

# Relatório do EP 1 de MAC0209

Aurea Maria Emiko Hariki, 9298594

Derick William de Moraes Frias, 11207623

Felipe Pereira Ramos Barboza, 11820322

Fernando Yang, 13671744

Marcelo Nascimento dos Santos Junior, 11222012

14 de maio de 2023

## **Resumo**

Exercício de modelagem com experimentos reais sobre queda livre e pêndulo.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Cronograma</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Dados e métodos</b>	<b>3</b>
4.1	Queda Livre . . . . .	6
4.2	Pêndulo . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Resultados experimentais</b>	<b>7</b>
5.1	Queda Livre . . . . .	8
5.2	Pêndulo . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>17</b>
6.1	Queda Livre . . . . .	18
6.2	Pêndulo . . . . .	20

# 1 Introdução

Nesta disciplina, estudamos a modelagem de sistemas reais a partir de fenômenos físicos, fórmulas matemáticas e algoritmos. Este exercício programa vai analisar dois fenômenos: Queda livre e Pêndulos. Realizamos experimentos, coletamos dados utilizando o aplicativo Physics Toolbox e analisamos os resultados obtidos.

## 2 Objetivos

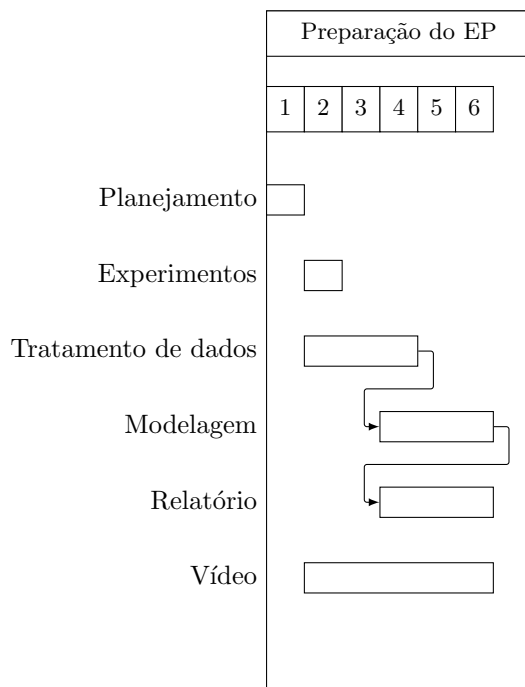
Ao simular fenômenos físicos, desenvolver algoritmos e estudar os resultados obtidos, utilizamos as ferramentas e aprendizado obtidos nas aulas e nos materiais auxiliares e gostaríamos que se comportassem de forma similar aos modelos ideais.

Preparamos também um vídeo sobre o desenvolvimento do projeto e os experimentos:

<https://www.youtube.com/watch?v=qw1PObkObhY>.

## 3 Cronograma

Durante as semanas disponíveis para a realização do EP, nosso grupo se organizou da seguinte forma: a primeira semana foi reservada para formação do grupo e planejamento do cronograma; na segunda semana realizamos e gravamos os experimentos, a partir desse momento começamos o tratamento dos dados e estudo da parte teórica e prática para desenvolver os algoritmos, além disso, também gravamos material auxiliar para o vídeo e começamos a edição. Então, começamos a fazer a modelagem dos fenômenos e o relatório.



## 4 Dados e métodos

### Materiais:

Corda

Celular de 179g

Estojo de massa desconsiderada

### Metodologia:

- O celular com o aplicativo Physic ToolBox rodando foi colocado dentro de um estojo. O estojo com o celular dentro foi amarrado a uma corda e a sua outra extremidade foi amarrada a um ponto fixo que deixava o estojo com celular suspenso. Dessa forma, ao realizar os experimentos o celular não era danificado.
- Antes de realizar o experimento, balançamos o celular algumas vezes, esperamos alguns segundos e em seguida o soltamos. Ao terminar o experimento, balançamos o celular novamente.

### Dados e modelagem:

O aplicativo utilizado fornece os valores de  $\frac{F_n}{P}$ , onde  $F_n$  é a força normal na direção de um dos eixos  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , e  $P$  é a força peso do objeto. Portanto, a interpretação adequada para os dados obtidos é que eles representam a aceleração normal exercida sobre o celular, em unidade de  $G$ .

Os dados de cada experimento foram tratados, de maneira a obter uma coleção de dados boa o suficiente para estimar os parâmetros desejados. Para isso, foram removidos os dados do acelerômetro antes do início do experimento. Para a queda-livre, foi observado o gráfico do acelerômetro e selecionamos o intervalo de tempo onde ocorreu a queda. Já no experimento do pêndulo, encontramos o início do movimento e arbitramos um fim do experimento comum, que ocorre depois de várias oscilações do pêndulo.

Para o experimento da queda-livre, o movimento do corpo foi modelado pela equação diferencial:

$$\ddot{y} = g - \frac{k}{m}\dot{y}^2. \quad (1)$$

Onde  $y$  denota a posição do objeto na vertical,  $g$  denota a gravidade,  $m$  a massa do objeto e  $k$  o coeficiente de atrito. A partir do método de euler e utilizando os dados experimentais, podemos traçar a trajetória da velocidade e da posição do objeto em função do tempo:

$$y_{t+1} = y_t + \dot{y}_t \cdot dt$$

$$\dot{y}_{t+1} = \dot{y}_t + \ddot{y}_t \cdot dt.$$

Após obter a aproximação da velocidade experimental, podemos substituí-la na equação (1), e assim obter o coeficiente de atrito  $k$ :

$$k_t = \frac{m(\ddot{y}_t - g)}{\dot{y}_t}.$$

O coeficiente  $k$  foi estimado tomando a média aritmética dos  $k_t$  obtidos. Após a estimação de  $k$ , foi realizada a simulação utilizando o método de euler, tomando a equação para a aceleração dada por (1).

No experimento do pêndulo, o movimento do corpo foi modelado pela equação diferencial:

$$\ddot{\theta} = \frac{-g}{L}\sin\theta - \frac{kL^2}{m}\dot{\theta}^2. \quad (2)$$

Onde  $\theta$  denota o ângulo da corda em relação ao eixo vertical e  $L$  denota o comprimento da corda. Como o corpo foi lançado na mesma posição da queda-livre, podemos aproveitar o coeficiente de atrito  $k$  obtido no experimento anterior, e utilizamos o método de euler para traçar as trajetórias simuladas do movimento pendular.

Para traçar as trajetórias experimentais de  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $x$  e  $y$ , interpretamos a aceleração normal obtida experimentalmente com o sentido radial, pois a única força exercida sobre o corpo (além do peso) é a tração do fio, que é sempre radial. O eixo que se alinha à tração, no nosso experimento, é o eixo  $y$  do celular. Então, o passo de euler testado foi:

$$x_{t+1} = x_t + \dot{x}_t \cdot dt$$

$$y_{t+1} = y_t + \dot{y}_t \cdot dt$$

$$\dot{x}_{t+1} = \dot{x}_t + \left(a_r \frac{x_t}{L}\right) dt$$

$$\dot{y}_{t+1} = \dot{y}_t + \left( g - a_r \frac{y_t}{L} \right) dt.$$

Onde  $a_r$  denota a aceleração radial, obtida experimentalmente.

Entretanto, em nossas tentativas, a aproximação das velocidade e posição do pêndulo em cada instante do tempo não apresentou o comportamento previsto.

## 4.1 Queda Livre

### Metodologia:

- O estojo com o celular dentro foi amarrado a uma corda.
- A outra extremidade da corda foi amarrada a uma barra de segurança na ponte da entrada do CCSL.
- A altura total da corda esticada era de 3.3m.
- O experimento consiste em soltar o celular e deixá-lo em queda livre.
- O experimento foi repetido 7 vezes.

## 4.2 Pêndulo

### Metodologia:

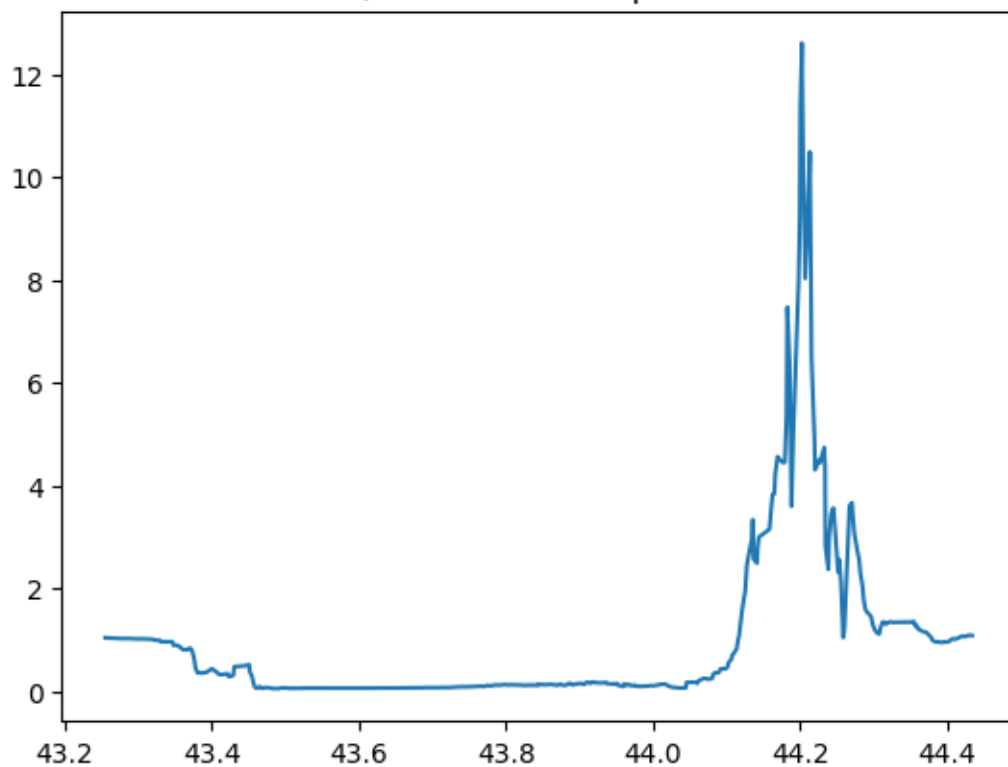
- O estojo com o celular dentro foi amarrado a uma corda.
- A outra extremidade da corda foi amarrada ao galho de um árvore localizada entre a FAUD e o IGc.
- A altura total da corda esticada era de 1m.
- O celular foi solto a partir de uma altura similar ao do ponto onde a corda foi presa à árvore, criando o movimento de pêndulo.
- O experimento foi repetido 5 vezes.

# 5 Resultados experimentais

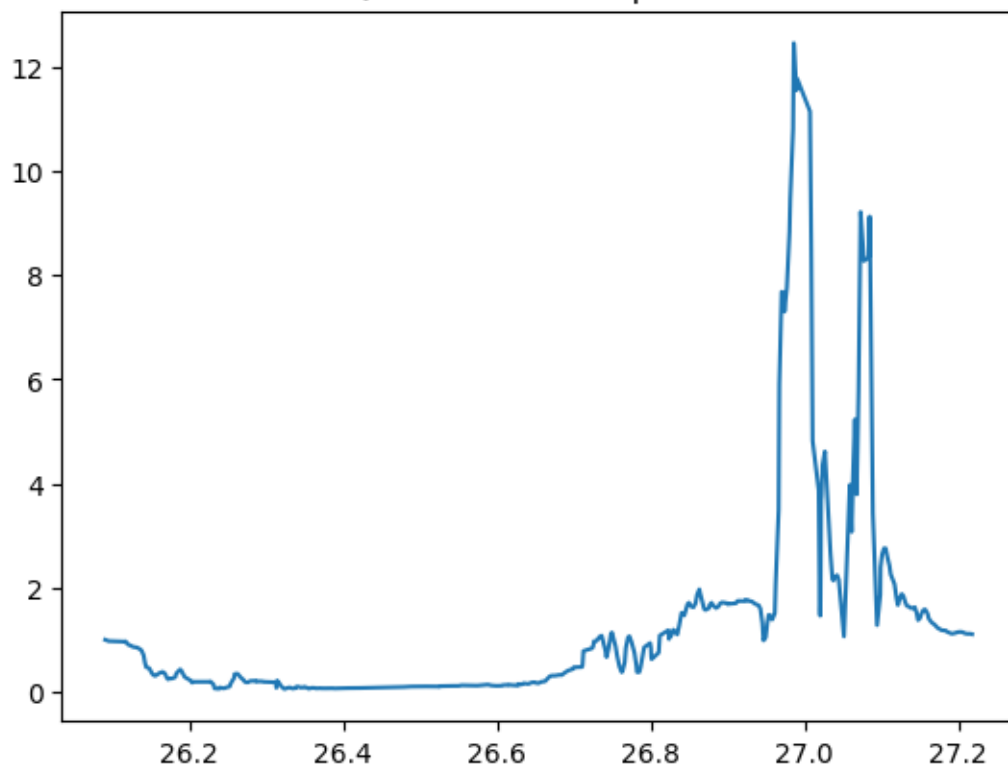
Geramos gráficos de cada experimento e do sinal médio de todas as repetições sobrepostas.

## 5.1 Queda Livre

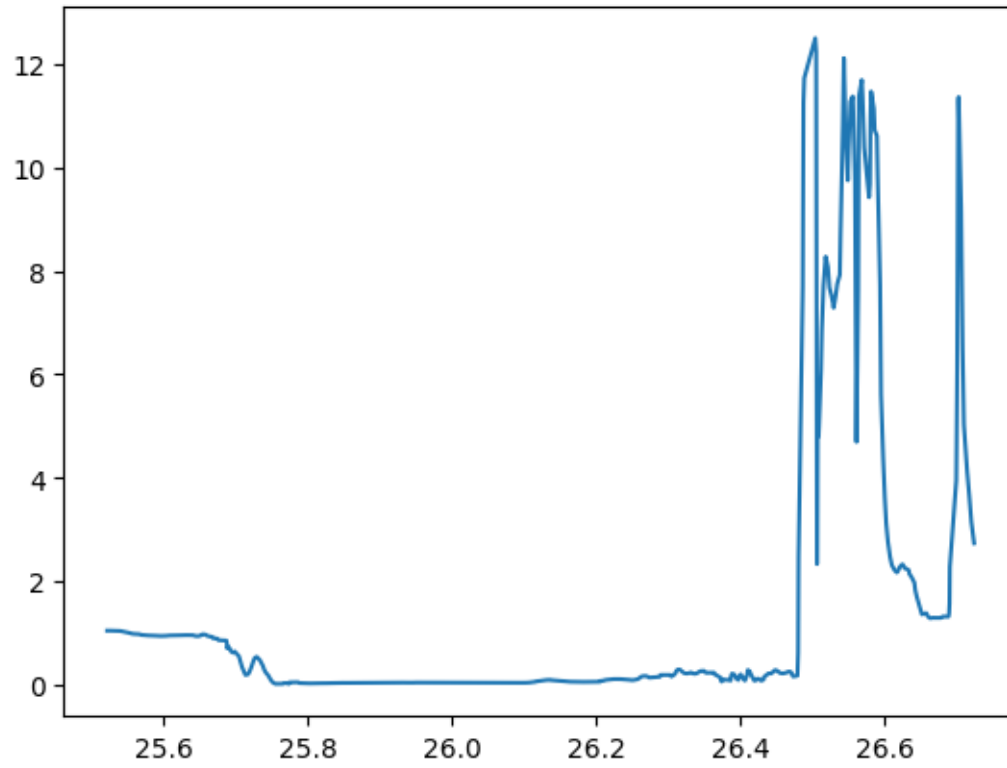
Queda Livre 1 ampliado



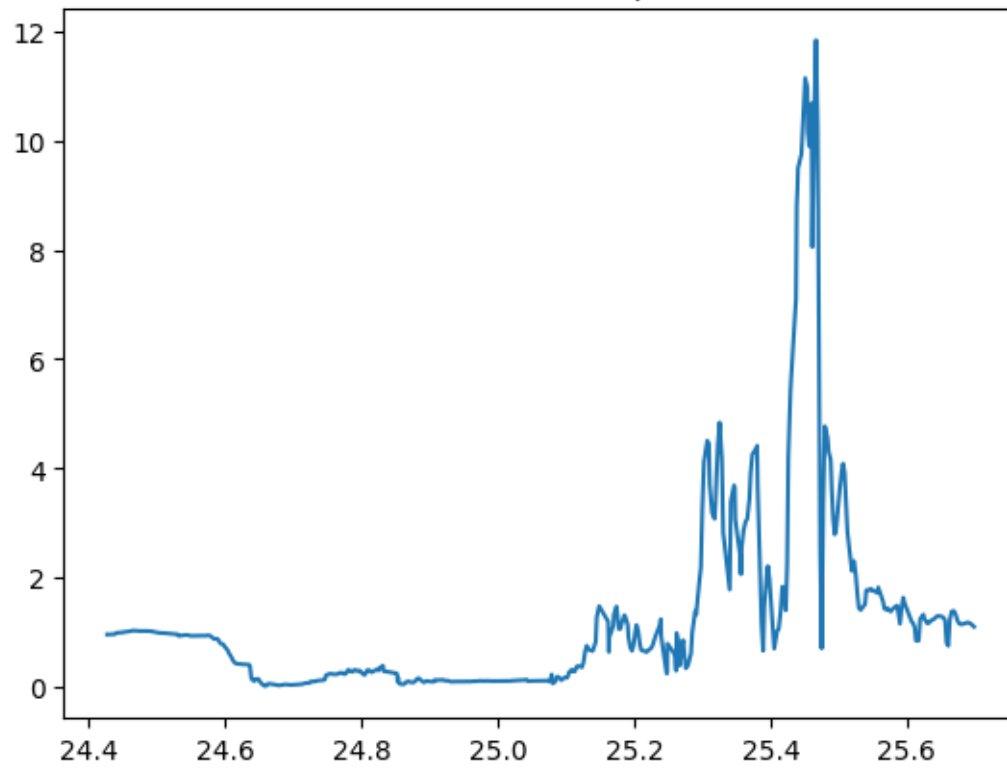
Queda Livre 2 ampliado



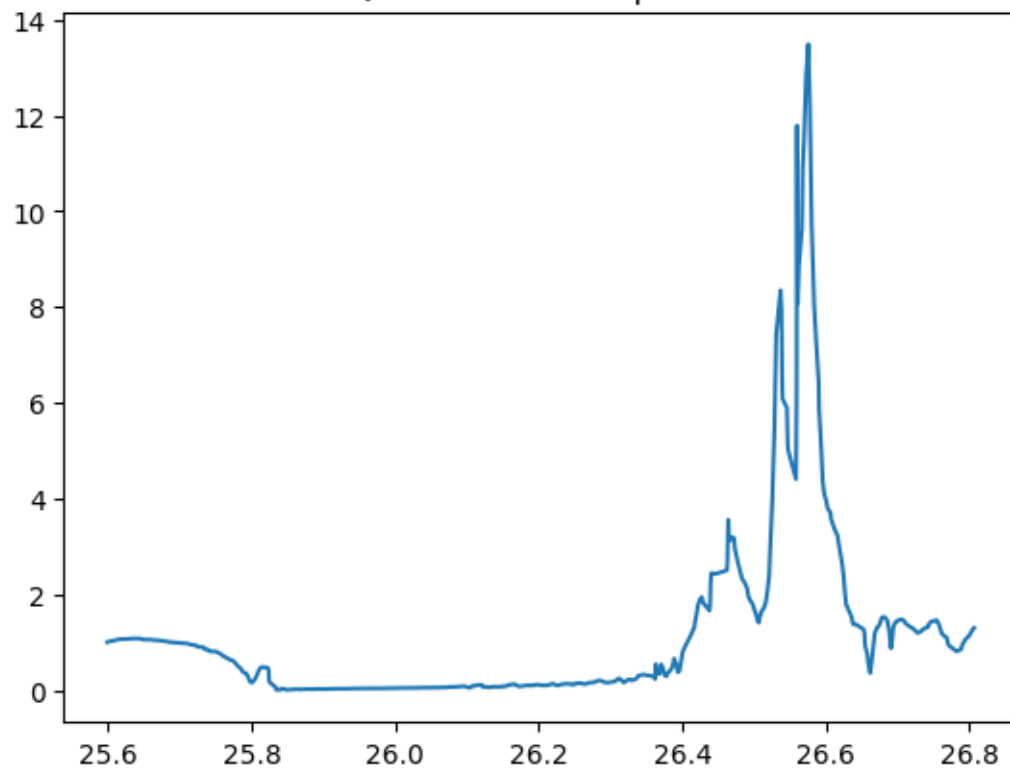
Queda Livre 3 ampliado



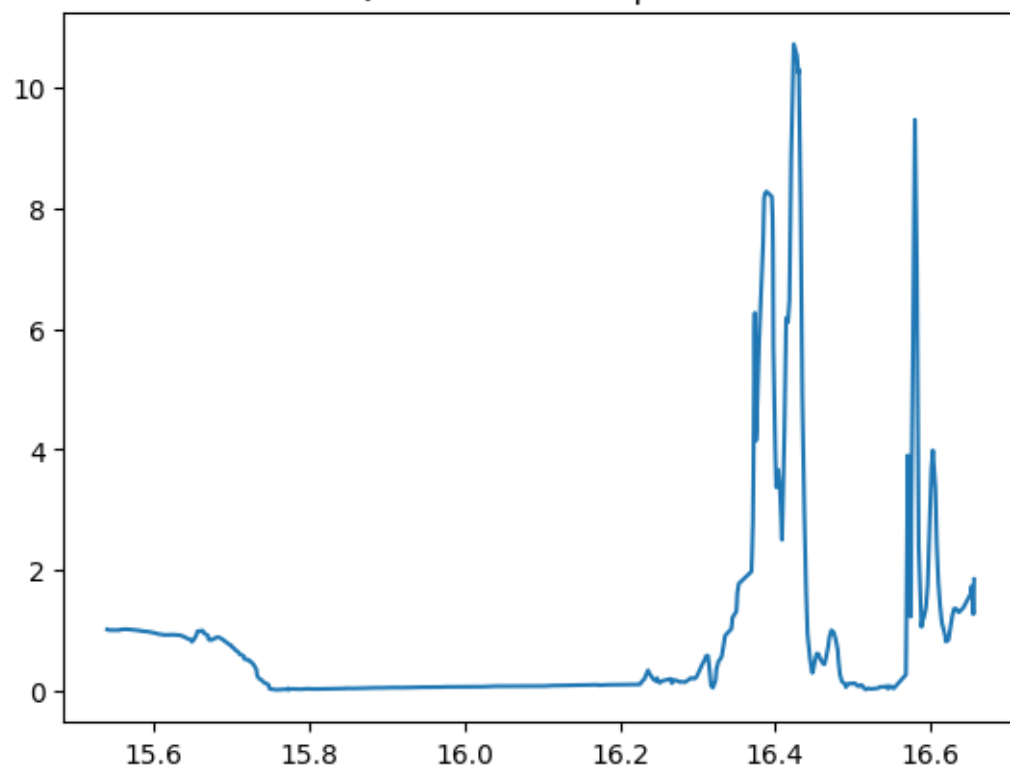
Queda Livre 4 ampliado



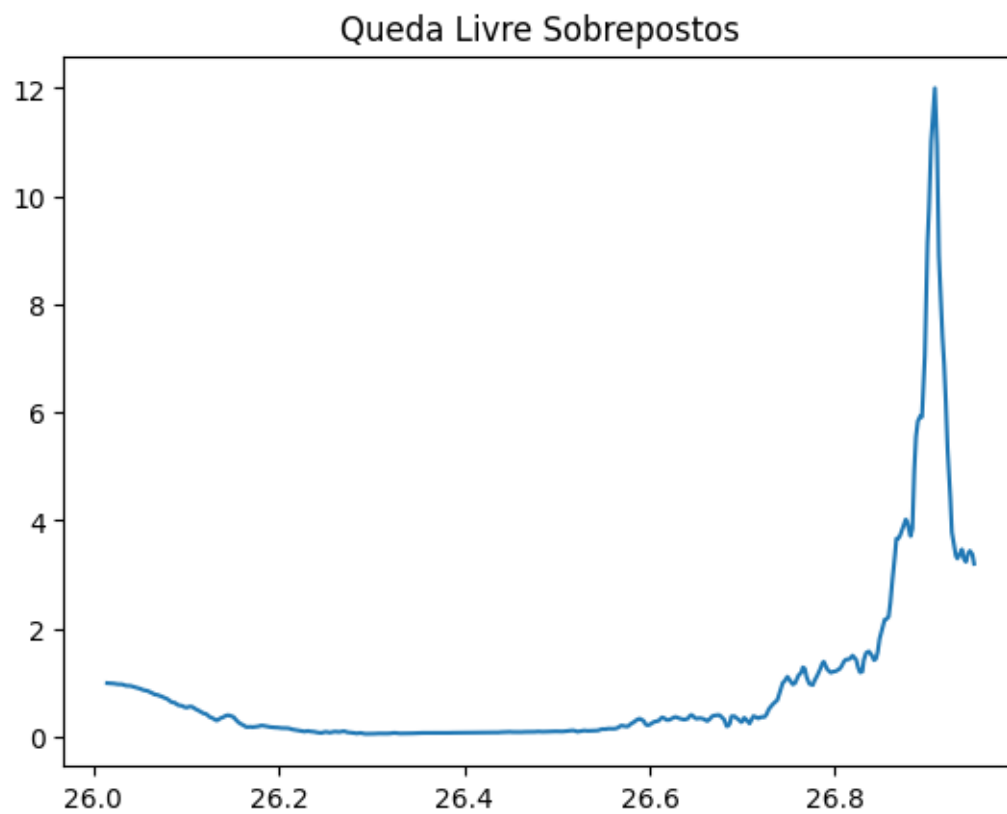
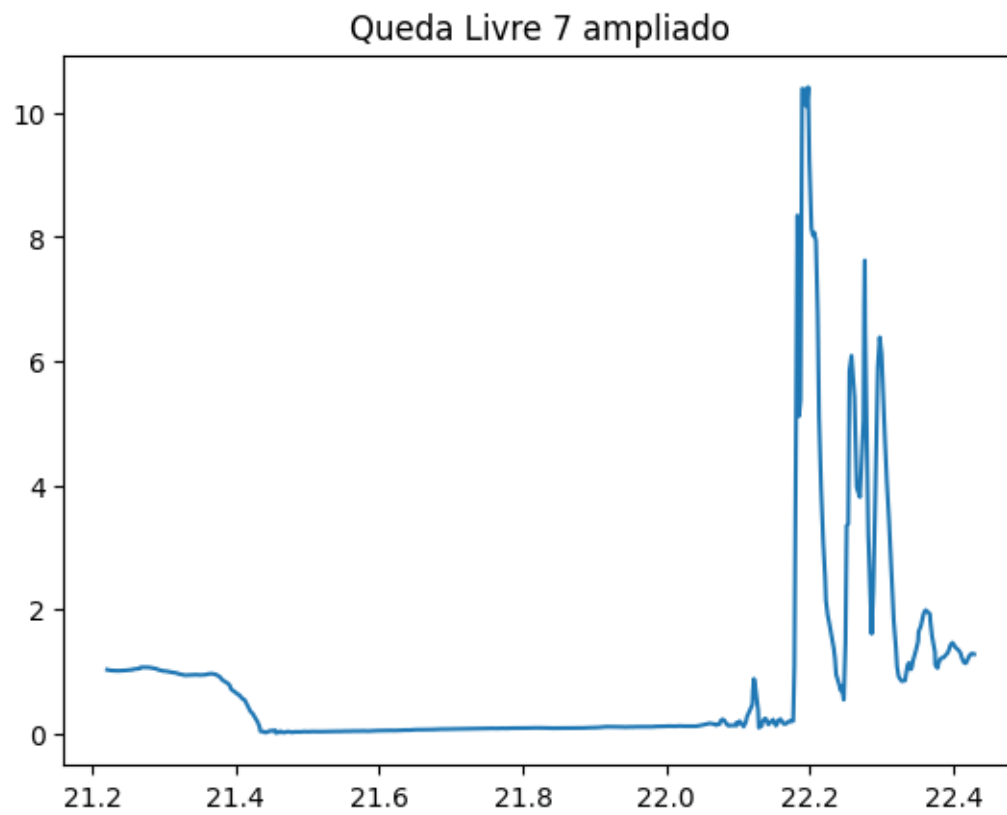
Queda Livre 5 ampliado



Queda Livre 6 ampliado



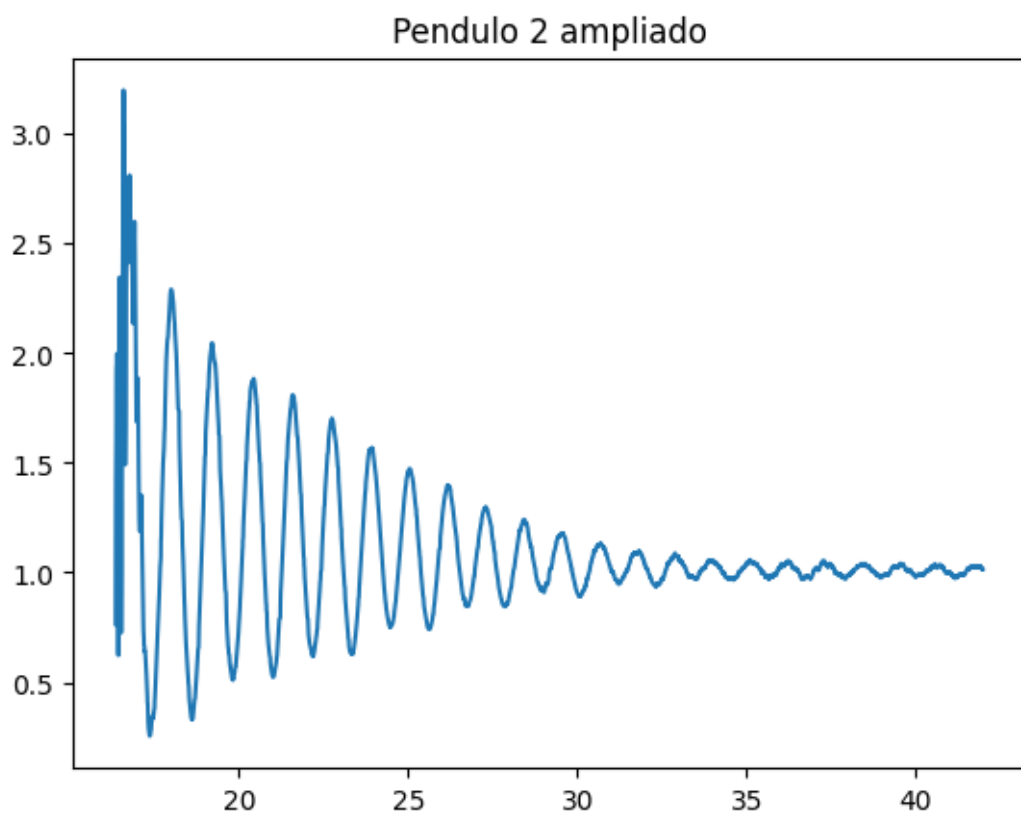
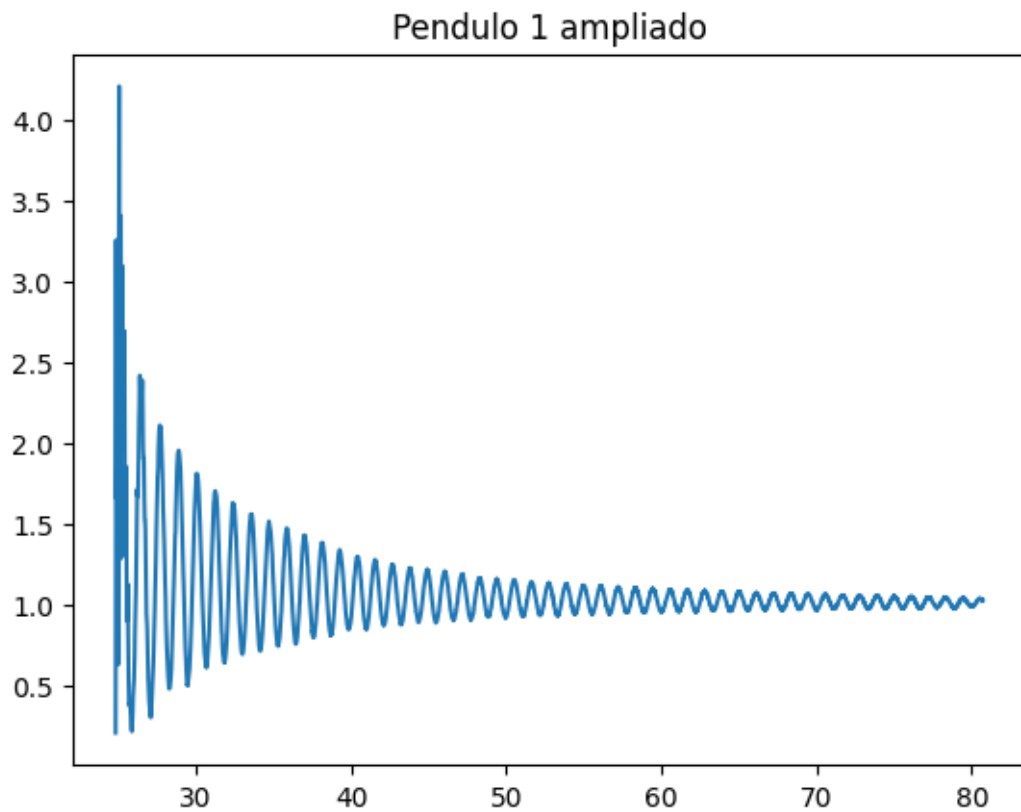




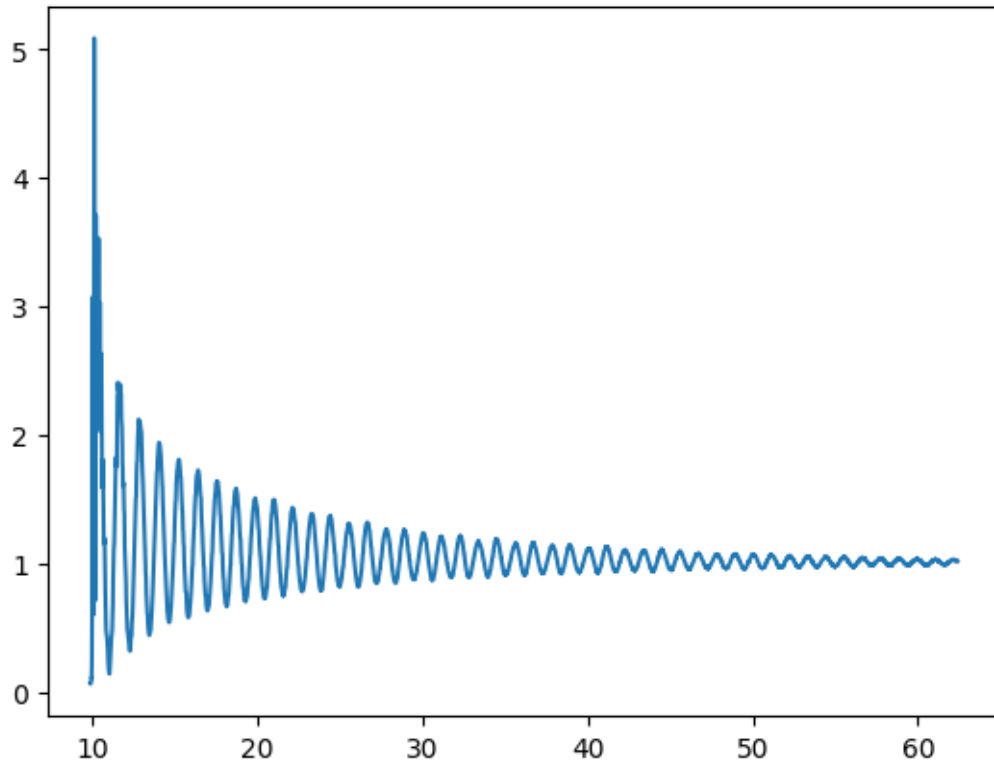
Note que, nos sinais de queda-livre, podemos observar uma inclinação da aceleração normal: Inicialmente é igual a zero, e cresce com a progressão do movimento. Este fenômeno acontece devido à força de atrito do ar, que em nosso modelo, é proporcional ao quadrado da velocidade. Os picos de

força, presentes nos finais do experimento, são causados pelo fim abrupto do movimento.

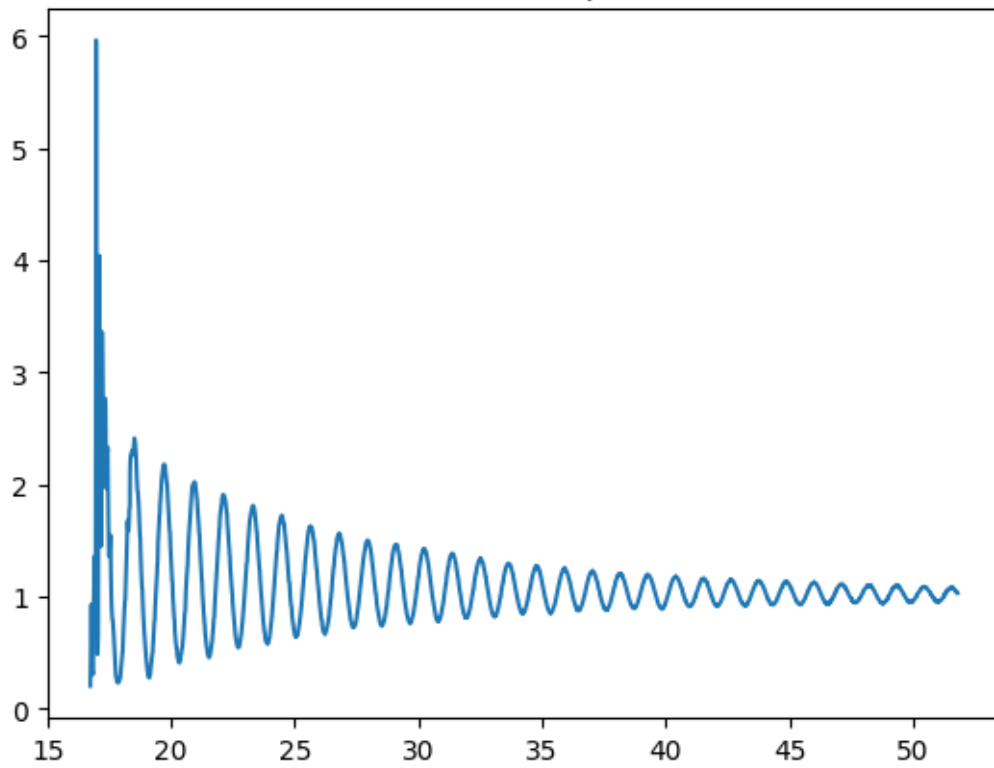
## 5.2 Pêndulo

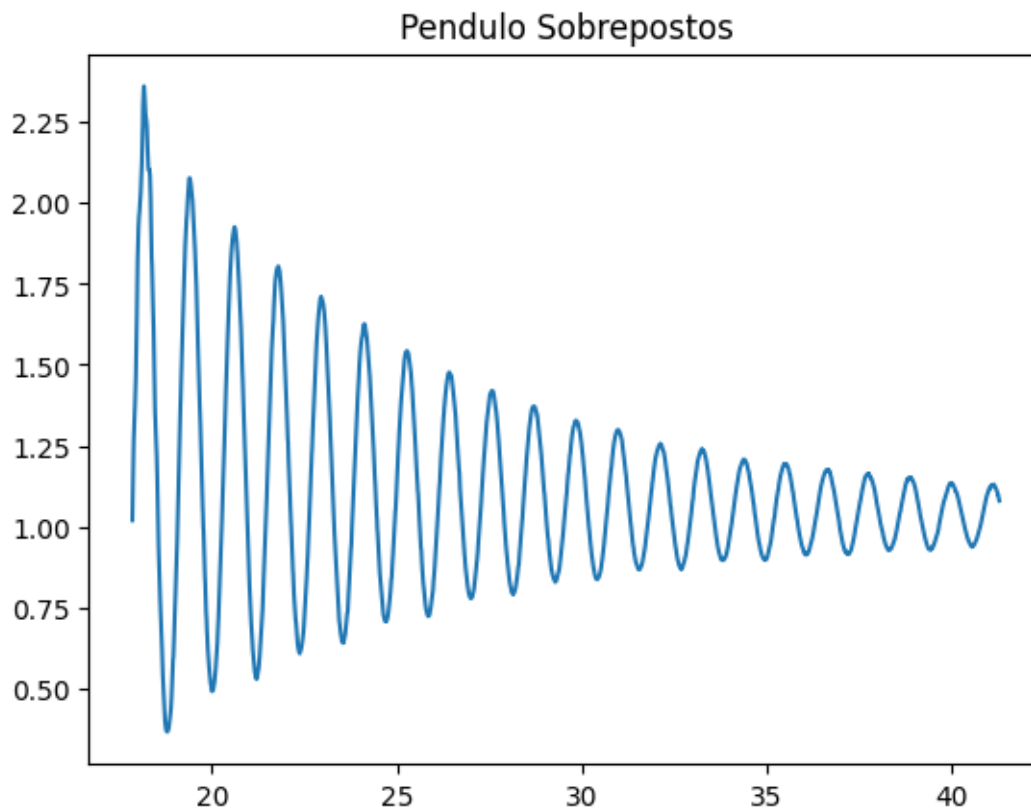
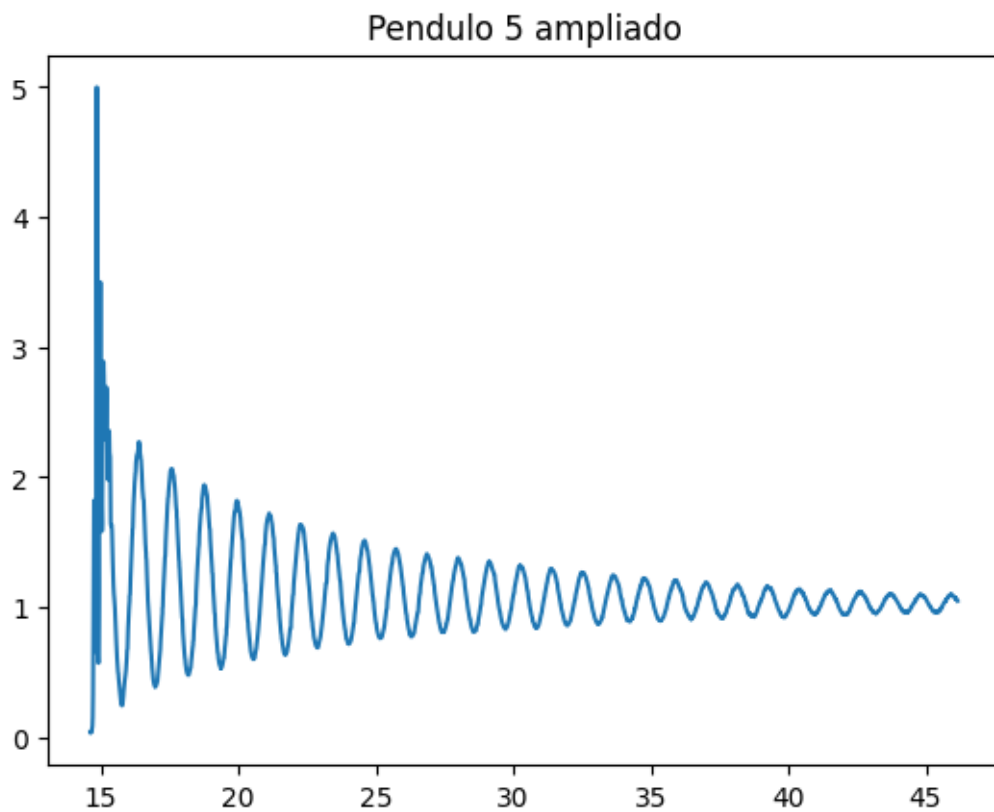


Pendulo 3 ampliado



Pendulo 4 ampliado





Podemos observar que a força normal atinge picos mais altos no início do movimento, e decresce exponencialmente. Os picos são interpretados como os momentos onde a velocidade é máxima no movimento pendular, aproximadamente no ponto mais baixo do movimento, e decrescem com o

tempo, devido à arnotização da força de atrito do ar. Note que a força medida tende a 1, isto é, no final do experimento, há um equilíbrio entre a força normal (tração no fio) e o peso do objeto.

## 6 Conclusão

Obtivemos simulações satisfatórias para o movimento de queda-livre, onde podemos observar proximidade entre os gráficos dos dados reais e aproximações para velocidade e posição, e a simulação pelo método de euler.

Já no experimento de movimento pendular, obtivemos bons resultados para a simulação e os dados gerados pelo aplicativo, porém nossas aproximações para a velocidade e posição em cada instante de tempo não condizem com a realidade. Acreditamos que os erros têm fonte na imprecisão dos dados do experimento, bem como a baixa taxa de convergência do método de euler, que podem ter sido responsáveis pela extrapolação das trajetórias traçadas.

## 6.1 Queda Livre

Gráfico de comparação da Posição

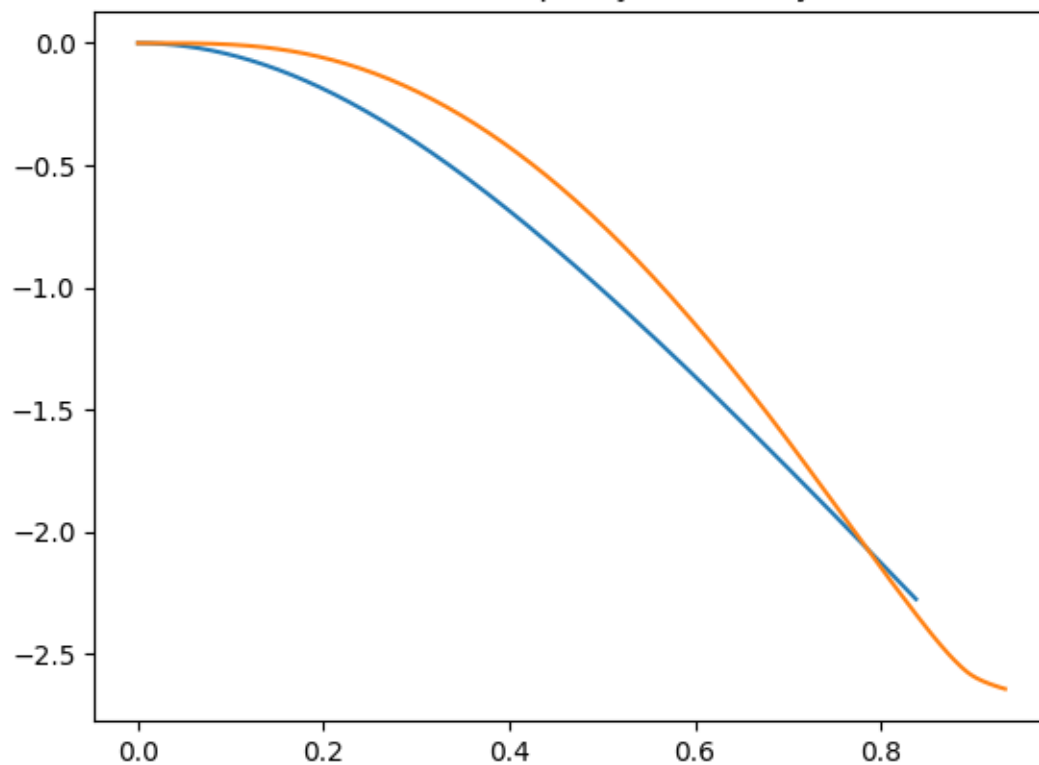
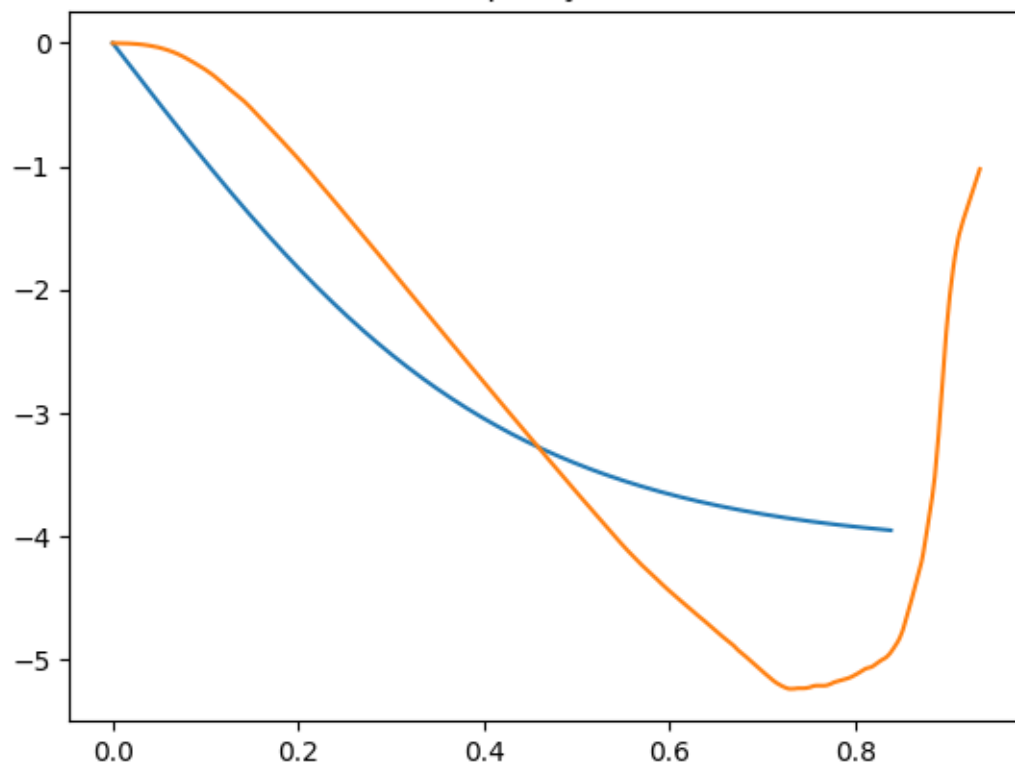
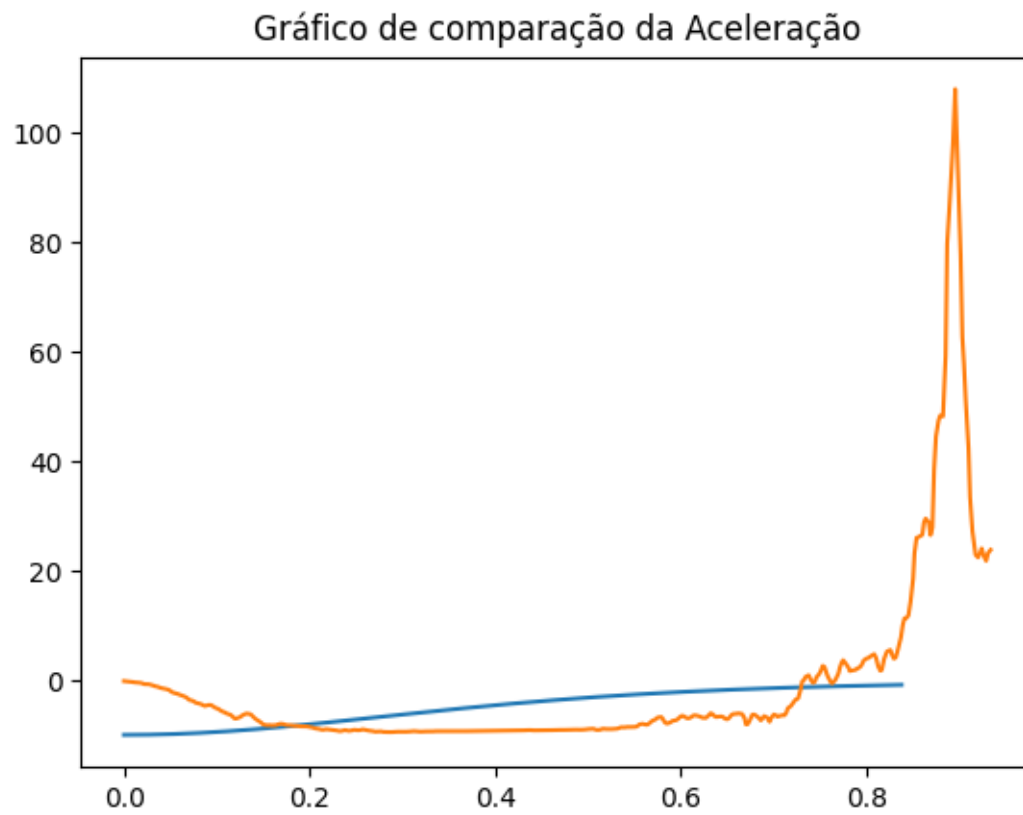


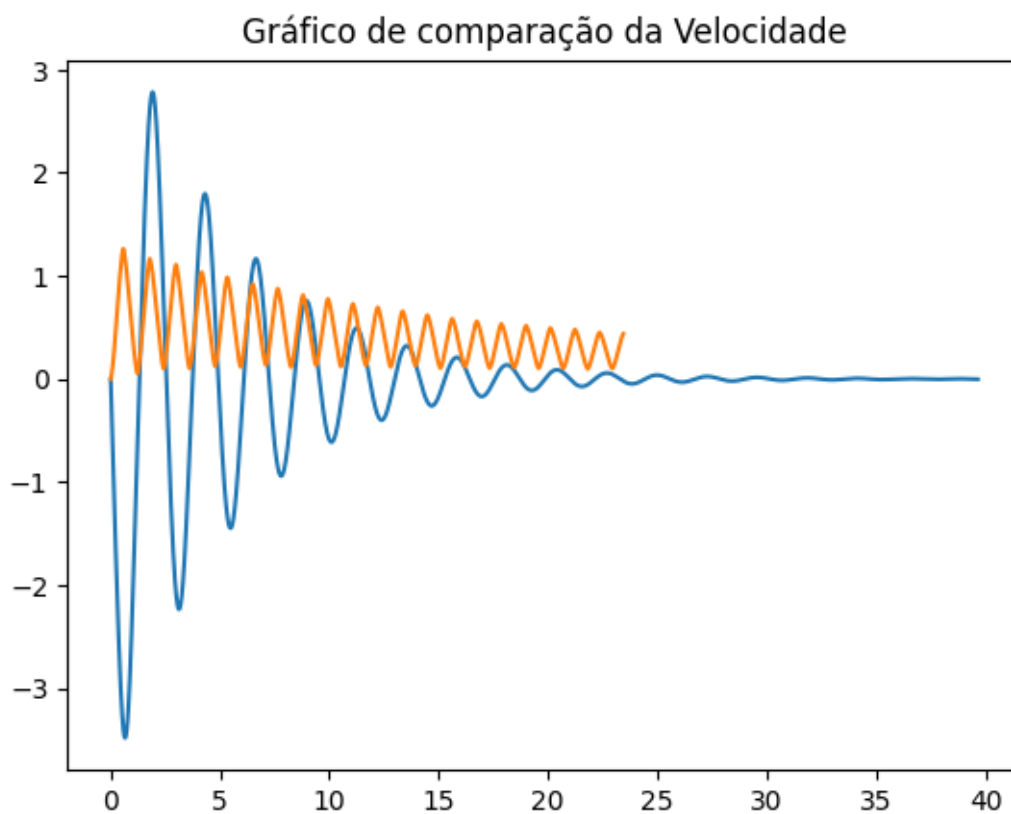
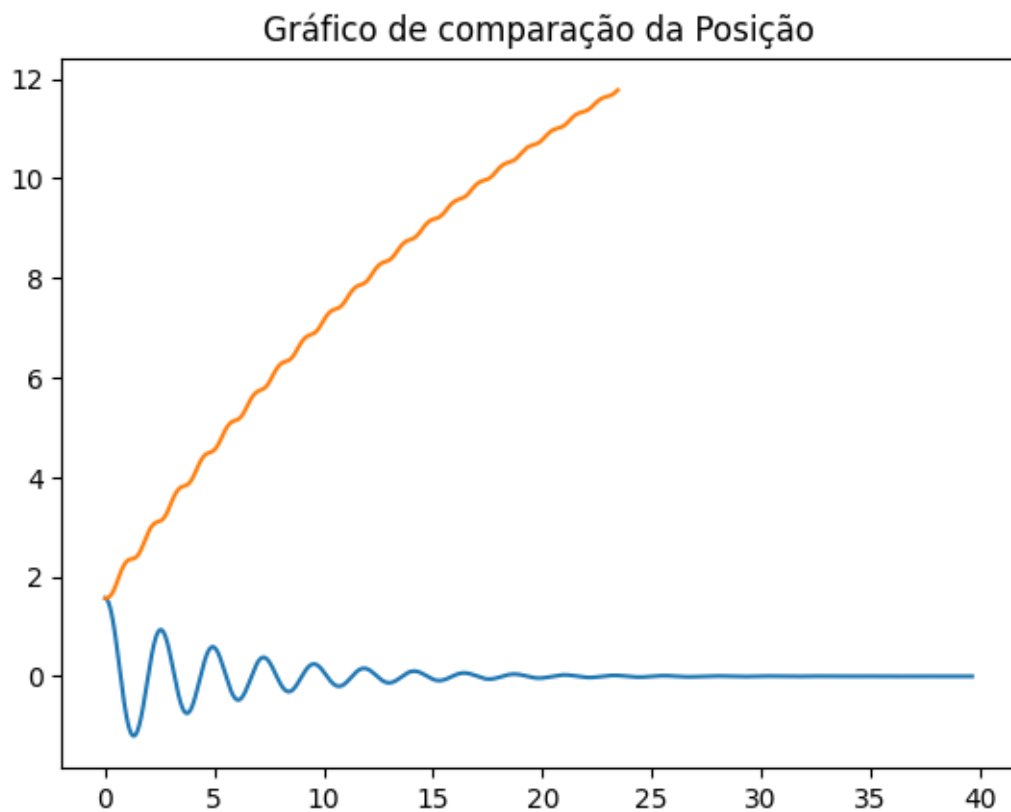
Gráfico de comparação da Velocidade



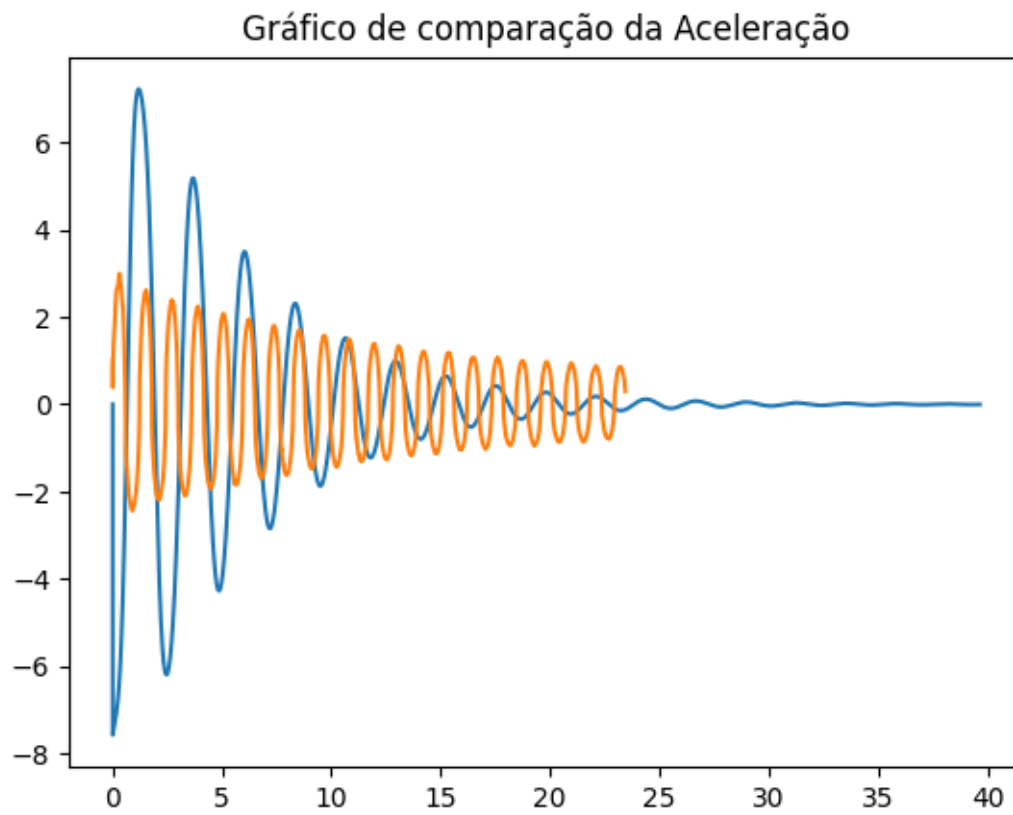


Notamos que os gráficos da simulação e do experimento são similares. No gráfico de comparação de aceleração, percebe-se que quando a corda é esticada no experimento há um pico na aceleração.

## 6.2 Pêndulo







Encontramos muita dificuldade em encontrar modelos para o pêndulo que descrevesse o fenômeno da forma como o experimento foi realizado.