

Experimento 10: Integrador e Diferenciador com Amplificador Operacional

1) Estudo pré-laboratorial

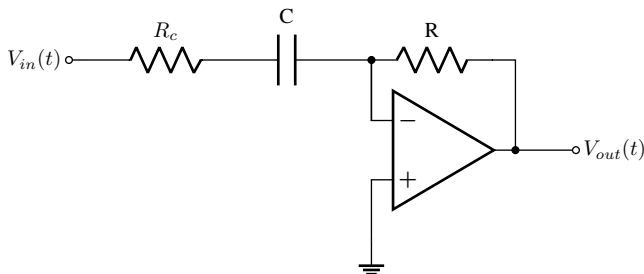


Figura 1: Circuito amplificador-diferenciador

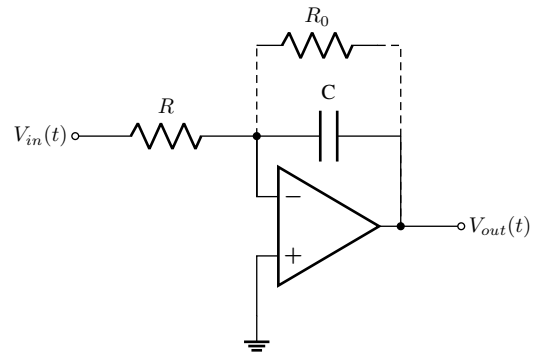


Figura 2: Circuito amplificador-integrador

$$V_{out}(t) = -RC \frac{dV_{in}(t)}{dt} \quad (1)$$

$$V_{out}(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_{in}(\tau) d\tau + k \quad (2)$$

1.1) Cálculos teóricos

1.1.1) Esboço da derivada e integral de cada uma das formas de onda

Usando o MATLAB podemos expressar cada uma das formas de onda muito facilmente. Usando uma frequência de $f = 10 \text{ Hz}$, temos o seguinte código para onda senoidal

```
1 %esboco da onda senoidal
2
3 w = 10; %definicao da frequencia
4 t1 = 0:0.01:100; % definicao do intervalo de tempo
5 f = sind(w*t1); %funcao seno
6 df = w*cosd(w*t1); %derivada da funcao seno
7 subplot(3,1,1)
8 plot(t1,f,t1,df) %plot da onda sobre sua derivada
9 xlabel('Tempo')
10 ylabel('Amplitude')
11 grid on
12
13 %esboco da onda quadrada
14
15 t2=(0:0.01:20); %definicao do tempo
16 f=square(t2); %definicao da funcao
17 df = diff(f);%derivada da funcao
18 subplot(3,1,2)
19 plot(t2,f,t2,[5,df]) % plot da funcao
20 axis([0 20 -3 3]) %definicao dos limites dos eixos
21 xlabel('Tempo')
22 ylabel('Amplitude')
23 grid on
24
25 %esboco da onda triangular
26
27 T = 10*(1/50); %Faz o tempo T mostrar 10 periodos
```

```
28 fs = 1000; % quantidade de amostras
29
30 t3 = 0:1/fs:T-1/fs; %determinacao do tempo
31 f = sawtooth(2*pi*50*t3,1/2); %definicao da frequencia da onda e o duty cycle
32 df = diff(f); %derivada da onda triangular
33 subplot(3,1,3)
34 plot(t3,f, t3, [0 df])
35 xlabel('Tempo')
36 ylabel('Amplitude')
37 grid on
```

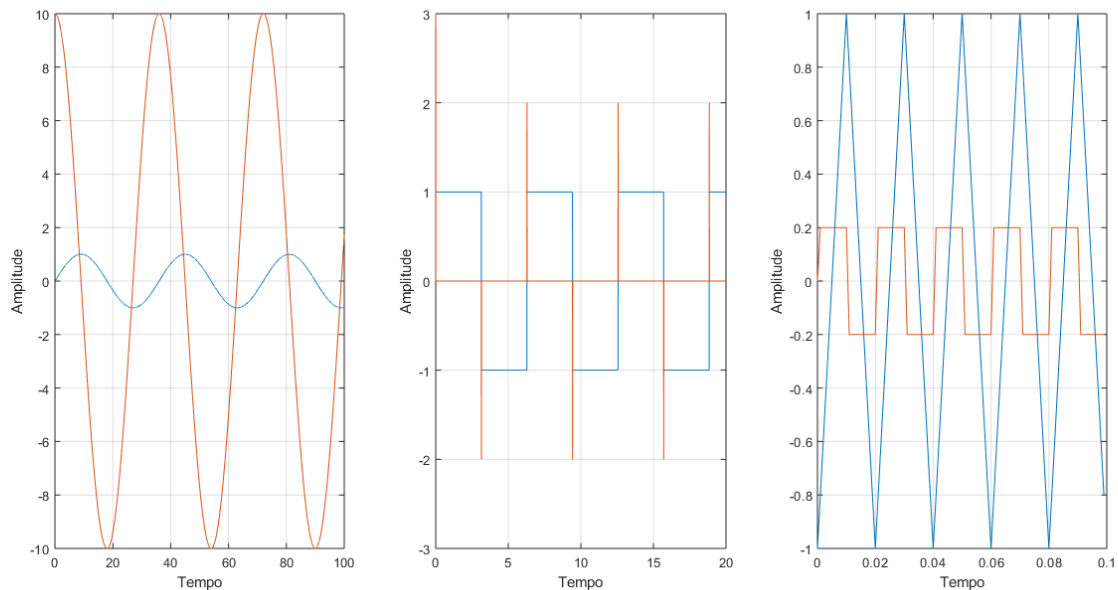


Figura 3: Onda senoidal e sua derivada

1.1.2) Expressão em Laplace de $V_{out}(t)$ em função de V_{in} do amplificador-diferenciador com $R_c = 0$

Usando a expressão dada pela equação 1, podemos escrever a transformada de Laplace como:

$$V_{out}(s) = -RCsV_{in}(s) \Rightarrow \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = H(s) = -RCs$$

Para analisar essa função de transferência, podemos plotar o diagrama de bode e observar seu comportamento.

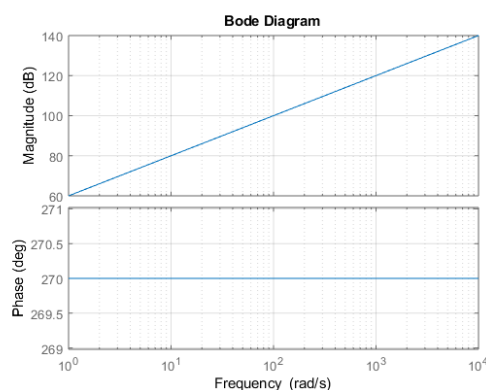


Figura 4: Diagrama de Bode da função de transferência

Considerando $R = 1k\Omega$ e $C = 1F$, a função de transferência nos dá um zero em 0 e um valor constante inicial de $20 \cdot \log(1000) = 60$. Como temos apenas um zero, a magnitude irá aumentar $20dB$ por década. Isso significa que quanto mais aumentarmos a frequência, maior será a amplitude da onda observada. O que implica que, aumentando a tensão rapidamente, podemos chegar a um estado de saturação do Amp Op a partir de frequências muito pequenas dependendo do dimensionamento dos componentes.

1.1.3) Expressão em Laplace de $V_{out}(t)$ em função de V_{in} da Fig. 1 com $R_c > 0$

A forma mais simples de determinar a função de transferência é transformando os componentes em impedâncias, como na figura abaixo:

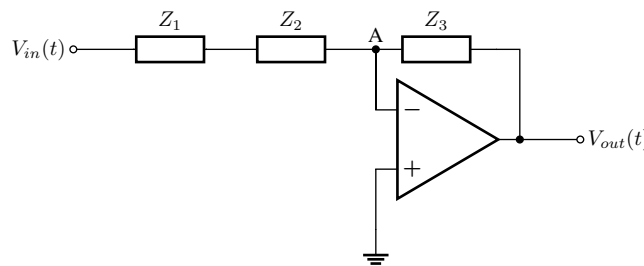


Figura 5: Circuito amplificador-diferenciador

Fazendo as equações a partir da lei de Kirchhoff, obtemos:

$$\frac{V_A - V_{in}}{Z_1 + Z_2} + \frac{V_A - V_{out}}{Z_3} = 0 \Rightarrow \frac{V_{out}}{Z_3} = \frac{-V_{in}}{Z_1 + Z_2}$$

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = H(s) = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2}$$

Substituindo $Z_1 = R_c$, $Z_2 = \frac{1}{sC}$, $Z_3 = R$, temos

$$H(s) = \frac{-RsC}{R_c sC + 1} \quad (3)$$

Com uma rápida inspeção, podemos notar que a função tem um zero e um polo. O que significa que, em alguma frequência, o circuito irá se estabilizar.

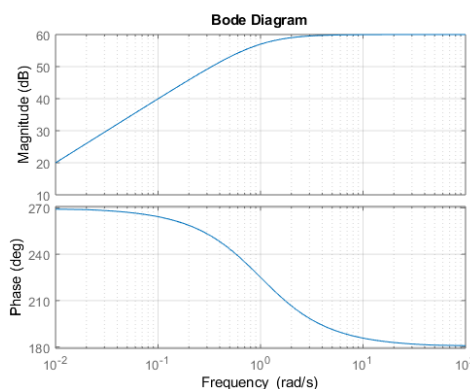


Figura 6: Gráfico de Bode com $R_c > 0$.

Observando o diagrama de bode dessa função de transferência com $R_c = 1\Omega$, $R = 1k\Omega$ e $C = 1F$, podemos perceber que o circuito se estabiliza a partir das frequências de 1 kHz, com um ganho de 60 dB constantes.

1.1.4) Expressão para $V_{out}(t)$ da Fig. 2.2, em função de $V_{in}(t)$ e assumindo $R \rightarrow \infty$

Utilizamos da equação 2 para gerar a função no domínio da frequência a partir da Transformada de Laplace. Assim, temos

$$V_o(s) = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s} \cdot V_{in}(s) \Rightarrow \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{1}{RCs}$$

$$H(s) = -\frac{1}{RCs} \quad (4)$$

Podemos observar que a função possui apenas um polo. Dessa forma, dada uma frequência baixa, a tensão no capacitor pode ser superabundante a fim de danificá-lo. O gráfico de Bode abaixo ilustra bem a preocupação.

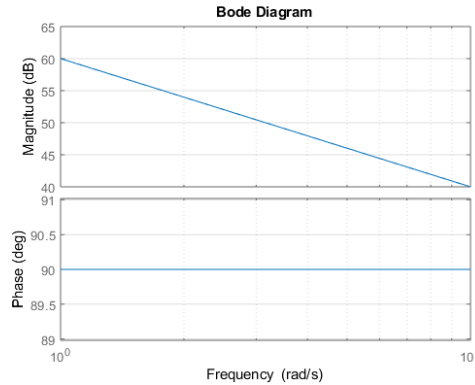


Figura 7: Diagrama de Bode para $R_0 \rightarrow \infty$

Considerando $C = 1\mu F$ e $R = 1k\Omega$, temos uma ganho de 20 dB por década se decrescermos a frequência. Isso gera um risco para o capacitor ligado diretamente a saída do Amp Op. Por esse motivo, nunca devemos fazer $R_0 \rightarrow \infty$.

1.1.5) Expressões para $V_{out}(t)$ da Fig. 2 em função de $V_{in}(t)$ assumindo R_0 finito

Ilustrando o circuito no domínio da frequência, podemos realizar os cálculos usando apenas impedâncias, como ilustrado na figura 8. Utilizando a Lei de Kirchhoff podemos obter a seguinte expressão.

$$\frac{V_A - V_{in}}{Z_1} + \frac{V_A - V_o}{Z_3} + \frac{V_A - V_o}{Z_2} = 0 \Rightarrow \frac{V_o(Z_3 + Z_2)}{Z_3 Z_2} = -\frac{V_{in}}{Z_1} \Rightarrow \frac{V_o(s)}{V_{in}(s)} = H(s) = -\frac{Z_3 Z_2}{(Z_3 + Z_2) Z_1}$$

Substituindo $Z_3 = R_0$, $Z_2 = \frac{1}{sC}$, e $Z_1 = R$ e arranjando os termos, temos

$$H(s) = -\frac{R_0}{R} \cdot \frac{1}{sR_0C + 1} \quad (5)$$

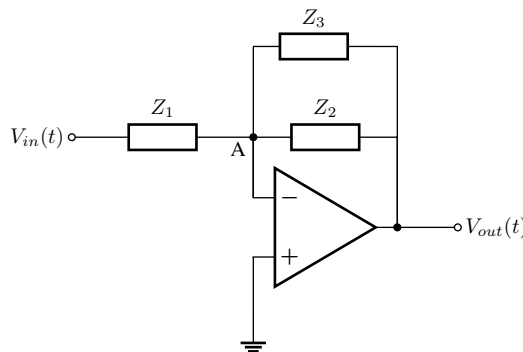


Figura 8: Circuito amplificador-integrador no domínio da frequência

Definindo $R_0 = 100\Omega$, $R = 1k\Omega$ e $C = 1\mu F$, podemos traçar o gráfico de bode dessa função de transferência para analisar seu comportamento.

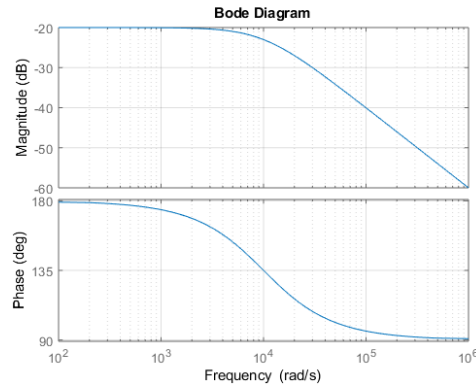


Figura 9: Diagrama de Bode para R_0 finito

Esse circuito é conhecido como circuito integrador com limitação do ganho em D.C.

Observe que nos cálculos desprezamos o termo k , o qual resultaria na transformada $k = \frac{1}{s}$. A supressão foi feita a partir da hipótese de condição inicial nula. Deixaremos a cargo do leitor a análise do caso em que a condição inicial é não nula.

A inserção de R_0 resultou numa estabilidade do circuito antes de encontrarmos o primeiro polo. Note que há uma queda de tensão desde o início. Se quiséssemos uma queda de tensão inicial nula, deveríamos dimensionar R_0 para ser idêntico a R .

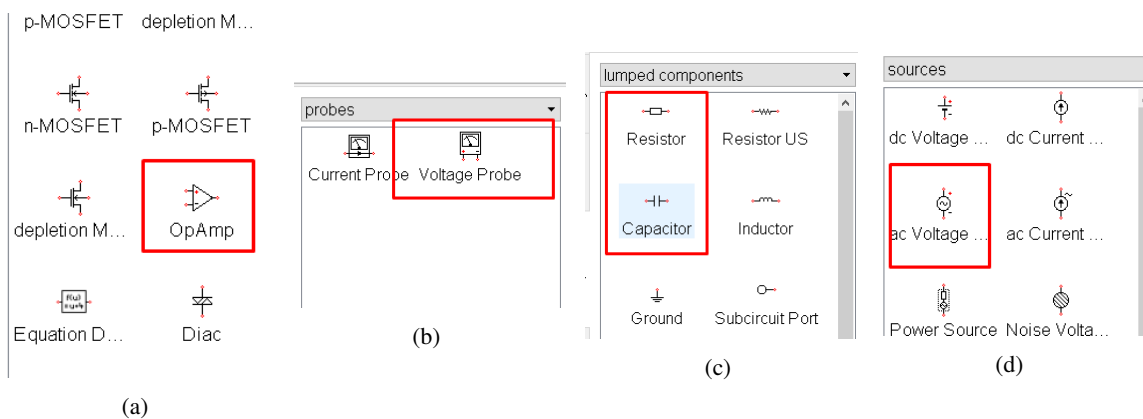
2) Simulações

2.1) Circuito amplificador-diferenciador

2.1.1) Diferenciador Senoidal

a) Simule o circuito da Figura 1 para $R_c = 0$ e para $R_c = 100\Omega$. Utilize $R = 1k\Omega$ e $C = 1\mu F$. Verifique a saída $V_{out}(t)$ para $V_{in}(t)$ ajustado em $2V_{pp}$ e $100Hz$ nos seguintes formatos: senoidal, quadrada e triangular.

- Na aba Componentes, vá em componentes não lineares e coloque um Amplificador Operacional. Vá em componentes agrupados e coloque dois resistores e um capacitor. Vá em Fontes e coloque uma fonte de tensão AC. Vá em Ponteiras e coloque uma ponteira de tensão.



- Conecte os componentes sem esquecer da referência do terra e ajuste seus valores para os pedidos no exercício. Nomeie o nó de saída.

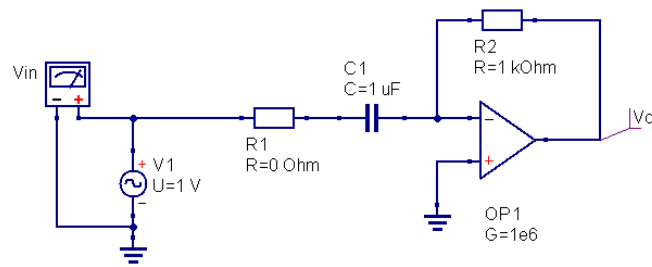


Figura 11: Circuito Diferenciador.

- Será utilizada a simulação transiente para se observar o comportamento do circuito ao longo do tempo. O período da onda é de 10ms.

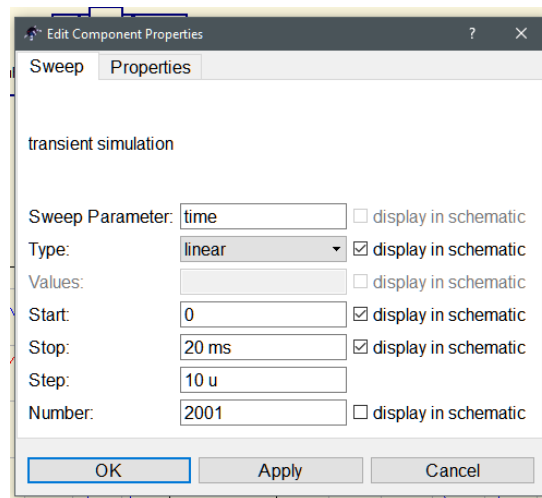


Figura 12: Simulação Transiente.

- Salve e simule o circuito.



Figura 13:

- Vá em Diagramas e insira uma tabela. Coloque o valor da tensão $V_o.V$.

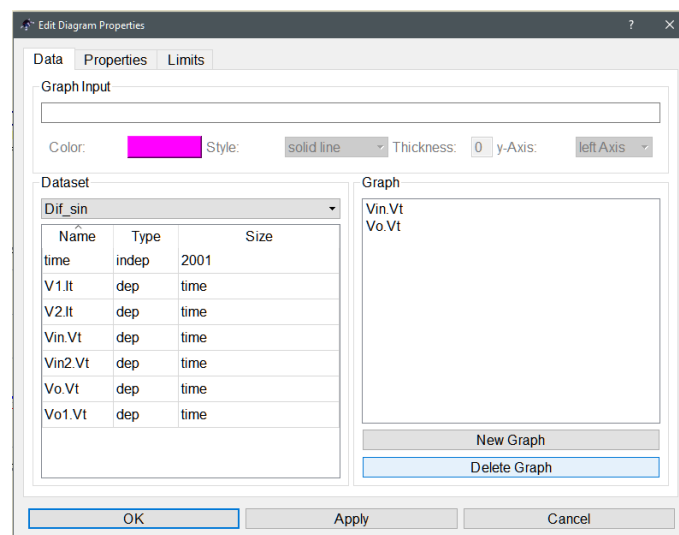


Figura 14: Inserção dos valores do Gráfico

- E assim verifica-se os valores pedidos no exercício.

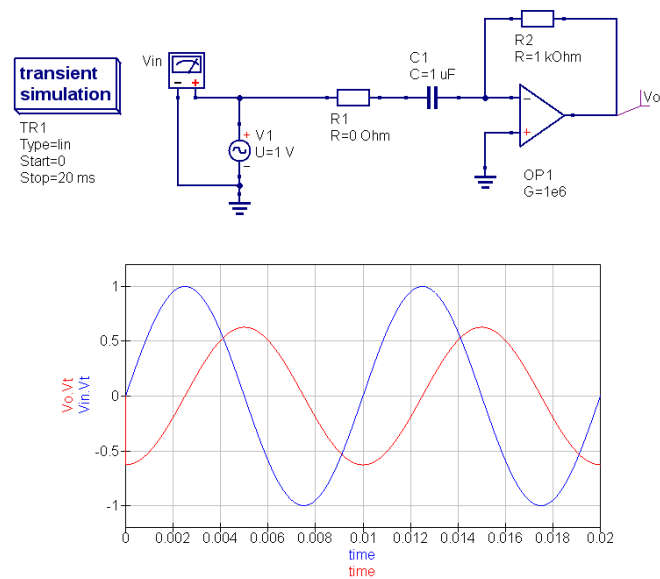


Figura 15: Forma de onda exigida no exercício.

- Para $R_c = 100\Omega$, ajuste o valor do resistor, salve e simule. O gráfico deve estar na seguinte forma.

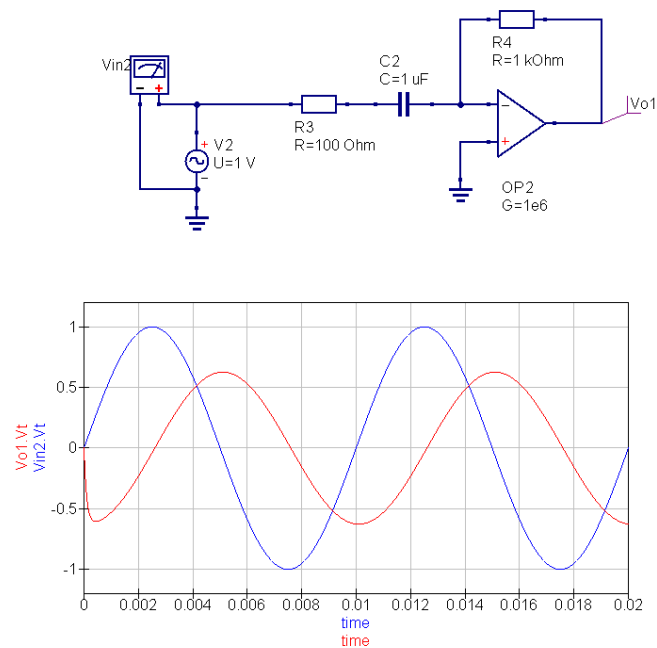
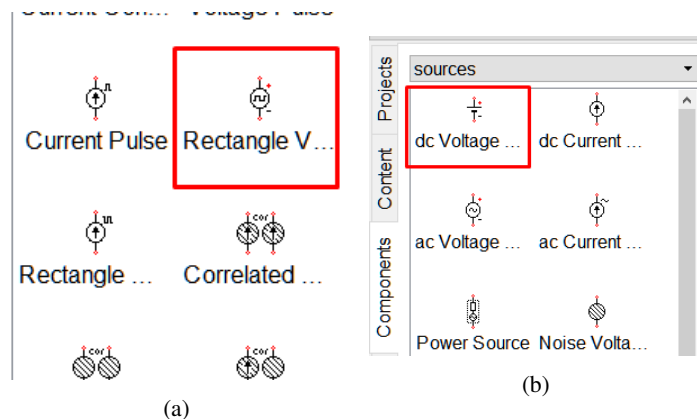


Figura 16: Circuito com $R_c = 100$.

2.1.2) Diferenciador Quadrado

- Vá em Arquivo → Salvar como... e mude o nome do arquivo para utilizar o esquemático para o próximo circuito. Na aba Componentes, vá em Fontes e coloque uma fonte de tensão retangular e uma fonte DC. Apague a fonte de tensão AC.



- Queremos uma onda quadrada, logo U deve ser 2V. Como a frequência é de 100 Hz, T_H e T_L devem ser 5 ms. T_r e T_f devem ser igual a zero, pois a mudança de nível é instantânea.

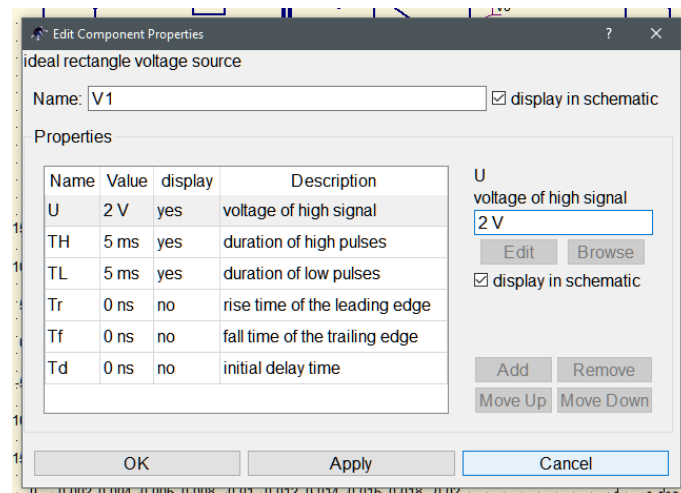


Figura 18: Parâmetros para onda quadrada.

- Para deslocar a onda na metade da amplitude e colocar para ela variar entre +1V e -1V, será utilizada uma fonte DC de -1V. Conecte os componentes sem esquecer da referência do terra e ajuste seus valores para os pedidos no exercício. Nomeie o nó de saída.

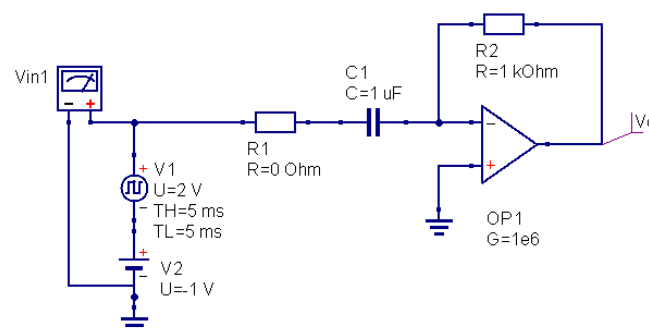


Figura 19: Circuito montado no Qucs.

- Como o período da onda é de 10ms, coloque tempo suficiente para visualizar o comportamento da onda e resolução grande o suficiente para gerar a onda.

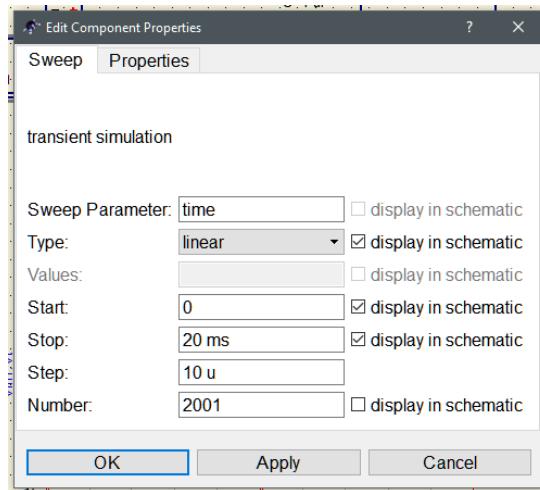


Figura 20: Parâmetros para a simulação transiente.

- Salve e simule. Vá em Diagramas e insira um plano cartesiano. Coloque o valor das tensões $V_o.V_t$ e $V_{in}.V_t$. Para visualizar a amplitude de $V_o.V_t$, coloque seu eixo y à direita.

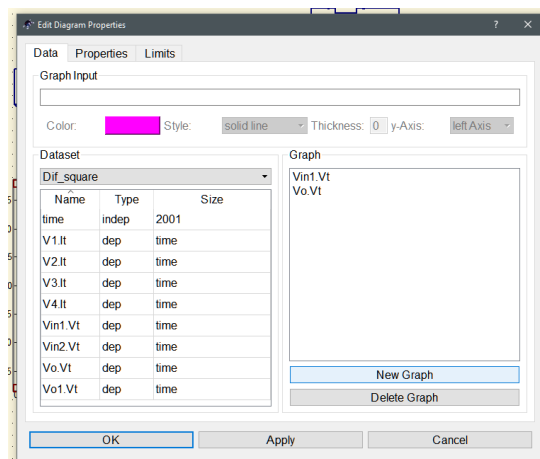


Figura 21: Parâmetros para obtenção do diagrama.

- Assim, verifica-se que os valores pedidos no exercício.

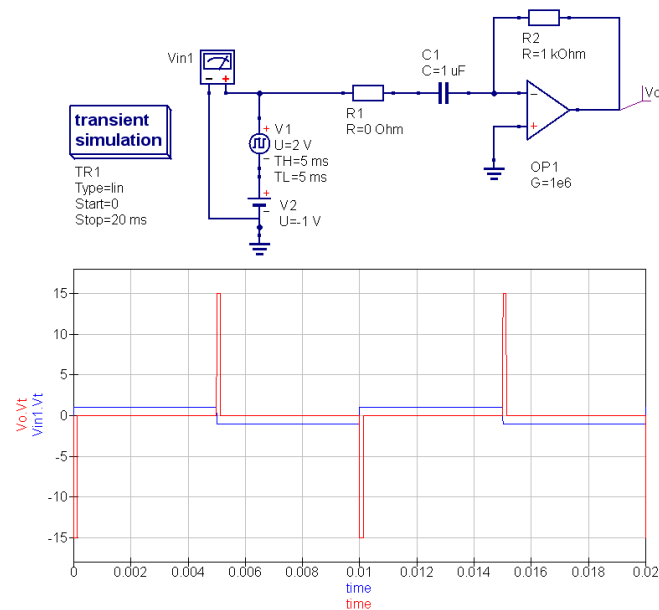
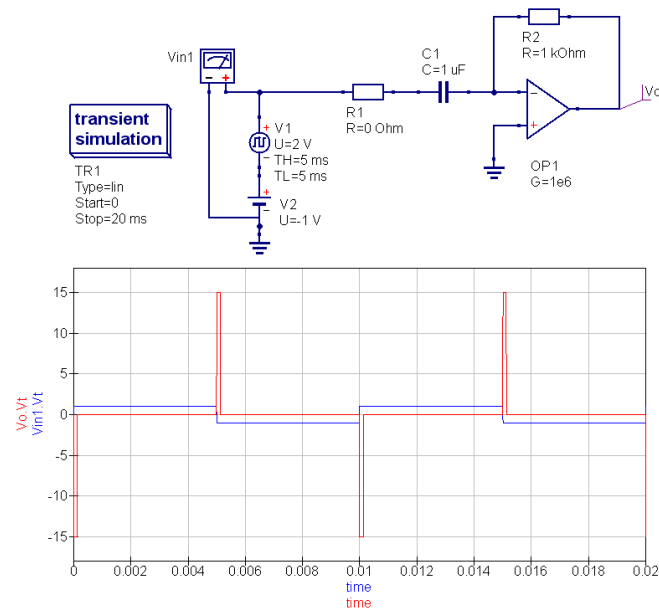


Figura 22: Comportamento do circuito exigido pelo exercício.

- Para $R_C = 100\Omega$, ajuste o valor do resistor, salve e simule.

Figura 23: Comportamento do circuito com $R_c = 100\Omega$

2.1.3) Diferenciador Triângular

- Vá em Arquivo → Salvar como... e mude o nome do arquivo para utilizar o esquemático para o próximo circuito. Queremos uma onda triangular, logo U deve ser 2V. Como a frequência é de 100 Hz, encontra-se o valor do período de aproximadamente 10 ms, logo o valor do T_H , T_L , T_r e T_f devem ser 5 ms.

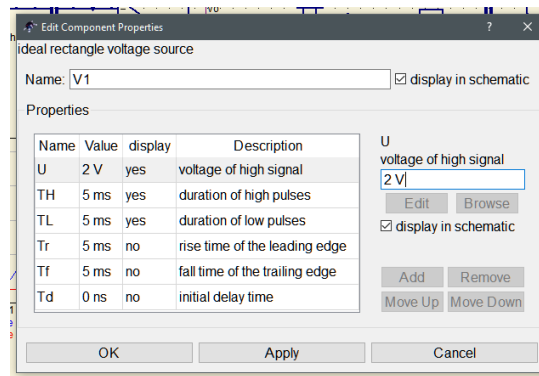


Figura 24: Edição da fonte retangular para uma triangular.

- Para deslocar a onda na metade da amplitude e colocar para ela variar entre +1V e -1V, será utilizada uma fonte DC de -1V. Conecte os componentes sem esquecer da referência do terra e ajuste seus valores para os pedidos no exercício. Nomeie o nó de saída.

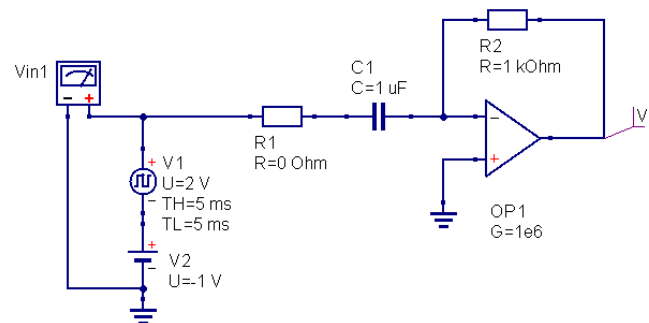


Figura 25: Circuito exigido pelo exercício.

- Como o período da onda é de 10ms, coloque tempo suficiente para visualizar o comportamento da onda e resolução grande o suficiente para gerar a onda.

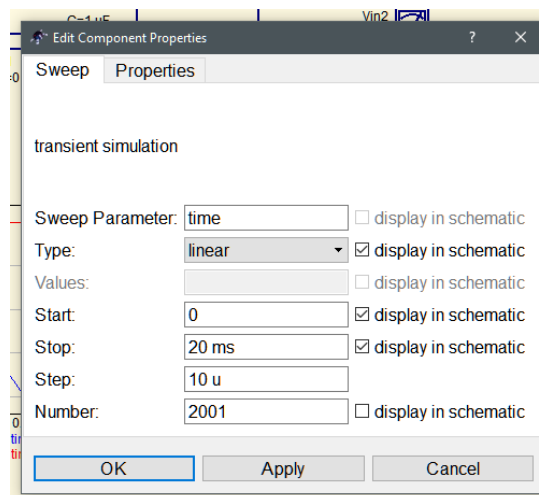


Figura 26: Parâmetros para a simulação transiente.

- Salve e simule. Vá em Diagramas e insira um plano cartesiano. Coloque o valor das tensões Vo.Vt e Vin.Vt. Para visualizar a amplitude de Vo.Vt, coloque seu eixo y à direita.



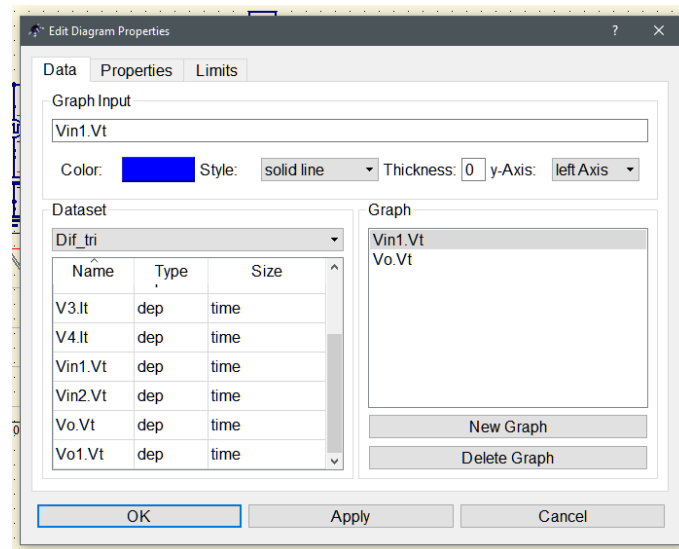


Figura 27: Edição dos eixos que compõem o gráfico.

- Assim, verifica-se os valores pedidos no exercício.

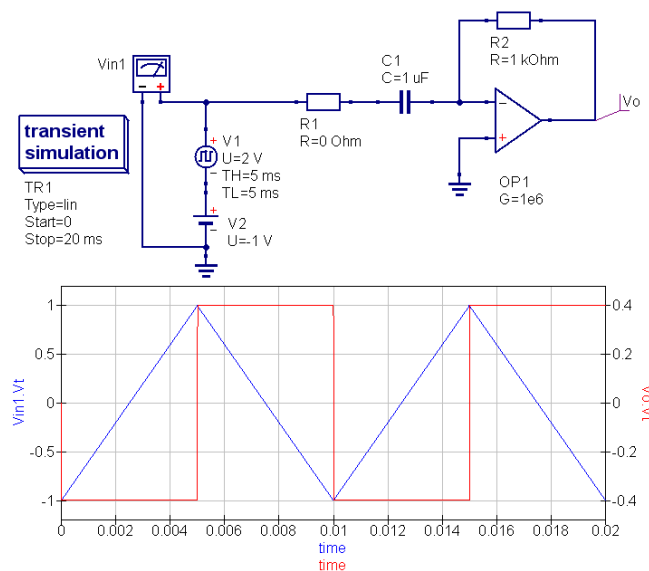
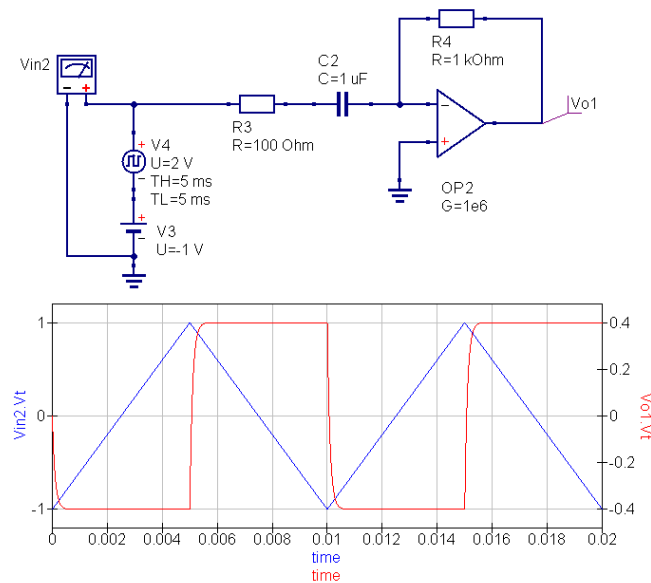


Figura 28: Comportamento do circuito exigido pelo exercício.

- Para $R_c = 100\Omega$, ajuste o valor do resistor, salve e simule.

Figura 29: Comportamento do circuito com $R_c = 100\ \Omega$

2.1.4) Circuito amplificador-integrador

2.1.5) Integrador Senoidal

- Simule o circuito da Figura 2 para $R_o \rightarrow \infty$ e para $R_o = 100\ \Omega$. Utilize $R = 1\ k\Omega$ e $C = 1\ \mu F$. Verifique a saída $V_{out}(t)$ para $V_{in}(t)$ ajustado em $2\ V_{pp}$ e 1 kHz nos seguintes formatos: senoidal, quadrada e triangular.

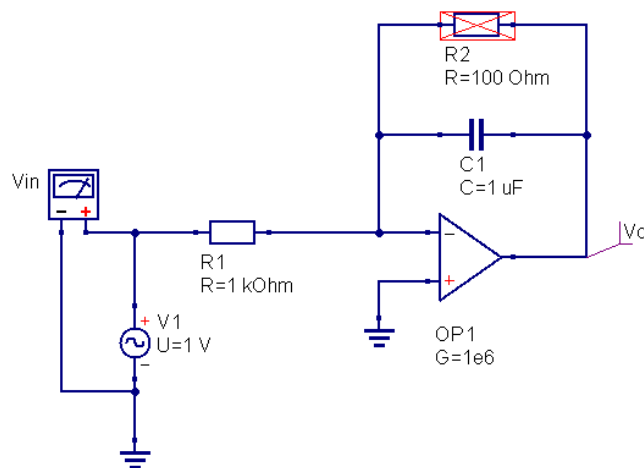


Figura 30: Circuito exigido pelo exercício.

- Como o período da onda é de 1 ms, coloque tempo suficiente para visualizar o comportamento da onda e resolução grande o suficiente para gerar a onda.

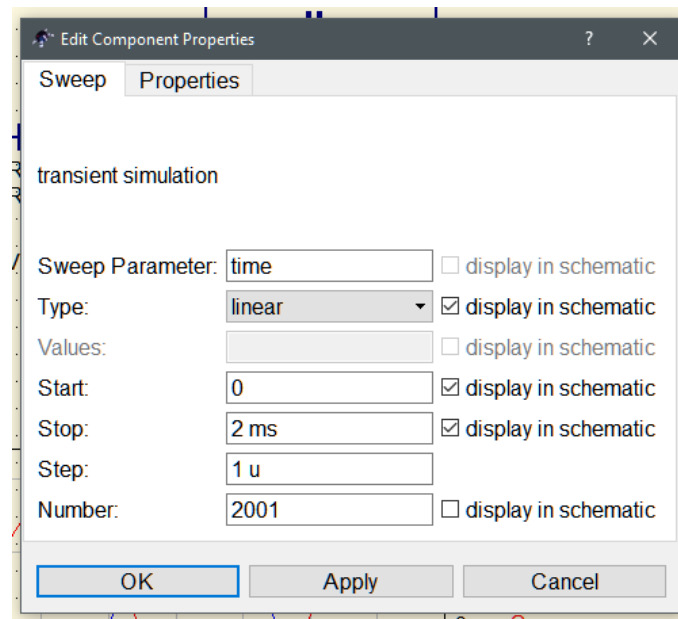


Figura 31: Parâmetros para a simulação transiente.

- Vá em Diagramas e insira um plano cartesiano. Coloque o valor das tensões $V_o.Vt$ e $V_{in}.Vt$. Para visualizar a amplitude de $V_o.Vt$, coloque seu eixo y à direita.

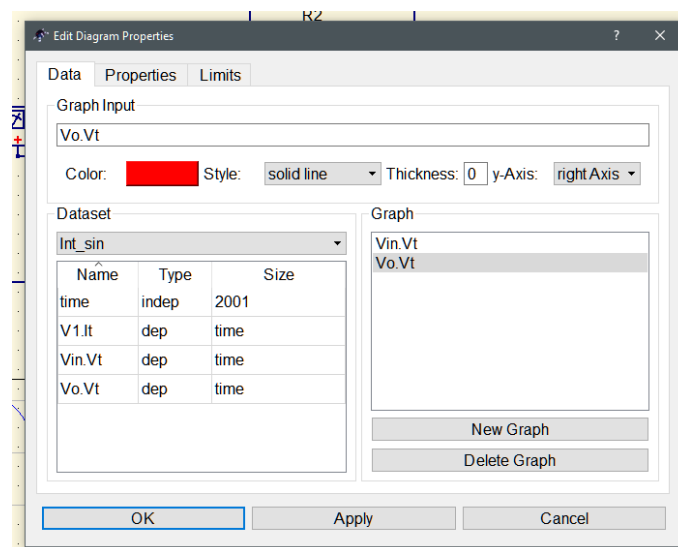


Figura 32: Edição dos eixos do gráfico.

- Assim, verifica-se que os valores pedidos no exercício.

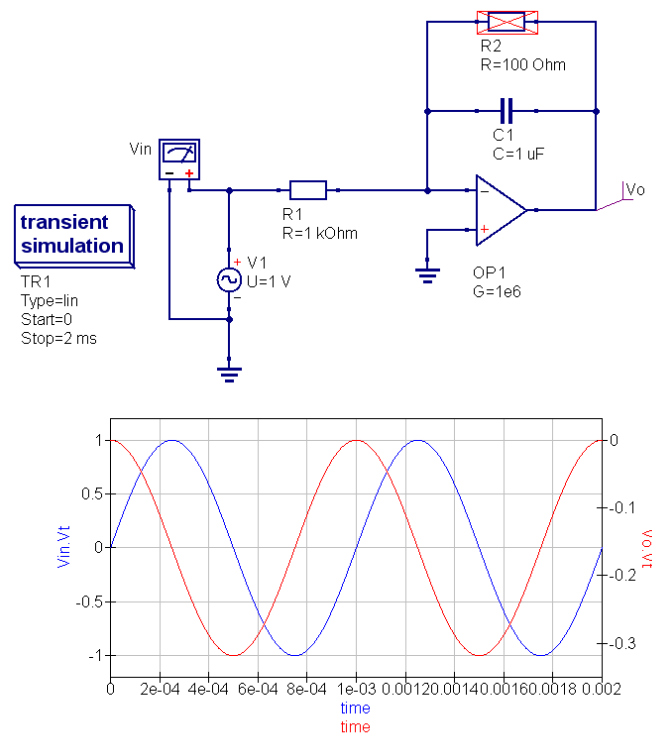


Figura 33: Resultado exigido pelo exercício.

- Para $R_o = 100\Omega$, reative o resistor, salve e simule.

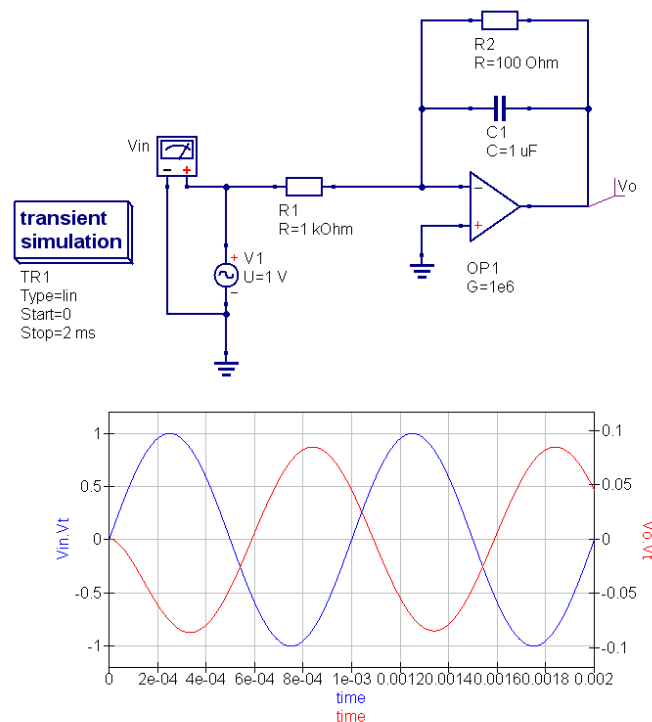


Figura 34: Integrador senoidal com R_2 habilitado.

2.1.6) Integrador Quadrado

- Vá em Arquivo → Salvar como... e mude o nome do arquivo para utilizar o esquemático da onda quadrada para o próximo circuito. Queremos uma onda quadrada, logo U deve ser 2V. T_H e T_L são 1 ms. T_r e T_f devem ser igual a zero, pois a mudança de nível é instantânea.

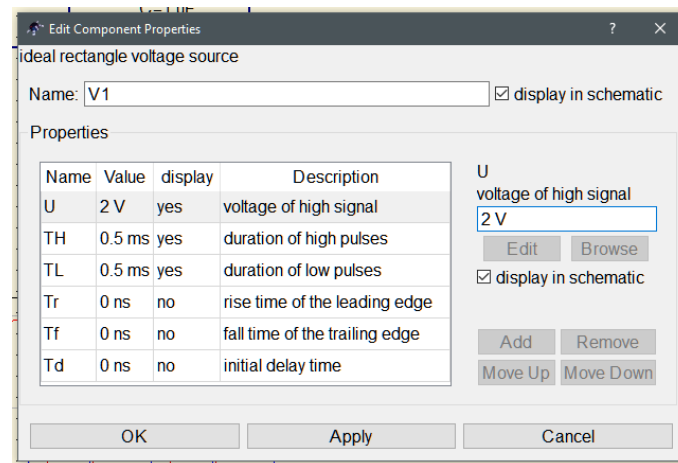


Figura 35: Configuração da fonte de onda quadrada.

- Conecte os componentes sem esquecer da referência do terra e ajuste seus valores para os pedidos no exercício. Desative a resistência R_o para que ela fique como um circuito aberto, ou seja, tendendo ao infinito. Para fazer isso, clique com o botão direito sobre o componente e clique em *Deactivate/Activate* (ativar/desativar)

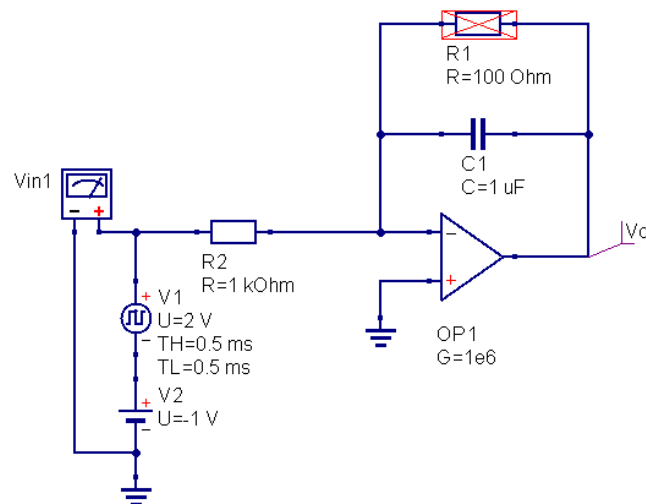


Figura 36: Configuração da fonte de onda quadrada.

- Como o período da onda é de 1ms, coloque tempo suficiente para visualizar o comportamento da onda e resolução grande o suficiente para gerar a onda.



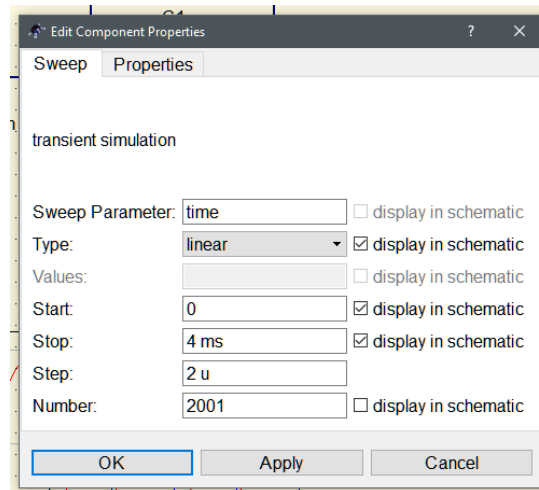


Figura 37: Configuração da simulação transiente.

- Vá em Diagramas e insira um plano cartesiano. Coloque o valor das tensões Vo.Vt e Vin.Vt. Para visualizar a amplitude de Vo.Vt, coloque seu eixo y à direita.

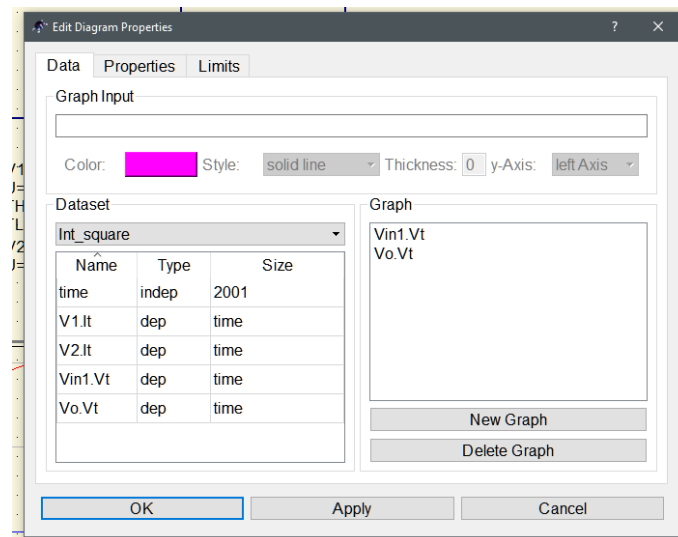


Figura 38: Configuração dos eixos do gráfico.

- Assim, verifica-se que os valores pedidos no exercício.

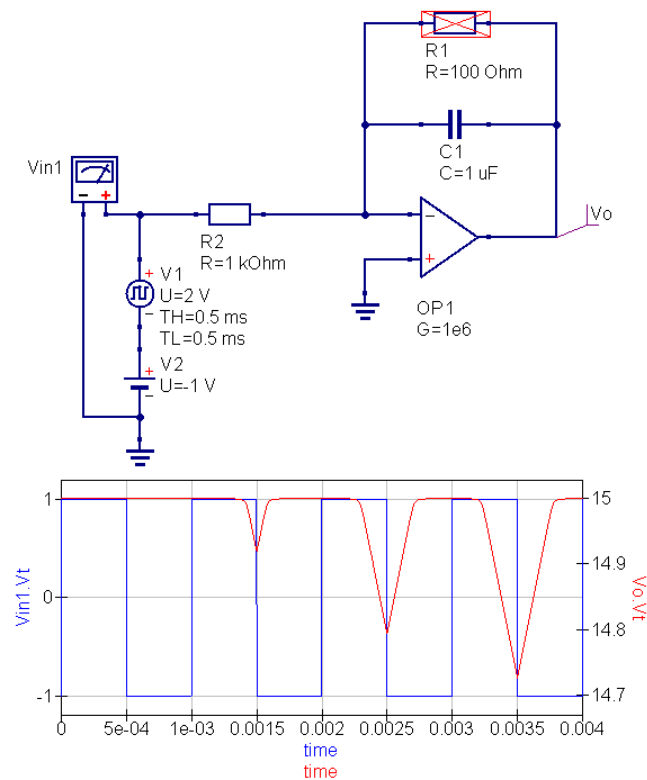


Figura 39: Comportamento do circuito exigido pelo exercício.

- Para $R_o = 100\Omega$, reative o resistor, salve e simule.

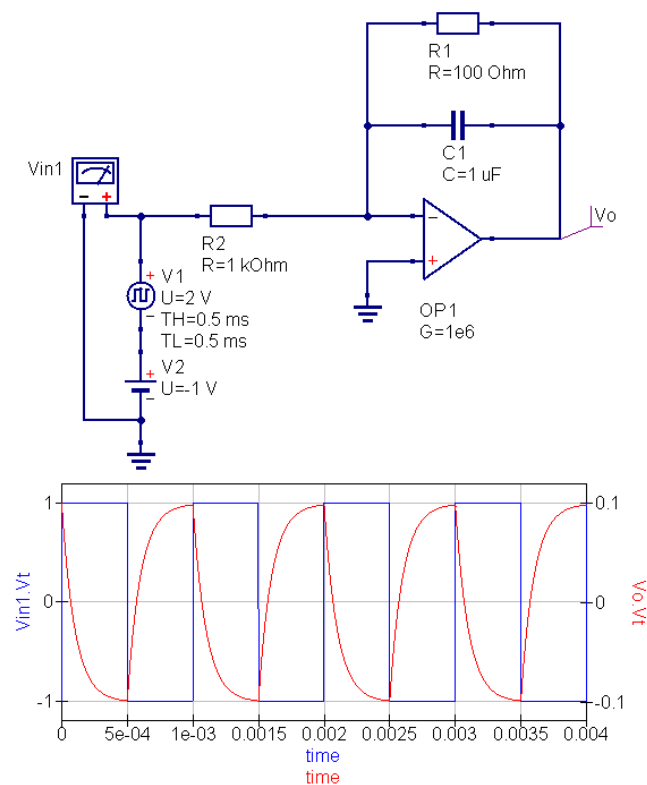


Figura 40: Comportamento do circuito com $R = 100\Omega$.

2.1.7) Integrador Triangular

- Vá em Arquivo → Salvar como... e mude o nome do arquivo para utilizar o esquemático da onda triangular para o próximo circuito. Queremos uma onda triangular, logo U deve ser 2V. Como a frequência é de 1 kHz, o valor do T_H , T_L , T_r e T_f devem ser 0,5 ms.

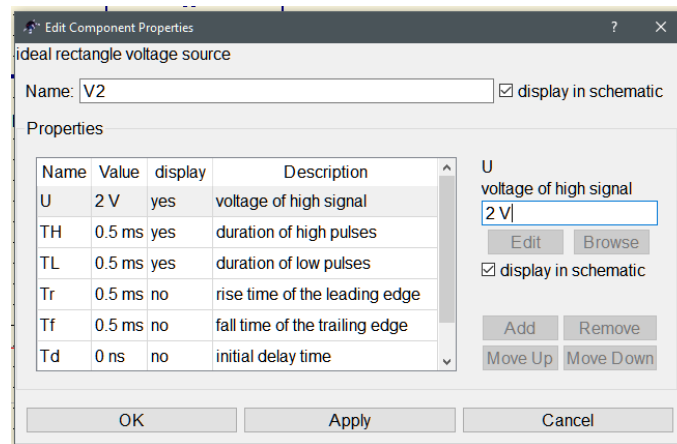


Figura 41: Parâmetros da fonte quadrada.

- Conecte os componentes sem esquecer da referência do terra e ajuste seus valores para os pedidos no exercício. Desative a resistência R_o para que ela fique como um circuito aberto, ou seja, tendendo ao infinito.

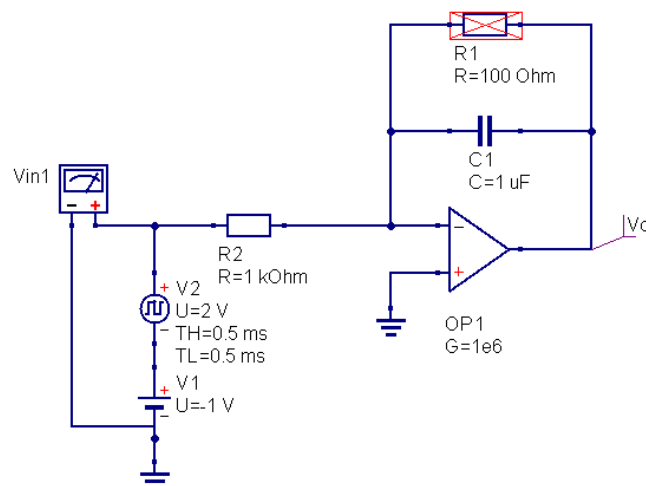


Figura 42: Circuito a ser montado.

- Salve e simule. Vá em Diagramas e insira um plano cartesiano. Coloque o valor das tensões V_o , V_t e V_{in} . Para visualizar a amplitude de V_o , V_t , coloque seu eixo y à direita.



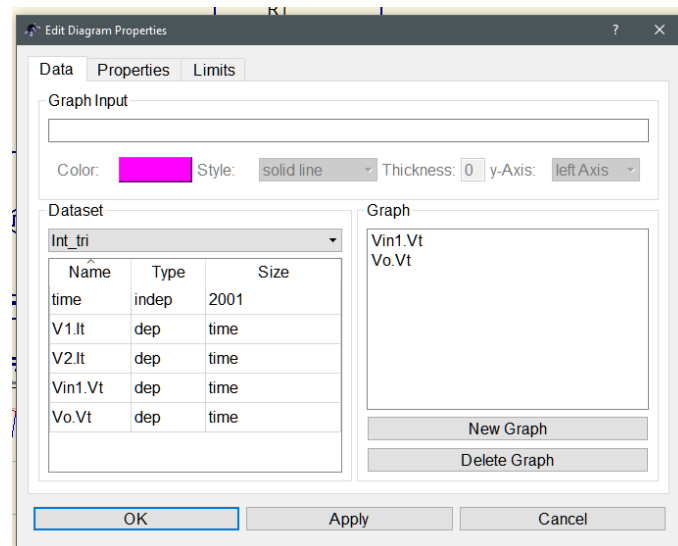


Figura 43: Parâmetros dos eixos dos gráficos.

- Assim, verifica-se que os valores pedidos no exercício.

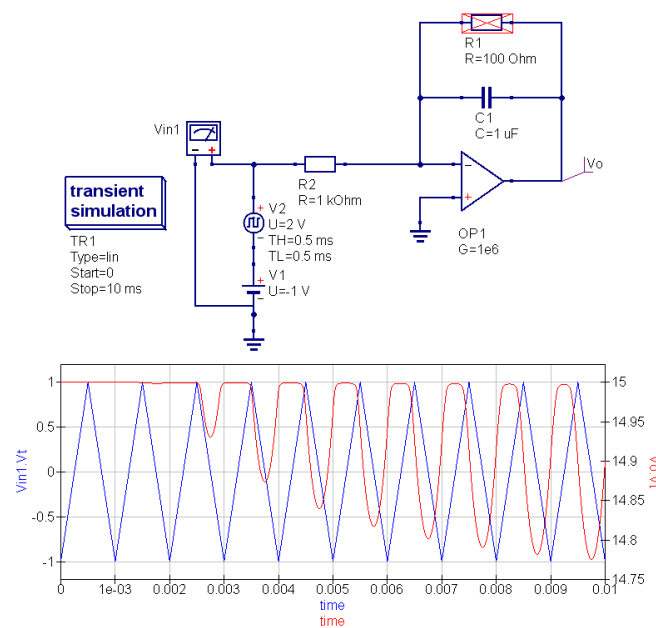


Figura 44: Comportamento esperado do circuito.

- Para $R_o = 100\Omega$, reative o resistor, salve e simule.

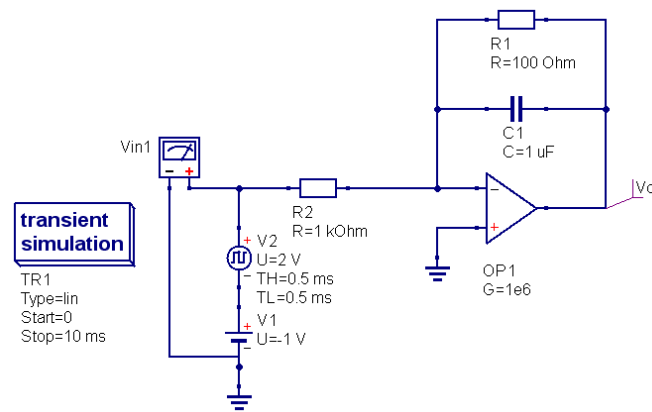


Figura 45: Comportamento esperado do circuito com $R_o = 100\Omega$.

2.2) Circuito para resolução de EDOs

Tome a seguinte equação diferencial:

$$5x' + 2x + 1 = y(t)$$

Fazendo $B1 = 5x'$, $B2 = 2x$ e $B3 = 1$ e dividindo em bloco, temos:

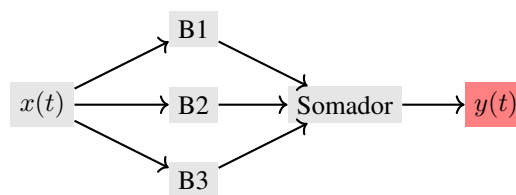
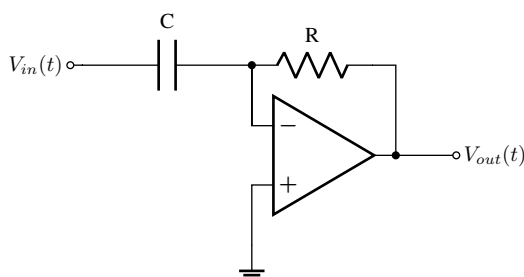


Figura 46: Diagrama de blocos de uma EDO.

O bloco B1 está derivando o sinal de entrada $x(t)$, logo precisaremos utilizar um AmpOp Diferenciador configurando-o para ter um ganho de 5 que é o valor multiplicando o x' . Porém, devido aos valores comerciais de um capacitor, ajustou-se para um ganho de 500 que será diminuído mais para frente. Utilizando um $R = 500\Omega$ e $C = 1F$, tem-se:



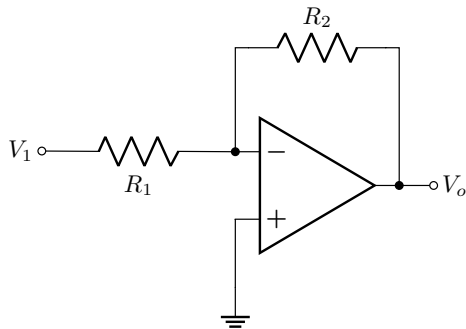
$$V_{outB1} = -RC \frac{dx}{dt}$$

$$V_{outB1} = -500 \cdot 1 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$V_{outB1} = -500x'$$

Figura 47: Circuito Diferenciador

No Bloco B2 podemos utilizar um AmpOp Inversor configurando-o para ter um ganho de 2 que é o valor multiplicando x nesse bloco. Utilizando um $R_1 = 20k\Omega$ e $R_2 = 10k\Omega$, tem-se:



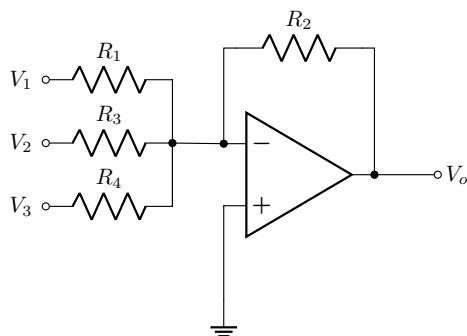
$$V_{outB2} = -\frac{R_2}{R_1}x$$

$$V_{outB2} = -\frac{20k}{10k}x$$

$$V_{outB2} = -2x$$

Figura 48: Circuito Inversor

O Bloco B3 é o mais simples de se implementar. Como todos os meus blocos até agora deram valores negativos e na equação todos são positivos, iremos colocar uma fonte DC de -1V para B3. Dessa forma, podemos utilizar um AmpOp Somador Inversor para gerar a equação que queremos. Utilizando um $R_1 = 10k\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 100\Omega$, tem-se:



$$y(t) = -\left(\frac{V_{outB1}}{R_1} + \frac{V_{outB2}}{R_3} + \frac{V_{outB3}}{R_4}\right) R_2$$

$$y(t) = -\left(\frac{-500x'}{R_1} + \frac{-2x}{R_3} + \frac{-1}{R_4}\right)$$

$$y(t) = \left(\frac{500x'}{10k} + \frac{2x}{100} + \frac{1}{100}\right) 100$$

$$y(t) = 5x' + 2x + 1$$

Figura 49: Circuito Somador.

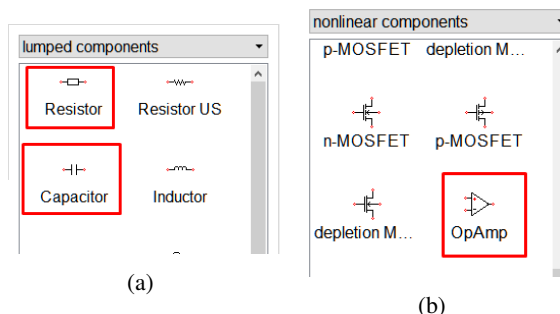
Com isso, conseguimos montar o diagrama de blocos que gera nossa equação inicial. Agora, vamos montar a simulação desse circuito no QUCS.

2.2.1) Simulação de um circuito de Resolução de EDOs

- Abra um novo esquemático.



- Na aba Componentes, vá em componentes não lineares e coloque três Amplificadores Operacionais. Vá em componentes agrupados e coloque sete resistores e um capacitor.



- Monte o AmpOp Diferenciador. Conecte os componentes sem esquecer da referência do terra e ajuste seus valores para os pedidos no exercício.

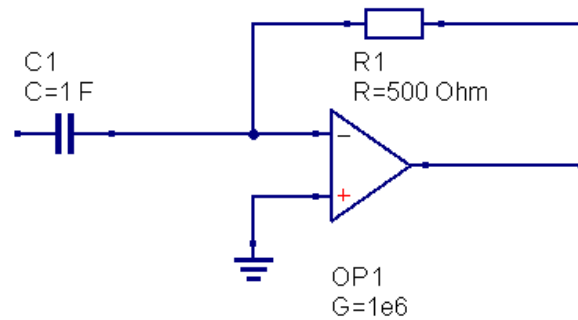


Figura 51: Circuito diferenciador referente ao bloco B1.

- Monte o AmpOp Inversor. Conecte os componentes sem esquecer da referência do terra e ajuste seus valores para os pedidos no exercício.

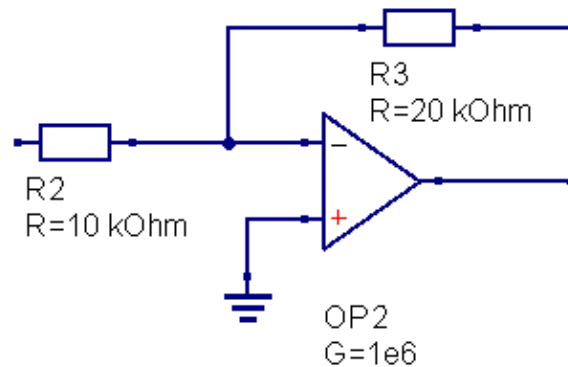


Figura 52: Circuito inversor referente ao bloco B2.

- Monte o AmpOp Somador Inversor. Conecte os componentes sem esquecer da referência do terra e ajuste seus valores para os pedidos no exercício. Nomeie a saída.

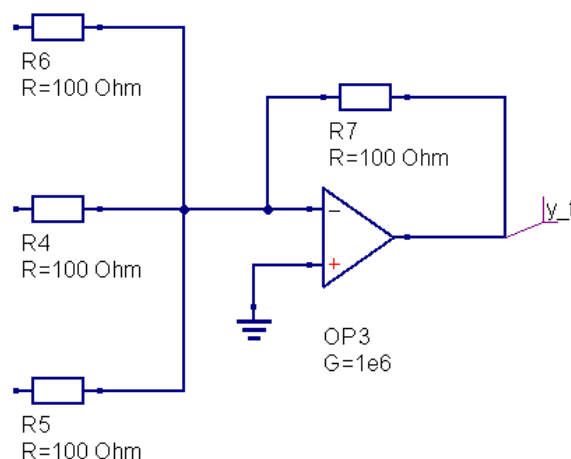
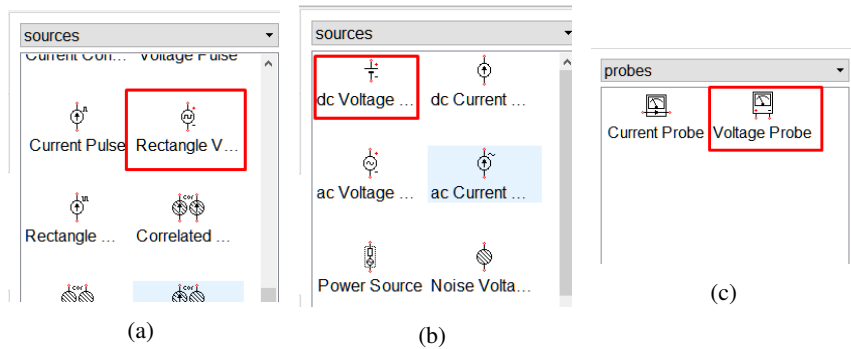


Figura 53: Circuito somador inversor referente ao bloco B3.

- Vá em Fontes e coloque uma fonte de tensão retangular e duas fontes DC. Vá em Ponteiras e coloque uma ponteira de tensão.



- Queremos uma onda quadrada com $V_{pp} = 2V$, logo U deve ser $2V$. TH e TL devem ser metade do período, logo $0,5$. T_r e T_f devem zero.

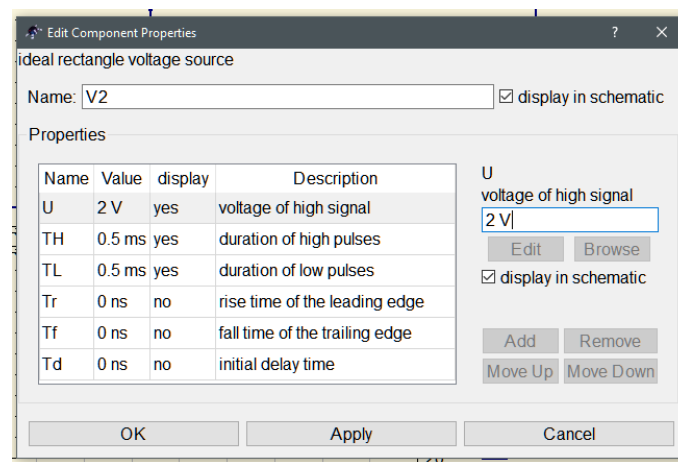


Figura 55: Parâmetros para a fonte de tensão retangular.

- Para deslocar a onda na metade da amplitude e colocar para ela variar entre $+1V$ e $-1V$, será utilizada uma fonte DC de $-1V$. Conecte os componentes sem esquecer da referência do terra e ajuste seus valores para os pedidos no exercício.

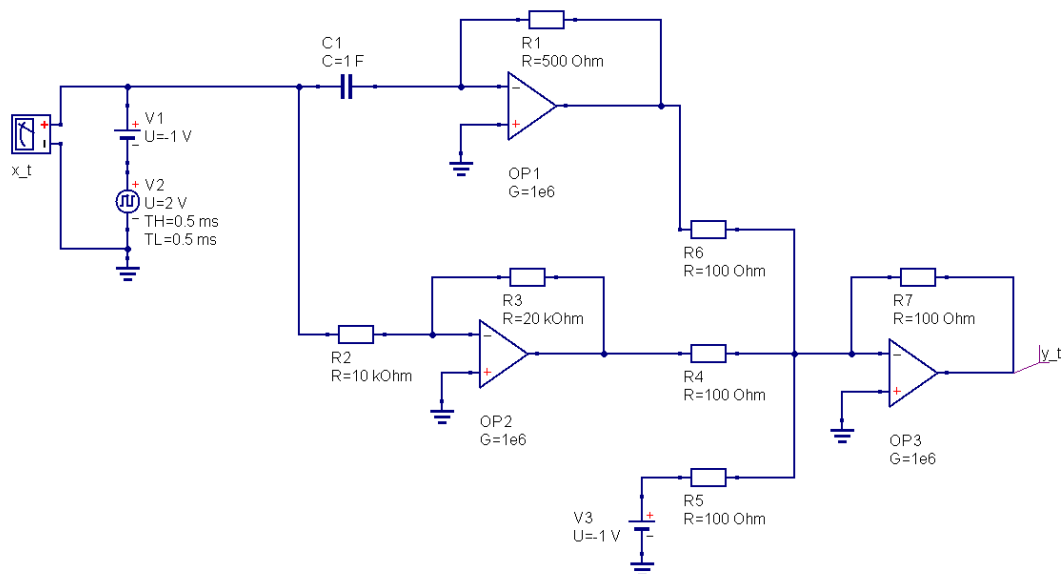


Figura 56:

- Será utilizada a simulação transiente para se observar o comportamento do circuito ao longo do tempo. E a simulação DC para as fontes DC.

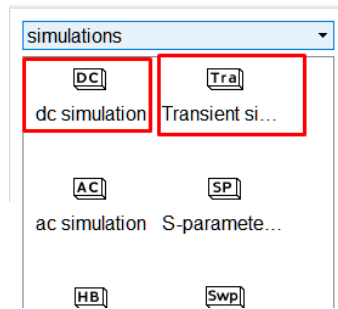


Figura 57: Inserção dos componentes responsáveis pela simulação.

- Como o período da onda é de 1ms, coloque tempo suficiente para visualizar o comportamento da onda e resolução grande o suficiente para gerar a onda.

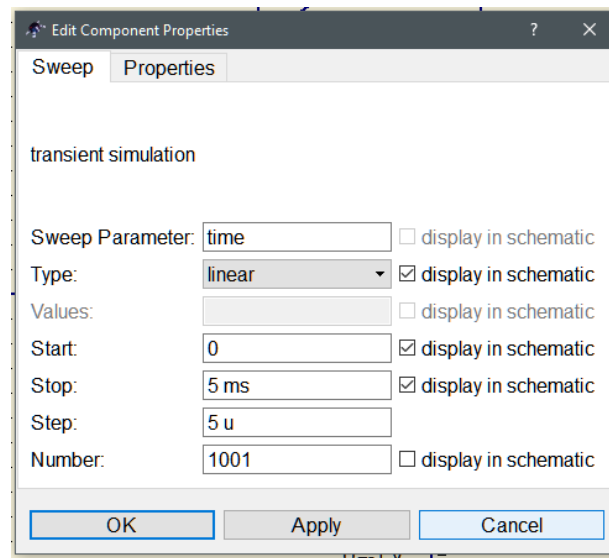


Figura 58: Parâmetros para simulação transiente.

OBS: Se a simulação estiver demorando muito para a conclusão, diminua a variável step de modo que não perca a qualidade de visualização do gráfico.

- Vá em Diagramas e insira um plano cartesiano. Coloque o valor das tensões $x_t.V_t$ e $y_t.V_t$. Coloque y_t no o eixo da direita.

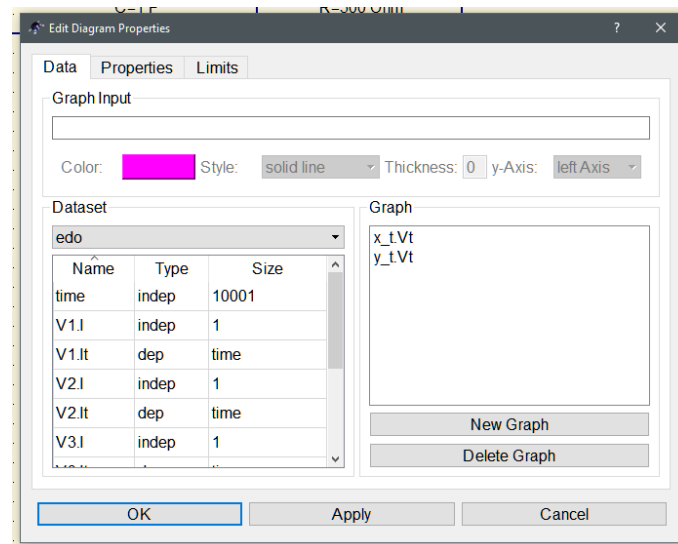


Figura 59: Edição dos eixos do gráfico.

- Por fim, temos a seguinte configuração.

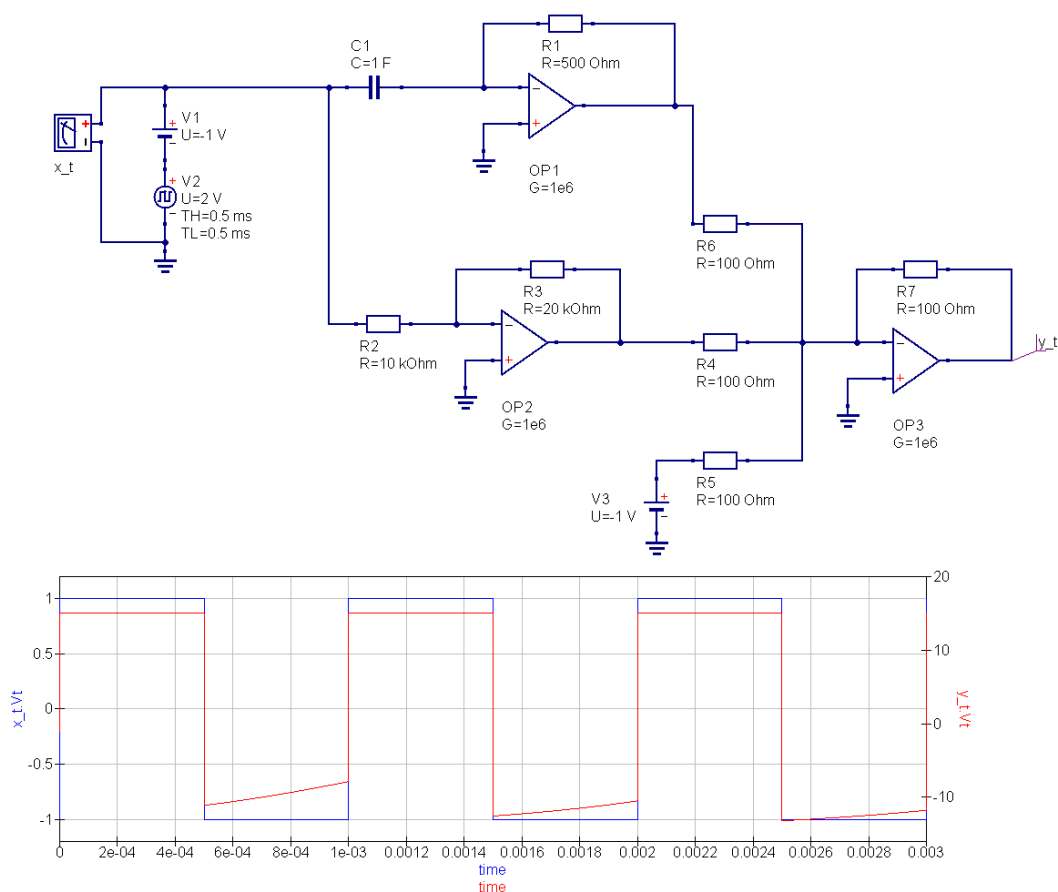


Figura 60: Comportamento esperado pelo exercício.