Sumário

1. Introdução
   - Teoria das Probabilidades
   - Experimentos e eventos
2. Probabilidade
   - Definições
3. Probabilidade condicional

Teoria das Probabilidades

- A **Teoria das Probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e pesquisa **modelos** que podem ser utilizados para estudar **experimentos ou fenômenos aleatórios**
- A **Inferência Estatística** é totalmente fundamentada na **Teoria das Probabilidades**
- O **modelo** utilizado para estudar um fenômeno aleatório pode variar em complexidade, mas todos eles possuem ingredientes básicos comuns.

Tipos de experimentos

Experimentos determinísticos

Dizemos que um experimento é determinístico quando repetido inúmeras vezes, **em condições semelhantes**, conduz a resultados *essencialmente* idênticos. Ex.:

- Aceleração da gravidade
- Leis da Física e da Química

Experimentos aleatórios

Os experimentos que **repetidos sob as mesmas condições** geram resultados diferentes, são chamados de experimentos aleatórios. Ex.:

- Lançamento de uma moeda
- Lançamento de um dado
- Tempo de vida de um equipamento eletrônico

Objetivo

- O objetivo é construir um modelo matemático para representar **experimentos aleatórios**. Isso o corre em duas etapas:
- Descrever o **conjunto** de resultados possíveis
- Atribuir *pesos* a cada resultado, refletindo suas chances de ocorrência

Definições

Um experimento, que ao ser realizado sob as mesmas condições não produz os mesmos resultados, é denominado um **experimento aleatório**. Exemplo: lançamento de uma moeda, medir altura, ...

O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado **espaço amostral** (Ω). Pode conter um número finito ou infinito de pontos. Exemplo: {cara, coroa}, $\mathbb{R}$, ...

Os elementos do espaço amostral (**pontos amostrais**) são denotados por ω. Exemplo: $\omega_1 =$ cara, $\omega_2 =$ coroa.

Todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório, é um **evento**. Exemplo: A = "sair cara", B = "sair face par".

Exemplos

- **Experimento:** retirar uma carta de um baralho de 52 cartas.
- **Espaço amostral:** $\Omega = \{\clubsuit A, \clubsuit 2, ..., \heartsuit A, ..., \spadesuit A, ..., \diamondsuit J, \diamondsuit Q, \diamondsuit K\}$.
- **Pontos amostrais:** $\omega_1 = \clubsuit A$, $\omega_2 = \clubsuit 2$, $\ldots$, $\omega_{52} = \diamondsuit K$.
- **Eventos:** A = "sair um ás", B = "sair uma letra", C = "sair carta de $\clubsuit$".

- **Experimento:** pesar um fruto ao acaso
- **Espaço amostral:** $\Omega = \mathbb{R}^+$.
- **Pontos amostrais:** espaço amostral é infinito.
- **Eventos:** A = "peso menor que 50g", B = $\{x : x \geq 100\text{g}\}$.

Operações com eventos

Usamos a **Teoria dos conjuntos** para definir operações com eventos

- **União** é o evento que consiste da união de **todos** os pontos amostrais dos eventos que a compõem. Denotamos a união do evento A com B por $A \cup B$. $A \cup B = \{\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$
- **Interseção** é o evento composto pelos pontos amostrais **comuns** aos eventos que a compõem. Denotamos a interseção de A com B por $A \cap B$. $A \cap B = \{\omega \in A \text{ e } \omega \in B\}$
- **Complemento** é o conjunto de pontos do espaço amostral que não estão no evento. Denotamos o complemento do evento A por A^c. $A^c = \{\omega \notin A\}$

Tipos de eventos

- **Disjuntos** (mutuamente exclusivos) são eventos que possuem interseção nula, ou seja, $A \cap B = \{\emptyset\}$.
- **Complementares** são eventos que a união é o espaço amostral, ou seja, $A \cup B = \Omega$.

Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os eventos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C =$ face par, $D =$ face primo.

- Uniões
- $A \cup B =$
- $A \cup C =$
- $A \cup D =$
- Interseções
- $A \cap B =$
- $A \cap C =$
- $A \cap D =$
- Complementos
- $A^c =$
- $B^c =$
- $D^c =$

Exemplo

Considere o lançamento de um dado e os eventos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\omega : \omega \leq 3\}$, $C =$ face par, $D =$ face primo.

- Uniões
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
- $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- Interseções
- $A \cap B = \{1, 2, 3\}$
- $A \cap C = \{2, 4\}$
- $A \cap D = \{2, 3\}$
- Complementos
- $A^c = \{5, 6\}$
- $B^c = \{\omega : \omega > 3\}$
- $D^c = \{1, 4, 6\}$

Sumário

1 Introdução
- Teoria das Probabilidades
- Experimentos e eventos

2 Probabilidade
- Definições

3 Probabilidade condicional

Definição de probabilidade

Probabilidade é uma função $P(\cdot)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, de tal forma que

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \Omega$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, com os A_j's disjuntos.

A pergunta que surge é então: como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

Definição de probabilidade

Existem duas maneiras principais de atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral:

1. (**Clássica**) baseia-se nas características teóricas da realização do fenômeno. Ex.:
   - Considerando o lançamento de um dado, temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   - Admintindo que o dado é honesto, podemos assumir que $P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = 1/6$
2. (**Frequentista**) baseia-se nas frequências (relativas) de ocorrência do fenômeno. Ex.:
   - Determinar a probabilidade de ocorrência de cada face de um dado
   - Sem fazer nenhuma suposição inicial, podemos usar as **frequências relativas** de sucessivas ocorrências

Definição frequentista

Podemos então pensar em repetir o experimento aleatório n vezes, e contar quantas vezes o evento A ocorre, $n(A)$.

Dessa forma a frequência relativa de A nas n repetições será

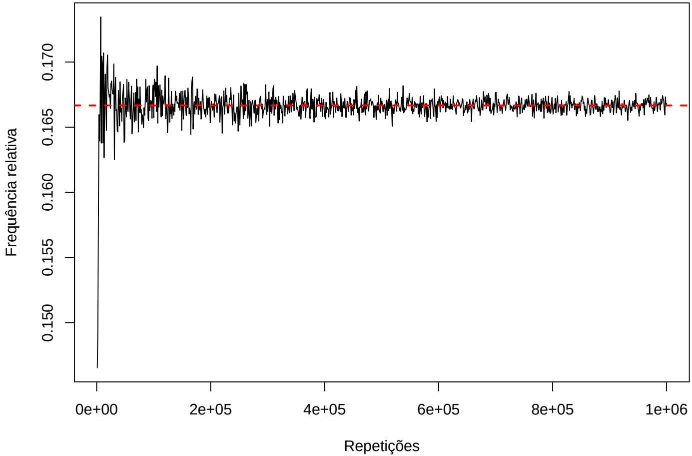
$$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$$

Para $n \to \infty$ repetições sucessivas e independentes, a frequência relativa de A tende para uma constante p

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) = p$$

Exemplo: Se um dado fosse lançado n vezes, e contássemos quantas vezes saiu a face 4, qual seria a probabilidade desse evento?

Definição frequentista



Definição frequentista

Assim,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} = P(A) \approx 0,1667$$

As probabilidades calculadas a partir de frequências relativas, são **estimativas** da verdadeira probabilidade

À medida que o número de repetições vai aumentando, as **frequências relativas** se estabilizam em um número que chamamos de **probabilidade**.

Lei dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números nos diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações.

Exemplo

Considerando os dados da variável `Idade` da aula anterior

- O espaço amostral é $\Omega = \{17, 18, \ldots, 25\}$
- Se um aluno é escolhido ao acaso, definimos a probabilidade dele ter certa idade pela frequência relativa

	n_i	f_i	f_{ac}
17	9	0.18	0.18
18	22	0.44	0.62
19	7	0.14	0.76
20	4	0.08	0.84
21	3	0.06	0.90
22	0	0.00	0.90
23	2	0.04	0.94
24	1	0.02	0.96
25	2	0.04	1.00
Sum	50	1.00	

$$P(17) = 0,18; \ldots ; P(25) = 0,04$$

Exemplo

Considerando os dados das variáveis `Sexo` e `Turma`

	F	M	Sum
A	21	5	26
B	16	8	24
Sum	37	13	50

Podemos extrair as seguintes probabilidades

$$P(F) = \frac{37}{50} = 0,74; P(M) = \frac{13}{50} = 0,26$$
$$P(A) = \frac{26}{50} = 0,52; P(B) = \frac{24}{50} = 0,48$$

Qual seria a probabilidade de escolhermos ao acaso um estudante do sexo feminino ou alguém da Turma B?

Exemplo

Queremos então $P(F \cup B)$

$$\begin{aligned} P(F \cup B) &= P(F) + P(B) \\ &= 0,74 + 0,48 \\ &= 1,22 \end{aligned}$$

o que não é possível pois a soma é superior a 1.

Não é difícil ver que estamos somando alguns indivíduos 2 vezes, pois os estudantes do sexo feminino e da turma B, ou seja, o evento $F \cap B$ está incluído no evento F e no evento B.

Exemplo

Logo, precisamos subtrair $P(F \cap B)$ para obter a probabilidade correta.

Nesse caso, pela tabela, vemos que a interseção $F \cap B$ resulta na probabilidade

$$P(F \cap B) = \frac{16}{50} = 0,32$$

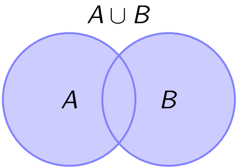
E o resultado correto para $P(F \cup B)$ é

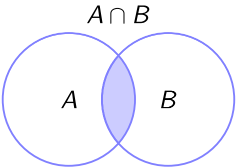
$$\begin{aligned} P(F \cup B) &= P(F) + P(B) - P(F \cap B) \\ &= 0,74 + 0,48 - 0,32 \\ &= 0,9 \end{aligned}$$

Regra da adição de probabilidades

A probabilidade da união entre dois eventos quaisquer, A e B, é dada pela **regra da adição de probabilidades**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



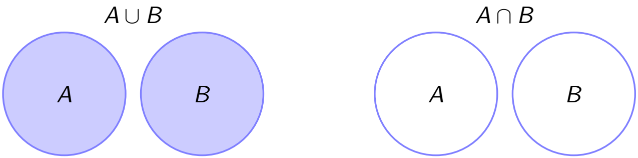


Regra da adição de probabilidades

Note que a regra da adição pode ser simplificada, **se e somente se** os eventos A e B forem **disjuntos** (ou mutuamente exclusivos)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

pois, neste caso, $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$



Regra do complementar

Como consequência da regra da adição, temos que, para qualquer evento A,

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Verifique através de $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c)$

Sumário

1 Introdução
- Teoria das Probabilidades
- Experimentos e eventos

2 Probabilidade
- Definições

3 Probabilidade condicional

Probabilidade condicional

Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas.

A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Nestes casos, dizemos que **ganhamos informação**, e podemos *recalcular* as probabilidades de interesse.

Estas probabilidades *recalculadas* recebem o nome de **probabilidade condicional**.

Definição

- Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A ocorrer, dado que ocorreu B é representado por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{para} \quad P(B) > 0.$$

- Caso $P(B) = 0$, definimos $P(A|B) = P(A)$.

Probabilidade condicional

Considere o seguinte exemplo:

- Um dado foi lançado, qual é a probabilidade de ter ocorrido face 4?
- Suponha que o dado foi jogado, e, sem saber o resultado, você recebe a informação de que ocorreu face par. Qual é a probabilidade de ter saido face 4 com essa "nova" informação?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(\Omega) = 6$

$A = \text{face } 4 = \{4\}$, $n(A) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$

$B = \text{face par} = \{2, 4, 6\}$, $n(B) = 3 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$

$C = \text{face 4, dado que ocorreu face par} = \{4\}$, $n(C) = \frac{1}{3}$

Probabilidade condicional

Usando a definição formal:

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6}$

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{1/6}{3/6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Regra do produto

A regra do produto é uma expressão derivada do conceito de probabilidade condicional. Uma vez que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

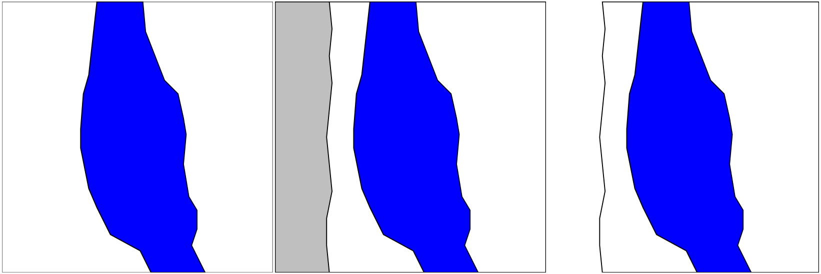
temos que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Essa expressão permite calcular probabilidades em espaços amostrais que são realizados em sequência, onde a ocorrência da *segunda* etapa **depende** (ou não) da ocorrência da *primeira* etapa.

Regra do produto

Sabe-se que há um aquífero (em azul) numa região 100km^2. Para localizar o mesmo perfura-se uma área de 20km^2 (em cinza). Sem conhecer a localização do aquífero, temos que a probabilidade de realizar um furo e encontrar água é 0,2.



Não foi encontrado água. Temos a informação **I**, água deve estar nos demais 80km^2. A probabilidade de encontrar água numa nova perfuração de 20km^2 passa a ser $P(H|I)=P(H\cap I)/P(I)=0{,}2/0{,}8=0{,}25$

Independência de eventos

Vimos que para probabilidades condicionais, $P(A|B)$, saber que B ocorreu nos dá uma informação "extra" sobre a ocorrência de A.

Porém, existem algumas situações nas quais saber que o evento B ocorreu, não tem qualquer interferência na ocorrência ou não de A.

Nestes casos, podemos dizer que os aventos A e B são **independentes**.

Independência de eventos

Os eventos A e B são **eventos independentes** se a ocorrência de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, ou seja, eventos A e B são independentes se

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e também que} \quad P(B|A) = P(B)$$

Com isso, e a regra do produto, temos que

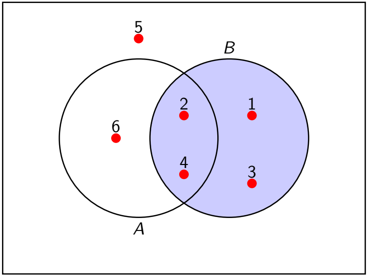
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P(A|B) = P(B) \cdot P(A) \\ P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

Exemplo I1

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos

$A =$ "resultado é um número par"
$B =$ "resultado é um número menor ou igual a 4"

Os eventos A e B são independentes?



Exemplo I1 (cont)

Pela definição intuitiva:

$P(A) = 1/2, \quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2/6}{4/6} = 1/2$

$P(B) = 2/3, \quad P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = \frac{2/6}{3/6} = 2/3.$

Portanto: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$

Pela definição formal:

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1/3$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3$, assim $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Portanto, os eventos A e B são independentes. Saber que A ocorreu não muda a probabilidade de B ocorrer e vice-versa.

Exemplo I2

Considere o lançamento de um dado e os seguintes eventos

$A =$ "resultado é um número par"
$C =$ "resultado é um número menor que 4"

Os eventos A e C são independentes?

Exemplo 2.4 (livro)

Uma empresa produz peças em duas máquinas I e II, que podem apresentar desajustes com probabilidade $0,05$ e $0,10$, respectivamente.

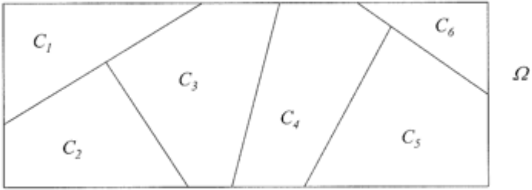
No início do dia de operação um teste é realizado e, caso a máquina esteja fora de ajuste, ela ficará sem operar nesse dia passando por revisão técnica.

Para cumprir o nível mínimo de produção pelo menos uma das máquinas deve operar. Você diria que a empresa corre o risco de não cumprir com suas metas de produção?

Partição do espaço amostral

Dizemos que os eventos $C_1, C_2, ..., C_k$ formam uma **partição** do espaço amostral, se eles não tem interseção entre si, e se sua união é igual ao espaço amostral. Isto é,

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Omega.$$



Exemplo 2.5 (livro)

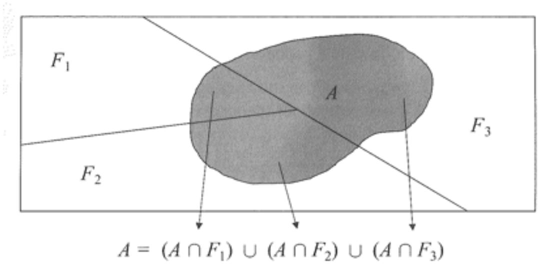
Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F_1, 30% de uma outra fazendo F_2 e 50% de F_3.

Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, qual a probabilidade do leite estar adulterado?

Exemplo 2.5 (livro)

Seja A o evento "o leite está adulterado", podemos defini-lo conforme a figura abaixo.



Calcule $P(A)$.

Teorema de Bayes

Podemos estar interessados também na probabilidade de uma amostra adulterada ter sido obtida a partir da fazenda F_1, ou seja, $P(F_1|A)$.

Teorema de Bayes

Suponha que os eventos $C_1, C_2, \dots, C_k$ formem uma partição de Ω e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha, ainda, que para um evento A, se conheçam as probabilidades $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Então, para qualquer j,

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j)P(A|C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(C_i)P(A|C_i)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Exemplo 2.6 (livro)

Usando o exemplo anterior, podemos agora calcular a probabilidade de que o leite adulterado tenha sido obtido a partir da fazenda F_1.

$$\begin{aligned} P(F_1|A) &= \frac{P(F_1)P(A|F_1)}{P(F_1)P(A|F_1) + P(F_2)P(A|F_2) + P(F_2)P(A|F_2)} \\ &= \frac{0,2 \times 0,2}{0,2 \times 0,2 + 0,3 \times 0,05 + 0,5 \times 0,02} \\ &= 0,615 \end{aligned}$$

De maneira similar, podemos obter $P(F_2|A)$ e $P(F_3|A)$.

Exercícios recomendados

- Seção 2.1 Ex. $1, 2, 3, 4$ e 5.
- Seção 2.2 Ex. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7.
- Seção 2.3 Ex. $1, 3, 8, 9, 11, 13, 15$ e 19.