1 Desigualdades Fundamentais para Espaços Normados

Def. (Espaço Vetorial). Um **espaço vetorial** é um conjunto não vazio V sobre um corpo K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) munido de duas operações, adição ($+ : V \times V \to V$) e multiplicação por escalar ($\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$), que satisfaz as seguintes propriedades: (a) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associativa), (b) $u + v = v + u$ (comutativa), (c) Existe $0 \in V$ tal que $0 + u = u$ para todo $u \in V$, (d) Para cada $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0$, (e) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot v$, para todo $\alpha, \beta \in K$ e $u \in V$, (f) $1 \cdot u = u$, para todo $y \in V$, (g) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, para todo $\alpha, \beta \in K$ e $v \in V$, (h) $(\alpha+\beta)u = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$, para todo $\alpha, \beta \in K$ e $v \in V$.

Def. (Norma). Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma **norma** em V é uma função $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes propriedades: $\|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$, $\|\lambda v\|_V = |\lambda|\|v\|_V$ e $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$, para todo $v, w \in V$.

Def. (Espaço Vetorial Normado). Um espaço vetorial V munido de uma norma é chamado **espaço vetorial normado**, isto é, um espaço vetorial normado é um par $(V, \|\cdot\|_V)$ onde $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}^+$ é uma norma.

Def. (Métrica de Espaço Métrico). Seja X um conjunto não vazio. Uma **métrica** ou **distância** em X é uma função $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ satisfazendo: $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, para todo $x, y \in X$, $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$. O conjunto X munido da métrica ρ é chamado **espaço métrico** e é denotado por (X, ρ).

Essas desigualdades são ferramentas essenciais para provar a desigualdade triangular para as p-normas, garantindo a validade dessas normas.

Lema (Desigualdade de Young) Se $p \in (1, \infty)$, $q \in (1, \infty)$ é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b \in [0, \infty)$, então $a^{1/p}b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$.

Lema (Desigualdade de Hölder) Se $p \in (1, \infty)$ e $q \in (1, \infty)$ é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i y_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{N} |y_i|^q\right]^{1/q}$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$.

Lema (Desigualdade de Minkowski) Se $p \in [1, \infty]$, então

$$\left[\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{N} |y_i|^p\right]^{1/p}$$

ou, em outras palavras, $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ para todo $x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$.

Lema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Seja H um espaço com produto interno, então

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

2 Completude e Transformações Lineares

Def. (Espaço de Banach). Um espaço vetorial normado que é **completo** com a métrica induzida pela norma é dito um **espaço de Banach**.

Def. (Normas Equivalentes). Duas normas em X, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, são **equivalentes** se existem constantes positivas c_1 e c_2 tal que $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \forall x \in X$.

Def. (Série Convergente e Abs. Convergente). Uma série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ é dita **convergente** em X se a sequência de somas parciais $\sum_{j=1}^{n} x_j$ converge para x quando $n \to \infty$. Uma série é dita **absolutamente convergente** se a série das normas $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ é convergente.

Def. (Transformação Linear Limitada). Uma transformação linear $T : X \to Y$ entre dois espaços vetoriais normados é **limitada** se existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$, para todo $x \in X$.

Def. (Transformação Linear Inversível). $T \in L(X, Y)$ é **inversível** ou um **isomorfismo** se T é bijetora e $T^{-1} \in L(Y, X)$, o que é equivalente a existir $c > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \geq c\|x\|_X$.

Def. (Isometria (Transformação Linear)). T é uma **isometria** se $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$, para todo $x \in X$.

Teorema (1 Condição para a Completude). Um espaço vetorial normado é completo se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.

Prop. (Equiv. p. Transf. Lineares Contínuas) Se X, Y são espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$

é linear, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é contínua;

(b) T é contínua em 0;

(c) T é limitada.

Prop. (Completude de $L(X,Y)$) Se Y é completo, então $L(X,Y)$ é completo.

O conceito de transformações lineares limitadas entre espaços completos (espaços de Banach) leva diretamente ao estudo mais detalhado de funcionais lineares, que são centrais para os teoremas de Hahn-Banach.

3 Os Teoremas de Hahn-Banach e Suas Consequências

Def. (Funcional Linear). Seja X um espaço vetorial sobre K. Uma função linear $f : X \to K$ é chamada um **funcional linear**.

Def. (Espaço Dual (X^*)). Se X é um espaço vetorial normado, $L(X,K)$ é um espaço de Banach que é chamado **espaço dual de X** e denotado por X^*.

Def. (Funcional Sublinear). Se X é normado, um **funcional sublinear** é uma função $p : X \to \mathbb{R}$ tal que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ e $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para todo $x, y \in X$ e $\lambda > 0$.

Def. (Espaço Reflexivo). Para espaços de dimensão infinita, quando a imagem isométrica $\hat{X}$ é igual ao bidual X^{**}, X é dito **reflexivo**. A reflexividade passa a ser entendida como $X = X^{**}$ quando X é identificado com seu subespaço $\hat{X}$ no bidual X^{**}.

Def. (Hiperplano Afim). Um **hiperplano (afim)** é um conjunto da forma $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ onde $f : X \to \mathbb{R}$ é um funcional linear não identicamente nulo e $\alpha \in \mathbb{R}$. Diremos que H é o hiperplano de equação $[f = \alpha]$.

Def. (Conjunto Convexo). Seja X um espaço vetorial sobre K. Diremos que $C \subset X$ é **convexo** se $tx + (1-t)y \in C$ sempre que $t \in$ e $x, y \in C$.

Def. (Separação Fraca). Se $A, B \subset X$ dizemos que o hiperplano de equação $[f = \alpha]$ separa A e B no **sentido fraco** se $f(x) \leq \alpha$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in B$.

Def. (Separação Forte). Diremos que o hiperplano de equação $[f = \alpha]$ separa A e B no **sentido forte** se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ para todo $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$ para todo $x \in B$.

Def. (Func. de Minkowski de um Convexo). Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ e $C \subset X$ um aberto convexo com $0 \in C$. Para todo $x \in X$, o **funcional de Minkowski de C**, $p(x)$, é definido como $p(x) = \inf\{\alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C\}$.

Def. (Complexificação de X ($X^{\#}$)). Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. A **complexificação de X** estende X a um espaço vetorial $X^{\#}$ sobre $\mathbb{C}$ e é feita da seguinte forma: $X^{\#} = \{(x,y) : x, y \in X\}$ com a operação de adição coordenada a coordenada e com a operação de multiplicação por escalar dada por $(\alpha + i\beta)(x,y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$.

Prop. (Relação entre Func. Lineares $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$) Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Se $f : X \to \mathbb{C}$ é um funcional linear e $u = \mathrm{Re}(f)$, então u é um funcional linear real e $f(x) = u(x) - iu(ix)$ para todo $x \in X$. Reciprocamente, se $u : X \to \mathbb{R}$ é um funcional linear real e $f : X \to \mathbb{C}$ é definido por $f(x) = u(x) - iu(ix)$, então f é um funcional linear complexo. Se X é normado, f é limitado se e somente se u é limitado, e neste caso $\|f\| = \|u\|$.

Teorema (Hahn-Banach (E.V.$\mathbb{R}$)). Sejam X um espaço vetorial real, p um funcional sublinear em X, M um subespaço vetorial de X e f um funcional linear em M tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Então existe um funcional linear F em X tal que $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $F|_M = f$.

Teorema (Hahn-Banach (E.V.$\mathbb{C}$)). Sejam X um espaço vetorial complexo, p uma seminorma em X, M um subespaço vetorial de X e $f : M \to \mathbb{C}$ um funcional linear com $|f(x)| \leq p(x)$ para $x \in M$. Então existe $F : X \to \mathbb{C}$, um funcional linear, tal que $|F(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$ e $F|_M = f$.

Cor. (de Hahn-Banach) Seja X um espaço vetorial normado.

1. Se M é um subespaço vetorial fechado de X e $x \in X \setminus M$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq 0$ e $f|_M = 0$. Na verdade, se $\delta = \inf_{y \in M} \|x - y\|$, f pode ser escolhido tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \delta$.

2. Se $x \neq 0$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x) = \|x\|$.

3. Os funcionais lineares limitados em X separam pontos.

4. Se $x \in X$, defina $\hat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ por $\hat{x}(f) = f(x)$, $\forall f \in X^*$. Então a transformação $x \to \hat{x}$ é uma isometria linear de X em X^{**}.

Prop. (Hiperplanos Fechados) O hiperplano com equação $[f = \alpha]$ é fechado se e somente se f é contínuo.

Lema (O Funcional de Minkowski) Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{R}$ e $C \subset X$ um conjunto convexo aberto com $0 \in C$. Para cada $x \in X$ defina $p(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\}$ (p é o funcional de Minkowski de C). Então, p é um funcional sublinear e existe M tal que $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$, e $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$.

Lema (Separação Ponto de um Convexo) Sejam $C \subset X$ um conjunto convexo aberto e não vazio e $x_0 \in X \setminus C$. Então existe $f \in X^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$. Em particular, o hiperplano fechado com equação $[f = f(x_0)]$ separa fracamente C de x_0.

Teorema (1 Forma Geométrica Hahn-Banach) Sejam X um espaço vetorial normado real e $A, B \subset X$ dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos. Se A é aberto, existe um hiperplano fechado que separa fracamente A e B.

Teorema (2 Forma Geométrica Hahn-Banach). Sejam X um espaço vetorial normado real, e A e B conjuntos convexos, não vazios e disjuntos em X. Suponha que A é fechado e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa fortemente A e B.

Cor. (Anuladores para Subespaços Próprios) Sejam X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $F \subset X$ um subespaço vetorial próprio de X ($\bar{F} \neq X$). Então, existe $f \in X^*$, $f \neq 0$ tal que $f(x) = 0$, $\forall x \in F$.

4 Consequências do Teorema da Categoria de Baire

Def. (Auto-valor e Auto-vetor). Considere um espaço vetorial X sobre o corpo K e uma transformação linear $A : X \to X$. Se a transformação linear $\lambda I - A$ (para cada escalar $\lambda \in K$) não é injetiva, existe $0 \neq x \in X$ tal que $(\lambda I - A)x = 0$. Neste caso, diremos que λ é um **auto-valor de A** e que x é um **auto-vetor de A associado ao auto-valor λ**.

Def. (Produto Escalar (Produto Interno)). Seja H um espaço vetorial sobre K. Um **produto escalar** em H é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to K$ tal que: (a) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para todo $u, v \in H$, (b) $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$, para todo $u, v, w \in H, \alpha, \beta \in K$, (c) $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle u, u \rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Def. (Vetores Ortogonais). Dois vetores u, v em um espaço com produto interno H são ditos **ortogonais** (escrevemos $u \perp v$) se $\langle u, v \rangle = 0$.

Def. (Projeção sobre o Convexo (P_K)). Se K é um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H e $u_0 \in H$, existe um único $v_0 \in K$ tal que $\|u_0 - v_0\| = \inf_{v \in K} \|u_0 - v\|$. Escrevemos $v_0 = P_K u_0$ e dizemos que P_K é a **projeção sobre o convexo K**.

Def. (Projeção (Transformação Linear)). Uma transformação linear $P : H \to M$ é dita uma **projeção** se $P^2 = P$.

Def. (Projeção Ortogonal). Se $P \in L(H)$ é uma projeção, $M = Im(P)$ e $M^\perp = N(P)$ dizemos que P é uma **projeção ortogonal sobre M**.

Def. (Conjunto Ortonormal). Um subconjunto $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de H é chamado um **conjunto ortonormal** se $\|u_\alpha\| = 1$ para todo $\alpha \in A$ e $u_\alpha \perp u_\beta$ para $\alpha \neq \beta$.

Def. (Base Ortonormal). Um conjunto ortonormal tendo as propriedades (a-c) do Teorema 6 (ou Teorema 2), que são Completamento, Identidade de Parseval e Convergência de Série, é chamado uma **base ortonormal de H**.

Def. (Transformação Unitária). Se H_1 e H_2 são espaços de Hilbert com produtos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_2$, uma **transformação unitária** de H_1 sobre H_2 é uma transformação linear sobrejetora $U : H_1 \to H_2$ que preserva produto escalar; isto é, $\langle Ux, Uy \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1$.

Def. (T.L. Densamente Definida). Se $D(A)$ (o domínio de A) é denso em X, dizemos que A é **densamente definida**.

Def. ((Domínio, Gráfico, Imagem, Núcleo)). Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear. Então, $D(A)$ é o **domínio de A**; $G(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y : u \in D(A)\} \subset X \times Y$ é o **Gráfico de A**; $Im(A) = \{Ax \in Y : x \in D(A)\} \subset Y$ é a **Imagem de A**; e $N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ é o **Núcleo de A**.

Def. (Transformação Linear Fechada). Diremos que uma transformação linear T é **fechada** se o seu gráfico $G(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ for fechado em $X \times Y$. É equivalente a dizer que, para toda seqüência $\{(u_n, Au_n)\}$ em $D(A) \times Y$ que é convergente em $X \times Y$ para $(u, v) \in X \times Y$, temos que

$u \in D(A)$ e $Au = v$.

Def. (Transformação Linear Fechável). Diremos que uma transformação linear A é **fechável** se $G(\overline{A})$ é gráfico de uma transformação linear. É equivalente a dizer que, sempre que uma seqüência $\{(u_n, Au_n)\}$ em $D(A) \times Y$ converge, em $X \times Y$, para $(0, v) \in X \times Y$, temos que $v = 0$.

Def. (Conjunto Nunca Denso (ou Raro)). Se (X, ρ) for um espaço métrico, um conjunto $A \subset X$ será **nunca denso** ou **raro** se o seu fecho tiver interior vazio.

Def. (Conjunto de Primeira Categoria). Um conjunto $A \subset X$ será de **Primeira Categoria** em X se for união enumerável de conjuntos nunca densos.

Def. (Conjunto de Segunda Categoria). Um conjunto será de **Segunda Categoria** em X se não for de Primeira Categoria.

Def. (Aplicação Aberta). Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. Diremos que T será **aberta** se $T(U)$ for aberto em Y, sempre que U for aberto em X.

Prop. (Propriedade de Esp. de 2 Categoria) Um espaço (X, ρ) será de segunda categoria em si mesmo se, e somente se, em qualquer representação de X como uma união contável de conjuntos fechados, pelo menos um deles contém uma bola aberta.

Teorema (Categoria de Baire). Todo espaço métrico completo é de segunda categoria em si mesmo.

Cor. (Esp. de Banach são de 2 Categoria) Todo espaço de Banach é de segunda categoria em si mesmo.

Teorema (Mapeamento Aberto). Seja X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Se $T \in L(X, Y)$ e $T(X)$ é de segunda categoria em Y, então:

(a) T será sobrejetor;

(b) T será um mapeamento aberto; e

(c) Y será de segunda categoria.

Teorema (Aplicação Aberta 2 versão). Sejam X e Y espaços de Banach. Para todo $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, vale:

$$T \text{ é sobrejetora} \iff T \text{ é uma aplicação aberta.}$$

Lema (Equivalência de Mapeamento Aberto) Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é um mapeamento aberto;

(b) Existe $r > 0$ tal que $T(B_1^X(0)) \supset B_r^Y(0)$.

Lema (Condição p. Inclusão da Imagem) Se X é um espaço de Banach, Y é um espaço vetorial normado e $T \in L(X, Y)$ é tal que, para algum $r > 0$, $B_r^Y(0) \subset [T(B_1^X(0))]^-$, então $B_{r/2}^Y(0) \subset T(B_1^X(0))$.

Cor. (do Teorema do Mapeamento Aberto) Sejam X e Y espaços de Banach.

(a) Se $T \in L(X, Y)$ é sobrejetor, então T é aberto.

(b) Se $T \in L(X, Y)$ é bijetor, então T é um isomorfismo.

Teorema (Princípio da Limitação Uniforme). Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $A \subset L(X, Y)$.

(a) Se $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\}$ é de segunda categoria, então $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$.

(b) Se X é um espaço de Banach e $\{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in A\} < \infty\} = X$, então $\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty$.

(c) Se X é um espaço de Banach, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$, $\{T_n x\}$ é convergente para cada $x \in X$, e $T : X \to Y$ é definido por $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, então $T \in L(X, Y)$ e $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

Cor. (Limitação de Subconjuntos em X) Se X é um espaço de Banach, $B \subset X$, e $f(B) = \{f(b) : b \in B\}$ é limitado para todo $f \in X^*$, então B é limitado.

Cor. (Limitação de Subconjuntos em X^*) Seja X um espaço de Banach e $B^* \subset X^*$. Suponha que para todo $x \in X$ o conjunto $B^*(x) = \{b^*(x) : b^* \in B^*\}$ é limitado. Então B^* é limitado.

Teorema (Gráfico Fechado). Se X e Y são espaços de Banach e $T : X \to Y$ é fechada, então T é limitada.

5 Espaços de Hilbert: Projeções, Representação e Bases

Def. (Espaço com Produto Interno). Um espaço vetorial H juntamente com um produto interno é dito um **espaço com produto interno**.

Def. (Espaço de Hilbert). Se um espaço com produto interno H é completo dizemos que H é um **espaço de Hilbert**.

Lema (Projeção em um Convexo Fechado) Se K é um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H e $u_0 \in H$, existe um único $v_0 \in K$ tal que $\|u_0 - v_0\| = \inf_{v \in K} \|u_0 - v\|$.

Prop. (Caract. do Operacão de Projeção) Seja H um espaço de Hilbert, $K \subset H$ fechado e convexo, e $u_0 \in H$. Então $\mathrm{Re}\langle u_0 - P_K u_0, w - P_K u_0\rangle \leq 0$, para todo $w \in K$.

Prop. (Caract. Conversa da Projeção) Seja H um espaço de Hilbert e $K \subset H$ um conjunto convexo fechado e não vazio. Se, dado $u_0 \in H$, existe $v_0 \in K$ tal que $\mathrm{Re}\langle u_0 - v_0, w - v_0\rangle \leq 0$ para todo $w \in K$, então $v_0 = P_K u_0$.

Cor. (Caract. e Linearidade da Projeção) Se H é um espaço de Hilbert e M é um subespaço vetorial fechado de H, então $P_M : H \to H$ é caracterizado por $v = P_M u$ se, e somente se, $\langle u - v, w\rangle = 0$, para todo $w \in M$. Disso se segue que P_M é linear e $P_M^2 = P_M$.

Teorema (Propriedades do Op. de Projeção). Se H é um espaço de Hilbert e $K \subset H$ é um conjunto convexo fechado, então $\|P_K u_1 - P_K u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|$, para todos $u_1, u_2 \in H$.

Teorema (Decomposição Ortogonal). Seja H um espaço de Hilbert e M um subespaço vetorial fechado de H. Então $M \oplus M^\perp = H$; ou seja, cada $u \in H$ pode ser unicamente expresso como $u = w + v$, onde $w \in M$ e $v \in M^\perp$.

Teorema (Representação de Riesz). Se $f \in H^*$ (*H é Hilbert*), existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in H$.

Teorema (A Desigualdade de Bessel). Se $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um conjunto ortonormal em H, então para $u \in H$,

$$\sum_{\alpha \in A} |\langle u, u_\alpha\rangle|^2 \leq \|u\|^2.$$

Em particular, $\{\alpha \in A : \langle u, u_\alpha\rangle \neq 0\}$ é enumerável.

Teorema (Equiv. p. Base Ortonormal). Se $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um conjunto ortonormal em H, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) (Completude) Se $\langle u, u_\alpha\rangle = 0$ para todo $\alpha \in A$, então $u = 0$.

(b) (Identidade de Parseval) Para todo $u \in H$,

$$\|u\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle u, u_\alpha\rangle|^2.$$

(c) Para cada $u \in H$,

$$u = \sum_{\alpha \in A} \langle u, u_\alpha\rangle u_\alpha,$$

onde a soma tem apenas um número contável de termos não nulos e converge independentemente da ordem dos termos.

Prop. (Existência de uma Base Ortonormal) Todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal.

Teorema (Separabilidade e Bases). Um espaço de Hilbert H é separável se e somente se ele tem uma base ortonormal enumerável, e neste caso, toda base ortonormal de H é enumerável.

Prop. (Transformação Unitária para $l^2(A)$) Seja $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma base ortonormal de H. Então a correspondência $x \to \hat{x}$ definida por $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle$ é uma transformação unitária de H para $l^2(A)$.

6 Operadores Compactos

Def. (Operador Dual (A^*)). Seja $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear densamente definida. A transformação dual (ou operador dual) $A^* : D(A^*) \subset Y^* \to X^*$ de A é definida da seguinte forma:

$$D(A^*) = \{\, y^* \in Y^* \text{ tal que } y^* \circ A : D(A) \subset X \to \mathbb{K} \text{ é limitado} \,\},$$

isto é,

$$D(A^*) = \Big\{ y^* \in Y^* : \exists\, z^* \in X^* \text{ tal que } \langle Ax, y^* \rangle = \langle x, z^* \rangle, \quad \forall x \in D(A) \Big\}.$$

Se $y^* \in D(A^*)$, definimos $A^* y^* := z^*$, onde z^* é o (único) elemento de X^* satisfazendo a igualdade acima. Dessa forma,

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle, \quad \forall x \in D(A),\ \forall y^* \in D(A^*).$$

Def. (Operador Linear Fechado). Sejam X e Y espaços normados, e seja $A : D(A) \subset X \to Y$ uma transformação linear densamente definida.

Definimos o gráfico de A por

$$G(A) = \{\, (x, Ax) \in X \times Y : x \in D(A) \,\}.$$

Dizemos que A é um operador linear fechado se o seu gráfico $G(A)$ é **fechado** em $X \times Y$, isto é,

$$(x_n, Ax_n) \to (x, y) \text{ em } X \times Y \quad \Longrightarrow \quad x \in D(A) \text{ e } Ax = y.$$

Def. (Anuladores). Seja X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$, $M \subset X$ e $N^* \subset X^*$. Definimos

$$M^\perp = \{\, m^\perp \in X^* : \langle m, m^\perp \rangle = 0,\ \forall m \in M \,\}$$

$$(N^*)^\perp = \{\, x \in X : \langle x, n^* \rangle = 0,\ \forall n^* \in N^* \,\}.$$

Diremos que $M^\perp$ (respectivamente $(N^*)^\perp$) é o anulador de M (respectivamente de N^*).

Observe que $M^\perp$ (e $(N^*)^\perp$) é um subespaço vetorial fechado de X^* (respectivamente de X).

Def. (Operador Compacto). Sejam X, Y espaços de Banach sobre K. Diremos que um operador linear $K : X \to Y$ é **compacto** se $K(B^1_X(0))$ é um subconjunto relativamente compacto de Y.

Def. (Operador Adjunto ($A^\bullet$)). Se H é um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador densamente definido, o **adjunto** $A^\bullet : D(A^\bullet) \subset H \to H$ de A é definido por $D(A^\bullet) = \{u \in H : v \mapsto \langle Av, u \rangle_H : D(A) \to K \text{ é limitado}\}$. Se $u \in D(A^\bullet)$, $A^\bullet u$ é o único elemento de H tal que $\langle v, A^\bullet u \rangle_H = \langle Av, u \rangle_H$, para todo $v \in D(A)$.

Def. (Operador Simétrico (ou Hermitiano)). Seja H um espaço de Hilbert sobre K com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Diremos que um operador $A : D(A) \subset H \to H$ é **simétrico** (também chamado **Hermitiano** quando $K = \mathbb{C}$) se $D(A) = H$ e $A \subset A^*$; isto é, $\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H$ para todo $x, y \in D(A)$.

Def. (Operador Auto-adjunto). Diremos que um operador A é **auto-adjunto** se $A = A^*$.

Teorema (Esp. Op. Compactos é Fechado). Sejam X, Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. Então $K(X, Y)$ é um subespaço fechado de $L(X, Y)$.

Teorema (Propriedades de Op. Compactos). Sejam X, Y, Z espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, $A \in L(X, Y)$ e $B \in L(Y, Z)$.

(a) Se $A \in K(X, Y)$ ou $B \in K(Y, Z)$, então $B \circ A \in K(X, Z)$.

(b) Se $A \in K(X, Y)$, então $A^* \in K(Y^*, X^*)$.

(c) Se $A \in K(X, Y)$ e $R(A)$ é um subespaço fechado de Y, então $R(A)$ tem dimensão finita.

7 Funcionais Lineares Contínuos e Topologia

Teorema (Tychonoff). X_α, $\alpha \in A$ são espaços topológicos compactos, se e somente se,

$$(X, \mathcal{T}) := \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \prod_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha \right) \text{ é compacto.}$$

Def. (Convergência forte). Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ **converge fortemente** para $x \in X$ se

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Neste caso, escreve-se $x_n \to x$ ou $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Def. (Convergência fraca). Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado e X^* seu espaço dual. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ **converge fracamente**

para $x \in X$ se

$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \quad \text{para todo } f \in X^*.$$

Neste caso, escreve-se $x_n \rightharpoonup x$.