1 Bases

Def.: (X,τ) esp. top. Dizemos que $\mathcal{B} \subset \tau$ é uma base p/ (X,τ) se p/ todo aberto não vazio $A \in \tau$, existe uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de elementos da base t.q. $A = \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B$.
Prop.: Uma família $\mathcal{B}$ de elementos de τ é uma base p/ (X,τ) $\iff$ p/ todo aberto não vazio $A \in \tau$ e todo $x \in A, \exists B \in \mathcal{B}$ de forma que $x \in B \subset A$.
Exemplo: $\mathcal{B} = \{]a,b[: a,b \in \mathbb{Q}\}$ é uma base p/ a topologia usual de $\mathbb{R}$.
Exemplo: Seja X um conjunto qualquer. $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ é uma base p/ a topologia discreta sobre X.
Def.: (X,τ) esp. top. $x \in X$. Dizemos que $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças (s.f.v) de x se:
a) $\forall V \in \mathcal{V}$, V é vizinhança de x;
b) $\forall A \subset X$ aberto t.q. $x \in A, \exists V \in \mathcal{V}$ t.q. $x \in V \subset A$.
Obs.: No caso em que os elementos de $\mathcal{V}$ são abertos, chamamos $\mathcal{V}$ de base local p/ x.
Exemplo: Na reta de Sorgenfrey, $\mathcal{V} = \{[x, x+\frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x.
Prop.: Se $\mathcal{B}$ é uma base p/ (X,τ), então $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}'\}$ é uma base p/ $Y \subset X$ com a topologia usual de subespaço.

2 Axiomas de separação

Def. : Dizemos que um esp. top. (X,τ) é T_0 (os abertos "diferenciam" pontos) se para quaisquer $x,y \in X$ distintos existir um aberto A tal que ($x \in A$ e $y \notin A$) ou ($x \notin A$ e $y \in A$).
Prop.: Um esp. top. (X,τ) é T_0 $\iff$ $\forall x,y \in X$ distintos e para quaisquer bases locais $\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y$, para x e y, respectivamente, tivermos que $\mathcal{B}_x \neq \mathcal{B}_y$.
Def: Dizemos que um esp. top. (X,τ) é T_1 $\iff$ $\forall x,y \in X$ distintos, existir A aberto tal que $x \in A$ e $y \notin A$.
Prop. : (X,τ) é T_1 $\iff$ $\forall x \in X, \{x\}$ é fechado.
Def.: Dizemos que um esp. top. (X,τ) é T_2 (de Hausdorff) se, $\forall x,y \in X$ distintos, existem A,B abertos tais que $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$. (Todo espaço métrico é de Hausdorff.)
Def Dizemos que um esp. top. (X,τ) é T_3 se, para quaisquer $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tais que $x \notin F$ existirem A,B abertos tais que $x \in A, F \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. Dizemos que um espaço é regular se ele é T_3 e T_1
Prop.: (X,τ) é T_3 $\iff$ $\forall x \in X$ e $\forall V$ aberto t.q. $x \in V$, existe A aberto t.q. $x \in A \subset \bar{A} \subset V$.
Cor: (X,τ) é T_3 $\iff$ $\forall x \in X$, existe um sistema fundamental de vizinhanças fechadas para x.
Def Dizemos que um esp. top. (X,τ) é T_4 se, para quaisquer $F,G \subset X$ fechados disjuntos, existirem A,B abertos disjuntos t.q. $F \subset A, G \subset B$. Dizemos que um espaço é normal se ele é T_4 e T_1.
Prop. : Todo espaço enumerável e regular é normal.

3 Axiomas de enumerabilidade

Def.: Dizemos que (X,τ) satisfaz 1º axioma de enumerabilidade se $\forall x \in X$, existe s.f.v. enumerável. Dizemos que (X,τ) tem bases locais enumeráveis.
Def.: (X,τ) esp. top. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seq. de pontos de X. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x \in X$ se, $\forall V$ vizinhança de x, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0, x_n \in V$. Notação: $x_n \to x$.
Prop.: (X,τ) esp. top. e $x_n \to x$. Então, $x \in \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.
Cor: (X,τ) esp. top. e $Y \subset X$. Sejam $x \in X$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seq. de pontos de Y. Se $y_n \to x$, então $x \in \overline{Y}$. **Prop.**: (X,τ) esp. top. com bases locais enum. Sejam $Y \subset X$ e $x \in X$. Então, $x \in \overline{Y}$ $\iff$ $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seq. de pts. de Y t.q. $y_n \to x$. Espaços onde isso ocorre são conhecidos como Frechét-Urysohn (seq. conv. caracterizam pontos aderentes).
Prop.: Seja (X,τ) esp. top. Hausdorff. Se $x_n \to x$ e $x_n \to y$, então $x = y$.
Def. : (X,d) métrico. Dizemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pts. de X é seq. de Cauchy se $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. para $n,m \geq n_0, d(x_n,x_m) < \epsilon$. Toda seq. convergente é de Cauchy. Dizemos que um esp. métrico é completo se toda seq. de Cauchy é convergente.
Def. : (X,τ) satisfaz o 2º axioma de enumerabilidade se admite uma base enumerável. (Se satisfaz o 2º axioma, também satisfaz o 1º)
Def. : (X,τ) esp. top. $D \subset X$ é denso em X se $\overline{D} = X$.
Def. : (X,τ) satisfaz o 3º axioma de enumerabilidade se admite um subconjunto denso enumerável. Dizemos que (X,τ) é espaço separável. **Prop.** : Se (X,τ) satisfaz o 2º axioma de enum., então ele é separável. (No caso de métricos, vale a volta)
Def. : (X,τ) é espaço metrizável se existe uma métrica sobre X que induz a topologia τ. (Reta de Sorgenfrey não é metrizável).

4 Funções contínuas

Def: (X,τ) e (Y,ρ) esp's top's, $f : X \to Y$ e $x \in X$. f é contínua no ponto x se, $\forall A$ vizinhança de $f(x)$, $\exists B$ vizinhança de x tq $f[B] \subset A$.
Def: (X,τ) e (Y,ρ) esp's top's e $f : X \to Y$. f é contínua se, $\forall A \subset Y$ aberto, temos $f^{-1}[A]$ aberto em X (i.e., $\forall A \in \rho$, $f^{-1}[A] \in \tau$).
Proposição: X, Y e Z esp's top's, e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ contínuas. Então $g \circ f : X \to Z$ é contínua.
Prop: Se $D \subset X$ é denso em X, então $f[D]$ é denso em Y.
Cor: Imagem contínua de um esp. separável é separável (3º ax.).
Prop: Seja $f : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to X$. Então f é contínua $\Leftrightarrow$ a sequência $(f(n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(\infty)$.
Prop: Se a seq. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x \in X$, então $f(x_n) \to f(x)$.
Prop: Se (X,τ) tem bases locais enu's, então dada $f : X \to Y$, f é contínua $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X com $x_n \to x$, temos $f(x_n) \to f(x)$.

4.1 Extensão de Funções

Def: (X,τ) e (Y,ρ) esp's top's, $f : A \subset X \to Y$ e $g : X \to Y$ contínuas. g é uma extensão (contínua) de f se $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$.
Prop: Se (Y,ρ) é Hausdorff (T_2), $D \subset X$ é denso e $f, g : X \to Y$ são contínuas tq $f(d) = g(d)$, então $f = g$.
Lema: $\exists (F_s)_{s\in\mathbb{Q}}$ família de fechados tq:

- $F_r \subset \mathrm{Int}(F_s)$ se $r < s$;
- $\bigcup_{s\in\mathbb{Q}} F_s = X$;
- $\bigcap_{s\in\mathbb{Q}} F_s = \emptyset$.

Então a função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) := \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in F_r\}$ é contínua.
Prop: Se (X,τ) é T_4, $F \subset X$ é fechado e $f : F \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\exists g : X \to \mathbb{R}$ ext. contínua de f.
Lema de Urysohn: (X,τ) é $T_4 \Leftrightarrow \forall F, G \subset X$ fechados disjuntos, $\exists f : X \to [0,1]$ contínua tq $f[F] = \{0\}$ e $f[G] = \{1\}$.
Teorema de Tietze: Se (X,τ) é T_4, $F \subset X$ fechado e $f : F \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\exists g : X \to \mathbb{R}$ extensão contínua de f.
Def: (X,τ) é $T_{3\frac{1}{2}}$ se, $\forall x \in X$ e $F \subset X$ tq $x \notin F$, $\exists f : X \to [0,1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f[F] = \{1\}$.
Esp. de Tychonoff: Se (X,τ) é $T_{3\frac{1}{2}}$ e T_1, então X é um esp. completamente regular.

5 Homeomorfismos

Def. Sejam (X,τ) e (Y,σ) espaços topológicos. Dizemos que uma função $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se f é bijetora, contínua e f^{-1} é contínua.
Def. Chamamos uma propriedade P de um invariante topológico se ela é preservada por homeomorfismos (isto é, se (X,τ) e (Y,σ) são homo, então (X,τ) possui $P \iff (Y,\sigma)$ possui P.
Obs: Todos os axiomas de separação e de enumerabilidade são invariantes topológicos.
Obs 2: Ser sequência convergente é um invariante topológico, mas ser sequência de Cauchy não!
Def Seja $(X,\leq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que $\leq$ é uma ordem total se, para quaisquer $x, y \in X$, vale $x \leq y$ ou $y \leq x$.
Def Seja $(X,\leq)$ um conjunto totalmente ordenado. A topologia da ordem sobre $(X,\leq)$ será a gerada por: $\forall a, b \in X$,

(a) $]a,+\infty[= \{x \in X : a < x\}$;

(b) $]-\infty, b[= \{x \in X : x < b\}$.

Def. Sejam $(X,\leq)$ e $(Y,\preceq)$ conjuntos ordenados. Uma função $f : X \to Y$ é um isomorfismo de ordem se f é bijetora e, $\forall a, b \in X$, $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$.
Def. Seja $(X,\leq)$ um conjunto ordenado, $\leq$ é ordem densa se $\forall x, y \in X$, com $x \leq y$, $\exists z \in X$ tal que $x \leq z \leq y$.
Lema: Seja $\{a_0, ..., a_{n+1}\}$ tot. ordenado e seja Y um conjunto de ordem densa e sem extremos. Se $f : \{a_0, ..., a_n\} \to Y$ função injetora que preserva ordem, então $\exists f : \{a_0, ..., a_{n+1}\} \to Y$ extensão de f que é injetora e que preserva a ordem.
Teorema: Todo conjunto enumerável, tot. ord. com uma ordem densa e sem extremos é isomorfo (e homeo) a $\mathbb{Q}$.
Teorema: Todo espaço tot. ord., com ordem densa, sem extremos, completo e separável é homeomorfo a $\mathbb{R}$.
Cor: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Então $]a, b[$ é homeo a $\mathbb{R}$, assim como $]a, +\infty[$ e $]-\infty, b[$.

6 Produto

Def: Sejam (X,τ) e (Y,σ) esp. top. A topologia produto sobre $X \times Y$ é a gerada pelos conjuntos $A \times B$, onde $A \in \tau$ e $B \in \sigma$.
Prop: (X,τ) e (Y,σ) são espaços de Hausdorff $\implies$ $X \times Y$ também é.
Prop: Sejam (X,τ) e (Y,σ) esp. top., sendo (Y,σ) espaço de Hausdorff e $f : X \to Y$ contínua. Então, o gráfico de f ($G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$) é fechado em $X \times Y$.
Def: Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções da forma $f_\alpha : X \to Y_\alpha, \alpha \in A$, em que X é um conjunto e cada (Y_α, τ_α) esp. top. A topologia fraca induzida por $\mathcal{F}$ é a topologia sobre X gerada pelos conj. $f_\alpha[V]$, onde $\alpha \in A$ e $V \in \tau_\alpha$. Assim, cada f_α é contínua.
Def: Seja $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in A}$ uma família de esp. top. O produto de $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in A}$ será $\Pi_{\alpha\in A} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : x_\alpha \in X_\alpha\}$ com a topologia fraca induzida por $(\pi_\alpha)_{\alpha\in A}$ onde cada $\pi_\alpha : \Pi_{\beta\in A} X_\beta \to X_\alpha$ é dada por $\pi_\alpha((x_\beta)_{\beta\in A}) = x_\alpha$ (Topologia produto).
Uma base para tal espaço é a $\Pi_{\alpha\in A} V_\alpha$ onde $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é finito e cada V_α é aberto em X_α.
$\Pi_{\alpha\in A} V_\alpha$ é um aberto básico e $\{\alpha \in A : V_\alpha \neq X_\alpha\}$ é um suporte.
Obs.: Em geral, produto de aberto NÃO é aberto.
Prop: Se $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ é uma família t.q. cada F_α é fechado em X_α, então $\Pi_{\alpha\in A} F_\alpha$ é fechado em $\Pi_{\alpha\in A} X_\alpha$.
Prop: Se cada X_α é T_i, então $\Pi_{\alpha\in A} X_\alpha$ é T_i, **para** $\mathbf{i \in \{0, 1, 2, 3\}}$

6.1 Propriedades de produtos

Pro: Se cada (X_n, τ_n) satisfaz o i-ésimo axioma de enumerabilidade. Então, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ também satisfaz
Prop Produto de espaços normais ($T_4 + T_1$) não é necessariamente normal. Exemplo: a reta de Sorgenfrey ($\mathbb{R}_S$) é normal, mas $\mathbb{R}_S \times \mathbb{R}_S$ não é T_4.
Lema de Jones: Seja (X,τ) espaço topológico separável. Se existe $D \subset X$ discreto fechado tal que $|D| = \mathfrak{c}$ (cardinalidade do contínuo), então (X,τ) não é T_4.
Definição Sejam $((X_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in A}$ uma família de espaços topológicos, (X,τ) um espaço topológico e $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de funções da forma $f_\alpha : X \to X_\alpha$. Chamamos de **função diagonal** a função

$$\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha : \begin{array}{ccc} X & \to & \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \\ x & \mapsto & (f_\alpha(x))_{\alpha\in A} \end{array}$$

Definição 4.2.7. Dizemos que $f : X \to Y$ é uma **imersão** se $f : X \to f[X]$ é um homeomorfismo. Dizemos neste caso que Y contém uma **cópia** de X.
Definição 4.2.8. Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ *separa pontos* se para todo $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. E $\mathcal{F}$ *separa pontos de fechados* se, para todo $x \in X$ e $F \subset X$ fechado tal que $x \notin F$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \notin f[F]$.
Teorema da imersão. Seja $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to X_\alpha \mid$

$\alpha \in A\}$ família de funções contínuas. Se $\mathcal{F}$ separa pontos, então $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ é injetora. Se, além disso, $\mathcal{F}$ separa pontos de fechados, então $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha$ é uma imersão.

Proposição 4.2.10. Seja (X, τ) um espaço completamente regular. Então $\mathcal{F} = \{f : X \to [0, 1] \mid f$ é contínua$\}$ separa pontos de fechados.

Cor 4.2.11. Seja (X, τ) espaço topológico. Então (X, τ) é completamente regular $\Leftrightarrow$ existe A tal que (X, τ) é homeomorfo a um subespaço de $\prod_{\alpha\in A} [0, 1]$.

6.2 Quociente

Def: $\exists f_i : Y_i \to X$, onde (Y_i, τ_i) - esp top, então: τ é **topologia Forte** de X se é maior topologia tq $\forall i$ f_i é continua

Prop: equivalente: $\tau = \{V \subset X | f_i^{-1}[V] \in \tau_i, \forall i \in I\}$ é Forte

Prop: equivalente: τ - top Forte induzida sse: dado $g : X \to Z$ (Z-esp top), g continua $\Leftrightarrow$ cada $g \circ f_i$ é continua

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g\circ f_i"'] & (X,\tau) \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Def: Dado (X, τ) e $\sim$ - relação de equiv **top Quociente** sobre $X/\sim$ é: top Forte induzida pelo $\{\pi\}$ $\pi : X \to X/\sim$ - projeção $\pi(x) = \tilde{x}$ onde $\tilde{x} = \{y \in X | x \sim y\}$

Cor: equivalente: $\{V \subset X/\sim |\pi^{-1}[V] \in \tau\}$ - é Quociente

Cor: equivalente: τ - top Forte induzida sse: dado $g : X/\sim \to Z$ (Z-esp top), g continua $\Leftrightarrow$ cada $g \circ \pi$ é continua

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g\circ \pi"'] & X/\sim \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Prop: Dado $(X, \tau), (Y, \rho)$ e $f : X \to Y$ - sobrejetora Se $\forall V \subset Y$ V - aberto $\Leftrightarrow f^{-1}[V]$ é aberto então: $\exists \sim$ sobre X e $\varphi : Y \to X/\sim$ - homeomorfismo tq $\pi = \varphi \circ f$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\ & X/\sim \end{tikzcd}$$

6.3 União Disjunta

Ideia: $((X_i, \tau_i))_{i\in I}$ - família, Queremos novo esp top tq: X_i - subespaço $\forall i$ Para isso: todos X_i dois a dois disjuntos: $\tau = \bigcup_{i\in I} \tau_i$ em $\bigcup_{i\in I} X_i$ Então em vez de trabalhar com cada X_i vamos usar cópias: $\{i\} \times X_i$ Assim temos espaços dois a dois disjuntos

Notação: $\coprod_{i\in I} X_i$

7 Compactos

7.1 Def. e propriedades básicas

Def. Seja (X, τ). Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma cobertura de X se $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = X$. Uma cobertura aberta é tal que cada $A \in \mathcal{A}$ é aberto

Def. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é um espaço compacto se para toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X existe uma subcobertura $\mathcal{A}'$ finita.

Exemplo. Qualquer espaço finito é compacto.

Def. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma sub-base para X se $\{B_1 \cap \cdots \cap B_n : B_1, ..., B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}\}$ é uma base para X.

Prop. (Lema da sub-base de Alexander). *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma sub-base para X. Se toda cobertura para X feita por elementos de $\mathcal{B}$ admite subcobertura finita, então X é compacto.*

Prop. *Seja (X, τ) espaço compacto e seja $F \subset X$ fechado. Então F é compacto.*

Resultados com espaços Hausdorff

Um espaço Hausdorff separa pontos de fechados

Lema. *Seja (X, τ) um espaço de Hausdorff. Sejam $x \in X$ e $K \subset X$ compacto tal que $x \notin K$. Então existem A e B abertos tais que $x \in A$, $K \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.*

Prop. *Sejam (X, τ) espaço de Hausdorff e $F \subset X$ compacto. Então F é fechado.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, temos em particular que se $x \notin F$, existe A aberto tal que $x \in A \subset X \setminus F$.

Em compactos de Hausdorff, os fechados são exatamente os compactos

Cor. *Sejam (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff e $F \subset X$ um conjunto. Então, F é fechado se, e somente se, F é compacto.*

Espaços de Hausdorff, separam compactos disjuntos

Prop. *Seja (X, τ) espaço Hausdorff. Sejam $F, G \subset X$ compactos disjuntos. Então existem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A$ e $G \subset B$.*

Para espaços Hausdorff, compacidade implica normalidade.

Prop. *Todo espaço compacto de Hausdorff é normal.*

Demonstração. Basta notar que fechados são compactos e aplicar o resultado anterior.

Resultados com funções contínuas

Prop. *Sejam (X, τ), (Y, σ) espaços topológicos onde X é compacto e $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora. Então Y é compacto.*

Cor. *Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos, sendo Y espaço de Hausdorff, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Se $F \subset X$ é compacto, então $f[F]$ é fechado.*

Demonstração. Segue imediatamente do resultado anterior e da Prop. 5.1.10.

Cor. *Sejam (X, τ) e (Y, τ) espaços de Hausdorff, sendo X compacto, e seja $f : X \to Y$ uma função contínua e bijetora. Então, f é um homeomorfismo.*

Compacidade local

Def. Dizemos que o espaço topológico (X, τ) é localmente compacto se todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças compactas.

Para Hausdorff, a propriedade global implica na local

Prop. *Se (X, τ) é um espaço compacto de Hausdorff, então X é localmente compacto.*

Demonstração. Note que X é regular. Portanto, todo $x \in X$ admite um sistema fundamental de vizinhanças fechadas, logo, compactas.

Já a propriedade local não implica na global:

Exemplo Com a topologia usual, $\mathbb{R}$ é localmente compacto, pois cada $[a, b]$ é compacto. Mas $\mathbb{R}$ não é compacto.

Para Hausdorff, a localmente compacto implica completamente regular

Prop. *Seja (X,τ) um espaço localmente compacto de Hausdorff. Então (X,τ) é completamente regular.*

7.2 Teorema de Tychonoff

Teorema 5.2.1 (de Tychonoff). *Seja $((X_\alpha,\tau_\alpha))_{\alpha\in A}$ família de espaços compactos. Então $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ é compacto.*

Caracterizações da topologia produto

Prop. *Seja (X,τ) um espaço compacto de Hausdorff. Seja, também, $\sigma \supsetneq \tau$ uma topologia sobre X. Então, (X,σ) não é compacto.*

Demonstração. Seja $A \in \sigma \setminus \tau$. Então, $X \setminus A$ não é fechado em (X,τ). Logo, $X \setminus A$ não é compacto em (X,τ). Seja $\mathcal{C}$ cobertura aberta (em τ) para $X \setminus A$ que não admite subcobertura finita.

Então, $\mathcal{C} \cup \{A\}$ é uma cobertura (em σ) sem subcobertura finita. Logo, (X,σ) não é compacto.

Teorema. *A topologia produto é a única que faz com que as projeções sejam contínuas e o produto de compactos de Hausdorff seja compacto.*

Caracterização para os espaços completamente regulares

Prop. *Seja (X,τ) um espaço topológico. Então (X,τ) é completamente regular se, e somente se, existe (Y,σ) compacto de Hausdorff tal que $X \subseteq Y$.*

7.3 Algumas Caracterizações

Def. Seja (X,τ) um espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação de $A \subset X$ se para todo V aberto com $x \in V$ temos que $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ (ou seja, se $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$).

Prop. *Seja (X,τ) espaço T_1. Então $x \in X$ é ponto de acumulação de $A \subset X \Leftrightarrow$ para todo V aberto tal que $x \in V$ temos que $V \cap A$ é infinito.*

Compacidade implica na existência de pontos de acumulação para conjuntos infinitos

Prop. *Seja (X,τ) compacto. Então todo subconjunto infinito admite ponto de acumulação.*

Def. Seja (X,τ) espaço topológico. Dizemos que $x \in X$ é um ponto de acumulação completo de $A \subset X$ se, para todo V aberto tal que $x \in V$, temos que $|V \cap A| = |A|$.

Prop. *Seja (X,τ) um espaço compacto. Então todo subconjunto infinito de X admite ponto de acumulação completo.*

Caracterização de compacidade por pontos de acumulação

Prop. *Seja (X,τ) espaço tal que todo subconjunto infinito admite ponto de acumulação completo. Então X é compacto.*

Prop. *Seja (X,τ) com base locais enumeráveis, T_1 e compacto. Então toda sequência admite subsequência convergente.*

Resultados para espaços métricos

Prop. *Seja (X,d) espaço métrico. Suponha que toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente. Então dada $\mathcal{C}$ cobertura aberta para X, existe $r > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $B_r(x) \subset C$.*

Prop. *Seja (X,d) métrico tal que toda sequência admite subsequência convergente. Então X é compacto.*

Cor. *Seja (X,d) espaço métrico. São equivalentes:*

1. *(X,d) é compacto;*
2. *Todo subconjunto infinito de X admite ponto de acumulação em X;*
3. *Toda sequência de pontos de X admite subsequência convergente.*

Cor. *Todo métrico compacto é completo.*

Demonstração. Basta notar que se (X,d) é compacto, toda sequência de Cauchy em X admite subsequência convergente. Logo, toda sequência é convergente em X.

Def. Seja (X,d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é totalmente limitado se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F \subset A$ finito tal que

$$\bigcup_{x\in F} B_\varepsilon(x) \supset A$$

Lema 5.3.16. *Seja (X,d) espaço métrico totalmente limitado. Se $Y \subset X$, então Y é totalmente limitado.*

Prop. *Seja (X,d) espaço métrico. Então (X,d) é compacto se, e somente se, (X,d) é completo e totalmente limitado.*

Cor. *Seja (X,d) espaço métrico completo. Então $A \subset X$ é compacto se, e somente se A é fechado e totalmente limitado.*

O totalmente limitado é necessário de fato:

Exemplo 5.3.19. Considere $\mathbb{N}$ com a métrica discreta. Note que, com tal métrica, $\mathbb{N}$ é completo. Note também que $\mathbb{N}$ é limitado (basta, por exemplo, tomar a bola $B_2(0)$). Mas não é compacto.

7.4 Algumas Aplicações

Prop. *Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, onde K é um espaço compacto. Então f atinge seu máximo e mínimo (isto é, existem $a,b \in K$ tais que, para qualquer $x \in K$, $f(a) \le f(x) \le f(b)$).*

Prop. (Bolzano-Weierstrass). *Dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência limitada de pontos em $\mathbb{R}^n$, ela admite subsequência convergente.*

Teorema 5.4.3. *Todas as normas sobre $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

8 Conexos

8.1 Def. e propriedades básicas

Def. Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que X é conexo se, dados quaisquer abertos A e B de X disjuntos tais que $A \cup B = X$, temos que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Na reta, os conexos são os intervalos:

Prop. $A \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, A é um intervalo.

Exemplo. A reta de Sorgenfrey não é conexa. Basta notar que

$$]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}$$

e $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são abertos disjuntos não vazios da reta de Sorgenfrey.

Conexidade é preservada por funções contínuas:

Prop. *Sejam (X, τ), (Y, σ) espaços topológicos e $f : X \to Y$ contínua e sobrejetora. Se X é conexo, então Y é conexo.*

Cor. *Seja (X, τ) espaço topológico completamente regular, conexo e com mais de um ponto. Então $|X| \geq |\mathbb{R}|$.*

Um outro jeito de caracterizar conjuntos conexos é em termos de conjuntos mutuamente separados

Def. Seja (X, τ) espaço topológico. Dizemos que $A, B \subset X$ são mutuamente separados se $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$

Exemplo. $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ são mutuamente separados em $\mathbb{R}$.

Prop. *Seja (X, τ) espaço topológico. Então $Y \subset X$ é conexo se, e somente se, não existem $A, B \neq \emptyset$ mutuamente separados tais que $Y = A \cup B$.*

Cor. *Sejam (X, τ) um espaço topológico e $Y \subset X$ conexo. Se $A, B \subset X$ são mutuamente separados e $Y \subset A \cup B$, então $Y \subset A$ ou $Y \subset B$.*

Prop. *Seja (X, τ) espaço topológico.*

1. *Se $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, onde cada X_α é conexo e $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ para quaisquer $\alpha, \beta \in I$ distintos, então X é conexo.*

2. *Se para quaisquer $x, y \in X$ existir $A \subset X$ conexo tal que $x, y \in A$, então X é conexo.*

8.2 Componentes e conexidade por caminhos

Def. Sejam (X, τ) espaço topológico e $x \in X$. Definimos a componente conexa de x como $\bigcup_{x \in A} A$ onde $\mathcal{A} = \{A \subset X : x \in A$ e A é conexo$\}$.

Prop. *Componentes conexas são fechadas.*

Def. Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é conexo por caminhos se, dados $x, y \in X$, existe $f : [0, 1] \to X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Neste caso, dizemos que f é um caminho de x a y.

Conexo por caminhos implica conexo:

Prop. Se (X, τ) é conexo por caminhos, então (X, τ) é conexo.

A volta do resultado anterior não vale em geral:

Exemplo. Espaço Pente: Espaço conexo que não é conexo por caminhos.

Prop. Sejam $(X, \tau), (Y, \sigma)$ espaços topológicos e $f : X \to Y$ função contínua e sobrejetora. Se (X, τ) é conexo por caminhos, então (Y, σ) é conexo por caminhos.

8.3 Propriedades locais de conexidade

Def. Um espaço topológico (X, τ) é localmente conexo por caminhos se todo ponto de X admite uma base local conexa por caminhos.

Conexidade local é suficiente para fazer um espaço conexo, conexo por caminhos

Prop. *Se (X, τ) é um espaço conexo e localmente conexo por caminhos então X é conexo por caminhos.*

Def. X é localmente conexo se todo ponto de X admite base local conexa.

Prop. *Se X é localmente conexo, então todo ponto de X tem componente conexa aberta.*

8.4 Algumas aplicações

9 Homotopia

9.1 Def. e resultados básicos

Def. Sejam (X, τ) e (Y, σ) espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Dizemos que f é homotópica a g se existe uma função contínua $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que H é uma homotopia entre f e g. Notação: $f \simeq g$.

Num espaço **convexo**, quaisquer duas funções contínuas são homotópicas

Exemplo. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e (X, τ) espaço topológico. Então quaisquer $f, g : X \to A$ funções contínuas são homotópicas. Basta tomar $H(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$.

Prop. *$\simeq$ é uma relação de equivalência.*

Def. As classes de equivalência da relação $\simeq$ são chamadas de classes de homotopia.

Prop. *Composição de funções homotópicas é uma homotopia*Importante variante topológico.

Def. (X, τ) é dito contrátil se $\mathrm{Id}_X : X \to X$ ($\mathrm{Id}_X(x) = x$, para $x \in X$) é homotópica a alguma função constante.

Exemplo. Qualquer conjunto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ é contrátil.

Prop. Se X é contrátil, X é conexo por caminhos.

Prop. X é contrátil $\Leftrightarrow$ para todo espaço topológico (T, σ) e para todas as funções $f, g : T \to X$ contínuas temos que $f \simeq g$.

Def. (X, τ) e (Y, σ) são ditos homotopicamente equivalentes se existem funções contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$ e $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$. Neste caso, g é dita uma inversa homotópica de f (e vice-versa).

Note que, espaços homeomorfos são homotopicamente equivalentes. Mas a recíproca não é verdadeira

Prop. *(X, τ) é contrátil $\Leftrightarrow$ (X, τ) é homotopicamente equivalente a um ponto.*

Def. Dizemos que o conjunto $A \subset X$ é um retrato de X se existe uma função contínua $r : X \to A$ (chamada de retração) tal que $r(a) = a$, para todo $a \in A$. Se $r \simeq \mathrm{Id}_X$, chamamos a retração de retração de deformação. A ideia do retrato é que todos os caras que estavam em A ficam parados, e aqueles que não estavam, entram em A. Isso acontece com a função constante (todos entram no conjunto unitário e, no caso, a constante fica parada)

Prop. *Seja (X, τ) um espaço topológico. Se o conjunto $A \subset X$ é uma retração de deformação, então A e X são homotopicamente equivalentes.*

Formalização de deformação entre caminhos

Def. Seja (X, τ) espaço topológico. Sejam $f, g : [0,1] \to X$ dois caminhos. Dizemos que f e g são caminhos homotópicos se existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ homotopia entre f e g tal que $H(0,\cdot)$ e $H(1,\cdot)$ são funções constantes. Precisamos de essa última condição para que os caminhos sempre comecem e terminem nos mesmos pontos

9.2 Grupo Fundamental

Def. Seja X um espaço topológico e $x_0 \in X$. Chamamos de laço no ponto x_0 uma função $f : [0,1] \to X$ contínua tal que $f(0) = f(1) = x_0$.

Def. Sejam $f, g : [0,1] \to X$ laços no ponto x_0. Dizemos que eles são laços homotópicos se f e g são caminhos homotópicos. Notação $f \simeq_{x_0} g$.

Obs 1. $\simeq_{x_0}$ é uma relação de equivalência. Denotamos a classe de equivalência de f por $[f]$ e o conjunto das classes por $\pi_1(X, x_0)$.

Obs 2. Podemos "concatenar" dois laços

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{1}$$

Prop. *Sejam (X, τ) espaço topológico e $x_0 \in X$. Definimos $* : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ por $[f] * [g] = [f * g]$. Tal operação está bem definida.*

Prop. *Sejam X espaço topológico e $x_0 \in X$. Então $(\pi_1(X, x_0), *)$ é um grupo.*

Def. (X, x_0) é dito um espaço com ponto base se X é um espaço topológico e $x_0 \in X$. Denotamos por $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ se $f : X \to Y$ e $f(x_0) = y_0$. Dizemos que (X, x_0) e (Y, y_0) são homotopicamente equivalentes se existem $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ contínuas tais que $f \circ g \simeq Id_Y$ relativamente a $\{y_0\}$ e $g \circ f \simeq Id_X$ relativamente a $\{x_0\}$.

Funções contínuas com um ponto base conversam bem com homomorfismos nos grupos:

Prop. *Toda $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ contínua induz um homomorfismo $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

Prop. *Se (X, x_0) e (Y, y_0) são homotopicamente equivalentes, então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ são isomorfos.*

Cor. *Se (X, τ) e (Y, σ) são tais que $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ não são isomorfos, então não existe homeomorfismo $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y_0$.*

10 Métricos disfaçados

Def Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que (X, τ) é completamente metrizável se existe um espaço métrico completo (Y, d) tal que X seja homeomorfo a Y. **Cor** Existe uma métrica completa sobre $[0,1]^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} [0,1]$ que induz a topologia produto deste espaço. **Teorema** Seja (X, τ) um espaço T_1. São equivalentes:

(a) X é T_3 e tem base enumerável;

(b) X é separável e metrizável;

(c) X é homeomorfo a um subespaço de $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Proposição. Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $A \subset X$ aberto. Então A é completamente metrizável.

Teorema. Todo G_δ em um espaço métrico completo é completamente metrizável.

G_δ é uma interseção numerável de conjuntos abertos. **Cor** Existe uma métrica completa equivalente à usual sobre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstração. Note que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\})$ é um G_δ e, portanto o resultado segue pelo teorema anterior.

Teorema Sejam X e Y dois espaços T_0, sem pontos isolados, zero–dimensionais e com base enumerável. Sejam $A \subset X$ e $B \subset Y$ subconjuntos densos e enumeráveis em X e Y, respectivamente. Então existe um homeomorfismo

$$f \colon A \longrightarrow B.$$

Além disso, f admite uma (única) extensão injetora $\tilde{f} \colon X \longrightarrow Y$. Finalmente, se X também for compacto, então $\tilde{f}$ é um homeomorfismo.

Uma condição é uma tripla (P, Q, f) satisfazendo:

1. P é uma partição finita de X feita por abertos fechados de $\mathcal{B}$;
2. Q é uma partição finita de Y feita por abertos fechados de $\mathcal{C}$;
3. f é uma função finita com domínio contido em A e contradomínio B;
4. $dom(f)$ é uma escolha para P;
5. $\Im(f)$ é uma escolha para Q.

Lema. Dada uma condição (P_1, Q_1, f_1), podemos fazer as seguintes extensões:

1. Dado $a \in A$, existe uma condição (P_2, Q_2, f_2) tal que $a \in dom(f_2)$;
2. Dado $b \in B$, existe uma condição (P_2, Q_2, f_2) tal que $b \in \Im(f_2)$;
3. Dado $B \in \mathcal{B}$, existe uma condição (P_2, Q_2, f_2) tal que B é união de elementos de P_2;
4. Dado $C \in \mathcal{C}$, existe uma condição (P_2, Q_2, f_2) tal que C é união de elementos de Q_2.

Cor A menos de homeomorfismos, existe um único espaço métrico enumerável sem pontos isolados.

Def Dizemos que (X, τ) é um espaço zero-dimensional se possui uma base formada por abertos fechados.

11 Espaços de Baire

11.1 Definição e resultados básicos

Def. Dizemos que (X, τ) é um espaço de Baire se, para toda família $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos densos em X, a interseção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é densa em X.

(Teorema de Baire, para compactos). Seja (X, τ) um compacto de Hausdorff. Então (X, τ) é um espaço de Baire.

(Teorema de Baire, para métricos completos). Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então (X, d) é um espaço de Baire.

Cor. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é um espaço de Baire.

Demonstração. Segue de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ser completamente metrizável e do fato de "ser de Baire" ser uma propriedade invariante por homeomorfismo. □

Cor $\mathbb{Q}$ não é completamente metrizável.

Demonstração. Para cada $q \in \mathbb{Q}$, $A_q = \mathbb{Q} \setminus \{q\}$ é um aberto denso em $\mathbb{Q}$. Contudo, $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} A_q = \varnothing$, que não é denso. Logo $\mathbb{Q}$ não é um espaço de Baire e, portanto, não pode ser completamente metrizável. □

Contraexemplo. A reta de Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ é um espaço de Baire, mas não é localmente compacto nem completamente metrizável.

Prop Se A é um aberto denso em $\mathbb{R}_S$, então A contém um aberto denso em $\mathbb{R}$.

11.2 O jogo de Banach-Mazur

Def Dado um espaço topológico (X, τ), vamos chamar de jogo de Banach–Mazur o jogo entre dois jogadores, Alice e Beto, definido da seguinte forma: Na rodada 0, Alice joga um aberto não vazio $A_0 \subset X$. Em seguida, Beto joga um aberto não vazio $B_0 \subset A_0$. Numa rodada $n \geq 1$, Alice joga um aberto não vazio $A_n \subset B_{n-1}$ e Beto joga um aberto não vazio $B_n \subset A_n$. Depois de todas as rodadas, Alice é declarada vencedora se

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing,$$

caso contrário, o vencedor é Beto.

Prop. Seja (X, τ) um espaço compacto de Hausdorff. Então Beto tem estratégia vencedora no jogo de Banach–Mazur.

Prop. Se Alice não tem estratégia vencedora no jogo de Banach–Mazur, então (X, τ) é um espaço de Baire.

Prop. Se (X, τ) é um espaço de Baire, então Alice não tem estratégia vencedora no jogo de Banach–Mazur.

Cor. O espaço ser de Baire é equivalente a Alice não ter estratégia vencedora no jogo de Banach–Mazur.

12 Compactificação de Stone-Cech

Def Seja (X, τ) completamente regular. Chamamos de

$$\beta X = \left\{(f(x))_{f\in\mathcal{F}} : x \in X\right\} \subset [0, 1]^{\mathcal{F}},$$

onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todas as funções contínuas $f : X \to [0, 1]$. βX é a *compactificação de Stone–Čech* de X. A menos de homeomorfismos, podemos considerar $X \subset \beta X$ (pelo Teorema da Imersão).

Teorema Seja (X, τ) completamente regular. Então:

(a) βX é um compacto de Hausdorff tal que $\overline{X} = \beta X$.

(b) Para toda $f : X \to [0, 1]$ contínua existe uma extensão contínua $\widetilde{f} : \beta X \to [0, 1]$.

βX é o único espaço que satisfaz as condições (a) e (b) (a menos de homeomorfismo).

Prop. Sejam (X, τ) um espaço completamente regular e Y um compacto de Hausdorff tais que $X = Y$. Para qualquer função $f : X \to [0, 1]$ contínua, existe $g : Y \to [0, 1]$ extensão contínua de f. Então, dada $K \subset X$ compacto em X, existe $h : Y \to K$ extensão contínua de f.

Prop. Seja $F \subset \beta\mathbb{N}$ fechado e infinito. Então F contém um subespaço homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.

Cor Seja $F \subset \beta\mathbb{N}$ fechado e infinito. Então $|F| = |\beta\mathbb{N}|$.

Cor. $\beta\mathbb{N}$ é um compacto em que nenhuma sequência não trivial converge.

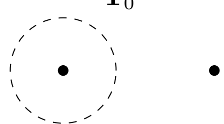
Seja F um compacto infinito Hausdroff Note que existe $x \in F$ ponto de acumulação de F. Note que existe $y \in F$, distinto de x, e existem A, B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Espaços	T_1	Hausdorff	Normal	Regular	Compl. Reg.	Conexo	Loc. Conexo	Compacto	Loc. Compacto	Metrizável	2º Axioma
Reta de Sorgenfrey	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Reta de Sorgenfrey^2	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Espaço pente	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Racionais	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$
Reais	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Topologia cofinita	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
Naturais (subespaço usual)	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\beta\mathbb{N}$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
Discreta	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$

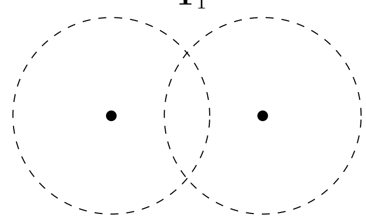
Propriedade	Subespaço	Produto	Quociente	Imagem Contínua	Homeomorfismo
Hausdorff	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
Compacidade	$\checkmark$ (fechado)	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Normalidade	$\checkmark$ (fechado)	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
Conectividade	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Regularidade	$\checkmark$ (fechado)	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
Compl. Regularidade	$\checkmark$ (fechado)	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
Metrizável	$\checkmark$	$\checkmark$ (se finito)	$\times$	$\times$	$\checkmark$
Baire	$\checkmark$ (aberto)	$\checkmark$ (se finito)	$\times$	$\times$	$\checkmark$
1º Axioma	$\checkmark$	$\checkmark$ (se finito)	$\times$	$\times$	$\checkmark$
2º Axioma	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
3º Axioma	$\times$	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$

1 axioma bases locais enumeráveis **2 axioma** base enumerável **3 axioma** denso enumerável

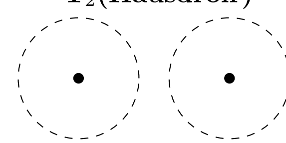
$\mathbf{T}_0$



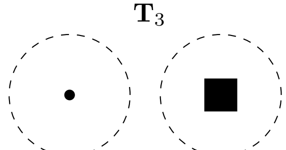
$\mathbf{T}_1$



$\mathbf{T}_2$**(Hausdroff)**

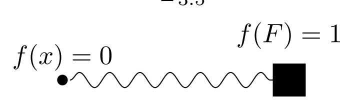


$\mathbf{T}_3$



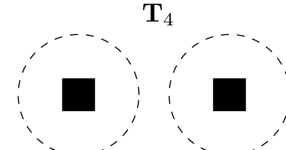
Regular $= T_3 + T_1$

$\mathbf{T}_{3.5}$



Completamente Regular $= T_{3.5} + T_1$

$\mathbf{T}_4$



Normal $= T_4 + T_1$