

Transporte quântico no carpete de sierpinski no regime universal

Felipe Moreira

Resumo—Neste trabalho, investigamos propriedades universais de transporte quântico em estruturas fractais através das flutuações da condutância e do ruído de disparo. Utilizamos como região de espalhamento uma estrutura no formato de um fractal denominado carpete de sierpinski, cuja dimensão de Hausdorff vale $d_H = 1.89$. Posicionamos dois guias em lados opostos de forma simétrica. obtivemos a curva da condutância e do ruído de disparo, ambas em função da energia, e calculamos a dimensão fractal, tanto no regime universal como na ausência de desordem. Concluimos que além da dimensão fractal da curva possuir valores semelhantes a dimensão de Hausdorff da região de espalhamento, a dimensão fractal da curva de condutância é uma propriedade universal, pois mantém-se constante.

Palavras-Chave—Modelo de artigo, L^AT_EX, SBrT 2022.

I. INTRODUÇÃO

Em física mesoscópica, o transporte quântico é descrito através de elétrons se comportando como ondas. Devido a este caráter ondulatório, surgem no sistema efeitos típicos como espalhamento, interferência e reflexão. A presença do efeito de espalhamento possibilita o surgimento das flutuações universais de condutância.

II. CARPETE DE SIERPINSKI

O carpete de sierpinski é um fractal determinístico que foi descrito por Waclaw Sierpiński em 1926. O método de construção deste fractal inicia-se com um quadrado de lado L . No primeiro passo, retiramos um quadrado de lado $L/3$ da região central do quadrado original resultando no fractal de ordem $m = 1$.

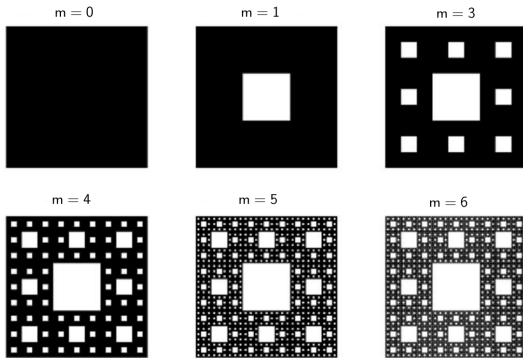


Fig. 1. Construção do carpete de sierpinski.

Nome1 Sobrenome1, Departamento1, Universidade1, Cidade1-UF1, e-mail: xxxxx@yyyyy.zzzzz.br; Nome2 Sobrenome2, Departamento2, Universidade2, Cidade2-UF2, e-mail: xxxxx@yyyyy.zzzzz.br. Este trabalho foi parcialmente financiado por XXXXXXXX (XX/XXXXX-X).

A aplicação do primeiro passo resulta no carpete de sierpinski de etapa $m = 1$ que pode ser subdividido em 8 quadrados menores de lado $L/3$. Ao aplicar o procedimento realizado no primeiro passo em cada um dos 8 quadrados resultantes, com a diferença de que o quadrado a ser excluído deve ter comprimento do lado $L/9$, gerando assim a etapa $m = 2$. Este procedimento pode ser realizado indefinidamente.

O procedimento de criação deste fractal é recursivo e obedece a regras rígidas, por esta razão podemos realizar as seguintes generalizações. Para uma certa etapa de construção $m = n$, o número de quadrados de lado $(L/3)^n$ é igual:

$$N_n = 8^n \quad (1)$$

pois em cada etapa a figura pode ser subdividida em 8 novos quadrados.

A área de cada quadrado em cada etapa de construção $m = n$ é dada por:

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} L^2 \quad (2)$$

e a área total em cada etapa $m = n$ é:

$$A_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n L^2 \quad (3)$$

Da equação (3) emerge uma interessante propriedade deste fractal. Ao fazermos $n \rightarrow \infty$, a área total da figura tende a zero. Com isso, temos uma figura com contorno fechado, perímetro diferente de zero e área igual a zero.

De acordo com a noção de dimensão de similaridade, a dimensão d de um conjunto pode ser definida como sendo a forma com que o número de objetos M que compõem o conjunto varia com a dimensão linear L . Considerando βL uma pequena parte do conjunto, a forma com que o número M varia é dado por:

$$M(\beta L) = \beta^d M(L) \quad (4)$$

em que $\beta < 1$.

Vamos agora considerar o carpete de sierpinski na etapa $m = 1$ com $L = 1$. Nesta etapa, $M(L) = 8$ pois a figura pode ser subdividida em 8 quadrados de lado $1/3$, logo, o fator de diminuição é $\beta = 1/3$ e $M(\beta L) = 1$ pois em $m = 0$ só havia um quadrado.

Aplicando estes valores na equação (4) ficamos com a seguinte expressão:

$$1 = (1/3)^d 8$$

$$1/8 = (1/3)^d$$

$$\ln(1/8) = d \cdot \ln(1/3)$$

$$d = \frac{\ln(1/8)}{\ln(1/3)} \approx 1.892...$$

A este valor damos o nome de dimensão de Hausdorff e caracteriza a dimensão fractal de todo o conjunto. A dimensão de Hausdorff do carpete de sierpinski foi calculada analiticamente com exatidão. Ao realizar este cálculo através de métodos numéricos, a dimensão fractal converge para a dimensão de Hausdorff quando a etapa m é muito alta.

III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

As curvas de condutância e ruído de disparo foram calculadas em uma região de espalhamento cuja forma é de um carpete de sierpinski (figura 2). As curvas foram geradas tanto no regime universal como na ausência de desordem. As simulações foram realizadas em um fractal com a etapa de construção $m = 3$ e $m = 4$ ilustrados na figura 2.a e 2.b respectivamente.

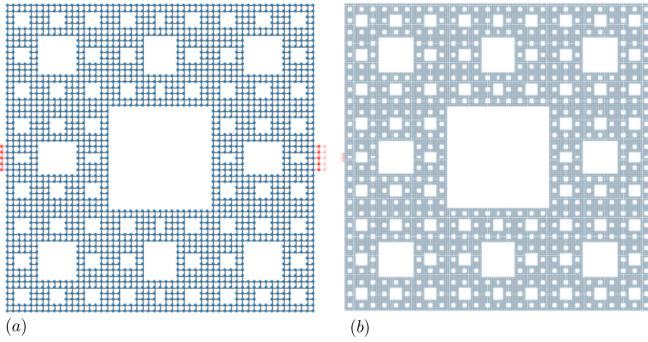


Fig. 2. Região de espalhamento na forma do carpete de sierpinski.

Para determinar o regime universal nas duas estruturas representadas na figura 2, calculamos a condutância em 100 pontos variando a desordem W de 0 até 2. Para cada ponto foram geradas 1000 amostras. De posse desses dados é possível calcular a média e o desvio padrão (rms: *root mean square*) da condutância.

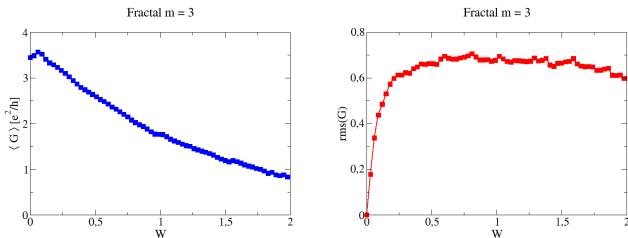


Fig. 3. Média da condutância e o desvio padrão da condutância para o carpete de sierpinski $m = 3$.

Podemos observar nos gráficos acima que a média da condutância diminui a medida que a desordem aumenta. O desvio padrão da condutância aumenta com a desordem até

atingir o ponto máximo e começar a diminuir. O valor de desordem que maximiza o desvio padrão representa o regime universal. Esta mesma análise foi feita para o fractal $m = 4$ e o resultado está representado na figura 4.

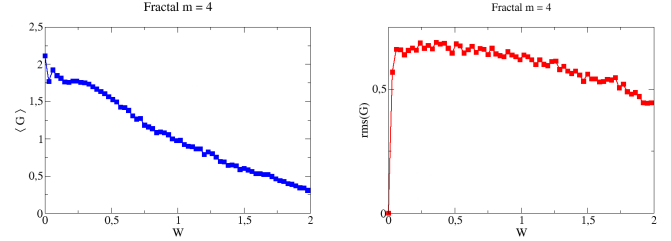


Fig. 4. Média da condutância e o desvio padrão da condutância para o carpete de sierpinski $m = 4$.

Comparando os gráficos da média da condutância das figuras 3 e 4, percebemos que para um mesmo valor de desordem, a média da condutância para o fractal $m = 3$ é sempre maior que a média da condutância para o fractal $m = 4$. Isto sugere que existe uma desordem geométrica da estrutura associada ao sistema além da desordem W de Anderson inserida no potencial interatômico. Quanto maior a etapa de construção do fractal, ou seja, quanto mais ele se aproxima da forma do fractal ideal, maior a desordem associada.

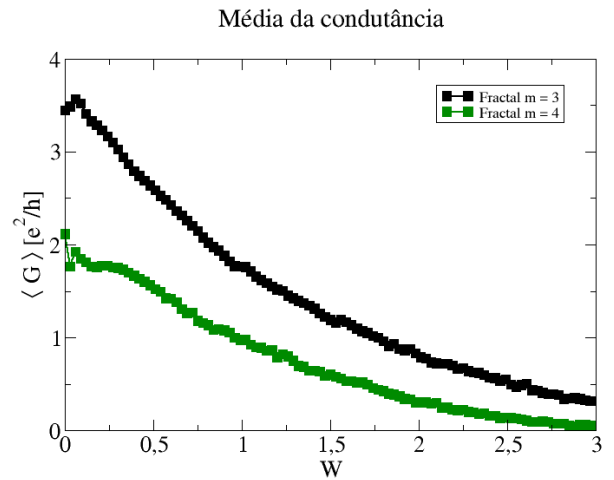


Fig. 5. Gráfico comparativo da média da condutância para o carpete de sierpinski $m = 3$ e $m = 4$.

O valor da desordem W é o parâmetro que caracteriza o regime universal. Este valor é obtido através do gráfico do desvio padrão da condutância em função da desordem. O valor da desordem associado ao máximo do desvio padrão da condutância é justamente aquele que caracteriza o regime universal. Através da análise dos gráficos, encontramos os valores $W = 0.80$ e $W = 0.36$ para as estruturas $m = 3$ e $m = 4$ respectivamente.

Em seguida calculamos a condutância em função da energia em duas situações. Na primeira situação realizamos a simulação com a desordem $W = 0$. Na segunda situação, geramos

os resultados no regime universal com os respectivos graus de desordem descritos acima.

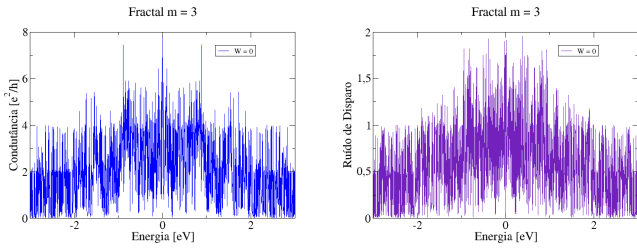


Fig. 6. Condutância e ruído de disparo em função da energia na ausência de desordem.

É possível ver claramente na figura 6 que a condutância e o ruído de disparo são simétricos em torno do zero. Isso acontece pois a região foi modelada na forma de um fractal simétrico (carpete de sierpinski) representa na figura 2. Além disso, os guias estão localizados em lados opostos e de maneira também simétrica.

Ao calcular a dimensão fractal das duas curvas acima, foi obtido os valores de 1.63 e 1.73 para a condutância e ruído de disparo, respectivamente. Esta mesma simulação foi feita para o fractal na etapa de construção $m = 4$ e o resultado está representado na figura 7.

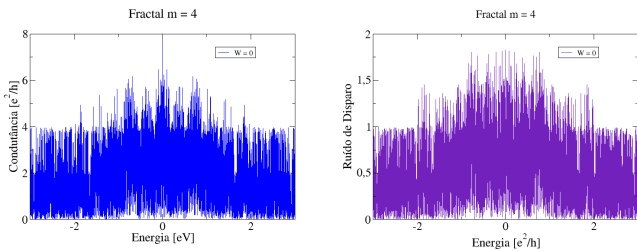


Fig. 7. Condutância e ruído de disparo em função da energia na ausência de desordem.

Assim como na figura 6, as curvas de condutância e ruído de disparo na figura 7 são simétricas, porém são bem mais densas. Calculamos o valor da dimensão fractal nestas duas curvas e foram obtidos os valores de 1.74 para a curva de condutância e 1.79 Para a curva do ruído de disparo.

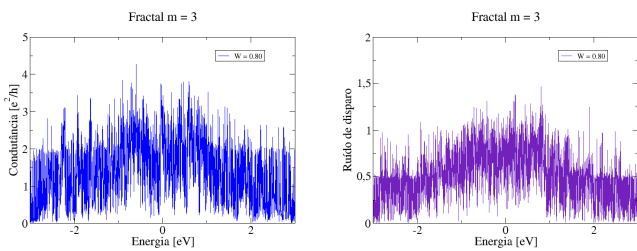


Fig. 8. Condutância e ruído de disparo em função da energia na ausência de desordem.

As curvas de condutância e ruído de disparo também foram geradas no regime universal, utilizando os valores de desordem

$W = 0.80$ e $W = 0.36$ para o fractal $m = 3$ e $m = 4$ respectivamente. Como é possível ver na figura 8, a simetria não existe mais em decorrência da presença da desordem.

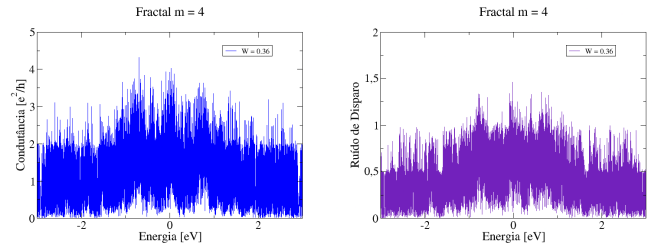


Fig. 9. Condutância e ruído de disparo em função da energia na ausência de desordem.

Para as curvas de condutância e ruído de disparo no regime universal, encontramos os valores de 1.71 e 1.72 para a curva de condutância e ruído de disparo respectivamente para a etapa de construção $m = 3$. Para a etapa de construção $m = 4$ encontramos os valores de 1.75 e 1.80 para as curvas de condutância e ruído de disparo respectivamente.