

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”  
F 896 MONOGRAFIA

# Fotodetectores para Medição de Ruído Quântico na Luz

Felipe Boechat Mazzi  
E-mail: f230415@dac.unicamp.br

Orientador: Prof. Dr. Felipe Alexandre Silva Barbosa  
E-mail: felippeb@unicamp.br  
Departamento de Física Aplicada  
Instituto de Física Gleb Wataghin  
Universidade Estadual de Campinas

Campinas - SP  
Janeiro 2021

# Resumo

---

A detecção da luz é uma etapa crucial em qualquer experimento de óptica, e sua precisão e resposta espectral são os principais fatores que determinam quais propriedades podem ser observadas e em quais escalas de tempo. Em termos gerais, o objetivo deste projeto é analisar as características e limitações de fotodetectores amplificados que serão usados para medir o ruído quântico presente na luz. A conversão de luz em corrente elétrica no fotodetector ocorre por efeito fotoelétrico. Entretanto, como a aquisição de dados é tipicamente feita em tensão, ainda é necessário adicionar um circuito para realizar essa conversão. O amplificador de transimpedância é apropriado para realizar essa conversão com bom equilíbrio entre ganho e largura de banda.

Uma revisão teórica abrangente é fornecida para discutir as propriedades e definições de estados gaussianos da luz. Em seguida, a detecção homodina balanceada é apresentada como uma técnica capaz de obter informações sobre a fase dos campos elétricos usando fotodetectores, que medem apenas intensidades. Os estados da luz que queremos caracterizar podem ter ruídos menores que o do estado de vácuo, como os estados comprimidos. A capacidade de um circuito baseado em amplificador de transimpedância para medir esses estados é discutida através do cálculo do seu espectro de ganho e ruído, e estimativa da *shot noise clearance* resultante, definida como a razão entre o ruído do estado de vácuo e o ruído eletrônico do fotodetector.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Principais Conceitos</b>	<b>3</b>
2.1	Quantização do Campo Eletromagnético . . . . .	3
2.2	Estados Coerentes e Comprimidos . . . . .	6
2.3	Representações no Espaço de Fase . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Métodos de Medição</b>	<b>14</b>
3.1	Detecção Homodina Balanceada . . . . .	14
3.2	<i>Shot Noise</i> . . . . .	20
3.3	Teorema de Wiener-Khinchin . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Circuito para Fotodeteccção</b>	<b>24</b>
4.1	Análise do Ganho . . . . .	24
4.2	Análise do Ruído . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>31</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>31</b>

# Introdução

---

Estados gaussianos da luz são especialmente úteis para conduzir protocolos de informação quântica em variáveis contínuas [1, 2, 3]. O crescente interesse na aplicação desses estados em estudos de informação quântica se deve tanto às realizações experimentais que permitiram sua manipulação, quanto à estrutura matemática que os descreve. As aplicações destes procedimentos incluem a metrologia, criptografia e computação quânticas.

Matematicamente, um estado é classificado como gaussiano se sua representação no espaço de fase é gaussiana. Essa classificação inclui estados coerentes e estados comprimidos de um ou dois modos, que definem os objetos de estudo deste trabalho.

A detecção homodina é um dos principais recursos para manipulação e caracterização de estados quânticos da luz. Consiste em uma técnica interferométrica capaz de amplificar a luz que se deseja medir através do batimento deste com um campo óptico intenso, viabilizando a detecção de ruídos abaixo do estado de vácuo. Esta técnica é particularmente útil para caracterização de estados comprimidos.

Para aquisição de dados, é preciso realizar a conversão da luz em corrente elétrica em um circuito fotodetector, associado à montagem da detecção homodina. Em seguida, um amplificador de transimpedância pode ser usado para converter corrente elétrica em tensão, com bom

equilíbrio entre ganho e largura de banda. Para tratar de estados de interesse para as aplicações em informação quântica, é preciso que o circuito fotodetector seja otimizado para níveis de ruído extremamente baixos nas frequências relevantes. Mais especificamente, é preciso que o ruído introduzido pela eletrônica do circuito de fotodetecção (*ruído escuro*) seja muito menor do que o ruído presente no estado de vácuo (*shot noise*).

Neste trabalho, apresento uma revisão teórica abrangente dos conceitos de óptica quântica necessários para descrever estados gaussianos, e sua interação com aparatos de medição como a detecção homodina. Em seguida, apresento uma análise e simulação de um circuito de fotodetecção, que tem como objetivo a otimização da *shot noise clearance*, definida como a razão entre o *shot noise* e o ruído escuro.

# Principais Conceitos

---

Neste capítulo, discuto alguns conceitos básicos de óptica quântica, tendo como foco a definição e propriedades de estados gaussianos. A revisão teórica começa pela quantização do campo eletromagnético, em que as amplitudes de oscilação do potencial vetor são associadas a operadores quânticos. Em seguida, as propriedades de coerência do campo de radiação são discutidas, com a definição de estados coerentes e comprimidos. Finalmente, é introduzida a representação destes estados no espaço de fase, através da formulação de Wigner da mecânica quântica.

## 2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

Naturalmente, a teoria quântica do campo eletromagnético não pode ser deduzida diretamente das equações da física clássica [4]. Entretanto, a transição pode ser feita de forma natural se as equações clássicas forem reescritas em uma forma conveniente.

Partindo das Equações de Maxwell para um meio livre de fontes, e utilizando o gauge de Coulomb [5], podemos obter uma equação de onda para o potencial vetor

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

onde  $c^{-2} = \mu_0 \varepsilon_0$ , com  $\mu_0$  representando a permeabilidade magnética do vácuo e  $\varepsilon_0$  a permissividade dielétrica do vácuo. A Equação 2.1 pode ser resolvida por separação de variáveis. Postula-se uma solução separável da forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})a(t). \quad (2.2)$$

Substituindo a Equação 2.2 na Equação 2.1 e introduzindo  $-\omega_m^2/c^2$  como constante de separação, obtemos

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega_m^2}{c^2} \right) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_m^2 \right) a(t) = 0 \quad (2.3)$$

e portanto a solução  $A(\mathbf{r}, t)$  será qualquer combinação linear do produto das soluções das Equações 2.3

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_m [c_m a_m(t) \mathbf{u}_m(\mathbf{r}) + c_m^* a_m^*(t) \mathbf{u}_m^*(\mathbf{r})]. \quad (2.4)$$

A solução é escrita como um somatório, ao invés de uma integral, porque o campo está restrito a um certo volume no espaço. Portanto, o potencial vetor é expandido como uma soma de modos específicos. A parte temporal, determinada pela Equação 2.3, tem solução exponencial, então o potencial vetor é

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_m [a_m e^{-i\omega_m t} \mathbf{u}_m(\mathbf{r}) + a_m^* e^{i\omega_m t} \mathbf{u}_m^*(\mathbf{r})]. \quad (2.5)$$

Ainda considerando o campo confinado em um volume finito (e.g. um cubo de lado  $L$ ), e usando condições de contorno periódicas, a solução da parte espacial é

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \hat{\mathbf{p}}_m e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}} \quad \text{com} \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{L^3}} (m_x \hat{\mathbf{i}} + m_y \hat{\mathbf{j}} + m_z \hat{\mathbf{k}}), \quad (2.6)$$

onde os  $m$ 's são números inteiros e  $\hat{\mathbf{p}}_m$  é um vetor unitário de polarização. Pela condição do gauge de Coulomb,  $\hat{\mathbf{p}}_m \cdot \mathbf{k} = 0$ , de forma que o vetor está polarizado em um plano perpendicular à direção de propagação.

Nessas condições, as soluções da parte espacial obedecem a uma condição de ortonormalidade, que será particularmente útil mais à frente

$$\int_V \mathbf{u}_m^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_n(r) d^3r = \delta_{mn}. \quad (2.7)$$

De forma que, finalmente, o potencial vetor pode ser escrito como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m \varepsilon_0 L^3}} \sum_m \hat{\mathbf{p}}_m [a_m \exp[i(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \omega_m t)] + a_m^* \exp[-i(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \omega_m t)]] . \quad (2.8)$$

Até aqui o potencial vetor foi tratado de forma clássica, e faz sentido apenas pensar nos coeficientes  $a_m$  e  $a_m^*$  como números complexos. A quantização do campo eletromagnético surge quando tomamos esses coeficientes como dois operadores auto-adjuntos  $\hat{a}_m$  e  $\hat{a}_m^\dagger$  que obedecem às relações de comutação para bósons [6]:

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_n] = [\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_n^\dagger] = 0 \quad \text{e} \quad [\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_n] = \delta_{mn}. \quad (2.9)$$

A normalização necessária para obter as relações de comutação mostradas na Equação 2.9 justificam o coeficiente utilizado na Equação 2.8.

A Equação 2.8 traz o primeiro resultado importante dessa seção. O potencial vetor foi identificado com os operadores  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$ , e o mesmo pode ser feito para  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , de forma que o Hamiltoniano do campo eletromagnético também pode ser reescrito como operador

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left( \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) d^3r \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = \frac{1}{2} \int_V \left[ \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \times \hat{\mathbf{A}} \right)^2 \right] d^3r. \quad (2.10)$$

Substituindo com a Equação 2.8, e usando as condições de ortogonalidade da Equação 2.7 e o gauge de Coulomb, simplificamos o Hamiltoniano para

$$\hat{H} = \sum_m \hbar \omega_m \left( \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \frac{1}{2} \right). \quad (2.11)$$



Aqui o significado físico dos operadores fica claro. O comportamento das amplitudes dos campos de radiação pode ser descrito por um conjunto de osciladores harmônicos livres que obedecem as relações de comutação da Equação 2.9 [7]. A partir daqui, o estado quântico de cada modo pode ser representado por um estado independente. Cada estado habita um espaço de Hilbert apropriado, e o produto tensorial de todos esses produzirá um espaço de Hilbert em que todo o campo de radiação está definido.

Vamos falar de alguns estados especiais do campo eletromagnético quantizado. Em particular, estados coerentes e comprimidos, que são de interesse para o processo de fotodetecção em questão. Esses estados são apresentados e discutidos na seção seguinte, para posteriormente serem tratados na formulação do espaço de fase da mecânica quântica.

## 2.2 Estados Coerentes e Comprimidos

Considere o Hamiltoniano que foi definido na Equação 2.11. A expressão encontrada é função do operador número  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Podemos descrever o sistema em uma base de estados de Fock, que são autoestados do operador número

$$N_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle. \quad (2.12)$$

Quando escrevemos as amplitudes do campo em função de operadores que não comutam, introduzimos uma relação de incerteza entre as variáveis do campo. Portanto, se os estados têm amplitude perfeitamente bem-definida, eles têm incerteza completa quanto à fase. Se a existência da relação de incerteza é uma distinção fundamental entre o campo clássico e o quântico, é natural assumir que o estado quântico mais *próximo* possível de um campo clássico é um que tenha *mínima incerteza*.

Para encontrar tais estados de mínima incerteza, começamos postulando que são autoestados  $|\alpha\rangle$  do operador de aniquilação  $\hat{a}$ , como em

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (2.13)$$

e então mostramos que isso resulta nas propriedades desejadas. Apenas utilizando as propriedades dos operadores de aniquilação e criação, é possível encontrar a representação de  $|\alpha\rangle$  na base de estados de Fock [8]. A expressão normalizada é:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.14)$$

Por sua vez, um estado  $|n\rangle$  qualquer pode ser reescrito em função do estado de vácuo  $|0\rangle$  [6]. Com esse resultado, podemos definir um operador deslocamento  $\hat{D}(\alpha)$ , que cria os estados de mínima incerteza a partir do estado de vácuo

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \quad \text{tal que} \quad |\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (2.15)$$

Esses estados obtidos através da aplicação do operador *deslocamento* sobre estados de vácuo, são chamados *estados coerentes*. A justificativa para essa denominação fica clara quando consideramos sua representação  $\psi_\alpha(q)$  em coordenadas, obtida aplicando  $D(\alpha)$  sobre a representação em coordenadas do estado de vácuo. Que essa última é uma gaussiana pode ser facilmente demonstrado usando as definições conhecidas de  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  em função de  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$ . O mesmo pode ser feito com a Equação 2.15 para mostrar que:

$$\psi_\alpha(q) = \hat{D}(\alpha)\psi_0(q) = \psi(q - q_0) = \left(\frac{\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega}{2\hbar}(q - q_0)^2\right) \quad (2.16)$$

A representação em coordenadas do estado coerente é uma gaussiana que preserva a sua variância  $\Delta p$  enquanto tem sua média deslocada em  $q_0$ . Ao resolver a evolução temporal, constata-se que esse pacote de ondas executa um movimento harmônico simples de amplitude  $q_0$ .

No estado coerente, portanto, preserva a relação de incerteza válida para o estado de vácuo é preservada

$$\Delta\hat{q}\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}, \quad (2.17)$$

o que justifica sua classificação como um estado de mínima incerteza.

## Estados comprimidos

Para avaliar as propriedades dos estados coerentes, é útil introduzir um novo par de operadores, que se relacionam com  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  por

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \text{e} \quad \hat{X}_2 = \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (2.18)$$

Claramente,  $\hat{X}_1$  e  $\hat{X}_2$  são versões adimensionais dos operadores de posição e momento,  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  [7]. Para que todas essas camadas de notação não ocultem a física que queremos descrever, é útil notar que essa relação pode ser invertida e substituída diretamente na Equação 2.8, e os operadores determinarão as amplitudes do vetor potencial.

A relação de incerteza para os operadores de quadratura seguem diretamente da Equação 2.9

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = -\frac{1}{2i} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \frac{i}{2}, \quad (2.19)$$

logo, pelo princípio de incerteza generalizado:

$$\Delta \hat{X}_1 \Delta \hat{X}_2 \geq \frac{1}{4}. \quad (2.20)$$

Agora fica claro que um estado coerente (e portanto de mínima incerteza), deve ser representado por duas amplitudes  $\hat{X}_1$  e  $\hat{X}_2$ , e um *ruído*  $\Delta \hat{X}_1 = \Delta \hat{X}_2 = \frac{1}{2}$  distribuído entre as duas quadraturas, como indicado no primeiro gráfico da Figura 2.1.

A Equação 2.20 sugere fortemente um caso especial de estados de mínima incerteza: os estados comprimidos. Nesse caso, vale a igualdade na relação de incerteza, mas  $\Delta \hat{X}_1 \neq \Delta \hat{X}_2$ . Um estado comprimido (*squeezed*) pode ser obtido a partir de um estado coerente mediante aplicação do operador de *squeezing*

$$\hat{S}(\xi) = \exp \left( \frac{1}{2} \xi^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2} \xi \hat{a}^{\dagger 2} \right), \quad (2.21)$$

onde  $\xi$  é o fator de *squeezing*  $\xi = r e^{i\theta}$ . O fator  $\xi$  caracteriza o operador de *squeezing*, assim como

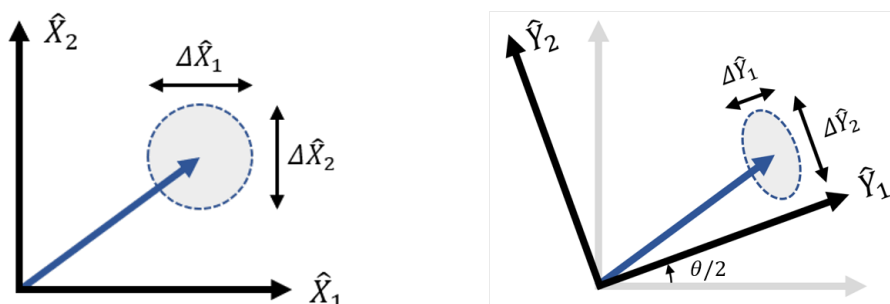


Figura 2.1: Um estado coerente representado no espaço de fase das quadraturas a partir de duas amplitudes e incertezas que obedecem a Equação 2.20. O estado comprimido é representado por uma elipse, cujos eixos principais foram rotacionados por  $\theta/2$ .

$\alpha$  caracteriza o operador deslocamento. Portanto, descrevemos um estado de vácuo comprimido e deslocado como

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle. \quad (2.22)$$

O efeito de  $\hat{S}(\xi)$  sobre as quadraturas é compreendido mais facilmente se, primeiro, definirmos quadraturas rotacionadas. Trabalhando nesse sistema rotacionado, a expressão para o efeito do operador de *squeezing* fica mais simples, e pode ser calculada através das Equações 2.21 e 2.18:

$$(\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2) = (\hat{X}_1 + i\hat{X}_2)e^{i\theta/2} \Rightarrow \hat{S}^\dagger(\xi) (\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2) \hat{S}(\xi) = \hat{Y}_1 e^{-r} + i\hat{Y}_2 e^r. \quad (2.23)$$

A Figura 2.1 mostra a representação de um estado comprimido no espaço de fase. Trata-se de um círculo centrado na origem que é rotacionado por  $\theta/2$ , comprimido pelo fator  $r$  segundo a Equação 2.23 e então deslocado.

O efeito de  $\hat{S}(\xi)$  sobre a incerteza das quadraturas rotacionadas segue das Equações 2.23 e 2.18. Uma vez que  $\hat{Y}_i$  é reescrito em termos de  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ , a incerteza segue da definição dada na Equação 2.21, então

$$(\Delta Y_i)^2 = \langle Y_i^2 \rangle - \langle Y_i \rangle^2 = \frac{1}{4}e^{\pm 2r}, \quad (2.24)$$

onde o expoente é positivo para  $Y_1$  e negativo para  $Y_2$ . Portanto, o operador de *squeezing*

comprime a incerteza de uma das quadraturas, às custas de aumentar a outra. Com esse efeito, o “ruído” associado a uma das quadraturas será inferior ao observado mesmo nos estados de vácuo que tratamos anteriormente. Essa possibilidade define um efeito crucial para o processo de fotodeteção, e é uma das preocupações centrais do circuito que discutiremos mais à frente.

## 2.3 Representações no Espaço de Fase

Nesta seção, discutiremos a formulação da mecânica quântica no espaço de fase. Essa formulação se dá através do uso de funções de quasiprobabilidade para descrever o estado quântico de um sistema [9]. Ao evitar o uso de operadores, essas funções aproximam ao máximo a mecânica quântica do tratamento clássico de um espaço de fase.

Na mecânica clássica, conhecer a distribuição de probabilidades no espaço de fase permite que todas as quantidades estatísticas do sistema de interesse sejam calculadas. A transição para uma distribuição no espaço de fase quântico, naturalmente, traz algum custo, uma vez que nem sequer é possível fazer medições simultâneas e arbitrariamente precisas de posição e momento em sistemas quânticos. Voltaremos nossa atenção para uma formulação especialmente útil, baseado na distribuição de quasiprobabilidade de Wigner. Como ficará claro a seguir, essa formulação possui diversas propriedades úteis que justificam seu uso em detrimento das demais.

A função de Wigner pode ser definida em termos do operador densidade através da seguinte expressão [1, 9]

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\langle q - \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q + \frac{x}{2} \right\rangle e^{ipx}. \quad (2.25)$$

O significado físico da função de Wigner fica mais claro quando consideramos as distribuições marginais

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W(q, p) = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle, \quad (2.26a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq W(q, p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle, \quad (2.26b)$$

ou seja, as distribuições de probabilidade em posição e momento podem ser calculadas a partir da função de Wigner. Para estados puros, essas integrais fornecem os módulos quadrados das

funções de onda usuais  $|\psi(x)|^2$  e  $|\varphi(p)|^2$ , respectivamente. Agora estamos prontos para discutir a representação de estados gaussianos no estado de fase. Um sistema bosônico (como é o caso do campo de radiação) está em um estado gaussiano se função de Wigner é gaussiana [10]. Um sistema como esse é completamente caracterizado pelo primeiro e segundo momentos estatísticos das suas variáveis canônicas contínuas  $\hat{R}_i$  [11]. Essa caracterização pode ser organizada em uma *matriz de covariância* real, simétrica e positiva-definida, cujos elementos são dados por:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left\langle \hat{R}_i \hat{R}_j + \hat{R}_j \hat{R}_i \right\rangle - \left\langle \hat{R}_i \right\rangle \left\langle \hat{R}_j \right\rangle \quad (2.27)$$

Os elementos da matriz de covariância caracterizam completamente a função de Wigner de um estado gaussiano. Como há uma correspondência unívoca entre as funções de Wigner e a matriz densidade  $\hat{\rho}$ , e esta contém toda a informação sobre um sistema quântico específico, os elementos da matriz de covariância caracterizam o estado quântico.

Para concluir a seção, vamos considerar alguns a representação de estados gaussianos no espaço de fase. Dada a representação em coordenadas do estado de vácuo

$$\psi_0(x) = (\pi)^{-\frac{1}{4}} \exp \left( -\frac{q^2}{2} \right). \quad (2.28)$$

Para um estado puro, o termo dependente de  $\hat{\rho}$  na integral da Equação 2.25 pode ser escrito em termos da função de onda, então a Função de Wigner do estado de vácuo é

$$W_0(q, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_0 \left( q - \frac{x}{2} \right) \psi_0^* \left( q + \frac{x}{2} \right) e^{ipx} = \frac{1}{\pi} \exp \left[ -(q^2 + p^2) \right]. \quad (2.29)$$

E repetindo o procedimento para a representação em coordenadas de  $\hat{D}(\alpha) |0\rangle$ , obtemos a função de Wigner do estado *coerente*

$$W_\alpha = \frac{1}{\pi} \exp \left[ -(q - q_0)^2 - (p - p_0)^2 \right]. \quad (2.30)$$

Já o operador de squeezing introduzido na Equação 2.21 é tal que seu efeito sobre a função

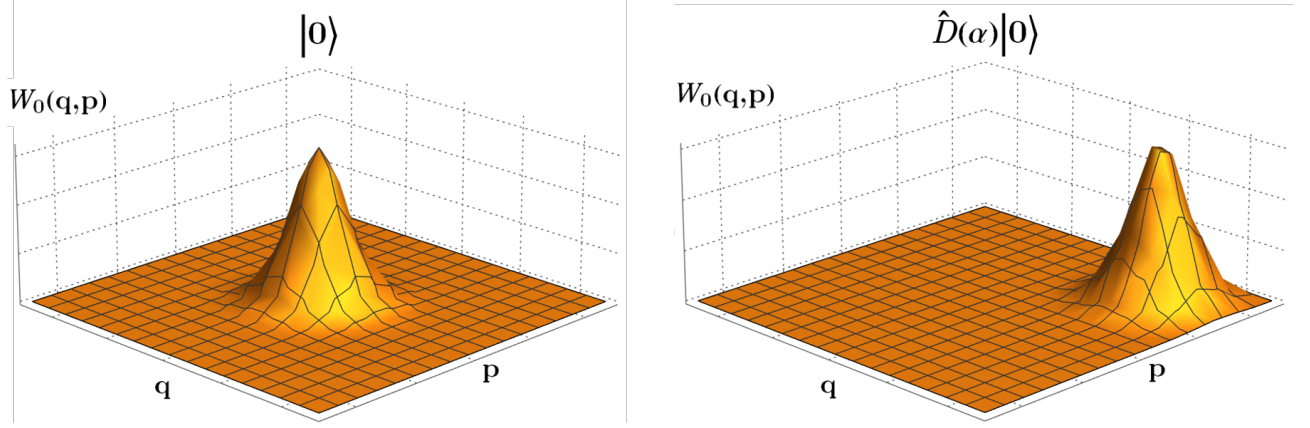


Figura 2.2: Função de Wigner para o estado de vácuo e o estado coerente, obtido mediante aplicação do operador  $\hat{D}(\alpha)$

de onda consiste em introduzir um fator de escala exponencial. De forma que a função de onda do estado comprimido é<sup>1</sup>

$$\psi_{\xi}(q) = (\pi)^{-\frac{1}{4}} e^{\xi/2} \exp \left[ -e^{2\xi} \frac{(q - q_0)^2}{2} + ipq - \frac{ip_0 q_0}{2} \right]. \quad (2.31)$$

E a função de Wigner pode ser computada diretamente a partir da Equação 2.25, assumindo que  $\langle q - x/2 | \hat{\rho} | q + x/2 \rangle = \psi(q - x/2) \psi^*(q + x/2)$  para estados puros. A função de Wigner para um estado de vácuo comprimido é, portanto

$$W_s(q, p) = \frac{1}{\pi} \exp \left[ -e^{2\xi} q^2 - e^{-2\xi} p^2 \right]. \quad (2.32)$$

A distribuição é representada no espaço de fase na Figura 2.3. A função de Wigner do estado comprimido é uma distribuição gaussiana com variâncias assimétricas nas duas variáveis canônicas.

Essa demonstração encerra este capítulo dedicado à revisão teórica de óptica quântica. Partimos desde a quantização do campo eletromagnético, passando pela definição de estados especiais do campo de radiação, e chegamos até a sua representação no espaço de fase

<sup>1</sup>Com efeito, é possível partir desse pressuposto para obter a expressão dada na Equação 2.21.

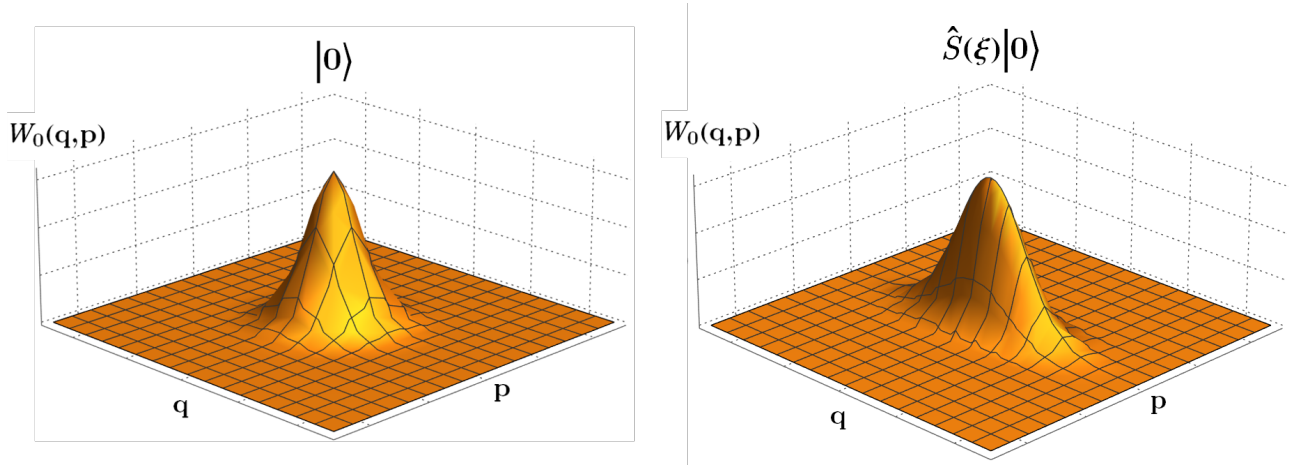


Figura 2.3: Função de Wigner para o estado de vácuo e o estado comprimido, obtido mediante aplicação do operador  $\hat{S}(\xi)$ .

quântico. Idealmente, o capítulo terá trazido uma imagem clara dos estados gaussianos de interesse, suas definições matemáticas, e como eles se caracterizam por momentos estatísticos de variáveis contínuas. Além de serem recursos centrais para qualquer incursão na área de óptico quântica, os conceitos abordados aqui *definem* os estados cuja detecção e caracterização motivam os métodos de detecção subsequentes.



# Métodos de Medição

---

Neste capítulo, são discutidos os princípios e resultados que fundamentam os métodos de medição utilizados. Inicialmente, a detecção homodina balanceada é introduzida, primeiro como instrumento para amplificação medição seletiva de ruídos nas quadraturas de um estado [12, 13, 14, 15], e em seguida como uma forma de *tomografia homodina quântica*, capaz de reconstruir a função de Wigner de um estado a partir da estatística quântica do campo incidente [16, 17]. Em seguida, o conceito de *shot noise*, associado ao ruído do estado de vácuo é introduzido como referência padrão para medir as flutuações das bandas laterais [18]. Finalmente, o teorema de Wiener-Khinchin é demonstrado e utilizado para calcular o espectro de ruído de uma variável estacionária [19, 20].

## 3.1 Detecção Homodina Balanceada

Em termos gerais, a detecção homodina balanceada consiste em usar um divisor de feixes equilibrado para misturar um campo que se deseja caracterizar com um campo de referência bem conhecido (*local oscillator*). Cada um dos modos de saída é captado por fotodetectores individuais, onde são convertidos em fotocorrentes. Um esquema genérico para esse procedimento é mostrado na Figura 3.1.

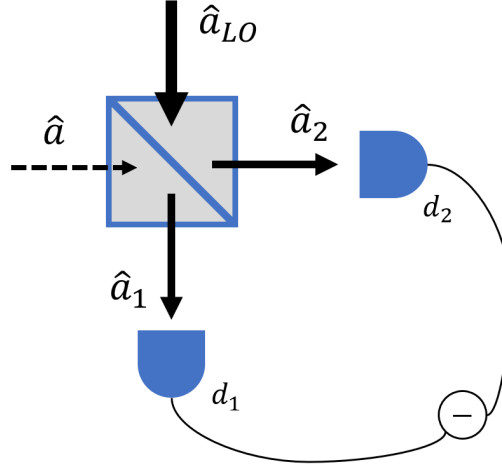


Figura 3.1: Diagrama representando a detecção homodina. A detecção balanceada ocorre quando a transmissão do divisor de feixes corresponde a 50%.

Para avançar com uma descrição do processo de detecção, precisamos encontrar um operador que descreva a intensidade e a fotocorrente medidas nos detectores em que os modos incidem.

Inicialmente, vamos tratar os estados utilizados como um conjunto de modos densamento populado (com frequências distribuídas em torno de uma frequência central  $\omega_p$ , chamada *portadora*) e suas *bandas laterais*, que possuem valor médio nulo e frequências fora da região central [14]. A região central  $\delta\omega$  do espectro de intensidade é definida por uma largura de banda  $\Delta\omega$ , de forma que

$$\omega_p - \Delta\omega \leq \omega_m \leq \omega_p + \Delta\omega \rightarrow \omega_m \in \delta\omega. \quad (3.1)$$

Resgatando os resultados da Seção 2.1, podemos escrever a componente de frequências positivas do operador campo elétrico como uma soma de componentes dentro e fora da região central:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \hat{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}_{BL}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = g \left( \sum_{\omega_m \in \delta\omega} \hat{a}_m e^{i(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \omega_m t)} + \sum_{\omega_m \notin \delta\omega} \hat{a}_m e^{i(\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r} - \omega_m t)} \right), \quad (3.2)$$

onde  $g \approx i\sqrt{\frac{\hbar\omega_p}{2\varepsilon_0 L^3}}$  é o campo elétrico por fóton. Com essa notação, a fotocorrente média em

função da intensidade média do campo que chega até o detector fica da forma

$$\langle i(t) \rangle = K \left\langle \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right\rangle, \quad (3.3)$$

onde  $K$  é alguma constante relacionada às propriedades do detector e  $\hat{E}^{(-)\dagger} = \hat{E}^{(+)}$ . Aproximando a portadora por um único modo em um estado coerente, tal que

$$\hat{a}_{\omega_p} |\alpha_p\rangle = \alpha_p |\alpha_p\rangle, \text{ com } \alpha_p = |\alpha_p| e^{i\phi_p}, \quad (3.4)$$

ao substituir esta expressão em 3.3, mostramos que

$$\langle i(t) \rangle = K \left\langle \left( \hat{E}_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}_{BL}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right) \left( \hat{E}_p^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \hat{E}_{BL}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right) \right\rangle \quad (3.5)$$

$$= K|g|^2 |\alpha_p|^2 + K|g| |\alpha_p| \left\langle e^{-i\phi_p} \hat{E}_{BL}^{(+)}(t) + e^{i\phi_p} \hat{E}_{BL}^{(-)}(t) \right\rangle + \left\langle \hat{E}_{BL}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}_{BL}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \right\rangle. \quad (3.6)$$

Como último termo é a intensidade média das bandas laterais, ele pode ser desprezado. O primeiro termo é o valor médio da portadora e não irá contribuir para a flutuação. As flutuações  $\delta \hat{i}(t)$  da fotocorrente serão dadas pelo segundo termo (dentro da média), na Equação 3.6

$$\delta \hat{i}(t) = K|g|^2 |\alpha_p| \left[ e^{-i\phi_p} \delta \hat{a}(t) + e^{i\phi_p} \delta \hat{a}^\dagger(t) \right]. \quad (3.7)$$

Onde os operadores  $\hat{E}_{BL}^{(\pm)}(t)$  definidos na Equação 3.2 foram substituídos por uma soma de modos em torno da portadora, como em

$$\delta \hat{a}(t) = \int_{\Omega > 0}^{\infty} d\Omega \left[ \hat{a}(\Omega) e^{-i\Omega t} + \hat{a}(-\Omega) e^{i\Omega t} \right] \text{ com } \Omega = \omega - \omega_p. \quad (3.8)$$

Agora é possível definir um operador intensidade, diretamente proporcional à fotocorrente

$$\hat{I}(t) = \bar{I} + \delta \hat{I}(t), \text{ onde} \quad (3.9)$$

$$\bar{I} = \langle i(t) \rangle = K|g|^2|\alpha_p|^2 \quad \text{e} \quad \delta\hat{I}(t) = \delta\hat{i}(t) = K|g|^2|\alpha_p| \left[ e^{-i\phi_p} \delta\hat{a}(t) + e^{i\phi_p} \delta\hat{a}^\dagger(t) \right]. \quad (3.10)$$

Toda essa notação pode ser fortemente simplificada se introduzirmos um operador efetivo  $\hat{a}(t) = \alpha_p + \delta\hat{a}(t)$  que descreve a portadora e as bandas laterais. Nesse caso, o operador intensidade pode ser descrito simplesmente por

$$\hat{I}(t) = K|g|^2\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t), \quad (3.11)$$

uma vez que o termo quadrático em  $\delta\hat{a}$  será desprezado.

Agora retornarmos ao tratamento da detecção homodina *balanceada*. A mistura dos modos incidentes, descritos pelos operadores efetivos  $\hat{a} = \alpha + \delta\hat{a}$  e  $\hat{a}_{LO} = \alpha_{LO} + \delta\hat{a}_{LO}$ , é realizada por um divisor de feixes com transmissão igual a 50%. Nesse caso, os modos de saídas  $\hat{a}_1$  e  $\hat{a}_2$  são

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{a} + \hat{a}_{LO}}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \hat{a}_2 = \frac{\hat{a} - \hat{a}_{LO}}{\sqrt{2}}. \quad (3.12)$$

Onde  $\hat{a}_{LO}$  e  $\hat{a}$  representam, respectivamente, o oscilador local e o campo que se deseja medir. Seguindo a Equação 3.11, e omitindo os coeficientes  $K|g|^2$ , as intensidades medidas nos detectores serão

$$\hat{I}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 = \frac{1}{2} \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}_{LO} + \hat{a}_{LO}^\dagger \hat{a} + \hat{a}_{LO}^\dagger \hat{a}_{LO} \right] \quad (3.13a)$$

$$\hat{I}_2 = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = \frac{1}{2} \left[ \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}_{LO} - \hat{a}_{LO}^\dagger \hat{a} + \hat{a}_{LO}^\dagger \hat{a}_{LO} \right] \quad (3.13b)$$

Mas a quantidade de interesse é a *diferença* das intensidades médias, uma vez que, conforme a Figura 3.1, as fotocorrentes dos detectores serão subtraídas uma da outra. Tomando o operador intensidade da subtração das intensidades e substituindo com os operadores efetivos

$$\hat{I}_- = \hat{I}_1 - \hat{I}_2 = \hat{a}^\dagger \hat{a}_{LO} + \hat{a}_{LO}^\dagger \hat{a} \quad (3.14)$$

$$= (\alpha^* + \delta\hat{a}^\dagger)(\alpha_{LO} + \delta\hat{a}_{LO}) + (\alpha_{LO}^* + \delta\hat{a}_{LO}^\dagger)(\alpha + \delta\hat{a}) \quad (3.15)$$

$$= \alpha^* \alpha_{LO} + \alpha_{LO}^* \alpha + |\alpha| \left( e^{-i\phi} \delta\hat{a}_{LO} + e^{i\phi} \delta\hat{a}_{LO}^\dagger \right) + |\alpha|_{LO} \left( e^{i\phi} \delta\hat{a} + e^{-i\phi} \delta\hat{a}^\dagger \right). \quad (3.16)$$

Experimentalmente, estamos interessados nos termos que contém flutuações. Representamos os módulos  $|\alpha|$  e  $|\alpha|_{LO}$  pelas raízes das intensidades médias  $\sqrt{\bar{I}}$  e  $\sqrt{\bar{I}_{LO}}$ , e retomamos os coeficientes para obter

$$\delta\hat{I}_- = \sqrt{K}|g| \left[ \sqrt{\bar{I}} \left( e^{-i\phi} \delta\hat{a}_{LO} + e^{i\phi} \delta\hat{a}_{LO}^\dagger \right) + \sqrt{\bar{I}_{LO}} \left( e^{i\phi} \delta\hat{a} + e^{-i\phi} \delta\hat{a}^\dagger \right) \right]. \quad (3.17)$$

Tanto a diferença de fase  $\phi$  quanto as intensidades dos campos incidentes podem ser controladas facilmente. Escolhendo  $\bar{I}_{LO} \gg \bar{I}$ , o primeiro termo se torna desprezível:

$$\delta\hat{I}_- = \sqrt{K}|g|\sqrt{\bar{I}_{LO}} \left( e^{i\phi} \delta\hat{a} + e^{-i\phi} \delta\hat{a}^\dagger \right) = \sqrt{K}|g|\sqrt{\bar{I}_{LO}} \delta\hat{q}_\phi(t). \quad (3.18)$$

onde introduzimos  $\delta\hat{q}_\phi(t)$  para representar o termo entre parênteses. A variância de intensidade representa o ruído, então:

$$\Delta^2 \hat{I}_- = \langle (\delta\hat{I}_-)^2 \rangle = K|g|^2 \bar{I}_{LO} \Delta^2 \hat{q}_\phi(t) \quad (3.19)$$

O significado físico da Equação 3.25 é importantíssimo, pois ela prevê que, na detecção homodina balanceada, o sinal das bandas laterais do campo medido é amplificado pela portadora do oscilador local. Além disso, o operador  $\Delta^2 \hat{q}_\phi(t)$  é sensível à diferença de fase entre os campos, que pode ser ajustada para medir seletivamente os ruídos presentes nas quadraturas.

## Tomografia de Espaço de Fase

Na Seção 2.3, vimos que existe uma correspondência de um-para-um entre as funções de Wigner  $W(x, p)$  e a matriz densidade  $\hat{\rho}$ . Por esse motivo, a função de Wigner de um estado gaussiano contém toda a informação que se pode conhecer sobre o sistema [9].

A seguir, mostraremos brevemente que a detecção homodina balanceada pode ser utilizada para reconstruir a função de Wigner de um estado quântico arbitrário. Isso é feito através de medidas de ruído nas amplitudes do campo para diferentes direções no espaço de fase, em uma técnica conhecida como tomografia óptica homodina [17].

Na Equação 3.16, mostramos que a quantidade medida pela detecção homodina balanceada, para  $\alpha \approx 0$  é a intensidade da subtração

$$\hat{I}_- \approx |\alpha|_{LO} (e^{i\phi} \delta \hat{a} + e^{-i\phi} \delta \hat{a}^\dagger). \quad (3.20)$$

Isso corresponde a uma medição da “quadratura rotacionada”. Com efeito, o termo entre parênteses pode ser reescrito com a Equação 2.18, que foi introduzida no capítulo anterior<sup>1</sup>

$$\hat{I}_- = 2|\alpha|_{LO} (\cos(\phi) \hat{X}_1 - \sin(\phi) \hat{X}_2). \quad (3.21)$$

Portanto, fica claro que a detecção homodina balanceada fornece uma medição da quadratura rotacionada. Naturalmente, as quadraturas são simplesmente versões adimensionais dos operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  de posição e momento [8], então podemos retomar a notação que utilizamos para a descrição do espaço de fase, e escrever [16]

$$\hat{I}_- \approx 2|\alpha|_{LO} \hat{q}_\phi. \quad (3.22)$$

Agora fica fácil estabelecer a conexão com a representação de Wigner. A distribuição de probabilidade para encontrar o sistema em um autoestado  $|\hat{q}_\phi\rangle$  é dada por [9]

$$\text{pr}(q, \phi) = \langle \hat{q}_\phi | \hat{\rho} | \hat{q}_\phi \rangle, \quad (3.23)$$

que é simplesmente uma das distribuições marginais de probabilidade definidas na Equação 2.26, e que se relaciona com a função de Wigner segundo:

$$\text{pr}(q, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} W(q \cos \phi - p \sin \phi, q \sin \phi + p \cos \phi) dp. \quad (3.24)$$

Em resumo, mostramos que a distribuição de probabilidade associada à quadratura rota-

---

<sup>1</sup>Note que  $\delta \hat{a}$  é definido pela Equação 3.8.

cionada pode ser obtida pela detecção homodina balanceada. Se essa distribuição for medida para diferentes fases, a Equação 3.24 mostra como reconstruir a função de Wigner, que conterá toda a informação a respeito do estado quântico. Esse procedimento constitui a tomografia homodina quântica, e seu significado “geométrico” no espaço de fase está representado na Figura 3.2. Com medidas sucessivas da distribuição de probabilidade  $pr(q, \phi)$ , é possível utilizar a transformada de Radon para reconstruir o estado [17].

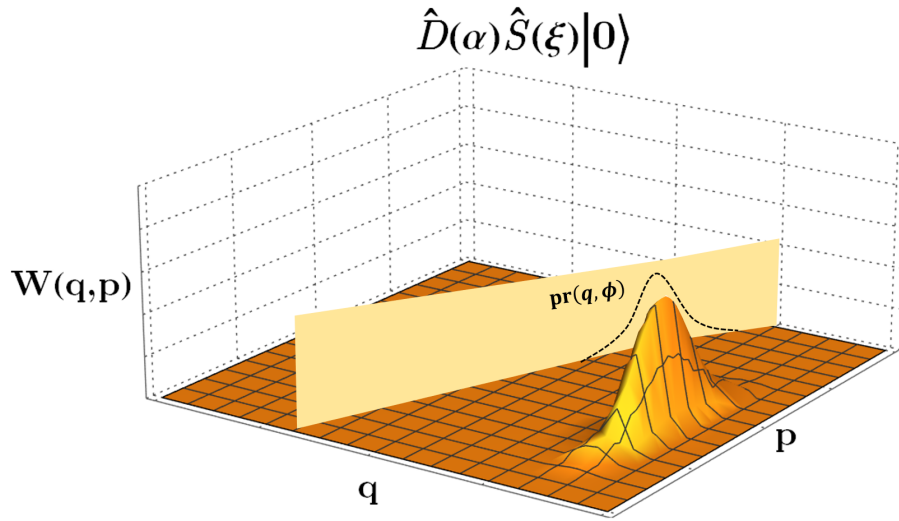


Figura 3.2: A densidade de probabilidade  $pr(q, \phi)$  associada à quadratura rotacionada medida pela detecção homodina é a projeção da função de Wigner em um plano vertical definido por  $\phi$ .

## 3.2 Shot Noise

É um resultado conhecido da estatística que, dado uma sucessão de eventos independentes com probabilidades iguais de ocorrência, o número total de ocorrências registradas em um intervalo de tempo fixo seguirá uma distribuição de Poisson.

Um processo desse tipo ocorre nos detectores utilizados medir para a luz. A conversão de luz em corrente elétrica no fotodetector ocorre por efeito fotoelétrico, em que a luz incidente em um fotodiodo excita elétrons para a banda de condução e o campo elétrico presente na região de depleção os conduz em direção ao cátodo, dando origem à fotocorrente.

Devido à natureza granular da luz, que é composta por fótons, a intensidade do feixe definirá uma probabilidade de ocorrência da detecção de um fótons a cada unidade de tempo. Para um intervalo de tempo qualquer, o número de contagens registradas obedecerá uma distribuição de Poisson. É interessante notar que esta característica também se aplica ao estado de vácuo. O ruído desse estado define o *limite quântico padrão* [21], e é utilizado como referência para a caracterização do ruído quântico da luz.

Um fotodetector comum mede apenas a intensidade do eixo, e portanto não será sensível a um estado de vácuo. Entretanto, a detecção homodina balanceada pode contornar esse problema. conforme previsto pela Equação 3.25

$$\Delta^2 \hat{I}_- = K|g|^2 \bar{I}_{LO} \Delta^2 \hat{q}_\phi(t). \quad (3.25)$$

Quando tratamos o estado de vácuo, teremos  $\Delta^2 \hat{q}_\phi = 1$ , de forma que o ruído da intensidade de subtração é proporcional à média, tal como seria esperado para um processo de Poisson.

Na Seção 2.2, tratamos sobre dos estados gaussianos de interesse para informação quântica com variáveis contínuas, os estados comprimidos. Estes estados apresentam ruído inferior ao do vácuo em uma de suas quadraturas. Uma vez que a detecção homodina balanceada é capaz de medir o ruído em uma única quadratura do campo, está claro que os fotodetectores utilizados devem ser adequados para medir ruídos muito baixos. Em outras palavras, o ruído introduzido pela eletrônica dos detectores deve ser extremamente baixo.

Portanto, o uso do ruído de vácuo como referência em medições do ruído quântico da luz define um parâmetro para aferir a qualidade de um fotodetector: a *shot noise clearance* (SNC). A expressão conhecida para o *shot noise* associado a uma fotocorrente com média  $\bar{i}$  medida com largura de banda  $\Delta f$  é [22]

$$\Delta^2 i = 2\bar{i}e\Delta f. \quad (3.26)$$

E a *shot noise clearance* será a razão entre o *shot noise* e o ruído eletrônico introduzido pelo fotodetector (*ruído escuro*).



### 3.3 Teorema de Wiener-Khinchin

Em experimentos de fotodetecção, estamos frequentemente interessados no espectro de potência da fotocorrente que chega ao detector. O teorema de Wiener-Khinchin é um resultado fundamental para análise de sinais, pois associa medidas de correlação no domínio do tempo à medidas no domínio da frequência [23, 19, 24]. Começamos enunciando o teorema da convolução para transformadas de Fourier [25]:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]. \quad (3.27)$$

Tomando  $g(t) = f^*(-t)$ , a transformada de Fourier  $\mathcal{F}[g]$  é

$$\mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[f^*(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-t)e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-i\omega t} dt = (\mathcal{F}[f(t)])^*, \quad (3.28)$$

de forma que a Equação 3.27 fica:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f(t)] (\mathcal{F}[f(t)])^* = |\mathcal{F}[f(t)]|^2. \quad (3.29)$$

Ao substituir  $g(t) = f^*(-t)$  e usar a definição da integral de convolução:

$$\mathcal{F} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t') f^*(t' - t) dt' \right] = |\mathcal{F}[f(t)]|^2. \quad (3.30)$$

Agora basta fazer  $t' \rightarrow t' + t$ , e usar  $\langle f^*(t)f(t+t') \rangle$  para representar a *função de autocorrelação* que aparece entre colchetes para obter a forma final do teorema:

$$\mathcal{F} [\langle f^*(t)f(t+t') \rangle] = |\mathcal{F}[f(t)]|^2. \quad (3.31)$$

O teorema de Wiener-Khinchin pode usado para calcular o espectro de ruído associado a uma variável estacionária  $i(t)$ . Variáveis desse tipo possuem média  $\langle i(t) \rangle$  constante, e suas

funções de correlação obedecem:

$$G(t, t') = \langle i(t)i(t') \rangle = \langle i(0)i(\tau) \rangle = G(0, \tau) \quad \text{com } \tau = t - t' \quad (3.32)$$

ou seja,  $G(t, t')$  é invariante sob translação. Essa propriedade produz um resultado interessante quando calcula-se a função de autocorrelação de  $i(\omega) = \mathcal{F}[i(t)]$

$$\langle i(\omega)i(\omega') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, dt' \langle i(t)i(t') \rangle e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'}. \quad (3.33)$$

Sabendo que a transformada de Fourier de  $e^{i\omega' t}$  é  $2\pi\delta(\omega - \omega')$ , e combinando esse resultado com a substituição proposta na Equação 3.32, é fácil ver que a função de autocorrelação da transformada de uma variável estacionária é:

$$\langle i(\omega)i(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, G(0, \tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (3.34)$$

Mas pelo resultado anterior, a transformada de Fourier da função de autocorrelação  $G(0, \tau)$  dá a densidade espectral de energia  $S_p(\omega)$  (ou *espectro de potência*) da variável estacionária, portanto

$$S_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, G(0, \tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (3.35)$$

Se escrevermos  $i(t) = \langle i \rangle + \delta i(t)$  como uma média e uma flutuação ao seu redor, podemos mostrar que

$$S_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \langle [\langle i \rangle + \delta i(0)][\langle i \rangle + \delta i(t)] \rangle e^{-i\omega\tau}, \quad (3.36)$$

pela definição de uma variável estacionária, a média  $\langle i \rangle$  é uma constante, e as funções de autocorrelação entre média e flutuação são nulas, de forma que

$$S_p(\omega) = 2\pi\delta(\omega)\langle i \rangle^2 + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \langle \delta i(0)\delta i(\tau) \rangle e^{-i\omega\tau} = 2\pi\delta(\omega)\langle i \rangle^2 + S(\omega). \quad (3.37)$$

Então  $S(\omega)$  é definido como o espectro de ruído da variável estacionária  $i(t)$ .

# Circuito para Fotodeteccção

---

Nas seções anteriores, foi mostrado que a caracterização do ruído quântico presente na luz exige detectores com ruído escuro pequeno quando comparado ao limite quântico padrão. Neste capítulo são calculadas expressões analíticas para o espectro de ganho e ruído de um circuito fotodetector baseado em um amplificador de transimpedância [26]. Os resultados serão utilizados para estimar a *shot noise clearance* esperada em função dos parâmetros do circuito.

## 4.1 Análise do Ganho

A conversão de luz em corrente elétrica no fotodetector ocorre por efeito fotoelétrico. A luz incidente no fotodiodo excita elétrons para a banda de condução, e o campo elétrico presente na região de depleção os conduz em direção ao cátodo, dando origem à fotocorrente. A aquisição de dados, no entanto, é feita em tensão, e portanto é necessário adicionar um circuito para realizar essa conversão. A maneira usual de realizar a conversão seria utilizando uma resistência de carga, como em um amperímetro típico. Porém, nesse caso teríamos um circuito com ganho de transimpedância inversamente proporcional à largura de banda, dificultando a otimização. Ao invés disso, usaremos um amplificador de transimpedância ativo, que realiza a conversão entre e corrente e tensão com bom equilíbrio entre largura de banda e ganho de transimpedância.

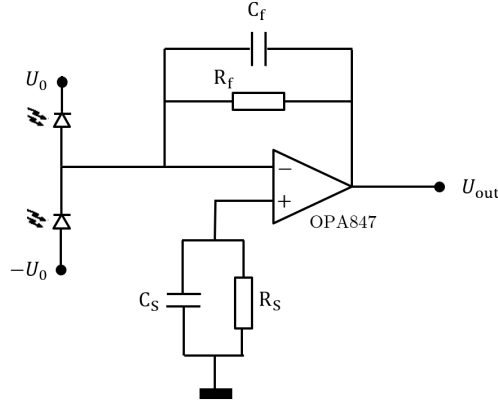


Figura 4.1: Circuito para detecção óptica balanceada baseado em amplificador de transimpedância.

A detecção balanceada garante a remoção da componente DC do sinal incidente. Ao dispôr os fotodiodos como no circuito da Figura 4.1, o sinal que chega ao circuito é composto da subtração das fotocorrentes que fluem por ambos os diodos. Alternativamente, a componente *DC* pode ser removida ao adicionar um resistor conectado à saída do fotodiodo ao terra e um capacitor entre o fotodiodo e o amplificador operacional. A Figura 4.1 mostra o circuito projetado segundo esses critérios. A associação de  $R_S$  e  $C_S$  forma um filtro para compensar o *offset* DC do amplificador operacional.

Para analisar o ganho do circuito, primeiro analisamos as impedâncias complexas de cada bloco. O bloco de “feedback” é composto pelo capacitor  $C_f$  e o resistor  $R_f$ . O bloco de entrada (indicado pelo subscrito “in”) é composto pelas capacitâncias  $C_{PD}$  dos dois fotodiodos, e da entrada inversora do amplificador operacional. Esse último bloco não corresponde a elementos do circuito, mas sim a uma forma de modelar as impedâncias associadas aos dispositivos reais.

Para o bloco de “feedback”, a impedância complexa é dada por

$$\frac{1}{Z_f} = \frac{1}{R_f} + i\omega C_f, \quad (4.1)$$

e a impedância dos capacitores no bloco de entrada (todos em paralelo é dada por

$$\frac{1}{Z_{in}} = i\omega(2C_{PD} + C_{A1}). \quad (4.2)$$

A lei de Ohm dá a corrente que circula pelo resistor de *feedback*  $R_F$ ,

$$I(\omega) = \frac{1}{Z_{in}}U_- + (U_- - U_{out})\frac{1}{Z_f}. \quad (4.3)$$

A resposta espectral do circuito está contida na amplificação  $A(\omega)$  do op-amp, que é dada por [27]

$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + i\frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (4.4)$$

Substituindo na Equação 4.3, a corrente será dada por

$$I(\omega) = \frac{1}{Z_{in}}U_- + A(\omega)U_- \frac{1}{Z_f} \quad (4.5)$$

Partindo dessa expressão, é fácil encontrar a razão entre a tensão de saída e a tensão sobre o resistor de descarga. Após algumas simplificações, teremos

$$\frac{U_{out}}{I(\omega)R_f} = -\frac{1/R_f}{\frac{1}{Z_f} + \frac{1}{A(\omega)}\left(\frac{1}{Z_{in}} + \frac{1}{Z_f}\right)}. \quad (4.6)$$

De forma que o módulo quadrado do ganho é dado por

$$|G(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (p^2 - 2)\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4} \quad (4.7)$$

onde os parâmetros  $p$  e  $\omega_c$  foram introduzidos por simplicidade, eles são definidos por

$$p = \left(R_f C_f + \frac{1}{A_0 \omega_0}\right) \omega_c \quad \text{e} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{A_0 \omega_0}{R_f (2C_{PD} + C_f + C_{A1})}} \quad (4.8)$$

O papel do parâmetro  $p$  fica claro a partir da análise da Figura 4.2. Se a capacitância  $C_f$  é ajustada para obter  $p = \sqrt{2}$ , então o segundo termo do denominador se anula. Nesse caso, o ganho é praticamente constante para frequências menores do que a frequência de corte  $\omega_c$ .

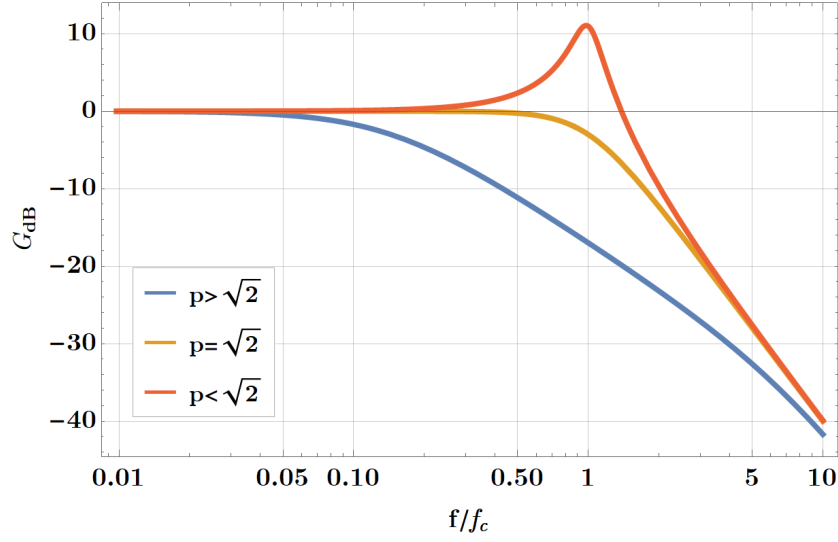


Figura 4.2: Ganho em escala decibel em função da frequência relativa à frequência de corte.

O ganho  $A_0$  do amplificador operacional é, em geral, muito alto. Se a capacitância  $C_f$  é muito baixa, então  $p$  é pequeno, e o ganho decresce mesmo para frequências muito menores do que  $\omega_c$ . Por outro lado, se a capacitância é alta, então o segundo termo do denominador é positivo, e o ganho apresenta um pico.

Note que a frequência  $\omega_c$  corresponde à frequência de corte quando  $p = \sqrt{2}$ . É útil reescrever a definição apresentada na Equação 4.8 como um produto  $\omega_c^2 = (A_0\omega_0)\omega_T$ , onde  $\omega_T$  é a frequência de corte associada a  $R_f$  e à capacitância total, e  $A_0\omega_0$  é o produto ganho-largura de banda do amplificador operacional.

A Equação 4.7 define o espectro de ganho do fotodetector, e é essencial para obter o espectro de ruído, e para estimar a *shot noise clearance*.

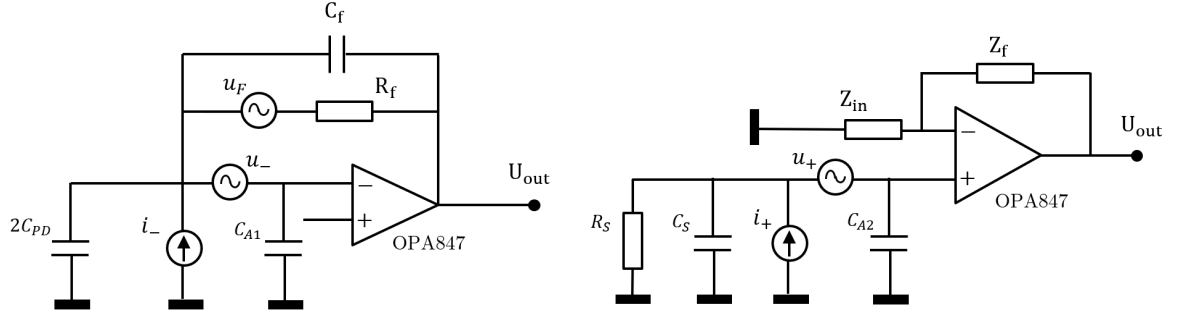


Figura 4.3: Diagrama com componentes para modelo de ruído de tensão e corrente no amplificador de transimpedância. Esses parâmetros são fornecidos pelo fabricante. Parâmetro  $p$  está definido na Equação 4.8.

## 4.2 Análise do Ruído

Em seguida, analisamos o ruído presente nos sinais. Se  $\Delta^2 U_{out}(\omega)$  representa o ruído total no sinal de saída, então o ruído acima do eletrônico  $\Delta^2 U_e(\omega)$  é dado por [26].

$$\Delta^2 U_{out}(\omega) - \Delta^2 U_e(\omega) = R_f^2 |G(\omega)|^2 \Delta^2 I. \quad (4.9)$$

Para que seja possível escrever uma expressão analítica para a “clearance”, é preciso obter uma expressão para o ruído eletrônico. Para isso, é útil desenhar os diagramas mostrados na Figura 4.3, onde os ruídos em tensão e corrente das portas do amplificador operacional e do resistor de “feedback” são modelados pelas fontes de tensão ou corrente  $u_{\pm}$ ,  $i_{\pm}$  e  $u_f$ , que dependem de parâmetros informados pelo fabricante.

Se os campos incidentes em cada fotodetector recebem partes iguais da potência total  $P$ , a detecção balanceada garante que o ruído presente na corrente  $I$  é o ruído do campo de vácuo discutido na Seção 3.2 [22], dado por

$$\Delta^2 I = \frac{2\eta e^2 P}{\hbar \omega_{opt}} \Delta \omega, \quad (4.10)$$

onde  $\eta$  é a eficiência quântica do fotodetector,  $\omega_{opt}$  é a frequência da luz incidente e  $\Delta \omega$  é a largura de banda espectral. A análise do circuito na Figura 4.3, aplicando os mesmos métodos

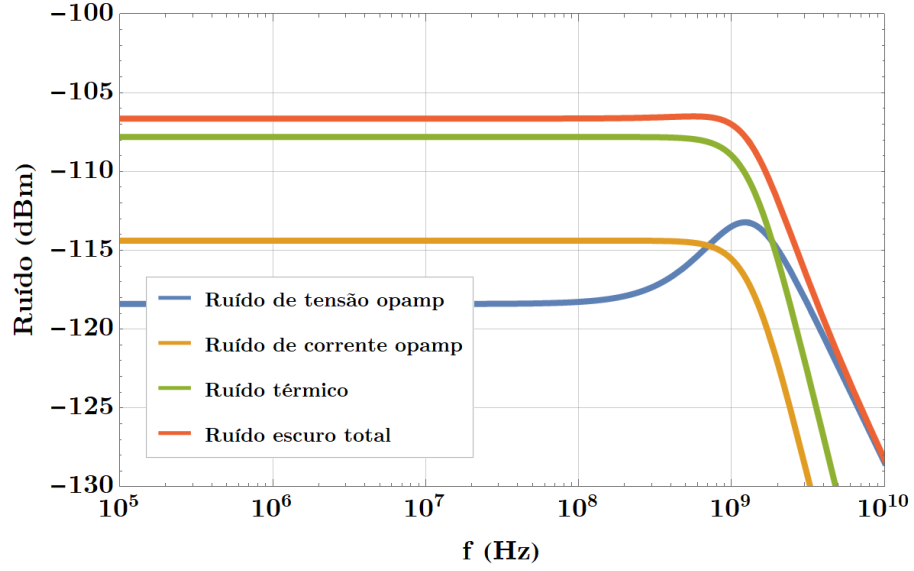


Figura 4.4: Contribuições de Ruído no Amplificador de Transimpedância

que usamos para o circuito da Figura 4.1, dá a seguinte expressão para o ruído eletrônico [26]:

$$\frac{\Delta^2 U_e}{|G(\omega)|^2} = R_f^2 (A + B\omega^2) \Delta\omega \quad \text{com} \quad (4.11a)$$

$$A = \frac{\Delta^2 u_T}{R_f^2} + \Delta^2 i_- + \frac{4k_B T}{R_f} \quad B = (2C_{PD} + C_f + C_{A1})^2 \Delta^2 u_T \quad (4.11b)$$

sendo  $\Delta^2 u_T = [\Delta^2 u_+ + \Delta^2 u_-]$  o ruído de tensão total introduzido pelo amplificador operacional,  $\Delta^2 i_-$  o ruído de corrente da porta inversora, e o termo dependente da temperatura  $T$  dá o ruído térmico do resistor de *feedback*.

Os espectros de cada termo que contribui para o ruído eletrônico são mostrados na Figura 4.4. Para o amplificador operacional OPA847, os parâmetros de ruído utilizados foram [26]

$$\sqrt{\Delta^2 u_a} \approx 0.85 \frac{nV}{\sqrt{Hz}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\Delta^2 i_-} \approx 2.7 \frac{pA}{\sqrt{Hz}}.$$

E os componentes do bloco de *feedback* são  $R_f = 0.5 \text{ k}\Omega$  e  $C = 1 \text{ pF}$ .

Conforme discutido anteriormente, o principal parâmetro de otimização do circuito é a *shot noise clearance*. Podemos utilizar as expressões que encontramos para o ruído total, e para o



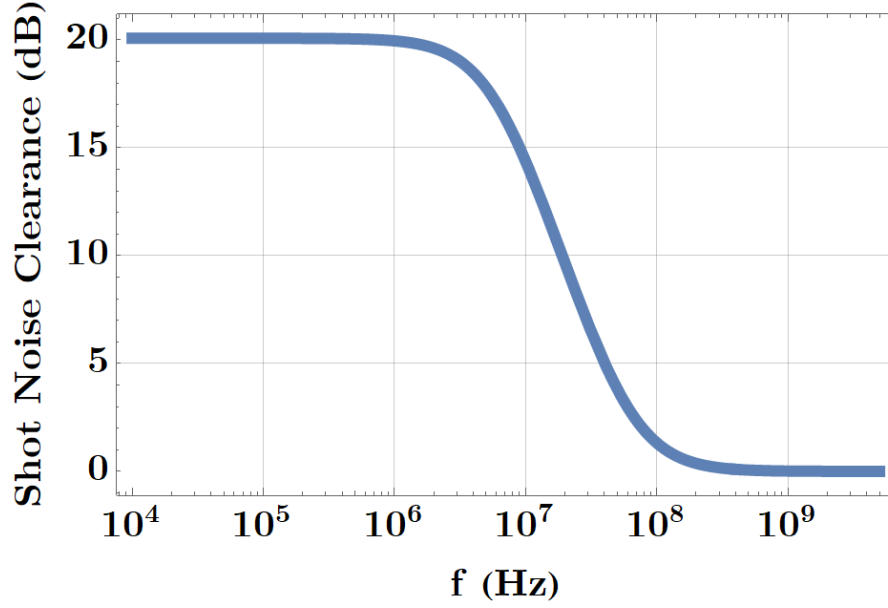


Figura 4.5: *Shot noise clearance* em função da frequência, com potência  $P = 10.6$  mW e responsividade  $1.23$  A/W.

*shot* noise, dadas nas Equações 4.9 e 4.10 para escrever:

$$\text{SNC} = \frac{\Delta^2 U_{out}}{\Delta^2 U_e} = \frac{\Delta^2 U_e + R_f^2 |G(\omega)|^2 \Delta^2 I}{\Delta^2 U_e} \quad (4.12)$$

Substituindo com as Equações 4.7 e 4.11a demonstradas para os espectros de ganho e ruído, teremos

$$\text{SNC} = 1 + \left( \frac{2\eta e^2 P}{\hbar \omega_{opt}} \right) \frac{1}{A + B\omega^2} \quad (4.13)$$

No caso ideal, com eficiência quântica  $\eta = 1$ , a responsividade  $R(\lambda) = \eta e \lambda / hc$  é linear com o comprimento de onda  $\lambda$  [28]. Para um fotodiodo típico, a responsividade deve ser pouco maior do que 1 na região do infravermelho próximo, e pouco menor do que 1 no infravermelho médio.

A Figura 4.5 mostra a *shot noise clearance* em função da frequência no circuito fotodetector. Foi considerada uma potência de 10.6 mW, e uma responsividade  $R \approx 1.23$  A/W. A simulação mostra uma *clearance* de  $\approx 19.6$  dB para frequências baixas.

## Conclusões

---

Neste trabalho, uma revisão de conceitos básicos de óptica quântica foi apresentada. Estados comprimidos e emaranhados foram introduzidos, e suas propriedades estatísticas foram discutidas. A representação no espaço de fase foi obtida a partir das funções de quasiprobabilidade de Wigner, que nos permitiu definir como *gaussianos* os estados com funções de Wigner gaussianas, inteiramente caracterizados por uma matriz de covariância.

Em seguida, foi abordado o método de fotodetecção. Mostramos que a detecção homodina balanceada permite que fotodetectores que medem intensidade extraiam informações a respeito da fase de campos elétricos incidentes. Observamos que essa técnica permite a medição seletiva dos ruídos presentes em cada quadratura do campo medido, amplificados através do batimento com um campo óptico mais intenso. Também mostramos que a detecção homodina pode ser usada para reconstruir a função de Wigner de um estado quântico arbitrário, através da tomografia homodina.

Finalmente, um circuito fotodetector baseado em um amplificador de transimpedância foi apresentado e seus espectros de ganho e ruído foram calculados, e a partir deles, o espectro da *shot noise clearance*. Para frequências abaixo do corte, estimou-se uma *clearance* de 19,6 dB para responsividade 1,23 A/W.

# Bibliografia

---

- [1] Gerardo Adesso, Sammy Ragy e Antony R Lee. *Continuous variable quantum information: Gaussian states and beyond*. Rel. técn. 2014.
- [2] Xiang-Bin Wang et al. *Quantum information with Gaussian states*. Rel. técn. 2008.
- [3] Alessandro Ferraro et al. *Gaussian states in continuous variable quantum information*. Rel. técn. 2005.
- [4] Rodney Loudon. *The Quantum Theory of Light*. 3rd ed. New York: Oxford University Press, 2000, pp. -.
- [5] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Cambridge University Press, jun. de 2017.
- [6] J. J. Sakurai e Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, set. de 2017.
- [7] D. F. Walls e Gerard J. Milburn. *Quantum Optics*. Ed. por D.F. Walls e Gerard J. Milburn. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [8] Marlan O. Scully e M. Suhail Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, set. de 1997.

- 
- [9] Ulf Leonhardt. *Measuring the Quantum State of Ligth*. 1st. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997.
  - [10] Jinglei Zhang. “Quantum Measurement and Preparation of Gaussian States”. Tese de dout. Aarhus University, abr. de 2018.
  - [11] Stefano Olivares. *Quantum optics in the phase space A tutorial on Gaussian states*. Rel. técn. 2011.
  - [12] Antoine Royer. “Measurement of quantum states and the Wigner function”. Em: *Foundations of Physics* 19.1 (jan. de 1989), pp. 3–32.
  - [13] D. T. Smithey et al. “Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum”. Em: *Physical Review Letters* 70.9 (mar. de 1993), pp. 1244–1247.
  - [14] Felipe Alexandre Silva Barbosa. “Robustez do emaranhamento em variáveis contínuas e fotodetecção de feixes intensos no domínio espectral”. Tese de dout. São Paulo: Universidade de São Paulo, jun. de 2013.
  - [15] Horace P. Yuen e Vincent W. S. Chan. “Noise in homodyne and heterodyne detection”. Em: *Optics Letters* 8.3 (mar. de 1983), p. 177.
  - [16] A I Lvovsky e M G Raymer. *Continuous-variable optical quantum state tomography*. Rel. técn. 2008.
  - [17] K Vogel e H Risken. “Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase”. Em: *Phys. Rev A* 40 (set. de 1989).
  - [18] Hans-A Bachor e Timothy Ralph. *A guide to experiments in quantum optics*. 2nd. Weinheim: Wiley-VHC, 2004.
  - [19] Norbert Wiener. “Generalized harmonic analysis”. Em: *Acta Mathematica* 55.1 (dez. de 1930), pp. 117–258.

- 
- [20] C. E. Shannon. “A Mathematical Theory of Communication”. Em: *Bell System Technical Journal* 27.4 (1948), pp. 623–656.
  - [21] Vladimir B. Braginsky, Farid Ya Khalili e Kip S. Thorne. *Quantum Measurement*. Cambridge University Press, set. de 1992.
  - [22] Peter J. Winzer. “Shot-noise formula for time-varying photon rates: a general derivation”. Em: *Journal of the Optical Society of America B* 14.10 (out. de 1997), p. 2424.
  - [23] Daniel Adam Steck et al. *Quantum and Atom Optics Acknowledgements: Thanks to*. Rel. técn. 2012.
  - [24] D.C. Champeney. *A handbook of Fourier theorems*. 1st. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
  - [25] George B. Arfken, Hans J. Weber e Frank E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Inc., 2013.
  - [26] A. V. Masalov, A. Kuzhamuratov e A. I. Lvovsky. “Noise spectra in balanced optical detectors based on transimpedance amplifiers”. Em: *Review of Scientific Instruments* 88.11 (nov. de 2017), p. 113109.
  - [27] Sedra Smith. *Microelectronic Circuits*. 5th edition. New York: Oxford University Press, 2005.
  - [28] Chris Hicks et al. *Quantum efficiency of silicon photodiodes in the near-infrared spectral range*. Rel. técn. 2003.