

Solución a la Ejercitación 2

Ejercicio 1:

Sean $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$, donde $X_1 \sim N(-1, 9)$ y $X_2 \sim N(-1, 4)$ son dos variables aleatorias con distribución normal. Usted decide mezclarlas con pesos 0.40 y 0.60 respectivamente. De modo que la función de densidad (pdf) de la mixtura será $f(x) = 0.4\varphi_1(x) + 0.6\varphi_2(x)$, donde $\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{18}}$ y donde $\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}$.

- Grafique la pdf de la mixtura para valores del soporte de la variable aleatoria entre -10 y 10 con deltas de 0,1.
- Solamente observando el gráfico, ¿puede afirmar si esta mixtura es asimétrica? Explique.
- Calcule la media, la varianza, el coeficiente de asimetría y el de curtosis de la mixtura. Recuerde que esto requiere calcular varios momentos de la variable aleatoria, que en definitiva son integrales.
- ¿Es la mixtura leptocúrtica? Responda en función al valor que obtuvo en el inciso anterior y además muestre en un mismo gráfico la pdf de la mixtura del gráfico anterior y la pdf de una normal con la misma media y varianza que la mixtura.
- Genere una muestra de 2000 valores aleatorios de esta mixtura y realice un QQ-Plot a partir de estos valores, donde en el eje vertical aparezcan los valores teóricos de la normal estándar y en el horizontal los valores aleatorios generados estandarizados. Estos valores aleatorios puede generarlos usando el software que desee (deberá entregar el archivo donde los genera). ¿Qué le sugiere el QQ-Plot?

Respuesta al ejercicio 1:

Respuesta: (a) a (e) se encuentran respondidos en el Excel de la solución. A continuación, se muestran los links con los cálculos de los momentos centrales de la mixtura (que son integrales). Por último, puede verse un DO file de Stata y un PY con las respuestas.

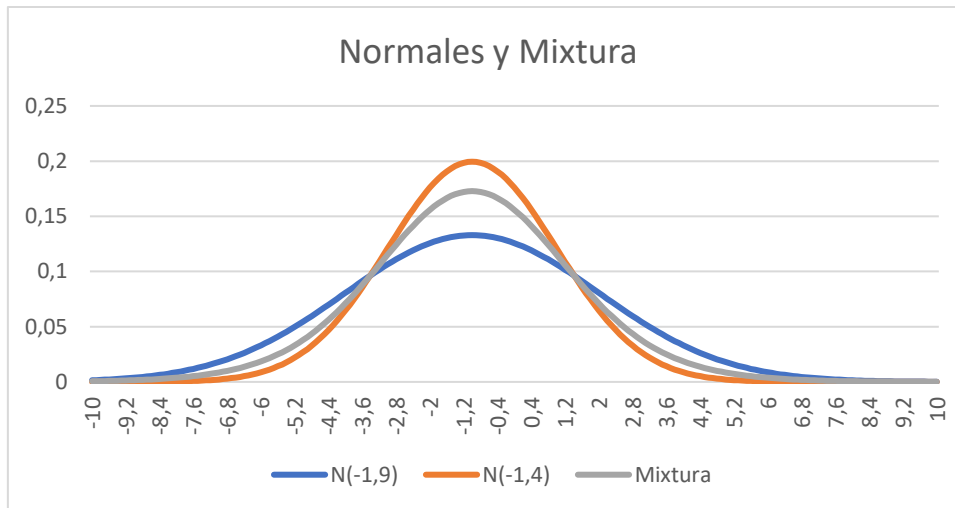
<https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.4Integrate%5BxPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C18%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-++Divide%5BPower%5Bx%2B1%2C2%5D%2C18%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.6Integrate%5BxPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C8%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C2%5D%2C8%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es>

<https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.4Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C2%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C18%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-++Divide%5BPower%5Bx%2B1%2C2%5D%2C18%5D%5D%2C7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.6Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C2%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C8%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C2%5D%2C8%5D%5D%2C7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es>

<https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.4Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C3%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C18%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-++Divide%5BPower%5Bx%2B1%2C2%5D%2C18%5D%5D%2C7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.6Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C3%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C8%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C2%5D%2C8%5D%5D%2C7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es>

<https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.4Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C4%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C18%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-++Divide%5BPower%5Bx%2B1%2C2%5D%2C18%5D%5D%2C7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.6Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C4%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C8%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1%5C%2841%29%2C2%5D%2C8%5D%5D%2C7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es>

(a) Ver Excel para el planteo

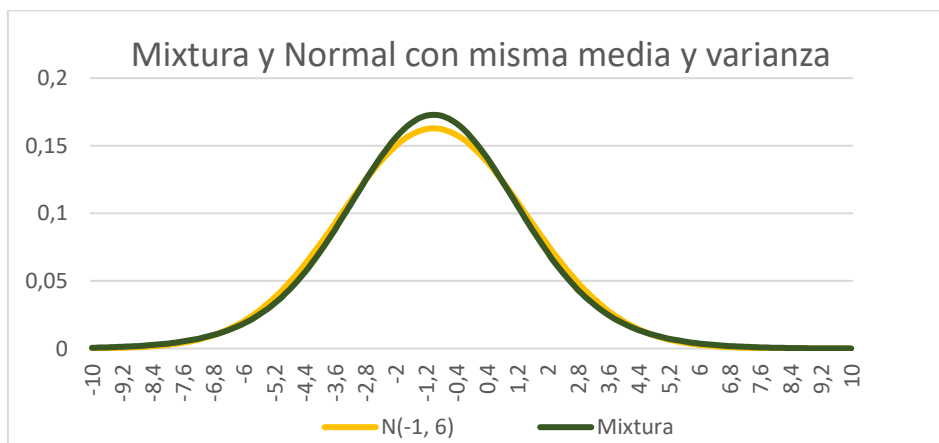


b) Se ve que es simétrica, y de hecho, debe serlo, ya que las dos normales que estamos mezclando tienen la misma media.

c) Ver links arriba. Media = -1, Varianza = 6, Coeficiente de Asimetría: 0 y Curtosis = $126/36 = 3.5$

d) Es simétrica y leptocúrtica. Como es esperable cuando mezclamos dos normales con la misma media.

La mixtura tiene colas más pesadas. Es difícil verlo en el gráfico. Puede apreciarse mejor en los valores que toman ambas pdf en las colas (ver en Excel las primeras y las últimas filas).



e) Pueden verlo resuelto en el Excel o en Python o Stata. El enunciado dice que deben entregar el archivo donde generan estos valores si una pregunta como esta entrara en el examen.

Ejercicio 2:

Sean $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$, donde $X_1 \sim N(1.2, 0.09)$ y $X_2 \sim N(-0.8, 0.81)$ son dos variables aleatorias con distribución normal. Usted decide mezclarlas con pesos 0.35 y 0.65 respectivamente. De modo que la función de densidad (pdf) de la mixtura será

$$f(x) = 0.35\varphi_1(x) + 0.65\varphi_2(x), \text{ donde } \varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}, i = 1, 2.$$

- Grafique la pdf de la mixtura para valores del soporte de la variable aleatoria entre -10 y 10 con deltas de 0,1.
- Solamente observando el gráfico, ¿puede afirmar si esta mixtura es asimétrica positiva? ¿Leptocúrtica? ¿Bimodal? Explique.
- Calcule la media, la varianza, el coeficiente de asimetría y el de curtosis de la mixtura. Recuerde que esto requiere calcular varios momentos de la variable aleatoria, que, en definitiva, son integrales. ¿Puede afirmar si esta mixtura es asimétrica positiva y/o leptocúrtica en base a los valores que obtuvo?
- Muestre en un mismo gráfico la pdf de la mixtura del gráfico anterior y la pdf de una normal con la misma media y varianza que la mixtura.
- Genere una muestra de 2000 valores aleatorios de esta mixtura y realice un QQ-Plot con estos valores, donde en el eje vertical aparezcan los valores teóricos de la normal estándar y en el horizontal los valores generados estandarizados. Estos valores aleatorios puede generarlos usando el software que desee. ¿Qué le sugiere el QQ-Plot?

Respuesta al Ejercicio 2: Ver Excel (y Do-File y PY para el último inciso). A continuación se muestran los valores que toman los momentos (las integrales).

$$E(X) = -0.10$$

<https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.35Integrate%5BxPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C0.18%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5B%2C-++Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x-1.2%2C2%5D%2C0.18%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.65Integrate%5BxPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C1.62%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5B%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.8%5C%2841%29%2C2%5D%2C1.62%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es>

$$Var(X) = 1.468$$

<https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.35Integrate%5BPower%5Bx%2B0.10%2C2%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C0.18%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5B%2C-++Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x->

[1.2%2C2%5D%2C0.18%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.65Integrate%5BPower%5Bx%2B0.10%2C2%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C1.62%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.8%5C%2841%29%2C2%5D%2C1.62%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es](#)

Tercer Momento Centrado: $E(X - \mu)^3 = -0.4368$

<https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.35Integrate%5BPower%5Bx%2B0.10%2C3%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C0.18%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-++Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x-1.2%2C2%5D%2C0.18%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.65Integrate%5BPower%5Bx%2B0.10%2C3%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C1.62%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.8%5C%2841%29%2C2%5D%2C1.62%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es>

Cuarto Momento Centrado: $E(X - \mu)^4 = 4.31092$

<https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.35Integrate%5BPower%5Bx%2B0.10%2C4%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C0.18%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C++Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x-1.2%2C2%5D%2C0.18%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.65Integrate%5BPower%5Bx%2B0.10%2C4%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C1.62%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.8%5C%2841%29%2C2%5D%2C1.62%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es>

Ejercicio 3:

Usando los datos de PBI de EEUU que se encuentran en la última hoja del Excel de la clase 2, descomponga la serie de PBI en la parte tendencial y la parte cíclica usando (1) el filtro de Hodrick y Prescott con lambda igual a 100 y (2) usando medias móviles de 11 observaciones (es decir, la contemporánea ± 5 observaciones). Para ambas metodologías, grafique la serie observada y la

tendencial, por un lado, y la parte cíclica por otro. Recuerde trabajar con las series en logaritmos en ambos casos.

Resuelto en Excel, Do File y PY