Universidad de San Andrés
Maestría en Inteligencia Artificial
Modelado Estocástico

Solución a la Ejercitación 1

1) Demuestre que, si Z es una variable aleatoria normal estándar, entonces:

(a) $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$

(b) $Var(Z) = E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$

(c) $E(Z^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$

(d) $E(Z^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 3$

En función a estos resultados, note que simplemente con un cambio de variables podemos afirmar que para cualquier variable aleatoria que se distribuya como normal, no necesariamente normal estándar, ésta será simétrica (respecto a su media) y su curtosis será igual a tres. Recuerde las definiciones de coeficiente de asimetría y curtosis vistas en clase.

Respuesta:

(a) $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$

(b) $E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\int_{0}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

Esto último se desprende del hecho que va a dar lo mismo la integral de 0 a $+\infty$ que de $-\infty$ a 0. Por eso hay un "2" delante de la integral. Integrando por partes, sea $f(z) = z$ y sea $g'(z) = ze^{-\frac{z^2}{2}}$, y note que $f'(z) = 1$ y que $g(z) = -e^{-\frac{z^2}{2}}$, entonces,

$$E(Z^2) = 2\int_{0}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{0}^{\infty} + 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\frac{1}{2} = 1.$$

El último paso se desprende del hecho que el área debajo de cualquier pdf integra a uno entre $-\infty$ y $+\infty$ y, consecuentemente va a integrar a ½ entre 0 y $+\infty$ por simetría de la normal estándar.

$c)\ \ E(Z^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz =$

Integrando por partes, sea $f(z) = z^2$ y sea $g'(z) = ze^{-\frac{z^2}{2}}$, y note que $f'(z) = 2z$ y que $g(z) = -e^{-\frac{z^2}{2}}$, entonces,

$$E(Z^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^2\, e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0$$

El primer término es cero por L´Hopital y el segundo término también es cero porque es la esperanza de una normal estándar, que acabamos de calcular en (a).

(d) Integrando por partes, sea $f(z) = z^3$ y sea $g'(z) = ze^{-\frac{z^2}{2}}$, y note que $f'(z) = 3z^2$ y que $g(z) = -e^{-\frac{z^2}{2}}$, entonces,

$$E(Z^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^3\, e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 3\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

Notando que por L´Hopital, $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^3\, e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ y además, que $\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = Var(Z) = 1$, donde $Var(Z)$ es la varianza de una variable aleatoria normal estándar, obtenemos el resultado deseado, que $E(Z^4) = 3$.

Note que como la variable aleatoria para la cual calculamos sus primeros 4 momentos es la normal estándar, que tiene media cero, lo que calculamos recién también son los primeros 4 momentos “centrales”. En términos de la notación de la Clase 2 son el $\mu_1, \mu_2, \mu_3\ y\ \mu_4$. Por lo tanto, el coeficiente de asimetría,

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

va a ser cero, y el de curtosis va a ser 3:

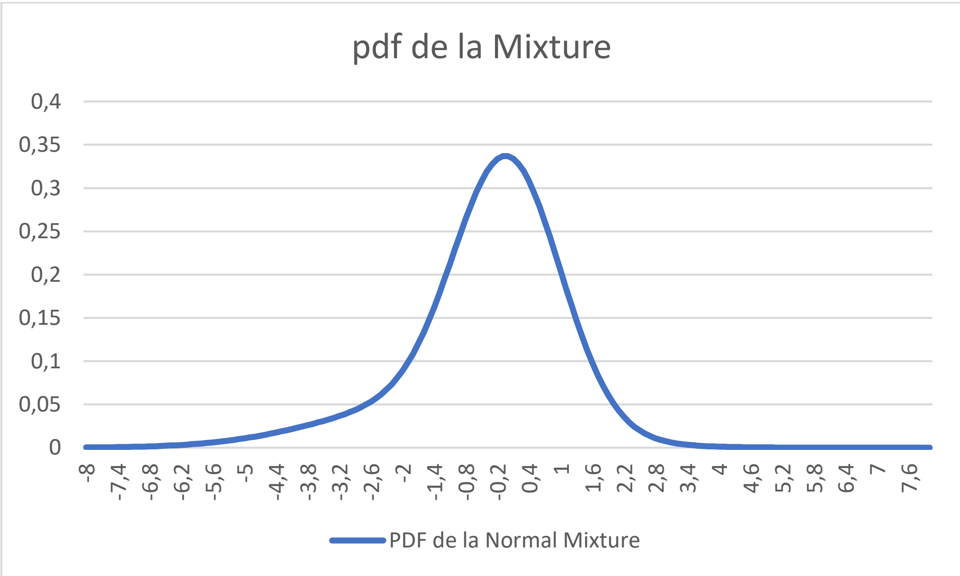
$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = \frac{3}{1} = 3.$$

2) En una hoja de Excel, genere en una columna los valores de -8 a 8, con diferencias de 0.1. En otra columna, genere los valores de la pdf de una normal estándar. (pdf=*probability density function*), es decir, $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$. En otra columna, genere los valores de la pdf de una normal con media -1.5 y varianza 4, es decir, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x+1.5)^2}{8}}$. Y, por último, genere los valores de la pdf de X donde X es una "*mixture*" de dos normales con pesos 0.75 para la normal estándar y 0.25 para la segunda (la N(-1.5,4)). La pdf de X va a ser $\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{(x+1.5)^2}{8}}$.

Esta última variable aleatoria es una mezcla de dos variables aleatorias normales. En la literatura se las llama "*normal mixtures*". Realice un gráfico de la pdf de esta última e indique, en función al gráfico, si es simétrica o asimétrica (positiva o negativa).

Respuesta: véase Excel adjunto.

Básicamente hay que armar el Excel de la manera que se indica en el enunciado y graficar la pdf de la *normal mixture.*



Del gráfico se puede observar la asimetría es negativa. La cola izquierda es alargada (está estirada).

También podemos calcular sus momentos, si bien esto ya no se pide en el ejercicio. El primer momento es fácil de calcular a mano y da -3/8. El segundo momento da 148/64, el segundo momento centrado, $\mu_2 = \frac{139}{64}$, el tercer momento centrado es $\mu_3 = -2.85$, el cuarto momento centrado da $\mu_4 = 22.9$, de modo tal que el coeficiente de asimetría da $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}} = -0.89$ y el coeficiente de curtosis, $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = 4.85$ (o sea que la curtosis en exceso es 1.85).

Los momentos de la mixtura DEBEN calcularse como integrales (si bien no es la única manera). Lo que quiero decir, en otras palabras, es que cuando usan Excel para calcular estadísticos descriptivos, los mismos sirven si lo que tenemos son datos. Acá no tenemos datos en este ejercicio. Tenemos funciones de densidad que estamos mezclando. Recomiendo que usen Python para calcular las integrales que los distintos momentos de la mixtura requieren. O bien, pueden indicar la integral que desean calcular en algún sitio, por ejemplo, WolframAlpha y que se las calcule:

Primer Momento: $\mu_1 = E(X)$
https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.75Integrate%5BxPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C2%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-++Divide%5BPower%5Bx%2C2%5D%2C2%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.25Integrate%5BxPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C8%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1.5%5C%2841%29%2C2%5D%2C8%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es

Segundo Momento Centrado: $\mu_2 = E([X - E(X)]^2) = Var(X)$

https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.75Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.375%5C%2841%29%2C2%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C2%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-++Divide%5BPower%5Bx%2C2%5D%2C2%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.25Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.375%5C%2841%29%2C2%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C8%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1.5%5C%2841%29%2C2%5D%2C8%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es

Tercer Momento Centrado: $\mu_3 = E([X - E(X)]^3)$

https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.75Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.375%5C%2841%29%2C3%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C2%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-++Divide%5BPower%5Bx%2C2%5D%2C2%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.25Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.375%5C%2841%29%2C3%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C8%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1.5%5C%2841%29%2C2%5D%2C8%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es

Cuarto Momento Centrado: $\mu_4 = E([X - E(X)]^4)$

https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.75Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.375%5C%2841%29%2C4%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C2%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-++Divide%5BPower%5Bx%2C2%5D%2C2%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D%2B0.25Integrate%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B0.375%5C%2841%29%2C4%5DPower%5B%5C%2840%29Divide%5B1%2C8%CF%80%5D%5C%2841%29%2C0.5%5DPower%5Be%2C-Divide%5BPower%5B%5C%2840%29x%2B1.5%5C%2841%29%2C2%5D%2C8%5D%5D%2C%7Bx%2C-%E2%88%9E%2C%E2%88%9E%7D%5D&lang=es

3) Para un activo financiero, obtenga una serie de tiempo diaria de precios de cierre de ese activo (5 años, del período que ustedes deseen).

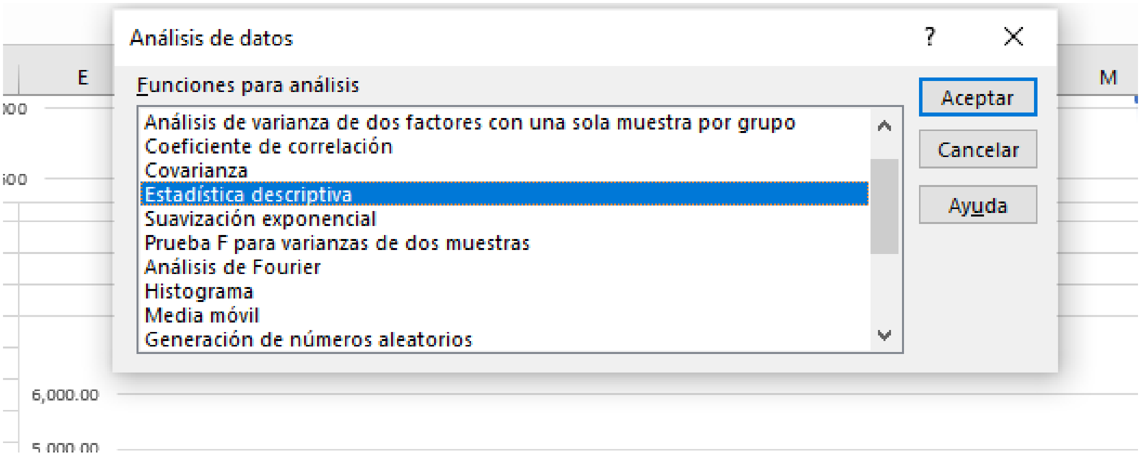
(a) Calcule los retornos diarios simples.
(b) Calcule la media, volatilidad, asimetría y curtosis de los retornos.
(c) Muestre un histograma de los retornos simples.
(d) ¿Los retornos de la muestra siguen una distribución normal? Justifique usando Jarque Bera.
(e) Calcule los retornos logarítmicos diarios y para un mes cualquiera, verifique que la suma de los retornos logarítmicos diarios es igual al retorno logarítmico correspondiente a ese mes.

Respuesta:

Este ejercicio apunta a que ustedes repliquen para un activo financiero cualquiera lo que vimos en clase para el S&P500. Es importante que tengan en cuenta al bajar la información de precios de cierre que los precios de cierre ya tengan incorporados los pagos de dividendos (renta variable) o de cupones o pagos de capital para los instrumentos de renta fija, ya que, de otro modo, vamos a tomar como una caída del precio y, por lo tanto, una rentabilidad negativa, cualquiera de estas transferencias del activo a su tenedor. Para responder (a) calculamos los retornos simples con la fórmula

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

Y para responder (b), yendo en Excel a Datos/Análisis de Datos se abre una ventana y allí seleccionan "Estadística Descriptiva" e indican los datos que quieren usar:



Excel les va a dar la media, varianza, desvío estándar, coeficiente de asimetría y curtosis en exceso en un solo click.

Para ver el histograma, pueden construirlo "a mano" generando los intervalos que ustedes deseen o directamente puede hacer todo Excel, simplemente desde el gráfico de la serie de tiempo seleccionen histograma y lo tienen.

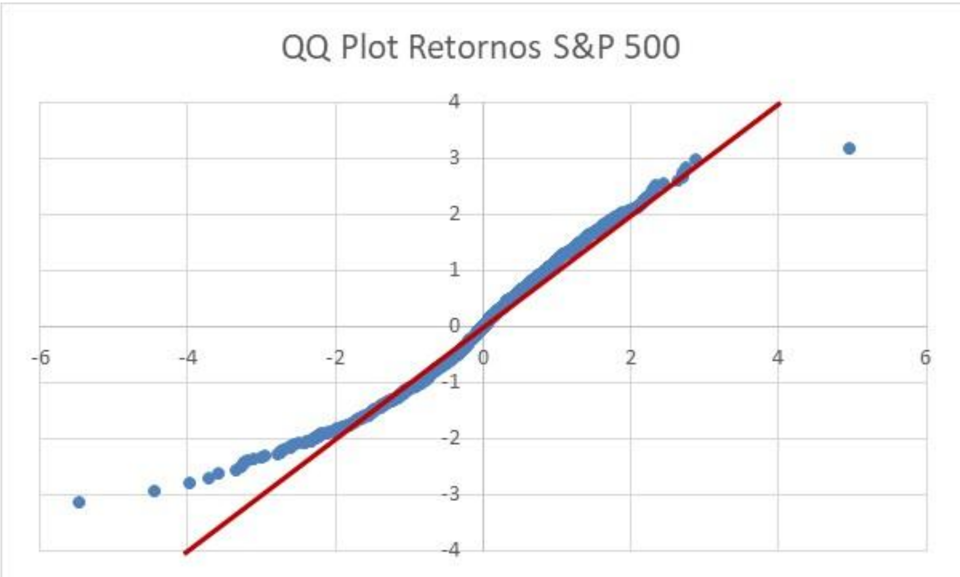
Para responder si los datos siguen una distribución normal, se espera que calculen el estadístico de Jarque-Bera y respondan si rechazan o no la hipótesis nula de normalidad. Para calcular este estadístico hay que hacer la cuenta:

$$JB = \frac{n}{6}\left(Skewness^2 + \frac{K_E^2}{4}\right)$$

En el caso de S&P500,

$$JB = \frac{1255}{6}\left(0.061^2 + \frac{6.16^2}{4}\right) = 1982.8$$

nos queda un estadístico mayor a 1900 y, por lo tanto, rechazamos la hipótesis nula de normalidad de los retornos diarios del S&P500. Alternativamente, uno puede realizar un QQ Plot y corroborar que cuando los datos ordenados y normalizados (eje horizontal) son graficados contra los que se obtendrían a partir de una variable aleatoria normal estándar (eje vertical), las observaciones no van a quedar sobre una recta de 45 grados.



e) Ver Excel SP500_ en celdas J2 y J3 de hoja Retornos.