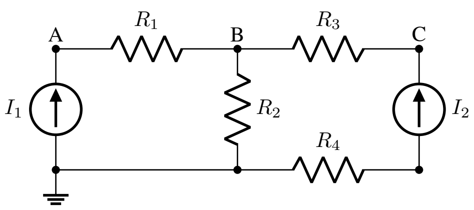
Experimento 02:
Leis de Kirchhoff

1) Objetivos

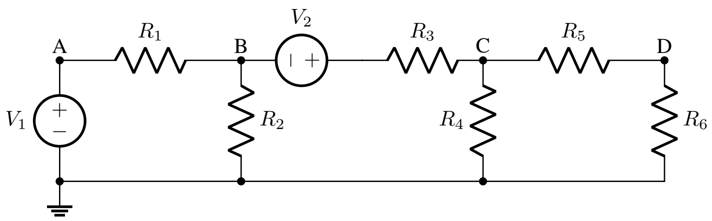
O objetivo deste experimento é a prática do método dos nós e das malhas para análise de circuitos eletrônicos. São abordadas as resoluções de circuitos utilizando estes métodos, bem como a montagem dos circuitos correspondentes e sua verificação experimental através da medição das grandezas elétricas consideradas nas resoluções.

2) Estudo pré-laboratorial

2.1) Utilizando as Leis de Kirchhoff, resolva os circuitos A e B (Figuras 2.1a e 2.1b. Você deverá determinar as tensões elétricas nos pontos indicados em função das fontes e dos valores de resistores. Obtenha ainda as correntes em R_1 e R_4 para cada caso.



(a) Circuito A



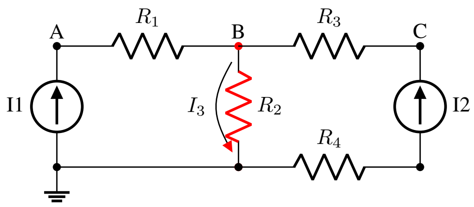
(b) Circuito B

Figura 2.1: Circuitos com fontes de corrente e fontes de tensão independentes.

Aplicando a Lei de Kirchhoff para Tensões (LKT) ao circuito A, tem-se

$$I_3 = I_1 + I_2 \tag{1}$$

onde I_3 é definido como a tensão que sai do nó B e passa pelo R_2, como abaixo:



Desse modo, define-se

$$\frac{V_A - V_B}{R_1} = I1 \qquad \frac{V_C - V_B}{R_3} = I2 \qquad \frac{V_B - 0}{R_2} = I3 \qquad \frac{0 - V_D}{R_4} = I2 \tag{2}$$

Isolando as tensões em função das fontes e dos valores dos resistores, encontra-se:

$$-\frac{V_D}{R_4} = I_2 \rightarrow V_D = -I_2R_4 \tag{3}$$

$$\frac{V_B}{R_2} = I_3 \rightarrow V_B = I_3R_2 = (I_1 + I_2)R_2 \tag{4}$$

$$V_C - V_B = I_2R_3 \rightarrow V_C = I_2R_3 + V_B = I_2R_3 + (I_1 + I_2)R_2 \tag{5}$$

$$V_A - V_B = I_1R_1 \rightarrow V_A = I_1R_1 + V_B = I_1R_1 + (I_1 + I_2)R_2 \tag{6}$$

Tem-se, portanto, a seguinte configuração

$$V_A = I_1R_1 + (I_1 + I_2)R_2 \qquad V_B = (I_1 + I_2)R_2 \qquad V_C = I_2R_3 + (I_1 + I_2)R_2 \qquad V_D = -I_2R_4 \tag{7}$$

As correntes em R_1 e R_4 são, respectivamente, I_1 e I_2.
Utilizando a mesma estratégia de resolução para o circuito B, tem-se

$$A : V_A = V_1 \tag{8}$$
$$B : \frac{V_B - V_1}{R_1} + \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_B + V_2 - V_C}{R_3} = 0 \tag{9}$$
$$C : \frac{V_C - V_D}{R_5} + \frac{V_C}{R_4} + \frac{V_C - V_2 - V_B}{R_3} = 0 \tag{10}$$
$$D : \frac{V_D - V_C}{R_5} + \frac{V_D}{R_6} = 0 \tag{11}$$

Isolando as tensões em função das fontes e dos valores de resistores, encontra-se os seguintes valores:

$$B : \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right] V_B + \left[-\frac{1}{R_3}\right] V_C = \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_3} \tag{12}$$
$$C : \left[-\frac{1}{R_3}\right] V_B + \left[\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right] V_C + \left[\frac{-1}{R_5}\right] V_D = \frac{V_2}{R_3} \tag{13}$$
$$D : \left[-\frac{1}{R_5}\right] V_C + \left[\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right] V_D = 0 \tag{14}$$

2.2) Utilize o método nodal para calcular as tensões e o método dos laços para calcular as correntes em todos os resistores do circuito C (Figura 2.2)

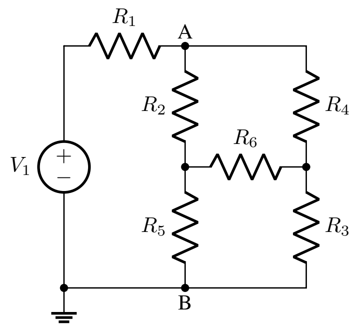


Figura 2.2: Circuito C

Adicioná-se-a, para facilitação dos cálculos, a inserção de dois nós, C e D, como visto abaixo:

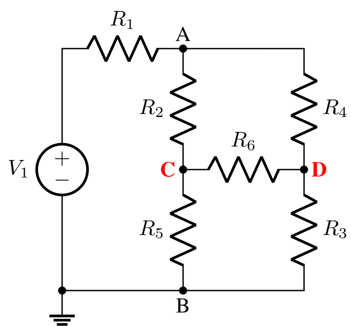


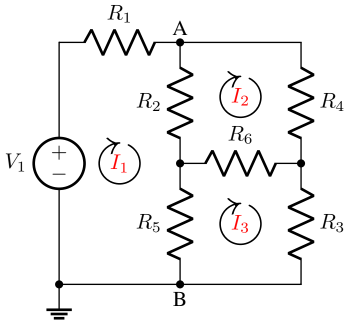
Figura 2.3: Circuito C

$$B : V_B = 0 \tag{15}$$
$$A : \frac{V_A - V_1}{R_1} + \frac{V_A - V_C}{R_2} + \frac{V_A - V_D}{R_4} = V_1 \tag{16}$$
$$C : \frac{V_C - V_A}{R_2} + \frac{V_C}{R_5} + \frac{V_C - V_D}{R_6} = 0 \tag{17}$$
$$D : \frac{V_D - V_A}{R_4} + \frac{V_D - V_C}{R_6} + \frac{V_D}{R_3} = 0 \tag{18}$$

Isolando as tensões em função das fontes e dos valores de resistores, encontra-se os seguintes valores:

$$\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right]V_A+\left[-\frac{1}{R_2}\right]V_C+\left[-\frac{1}{R_4}\right]V_D=\frac{V_1}{R_1}$$
$$\left[-\frac{1}{R_2}\right]V_A+\left[\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right]V_C+\left[-\frac{1}{R_6}\right]V_D=0$$
$$\left[-\frac{1}{R_4}\right]V_A+\left[\frac{-1}{R_6}\right]V_C+\left[\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}\right]V_D=0$$

Utilizando o método das malhas para calcular as correntes, temos



$$\begin{cases} R_1+(I_1+I_2)R_2+(I_1-I_3)R_5=10 \\ R_4I_2+(I_2-I_3)R_6+(I_2-I_1)R_2=0 \\ R_3I_3+(I_3-I_1)R_5+(I_3-I_2)R_6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [R_1+R_2+R_5]I_1+[-R_2]I_2+[-R_5]I_3=10 \\ [-R_2]I_1+[R_2+R_4+R_6]I_2+[-R_6]I_3=0 \\ [-R_5]I_1+[-R_6]I_2+[R_3+R_5+R_6]I_3 \end{cases}$$

Figura 2.4: Circuito C método das malhas.

2.3) Obtenha uma fórmula para a resistência equivalente entre os pontos A e B do circuito C. Dica: retire do circuito a fonte de alimentação e o resistor R1. Em seguida, utilize uma conversão entre associação delta (triângulo) para estrela.

Eliminando a fonte e o resistor R_1 tem-se a seguinte configuração

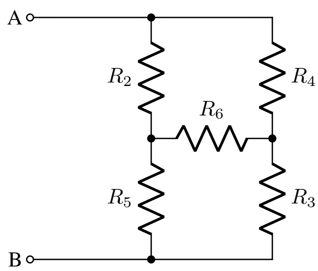


Figura 2.5: Circuito C, exceto o resistor R_1 e a fonte de alimentação.

Aplicando a tranformação Delta-Estrela, tem-se:

$$R_A=\frac{R_2+R_4}{R_2\cdot R_4\cdot R_6} \qquad R_C=\frac{R_2+R_6}{R_2\cdot R_4\cdot R_6} \qquad R_D=\frac{R_4+R_6}{R_2\cdot R_4\cdot R_6} \tag{19}$$

Obtendo,

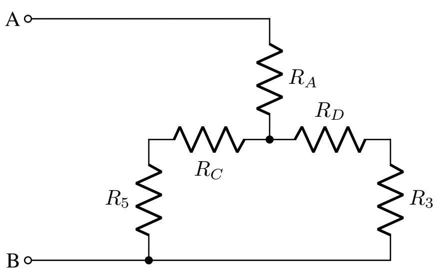
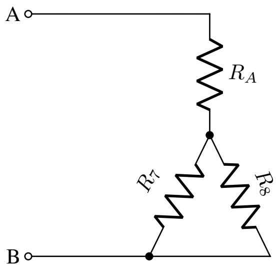


Figura 2.6: Circuito C, exceto o resistor R_1 e a fonte de alimentação.

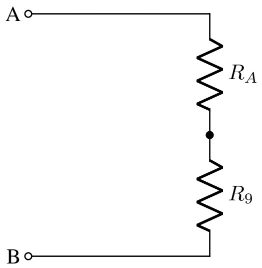
Fazendo a associação em série dos resistores inferiores, temos



$$\begin{aligned} R_7 &= R_C + R_5 \\ R_8 &= R_D + R_3 \end{aligned} \tag{20}$$

Figura 2.7: Circuito C, exceto o resistor R_1 e a fonte de alimentação.

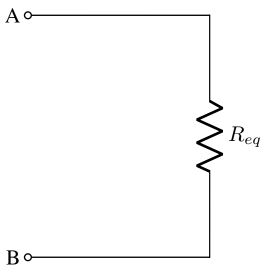
Fazendo-se uma associação em paralelo entre R_7 e R_8, tem-se



$$R_9 = \frac{R_7 + R_8}{R_7 \cdot R_8} \tag{21}$$

Figura 2.8: Circuito C, exceto o resistor R_1 e a fonte de alimentação.

que, por uma simples associação em série, culmina em:



$$R_{eq} = R_A + R_9 \tag{22}$$

Figura 2.9: Circuito C, exceto o resistor R_1 e a fonte de alimentação.

2.4) Fazendo $\mathbf{R_2 = R_3}$ e $\mathbf{R_4 = R_5}$ no circuito C, determine quais modificações deveriam ser feitas no layout do circuito, sem modificar os valores dos componentes utilizados, para que a tensão se anule sobre o resistor $\mathbf{R_6}$ (ou seja, para obter uma configuração análoga a uma Ponte de Wheatstone). Dica: faça $\mathbf{i_{R6}}$ igual a zero em suas equações e verifique a relação que surge entre os resistores restantes.

Observando a relação final obtida pelo método dos nós e eliminando as correntes que passam pelo resistor R_6, tem-se

$$\left[-\frac{1}{R_2}\right] V_A + \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \cancel{\frac{1}{R_6}}\right] V_C + \cancel{\left[-\frac{1}{R_6}\right]} V_D = 0$$
$$\left[-\frac{1}{R_4}\right] V_A + \left[\cancel{\frac{-1}{R_6}}\right] V_C + \left[\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \cancel{\frac{1}{R_6}}\right] V_D = 0$$

Facilmente, pode-se perceber que os nós C e D são bastante similares diferenciando-se apenas em relação aos resistores. A passagem de corrente depende da diferença de potencial elétrico entre dois pontos de um circuito. Logo, para que não haja passagem de corrente no resistor R_6, necessita-se que V_C e V_D sejam iguais.

Portanto, apenas permutar a posição de R_3 e R_4 faz com que a corrente sobre R_6 seja zero.

2.5) Simule os circuitos A, B e C (Figuras 2.1a, 2.1b e 2.2) e obtenha os valores correspondentes de tensão e corrente usando o QUCS 0.0.19. Inclua no estudo pré-laboratorial os desenhos do circuito simulado juntamente com as medições realizadas. Para os circuitos das Figuras 2.1a e 2.1b, assuma $\mathbf{R_1 = R_4 = 2,2k\Omega}$, $\mathbf{R_2 = R_6 = 1k\Omega}$, $\mathbf{R_3 = R_5 = 4,7k\Omega}$, $\mathbf{V_1 = 12V}$, $\mathbf{V_2 = 20V}$, $\mathbf{I_1 = 12mA}$ e $\mathbf{I_2 = 20mA}$. Para o circuito da Figura 2.2, assuma $\mathbf{R_1 = 2,2k\Omega}$, $\mathbf{R_2 = R_3 = 1k\Omega}$, $\mathbf{R_4 = R_5 = 4,7k\Omega}$, $\mathbf{R_6 = 100\Omega}$ e $\mathbf{V_1 = 10V}$. Em seguida, substitua os mesmos valores nas fórmulas encontradas nos itens 2.1 e 2.2. Complete as tabelas a seguir com seus resultados teóricos e simulados.

Assumiu-se $R_1 = R_4 = 2,2k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 4,7k\Omega$, $I_1 = 12mA$ e $I_2 = 20mA$. Em seguida, substituiu-se os mesmos valores nas fórmulas encontradas para verificar os cálculos:

$$V_A = 12mA \cdot 2,2k\Omega + (12mA + 20mA) \cdot 1k\Omega = 58,4V$$
$$V_B = (12mA + 20mA)1k\Omega = 32V$$
$$V_C = 12mA \cdot 4,7k\Omega + (12mA + 20mA) \cdot 1k\Omega = 126V$$
$$V_D = -20mA \cdot 2,2k\Omega = -44V$$

Portanto