

Modelado Estocástico

Clase 6

Prof. Fernando Grosz
fgrosz@udesa.edu.ar

Series de Tiempo: Introducción

Considere el modelo de regresión simple,

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$$

donde tenemos T observaciones de cada variable. Primero, vamos a poner énfasis en que esto ahora es una serie de tiempo (por eso decimos que tenemos T observaciones en lugar de N). Las observaciones en una serie de tiempo tienen un orden natural. En series de tiempo vamos a usar “ t ” como subíndice para indicar el número de observación, en lugar de “ i ”. Notemos que $t = 1, 2, 3, \dots, T$.

El problema que se nos presenta con series de tiempo es que el supuesto 2 (b), el de NO autocorrelación de los errores, muy posiblemente no se cumpla. Es decir, los errores en nuestro modelo muy posiblemente estén correlacionados. Consecuentemente, los estimadores por el método de MCO ¿van a ser insesgados? ¿Van a ser MELI?

Notemos que tenemos T observaciones y por lo tanto, T errores. Con T errores, la cantidad de covarianzas que deberíamos estimar es $\frac{T(T-1)}{2}$. La cantidad de varianzas es T . De modo que la suma entre la cantidad de varianzas más las covarianzas es $\frac{T(T+1)}{2}$.

La matriz de varianzas/covarianzas de los errores en general se denota con la letra

griega omega (mayúscula), claramente es una matriz simétrica y tiene esta forma:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \text{Var}(u_1) & \text{Cov}(u_1, u_2) & \text{Cov}(u_1, u_3) & \cdots & \text{Cov}(u_1, u_T) \\ \text{Cov}(u_1, u_2) & \text{Var}(u_2) & \text{Cov}(u_2, u_3) & \cdots & \text{Cov}(u_2, u_T) \\ \text{Cov}(u_1, u_3) & \text{Cov}(u_2, u_3) & \text{Var}(u_3) & \cdots & \text{Cov}(u_3, u_T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(u_1, u_T) & \text{Cov}(u_2, u_T) & \text{Cov}(u_3, u_T) & \cdots & \text{Var}(u_T) \end{pmatrix}$$

Es imposible estimar cada una de las covarianzas porque hay más covarianzas que observaciones. Por ejemplo, cuando $T = 5$, hay 5 varianzas y $\frac{T(T-1)}{2} = 10$ covarianzas. Mientras que cuando $T = 10$, hay 10 varianzas y $\frac{T(T-1)}{2} = 45$ covarianzas y si $T = 100$, tendríamos 100 varianzas y $\frac{T(T-1)}{2} = 4950$ covarianzas.

A continuación, vamos a ver distintas maneras de reparametrizar los errores de modo tal que todas esas covarianzas, que

individualmente es algo imposible de estimar, queden reducidas a solamente unos pocos parámetros para estimar. Si logramos reducir todas esas covarianzas a solamente estimar unos pocos parámetros, entonces podremos tener una estimación de la matriz de varianzas y covarianzas con nuestras T observaciones. A esto llamamos reparametrizar, es decir, a la idea de representar los errores con una determinada estructura de modo tal que esas $\frac{T(T+1)}{2}$ varianzas más covarianzas queden reducidas solamente a estimar unos pocos parámetros.

Reparametrizaciones

1) Ruido blanco (*white noise*): decimos que ε_t es un ruido blanco si satisface que:

(a) $E(\varepsilon_t) = 0 \quad \forall t$

(b) $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t$

(c) $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0 \quad \forall t, j \neq 0$

Es decir, un ruido blanco satisface que su esperanza es cero, su varianza es constante y no está correlacionado. En otras palabras, los errores con los que trabajamos hasta la clase pasada fueron siempre ruido blanco.

En Series de Tiempo es muy común usar la letra griega épsilon, ε_t , para denotar un ruido blanco. En lo que resta de este curso,

siempre que usemos la notación ε_t vamos a estar refiriéndonos a un ruido blanco.

En algunos contextos van a ver mencionado el término ruido blanco fuerte o débil (*strong white noise – weak white noise*). La definición anterior es lo que se llama un ruido blanco débil, mientras que si se reemplaza la condición (c) de no autocorrelación por independencia, es lo que se llama ruido blanco fuerte.

2) Procesos Autorregresivos

- I. Proceso Autorregresivo de orden 1, AR(1):
decimos que u_t sigue un proceso AR(1) si u_t satisface que

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

- II. Proceso Autorregresivo de orden 2, AR(2):
decimos que u_t sigue un proceso AR(2) si u_t satisface que

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

- III. Proceso Autorregresivo de orden p , AR(p):
decimos que u_t sigue un proceso AR(p) si u_t satisface que

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \cdots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

3) Procesos de medias móviles

- I. Proceso de medias móviles de orden 1, MA(1):
decimos que u_t sigue un proceso MA(1) si u_t satisface que

$$u_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

- II. Proceso de medias móviles de orden 2, MA(2):
decimos que u_t sigue un proceso MA(2) si u_t satisface que

$$u_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

- III. Proceso de medias móviles de orden q , MA(q):
decimos que u_t sigue un proceso MA(q) si u_t satisface que

$$u_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

4) Procesos ARMA

- ARMA (1,1): es un proceso que tiene una parte autorregresiva (el primer uno) y una parte de medias móviles (el segundo uno). Por ejemplo, decimos que u_t sigue un proceso ARMA(1,1) si u_t satisface que

$$u_t = \rho u_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

- ARMA (p, q): es un proceso que tiene una parte autorregresiva de orden p y una parte de medias móviles de orden q . Por ejemplo, decimos que u_t sigue un proceso ARMA(p, q) si u_t satisface que

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \cdots + \rho_p u_{t-p} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

- 5) *Random Walk* o Camino Aleatorio: es un caso particular del proceso AR(1) cuando $\rho = 1$. Decimos que u_t sigue un *random walk* si u_t satisface que

$$u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

- 6) MA integrado, IMA: Decimos que u_t sigue un proceso IMA(1) si u_t satisface que $u_t - u_{t-1} \equiv \Delta u_t$ es MA(1)

$$u_t - u_{t-1} = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es un ruido blanco.

- 7) ARIMA($p, 1, q$): decimos que u_t sigue un proceso ARIMA($p, 1, q$) si u_t satisface que Δu_t es ARMA(p, q). Por ejemplo, u_t sigue un proceso ARIMA(1,1,1) si u_t satisface que Δu_t es ARMA(1,1), es decir, si

$$u_t - u_{t-1} = \rho u_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t,$$

donde ε_t es un ruido blanco.

Proposición: Un proceso AR(1) puede escribirse como un proceso MA(∞).

Prueba: dado que u_t sigue un proceso AR(1), u_t satisface que

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Consecuentemente, rezagando en un período esta última expresión, $u_{t-1} = \rho u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$, y si la rezagamos en dos períodos obtenemos, $u_{t-2} = \rho u_{t-3} + \varepsilon_{t-2}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \rho u_{t-1} \\ &= \varepsilon_t + \rho(\rho u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} \\ &= \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2(\rho u_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) \\ &= \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} \\ &= \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

Definición: la **función de autocovarianza** se define como

$$\gamma_s = Cov(u_t, u_{t-s}), s = 0, 1, 2, \dots$$

Definición: la **función de autocorrelación** se define como

$$\rho_s = Corr(u_t, u_{t-s}) = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}, s = 1, 2, \dots$$

Vamos a suponer por el resto de esta clase que las series de tiempo con las que trabajamos son estacionarias. La clase que viene vamos a ver la definición de este concepto (estacionariedad), que nada tiene que ver con estacionalidad. Pero básicamente, al introducir este supuesto, nos aseguramos que las autocovarianzas γ_s no cambian según cuál sea el momento del

tiempo en el que las evaluamos (solo nos interesa el subíndice “s”). Es por esta razón que la autocorrelación puede escribirse como $\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$.

• **Proceso MA(1):** $u_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

La función de autocovarianza se obtiene haciendo las cuentas:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= Cov(u_t, u_t) = Var(u_t) \\ &= E(\theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)^2 \\ &= E(\theta^2 \varepsilon_{t-1}^2) + E(\varepsilon_t^2) + 2Cov(\theta \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) \\ &= \theta^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 = (1 + \theta^2) \sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= Cov(u_t, u_{t-1}) \\ &= Cov(\theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \theta \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \theta \sigma_\varepsilon^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= \text{Cov}(u_t, u_{t-2}) \\
 &= \text{Cov}(\theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \theta \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de autocovarianza de un proceso MA(1) es:

$$\gamma_s = \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2 & s = 0 \\ \theta\sigma_\varepsilon^2 & s = 1 \\ 0 & s = 2, 3, 4 \dots \end{cases}$$

Además, la función de autocorrelación de un proceso MA(1) es:

$$\rho_s = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \theta/(1 + \theta^2) & s = 1 \\ 0 & s = 2, 3, 4 \dots \end{cases}$$

- **Proceso MA(2):** $u_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$

Para obtener la función de autocovarianza:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= Cov(u_t, u_t) = Var(u_t) \\
 &= E(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)^2 \\
 &= E(\theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2) + E(\theta_2^2 \varepsilon_{t-2}^2) + E(\varepsilon_t^2) \\
 &\quad + E(\text{doble productos}) \\
 &= \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_\varepsilon^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= Cov(u_t, u_{t-1}) \\
 &= Cov(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \\
 &\quad \theta_1 \varepsilon_{t-2} + \theta_2 \varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-1}) \\
 &= (\theta_1 + \theta_2 \theta_1) \sigma_\varepsilon^2 \\
 &= \theta_1 (1 + \theta_2) \sigma_\varepsilon^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= Cov(u_t, u_{t-2}) \\
 &= Cov(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t, \theta_1 \varepsilon_{t-3} + \theta_2 \varepsilon_{t-4} \\
 &\quad + \varepsilon_{t-2}) \\
 &= \theta_2 \sigma_\varepsilon^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de autocovarianza de un proceso MA(2) es:

$$\gamma_s = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 & s = 0 \\ \theta_1(1 + \theta_2)\sigma_\varepsilon^2 & s = 1 \\ \theta_2\sigma_\varepsilon^2 & s = 2 \\ 0 & s = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

Además, la función de autocorrelación de un proceso MA(2) es:

$$\rho_s = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \theta_1(1 + \theta_2)/(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & s = 1 \\ \theta_2/(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) & s = 2 \\ 0 & s = 3, 4, \dots \end{cases}$$

En general, para un proceso MA(q), las autocorrelaciones se vuelven iguales a cero a partir de $q + 1$ en adelante. Volviendo a la matriz de varianzas y covarianzas de los

errores, si los errores siguieran un proceso MA(1), esta matriz sería entonces

$$\mathbf{\Omega} = \sigma_{\varepsilon}^2 \begin{pmatrix} 1 + \theta^2 & \theta & 0 & \cdots & 0 \\ \theta & 1 + \theta^2 & \theta & \cdots & 0 \\ 0 & \theta & 1 + \theta^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \theta^2 \end{pmatrix}$$

mientras que si los errores siguieran un proceso MA(2), esta matriz sería en cambio

$$\mathbf{\Omega} = \sigma_{\varepsilon}^2 \begin{pmatrix} 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 & \theta_1(1 + \theta_2) & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \theta_1(1 + \theta_2) & 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 & \theta_1(1 + \theta_2) & \cdots & 0 \\ \theta_2 & \theta_1(1 + \theta_2) & 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 \end{pmatrix}$$

- **AR(1):** $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, con $|\rho| < 1$

Como vimos en la proposición, un proceso AR(1) puede escribirse como un MA(∞), es decir, $u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}$. Su esperanza será cero, $E(u_t) = 0$ ya que cada ruido blanco tiene esperanza cero.

Las autocovarianzas de un proceso AR(1) se obtienen haciendo las cuentas:

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \text{Var}(u_t) &= E \left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} \right)^2 \\ &= E(\varepsilon_t^2 + \rho^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \rho^4 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots \\ &\quad + \text{doble productos}) \\ &= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2} \end{aligned}$$

ya que $1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots = \frac{1}{1 - \rho^2}$

Nota al pie: sea $|a| < 1$. Suponga que queremos conocer a qué converge la suma infinita: $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$

Suponga que esta suma converge a un número b . Es decir,

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots = b.$$

Reescribiendo, note que,

$$1 + a(1 + a + a^2 + \dots) = b,$$

o sea que,

$$1 + ab = b,$$

y consecuentemente, $b = \frac{1}{1-a}$, si $|a| < 1$.

Fin de nota al pie.

La autocovarianza de orden 1, γ_1 , de un proceso AR(1) será:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= Cov(u_t, u_{t-1}) \\
 &= E \left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-1-j} \right) \\
 &= E(\rho \varepsilon_{t-1}^2 + \rho^3 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots \\
 &\quad + \text{doble productos}) \\
 &= \rho \sigma_{\varepsilon}^2 (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots) \\
 &= \frac{\rho \sigma_{\varepsilon}^2}{1 - \rho^2}
 \end{aligned}$$

En general, usando este “truco”, obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
 \gamma_s &= Cov(u_t, u_{t-s}) \\
 &= Cov(\varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \rho^s u_{t-s}, u_{t-s}) \\
 &= E[(\varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \rho^s u_{t-s}) u_{t-s}] \\
 &= \rho^s \gamma_0
 \end{aligned}$$

Consecuentemente, la función de autocovarianza de un proceso AR(1) puede resumirse de la siguiente manera:

$$\gamma_0 = \text{Var}(u_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2}$$

$$\gamma_1 = \rho\gamma_0 = \rho \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2}$$

$$\gamma_s = \rho^s \gamma_0 = \rho^s \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2}$$

La función de autocorrelación para un proceso AR(1) será entonces:

$$\rho_s = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \rho & s = 1 \\ \rho^2 & s = 2 \\ \rho^s & s = 3, 4, \dots \end{cases}$$

La matriz de varianzas y covarianzas de un AR(1) es:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Estos procesos que acabamos de ver, MA(1), MA(2) y AR(1) con $|\rho| < 1$ son estacionarios. Primero, uno debe revisar si las series con las que uno va a trabajar son estacionarias o no. Si son estacionarias, uno puede correr un autocorrelograma usando Eviews o Stata u otro software. El autocorrelograma nos permite ver si una serie de tiempo es un MA o no.

La **función de autocorrelación parcial** de un proceso nos permite saber de qué orden es un proceso AR. En los software aparece a veces con el nombre de correlograma parcial.

Los valores del correlograma parcial se obtienen a partir de una regresión de

u_t en u_{t-1} donde $\hat{\rho}_1$ es el de orden 1

u_t en u_{t-2}, u_{t-1} donde $\hat{\rho}_2$ es el de orden 2

u_t en $u_{t-3}, u_{t-2}, u_{t-1}$ donde $\hat{\rho}_3$ es el de orden 3 y así sucesivamente

El Estadístico de Durbin-Watson

La mayoría de los software econométricos publican el estadístico de Durbin-Watson (DW) en las salidas de las regresiones. Éste es un estadístico que sirve para testear si hay evidencia de autocorrelación de orden 1 en los residuos de nuestra regresión por mínimos cuadrados ordinarios.

El estadístico de DW se calcula de la siguiente manera:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T (e_t)^2}$$

El estadístico DW estará siempre entre los valores de cero y cuatro. Será cercano a 0 cuando exista autocorrelación de orden 1 positiva y será cercano a 4 cuando exista autocorrelación de orden 1 negativa. Será

cercano a dos cuando no exista autocorrelación de orden 1.

Los valores críticos para comparar el estadístico DW se obtienen de la tabla de Durbin Watson para el número de observaciones (T) y cantidad de pendientes (k) que se estiman en nuestro modelo. La tabla presenta dos valores críticos para un determinado " T " y determinado " k " que se denominan dL y dU .

Cuando DW es menor a 2, si $DW < dL$ se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación de orden 1 y se concluye que existe autocorrelación de orden 1 positiva. Si $dL < DW < dU$ el test es inconcluso y si $dU < DW$ no se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación de orden 1. Cuando DW es mayor a 2 se toma como estadístico $4 - DW$ y ese es el valor del

estadístico que se compara con d_L y d_U de la misma manera que la anterior. Por ejemplo, cuando $DW > 2$, si $4 - DW < d_L$ se rechaza la hipótesis nula de no autocorrelación de orden 1 y se concluye que existe autocorrelación de orden 1 negativa en los residuos de la regresión.