Probabilidade e inferência estatística com aplicações em R

Aula 1 - Fundamentos de probabilidade

Felipe Barletta

Departamento de Estatística

01 setembro, 2020

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Sumário

Probabilidade

Definição

- O que Probabilidade?
  - Ramo da matemática que desenvolve e avalia **modelos** para descrever **fenômenos aleatórios**.
  - É a base teórica para o desenvolvimento das técnicas estatísticas.
- Qual o objetivo Probabilidade?
  - Construir um arcabouço teórico para descrever **fenômenos aleatórios**.
- O que precisamos para começar?
  - Descrever o **conjunto** de resultados possíveis do **fenômeno aleatório** de interesse;
  - Atribuir **pesos** a cada possível resultado, refletindo suas chances de ocorrência.

Experimentos

Experimentos determinísticos

Repetidos inúmeras vezes, em condições semelhantes, geram resultados idênticos.

- Aceleração da gravidade
- Leis da Física e da Química

Experimentos aleatórios

Repetidos sob as mesmas condições geram resultados diferentes.

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de um dado
- Tempo de vida de uma lâmpada

Espaço amostral

O que é o espaço amostral?

- Resultado de todas as possibilidades de um experimento
  - $\Omega \Rightarrow$ Espaço amostral
  - Exemplo: Lançamento de um dado
    - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos

O que é um evento?

- É um subconjunto de Ω.
  - $E \Rightarrow$ Evento
- Exemplos

$$E_1 = \{2, 4, 6\}$$
$$E_2 = \{3, 5, 7\}$$
$$E_3 = \Omega$$
$$E_4 = \emptyset$$

- Qualquer possibilidade de subconjunto do espaço amostral é um evento.

Exemplo 1

Experimento:

Lançar duas moedas

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(cara, coroa), (coroa, cara), (cara, cara)(coroa, coroa)\}$$

Evento:

- Mínimo uma cara

$$E = \{(cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}$$

Exemplo 2

Experimento:

Retirar uma carta do baralho

Espaço amostral:

$$\Omega = \{\spadesuit A, \clubsuit A, \heartsuit A, \diamondsuit A, ..., \spadesuit K, \clubsuit K, \heartsuit K, \diamondsuit K\}$$

Evento:

- Cartas de espadas

$$E = \{\spadesuit A, \spadesuit 2, \spadesuit 3, ..., \spadesuit K\}$$

Exemplo 3

Experimento:

Lançar dois dados

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),...,(6,6)\}$$

Evento:

- Faces iguais

$$E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

Exemplo 4

Experimento:

Executar um programa de computador

Espaço amostral:

$\Omega = \{\text{Compilar, Não Compilar}\}$

Evento:

- Programa compilar

$E = \{\text{Compilar}\}$

Exemplo 5

Experimento:

Inspecionar chips, repetidamente, de um circuito integrado até o primeiro defeituoso ser descoberto ($D=$ defeituoso, $P=$ perfeito)

Espaço amostral:

$\Omega = \{(D), (PD), (PPD), (PPPD), ...\}$

Evento:

- Um chip defeituoso ser encontrado nas três primeiras inspeções

$E = \{(D), (PD), (PPD)\}$

Exemplo 6

Experimento:

Tempo(t), em milissegundos, de execução de um programa de computador (Tempo que leva para ser processado na CPU)

Espaço amostral:

$$\Omega = \mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} > 0\}$$

Evento:

- Tempo de processamento da CPU excedido a 5 milissegundos.

$$E = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 5\}$$

Tipos de espaço amostral

- **Finito**
  - Há somente um número finito de possibilidades (Exemplos 1- 4)
- **Infinito discreto**
  - Contagem infinita, como por exemplo os números inteiros positivos (Exemplo 5)
- **Contínuo**
  - Corresponde a intervalos $(\mathbb{R})$ finito ou infinito (Exemplo 6)

Definição clássica de probabilidade

- $n(E)$ - quantidade de elementos do evento E
- $n(\Omega)$ - quantidade de elementos do espaço amostral

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

- Nos exemplos de lançamento de dois e três dados, calcule:
  - Probabilidade de sair exatamente as faces $(1, 1)$ e $(1, 1, 1)$
  - Probabilidade de sair faces com números iguais
  - Probabilidade de sair faces com o número 1
  - Mostre que $P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n(\Omega)}$

Probabilidade e conjuntos

Usamos a **Teoria dos conjuntos** para definir operações com eventos.

- **Conjunto vazio** é o conjunto sem elementos, denotado por $\emptyset$.
- **União** é o evento que consiste da união de **todos** os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denotamos a união do evento A com B por $A \cup B$.
  $A \cup B = \{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$.
- **Interseção** é o evento composto pelos pontos amostrais **comuns** aos eventos que a compõem. Denotamos a interseção de A com B por $A \cap B$.
  $A \cap B = \{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$.

Exemplos

Considere o lançamento de um dado e os eventos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C =$ face par, $D =$ face primo.

```
[1] 1 2 3
```

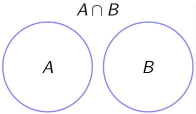
```
[1] 2 4
```

```
[1] 2 3
```

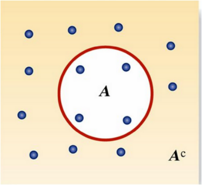
- Uniões
  - $A \cup B =$
  - $A \cup C =$
  - $A \cup D =$
- Interseções
  - $A \cap B =$
  - $A \cap C =$
  - $A \cap D =$
- Complementos
  - $A^c =$
  - $B^c =$
  - $D^c =$

Tipos de eventos

- **Mutuamente exclusivos** (disjuntos) são eventos que possuem interseção nula, ou seja, $A \cap B = \{\emptyset\}$.



- **Complementares** são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja, $A \cup A^c = \Omega$.



Axiomas da probabilidade

i. Positividade:

$$0 \leq P(E) \leq 1, \quad \forall E \in \Omega$$

ii. Aditividade

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j),$$ com os E_j's mutuamente exclusivos.

iii. Certeza

$$P(\Omega) = 1$$

Regra da adição de probabilidades

A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer, A e B, é dada pela **regra da adição de probabilidades**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Note que a regra da adição pode ser simplificada, **se e somente se** os eventos A e B forem **mutuamente exclusivos**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

pois, neste caso, $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0.$

Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, temos que, para qualquer evento E,

$$P(E) = 1 - P(E^c).$$

Verifique através de $P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c) - P(E \cap E^c)$.

$$\begin{aligned} P(E \cup E^c) &= 1, && \text{Pela regra da adição, tem-se} \\ P(E) + P(E^c) - P(E \cap E^c) &= 1, && \text{interseção é nula, então} \\ P(E) + P(E^c) &= 1, && \text{e portanto} \\ P(E) &= 1 - P(E^c). \end{aligned}$$

Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, temos que, para qualquer evento E,

$$P(E) = 1 - P(E^c).$$

Verifique através de $P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c) - P(E \cap E^c)$.

$$\begin{aligned}
P(E \cup E^c) &= 1, && \text{Pela regra da adição, tem-se} \\
P(E) + P(E^c) - P(E \cap E^c) &= 1, && \text{interseção é nula, então} \\
P(E) + P(E^c) &= 1, && \text{e portanto} \\
P(E) &= 1 - P(E^c).
\end{aligned}$$

Probabilidade condicional

Intuitivamente, a probabilidade de ocorrer um evento pode muito bem ser influenciada pelo ocorrência ou não de outros eventos

Exemplo:

- Probabilidade de que um aluno não comparecer a uma aula será influenciado:
  - esteja chovendo ou não,
  - trote dos calouros foi ou não realizado na noite anterior.
  - Internet falhou ou não

Esta é a probabilidade condicional

Probabilidade condicional

Intuitivamente, a probabilidade de ocorrer um evento pode muito bem ser influenciada pelo ocorrência ou não de outros eventos

Exemplo:

- Probabilidade de que um aluno não comparecer a uma aula será influenciado:
  - esteja chovendo ou não,
  - trote dos calouros foi ou não realizado na noite anterior.
  - Internet falhou ou não

  Esta é a probabilidade condicional

Probabilidade condicional

Definição

- Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A ocorrer, dado que ocorreu B é representado por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{para} \quad P(B) > 0.$$

Regra do produto

- Da definição de probabilidade condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

temos que

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

- Caso $P(B) = 0$, definimos $P(A|B) = P(A)$.

Independência de eventos

Os eventos A e B são **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e também que} \quad P(B|A) = P(B).$$

Com isso, e a regra do produto, temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A).$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B).$$

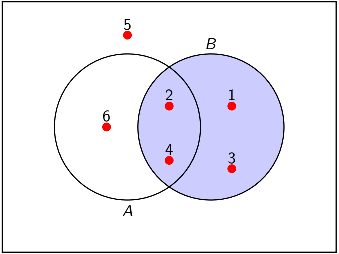
Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos:

$A =$ "resultado é um número par".

$B =$ "resultado é um número menor ou igual a 4".

Os eventos A e B são independentes?



Exemplo

Pela definição intuitiva:

$$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2$$

$$P(B) = 2/3, \quad P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3$$

Portanto: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.

Pela definição formal:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1/3$$

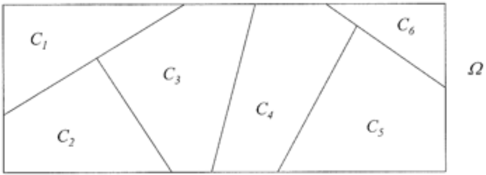
$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3, P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Portanto, os eventos A e B são independentes. Saber que A ocorreu não muda a probabilidade de B ocorrer e vice-versa.

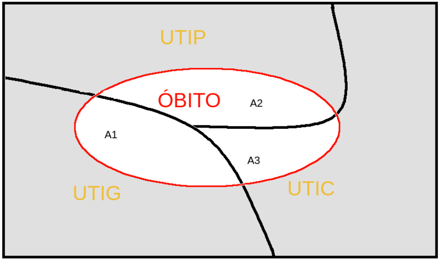
Partição do espaço amostral

Dizemos que os eventos $C_1, C_2, ..., C_k$ formam uma **partição** do espaço amostral, se eles não tem interseção entre si, e se sua união é igual ao espaço amostral. Isto é,

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Omega.$$



Exemplo



$$A_1 = UTIG \cap OBITO$$
$$A_2 = UTIP \cap OBITO$$
$$A_3 = UTIC \cap OBITO$$

- Qual a probabilidade de óbito nas UTI's?

Teorema de Bayes

Suponha que os eventos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ formem uma partição de Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento A, se conheçam as probabilidades $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Então, para qualquer j,

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j)P(A|C_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(C_i)P(A|C_i)}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Exemplo - Doente sadio e o sadio doente

- Considere que um determinado teste resulta positivo para não doentes, com probabilidade $0,1$.
- Também com probabilidade $0,1$, o teste será negativo para um paciente doente.

Se a incidência da doença na população é de 1 para cada 10 mil habitantes, qual é a probabilidade de uma pessoa estar realmente doente se o teste deu positivo?
Definindo os eventos:

- D: a pessoa está doente
- A: o teste é positivo
- Assim as informações disponíveis são as seguintes:

$$P(D) = 0,0001$$

$$P(A \mid D^c) = 0,1$$

$$P(A^c \mid D) = 0,1$$

Exemplo - Doente sadio e o sadio doente

- Ainda podemos escrever os complementares:

$$P(D^c) = 0,9999$$

$$P(A \mid D) = 0,9$$

- A probabilidade que desejamos calcular é, $P(D \mid A)$

$$P(D \mid A) = \frac{P(A \mid D)P(D)}{P(A \mid D)P(D) + P(A \mid D^c)P(D^c)}$$

$$P(D \mid A) = \frac{0,9 * 0,0001}{0,9 * 0,0001 + 0,1 * 0,9999}$$

$$P(D \mid A) = 0,0009$$

- Portanto a probabilidade de estar doente dado que o teste deu positivo é $0,0009$, ou ainda, é aproximadamente 1 em 1000.