

Transporte quântico no carpete de sierpinski no regime universal

Autores

Resumo— Em física mesoscópica, são estudados sistemas de dimensões intermediárias entre a escala microscópica, onde prevalecem os efeitos quânticos, e a escala macroscópica. Utilizamos neste campo de estudo o termo regime universal, que representa um comportamento que emerge em sistemas mesoscópicos. No regime universal, algumas propriedades físicas dos sistemas estudados são independentes dos detalhes microscópicos específicos da estrutura do material, dependendo apenas da simetria e dimensões geométricas. Para determinar o regime universal, inserimos desordem no sistema, variamos esta desordem até que seja atingido o máximo desvio dos valores de condutância, o valor de desordem associado a este máximo caracteriza o regime universal. Neste trabalho, investigamos propriedades universais de transporte quântico em estruturas fractais através das flutuações da condutância e do ruído de disparo. Utilizamos como região de espalhamento uma estrutura no formato de um fractal denominado carpete de sierpinski, cuja dimensão de fractal vale aproximadamente $d_H = 1.89$. Posicionamos dois guias em lados opostos de forma simétrica. Obtivemos a curva da condutância e do ruído de disparo, ambas em função da energia, e calculamos a dimensão fractal, tanto no regime universal como na ausência de desordem. Concluímos que além da dimensão fractal das curvas possuírem valores semelhantes à dimensão de fractal da região de espalhamento, a dimensão fractal das curvas de condutância e ruído de disparo é uma propriedade universal, pois mantém valores aproximadamente constante e com baixo desvio padrão. Outro resultado que merece ser destacado refere-se a desordem geométrica inserida ao sistema. A desordem W inserida que caracteriza o regime universal nos fractais de ordem mais baixa são maiores que nos fractais de ordem mais alta, isto significa que a desordem geométrica também contribui para que seja atingido o regime universal, pois os fractais de ordem mais alta possuem uma maior desordem geométrica.

Palavras-Chave— Modelo de artigo, L^AT_EX, SBrT 2022.

I. INTRODUÇÃO

Em física mesoscópica, o transporte quântico é descrito através de elétrons se comportando como ondas. Devido a este caráter ondulatório, surgem no sistema efeitos típicos como espalhamento, interferência e reflexão. A presença do efeito de espalhamento possibilita o surgimento das flutuações universais de condutância.

II. CARPETE DE SIERPINSKI

O carpete de sierpinski é um fractal determinístico que foi descrito por Waclaw Sierpiński em 1926. O método de construção deste fractal inicia-se com um quadrado de lado L . No primeiro passo, retiramos um quadrado de lado $L/3$ da região central do quadrado original, resultando em uma figura na etapa de construção $m = 1$.

Nome1 Sobrenome1, Departamento1, Universidade1, Cidade1-UF1, e-mail: xxxxx@yyyyy.zzzzz.br; Nome2 Sobrenome2, Departamento2, Universidade2, Cidade2-UF2, e-mail: xxxxx@yyyyy.zzzzz.br. Este trabalho foi parcialmente financiado por XXXXXXXX (XX/XXXXX-X).

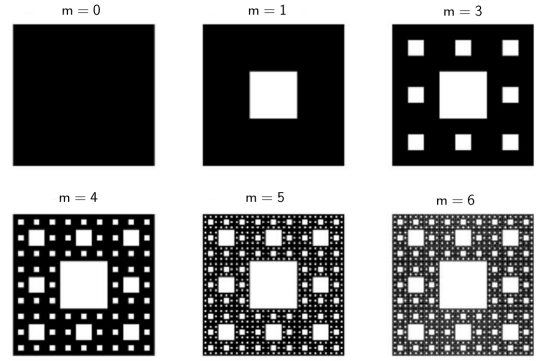


Fig. 1. Construção do carpete de sierpinski.

A aplicação do primeiro passo resulta no carpete de sierpinski de etapa $m = 1$ que pode ser subdividido em 8 quadrados menores de lado $L/3$. Ao aplicar o procedimento realizado no primeiro passo em cada um dos 8 quadrados resultantes, com a diferença de que o quadrado a ser excluído deve ter comprimento do lado $L/9$, gerando assim a etapa $m = 2$. Este procedimento pode ser realizado indefinidamente.

O procedimento de criação deste fractal é recursivo e obedece a regras rígidas, por esta razão podemos realizar as seguintes generalizações. Para uma certa etapa de construção $m = n$, o número de quadrados de lado $(L/3)^n$ é igual:

$$N_n = 8^n \quad (1)$$

pois em cada etapa a figura pode ser subdividida em 8 novos quadrados.

A área de cada quadrado em cada etapa de construção $m = n$ é dada por:

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} L \quad (2)$$

e a área total em cada etapa $m = n$ é:

$$A_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n L^2 \quad (3)$$

Da equação (3) emerge uma interessante propriedade deste fractal. Ao fazermos $n \rightarrow \infty$, a área total da figura tende a zero. Com isso, temos uma figura com contorno fechado, perímetro diferente de zero e área igual a zero.

De acordo com a noção de dimensão de similaridade, a dimensão d de um conjunto pode ser definida como sendo a forma com que o número de objetos M que compõem o conjunto varia com a dimensão linear L . Considerando βL a

dimensão linear de uma pequena parte do conjunto, a forma com que o número M varia é dado por:

$$M(\beta L) = \beta^d M(L) \quad (4)$$

em que $\beta < 1$.

Vamos agora considerar o carpete de sierpinski na etapa $m = 1$ com $L = 1$. Nesta etapa, $M(L) = 8$ pois a figura pode ser subdividida em 8 quadrados de lado $1/3$, logo, o fator de diminuição é $\beta = 1/3$ e $M(\beta L) = 1$ pois em $m = 0$ só havia um quadrado.

Aplicando estes valores na equação (4) ficamos com a seguinte expressão:

$$1 = (1/3)^d 8$$

$$1/8 = (1/3)^d$$

$$\ln(1/8) = d \cdot \ln(1/3)$$

$$d = \frac{\ln(1/8)}{\ln(1/3)} \approx 1.892...$$

A este valor damos o nome de dimensão de Hausdorff e caracteriza a dimensão fractal de todo o conjunto. A dimensão de Hausdorff do carpete de sierpinski foi calculada analiticamente com exatidão. Ao realizar este cálculo através de métodos numéricos, a dimensão fractal converge para a dimensão de Hausdorff quando a etapa m é muito alta.

III. RESULTADOS E DISCUSSÕES

As curvas de condutância e ruído de disparo foram calculadas em uma região de espalhamento cuja forma é de um carpete de sierpinski (figura 2). As curvas foram geradas tanto no regime universal como na ausência de desordem. As simulações foram realizadas em um fractal com a etapa de construção $m = 3$ e $m = 4$ ilustrados na figura 2.a e 2.b respectivamente.

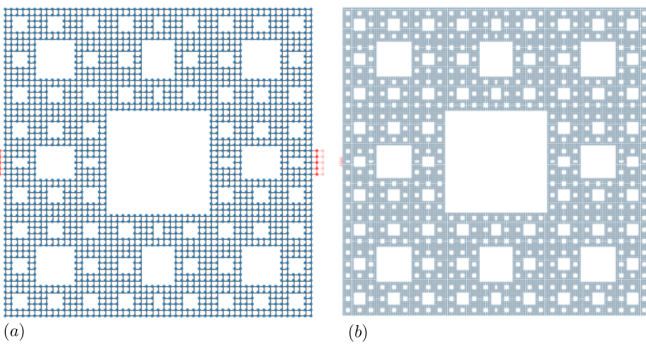


Fig. 2. Região de espalhamento na forma do carpete de sierpinski.

Para determinar o regime universal nas duas estruturas representadas na figura 2, calculamos a condutância em 100 pontos variando a desordem W de 0 até 3. Para cada ponto foram geradas 10000 amostras. De posse desses dados é possível calcular a média e o desvio padrão (rms: *root mean square*) da condutância.

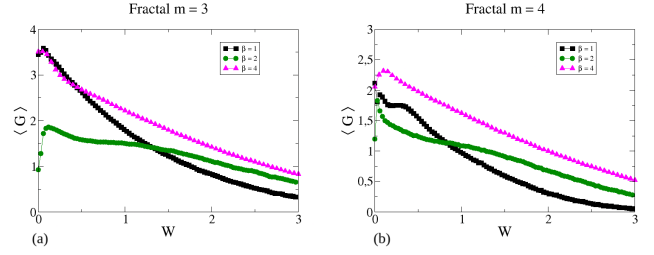


Fig. 3. Média da condutância e o desvio padrão da condutância para o carpete de sierpinski $m = 3$.

Podemos observar nos gráficos acima que a média da condutância diminuiu a medida que a desordem aumenta. O desvio padrão da condutância aumenta com a desordem até atingir o ponto máximo e começar a diminuir. O valor de desordem que maximiza o desvio padrão representa o regime universal. Esta mesma análise foi feita para o fractal $m = 4$ e o resultado está representado na figura 4.

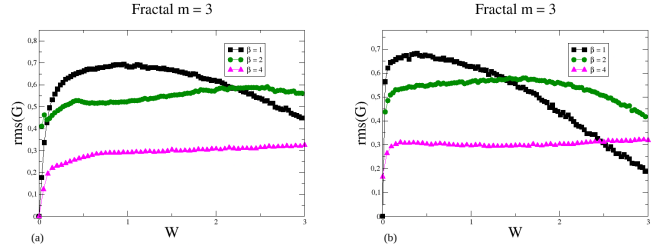


Fig. 4. Média da condutância e o desvio padrão da condutância para o carpete de sierpinski $m = 4$.

Comparando os gráficos da média da condutância das figuras 3 e 4 (figura 5), percebemos que para um mesmo valor de desordem, a média da condutância para o fractal $m = 3$ é sempre maior que a média da condutância para o fractal $m = 4$. Isto sugere que existe uma desordem geométrica da estrutura associada ao sistema além da desordem W de Anderson inserida no potencial interatômico. Quanto maior a etapa de construção do fractal, ou seja, quanto mais ele se aproxima da forma do fractal ideal, maior a desordem associada.

O valor da desordem W é o parâmetro que caracteriza o regime universal. Este valor é obtido através do gráfico do desvio padrão da condutância em função da desordem. O valor da desordem associado ao máximo do desvio padrão da condutância é justamente aquele que caracteriza o regime universal. Através da análise dos gráficos, encontramos os valores $W = 0.80$ e $W = 0.36$ para as estruturas $m = 3$ e $m = 4$ respectivamente.

Em seguida calculamos a condutância e potência do ruído de disparo em função da energia nos três *ensembles* da teoria de matrizes aleatórias. Na primeira situação realizamos a simulação com a desordem $W = 0$. Já para os *ensembles* $\beta = 1$, $\beta = 2$ e $\beta = 4$, geramos os resultados no regime universal com os respectivos graus de desordem descritos acima.

No nosso sistema há dois tipos de desordem, a desordem W

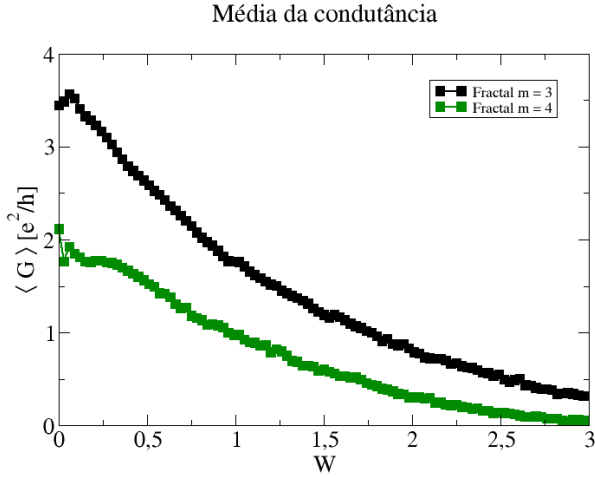


Fig. 5. Gráfico comparativo da média da condutância para o carpete de sierpinski $m = 3$ e $m = 4$.

inserida no potencial interatômico e a desordem proveniente da forma da região de espalhamento, cuja geometria representa um fractal.

Quando geramos as curvas de condutância e ruído de disparo com a desordem $W = 0$, a única desordem associada ao sistema é a desordem geométrica. Por se tratar de uma desordem determinística (a forma do fractal não muda) os gráficos da condutância e ruído de disparo são simétricos em torno da energia $E = 0$. Nesse caso, o sinal da energia influencia apenas no sentido em que ocorre o transporte de elétrons através da região de espalhamento, se é do *lead* 0 para o *lead* 1 ou o inverso.

Para inserir a desordem ao sistema, adicionamos um termo estocástico ao potencial interatômico, este valor de perturbação é proporcional ao valor W que definimos para o sistema. Por se tratar de um valor randômico, a simetria nos gráficos de condutância e ruído de disparo é perdida.

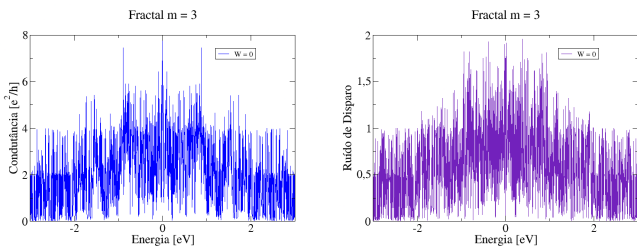


Fig. 6. Condutância e ruído de disparo em função da energia na ausência de desordem para a etapa $m = 3$ de construção do fractal.

É possível ver claramente na figura 6 que a condutância e o ruído de disparo são simétricos em torno do zero. Isso acontece pois a região foi modelada na forma de um fractal simétrico (carpete de sierpinski) representado na figura 2. Além disso, os guias estão localizados em lados opostos e de maneira também simétrica.

Ao calcular a dimensão fractal das duas curvas acima, foram obtidos os valores de 1.63 e 1.73 para a condutância e ruído

de disparo, respectivamente. Esta mesma simulação foi feita para o fractal na etapa de construção $m = 4$ e o resultado está representado na figura 7.

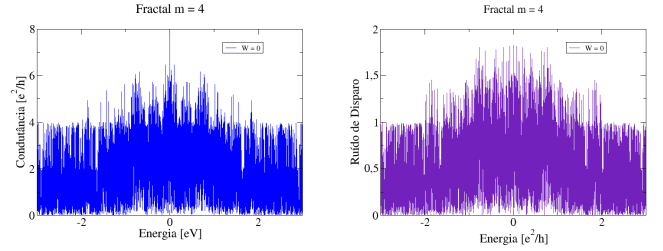


Fig. 7. Condutância e ruído de disparo em função da energia na ausência de desordem para a etapa $m = 4$ de construção do fractal.

Assim como na figura 6, as curvas de condutância e ruído de disparo na figura 7 são simétricas, porém são bem mais densas. Calculamos o valor da dimensão fractal nestas duas curvas e foram obtidos os valores de 1.74 para a curva de condutância e 1.79 para a curva do ruído de disparo.

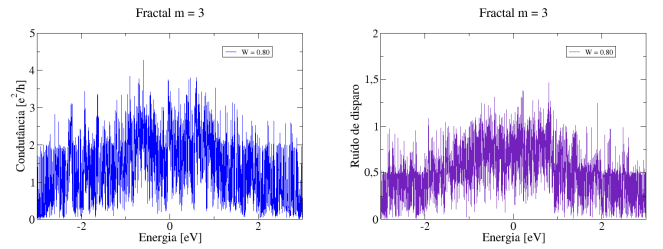


Fig. 8. Condutância e ruído de disparo em função da energia no regime universal para a etapa $m = 3$ de construção do fractal.

As curvas de condutância e ruído de disparo também foram geradas no regime universal, para o *ensemble* $\beta = 1$ utilizamos os valores de desordem $W = 0.80$ e $W = 0.36$ para o fractal $m = 3$ e $m = 4$ respectivamente. Como é possível ver na figura 8, a simetria não existe mais em decorrência da presença da desordem.

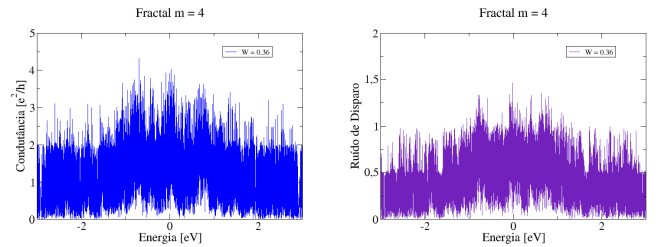


Fig. 9. Condutância e ruído de disparo em função da energia no regime universal para a etapa $m = 4$ de construção do fractal.

Para as curvas de condutância e ruído de disparo no *ensemble* $\beta = 1$, encontramos os valores de 1.71 e 1.72 para a curva de condutância e ruído de disparo respectivamente para a etapa de construção $m = 3$. Para a etapa de construção $m = 4$ encontramos os valores de 1.75 e 1.80 para as curvas de condutância e ruído de disparo respectivamente.

Calculamos as dimensões fractais para as curvas de condutância e potência do ruído de disparo para as estruturas no formato do carpete de Sierpinski $m = 3$, no ensemble circular unitário ($\beta = 2$). Encontramos os valores de dimensão fractal 1,67 e 1,75 para a curva de condutância e potência do ruído de disparo, respectivamente.

Para estruturas no formato do carpete de Sierpinski de nível $m = 4$ no ensemble $\beta = 2$ calculamos os valores 1,71 e 1,80 para as dimensões fractais das curvas de condutância e potência do ruído de disparo, respectivamente.

Para a estrutura baseada no carpete de Sierpinski de nível $m = 3$ calculamos os valores 1,79 e 1,76 para dimensão fractal da curva de condutância e potência do ruído de disparo, respectivamente. Para a estrutura baseada no carpete de Sierpinski de nível $m = 4$ calculamos a dimensão fractal de valor 1,81 para a condutância e 1,80 para a potência do ruído de disparo.

...

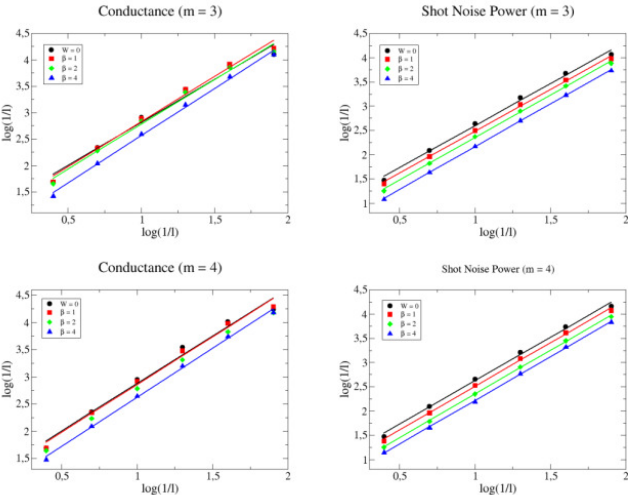


Fig. 10. Condutância e ruído de disparo em função da energia no regime universal para a etapa $m = 4$ de construção do fractal.

Devemos observar que os valores calculados para a dimensão fractal das curvas de condutância e ruído de disparo são relativamente próximos da dimensão de *Hausdorff* do carpete de sierpink. além disso, os números sugerem que a medida que aumentamos a etapa de construção m , esse valor se aproxima ainda mais.

Este resultado é curioso, pois mostra uma conexão entre duas entidades aparentemente desconexas. Uma delas diz respeito apenas a geometria da estrutura, a forma com que os átomos estão dispostos, enquanto que a outra diz respeito a observáveis físicos.

Outro resultado a ser observado é o caráter universal das propriedades fractais estudadas, visto que independentemente da desordem aplicada ao sistema, os valores da dimensão fractal giram em torno dos mesmos valores.

TABELA I
DIMENSÃO FRACTAL DAS CURVAS DE CONDUTÂNCIA E POTÊNCIA DO RUÍDO DE DISPARO NO REGIME UNIVERSAL.

Simulação	W = 0	$\beta = 1$	$\beta = 2$	β
Condutância $m = 3$	$1,63 \pm 0,0$	$1,71 \pm 0,005$	$1,69 \pm 0,011$	1,78
Condutância $m = 4$	$1,74 \pm 0,0$	$1,75 \pm 0,002$	$1,68 \pm 0,008$	1,81
Ruído de Disparo $m = 3$	$1,73 \pm 0,0$	$1,72 \pm 0,009$	$1,75 \pm 0,010$	1,75
Ruído de Disparo $m = 4$	$1,79 \pm 0,0$	$1,80 \pm 0,008$	1,80	1