Física de Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.
- [8] E. Butikov, muitos artigos e programas de simulações e animações podem ser obtidos [www.ifmo.ru/butikov/](http://www.ifmo.ru/butikov/)

[http://sourceforge.net/project/showfiles.php?group\\_id=2888](http://sourceforge.net/project/showfiles.php?group_id=2888)