Exercício sugerido pelo grupo 3

Prove que o produto tensorial de uma forma $f \in N_p(E;\mathbb{R})$ por qualquer $g \in L_q(E;\mathbb{R})$ é uma $(p+q)$-forma, $f \cdot g \in N_{p+q}(E;\mathbb{R})$. Onde $N_p(E;\mathbb{R})$ é o núcleo do operador anti-simétrico A.

demonstração:

Seja $f \in N_p(E;\mathbb{R})$ e $g \in L_q(E;\mathbb{R})$.
Note que, basta mostrar que $A(Af \otimes g) = p!A(f \otimes g)$. Pois, $A(f) = 0$, por hipótese, logo $(Af \otimes g) = 0$. Dessa forma, é fácil ver que $A(0) = 0$. Então, se a igualdade vale,

$$0 = A(Af \otimes g) = p!A(f \otimes g) \implies f \otimes g \in N_{p+q}(E;\mathbb{R})$$

Vamos mostrar que a igualdade vale. Temos que:

$$A(Af \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon_\sigma \sigma \left[(\sum_{\phi \in S_p} \varepsilon_\phi \phi f) \otimes g \right].$$

Podemos, sem comprometer a expressão, enxergar S_p como um subgrupo de S_{p+q} que fixa as q últimas coordenadas. Assim,

$$A(Af \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \varepsilon_\sigma \sigma \left[\sum_{\phi \in S_p < S_{p+q}} \varepsilon_\phi \phi (f \otimes g) \right].$$

Logo,

$$A(Af \otimes g) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \left[\sum_{\phi \in S_p < S_{p+q}} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\phi (\sigma \circ \phi)(f \otimes g) \right].$$

Temos que, para todo $\sigma \in S_{p+q}$, existe um único $\lambda \in S_{p+q}$ tal que $\sigma = \lambda \circ \phi^{-1}$. Assim,

$$A(Af \otimes g) = \sum_{\lambda \in S_{p+q}} \sum_{\phi \in S_q < S_{p+q}} \varepsilon_\lambda \varepsilon_{\phi^{-1}} \varepsilon_\phi (\lambda \circ \phi^{-1} \circ \phi)(f \otimes g).$$

Como o sinal da permutação vezes o sinal da permutação inversa é a identidade, Podemos simplificar:

$$A(Af \otimes g) = \sum_{\lambda \in S_{p+q}} \sum_{\phi \in S_q < S_{p+q}} \varepsilon_\lambda (\lambda)(f \otimes g).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A(Af \otimes g) &= p! \sum_{\lambda \in S_{p+q}} \varepsilon_\lambda \lambda (f \otimes g) \\ &= p!\, A(f \otimes g). \end{aligned}$$