



MVO-32 - Aula Prática 4

Antônio Bernardo
antonio@ita.br

12 de novembro de 2025

Objetivos

Os objetivos desta aula prática são:

- Projeto de um sistema de aumento de estabilidade (SAS) látero-direcional com estrutura definida, utilizando a teoria do regulador linear quadrático (LQR) com realimentação de saída
- Familiarização com a inclusão das dinâmicas de dois atuadores e de um filtro *washout*
- Comparação entre dois sistemas projetados, um com apenas duas realimentações e o outro com oito realimentações

Dados

Nesta aula prática, continuaremos a trabalhar com o modelo da aeronave Airbus A300, com os dados baseados no livro a seguir – porém, com algumas modificações:

BROCKHAUS, R.; ALLES, W.; LUCKNER, R. **Flugregelung**. 3. ed. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2011.



Figura 1: Airbus A300

Os dados a serem utilizados são exatamente os mesmos da Aula Prática 2.

No guia desta aula prática, tal como no Capítulo 13 do material de aula, abandonaremos a notação em negrito para as matrizes e utilizaremos para elas uma formatação normal, semelhante à notação usada por Stevens e Lewis [1]. O contexto sempre permitirá diferenciar entre escalares, vetores e matrizes.

LQR aplicado ao projeto de SAS látero-direcional

Considere um sistema de aumento de estabilidade látero-direcional com a estrutura proposta na Fig. 2:

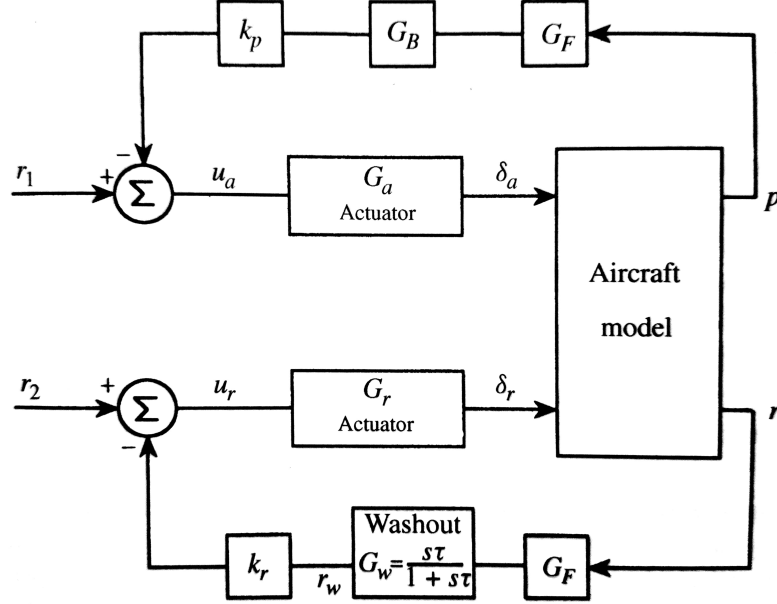


Figura retirada de Stevens e Lewis [1]

Figura 2: Estrutura do SAS látero-direcional

Nesse sistema, a taxa de rolamento é realimentada para os ailerons e a taxa de guinada é realimentada para o leme. A realimentação da taxa de rolamento permite, principalmente, ajustar as qualidades de voo do modo de rolamento. Já a realimentação da taxa de guinada permite que o leme produza um momento de guinada que tenderá a se opor ao movimento de guinada originado quando o modo *Dutch roll* é excitado.

Entretanto, uma dificuldade surge ao se realimentar a taxa de guinada: no regime permanente de uma curva coordenada, a existência de $r \neq 0$ faz com que haja uma deflexão de leme pelo SAS, $(\Delta\delta_r)_{\text{SAS}}$, que se opõe ao comando do piloto. Isso faz com que, se nenhuma providência for tomada com o SAS ligado, o piloto tenha que aplicar maiores comandos de pedal de leme do que com o SAS desligado, o que não é agradável para a pilotagem do avião [1].

Por essa razão, pode-se incluir no sistema em malha fechada algo que torne o SAS (praticamente) insensível a r constante. Uma das maneiras de se fazer isso é através da inclusão de um *filtro passa-alta*, que ganha o nome especial de *washout filter*, ou filtro *washout*. O filtro *washout* tem como função de transferência:

$$G_w(s) = \frac{\tau_w s}{\tau_w s + 1}. \quad (1)$$

Neste exercício, utilizaremos $\tau_w = 1$ s. Nesse caso, o diagrama de Bode do filtro *washout*, mostrado na Fig. 3, pode ser obtido diretamente do MATLAB com a sequência de comandos abaixo:

```

tau_\\mathrm{w} = 1;
numw = [tau_\\mathrm{w} 0];
denw = [tau_\\mathrm{w} 1];
printsys(numw,denw)
omega_vec = logspace(-2,2,1000);
[mag,phase,w] = bode(numw,denw,omega_vec);

figure
subplot(211)
semilogx(w,20*log10(mag),'LineWidth',1.5)
xlabel('\\omega [rad/s]','FontSize',12)
ylabel('Magnitude [dB]','FontSize',12)
ylim([-40 0])
grid on
set(gca,'FontSize',12)

subplot(212)
semilogx(omega_vec,phase,'LineWidth',1.5)
xlabel('\\omega [rad/s]','FontSize',12)
ylabel('\\phi [deg]','FontSize',12)
ylim([0 90])
set(gca,'YTick',[0 15 30 45 60 75 90])
set(gca,'YTickLabel',{'0' '' '' '45' '' '' '90'})
grid on
set(gca,'FontSize',12)

```

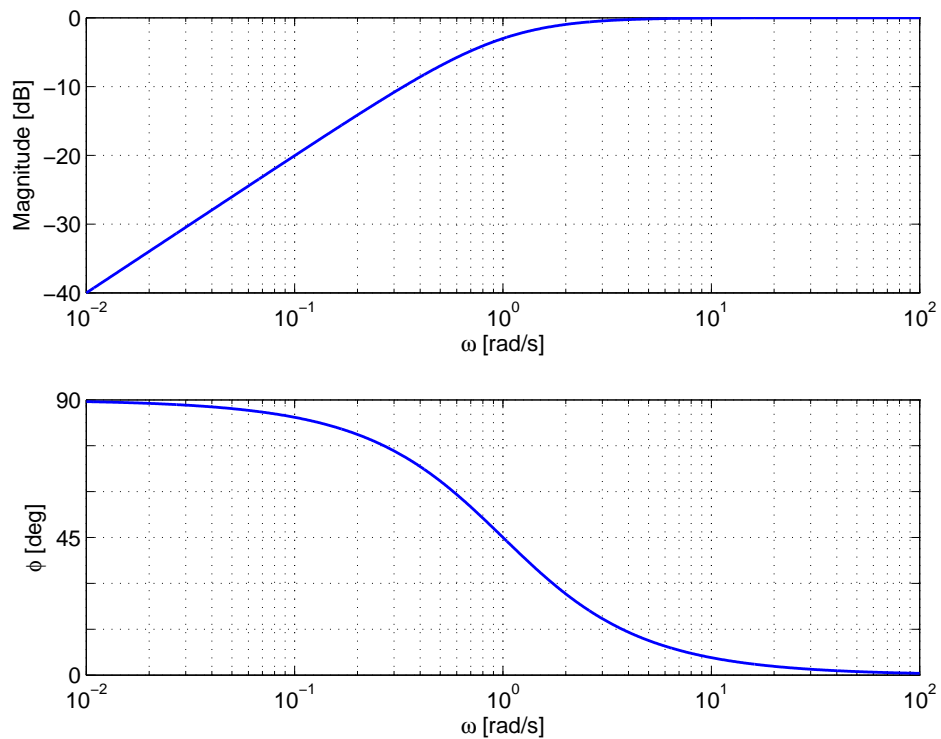


Figura 3: Diagrama de Bode do filtro *washout* com $\tau_w = 1$ s

Na Fig. 3, fica visível a atenuação proporcionada pelo filtro *washout* em baixas

frequências. Em altas frequências, a atenuação reduz e o avanço de fase vai se aproximando de zero.

Na Fig. 2, G_a e G_r representam as funções de transferência para a modelagem dos atuadores dos ailerons e do leme, respectivamente. Essas funções de transferência são dadas por:

$$G_a(s) = \frac{1}{\tau_a s + 1}, \quad (2)$$

$$G_r(s) = \frac{1}{\tau_r s + 1}, \quad (3)$$

nas quais assumiremos $\tau_a = \tau_r = 0,050$ s. Modelos de atuadores como esses já foram vistos no Capítulo 11 e na Aula Prática 3.

Ainda na Fig. 2, G_F representaria uma filtragem de ruídos de medição e/ou uma dinâmica de atraso de medição das taxas de rolamento e guinada pelos giroscópios de medição [1]. Já G_B , por sua vez, representaria um filtro passa-baixa para atenuar o efeito dos modos de flexão estrutural antissimétrica da asa, que contaminam as medições de p . O principal efeito desse filtro seria a introdução de atrasos na resposta do SAS. G_F e G_B aparecem na Fig. 2 apenas para fins ilustrativos e serão desprezados no exercício desta aula, ou seja, assumiremos que:

$$G_F(s) = 1, \quad (4)$$

$$G_B(s) = 1. \quad (5)$$

Considerando tudo o que foi exposto acima, resolva o seguinte exercício para a condição de voo A3 do Airbus A300:

Exercício 1

Para o projeto do SAS látero-direcional, podemos utilizar a dinâmica de ordem reduzida do movimento látero-direcional, calculada a partir das partições $A_{ld} = \text{lin_output}(3) \cdot A(7:10, 7:10)$ da matriz A e $B_{ld} = \text{lin_output}(3) \cdot B(7:10, 4:5)$ da matriz B :

$$\dot{x}_{ld} = A_{ld}x_{ld} + B_{ld}u_{ld}, \quad (6)$$

com:

$$x_{ld} = \begin{bmatrix} \Delta\beta & \Delta\phi & p & r \end{bmatrix}^T, \quad (7)$$

$$u_{ld} = \begin{bmatrix} \Delta\delta_a & \Delta\delta_r \end{bmatrix}^T. \quad (8)$$

Porém, a inclusão do filtro *washout* e das dinâmicas dos atuadores resultará na inclusão de mais estados no sistema. Com relação aos atuadores, já sabemos que:

$$\Delta\dot{\delta}_a = \frac{1}{\tau_a} (\Delta u_a - \Delta\delta_a), \quad (9)$$

$$\Delta\dot{\delta}_r = \frac{1}{\tau_r} (\Delta u_r - \Delta\delta_r), \quad (10)$$

sendo Δu_a e Δu_r as variações das deflexões comandadas dos ailerons e do leme, respectivamente.

Já para o filtro *washout*, temos:

$$Y(s) = \frac{\tau_w s}{\tau_w s + 1} U(s), \quad (11)$$

sendo $U(s) = \mathcal{L}[r(t)]$ a transformada de Laplace da entrada do filtro (taxa de guinada $r(t)$) e $Y(s) = \mathcal{L}[r_w(t)]$ a transformada de Laplace da saída do filtro (taxa de guinada filtrada $r_w(t)$). A Equação (11) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\tau_w} Y(s) + s Y(s) = s U(s) \implies s(Y(s) - U(s)) = -\frac{1}{\tau_w} Y(s). \quad (12)$$

Se definirmos $X_w(s) = \mathcal{L}[x_w(t)] = Y(s) - U(s)$, estaremos definindo um estado $x_w(t)$ para o filtro *washout* e teremos:

$$s X_w(s) = -\frac{1}{\tau_w} X_w(s) - \frac{1}{\tau_w} U(s), \quad (13)$$

$$Y(s) = X_w(s) + U(s). \quad (14)$$

No domínio do tempo, essas equações se traduzem simplesmente como:

$$\dot{x}_w = -\frac{1}{\tau_w} x_w - \frac{1}{\tau_w} r, \quad (15)$$

$$r_w = x_w + r. \quad (16)$$

Portanto, a dinâmica da aeronave combinada com os atuadores e o filtro *washout* (\equiv **dinâmica aumentada**) tem, ao todo, sete variáveis de estado e duas variáveis de controle:

$$x = [\Delta\beta \quad \Delta\phi \quad p \quad r \quad \Delta\delta_a \quad \Delta\delta_r \quad x_w]^T, \quad (17)$$

$$u = [\Delta u_a \quad \Delta u_r]^T. \quad (18)$$

a) Considere que a dinâmica aumentada é representada por $\dot{x} = Ax + Bu$. Obtenha as matrizes A e B . Calcule os autovalores e os autovetores de A e compare com aqueles de A_{Id} .

b) Considere as matrizes de ponderação Q e R dadas por:

$$Q = \text{diag}\{1, 2, 2, 1, 0, 0, 0\}$$

$$R = 2I_2$$

É possível empregar essas matrizes de ponderação no projeto usando a teoria do LQR? Se não for, como resolvemos o problema?

Independentemente da resposta, proponha matrizes de ponderação baseadas na regra de Bryson.

c) Considere a estrutura da malha fechada como ilustrada na Fig. 2. Quais elementos devem ser nulos na matriz de ganhos do sistema? Escolha um conjunto de ganhos para

iniciar o processo de otimização. Explique a escolha.

d) Considere as matrizes Q e R resultantes do item **(b)** e os ganhos iniciais do item **(c)**. Realize a minimização do índice de desempenho e calcule a matriz de ganhos resultante para o LQR. Então, considerando a equação do índice de desempenho:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (19)$$

calcule, no índice de desempenho final da otimização, as contribuições abaixo representadas:

$$J_Q = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T Q x dt, \quad (20)$$

$$J_R = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^T R u dt, \quad (21)$$

tais que $J = J_Q + J_R$. Além disso, compare graficamente os polos de malha aberta com os polos de malha fechada.

e) Considere a liberdade de realimentar não apenas p e r_w , mas também $\Delta\beta$ e $\Delta\phi$ no projeto do SAS, todos eles tanto para o aileron quanto para o leme. Calcule a matriz de ganhos resultante para o LQR. Compare graficamente os polos de malha aberta com os polos de malha fechada.

f) Compare as respostas obtidas com os sistemas projetados nos itens **(d)** e **(e)** com a resposta da malha aberta, considerando uma simulação por 20 segundos com o comando `initial` do MATLAB, sujeito simultaneamente às condições iniciais $\Delta\beta(0) = 2$ deg e $\Delta\phi(0) = 5$ deg. Apresente os gráficos para todas as variáveis de estado e para todas as variáveis de controle envolvidas, assim como para a taxa de guinada filtrada.

g) Analise as vantagens e as desvantagens práticas dos sistemas projetados nos itens **(d)** e **(e)**. É correto comparar os índices de desempenho finais obtidos em cada item?

Referências

- [1] STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L. **Aircraft control and simulation**. 2.ed. Hoboken, NJ: Wiley, c2003.