

# 1 Desigualdades Fundamentais para Espaços Normados

**Def. (Espaço Vetorial)**. Um **espaço vetorial** é um conjunto não vazio  $V$  sobre um corpo  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) munido de duas operações, adição ( $+$  :  $V \times V \rightarrow V$ ) e multiplicação por escalar ( $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ ), que satisfaz as seguintes propriedades: (a)  $u + (v + w) = (u + v) + w$  (associativa), (b)  $u + v = v + u$  (comutativa), (c) Existe  $0 \in V$  tal que  $0 + u = u$  para todo  $u \in V$ , (d) Para cada  $v \in V$  existe  $-v \in V$  tal que  $v + (-v) = 0$ , (e)  $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$ , para todo  $\alpha, \beta \in K$  e  $u \in V$ , (f)  $1 \cdot u = u$ , para todo  $u \in V$ , (g)  $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ , para todo  $\alpha \in K$  e  $u, v \in V$ , (h)  $(\alpha + \beta)u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ , para todo  $\alpha, \beta \in K$  e  $u \in V$ .

**Def. (Norma)**. Seja  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Uma **norma** em  $V$  é uma função  $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  que satisfaz as seguintes propriedades:  $\|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ,  $\|\lambda v\|_V = |\lambda| \|v\|_V$  e  $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$ , para todo  $v, w \in V$ .

**Def. (Espaço Vetorial Normado)**. Um espaço

vetorial  $V$  munido de uma norma é chamado **espaço vetorial normado**, isto é, um espaço vetorial normado é um par  $(V, \|\cdot\|_V)$  onde  $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma norma.

**Def. (Métrica de Espaço Métrico)**. Seja  $X$  um conjunto não vazio. Uma **métrica** ou **distância** em  $X$  é uma função  $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  satisfazendo:  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ , para todo  $x, y \in X$ ,  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ , para todo  $x, y, z \in X$ . O conjunto  $X$  munido da métrica  $\rho$  é chamado **espaço métrico** e é denotado por  $(X, \rho)$ .

Essas desigualdades são ferramentas essenciais para provar a desigualdade triangular para as normas, garantindo a validade dessas normas.

**Lema (Desigualdade de Young)** Se  $p \in (1, \infty)$ ,  $q \in (1, \infty)$  é tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $a, b \in [0, \infty)$ , então  $a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ .

## 2 Completude e Transformações Lineares

**Def. (Espaço de Banach)**. Um espaço vetorial normado que é **completo** com a métrica induzida pela norma é dito um **espaço de Banach**.

**Def. (Normas Equivalentes)**. Duas normas em  $X$ ,  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_2$ , são **equivalentes** se existem constantes positivas  $c_1$  e  $c_2$  tal que  $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \forall x \in X$ .

**Def. (Série Convergente e Abs. Convergente)**. Uma série  $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$  é dita **convergente** em  $X$  se a sequência de somas parciais  $\sum_{j=1}^n x_j$  converge para

$x$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Uma série é dita **absolutamente convergente** se a série das normas  $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$  é convergente.

**Def. (Transformação Linear Limitada)**.

Uma transformação linear  $T : X \rightarrow Y$  entre dois espaços vetoriais normados é **limitada** se existe uma constante  $c \geq 0$  tal que  $\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X$ , para todo  $x \in X$ .

**Def. (Transformação Linear Inversível)**.

$T \in L(X, Y)$  é **inversível** ou um **isomorfismo**

**Lema (Desigualdade de Hölder)** Se  $p \in (1, \infty)$  e  $q \in (1, \infty)$  é tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , então

$$\sum_{i=1}^N |x_i y_i| \leq \left[ \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{1/p} \left[ \sum_{i=1}^N |y_i|^q \right]^{1/q}$$

para todo  $x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ .

**Lema (Desigualdade de Minkowski)** Se  $p \in [1, \infty]$ , então

$$\left[ \sum_{i=1}^N |x_i + y_i|^p \right]^{1/p} \leq \left[ \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{1/p} + \left[ \sum_{i=1}^N |y_i|^p \right]^{1/p}$$

ou, em outras palavras,  $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$  para todo  $x = (x_1, \dots, x_N), y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ .

Essas desigualdades ajudam a estabelecer as propriedades fundamentais dos espaços normados, o que leva naturalmente ao estudo de sua completude e do comportamento das transformações entre eles.

se  $T$  é bijetora e  $T^{-1} \in L(Y, X)$ , o que é equivalente a existir  $c > 0$  tal que  $\|Tx\|_Y \geq c \|x\|_X$ .

**Def. (Isometria (Transformação Linear))**.  $T$  é uma **isometria** se  $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ , para todo  $x \in X$ .

**Teorema (1 Condição para a Completude)**

Um espaço vetorial normado é completo se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.

**Prop. (Equiv. p. Transf. Lineares Contínuas)**

Se  $X, Y$  são espaços vetoriais normados e  $T : X \rightarrow Y$  é linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $T$  é contínua;
- (b)  $T$  é contínua em 0;

(c)  $T$  é limitada.

**Prop. (Completude de  $L(X, Y)$ )** Se  $Y$  é completo, então  $L(X, Y)$  é completo.

O conceito de transformações lineares limitadas

### 3 Os Teoremas de Hahn-Banach e Suas Consequências

**Def. (Funcional Linear)** . Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $K$ . Uma função linear  $f : X \rightarrow K$  é chamada um **funcional linear**.

**Def. (Espaço Dual ( $X^*$ ))** . Se  $X$  é um espaço vetorial normado,  $L(X, K)$  é um espaço de Banach que é chamado **espaço dual de  $X$**  e denotado por  $X^*$ .

**Def. (Funcional Sublinear)** . Se  $X$  é normado, um **funcional sublinear** é uma função  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  e  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ , para todo  $x, y \in X$  e  $\lambda > 0$ .

**Def. (Espaço Reflexivo)** . Para espaços de dimensão infinita, quando a imagem isométrica  $\hat{X}$  é igual ao bidual  $X^{**}$ ,  $X$  é dito **reflexivo**. A reflexividade passa a ser entendida como  $X = X^{**}$  quando  $X$  é identificado com seu subespaço  $\hat{X}$  no bidual  $X^{**}$ .

**Def. (Hiperplano Afim)** . Um **hiperplano (afim)** é um conjunto da forma  $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$  onde  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear não identicamente nulo e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Diremos que  $H$  é o hiperplano de equação  $[f = \alpha]$ .

**Def. (Conjunto Convexo)** . Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $K$ . Diremos que  $C \subset X$  é **convexo** se  $tx + (1 - t)y \in C$  sempre que  $t \in [0, 1]$  e  $x, y \in C$ .

**Def. (Separação Fraca)** . Se  $A, B \subset X$  dizemos

que o hiperplano de equação  $[f = \alpha]$  separa  $A$  e  $B$  no **sentido fraco** se  $f(x) \leq \alpha$  para todo  $x \in A$  e  $f(x) \geq \alpha$  para todo  $x \in B$ .

**Def. (Separação Forte)** . Diremos que o hiperplano de equação  $[f = \alpha]$  separa  $A$  e  $B$  no **sentido forte** se existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$  para todo  $x \in A$  e  $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$  para todo  $x \in B$ .

**Def. (Func. de Minkowski de um Convexo)** . Seja  $X$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$  e  $C \subset X$  um aberto convexo com  $0 \in C$ . Para todo  $x \in X$ , o **funcional de Minkowski de  $C$** ,  $p(x)$ , é definido como  $p(x) = \inf\{\alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C\}$ .

**Def. (Complexificação de  $X$  ( $X^\#$ ))** . Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . A **complexificação de  $X$**  estende  $X$  a um espaço vetorial  $X^\#$  sobre  $\mathbb{C}$  e é feita da seguinte forma:  $X^\# = \{(x, y) : x, y \in X\}$  com a operação de adição coordenada a coordenada e com a operação de multiplicação por escalar dada por  $(\alpha + i\beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$ .

**Prop. (Relação entre Func. Lineares  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ )** . Seja  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ . Se  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  é um funcional linear e  $u = \text{Re}(f)$ , então  $u$  é um funcional linear real e  $f(x) = u(x) - iu(ix)$  para todo  $x \in X$ . Reciprocamente, se  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  é um funcional linear real e  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  é definido por  $f(x) = u(x) - iu(ix)$ , então  $f$  é um funcional linear complexo. Se  $X$  é normado,  $f$  é limitado se e

entre espaços completos (espaços de Banach) leva diretamente ao estudo mais detalhado de funcionais lineares, que são centrais para os teoremas de Hahn-Banach.

somente se  $u$  é limitado, e neste caso  $\|f\| = \|u\|$ .

**Teorema (Hahn-Banach (E.V. $\mathbb{R}$ ))** Sejam  $X$  um espaço vetorial real,  $p$  um funcional sublinear em  $X$ ,  $M$  um subespaço vetorial de  $X$  e  $f$  um funcional linear em  $M$  tal que  $f(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in M$ . Então existe um funcional linear  $F$  em  $X$  tal que  $F(x) \leq p(x)$  para todo  $x \in X$  e  $F|_M = f$ .

**Teorema (Hahn-Banach (E.V. $\mathbb{C}$ ))** Sejam  $X$  um espaço vetorial complexo,  $p$  uma seminorma em  $X$ ,  $M$  um subespaço vetorial de  $X$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  um funcional linear com  $|f(x)| \leq p(x)$  para  $x \in M$ . Então existe  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ , um funcional linear, tal que  $|F(x)| \leq p(x)$  para todo  $x \in X$  e  $F|_M = f$ .

**Cor. (de Hahn-Banach)** Seja  $X$  um espaço vetorial normado.

1. Se  $M$  é um subespaço vetorial fechado de  $X$  e  $x \in X \setminus M$ , existe  $f \in X^*$  tal que  $f(x) \neq 0$  e  $f|_M = 0$ . Na verdade, se  $\delta = \inf_{y \in M} \|x - y\|$ ,  $f$  pode ser escolhido tal que  $\|f\| = 1$  e  $f(x) = \delta$ .
2. Se  $x \neq 0$ , existe  $f \in X^*$  tal que  $\|f\| = 1$  e  $f(x) = \|x\|$ .
3. Os funcionais lineares limitados em  $X$  separam pontos.
4. Se  $x \in X$ , defina  $\hat{x} : X^* \rightarrow \mathbb{C}$  por  $\hat{x}(f) = f(x)$ ,  $\forall f \in X^*$ . Então a transformação  $x \rightarrow \hat{x}$  é uma isometria linear de  $X$  em  $X^{**}$ .

**Prop. (Hiperplanos Fechados)** O hiperplano com equação  $[f = \alpha]$  é fechado se e somente se  $f$  é contínuo.

**Lema (O Funcional de Minkowski)** Seja  $X$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{R}$  e  $C \subset X$  um conjunto convexo aberto com  $0 \in C$ . Para cada  $x \in X$  defina  $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$  ( $p$  é o funcional de Minkowski de  $C$ ). Então,  $p$  é um funcional sublinear e existe  $M$  tal que  $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$ ,  $\forall x \in X$ , e  $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$ .

**Lema (Separação Ponto de um Convexo)**

Sejam  $C \subset X$  um conjunto convexo aberto e não vazio e  $x_0 \in X \setminus C$ . Então existe  $f \in X^*$  tal que  $f(x) < f(x_0)$  para todo  $x \in C$ . Em particular, o hiperplano fechado com equação  $[f = f(x_0)]$  separa fracamente  $C$  de  $x_0$ .

**Teorema (1 Forma Geométrica Hahn-Banach)**

Sejam  $X$  um espaço vetorial normado real e  $A, B \subset X$  dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Se  $A$  é aberto, existe um hiperplano fechado que separa fracamente  $A$  e  $B$ .

**Teorema (2 Forma Geométrica Hahn-Banach)**

Sejam  $X$  um espaço vetorial normado real, e  $A$  e  $B$  conjuntos convexos, não vazios e disjuntos em  $X$ . Suponha que  $A$  é fechado e  $B$  é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa fortemente  $A$  e  $B$ .

**Cor. (Anuladores para Subespaços Próprios)**

Sejam  $X$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  e  $F \subset X$  um subespaço vetorial próprio de  $X$  ( $\bar{F} \neq X$ ). Então, existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$  tal que  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in F$ .

## 4 Consequências do Teorema da Categoria de Baire

**Def. (Auto-valor e Auto-vetor)**. Considere um espaço vetorial  $X$  sobre o corpo  $K$  e uma transformação linear  $A : X \rightarrow X$ . Se a transformação linear  $\lambda I - A$  (para cada escalar  $\lambda \in K$ ) não é injetiva, existe  $0 \neq x \in X$  tal que  $(\lambda I - A)x = 0$ . Neste caso, diremos que  $\lambda$  é um \*\*auto-valor de  $A$ \*\* e que  $x$  é um \*\*auto-vetor de  $A$  associado ao auto-valor  $\lambda$ \*\*.

**Def. (Produto Escalar (Produto Interno))**.

Seja  $H$  um espaço vetorial sobre  $K$ . Um \*\*produto escalar\*\* em  $H$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow K$  tal que: (a)  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$  para todo  $u, v \in H$ , (b)  $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ , para todo  $u, v, w \in H, \alpha, \beta \in K$ , (c)  $\langle u, u \rangle \geq 0$  e  $\langle u, u \rangle = 0$  se, e somente se,  $u = 0$ .

**Def. (Vetores Ortogonais)**. Dois vetores  $u, v$  em um espaço com produto interno  $H$  são ditos \*\*ortogonais\*\* (escrevemos  $u \perp v$ ) se  $\langle u, v \rangle = 0$ .

**Def. (Projeção sobre o Convexo ( $P_K$ ))**. Se  $K$  é um subconjunto fechado e convexo de um es-

paço de Hilbert  $H$  e  $u_0 \in H$ , existe um único  $v_0 \in K$  tal que  $\|u_0 - v_0\| = \inf_{v \in K} \|u_0 - v\|$ . Escrevemos  $v_0 = P_K u_0$  e dizemos que  $P_K$  é a \*\*projeção sobre o convexo  $K$ \*\*.

**Def. (Projeção (Transformação Linear))**.

Uma transformação linear  $P : H \rightarrow M$  é dita uma \*\*projeção\*\* se  $P^2 = P$ .

**Def. (Projeção Ortogonal)**. Se  $P \in L(H)$  é uma projeção,  $M = Im(P)$  e  $M^\perp = N(P)$  dizemos que  $P$  é uma \*\*projeção ortogonal sobre  $M$ \*\*.

**Def. (Conjunto Ortonormal)**. Um subconjunto  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $H$  é chamado um \*\*conjunto ortonormal\*\* se  $\|u_\alpha\| = 1$  para todo  $\alpha \in A$  e  $u_\alpha \perp u_\beta$  para  $\alpha \neq \beta$ .

**Def. (Base Ortonormal)**. Um conjunto ortonormal tendo as propriedades (a-c) do Teorema 6 (ou Teorema 2), que são Completamento, Identidade de Parseval e Convergência de Série, é chamado uma \*\*base ortonormal de  $H$ \*\*.

**Def. (Transformação Unitária)**. Se  $H_1$  e  $H_2$  são espaços de Hilbert com produtos escalares  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ , uma \*\*transformação unitária\*\* de  $H_1$  sobre  $H_2$  é uma transformação linear sobrejetora  $U : H_1 \rightarrow H_2$  que preserva produto escalar; isto é,  $\langle Ux, Uy \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$ .

**Def. (T.L. Densamente Definida)**. Se  $D(A)$  (o domínio de  $A$ ) é denso em  $X$ , dizemos que  $A$  é \*\*densamente definida\*\*.

**Def. ((Domínio, Gráfico, Imagem, Núcleo))**.

Seja  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  uma transformação linear. Então,  $D(A)$  é o \*\*domínio de  $A$ \*\*;  
 $G(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y : x \in D(A)\} \subset X \times Y$  é o \*\*Gráfico de  $A$ \*\*;  
 $Im(A) = \{Ax \in Y : x \in D(A)\} \subset Y$  é a \*\*Imagem de  $A$ \*\*;  
e  $N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$  é o \*\*Núcleo de  $A$ \*\*.

**Def. (Transformação Linear Fechada)**. Diremos que uma transformação linear  $T$  é \*\*fechada\*\* se o seu gráfico  $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$  for fechado em  $X \times Y$ . É equivalente a dizer que, para toda sequência  $\{(u_n, Au_n)\}$  em  $D(A) \times Y$  que é con-

vergente em  $X \times Y$  para  $(u, v) \in X \times Y$ , temos que  $u \in D(A)$  e  $Au = v$ .

**Def. (Transformação Linear Fechável)** . Diremos que uma transformação linear  $A$  é **fechável** se  $G(\overline{A})$  é gráfico de uma transformação linear. É equivalente a dizer que, sempre que uma sequência  $\{(u_n, Au_n)\}$  em  $D(A) \times Y$  converge, em  $X \times Y$ , para  $(0, v) \in X \times Y$ , temos que  $v = 0$ .

**Def. (Conjunto Nunca Denso (ou Raro))** . Se  $(X, \rho)$  for um espaço métrico, um conjunto  $A \subset X$  será **nunca denso** ou **raro** se o seu fecho tiver interior vazio.

**Def. (Conjunto de Primeira Categoria)** . Um conjunto  $A \subset X$  será de **Primeira Categoria** em  $X$  se for união enumerável de conjuntos nunca densos.

**Def. (Conjunto de Segunda Categoria)** . Um conjunto será de **Segunda Categoria** em  $X$  se não for de Primeira Categoria.

**Def. (Aplicação Aberta)** . Sejam  $X, Y$  espaços vetoriais normados e  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação linear. Diremos que  $T$  será **aberta** se  $T(U)$  for aberto em  $Y$ , sempre que  $U$  for aberto em  $X$ .

**Prop. (Propriedade de Esp. de 2 Categoria)** Um espaço  $(X, \rho)$  será de segunda categoria em si mesmo se, e somente se, em qualquer representação de  $X$  como uma união contável de conjuntos fechados, pelo menos um deles contém uma bola aberta.

**Teorema (Categoria de Baire)** Todo espaço métrico completo é de segunda categoria em si mesmo.

**Cor. (Esp. de Banach são de 2 Categoria)** Todo espaço de Banach é de segunda categoria em si mesmo.

**Teorema (Mapeamento Aberto)** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $Y$  um espaço vetorial normado. Se  $T \in L(X, Y)$  e  $T(X)$  é de segunda categoria em  $Y$ , então:

- (a)  $T$  será sobrejetor;
- (b)  $T$  será um mapeamento aberto; e
- (c)  $Y$  será de segunda categoria.

**Lema (Equivalência de Mapeamento Aberto)** Sejam  $X, Y$  espaços vetoriais normados e  $T : X \rightarrow Y$  uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $T$  é um mapeamento aberto;
- (b) Existe  $r > 0$  tal que  $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$ .

**Lema (Condição p. Inclusão da Imagem)** Se  $X$  é um espaço de Banach,  $Y$  é um espaço vetorial normado e  $T \in L(X, Y)$  é tal que, para algum  $r > 0$ ,  $B_r^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$ , então  $B_{r/2}^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$ .

**Cor. (do Teorema do Mapeamento Aberto)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach.

- (a) Se  $T \in L(X, Y)$  é sobrejetor, então  $T$  é aberto.
- (b) Se  $T \in L(X, Y)$  é bijetor, então  $T$  é um isomorfismo.

**Teorema (Princípio da Limitação Uniforme)** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $A \subset L(X, Y)$ .

- (a) Se  $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\}$  é de segunda categoria, então  $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$ .
- (b) Se  $X$  é um espaço de Banach e  $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\} = X$ , então  $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$ .
- (c) Se  $X$  é um espaço de Banach,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$ ,  $\{T_n x\}$  é convergente para cada  $x \in X$ , e  $T : X \rightarrow Y$  é definido por  $Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ , então  $T \in L(X, Y)$  e  $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$ .

**Cor. (Limitação de Subconjuntos em  $X$ )** Se  $X$  é um espaço de Banach,  $B \subset X$ , e  $f(B) = \{f(b) : b \in B\}$  é limitado para todo  $f \in X^*$ , então  $B$  é limitado.

**Cor. (Limitação de Subconjuntos em  $X^*$ )** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $B^* \subset X^*$ . Suponha que para todo  $x \in X$  o conjunto  $B^*(x) = \{b^*(x) : b^* \in B^*\}$  é limitado. Então  $B^*$  é limitado.

**Teorema (Gráfico Fechado)** Se  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach e  $T : X \rightarrow Y$  é fechada, então  $T$  é limitada.

## 5 Espaços de Hilbert: Projeções, Representação e Bases

**Def. (Espaço com Produto Interno)** . Um espaço vetorial  $H$  juntamente com um produto interno é dito um \*\*espaço com produto interno\*\*.

**Def. (Espaço de Hilbert)** . Se um espaço com produto interno  $H$  é completo dizemos que  $H$  é um \*\*espaço de Hilbert\*\*.

### Lema (Projeção em um Convexo Fechado)

Se  $K$  é um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert  $H$  e  $u_0 \in H$ , existe um único  $v_0 \in K$  tal que  $\|u_0 - v_0\| = \inf_{v \in K} \|u_0 - v\|$ .

### Prop. (Caract. do Operação de Projeção)

Seja  $H$  um espaço de Hilbert,  $K \subset H$  fechado e convexo, e  $u_0 \in H$ . Então  $\operatorname{Re}\langle u_0 - P_K u_0, w - P_K u_0 \rangle \leq 0$ , para todo  $w \in K$ .

### Prop. (Caract. Conversa da Projeção)

Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $K \subset H$  um conjunto convexo fechado e não vazio. Se, dado  $u_0 \in H$ , existe  $v_0 \in K$  tal que  $\operatorname{Re}\langle u_0 - v_0, w - v_0 \rangle \leq 0$  para todo  $w \in K$ , então  $v_0 = P_K u_0$ .

### Cor. (Caract. e Linearidade da Projeção)

Se  $H$  é um espaço de Hilbert e  $M$  é um subespaço vetorial fechado de  $H$ , então  $P_M : H \rightarrow H$  é caracterizado por  $v = P_M u$  se, e somente se,  $\langle u - v, w \rangle = 0$ ,

para todo  $w \in M$ . Disso se segue que  $P_M$  é linear e  $P_M^2 = P_M$ .

### Teorema (Propriedades do Op. de Projeção)

Se  $H$  é um espaço de Hilbert e  $K \subset H$  é um conjunto convexo fechado, então  $\|P_K u_1 - P_K u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|$ , para todos  $u_1, u_2 \in H$ .

### Teorema (Decomposição Ortogonal)

Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $M$  um subespaço vetorial fechado de  $H$ . Então  $M \oplus M^\perp = H$ ; ou seja, cada  $u \in H$  pode ser unicamente expresso como  $u = w + v$ , onde  $w \in M$  e  $v \in M^\perp$ .

### Teorema (Representação de Riesz)

Se  $f \in H^*$ , existe um único  $y \in H$  tal que  $f(x) = \langle x, y \rangle$  para todo  $x \in H$ .

### Teorema (A Desigualdade de Bessel)

Se  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é um conjunto ortonormal em  $H$ , então para  $u \in H$ ,

$$\sum_{\alpha \in A} |\langle u, u_\alpha \rangle|^2 \leq \|u\|^2.$$

Em particular,  $\{\alpha \in A : \langle u, u_\alpha \rangle \neq 0\}$  é enumerável.

### Teorema (Equiv. p. Base Ortonormal)

Se  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é um conjunto ortonormal em  $H$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) (Completude) Se  $\langle u, u_\alpha \rangle = 0$  para todo  $\alpha \in A$ , então  $u = 0$ .

(b) (Identidade de Parseval) Para todo  $u \in H$ ,

$$\|u\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle u, u_\alpha \rangle|^2.$$

(c) Para cada  $u \in H$ ,

$$u = \sum_{\alpha \in A} \langle u, u_\alpha \rangle u_\alpha,$$

onde a soma tem apenas um número contável de termos não nulos e converge independentemente da ordem dos termos.

### Prop. (Existência de uma Base Ortonormal)

Todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal.

### Teorema (Separabilidade e Bases)

Um espaço de Hilbert  $H$  é separável se e somente se ele tem uma base ortonormal enumerável, e neste caso, toda base ortonormal de  $H$  é enumerável.

### Prop. (Transformação Unitária para $l^2(A)$ )

Seja  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uma base ortonormal de  $H$ . Então a correspondência  $x \rightarrow \hat{x}$  definida por  $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle$  é uma transformação unitária de  $H$  para  $l^2(A)$ .