IZAIAS JOSÉ BOTELHO

Modelagem e controle linear de um sistema de levitação de imã permanente

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Engenharia.

IZAIAS JOSÉ BOTELHO

Modelagem e controle linear de um sistema de levitação de imã permanente

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do Título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Engenharia de Sistemas

Orientador: Prof. Dr. Fuad Kassab Júnior

FICHA CATALOGRÁFICA

Botelho, Izaias José

Modelagem e controle linear de um sistema de levitação de imã permanente / I.J. Botelho. -- São Paulo, 2008. 136p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1. Controle (Teoria de sistema e controle) 2. Controle (Aplicações 3. Eletromagnetismo 4. Levitação magnética I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II. t.

DEDICATÓRIA

À memória de meu AMADO irmão JOÃO PAULO, homem temente a Deus, filho obediente e carinhoso, irmão companheiro e prestativo, tio amoroso e devoto e amigo confiável e verdadeiro. Que seja registrado que mais um justo venceu e foi recolhido aos braços do Pai.

"Combati o bom combate, acabei a carreira, guardei a fé (Il Timóteo 4-7)."

JOÃO PAULO BOTELHO (★ 12/04/1976 † 06/08/2007)

AGRADECIMENTOS

A DEUS, que é digno de toda honra e toda glória por mais este sucesso por mim alcançado, principalmente em um ano de lastimáveis perdas pessoais.

À minha querida esposa TICIANA, com muito amor e gratidão, pelo seu sacrifício pessoal, pela sua compreensão e paciência incansáveis ao longo do interminável período de elaboração deste trabalho.

Ao meu orientador, professor Dr. FUAD KASSAB JÚNIOR, pelo tempo e dedicação investidos em mim que contribuíram, sobremaneira, para o meu crescimento científico e intelectual.

Aos meus pais, irmãos, cunhados e sobrinhos pelos momentos de descontração os quais me recompunham o ânimo para enfrentar as dificuldades encontradas neste desafio que não foram raras.

Ao professor Dr. LUIZ LEBENSZTAJN pelas valiosas orientações prestadas, importantes na maturação de conceitos de eletromagnetismo usados na modelagem do levitador.

Aos demais colegas e professores do Laboratório de Automação e Controle (LAC) e do Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo (CTMSP), sempre prontos para prestar a assistência necessária ao desenvolvimento deste trabalho.

A todos os meus irmãos em Cristo que estiveram intercedendo a meu favor durante esta jornada de estudos.

E a todos os que, de alguma forma, me acompanharam nesta caminhada, meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um novo tipo de sistema de levitação baseado na força de interação magnética entre uma bobina de núcleo nãomagnético e um imã permanente, em casos de simetria axial entre os dispositivos, nos moldes do problema 23 proposto no TEAM Workshop. Este tema é bastante atual e vários métodos têm sido estudados e propostos em razão da complexidade na determinação precisa das forças sobre os imãs permanentes imersos em um campo magnético em um circuito magnético aberto. O primeiro grande desafio deste trabalho é obter uma expressão analítica para esta força de interação magnética em casos de simetria axial usando o método de cargas magnéticas ligadas. Para tal, algumas hipóteses simplificadoras foram adotadas como considerar o campo magnético gerado pela bobina aproximadamente uniforme em toda a face do imã permanente e assumir que a magnetização do imã é constante e independente da variação de sua distância para a bobina. Pretende-se aproveitar o sistema implementado neste trabalho como bancada experimental no Laboratório de Controle da Universidade de São Paulo. Foi projetado um controlador PID através de ferramentas gráficas obedecendo a alguns critérios de desempenho, tanto no domínio do tempo como no domínio da fregüência. Uma vez sintonizado, foi utilizado o toolbox "Real-Time Windows Target" do Simulink e a placa de aquisição PCI 6221 (da National Instruments) para controlar em tempo real a planta de levitação em malha fechada. Os resultados experimentais foram muito satisfatórios de modo que o modelo analítico foi considerado válido. O sistema apresentou boas características como, por exemplo, um bom acompanhamento do sinal de referência, mesmo em grandes excursões, erro de regime nulo, levitação estável em distâncias relativamente grandes e uma boa estabilidade radial. O uso de dois sensores Hall mostrou-se eficiente na determinação da posição do imã permanente.

Palavras-chave: Levitação magnética. MAGLEV. Suspensão magnética. Real-Time Windows Target. PCI-6221. Imã permanente. Simetria axial. Cargas magnéticas equivalentes. Team Workshop 23.

ABSTRACT

The objective of this work is to present a new kind of levitation system based on the interaction force between a non-magnetic core coil and a permanent magnet, in the case of axial symmetry between devices, as proposed by TEAM Workshop problem 23. This theme is very current and various methods have been studied and proposed in face of the complexity in determining precisely the force over permanent magnets immersed in a magnetic field in an open magnetic circuit. The first big challenge of this work is to obtain an analytical expression for this interaction magnetic force in the case of axial symmetry using the equivalent magnetic charge method. For this, some simplifying hypothesis have been adopted like considering the magnetic field created by the coil approximately uniform over all the permanent magnet's face and assuming that magnet's magnetization is constant and independent of the variation of its distance to the coil. The system implemented in this work is intended to be used as an experimental bench for the Laboratory of Control of São Paulo University. A PID controller was projected by means of graphical tools according to some criteria for performance, both in the field of time as in the frequency domain. Once tuned, the toolbox "Real-Time Windows Target" of Simulink and the PCI-6221 acquisition board (of National Instruments) were used to control in real time the levitation plant in closed loop.

The experimental results were very satisfactory so that the analytical model was considered valid. The system showed good characteristics as, for instance, a good tracking of reference signal, even in large excursions of it, null stationary error, stable levitation at relatively big gaps and a good radial stability. The use of two Hall-effect sensors proved to be efficient in the determination of permanent magnet's position.

Keywords: Magnetic Levitation. MAGLEV. Magnetic suspension. Real-Time Windows Target. PCI-6221. Permanent magnet. Axial symmetry. Equivalent magnetic charges. Team Workshop 23.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Sistema de Levitação Magnética de imã permanente	22
Figura 2 Tipos de Magnetização	33
Figura 3 Domínios e campos induzidos nos materiais magnéticos	35
Figura 4 Ciclo de Histerese de um material magnético	36
Figura 5 Comparação entre os ciclos de histerese dos materiais magnéticos dure	os e
macios	36
Figura 6 Imã de NdFeB e suas curvas de desmagnetização $B(H)$ e $B_i(H)$	43
Figura 7 Sistema de coordenadas para o cálculo do campo gerado no imã	44
Figura 8 Gráfico teórico do campo H normalizado em relação a M para um imã o	le
NdFeB	45
Figura 9 Sistema de coordenadas para o cálculo do campo gerado pela bobina .	47
Figura 10 Sistemas de coordenadas do ponto P´(r´) no enrolamento e do ponto	P(r)
qualquer	48
Figura 11 Modelo do imã com correntes superficiais equivalentes	53
Figura 12 Diagrama de forças do levitador de imã permanente	57
Figura 13 Circuito equivalente da bobina	60
Figura 14 Representação da Planta estendida	61
Figura 15 Curva do campo <i>B</i> axial para <i>Z</i> = -89mm	64
Figura 16 Curva dos campos B axiais x distância Z a partir da face superior da	
bobina	64
Figura 17 Curva de f(d) em função da distância bobina-imã	65
Figura 18 Função f(d) e sua respectiva reta de ajuste (obtida por Taylor)	66
Figura 19 Ciclos de Histerese de um imã genérico (Curvas Normal e Intrínseca)	67
Figura 20 Imã Permanente em Circuito Magnético Fechado	68
Figura 21 Influência do gap no comportamento das linhas de campo	68
Figura 22 Linhas de campo de imãs genéricos isolados	69
Figura 23 Curvas teóricas e experimentais da força entre bobina e imã permane	nte
	71
Figura 24 Pinagem do sensor de efeito hall	74
Figura 25 Curva característica teórica do sensor	74

Figura 26 Curva característica do conjunto sensor de posição	. 77
Figura 27 Indução Magnética axial ao longo do eixo central do imã normalizada e	m
relação a M	. 77
Figura 28 Densidade Espectral de Potência do sinal dos sensores	. 78
Figura 29 Placa de aquisição de dados PCI-6221, da National Instruments	. 79
Figura 30 Pinagem da placa PCI-6221	. 80
Figura 31 Placa de interface externa CB-68LP	. 80
Figura 32 O CI L149V e sua pinagem	. 82
Figura 33 Esquema elétrico do circuito amplificador de corrente	. 82
Figura 34 Esquema elétrico da fonte simétrica DC ajustável	. 83
Figura 35 Diagrama funcional do sistema de levitação	. 84
Figura 36 Bancada do sistema de levitação	. 85
Figura 37 Diagrama de blocos de um sistema de controle genérico	. 86
Figura 38 Barreiras de Desempenho	. 88
Figura 39 Barreira de Robustez de estabilidade	. 88
Figura 40 Lugar das raízes da planta com controlador Proporcional	. 89
Figura 41 Lugar das raízes do sistema em Malha Fechada com K_{PID} =1300	. 90
Figura 42 Diagrama de Nyquist de $ G(jw).C(jw) $. 91
Figura 43 Diagrama de Bode de Malha Aberta	. 92
Figura 44 Diagrama de Bode para o sistema em Malha Fechada	. 93
Figura 45 Resposta ao degrau unitário do sistema em Malha Fechada	. 93
Figura 46 Modelo em Simulink do sistema em malha fechada com a planta	
linearizada	. 94
Figura 47 Modelo em Simulink do sistema em malha fechada com a planta não-	
linear	. 94
Figura 48 Subsistema "Planta não-linear"	. 95
Figura 49 Subsistema "Equação dinâmica do levitador"	. 95
Figura 50 Modelo em Simulink para execução em tempo real com a planta de	
levitação	. 96
Figura 51 Subsistema "Sensores Hall"	. 96
Figura 52 Base de nylon para ajuste da posição inicial do imã permanente	. 97
Figura 53 Curva de posição do imã com posição inicial 13mm	. 98
Figura 54 Curva da posição do imã em resposta ao degrau +2mm	. 99

Figura 55 Curva da tensão na bobina em resposta ao degrau +2mm	100
Figura 56 Curva da posição do imã em resposta ao degrau unitário negati	vo 100
Figura 57 Curva da tensão na bobina em resposta ao degrau unitário nega	ativo 101
Figura 58 Resposta à referência de 7mm somada a senóide de 2mm pico-	-a-pico 102
Figura 59 Resposta à referência de 10mm somada a senóide de 14mm pi	co-a-pico
	103
Figura 60 Resposta do sistema com ruídos de medida de 4mm pico-a-pico	(100Hz)
	103
Figura 61 Tensão da bobina quando há ruídos de medida de 4mm pico-a-	pico
(100Hz)	104
Figura 62 Resposta do sistema com uma perturbação na saída de 4mm p	ico-a-pico
(0,1Hz)	105
Figura 63 Curva de posição do imã com posição inicial 30mm	106
Figura 64 Curva de posição do imã em resposta à perturbação lateral	107
Figura 65 Imã permanente em levitação estável	107
Figura 66 Curvas de Desmagnetização características dos imãs de terras-	raras. 129
Figura 67 Coeficiente de Permeância para imãs cilíndricos magnetizados	axialmente
(PARKER, 1990)	130
Figura 68 Fluxímetro "Magnet-Physik Electronic Fluxmeter EF-5"	131
Figura 69 Magnet-Physik FH55 Gauss Teslameter	132
Figura 70 Curvas experimental e de ajuste para a amostra X de imã	133

LISTA DE TABELAS

Tabela	1 Vantagens e Desvantagens dos imãs de Alnico	37
Tabela	2 Vantagens e Desvantagens dos imãs de ferrite	38
Tabela	3 Vantagens e Desvantagens dos imãs de Samário-Cobalto (SmCo)	39
Tabela	4 Vantagens e Desvantagens dos imãs de Neodímio-Ferro-Boro (NdFeB).	39
Tabela	5 Características Magnéticas dos diferentes tipos de imãs	40
Tabela	6 Vantagens e Desvantagens dos imãs moldados por injeção	40
Tabela	7 Vantagens e Desvantagens dos imãs flexíveis	41
Tabela	8 Dados do imã permanente usado no levitador	43
Tabela	9 Extrato da Tabela AWG simplificada	62
Tabela	10 Dados experimentais de força obtidos com a balança de precisão	70
Tabela	11 Indução Magnética Intrínseca obtida experimentalmente	71
Tabela	12 Erros percentuais máximos entre as forças teórica e experimental	72
Tabela	13 Características elétricas do sensor Hall A1323	73
Tabela	14 Resultado experimental da saída dos sensores de posição	76
Tabela	15 Dados do ensaio com o fluxímetro	31
Tabela	16 Dados do ensaio com o Teslameter 1	32

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TEAM Testing Electromagnetic Analysis Methods

HSST High-Speed Surface Transport

RTRI Railway Technical Research Institute

LEVMAG Levitação Magnética **MAGLEV** Magnetic Levitation

SmCo Samário-Cobalto

NdFeB Neodímio-Ferro-BoroAWG American Wire Gauge

RTWT Real-Time Windows Target

PI Controlador Proporcional-Integral

PD Controlador Proporcional-Derivativo

PID Controlador Proporcional+integral+derivativo

MG Margem de Ganho

MF Margem de fase

LISTA DE SÍMBOLOS

- \vec{J} Vetor densidade superficial de corrente elétrica
- ρ Densidade volumétrica de carga elétrica
- \vec{B} Vetor densidade superficial de fluxo magnético ou Vetor Indução magnética.
- \overrightarrow{D} Vetor campo elétrico de deslocamento ou densidade superficial de campo elétrico
- \vec{E} Vetor intensidade de campo elétrico
- \overrightarrow{H} Vetor intensidade de campo magnético
- \overrightarrow{M} Vetor magnetização
- ε Permissividade elétrica (ou constante dielétrica) do meio ou do material
- ϵ_0 Permissividade elétrica (ou constante dielétrica) do vácuo (ϵ_0 = 8,854.10⁻¹² Farad/m)
- μ Permeabilidade magnética do meio
- μ_0 Permeabilidade do vácuo (μ_0 = 4π . 10^{-7} Henry/m)
- μ_r Permeabilidade relativa do meio ou do material em relação à do vácuo
- σ Condutividade elétrica do meio ou do material
- c Velocidade da luz no vácuo
- Ψ_m Potencial Escalar Magnetostático
- \vec{A} Potencial Vetor Magnético
- Φ Potencial Escalar Elétrico
- *i_m* Corrente de magnetização (fictícia)
- B_r Indução remanente (ou residual ou remanescente) ou Remanência ou Retentividade
- H_c Campo ou força coercitiva (ou coerciva) ou Coercividade ou Coercitividade
- *H*_S Campo ou força coercitiva de saturação
- V Volume
- q_m Carga magnética (fictícia)
- ρ_m Densidade volumétrica de carga magnética (fictícia)
- S Superfície
- σ_m Densidade superficial de carga magnética (fictícia)

- \vec{r} Vetor posição de um ponto P do observador
- \vec{r}' Vetor posição de um ponto P' interno ao volume ou à superfície de integração
- $\overline{M_r}$ Vetor Magnetização remanente
- D Diâmetro do imã permanente
- L Largura do imã permanente
- d Distância ("gap") vertical existente entre a bobina e o imã
- N Número de espiras no enrolamento da bobina
- d₁ Diâmetro interno da bobina
- d₂ Diâmetro externo da bobina
- h Comprimento da bobina
- e Espessura do flange inferior do carretel da bobina
- \vec{F} Força magnética total sobre o imã permanente
- W Energia armazenada no dispositivo magnético
- W' Co-energia armazenada no dispositivo magnético
- δ Deslocamento virtual
- \vec{u}_n Vetor unitário normal exterior a uma dada superfície
- \vec{J}_{M} Densidade de corrente de magnetização (fictícia)
- $\vec{J}_{M,\ell}$ Densidade superficial de corrente de magnetização (fictícia)
- \vec{B}_{ext} Vetor indução magnética gerado por fontes externas ao imã
- $\rho_{\scriptscriptstyle M}$ Densidade volumétrica de carga magnética fictícia
- $\sigma_{\scriptscriptstyle M}$ Distribuição superficial de carga magnética fictícia
- $\overrightarrow{H}_{\it ext}$ Vetor intensidade magnética gerado por fontes externas ao imã
- \vec{n} Vetor unitário normal exterior a uma dada superfície
- \vec{u}_m Vetor unitário no sentido do eixo coordenado genérico m
- M_z Componente axial do vetor magnetização do imã permanente
- K Constante da força magnética
- I Corrente elétrica no enrolamento da bobina
- *I*_o Corrente elétrica relativa ao ponto de operação da planta
- d_o Posição estática do imã relativa ao ponto de operação da planta
- P Peso total do corpo a ser levitado
- *m* Massa total do corpo a ser levitado

- g Aceleração da gravidade
- L Indutância da bobina
- Ri Resistência ôhmica do enrolamento da bobina
- $v_{\scriptscriptstyle R}$ Diferença de potencial entre os terminais da bobina
- v_L Tensão na bobina devido à sua indutância L
- v_R Tensão na bobina devido à sua resistência do enrolamento R_i
- V_a Tensão da bobina no ponto de operação da planta
- K_{v} Ganho do amplificador linear de potência
- *V_c* Diferença de Potencial na entrada do controlador
- *G*(*s*) Função de transferência da Planta do levitador
- $\rho_{im\tilde{a}}$ Densidade volumétrica de massa do imã permanente
- $V_{im\tilde{a}}$ Volume do imã permanente
- B_d Densidade de Fluxo Magnético no ponto de operação do imã permanente
- *H_d* Intensidade Magnética no ponto de operação do imã permanente
- *B_i* Densidade de Fluxo Magnético intrínseco do imã permanente
- B_s Indução remanente de saturação
- B_{si} Densidade de Fluxo Magnético intrínseco de saturação do imã permanente
- *H_{ci}* Força coercitiva intrínseca do imã permanente
- B_{di} Densidade de Fluxo Magnético intrínseco no ponto de operação do imã permanente
- V_{H} Tensão de saída máxima do sensor de posição
- V₁ Tensão de saída mínima do sensor de posição
- $V_{\scriptscriptstyle n}$ Tensão de saída quiescente do sensor de posição
- K_{s} Sensibilidade do sensor de posição
- V_{CC} Tensão de alimentação DC
- $B_{_{\scriptscriptstyle H}}$ Valor limite da indução magnética para a saturação superior do sensor de posição
- B_L Valor limite da indução magnética para a saturação superior do sensor de posição
- $V_{s,i}$ Tensão de saída do sensor j

- $V_{q,j}$ Tensão de saída quiescente do sensor j
- $K_{s,i}$ Sensibilidade do sensor j
- B_i Campo indução magnética total incidente sobre o sensor j
- C(s) Função de transferência do controlador
- r(s) Sinal de referência no domínio de Laplace
- e(s) Sinal de erro no domínio de Laplace
- u(s) Sinal da saída do controlador C(s) no domínio de Laplace
- d(s) Sinal de perturbação (refletida ou direta) na saída de G(s) no domínio de Laplace
- n(s) Ruído de medida dos sensores no domínio de Laplace
- y(s) Saída da planta G(s) no domínio de Laplace
- w Freqüência angular
- f Freqüência
- $\alpha_{\scriptscriptstyle d}$ Valor limite para a rejeição a perturbações
- W_d Frequência limite superior da barreira de rejeição a perturbações
- δg Variação de parâmetros da planta G(s)
- α_s Valor limite para a variação de parâmetros da planta G(s)
- w_{s} Freqüência limite superior da barreira de rejeição a variações de parâmetros

da planta

- α_n Valor limite para a rejeição de ruídos de medida
- w_n Frequência limite inferior da barreira de rejeição de ruídos de medida
- K_p Ganho proporcional do controlador PID
- *T_i* Tempo integral do controlador PID
- T_d Tempo derivativo do controlador PID
- N_d Fator de ajuste da constante de tempo do filtro do controlador PID
- K_{PID} Ganho do controlador PID
- K_{Holm} Constante da bobina de Helmholtz
- R_{Helm} Resistência da bobina de Helmholtz

SUMÁRIO

1		INTR	ODUÇÃO	19
	1.	1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	19
		1.1.1	Objetivo	21
	1.	2	DESCRIÇÃO DO SISTEMA	22
	1.	3	METODOLOGIA	24
	1.	4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
	1.	5	SUMÁRIO ESTRUTURADO	27
2		NOÇ	ÕES DE ELETROMAGNETISMO	29
	2.	1	EQUAÇÕES DE MAXWELL	29
		2.1.1	Equações (ou relações) constitutivas	29
		2.1.2	Potencial vetor e potencial escalar	31
	2.	2	MATERIAIS MAGNÉTICOS	33
		2.2.1	Classificação dos materiais	33
		2.2.2	Principais tipos de imãs permanentes	36
	2.	3	CAMPO MAGNÉTICO PROVOCADO PELO IMÃ PERMANENTE	41
		2.3.1	O Potencial Escalar Magnetostático	41
		2.3.2	O Campo Intensidade Magnética \overrightarrow{H}	43
	2.	4	CAMPO MAGNÉTICO PROVOCADO PELA BOBINA	46
		2.4.1	O Potencial Vetor Magnético	46
		2.4.2	O campo Indução Magnética gerado pela corrente elétrica no	
		enrol	amento	47
		2.4	.2.1 O CAMPO INDUÇÃO MAGNÉTICA AO LONGO DO EIXO AXIAL.	50
3		MOD	ELAGEM FENOMENOLÓGICA	52
	3.	1	FORÇA DE INTERAÇÃO MAGNÉTICA ENTRE BOBINA E IMÃ	52
		3.1.1	Método do Trabalho Virtual	52
		3.1.2	Método dos Tensores de Stress de Maxwell	53
		3.1.3	Método das correntes magnetizantes equivalentes (ou correntes	
		ampe	erianas fictícias)	53
		3.1.4	Método das cargas magnéticas ligadas (ou cargas magnéticas	
		equiv	valentes)	54
		3.1.5	Método dos dipolos magnéticos equivalentes	55

	3.2	2	CÁLCULO DA FORÇA MAGNÉTICA DE ATRAÇÃO NO IMÃ		
	PE	PERMANENTE			
	3.3	3	MODELO DA PLANTA	57	
	;	3.3.1	Desenvolvimento Matemático	57	
4	(CAR	ACTERIZAÇÃO DO SISTEMA	62	
	4.	1	DIMENSIONAMENTO DA BOBINA	62	
	4.2	2	CÁLCULO DA FORÇA PESO	65	
	4.3	3	CARACTERIZAÇÃO DA PLANTA	65	
	4	4.3.1	Determinação da Magnetização de Operação do imã permanente	67	
	4	4.3.2	Determinação das demais variáveis da Planta	72	
	4.4	4	O SENSOR DE POSIÇÃO	73	
5	I	IMPL	ANTAÇÃO FÍSICA DO SISTEMA DE LEVITAÇÃO	79	
	5.	1	A PLACA DE AQUISIÇÃO DE DADOS	79	
	5.2	2	O DRIVER DE POTÊNCIA	81	
	į	5.2.1	O circuito amplificador de corrente	82	
	į	5.2.2	O circuito da fonte simétrica DC	83	
	5.3	3	O SIMULINK E O REAL-TIME WINDOWS TARGET	84	
6	5	SÍNT	ESE DOS CONTROLADORES	86	
	6.	1	REQUISITOS DE PROJETO	86	
	6.2	2	PROJETO DO CONTROLADOR PID	89	
7	F	RES	ULTADOS OBTIDOS E VALIDAÇÃO DO MODELO	94	
	7.	1	MODELOS EM SIMULINK	94	
	7.2	2	GRÁFICOS DE RESULTADOS	97	
8	(CON	CLUSÕES	108	
F	REF	ERÊ	NCIA	. 110	
Δ	νPÊ	ÈNDI	CE A – Desenvolvimento analítico da expressão do campo magnético		
g	era	ado p	elo imã permanente	. 113	
Δ	νPÊ	ÈNDI	CE B – Desenvolvimento analítico da expressão do campo magnético		
g	era	ado p	elo enrolamento da bobina	. 118	
Δ	νPÊ	ÈNDI	CE C – Desenvolvimento analítico da expressão da força vertical magn	ética	
no imã permanente				. 126	
Δ	νPÊ	NDI	CE D – Determinação experimental da magnetização de um imã		
p	ern	nane	ente isolado	. 129	
Α	νPÊ	NDI	CE E – Rotinas em Matlab para dimensionamento da bobina	135	

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A levitação magnética tem sido ao longo dos anos exaustivamente estudada e aplicada. Tal fato é facilmente justificado pelas grandes vantagens advindas de sua aplicação. Por exemplo, em mancais magnéticos, a ausência de contato com o rotor acarreta evidentes vantagens como a dispensa de necessidade de lubrificação, ausência de perdas por atrito possibilitando velocidades de rotação maiores, diminuição de desgaste de material, menor ruído acústico, etc. Há mais de meio século, a eliminação, pela levitação, do atrito entre rodas e trilho tem incentivado estudos voltados para o transporte ferroviário. Este esforço possibilitou hoje a existência de trens capazes de atingir velocidades superiores a 450Km/h, o que é bastante atraente até como alternativa para conexões aéreas de média distância. Como grandes exemplos de sucesso em trens de levitação, há a proposta alemã (http://www.transrapid.de), а Transrapid suíca Swissmetro (http://www.swissmetro.com) e as propostas japonesas High-Speed Surface Transport (HSST) (http://www.meitetsu.co.jp/chsst) e Railway Technical Research Institute (RTRI) (http://www.rtri.or.jp/index.html). Até então, o fundamento físico básico para a levitação magnética explorava a força magnética existente entre um imã ou eletroímã (estáticos ou em movimento) e um material ferromagnético. Estes trens popularizaram o termo levitação magnética.

A partir do final do século XX, o advento de novos materiais magnéticos e pastilhas supercondutoras tem proporcionado novos horizontes à levitação magnética:

Os novos supercondutores têm uma temperatura crítica superior à dos supercondutores convencionais podendo ser resfriados com nitrogênio líquido (temperatura de ebulição de –196°C) enquanto que os demais precisavam ser refrigerados com hélio líquido (temperatura de ebulição de –269°C), o que torna o custo da refrigeração muito mais acessível (o nitrogênio líquido custa menos de R\$ 0,30 e não polui o ambiente). Pesquisas recentes têm sido desenvolvidas na levitação magnética usando a característica diamagnética

dos supercondutores e resultados já comprovam que apesar da menor força de suspensão, há a estabilidade na levitação. Países como o Brasil (http://www.lasup.dee.ufrj.br/), a China (http://asclab.swjtu.edu.cn) e a Alemanha (http://ifwdresden.de) têm buscado usar esta solução tecnológica em um novo tipo de trem de levitação.

Antes da descoberta dos novos materiais magnéticos, havia poucos sistemas de levitação baseados em imãs permanentes porque, até então, não eram confiáveis em ambientes de altas temperaturas e sua força magnética era baixa. Imãs extremamente grandes eram necessários para prover uma força de levitação suficiente. Com estes novos materiais, o samário e o neodímio (comumente chamados por terras-raras), e com os recentes avanços tecnológicos de construção, surgiram imãs permanentes (os superimãs) dotados de uma alta densidade energética e boa estabilidade térmica, praticamente ultrapassando todas as limitações impeditivas de seu uso. A crescente disponibilidade comercial e o barateamento destes imãs permanentes de alta capacidade têm motivado estudos com levitação magnética com imã permanente em aplicações didáticas (PERRELA, 2005), (MARSDEN, 2003), em trens MAGLEV (WANG; BUSCH-VISHNIAC, 1994), TZENG, 1994), (EBIHARA; SUZUKI: IMAGAWA, (ATHERTON, 1980), em sistema de suspensão automotivo (KIM et al., 2001) entre outros.

Dentro deste contexto de alcançar novas vertentes para a levitação magnética é que se desenvolve o tema deste trabalho. Usa-se uma bobina de núcleo não-magnético para levitar, por atração, um imã permanente cilíndrico em um <u>sistema axissimétrico</u> em relação ao eixo longitudinal central da bobina. Pode-se facilmente enumerar uma extensa literatura a respeito de sistemas de levitação envolvendo uma bobina e um corpo ferromagnético (principalmente uma esfera metálica), mas pouco foi achado quando o corpo a ser levitado é um imã. Tal fato pode ser justificado pela complexidade na determinação precisa das forças sobre os imãs permanentes imersos em um campo magnético em um circuito magnético aberto.

No TEAM Workshop, existente desde 1985, pesquisadores propõem problemas visando à validação e ao aperfeiçoamento dos softwares utilizados em problemas de eletromagnetismo aplicado. Hoje, já foram propostos 34 problemas em vários campos do magnetismo e um deles, o problema n°23, trata exatamente do cálculo

da força magnética resultante da interação entre um imã permanente cilíndrico de terras-raras e uma bobina de núcleo não-magnético, nos casos em que há simetria axial entre os dispositivos (IDA; BASTOS, 1996). Portanto, o levitador a ser desenvolvido no presente trabalho está contido em um contexto atual e importante o que, por si só, é fator justificante para todo esforço despendido.

1.1.1 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é <u>validar um modelo analítico</u> de um levitador magnético de um imã permanente usando-se uma bobina de núcleo não ferromagnético e um imã de terras raras e projetar um controle linear que garanta estabilidade e certa robustez ao sistema frente aos requisitos de projeto. É um levitador com <u>um grau de liberdade</u> em que <u>há simetria axial</u> entre os dispositivos em relação ao eixo vertical central da bobina (vide figura1), conforme proposto no Team Workshop Problem 23. Levando-se em consideração que o cálculo desta força de interação magnética, devido à sua complexidade, é normalmente realizado por métodos numéricos (como o método dos elementos finitos) usando recursos computacionais, a validação de um modelo analítico é um grande desafio a ser transposto.

Não será enfatizado neste trabalho qualquer tipo de análise de desempenho comparativa com relação a outros tipos de levitadores magnéticos já estudados e disponíveis na literatura embora este estudo comparativo pormenorizado certamente gere conclusões interessantes.

Uma diretriz adotada ao longo do projeto foi a possibilidade de este ser aproveitado como bancada experimental para os alunos de graduação em Engenharia Elétrica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, como tem acontecido há várias décadas em outras Instituições de Ensino Superior (como ITA e MIT) por servir de ferramenta de instrução de conceitos da teoria de eletromagnetismo, teoria de controle e projeto de circuitos. Assim, optou-se por soluções de baixo custo, de rápida compreensão para este público alvo e menos específicas possível de forma a poder servir a mais de um experimento. Consequentemente, soluções mais

eficientes são certamente possíveis o que motiva a continuidade deste tema em trabalhos futuros.

eixo de simetria Sensor Hall Superior Bobina Sensor Hall Inferior Sinal dos Sensores Forca magnética Imã Permanente NdFeB A/D Placa PCI-6221 Driver de Potência Sinal de Controle D/A Alimentação da bobina V, GND e -V Microcomputador PC

1.2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

Figura 1 Sistema de Levitação Magnética de imã permanente

Fonte Simétrica DC

O sistema consiste de uma bobina de núcleo não-ferromagnético a qual, através da interação de seu campo magnético com o de um imã, faz com que neste aja uma força magnética vertical contrária ao seu peso garantindo sua levitação de uma maneira estável e controlada.

Dois sensores de efeito Hall são fixados, um, no centro da face superior e, o outro, no centro da face inferior da bobina, a fim de medirem a variação de fluxo magnético provocado pelo imã e, assim, indiretamente, informarem a distância (em inglês, "gap") entre os dispositivos.

Uma placa de aquisição de dados PCI-6221, da National Instruments, captura toda a informação dos sensores, faz a conversão A/D e a disponibiliza a um computador pessoal PC.

Através do toolbox "Real-Time Windows Target" do Matlab, o sinal oriundo da placa PCI-6221 é disponibilizado no Simulink por meio dos blocos "Analog Input". No

próprio Simulink, que é um ambiente gráfico e amigável, implementa-se o controlador e os demais circuitos acessórios (como filtros analógicos, sinal de referência, etc.) em tempo contínuo (domínio s de Laplace). Todo o processamento é feito pelo Matlab em tempo real e os sinais de saída liberados pelo Simulink rumo à placa PCI-6221 através dos blocos "Analog Output". Esta placa se encarrega de fazer a conversão D/A e entregar o sinal de controle ao circuito amplificador de corrente, capaz de entregar até 1,5A para a bobina (podendo chegar até 4A caso aumente-se a capacidade de corrente da fonte simétrica DC ajustável que o alimenta). A bobina recebe o sinal de controle devidamente amplificado e varia, conseqüentemente, o campo magnético sobre o imã permanente, alterando a intensidade da força magnética entre eles, aumentando ou diminuindo a distância do imã de forma a estabilizá-lo em uma posição desejada (ou de referência) dinamicamente.

Percebe-se pela figura 1 que o número de circuitos adicionais construídos ficou limitado a dois: o circuito de amplificação de corrente e o da fonte simétrica. Todos os demais circuitos foram simulados diretamente no Simulink, inclusive os de condicionamento de sinal dos sensores. Várias vantagens podem ser obtidas com esta arquitetura:

- Grande potencial didático em virtude da facilidade de compreensão, da simplicidade do hardware acessório e de o Simulink permitir a implementação do controlador no domínio s;
- Otimização do tempo gasto na prototipagem do projeto. Todos os ajustes no controlador, filtros, tabelas de conversão e demais blocos podem ser, via software, realizados, simulados e colocados a operar em tempo de execução com a planta real. Conseqüentemente, permite que estudantes, engenheiros e pesquisadores de diversas áreas de controle concentrem seus esforços nos problemas de controle, minimizando, nesta fase, a preocupação com a configuração e programação de hardwares, discretização do sistema, etc; e
- O hardware desenvolvido serve apenas para aumentar a capacidade de corrente das saídas analógicas da placa PCI-6221 de 5mA para 1,5A (podendo chegar a 4A se a capacidade de corrente da fonte simétrica for aumentada). Assim, o mesmo circuito pode ser usado para controlar qualquer planta que requeira um sinal de controle analógico entre ±10V com ±1,5A.

Esta característica de poder compartilhar os mesmos circuitos para se controlar outros sistemas (como um servo-motor, uma bomba de pequena capacidade, etc.) barateia o custo e é muito atraente em laboratórios acadêmicos onde se desejam bancadas experimentais multiuso.

1.3 METODOLOGIA

O estudo deste sistema de levitação magnética conteve todas as fases de um projeto de engenharia, desde o seu estudo teórico até sua implementação prática. Desta forma, foram enfrentados os mais variados problemas, tanto para construção do hardware e programação do software, como também para o projeto e sintonia de controles. Assim, pode-se dividir todo o ciclo em sete fases:

- Fase 1 Estudo da Teoria Eletromagnética
- Fase 2 Pesquisa dos métodos de determinação de força
- Fase 3 Modelagem fenomenológica da planta de levitação
- Fase 4 Dimensionamento e caracterização dos dispositivos
- Fase 5 Construção de hardware de potência e familiarização com o software
- Fase 6 Projeto e implementação do controlador
- Fase 7 Testes e análise dos resultados.

1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A inspiração do tema deste trabalho adveio de duas dissertações de Mestrado:

 a de PERRELLA (2005), na qual o autor foge do padrão de construir um levitador didático para a suspensão de um material ferromagnético para implementar um levitador de imã permanente usando DSP nos moldes do sistema de levitação desenvolvido por Marsden (2003) que é utilizado na disciplina de sistemas realimentados do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT); e a de DAMANTE (2001), onde o autor buscou uma solução analítica para calcular a força magnética entre imã permanente e bobina em casos axissimétricos ao invés de determiná-la através de soluções numéricas. Tomou por base as informações disponíveis no problema 23 do TEAM Workshop alcançando resultados razoavelmente precisos.

Este trabalho exigiu um estudo pormenorizado principalmente nas três primeiras fases do projeto quando os artigos e livros a seguir foram de grande valia:

QUEVEDO (1993) apresenta de uma maneira bastante simples e didática toda a Teoria Clássica de Eletromagnetismo, sendo importante instrumento de revisão de conceitos ou de formação de base teórica para a consecução deste trabalho.

PARKER (1990) e FURLANI (2001) são ótimas referências para um aprofundamento técnico avançado sobre imãs permanentes, nos quais são apresentados materiais, aplicações práticas, desenvolvimentos matemáticos. PARKER (1990) se destaca principalmente pelos tópicos de medição e determinação do ponto de operação do imã em circuitos abertos. FURLANI (2001), além de apresentar várias aplicações práticas com imãs, oferece um suporte matemático avançado, principalmente no desenvolvimento de potenciais, campos e forças magnéticas, já apresentando quatro dos cinco métodos de cálculo da força nos imãs (a exceção é o Método dos Dipólos Magnéticos) além do método da Carga Imagem.

BROWN et al. (1962) é um relatório técnico elaborado por pesquisadores da NASA que apresenta um desenvolvimento matemático adimensional do campo magnético axial e radial de um solenóide de enrolamento multicamadas em função de suas variáveis geométricas em duas situações: considerando a densidade de corrente J constante e considerando J variável em relação à posição radial. Alguns gráficos demonstram claramente como o campo varia em diferentes pontos no interior e ao redor da bobina. Ao final deste relatório, há um grande número de tabelas disponibilizando rapidamente o valor do campo indução magnética para uma dada entrada adimensional da variável geométrica da bobina e do ponto desejado.

ATHERTON (1980), EBIHARA et al. (1987), WANG e BUSCH-VISHNIAC (1994) e WANG e TZENG (1994) são exemplos de artigos que introduzem novas abordagens de levitação magnética usando imãs permanentes.

KIM et al. (2001) apresenta uma aplicação de um sistema bobina-imã como amortecedor eletromagnético para uso em suspensões automotivas no intuito de reduzir ativamente as vibrações. Um ponto que merece destaque é o desenvolvimento analítico da função de transferência da planta através da solução do laplaciano do Potencial Vetor Magnético através das funções de Bessel. O formato da função de transferência obtido é muito similar ao conseguido na planta do levitador deste trabalho.

IDA e Bastos (1996) propuseram o problema 23 no TEAM Workshop com o objetivo de direcionar o desenvolvimento dos métodos de cálculos de forças entre imãs e bobina com núcleo não-magnético e modelagem de imãs permanentes em geometrias simétricas axialmente e tridimensionais. Apresentaram, para servirem de referência, medidas experimentais de força axial e força radial restauradora para duas configurações de imãs: um de Samário-Cobalto e outro de Neodímio-Ferro-Boro. Dois tamanhos de imãs e bobinas são usados em cada configuração.

Muitos artigos e livros foram pesquisados para o estudo dos diferentes métodos de cálculo da força global sobre os imãs permanentes. Alguns autores se preocuparam em apresentar um método em especial como: KABASHIMA, KAWAHARA e GOTO (1988), HENNEBERGER, SATTLER e SHEN (1992) e CHOI et al. (2006) enfatizaram o Método das Correntes Magnetizantes Equivalentes; CHOI, LEE e PARK (2005) focaram o Método de Cargas Magnéticas Equivalentes enquanto CHOI et al. (2006) se ocuparam em apresentar o Método dos Dipolos Magnéticos. Porém, outros se ocuparam em traçar uma análise comparativa entre os diversos métodos: MÜLLER (1990), REN (1994), MEDEIROS, REYNE e MEUNIER (1998, 1999), BOBBIO et al. (2000) e DELFINO et al. (2001). Pode-se observar que os artigos são relativamente recentes comprovando que o tema deste trabalho está contido em um contexto bastante atual.

OGATA (2003) é uma fonte de consulta rápida nos assuntos de Controle Clássico, sendo usado principalmente na fase de síntese de controlador. Apesar de não ser seu foco principal, as edições mais atuais já constam de uma seção, ao final de cada capítulo, voltada a apresentar comandos e funcionalidades do Matlab, o que é bastante útil, pois auxilia na familiarização com esta ferramenta.

CRUZ (1996) apresenta o método de síntese de controladores robusto LQG/LTR. Apesar de este método não ter sido usado, os conceitos de barreira de desempenho são bastante úteis e aplicados no presente trabalho na sintonia do controlador.

1.5 SUMÁRIO ESTRUTURADO

Este trabalho é uma aplicação prática de um dos métodos de cálculo de força de interação bobina-imã para um sistema de levitação magnética por atração. O trabalho envolve desde a pesquisa de literatura até a sua implementação prática. Para tal, este relatório foi elaborado de forma a descrever todas as fases do projeto sendo organizado da seguinte forma:

- O Capítulo 1 contém a Introdução do trabalho na qual se apresenta o tema, os objetivos e as justificativas além de descrever o sistema de uma maneira clara e concisa.
- No Capítulo 2, são inclusos alguns conceitos da Teoria do Eletromagnetismo e de materiais magnéticos que serão aplicados ao longo do trabalho. Ainda neste capítulo, são desenvolvidas as expressões dos campos gerados pelos imãs permanentes e pela bobina.
- O Capítulo 3 é voltado para a Modelagem Fenomenológica. Inicialmente, apresenta os cinco principais métodos para o cálculo da força de interação magnética entre imã e bobina. Usando o método de cargas magnéticas equivalentes e adotando algumas hipóteses simplificadoras, registra o desenvolvimento da expressão analítica da força magnética para os casos de simetria axial. Com esta expressão, no final do capítulo, é possível obter-se a expressão analítica da função de transferência da planta no domínio de Laplace.

- No Capítulo 4, são expostos os procedimentos e ensaios para a caracterização dos sensores, do dimensionamento da bobina e da definição do ponto de operação do imã permanente, culminando com a identificação dos parâmetros e, conseqüentemente, conhecimento da função de transferência da planta usada neste trabalho.
- No Capítulo 5, são descritos sucintamente os hardwares (como a fonte simétrica, a Placa PCI-6221 e a fonte simétrica DC) e softwares (como o toolbox Real-Time Windows Target) utilizados no sistema bem como suas configurações.
- O Capítulo 6 descreve toda a fase de síntese do controlador, desde a definição dos requisitos de desempenho até o estabelecimento do controlador que será usado.
- O Capítulo 7 apresenta os resultados obtidos e expõe a análise destes resultados experimentais em confronto com aqueles obtidos em simulação usando-se o modelo não-linear e o modelo linearizado da planta.
- No Capítulo 8, são feitas as considerações finais a respeito deste trabalho incluindo sugestões para trabalhos futuros.

Por fim, são incluídos cinco apêndices: no Apêndice A, há todo o desenvolvimento matemático usado na formulação da expressão analítica do campo magnético gerado pelo imã permanente enquanto que, no Apêndice B, consta o desenvolvimento da fórmula do campo gerado pelo enrolamento da bobina. Já no Apêndice C, há toda a formulação algébrica até se alcançar a equação matemática da força de interação magnética entre imã e bobina de núcleo não-ferromagnético em simetria axial. O Apêndice D contém os dados dos ensaios para se determinar a indução residual do imã (ou indução residual intrínseca) em circuito magnético aberto. No Apêndice E, constam as rotinas em Matlab que foram usadas para o dimensionamento da bobina de forma a garantir a uniformidade de campo sobre o imã permanente.

NOÇÕES DE ELETROMAGNETISMO 2

2.1 **EQUAÇÕES DE MAXWELL**

O coração de todas as fórmulas para a análise de sistemas magnéticos macroscópicos são as Equações de Maxwell associadas a algumas leis a respeito dos materiais em questão. A partir destas equações de Maxwell, equações diferenciais parciais podem ser deduzidas, cobrindo todos os fenômenos eletromagnéticos tais como campos magnéticos e elétricos (estáticos ou variantes no tempo), distribuição de correntes, circuitos elétricos, circuitos magnéticos, propagação de ondas, etc.

As Equações de Maxwell são um grupo de quatro equações atribuídas a James Clerk Maxwell que descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético, bem como suas interações com a matéria. Em suas formas mais completas, com os fenômenos variáveis no tempo (equações da Magnetodinâmica), são:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
(2)
$$(3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
 (4)

2.1.1 Equações (ou relações) constitutivas

Equações constitutivas ou "de passagem" são as equações que relacionam os campos entre si e que são utilizadas de forma complementar às equações de Maxwell. Para tal, definem-se:

A <u>permissividade elétrica</u> (ou constante dielétrica) ε de um meio isolante reflete a capacidade deste em se polarizar quando sujeito a um campo elétrico. Quanto menor este valor, mais isolante eletricamente é o material.

- A permeabilidade magnética μ de um meio expressa intrinsecamente sua capacidade de se mostrar mais ou menos susceptível à passagem de fluxo magnético. Quanto maior a permeabilidade, maior será o fluxo magnético induzido no mesmo.
- A <u>condutividade elétrica</u> σ expressa a capacidade do meio condutor de permitir passar por si mais ou menos corrente elétrica.

Originalmente, como os materiais em sua natureza são não-lineares, suas constantes σ , ϵ e μ dependem dos campos na forma abaixo:

$$\vec{J} = \sigma(E).\vec{E}$$
 (5)

$$\overline{\vec{D}} = \varepsilon(E).\overline{\vec{E}}$$
 (6)

$$\boxed{\vec{B} = \mu(H).\vec{H}} \tag{7}$$

Entretanto, alguns materiais podem ser considerados aproximadamente lineares (como o vácuo e o ar), de modo que σ , ε e μ são independentes dos campos. Assim, as equações 5 e 6 se simplificam em:

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon . \overrightarrow{E}$$
 (8)

$$\boxed{\vec{B} = \mu . \vec{H}} \tag{9}$$

Em um meio não-homogêneo, ε , μ e σ são funções das coordenadas da posição, por exemplo: $\varepsilon = f(x, y, z)$. Em um meio uniforme (homogêneo), ε , μ e σ são constantes independentes da posição.

Em meios isotrópicos, isto é, com propriedades iguais em todas as direções, ε , μ e σ são independentes da direção. Em meios anisotrópicos, são grandezas vetoriais, por exemplo:

O vácuo é um meio linear, homogêneo e isotrópico, e suas constantes elétricas são designadas por ε_0 e μ_0 (desprezando pequenas não-linearidades devido a efeitos quânticos). Maxwell descobriu que estas constantes se relacionam com a velocidade da luz no vácuo da seguinte forma $c=\sqrt[]{\mu_0.\varepsilon_0}$, concluindo que a luz é uma forma de radiação eletromagnética.

2.1.2 Potencial vetor e potencial escalar

Alguns conceitos importantes da álgebra de campos vetoriais são de grande valia na formulação das expressões do Potencial Vetor e do Potencial Escalar, expressões estas que auxiliam muito no cálculo dos campos magnéticos.

As seguintes propriedades do divergente e rotacional de um campo vetorial genérico \vec{v} e do campo escalar genérico ϕ são importantes:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \tag{11}$$

$$|\nabla \times (\nabla \phi) = 0| \tag{12}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$
(13)

A eq.(12) estabelece a propriedade de que, se o campo vetorial \vec{v} for conservativo, ou seja, tem seu rotacional nulo, ele pode ser representado por um potencial escalar ϕ :

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow \nabla \times (-\nabla \phi) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v} = -\nabla \phi}$$
 (14)

Observando-se a equação 2 de Maxwell, no caso de ausência de correntes elétricas $(\vec{J}=0)$ e de correntes de deslocamentos $(\frac{\overrightarrow{oD}}{\partial t}=0)$, temos que o vetor intensidade de campo magnético \vec{H} é conservativo de modo que, de acordo com a eq.(14), ele pode ser calculado através da expressão do gradiente do seu Potencial Escalar Magnetostático Ψ...:

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = 0 \Rightarrow \nabla \times (-\nabla \Psi_m) = 0 \Rightarrow |\overrightarrow{H} = -\nabla \Psi_m|$$
 (15)

De modo análogo, a eq.(11) estabelece que, se um campo vetorial \vec{v} for solenoidal, ou seja, tem seu divergente nulo, ele pode ser representado pelo seu Potencial Vetor \vec{a} da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \nabla \times \vec{a}}$$
 (16)

De acordo com a equação 1 de Maxwell, temos que o vetor indução magnética \vec{B} é solenoidal de modo que, pela eq.(16), pode ser calculado através do rotacional do seu Potencial Vetor Magnético \vec{A} :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$
 (17)

Todo campo vetorial, para ser <u>unicamente</u> identificado, deve ser definido pelo seu rotacional e pelo seu divergente. Assim, para se identificar o vetor \vec{A} , deve-se achar a expressão de seu divergente. Das eq.(17) e eq.(4), tem-se:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial (\nabla \times \vec{A})}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$
(18)

Aplicando-se a propriedade estabelecida pela eq.(14), define-se a relação do Potencial Vetor Magnético \vec{A} com o Potencial Escalar Elétrico Φ :

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi}$$
 (19)

Com as equações 8, 9, 13, 17 e 19, pode-se deduzir a Condição de Lorentz para um meio linear e homogêneo, o que acaba por definir o campo vetorial \vec{A} :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \cdot \nabla \times \vec{H} = \mu \cdot \vec{J} + \mu \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mu \cdot \vec{J} + \mu \cdot \frac{\partial \varepsilon \vec{E}}{\partial t} =$$

$$= \mu \cdot \vec{J} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial (-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi)}{\partial t} =$$

$$= \nabla \left(-\mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \left(-\mu \cdot \vec{J} + \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$(20)$$

2.2 MATERIAIS MAGNÉTICOS

2.2.1 Classificação dos materiais

As propriedades magnéticas dos materiais podem ser explicadas pelo movimento de seus elétrons ligados aos núcleos atômicos.

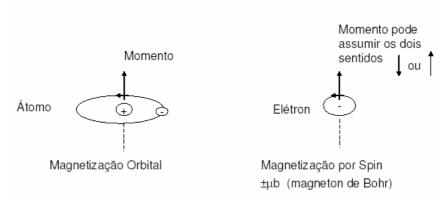


Figura 2 Tipos de Magnetização

Tanto o movimento de rotação do elétron (*spin*) quanto o movimento orbital do elétron pelo núcleo atômico podem ser visualizados como pequeninas espiras de corrente, cada uma gerando seu próprio campo magnético B'. Estas correntes são chamadas de correntes de magnetização i_m e formam dipolos magnéticos que vão reagir à aproximação de um elemento magnetizado (como um imã). De um modo geral, as órbitas não têm orientações preferenciais e os campos próprios que chamamos de B' têm orientações aleatórias e se cancelam. Se aproximarmos um imã deste corpo e estas órbitas mantiverem suas orientações, este corpo é composto de <u>material não-magnético</u>, o qual não é nem atraído nem repelido por um imã. São exemplos de materiais não magnéticos o ar, a água, a madeira, o acrílico e o vidro. Neste trabalho, um carretel de nylon (material não-magnético) é utilizado como núcleo da bobina que manterá o imã permanente em suspensão por atração magnética.

Por outro lado, os materiais que reagem à aproximação de um elemento magnetizado são os <u>materiais magnéticos</u> os quais podem ser classificados como:

Ferros doces (ou macios ou moles)

- Paramagnéticos
- Ferromagnéticos
- Ferrimagnéticos

Ferros duros (ou imãs)

- Imãs permanentes

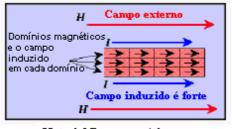
Os materiais diamagnéticos têm uma permeabilidade relativa um pouco inferior a 1. O cobre, por exemplo, tem μ =0,999991. Sob um campo magnético exterior, são sempre repelidos, pois provocam um desequilíbrio que atrofia o campo magnético resultante, reduzindo-o. São exemplos típicos o hidrogênio, o hélio, o cobre, o ouro, o silício, o germânio, o bismuto, a grafite e a água. O bismuto e a prata são levemente diamagnéticos. Os supercondutores são fortemente diamagnéticos (daí o fato de flutuarem quando colocados sobre um imã). O diamagnetismo normalmente é muito fraco, só sendo observado quando não há outro tipo de magnetismo.

Os materiais paramagnéticos têm uma permeabilidade relativa um pouco superior a 1. O alumínio, por exemplo, tem μ =1,00000036. Sob um campo magnético exterior, os campos individuais B' se orientam em sentidos concordantes, conduzindo a um aumento relativo do fluxo magnético no interior do material. Entre os materiais deste tipo encontram-se o potássio, o oxigênio, o alumínio, a platina, o tungstênio, etc. São sempre atraídos por um imã apesar de que seus efeitos práticos são desprezíveis.

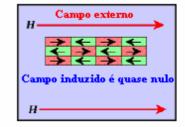
Os materiais ferromagnéticos têm uma permeabilidade relativa muito superior a 1, na ordem de 10³, sendo fortemente atraídos por um elemento magnetizado externo como um imã. Quando sujeitos à aplicação de um campo magnético exterior, os domínios passam a ter orientações concordantes com a direção do campo magnético externo, sendo responsáveis por acréscimos consideráveis no campo magnético do material (vide figura 3). Por outro lado, quando o campo magnético aplicado é suspenso, os diversos domínios adotam orientações aleatórias distintas das iniciais, podendo contribuir para a criação de um campo magnético remanescente não nulo. Este fenômeno é responsável pelo tão conhecido ciclo de histerese do material. Entre os materiais ferromagnéticos mais comuns encontramse o ferro, o níquel, o cobalto, etc. Uma característica importante deste tipo de material é que se estiver em um ambiente aquecido e se a temperatura ultrapassar um certo valor crítico, chamado <u>Temperatura Curie</u>, este meio passa a ter o comportamento de um material paramagnético. Outra característica importante é o fenômeno da saturação, ou seja, a permeabilidade relativa dependerá do módulo do campo magnético *H* que estiver aplicado no material; este fenômeno, também chamado não-linearidade, pode ser facilmente explicado pela curva de histerese do material, onde se percebe que a tangente da curva assume valores diferentes ao longo de *H*.

Os materiais <u>ferrimagnéticos</u> (vulgarmente chamados de ferrites) são em escala macroscópica, semelhantes aos ferromagnéticos, porém, apresentam magnetização permanente. Este fenômeno surge quando o alinhamento antiparalelo (direção oposta) entre átomos adjacentes não conduz ao cancelamento do campo magnético resultante ao nível microscópico. A aplicação de um campo magnético exterior imprime uma orientação concordante entre as múltiplas contribuições individuais, conduzindo no conjunto a aumentos significativos do campo magnético no interior do material (vide figura 3). Exemplo: Ferrite Cúbica (XFe₂O₄, X=elemento metálico) e a Ferrite é o Fe₃O₄ (magnetita mineral, ou pedra-ímã), as ferrites de níquel, cobalto, manganês, magnésio, etc. Apesar de, em geral, apresentarem permeabilidades relativas inferiores aos materiais ferromagnéticos, as ferrites distinguem-se pela baixíssima condutividade elétrica, que lhes permite reduzir significativamente as perdas por efeito de Joule associadas às correntes parasitas de Foucault.

Os materiais <u>antiferromagnéticos</u> também apresentam características semelhantes aos ferromagnéticos. Porém, caracterizam-se pelo cancelamento dos momentos magnéticos de átomos ou íons adjacentes obtido pelo alinhamento antiparalelo em direções exatamente opostas (vide figura 3). Os materiais deste tipo são fracamente afetados pela presença de um campo magnético aplicado. Exemplo: óxido de manganês (MnO). Como os momentos opostos se cancelam, o sólido como um todo não apresenta momento magnético remanente.







Material Ferromagnético

Material Ferrimagnético

Material Antiferromagnético

Figura 3 Domínios e campos induzidos nos materiais magnéticos

Os materiais <u>duros</u> (ou imãs permanentes) são aqueles que, mesmo quando o campo magnético externo é extinto, guardam uma indução residual significativa B_r . Esta indução é gerada pelo alinhamento dos seus dipolos magnéticos, os quais permanecem alinhados até que um campo magnético suficientemente intenso (chamado de força coercitiva H_c) desoriente-os, desmagnetizando assim o material.

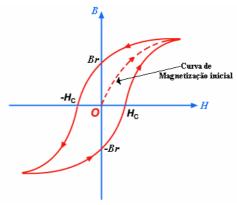


Figura 4 Ciclo de Histerese de um material magnético

A área de seu ciclo de histerese é bem superior à área do ciclo de histerese dos materiais ferromagnéticos (ou macios ou moles).

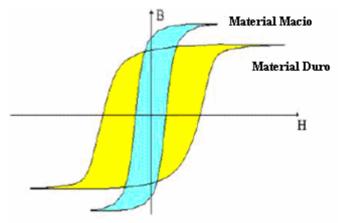


Figura 5 Comparação entre os ciclos de histerese dos materiais magnéticos duros e macios

2.2.2 Principais tipos de imãs permanentes

Para um imã permanente, é de grande interesse que a área de sua curva de histerese seja a maior possível o que significa uma grande energia magnética armazenada. Para tal, é desejável que o mesmo possua um elevado valor de campo coercitivo H_c , bem como uma elevada indução remanente B_r . Um alto valor de H_c

impede que o imã seja facilmente desmagnetizado e um B_r elevado tende, em geral, a criar campos magnéticos intensos no circuito no qual está inserido.

A evolução histórica dos imãs permanentes está relacionada com a descoberta e disponibilização de seus materiais componentes. Até 1930, usavam-se ligas metálicas como ferro-cromo-tungstênio-cobalto, as quais tinham, além de um fraco desempenho, um H_c muito baixo (H_c < 20000 A/m). A partir de então, novas ligas foram descobertas e uma grande variedade de imãs surgiu como é descrito a seguir:

• Imãs de Alnico:

Em 1940, apareceram as ligas de Alnico (Fe+Al+Ni+Co) cujo B_r é de aproximadamente 1T e com $H_c > 50000$ A/m. Os ímãs do Alnico têm uma boa estabilidade térmica e uma boa resistência à desmagnetização por choque mecânico, mas tem uma baixa força coerciva, desmagnetizando-se com facilidade. São classes de imãs anisotrópicos, ou seja, têm sua orientação magnética em uma direção preferencial. Atualmente, este tipo de imã é pouco utilizado, exceto para aplicações em altas temperaturas ou quando uma boa estabilidade térmica é exigida, como por exemplo, aparelhagem de medidas. Os imãs de Alnico vêm sendo substituídos, em muitas aplicações, pelas ferrites e pelos imãs de terras raras.

Tabela 1 Vantagens e Desvantagens dos imãs de Alnico

VANTAGENS	DESVANTAGENS
- Alta resistência à corrosão	- Alto Custo
- Alta resistência mecânica	- Baixa força coercitiva
- Alta estabilidade térmica	- Baixa energia (produto BH)

• Imãs Cerâmicos:

Em 1947, com o aparecimento dos imãs de cerâmica, também conhecidos por Ferrites, (SrFe₁₂O₁₉ ou BaFe₁₂O₁₉), a utilização dos imãs se generalizou, pois estes imãs são baratos e possuem um valor elevado de H_c (\approx 100000 A/m). Embora seu B_r seja baixo (\approx 0.4T), suas qualidades prevalecem e estes imãs continuam sendo empregados para aplicações freqüentes, corriqueiras (por exemplo, automotivas e eletrodomésticas) e que exigem um baixo custo. A matéria-prima é vastamente disponível o que o torna o material mais barato dentre todos os outros materiais

magnéticos. Outra qualidade deste tipo de imã vem do fato de que ele é isolante (contrariamente aos demais tipos de imãs), o que o coloca como elemento preferencial para utilizações em freqüência (pois não existirão correntes parasitas circulando nos mesmos). De acordo com a forma de construção, estes imãs podem ser isotrópicos ou anisotrópicos, com a magnetização em uma direção preferencial. As ferrites têm um bom balanço entre força magnética, resistência à desmagnetização e economia. São os imãs mais usados atualmente.

Tabela 2 Vantagens e Desvantagens dos imãs de ferrite

rabeia 2 vantagens e Desvantagens dos imas de ferrite					
VANTAGENS DESVANTAGENS					
- Baixo custo	- Baixa energia (produto BH)				
- Alta força coercitiva	- Baixa resistência mecânica (quebradiço)				
- Alta resistência à corrosão					
- Alta estabilidade térmica					

Imãs de Samário-Cobalto (SmCo):

Em 1974, os imás constituídos por elementos de terras raras surgiram. Segundo a Tabela Periódica, os terras-raras são um grupo relativamente abundante de 17 elementos químicos constituído pelo grupo dos lantanídeos, pelo escândio e pelo ítrio. Originalmente, foram considerados 'raros' porque eram desconhecidos na sua forma elementar e pela dificuldade de extração das rochas que os continham.

Os imãs de SmCo são um tipo de imã de terras-raras altamente resistente à oxidação e com resistência térmica e força magnética (Sm₁Co₅, com $B_r \approx 0.8$ T e $H_c \approx 600000$ A/m e, após, Sm₂Co₁₇, com $B_r \approx 1$ T e $H_c \approx 600000$ A/m) superiores se comparados com ferrite e Alnico, representando uma revolução neste domínio, pois, além de possuírem um elevado H_c , têm também um alto valor de B_r . Estes ímãs oferecem as melhores características térmicas, podendo suportar temperaturas até 300° C. Porém, devido a um processo complexo de fabricação e a dificuldade de obtenção de matérias-primas para os mesmos, seu preço foi considerado dissuasivo de modo que são utilizados em estruturas de alto desempenho (como servomotores e dispositivos que necessitem de alta densidade de potência) ou em aplicações onde a resistência a altas temperaturas e a corrosão é crítica. São frágeis e sujeitos a lascas, rachaduras e fraturas quando submetidos a choque mecânico.

Tabela 3 Vantagens e Desvantagens dos imãs de Samário-Cobalto (SmCo)

VANTAGENS	DESVANTAGENS
- Boa estabilidade térmica	- Alto custo
- Alta força coercitiva	- Baixa resistência mecânica (quebradiço)
- Alta resistência à corrosão	
- Alta energia (produto BH)	

Imãs de Neodímio-Ferro-Boro (NdFeB):

Em 1983, foi descoberto um imã baseado em outro elemento de terras-raras, o neodímio, mais abundante que o samário. A composição deste imã não necessita de cobalto, associando o neodímio com o ferro e o boro. São menos caros e de melhor desempenho ($Nd_2Fe_{14}B$ com $B_r\approx 1,2T$ e $H_c\approx 800000$ A/m) que os imãs de samário em temperatura ambiente. Porém, são inferiores em dois tópicos: têm uma fraca estabilidade com a temperatura e uma grande sensibilidade à corrosão. Tomadas as devidas precauções no que tange à temperatura, eles podem receber tratamentos que os protejam contra a corrosão (como por exemplo, deposição de uma camada superficial de ouro, níquel, zinco ou estanho ou revestimento de resina epóxi), possibilitando seu uso em aplicações industriais.

O alto custo envolvido deve-se, além do custo da matéria-prima, aos custos de licenciamento das patentes e dos direitos de propriedade intelectual existentes. Este alto custo limita seu uso a aplicações em que há a necessidade de campos magnéticos intensos originados por imãs compactos, em aplicações inovadoras ou quando propiciam redução de custos de fabricação. Atualmente, são produzidos e utilizados em larga escala e têm o mais elevado campo de indução magnética dentre todos os tipos de imãs, sendo comumente conhecidos por super-imãs.

Tabela 4 Vantagens e Desvantagens dos imãs de Neodímio-Ferro-Boro (NdFeB)

VANTAGENS	DESVANTAGENS
- Alta força coercitiva	- Alto custo
- Muito alta energia (produto BH)	- Baixa resistência mecânica (quebradiço)
	- Moderada estabilidade térmica
	- Baixa resistência à corrosão (quando não
	revestido)

As características magnéticas dos diferentes tipos de imãs são apresentadas na tabela abaixo:

Tabela 5 Características Magnéticas dos diferentes tipos de imãs

Material a 20°C	B _r [T]	H _c [KA/m]	BH _{max} [KJ/m ³]	μr	T _{curie} [°C]
Alnico	0,8 ~ 1,25	59 ~ 160	52 ~ 82	3 ~ 5	550
Ferrite	0,37 ~ 0,42	180 ~ 280	25 ~ 30	1,04 ~ 1,2	350
SmCo	0,98 ~ 1,12	600 ~ 800	180 ~ 240	1,05 ~ 1,3	250
NdFeB	1,2 ~ 1,3	350 ~ 950	280 ~ 350	1,03 ~ 1,06	100

Além dos imãs citados anteriormente pode-se assinalar a existência de imãs compositas, que são constituídos pela aglomeração do pó oriundo de materiais magnéticos (como ferrite ou Nd-Fe-B) com um agente de liga apropriado: elastômeros, para se obter os imãs flexíveis; ou resinas sob ação de aquecimento, para se obter os imãs rígidos. Por se tratar de um composto de pó magnético, possuem decréscimo de desempenho de cerca de 50% se comparado ao imã original. Em contrapartida, oferecem a vantagem de um preço mais acessível e de uma maior facilidade de emprego em quadros e fixações magnéticas, em sistemas de fechamento de portas, em pequenos motores elétricos, etc. Os dois tipos de compositas mais conhecidos são:

• Imãs moldados por injeção:

Estes ímãs são um composto de resina e de pó magnético de diferentes materiais permitindo que as peças sejam feitas em um processo do molde por injeção. O produto BH dependente do pó magnético usado na fabricação. O processo do molde permite a manufatura de formas muito complexas.

Tabela 6 Vantagens e Desvantagens dos imãs moldados por injeção

VANTAGENS	DESVANTAGENS
- Formatos personalizáveis	- Alto custo
- Moderada força coercitiva	- Baixa estabilidade térmica
- Alta resistência à corrosão	
- Moderada energia (produto BH)	

Imãs Flexíveis:

São muito similares aos imãs moldados por injeção mas são produzidos em folhas ou faixas planas. Estes ímãs têm baixa força magnética e podem ser muito flexíveis dependendo dos materiais usados no composto com o pó magnético. O vinil é usado freqüentemente neste tipo de ímã como o elemento de liga.

Tabela 7 Vantagens e Desvantagens dos imãs flexíveis

VANTAGENS	DESVANTAGENS
- Moderada força coercitiva	- Baixa energia (produto BH)
- Alta resistência à corrosão	- Baixa a média estabilidade térmica
- Baixo custo	

2.3 CAMPO MAGNÉTICO PROVOCADO PELO IMÃ PERMANENTE

2.3.1 O Potencial Escalar Magnetostático

As curvas de desmagnetização dos imãs permanentes (2º quadrante de sua curva de histerese) podem ser aproximadas pela equação (vide figura 4):

$$\vec{B} = \vec{B_r} + \mu_0 \cdot \mu_r(H) \cdot \vec{H}$$
 (21)

Esta relação constitutiva inclui não somente os imãs permanentes com indução magnética remanescente B_r e cuja permeabilidade geralmente depende do campo magnético H, apesar de ser relativamente pequena. Ela também pode ser estendida aos materiais ferromagnéticos, os quais possuem um valor de B_r relativamente pequeno e uma permeabilidade que pode alcançar valores muito altos.

É conveniente apresentar agora a existência de um terceiro vetor magnético M, denominado vetor magnetização, campo este criado pela orientação dos dipolos magnéticos do material magnetizado. Os 3 vetores magnéticos se relacionam da forma abaixo (QUEVEDO, 1993), indicando que a indução magnética é gerada não somente pela corrente elétrica mas também pelos dipolos magnéticos:

$$\left| \overrightarrow{B} = \mu_0 . \overrightarrow{H} + \mu_0 . \overrightarrow{M} = \mu_0 . \overrightarrow{H} + \overrightarrow{B_i} \right|$$
 (22)

Na eq.(22), o vetor \overrightarrow{B}_i é conhecido por Indução Magnética Intrínseca por ser a parcela de \overrightarrow{B} que independe de meios externos. É definido por:

$$|\overrightarrow{B_i} = \mu_0 . \overrightarrow{M}| \tag{23}$$

Aplicando-se o divergente em ambos os lados da eq.(22) e usando a propriedade da eq.(1), tem-se:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\mu_0 \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{M}) \Rightarrow 0 = \mu_0 \cdot (\nabla \cdot \vec{M} + \nabla \cdot \vec{H}) \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{M} = -\nabla \cdot \vec{H}}$$
 (24)

No caso dos imãs permanentes que não possuem correntes elétricas nem correntes de deslocamento, tem-se que $\nabla \times \overrightarrow{H} = 0$. Conforme visto na seção 2.1.2, o campo \overrightarrow{H} pode então ser calculado pelo gradiente do Potencial Escalar Magnetostático Ψ_m . Das eqs.(15) e (24), obtém-se:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{M} = \nabla^2 \Psi_m$$
 (25)

Para o cálculo da expressão analítica do campo magnético do imã, faz-se necessário lembrar que é envolvido externamente pelo ar, meio que não se polariza magneticamente, ou seja, o vetor magnetização \overrightarrow{M} se anula no exterior do imã. Então, há uma descontinuidade em \overrightarrow{M} que sugere um divergente negativo e a existência de cargas magnéticas (fictícias).

$$\iiint\limits_{Volume \ do \ im\vec{a}} \nabla \cdot \overrightarrow{M} dV = -q_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot \overrightarrow{M} = \frac{-q_m}{V} = -\rho_m}$$
 (26)

Usando a eq.(26) e o Teorema da Divergência de Gauss:

$$\iiint_{\text{olume do imã}} \nabla \cdot \overrightarrow{M}.dV = \iint_{\text{Superficies do imã}} \overrightarrow{M}.d\overrightarrow{S} \implies -q_m = \iint_{\text{Superficies do imã}} \overrightarrow{M}.\left(-\overrightarrow{n}\right).d\overrightarrow{S} \implies \left| \overrightarrow{M}.\overrightarrow{n} = \frac{q_m}{S} = \sigma_m \right|$$
 (27)

Não será demonstrado aqui, mas a solução geral da eq.(25) é (FURLANI, 2001):

$$\Psi_{m}(r) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \iiint_{Volume\ do\ im\vec{a}} \frac{\nabla' \cdot \overrightarrow{M}(r')}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} . dV' + \frac{1}{4\pi} \cdot \iiint_{Superfices\ do\ im\vec{a}} \frac{\overrightarrow{M}(r') . \overrightarrow{n'}}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} . dS'$$
(28)

2.3.2 O Campo Intensidade Magnética \vec{H}

A magnetização remanente $\overrightarrow{M_r}$ do imã é definida como:

$$\boxed{\overrightarrow{M_r} = \frac{\overrightarrow{B_r}}{\mu_0}} \tag{29}$$

Das eqs.(21), (22) e (29), obtém-se a expressão da magnetização em função de \overrightarrow{H} :

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_r} + \mu_0 \cdot \mu_r(H) \cdot \overrightarrow{H} = \mu_0 \cdot \overrightarrow{M_r} + \mu_0 \cdot \mu_r(H) \cdot \overrightarrow{H}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_i} + \mu_0 \cdot \overrightarrow{H} = \mu_0 \cdot \overrightarrow{M} + \mu_0 \cdot \overrightarrow{H}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_r} + (\mu_r(H) - 1) \cdot \overrightarrow{H}}$$
(30)

O imã permanente usado neste trabalho é um super-imã de NdFeB, de formato cilíndrico, com revestimento de níquel, com as seguintes propriedades:

Tabela 8 Dados do imã permanente usado no levitador

Propriedades Magnéticas Nominais	Características		
B _r = 12800 Gauss = 1,28 Tesla	Diâmetro D=8mm		
H_c = 11500 Oersted \cong 915,140 KA/m	Comprimento L= 4mm		
BH _{máx} (produto de energia) = 42 MGOe	Densidade = 7,4 g/cm ³		
B_r/H_c (permeabilidade incremental) = 1,113	Dureza = 600 HV		
Tomporatura da trabalha: 90° C	Coeficiente de temperatura:		
Temperatura de trabalho: 80° C	0,13%/° C		

Este imã de terra rara pode ser considerado, com bons resultados, como um meio rígido, homogêneo, linear e com uma curva de desmagnetização retilínea (vide figura 6). Assim, a eq.(30) simplifica-se:

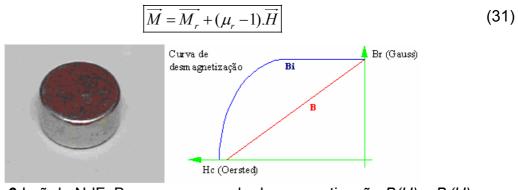


Figura 6 Imã de NdFeB e suas curvas de desmagnetização B(H) e $B_i(H)$

Como os imãs de NdFeB têm uma permeabilidade magnética relativa próxima da unidade, tem-se que a influência de *H* na magnetização do imã é <u>muito pequena</u>:

$$\mu_r \cong 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{M} \cong \overrightarrow{M_r}}$$
 (32)

Ou seja, no interior deste imã, a magnetização é praticamente uniforme de forma que $\nabla' \cdot \overrightarrow{M} \cong 0$. Adotando-se esta hipótese de divergente nulo, a eq.(28) do Potencial Magnetostático é simplificada para:

$$\Psi_{m}(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{Superficies \ do \ im \vec{a}} \frac{\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} dS$$
(33)

Por se tratar de um material <u>anisotrópico</u>, a modelagem do estado de magnetização do imã de NdFeB baseia-se na hipótese de ele possuir um eixo de fácil imantação, o qual coincide com o eixo que contém os pólos do imã, de forma que:

$$|\overrightarrow{M} \cong M_z.\overrightarrow{u_z}|$$
 (34)

Para a modelagem deste levitador, adotou-se que o pólo Norte do imã está voltado para cima de modo que a magnetização tem o mesmo sentido do eixo z, ou seja, M_z >0 (vide figura 7).

Considerando o sistema de coordenadas e variáveis representado na figura a seguir, em virtude da simetria axial, percebe-se que este problema pode ser simplificado a um sistema de duas dimensões. Será usado o sistema de coordenadas cilíndricas, sendo o ponto P' um ponto interno do volume magnetizado e o ponto P é onde se deseja calcular o campo magnético.

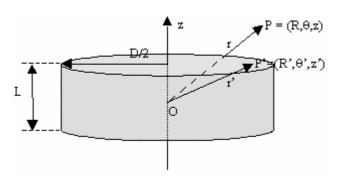


Figura 7 Sistema de coordenadas para o cálculo do campo gerado no imã

A intensidade magnética produzida pela matéria magnetizada é obtida da eq.(15), o que, em coordenadas cilíndricas, resulta:

$$\overrightarrow{H}(R,z) = -\frac{\partial \Psi_m}{\partial r} \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}_r} - \frac{\partial \Psi_m}{\partial z} \cdot \overrightarrow{\mathbf{u}_z}$$
(35)

Entretanto, a expressão analítica de $\overrightarrow{H}(R,z)$ não pôde ser obtida porque a integral de superfície do potencial magnetostático Ψ_m não é resolvida completamente (a não ser com o auxílio de recursos matemáticos avançados) conforme pode ser constatado através dos cálculos constantes no Apêndice A. Do Apêndice A, extraiuse a expressão da componente axial de \overrightarrow{H} abaixo:

$$H_{zim\tilde{a}}(R,z) = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'}} \cdot \left(1 + \frac{R.\cos\theta'}{\frac{D}{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} - \frac{z - \frac{L}{2}}{-R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'}} \right) - \frac{z - \frac{L}{2}}{-R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2}}} \right\} d\theta'$$

$$= \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'}} \left(1 + \frac{R.\cos\theta'}{\frac{D}{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} +$$

A partir da eq.(36) e usando-se os dados da Tabela 8, traçou-se as curvas a seguir:

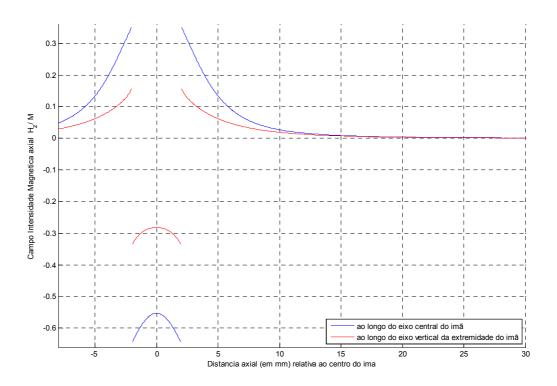


Figura 8 Gráfico teórico do campo *H* normalizado em relação a *M* para um imã de NdFeB

Da figura 8, pode ser observado que a intensidade magnética H do imã é descontínua nas superfícies que contêm os pólos Norte (z=+L/2) e Sul (z=-L/2). Observa-se, ainda, que o campo magnético em seu interior é negativo, em razão do imã operar no segundo quadrante de sua curva de histerese, e em seu exterior é positivo (direcionado para cima), ou seja, saindo de seu pólo Norte e entrando em seu pólo Sul. Também, pode-se verificar que as maiores amplitudes de campo azimutal são encontradas em seu eixo central, reduzindo-se com o aumento da distância radial.

Para o campo ao longo do eixo central superior do imã (z>L/2), a eq.(36) é simplificada para:

$$\Rightarrow H_{zim\tilde{a}}(0,z) = H_{zim\tilde{a}}\left(0, \frac{L}{2} + d\right) = \frac{M_z}{2} \cdot \left(\frac{d + L}{\sqrt{(d + L)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}} - \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}}\right)$$
(37)

2.4 CAMPO MAGNÉTICO PROVOCADO PELA BOBINA

2.4.1 O Potencial Vetor Magnético

A modelagem do campo magnético da bobina parte da relação entre os três vetores magnéticos. Aplicando-se o rotacional em ambos os lados da eq.(22), obtém-se:

$$\left| \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \nabla \times \vec{H} + \mu_0 \cdot \nabla \times \vec{M} \right| \tag{38}$$

Adotando-se o princípio da Magnetostática em que a variação dos campos ao longo do tempo é suficientemente lenta, faz com que:

Da eq.(20), seja originada a Condição de Coulomb:

$$\nabla . \overrightarrow{A} = -\mu . \varepsilon . \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\nabla . \overrightarrow{A} = 0}$$
(39)

 As correntes de deslocamento se tornem desprezíveis em relação às correntes de condução, evoluindo a eq.(2) para:

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{J} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{J}}$$
 (40)

Sabe-se, pela eq.(17), que o campo \vec{B} pode ser representado pelo rotacional de um potencial vetorial. Então, com as eqs.(13) e (38), acha-se o laplaciano de \vec{A} :

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \implies \nabla \times \vec{B} = \boxed{-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \cdot \nabla \times \vec{H} + \mu_0 \cdot \nabla \times \vec{M}}$$
(41)

Não será demonstrado neste trabalho mas, usando-se a eq.(40), tem-se como solução geral da eq.(41) (FURLANI, 2001):

$$|\overrightarrow{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\iint_{Vol. da \text{ bobtina}} \frac{\overrightarrow{J}(r')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} \cdot dV' \right] + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\iint_{Vol. do \text{ núcleo}} \frac{\nabla' \times \overrightarrow{M}(r')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} \cdot dV' + \iint_{Superficies \text{ do núcleo}} \frac{\overrightarrow{M}(r') \times \overrightarrow{n'}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} \cdot dS' \right]$$
(42)

Neste trabalho, o núcleo da bobina é não magnético de forma que M é nulo. Então, o Potencial Vetor Magnético acima é reduzido a:

$$\overline{\overrightarrow{A}}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[\iiint\limits_{Vol. da \text{ bobina}} \frac{\overrightarrow{J}(r')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} \cdot dV' \right]$$
(43)

2.4.2 O campo Indução Magnética gerado pela corrente elétrica no enrolamento

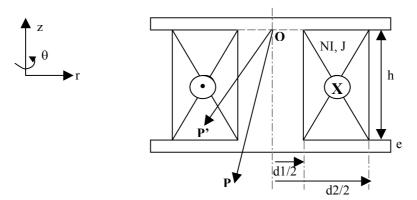


Figura 9 Sistema de coordenadas para o cálculo do campo gerado pela bobina

Partindo-se das eqs.(17) e (43) e usando a propriedade vetorial $\nabla \times (\Phi \cdot \vec{A}) = (\nabla \Phi) \times \vec{A} + \Phi \cdot (\nabla \times \vec{A})$, desenvolve-se abaixo a expressão do campo magnético gerado pela bobina é:

$$\begin{split} \overrightarrow{B}_{bobina}(r) &= \nabla \times \overrightarrow{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \nabla \times \left[\iiint_{vol. da \text{ bobina}} \frac{\overrightarrow{J}(r')}{\left| \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} \right|} \cdot dV' \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_{vol. da \text{ bobina}} \nabla \times \frac{\overrightarrow{J}(r')}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} \cdot dV' \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_{v'} \left(\nabla \frac{1}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} \right) \times \overrightarrow{J}(r') + \frac{\left(\nabla \times \overrightarrow{J}(r') \right)}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} \cdot dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_{v'} \left(-\frac{\overrightarrow{(r} - \overrightarrow{r'})}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|^3} \right) \times \overrightarrow{J}(r') \cdot dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_{v'} \frac{\left(\nabla \times \overrightarrow{J}(r') \right)}{\left| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} \right|} \cdot dV' \Rightarrow \end{split}$$

O segundo termo da expressão acima se anula pois a \vec{J} é fixa em relação ao sistema de coordenadas do rotacional, o que anula todas as derivadas parciais do mesmo, obtendo-se exatamente a *Lei de Biot Savart* abaixo:

$$\Rightarrow \overline{B}_{bobina}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_{Vol. da \text{ bobina}} \left(\frac{\overline{J}(r') \times (\overline{r} - \overline{r'})}{|\overline{r} - \overline{r'}|^3} \right) . dV'$$
(44)

De acordo com a figura 9, a corrente total NI distribui-se numa seção transversal de área $S_{bobina} = h.\left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_1}{2}\right)$ e, assim, na base ortonormal do sistema de coordenadas cilíndricas, o vetor densidade de corrente na bobina é expresso por:

$$\overrightarrow{J}(r') = J.\overrightarrow{u_{\theta'}} = \frac{N.I}{S_{hobing}}.\overrightarrow{u_{\theta'}} \Rightarrow \overrightarrow{J}(r') = \frac{2.N.I}{h.(d_2 - d_1)}.\overrightarrow{u_{\theta'}}$$
(45)

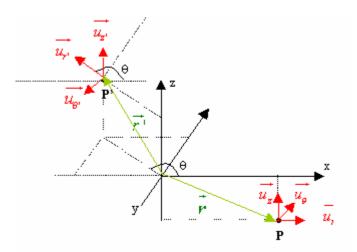


Figura 10 Sistemas de coordenadas do ponto P'(r') no enrolamento e do ponto P(r) qualquer

O vetor posição de P(r), em coordenadas cilíndricas, é $\vec{r} = R.\vec{u_r} + \theta.\vec{u_\theta} + Z.\vec{u_z}$, enquanto que o vetor do ponto P'(r') é $\vec{r'} = R'.\vec{u_{r'}} + \theta'.\vec{u_{\theta'}} + Z'.\vec{u_z}$. Como os vetores unitários do sistema de coordenadas cilíndricas não são fixos, ou seja, dependem da posição do ponto (vide figura 10) e, portanto, geralmente não coincidem nos dois pontos, efetuam-se os cálculos abaixo fazendo uso das coordenadas cartesianas as quais são estáticas. Considerando a posição angular do ponto de observação P como referência ($\theta = 0$), tem-se que:

$$\overrightarrow{u_r} = \cos 0.\overrightarrow{u_x} + sen 0.\overrightarrow{u_y} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_x}}$$
 e $\overrightarrow{u_\theta} = -sen 0.\overrightarrow{u_x} + \cos 0.\overrightarrow{u_y} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_y}}$

Com isto, estabelecem-se as seguintes identidades vetoriais:

$$\overrightarrow{u_{r'}} = \cos\theta' \cdot \overrightarrow{u_x} + sen\theta' \cdot \overrightarrow{u_y} \qquad e \qquad \overrightarrow{u_{\theta'}} = -sen\theta' \cdot \overrightarrow{u_x} + \cos\theta' \cdot \overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{r} = R \cdot \overrightarrow{u_r} + Z \cdot \overrightarrow{u_z} = R \cdot \overrightarrow{u_x} + Z \cdot \overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{r'} = R' \cdot \overrightarrow{u_{r'}} + \theta' \cdot \overrightarrow{u_{\theta'}} + Z' \cdot \overrightarrow{u_z} = R' \cdot \cos\theta' \cdot \overrightarrow{u_x} + R' \cdot sen\theta' \cdot \overrightarrow{u_y} + Z \cdot \overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'} = (R - R' \cdot \cos\theta') \cdot \overrightarrow{u_x} - R' \cdot sen\theta' \cdot \overrightarrow{u_y} + (Z - Z') \cdot \overrightarrow{u_z}$$

$$|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}| = \sqrt{(R - R' \cdot \cos\theta')^2 + (R' \cdot sen\theta')^2 + (Z - Z')^2} = \sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta' + (Z - Z')^2}$$

$$\overrightarrow{J}(r') = J \cdot \overrightarrow{u_{\theta'}} = J \cdot (-sen\theta' \cdot \overrightarrow{u_x} + \cos\theta' \cdot \overrightarrow{u_y})$$

$$dV' = R' \cdot d\theta' \cdot dR' \cdot dZ'$$

$$\overrightarrow{J}(r') \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}) = \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ -J \cdot sen\theta' & J \cdot \cos\theta' & 0 \\ (R - R' \cdot \cos\theta') & -R' \cdot sen\theta' & (Z - Z') \end{bmatrix} = J \cdot \cos\theta' \cdot (Z - Z') \cdot \overrightarrow{u_x} + J \cdot sen\theta' \cdot (Z - Z') \cdot \overrightarrow{u_y} + J \cdot (R' - R \cdot \cos\theta') \cdot \overrightarrow{u_z}$$

Transformando a expressão acima nas coordenadas cilíndricas relativas ao ponto P:

$$\boxed{\vec{J}(r') \times (\vec{r} - \vec{r'}) = \frac{2.N.I}{h.(d_2 - d_1)} \cdot \left[\cos\theta' \cdot (Z - Z').\overrightarrow{u_r} + sen\theta' \cdot (Z - Z').\overrightarrow{u_\theta} + (R' - R.\cos\theta').\overrightarrow{u_z}\right]}$$
(46)

A indução magnética gerada pela bobina pode ser calculada por:

$$\overrightarrow{B}_{bobina}(R,Z) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \cdot \iiint_{r_{ol.da} \text{ bobins}} \left(\frac{\overrightarrow{J}(r') \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|^{3}} \right) dV' =$$

$$= \frac{\mu_{0} \cdot N \cdot I}{2\pi \cdot h \cdot (d_{2} - d_{1})} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_{1}}{2}}^{0} \int_{0}^{1} \left(\frac{\cos \theta' \cdot (Z - Z') \cdot \overrightarrow{u_{r}} + sen\theta' \cdot (Z - Z') \cdot \overrightarrow{u_{\theta}} + (R' - R \cdot \cos \theta') \cdot \overrightarrow{u_{z}}}{\left(\sqrt{R^{2} + R'^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}}\right)^{3}} \right) \cdot R' \cdot d\theta' \cdot dR' \cdot dZ' \tag{47}$$

Como aparenta, o resultado analítico da integral tripla da eq.(47) não pode ser obtido sem o uso de recursos matemáticos especiais como integrais elípticas ou

alguma expansão polinomial (vide Apêndice B), o que demandaria um esforço matemático muito grande, fugindo do escopo deste trabalho. Seguindo a mesma linha adotada em BROWN et al. (1962), resolveram-se analiticamente as integrais em relação a R' e a Z' sendo a integral em θ ' resolvida apenas através de cálculo numérico computacional.

Para o cálculo da força de interação entre enrolamento e imã permanente, só será utilizada a componente em z do campo magnético (conforme será visto na seção 3.2) cuja equação foi extraída do Apêndice B e consta abaixo:

$$B_{zbobina}(R,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \begin{cases} (Z'-Z).\int_0^{2\pi} \ln\left(R'-R.\cos\theta' + \sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}\right).d\theta' + \\ +R\int_0^{2\pi} .sen\theta'.arctg\left(\frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{R.sen\theta'.\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}}\right).d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').\int_0^{2\pi} \frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta').\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} d\theta' + \\ +R^2.R'.(Z-Z').($$

2.4.2.1 O CAMPO INDUÇÃO MAGNÉTICA AO LONGO DO EIXO AXIAL

Neste caso, a distância radial R é nula de modo que a eq.(47) para o cálculo da indução magnética fica reduzida a:

$$\vec{B}_{bobina}(0,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{\cos\theta'.(Z - Z').\vec{u}_r + sen\theta'.(Z - Z').\vec{u}_\theta + R'.\vec{u}_z}{\left(\sqrt{R'^2 + (Z - Z')^2}\right)^3} \right) \cdot R'.d\theta'.dR'.dZ'$$
(49)

Conforme pode ser conferido no Apêndice B:

- A componente azimutal $B_{\theta_{bobina}}(0,Z)$ é igual a zero o que era esperado em razão da densidade de corrente \vec{J} ser azimutal.
- A componente radial $\overrightarrow{B}_{r_{bobina}}(0,Z)$ também se anula em virtude da simetria existente ao longo do eixo central.
- Já a componente em z do campo magnético é:

$$\vec{B}_{z_{bobina}}(0,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{h.(d_2 - d_1)} \cdot \left\{ (Z + h).\ln \left| \frac{\frac{d_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 + (Z + h)^2}}{\frac{d_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + (Z + h)^2}} \right| - Z.\ln \left| \frac{\frac{d_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 + Z^2}}{\frac{d_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + Z^2}} \right| \right\} \cdot \vec{u}_z$$
 (50)

Com a convenção apresentada na figura 9, pode-se calcular a indução magnética em função da distância d fazendo-se Z = -(d+e+h), o que transforma a eq.(50) em:

$$\vec{B}_{z_{bobina}}(0,d) = \frac{\mu_0.N.I}{h.(d_2 - d_1)} \cdot \left\{ (d + e) . \ln \left| \frac{\frac{d_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 + (d + e)^2}}{\frac{d_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + (d + e)^2}} \right| - (d + e + h) . \ln \left| \frac{\frac{d_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 + (d + e + h)^2}}{\frac{d_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + (d + e + h)^2}} \right| \right\}$$
(51)

3 MODELAGEM FENOMENOLÓGICA

FORÇA DE INTERAÇÃO MAGNÉTICA ENTRE BOBINA E IMÃ 3.1

Para o cálculo analítico desta força, considerar-se-á a bobina como a fonte geradora do campo magnético externo ao imã e este, o elemento no qual se calculará a força magnética resultante. Este cálculo tem sido objeto de inúmeros trabalhos nos quais os autores propõem métodos para se obter esta força de interação magnética da maneira mais precisa possível. Esta precisão é desejada pois possibilita o dimensionamento exato dos elementos magnéticos do sistema, evitando desperdícios com materiais usados e perdas de energia, além de melhorar o seu modelo, aumentando sobremaneira a eficiência do sistema em questão (ex: motores de imã permanente, mancais magnéticos, suspensões magnéticas, etc.).

Os cinco principais métodos para o cálculo da força nos imãs permanentes são enumerados a seguir:

3.1.1 Método do Trabalho Virtual

A força global na direção do deslocamento virtual δ pode ser calculada através de uma das duas expressões (MÜLLER, 1990), (QUEVEDO, 1993), (REN, 1994), (MEDEIROS; REYNE; MEUNIER, 1998, 1999):

$$|\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial \delta}| \quad \text{(com fluxo magnético constante)}$$
 (52)

$$|\vec{F}| = -\frac{\partial W}{\partial \delta}$$
 (com fluxo magnético constante) (52)
$$|\vec{F}| = \frac{\partial W'}{\partial \delta}$$
 (com corrente constante)

Para o imã permanente, as expressões da co-energia W' e da energia armazenada W são:

$$W(B) = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \iiint_{\text{volume do im}\vec{a}} (\vec{B} - \vec{B}_r) \cdot (\vec{B} - \vec{B}_r) \cdot dV$$
 (54)

$$W'(H) = \frac{\mu_0}{2} \cdot \iiint_{\text{volume do im}\vec{a}} (\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}) \cdot (\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}) \cdot dV$$
 (55)

3.1.2 Método dos Tensores de Stress de Maxwell

A força global é calculada através da expressão (MÜLLER, 1990), (REN, 1994), (MEDEIROS; REYNE; MEUNIER, 1998, 1999), (FURLANI, 2001):

$$\left| \vec{F} = \iint_{\text{Superficise}} \left[\frac{1}{\mu_0} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{u}_n) \cdot \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} \cdot |\vec{B}|^2 \cdot \vec{u}_n \right] dS \right|$$
 (56)

onde a superfície de integração é qualquer superfície fechada que englobe o corpo magnetizado e \vec{u}_n é o vetor unitário normal exterior a esta superfície.

Este método é muito sensível à escolha da superfície de integração, obtendo-se resultados diferentes para superfícies de integração diferentes. Para uma boa precisão, é necessária uma análise prévia para a descoberta da superfície de integração adequada.

3.1.3 Método das correntes magnetizantes equivalentes (ou correntes amperianas fictícias)

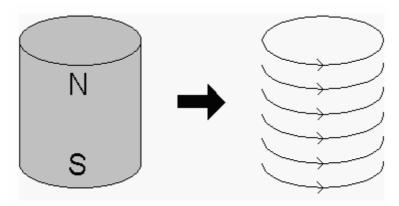


Figura 11 Modelo do imã com correntes superficiais equivalentes

Este método consiste na substituição do imã permanente por um volume de permeabilidade μ_0 com uma densidade de corrente $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ e com uma distribuição superficial de corrente $\vec{J}_{M,\ell} = \vec{M} \times \vec{n}$.

Assim, a força global pode ser calculada com o uso de uma expressão análoga à da força de Lorentz atuante nestas correntes (KABASHIMA; KAWAHARA; GOTO, 1988), (MÜLLER, 1990), (HENNEBERGER; SATTLER; SHEN, 1992), (REN, 1994), (MEDEIROS; REYNE; MEUNIER, 1998, 1999), (BOBBIO et al., 2000), (DELFINO et al., 2001), (FURLANI, 2001), (CHOI et al., 2006):

$$\overrightarrow{F} = \bigoplus_{\text{Superficie}} \overrightarrow{J}_{M,\ell} \times \overrightarrow{B}_{ext}.dS + \iiint_{Volume\ do\ im\widetilde{a}} \overrightarrow{J}_{M} \times \overrightarrow{B}_{ext}.dV \qquad , \tag{57}$$

sendo \vec{B}_{ext} o vetor indução magnética criado por uma fonte externa num ponto P(r) pertencente à superfície do imã permanente.

Para um material linear, rígido e isotrópico com uma magnetização constante, a densidade de corrente \vec{J}_M desaparece, resultando em uma distribuição superficial de força.

$$\overline{F} = \bigoplus_{\text{Superficie}} \overrightarrow{J}_{M,\ell} \times \overrightarrow{B}_{ext}.dS$$
 (58)

3.1.4 Método das cargas magnéticas ligadas (ou cargas magnéticas equivalentes)

Este método consiste na substituição do imã permanente por um volume de permeabilidade μ_0 com uma densidade volumétrica de carga $\rho_M = -\nabla.\overrightarrow{M}$ e com uma distribuição superficial de carga $\sigma_M = \overrightarrow{M}.\overrightarrow{n}$. Assim, a força global pode ser calculada com o uso da expressão (MÜLLER, 1990), (REN, 1994), (MEDEIROS; REYNE; MEUNIER, 1998, 1999), (BOBBIO et al., 2000), (DELFINO et al., 2001), (FURLANI, 2001), (CHOI et al., 2005):

$$\overrightarrow{F} = \mu_0 \cdot \iint_{Superficie} \sigma_M \cdot \overrightarrow{H}_{ext} \cdot dS + \mu_0 \cdot \iiint_{Volume \ do \ im\tilde{a}} \rho_M \cdot \overrightarrow{H}_{ext} \cdot dV , \qquad (59)$$

sendo \overrightarrow{H}_{ext} o vetor intensidade magnética criado por uma fonte externa num ponto P(r) pertencente à superfície do imã permanente.

Para um material linear, rígido e isotrópico com uma magnetização uniforme, a densidade volumétrica de carga $\rho_{\scriptscriptstyle M}$ desaparece, resultando em uma distribuição superficial de força.

$$\overrightarrow{F} = \mu_0 \cdot \bigoplus_{\text{Superficie}} \sigma_M \cdot \overrightarrow{H}_{\text{ext}} \cdot dS$$
 (60)

3.1.5 Método dos dipolos magnéticos equivalentes

Finalmente, se o imã permanente for considerado como um simples agregado de dipolos magnéticos, a força total é dada pela chamada fórmula de Kelvin (BOBBIO et al., 2000), (DELFINO et al., 2001), (CHOI et al., 2006):

$$|\overrightarrow{F} = \iiint\limits_{Volume \ do \ ima} (\overrightarrow{M}.\nabla).\overrightarrow{H}_{ext}.dV|$$
(61)

Οl

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \bigoplus_{\text{Superficise}} \left(\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{u}_n \right)^2 \cdot \overrightarrow{u}_n \cdot dS + \iiint_{\text{Volume do } im\tilde{a}} \left(\overrightarrow{M} \cdot \nabla \right) \cdot \overrightarrow{H} \cdot dV} \text{, com } \overrightarrow{H} = \overrightarrow{H}_{\text{i}m\tilde{a}} + \overrightarrow{H}_{\text{eletroim}\tilde{a}} . \tag{62}$$

Para um material linear, rígido e isotrópico, a expressão acima se resume apenas à integral de volume:

$$\overline{\vec{F}} = \iiint\limits_{Volume\ do\ im\tilde{a}} (\overline{M}.\nabla).\overline{H}.dV$$
 (63)

3.2 CÁLCULO DA FORÇA MAGNÉTICA DE ATRAÇÃO NO IMÃ PERMANENTE

Esta força é originada pela interação do campo magnético gerado pela bobina (em razão da circulação de corrente elétrica em seu enrolamento) sobre o imã permanente. Esta corrente é configurada de modo a gerar atração entre os corpos.

De todos os métodos descritos, escolheu-se o método das cargas magnéticas equivalentes por levar a cálculos da força total mais simples (DAMANTE, 2001) em razão de <u>duas hipóteses simplificadoras</u> já apresentadas na seção 2.3.2:

- o imã permanente foi modelado como anisotrópico, com sua magnetização paralela ao eixo vertical $\overrightarrow{M}\cong M_z\overrightarrow{u_z}$; e
- além disto, foi adotada a hipótese de magnetização uniforme de forma que $\rho_{\scriptscriptstyle M} = -\nabla.\overrightarrow{M} = 0 \ .$

Com estas duas hipóteses, a eq.(59) fica reduzida a (vide cálculos no Apêndice C):

$$\vec{F} = 2.\pi . M_z \cdot \int_0^{\frac{D}{2}} (\vec{B}_{bobina}_{face \text{ sup } erior} - \vec{B}_{bobina}_{face \text{ inferior}}) . R. dR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 2.\pi . M_z \cdot \int_0^{\frac{D}{2}} (\vec{B}_{bobina}(R, -h - e - d) - \vec{B}_{bobina}(R, -h - e - d - L)) . R. dR$$
(64)

Em razão da simetria axial do sistema de levitação, só a força vertical será considerada pois as radiais se anulam entre si. Para tal, somente a componente em z da indução magnética gerada pela corrente elétrica no enrolamento da bobina \vec{B}_{bobina} será considerada.

Conforme visto na seção 2.4.2, a expressão analítica da \vec{B}_{bobina} não pôde ser obtida em virtude da complexidade matemática existente. Para solucionar tal impasse, adotou-se como <u>terceira hipótese simplificadora</u> que o campo \vec{B}_{bobina} seja aproximadamente uniforme sobre cada uma das faces do imã. Tal situação pode ser obtida quando as dimensões da bobina são suficientemente grandes para tornar desprezível a variação radial de seu campo sobre o imã. Assim, usa-se o valor do campo da bobina ao longo do eixo central para a obtenção da expressão da força:

$$\Rightarrow F_z \cong \frac{\pi . M_z . D^2}{4} . \left(B_{z_{bobina}} (0, -d - h - e) - B_{z_{bobina}} (0, -d - h - e - L) \right)$$
 (65)

Após cálculos (vide Apêndice C), a expressão analítica da força total no imã permanente, considerando campo magnético uniforme, é:

$$\overline{F_z(I,d) = K.M_z.I.f(d)}, \text{ onde:}$$
(66)

- I é a corrente elétrica circulante no enrolamento:
- K é uma constante que só depende do meio e das dimensões geométricas da bobina e do imã:

$$K = \frac{\pi \cdot \mu_0 \cdot N \cdot D^2}{4 \cdot h \cdot (d_2 - d_1)}; e$$
 (67)

f(d) é uma função dependente da distância d:

$$f(d) = \begin{cases} (d+h+e) \cdot \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^{2}}{2}\right)^{2} + (d+h+e)^{2}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^{1}}{2}\right)^{2} + (d+h+e)^{2}}} \right| - (d+e) \cdot \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^{2}}{2}\right)^{2} + (d+e)^{2}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^{1}}{2}\right)^{2} + (d+e)^{2}}} \right| + \\ + (d+e+L) \cdot \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^{2}}{2}\right)^{2} + (d+e+L)^{2}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^{2}}{2}\right)^{2} + (d+e+L)^{2}}} \right| - (d+h+e+L) \cdot \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^{2}}{2}\right)^{2} + (d+h+e+L)^{2}}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\left(\frac{d^{2}}{2}\right)^{2} + (d+h+e+L)^{2}}} \right| \end{cases}$$

$$(68)$$

Observando a eq.(66), logo se percebe a diferença em relação à expressão aproximada da força entre bobina e corpo ferromagnético usada nos levitadores usuais $\left(F(I,d) = \text{constante.} \frac{I^2}{d^2}\right)$.

3.3 MODELO DA PLANTA

3.3.1 Desenvolvimento Matemático

A equação dinâmica não-linear deste levitador é bastante simples (vide figura 12):

Equação de forças:
$$F_z(i,d) - P = m\ddot{z}(t)$$

Porém: $z(t) = -d(t) - h - e \Rightarrow \ddot{z}(t) = -\ddot{d}(t)$ $\Rightarrow \boxed{m\ddot{d}(t) + K.M_z.f(d(t)).i(t) = P}$ (69)

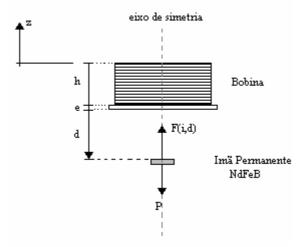


Figura 12 Diagrama de forças do levitador de imã permanente

O primeiro passo é a linearização da força de atração magnética em torno de um ponto de operação (I_0 , d_0) qualquer. Usando a expansão em série de Taylor e, negligenciando os termos de ordem superior a 2, tem-se a expressão:

$$F_{z}(i,d) = F_{z}(I_{0},d_{0}) + \frac{(d-d_{0})}{1!} \cdot \left(\frac{\partial F_{z}}{\partial d}\right)\Big|_{\substack{d=d_{0}\\i=I_{0}}} + \frac{(i-I_{0})}{1!} \cdot \left(\frac{\partial F_{z}}{\partial i}\right)\Big|_{\substack{d=d_{0}\\i=I_{0}}} + \frac{(d-d_{0})^{2}}{2!} \cdot \left(\frac{\partial^{2} F_{z}}{\partial d^{2}}\right)\Big|_{\substack{d=d_{0}\\i=I_{0}}} + \frac{2\cdot(i-I_{0})\cdot(d-d_{0})}{2!} \cdot \left(\frac{\partial^{2} F_{z}}{\partial i \cdot \partial d}\right)\Big|_{\substack{d=d_{0}\\i=I_{0}}} + \frac{(i-I_{0})^{2}}{2!} \cdot \left(\frac{\partial^{2} F_{z}}{\partial i^{2}}\right)\Big|_{\substack{d=d_{0}\\i=I_{0}}} + \dots$$

$$\Rightarrow F_{z}(i,d) = F_{z}(I_{0},d_{0}) + (d-d_{0}) \cdot \left(KM_{z}.I_{0}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)\Big|_{\substack{d=d_{0}\\i=I_{0}}}\right) + (i-I_{0}).K.M_{z}.f(d_{0}), \text{ onde:}$$
 (70)

$$\frac{\partial f}{\partial d}\bigg|_{d=d_0} = \begin{pmatrix} +\ln\left|\frac{\frac{d_2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2}{2}\right)^2+(d_0+h+e)^2}}{\frac{d_1}{2}\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+h+e)^2}}\right| + \frac{(d_0+h+e)^2}{\left(\frac{d^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2}{2}\right)^2+(d_0+h+e)^2}} - \frac{(d_0+h+e)^2}{\left(\frac{d^2}{2}\sqrt{\left(\frac{d^2}{2}\right)^2+(d_0+h+e)^2}} \\ -\ln\left|\frac{\frac{d_2}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e)^2}}{\frac{d_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e)^2}}\right| - \frac{(d_0+e)^2}{\left(\frac{d_2}{2}\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2+(d_0+e)^2}} + \frac{(d_0+e)^2}{\left(\frac{d_2}{2}\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e)^2}} \\ + \ln\left|\frac{\frac{d_2}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2+(d_0+e)^2}}{\frac{d_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2+(d_0+e)^2}}\right| + \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} - \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} \\ - \ln\left|\frac{\frac{d_2}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}{\frac{d_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right| + \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} - \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} - \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} - \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} - \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} - \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} - \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} - \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} + \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} - \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}} + \frac{(d_0+e+L)^2}{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}\right)\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}+\sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2+(d_0+e+L)^2}}}$$

Assumindo que no ponto (I_0, d_0) ocorre o equilíbrio estático do imã, tem-se que $F_z(I_0, d_0) = P$. Então, para a suspensão do imã em d_0 , é necessária uma corrente:

$$I_0 = \frac{P}{K.M_z.f(d_0)}$$
 (72)

O modelo da equação dinâmica linearizada resulta em:

$$m\ddot{d} + P + (d - d_0) \cdot \left(K \cdot M_z \cdot I_0 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial d} \right) \Big|_{d = d_0} \right) + (i - I_0) \cdot K \cdot M_z \cdot f(d_0) = P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[m\ddot{d} + K \cdot M_z \cdot I_0 \cdot (d - d_0) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial d} \right) \Big|_{d = d_0} + K \cdot M_z \cdot f(d_0) \cdot (i - I_0) = 0 \right]$$
(73)

Fazendo a seguinte substituição de variáveis $\begin{cases} \Delta d = d - d_0 \implies \Delta \ddot{d} = \ddot{d} \\ \Delta i = i - I_0 \end{cases}$ na eq.(73), temse para o modelo da Planta:

$$\Rightarrow \left| m.\Delta \ddot{d} + K.M_z.I_0. \left(\frac{\partial f}{\partial d} \right) \right|_{d=d_0} .\Delta d = -K.M_z.f(d_0).\Delta i$$
 (74)

Aplicando a Transformada de Laplace, obtém-se a seguinte função de transferência da Planta do levitador:

$$\Rightarrow \frac{\Delta D(s)}{\Delta I(s)} = -\frac{K.M_z.f(d_0)}{m.s^2 + K.M_z.I_0.\left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)\Big|_{d=d_0}}$$
(75)

Como a função f(d) decresce com a distância d, a derivada $\frac{\partial f}{\partial d}$ é negativa. Assim, a eq.(75) tem dois pólos simétricos (como todos os demais levitadores disponíveis na literatura), o que comprova a instabilidade característica do levitador:

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{K.M_z.I_0}{m}.\left|\left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)\right|_{d=d_0}}$$
 (76)

A função de transferência no formato de pólos e zeros fica da seguinte forma:

$$\frac{\Delta D(s)}{\Delta I(s)} = -\frac{\frac{K.M_z.f(d_0)}{m}}{\left(s + \sqrt{\frac{K.M_z.I_0.}{m} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right) \right|_{d=d_0}} \right).\left(s - \sqrt{\frac{K.M_z.I_0}{m}.\left| \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right) \right|_{d=d_0}} \right)} \right),$$
(77)

ou usando a igualdade originada da eq.(72) $KM_zI_0.f(d_0) = P$:

$$\frac{\Delta D(s)}{\Delta I(s)} = -\frac{\frac{K.M_z.f(d_0)}{m}}{\left(s + \sqrt{\frac{g}{f(d_0)}.\left|\left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)\right|_{d=d_0}}\right).\left(s - \sqrt{\frac{g}{f(d_0)}.\left|\left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)\right|_{d=d_0}}\right)}$$
(78)

Pela eq.(78), é possível observar que a massa do imã não interfere na localização dos pólos da planta.

É interessante ter como entrada da função de transferência da planta a tensão na bobina ao invés da corrente. O circuito equivalente da bobina segue abaixo:

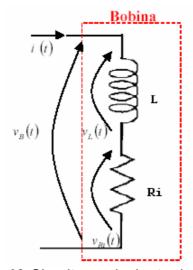


Figura 13 Circuito equivalente da bobina

O circuito equivalente do circuito da figura 13 é: $v_B(t) = v_L(t) + v_{R_i}(t) = L \cdot \frac{di}{dt} + R_i \cdot i$ (79)

Definindo a variável $\Delta v_B(t) = v_B(t) - V_o$, deriva-se da eq.(79) as equações abaixo:

$$\Delta v_{B} = \left(v_{L} + v_{R_{i}}\right) - \left(V_{oL} + V_{oR_{i}}\right) = \left(L \cdot \frac{di}{dt} + R_{i} \cdot i\right) - \left(L \cdot \frac{dI_{0}}{dt} + R_{i} \cdot I_{0}\right) = L \cdot \frac{d\left(i - I_{0}\right)}{dt} + R_{i} \cdot \left(i - I_{0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta v_{B} = L \cdot \frac{d}{dt} \left(\Delta i\right) + R_{i} \cdot \Delta i$$

$$\Rightarrow V_{o} = L \cdot \frac{dI_{0}}{dt} + R_{i} \cdot I_{0} \Rightarrow V_{o} = R_{i} \cdot I_{0}$$
(81)

Aplicando-se a transformada de Laplace na eq.(80), tem-se que:

$$\Delta V_B(s) = (L.s + R_i).\Delta I(s) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta I(s)}{\Delta V_B(s)} = \frac{1}{L.s + R_i}}$$
 (82)

Considerando-se ainda a necessidade de uso de um amplificador linear de potência na saída do controlador com um ganho aproximadamente K_{ν} constante ao longo da faixa de freqüências do levitador, tem-se:

$$\Delta V_B(s) = K_v.\Delta V_c(s) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V_B(s)}{\Delta V_c(s)} = K_v}$$
(83)

Das eqs. (78), (82) e (83), obtém-se a Planta estendida final do Levitador (vide figura 14):

$$G(s) = \frac{\Delta D(s)}{\Delta V_{C}(s)} = \frac{\Delta V_{B}(s)}{\Delta V_{C}(s)} \cdot \frac{\Delta I(s)}{\Delta V_{B}(s)} \cdot \frac{\Delta D(s)}{\Delta I(s)} = K_{v} \cdot \frac{1}{L.s + R_{i}} \cdot \left(-\frac{K.M_{z}.f(d_{0})}{m.s^{2} + K.M_{z}.I_{0}} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial d} \right) \Big|_{d=d_{0}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\Delta D(s)}{\Delta V_{C}(s)} = -\frac{\frac{K_{v}.K.M_{z}.f(d_{0})}{L.m}}{\left(s + \frac{R_{i}}{L} \right) \cdot \left(s + \sqrt{\frac{g}{f(d_{0})} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial d} \right) \Big|_{d=d_{0}}} \right) \cdot \left(s - \sqrt{\frac{g}{f(d_{0})} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial d} \right) \Big|_{d=d_{0}}} \right)}$$

$$(84)$$

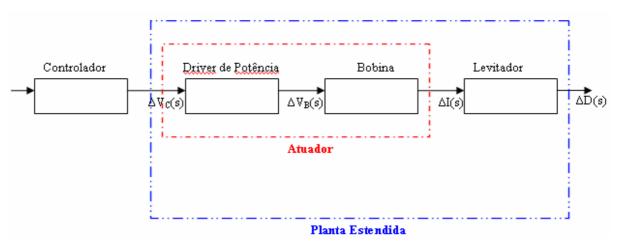


Figura 14 Representação da Planta estendida

4 CARACTERIZAÇÃO DO SISTEMA

4.1 DIMENSIONAMENTO DA BOBINA

Conforme visto anteriormente, para usufruir da simplicidade da eq.(66) da força magnética entre bobina e imã, é fundamental dimensionar a bobina de forma que o seu campo magnético sobre o imã, para cada distância axial, seja <u>aproximadamente uniforme</u> e igual ao do eixo central. Este dimensionamento, bem executado, possibilita o uso da expressão em questão com resultados bastante aceitáveis.

Para iniciar o projeto da bobina, adotou-se como pré-requisito de projeto que a <u>corrente máxima permitida</u> a circular na bobina seja de cerca de <u>1A</u> (PERRELA, 2005).

Com esta informação e com base no extrato da Tabela AWG para fios e cabos padrão, escolheu-se um fio nº21 AWG para o enrolamento da bobina.

Capacidade Número Diâmetro Secção Número de espiras Kg por Resistência AWG (ohms/Km) (mm) (mm2) por cm Κm (A) 14 1,628 2.08 5,6 18,5 8.17 6.0 15 1,450 1.65 6,4 14,7 10.3 4,8 1,291 12.9 16 1,31 7,2 11,6 3,7 17 1,150 1,04 9.26 16,34 3.2 9.2 2.5 18 1,024 0.82 7.3 20,73 19 0.9116 0.6510.25.79 26,15 2.0 20 0,8118 32,69 1,6 0,52 11,6 4,61 12,8 21 0,7230 1,2 0,41 3.64 41,46 22 0.64380.3314.4 2.89 51.5 0.9223 0.5733 0.26 16.0 2.29 56.4 0.7324 0,5106 0,2018,0 85,0 0.58 1,82 25 0,4547 106,20.460.1620,01,44 26 0.4049 0.1322.8 1,14 130.70.37 27 0.36060,10 25.6 0.91 170.00.2928 0,3211 0,08 28,4 0,72 212,5 0,23

Tabela 9 Extrato da Tabela AWG simplificada

Com base no levitador desenvolvido em (PERRELA, 2005), o qual tinha como dados de projeto a corrente máxima de 1A e um enrolamento de 3000 espiras e operou

confortavelmente, adotou-se como pré-requisito de projeto que a bobina fosse dimensionada de forma a possuir cerca de <u>1500 espiras</u>.

A área transversal do enrolamento é $S_{bobina} = h.\left(\frac{d_2}{2} - \frac{d_1}{2}\right)$. Pela Tabela 9, o número de espiras por centímetro é de 12,8 para o fio 21AWG. Então, pode-se calcular o número de espiras da bobina através da expressão:

$$N = 12, 8.h. \left(12, 8.\frac{d_2}{2} - 12, 8.\frac{d_1}{2}\right) = \frac{12, 8^2.h. \left(d_2 - d_1\right)}{2} \Rightarrow \boxed{N = 81, 92.h. \left(d_2 - d_1\right)} \quad \text{(h, d_1 e d_2 em cm) (85)}$$

Para o dimensionamento, foi elaborada uma rotina em Matlab (Apêndice E) que variou os valores de h, d_1 e d_2 , dentro de certos limites arbitrários (por exemplo, o diâmetro externo não poderia ser superior a 80 mm e a altura, 60 mm, sob o risco de a bobina ficar muito grande), mantendo-se N fixo. Para cada combinação (h, d_1 , d_2), calculou-se a maior diferença percentual entre o campo axial em um ponto localizado nos intervalos $0 \le R \le D/2$ e $h \le -Z \le (h + 60mm)$ e o campo em seu eixo central. Foi escolhida a dimensão (h, d_1 , d_2) que apresentou o menor valor percentual representando uma maior uniformidade de campo magnético sobre a face do imã permanente. Obteve-se para a dimensão da bobina:

$$d_2 = 79mm$$
 $d_1 = 48mm$ $h = 59,1mm$

Com esta dimensão, <u>a maior diferença percentual</u> encontrada em relação ao campo Indução axial no eixo central $\vec{B}_{z_{bobina}}(0,Z)$ foi de aproximadamente **0,84%** no ponto R=4mm e Z=-85,1mm.

Com base nas dimensões de projeto acima, a bobina foi enrolada em um carretel de nylon (com e=5mm) obtendo-se como dimensões finais $d_2=78mm$, $d_1=50mm$ e h=61mm, gerando um total de N=1550 espiras que fez com que a máxima diferença fosse de 0,83% (para R=4mm e Z=-89mm), o que representa uma boa uniformidade de campo. Esta máxima diferença pode ser visualizada no gráfico da figura 15 onde se percebe que a variação da indução magnética axial sobre a face do imã, medida em militesla, para uma corrente de 1A, é realmente muito pequena:

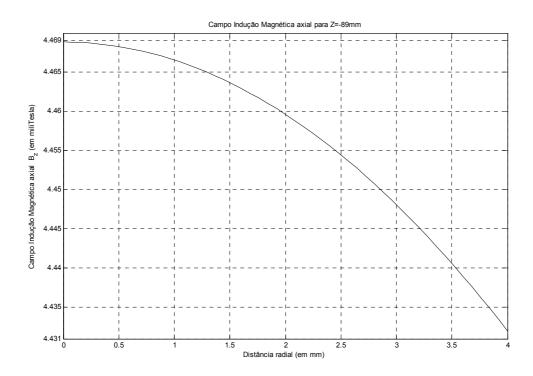


Figura 15 Curva do campo B axial para Z = -89mm

Para se ter uma idéia da uniformidade, traçou-se as curvas dos campos axiais ao longo de três eixos verticais distintos. Pela figura abaixo, percebe-se que as três curvas praticamente se sobrepõem.

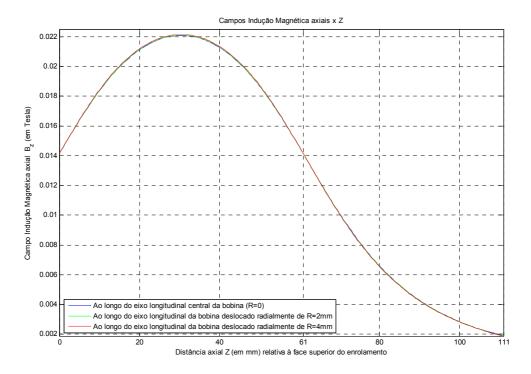


Figura 16 Curva dos campos *B* axiais x distância *Z* a partir da face superior da bobina

4.2 CÁLCULO DA FORÇA PESO

Com os dados técnicos fornecidos pelo fabricante do imã (vide Tabela 8), o peso do imã pode ser facilmente calculado:

$$\rho_{im\bar{a}} = \frac{m}{V_{im\bar{a}}} \Rightarrow m = \rho_{im\bar{a}}.V_{im\bar{a}} = (7,4g/cm^3).\left(L.\pi.\left(\frac{D}{2}\right)^2\right) = 7,4.\left(0,4.\pi.\left(\frac{0.8}{2}\right)^2\right) \Rightarrow \boxed{m_{im\bar{a}} \cong 1,49g}$$

$$P = m.g = 1,49.10^{-3}.9,81 \Rightarrow \boxed{P \cong 14,6.10^{-3}N = 0,0146N}$$

Com uma balança de precisão "Gehaka BK300", foi obtido m = 1,477g para a amostra X do imã de NdFeB e, conseqüentemente, $P = 14,5.10^{-3} N$, valores muito próximos aos nominais.

4.3 CARACTERIZAÇÃO DA PLANTA

Com as dimensões do imã e da bobina definidas, é possível, com a eq.(68), analisar o comportamento da função f(d) ao longo da distância axial entre estes objetos.

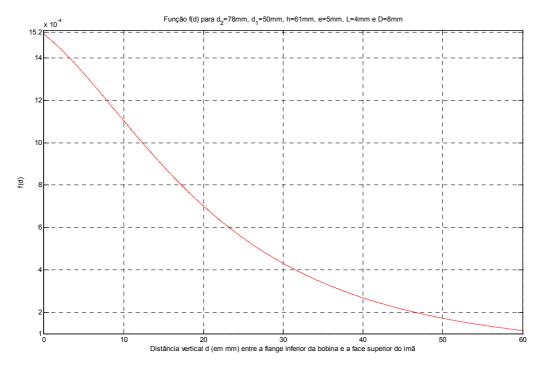


Figura 17 Curva de f(d) em função da distância bobina-imã

Analisando-se o gráfico da figura 17, pode-se visualizar que há uma boa linearidade entre a função f(d) e a distância d no intervalo de $0 \le d \le 20$ mm. Assim, adota-se este intervalo como a faixa de operação do levitador.

Neste trecho linear, a função f(d) pode ser representada por uma função de 1ºgrau (isto é, uma reta) em d. Com o método clássico de linearização por Taylor, tendo como ponto de operação o ponto central deste intervalo de linearidade (d_0 =10mm), obtém-se:

$$f(d) = f(d_0) + \frac{(d - d_0)}{1!} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial d}\right)\Big|_{d = d_0}$$
(86)

Da eq.(68):
$$f(d_o = 10mm) = 0.0011$$

Da eq.(71): $\frac{\partial f}{\partial d}\Big|_{d_o = 10mm} = -0.0449$ $\Rightarrow f(d) = 0.0011 - 0.0449 \cdot (d - 0.010)$ (d em m) (87)

Plotando-se as curvas de f(d) em seu formato original da eq.(68) e em seu formato linearizado da eq.(87), pode-se visualizar que estão bem próximas entre si (vide figura 18). Então, na faixa de trabalho do levitador, o parâmetro $\frac{\partial f}{\partial d}$ é praticamente constante, independendo do ponto de linearização d_o adotado. Isto representa menos um parâmetro variável na eq.(84) da Função da Transferência da Planta.

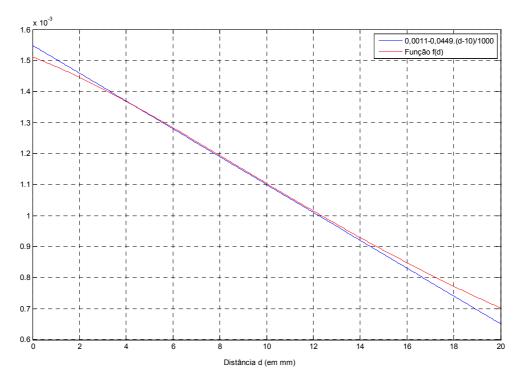


Figura 18 Função *f(d)* e sua respectiva reta de ajuste (obtida por Taylor)

4.3.1 Determinação da Magnetização de Operação do imã permanente

Este também é um ponto muito importante da fase de caracterização de parâmetros da planta. Para que se entenda qual o valor da magnetização M a ser usado neste trabalho é importante uma breve explanação sobre como funciona o imã permanente. Esta teoria está muito bem explicada em PARKER (1990).

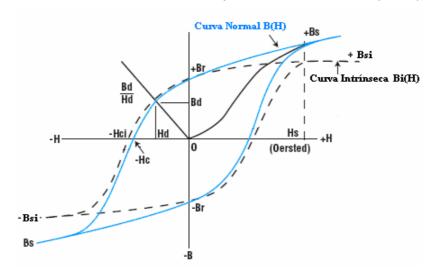


Figura 19 Ciclos de Histerese de um imã genérico (Curvas Normal e Intrínseca)

Olhando a figura acima, é oportuno relembrar que a curva intrínseca é obtida da curva normal pelas eqs. (22) e (23):

$$B_i = B - \mu_0.H \tag{88}$$

Normalmente, nos dados técnicos do imã disponibilizados pelo fabricante (como visto na tabela 8) é informado o valor da Indução Remanente B_r . Com este dado, pode-se facilmente calcular pela eq.(29) a magnetização remanente M_r que é aquela que persiste no imã permanente quando se anula o campo intensidade magnética (H=0) durante seu ciclo de histerese (figura 19):

Porém, esta condição de H=0 é garantida <u>somente</u> quando o imã está inserido em um circuito magnético fechado onde há uma fonte de campo magnético como na figura 20, o que não é encontrado no levitador deste trabalho, o qual opera com um imã de NdFeB em um circuito magnético aberto com uma bobina de núcleo não magnético. Portanto, deve ser determinado o ponto de operação real (B_d , H_d) o que é conseguido através do cruzamento da reta de operação ("operating slope") e da

curva de desmagnetização normal B-H característica do imã (figura 19). Esta reta de operação é definida pela declividade B_d/H_d , chamada de Coeficiente de Permeância.

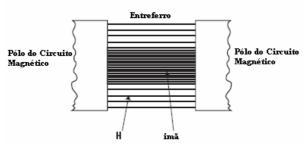


Figura 20 Imã Permanente em Circuito Magnético Fechado

Se "abrirmos" o circuito magnético da figura 20, ou seja, inserirmos uma pequena distância (ou, em inglês, *air gap*) entre um pólo do imã e um pólo do circuito magnético, ocorre a dispersão de linhas de campo como ilustrado abaixo, reduzindo a densidade de fluxo *B* no interior do imã, causando um efeito desmagnetizante.

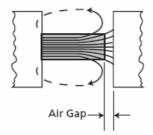


Figura 21 Influência do gap no comportamento das linhas de campo

Se o mesmo imã for retirado completamente do circuito magnético, distante o suficiente de qualquer fonte geradora de campo magnético ou de qualquer material magnético que possa alterar a configuração de seu campo, o mesmo apresenta uma dispersão de linhas de campo semelhante à dos imãs na figura 22.

Percebe-se que, tanto no interior do imã quanto nas laterais externas do imã, as linhas de campo H têm direção contrária à magnetização M, o que causa um efeito desmagnetizante no imã. Esta influência desmagnetizante depende então da geometria do imã e da distância (air gap) de materiais externos que interfiram na disposição de suas linhas de campo, bem como da intensidade de campo magnético externo H_{ext} aplicado sobre o imã.

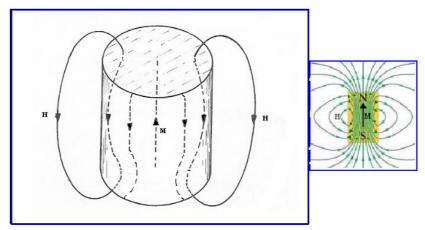


Figura 22 Linhas de campo de imãs genéricos isolados

Portanto, a magnetização do imã em circuito magnético aberto é, normalmente, inferior à magnetização remanente M_r . Isto é comprovado no Apêndice D quando foram encontrados, por três métodos distintos, valores de B_{di} inferiores ao Br=1,28T informado pelo fornecedor do produto. Instrumentos como o conjunto fluxímetrobobina de Helmholtz, o gaussímetro ou o Teslameter medem os campos do imã em circuito aberto, podendo-se obter B_{di} . Para se conhecer o valor de Br, é necessário usar um equipamento mais complexo: o Hysteresisgraph.

Para o levitador em questão, a geometria do imã é fixa e, conforme visto na curva intrínseca informada pelo fabricante (figura 6) e pela eq.(32), o efeito da intensidade magnética H gerada pela bobina na magnetização M do imã de NdFeB é pequena. Assim, restou apenas a distância entre bobina e imã como fator de influência sobre M (DAMANTE, 2001). Como o núcleo da bobina é não-magnético, sua capacidade de concentrar ou dispersar as linhas de campo do imã é reduzida se comparada à de um núcleo ferromagnético. Deste modo, adotou-se como quarta hipótese simplificadora que a magnetização M independe da distância entre imã e bobina.

Feitas todas as considerações necessárias, foi elaborado um ensaio experimental para se medir a força magnética entre a bobina e a imã. A bobina foi retirada de seu núcleo de nylon de modo que as distâncias devem ser entendidas como se *e*=0mm. Este ensaio foi conduzido da seguinte forma:

- o imã foi fixado sobre uma estrutura cilíndrica de nylon que, por sua vez, foi colocada em uma balança de precisão. Com esta estrutura de nylon de 74 mm de altura, tentou-se minimizar as influências entre o imã e o material ferromagnético da balança;

- a partir de então, aplicava-se uma corrente DC sobre a bobina a uma determinada distância acima do imã e anotava-se a variação de leitura na balança;
- A força, então, foi obtida multiplicando-se esta variação por 9,81x10⁻³.

Repetiu-se o ensaio para diferentes distâncias e correntes, obtendo-se a tabela 10:

Tabela 10 Dados experimentais de força obtidos com a balança de precisão

	Força Medida em Newton (x 9,81.10 ⁻³)						
d (mm)	I=0,25A	I=0,50A	I=0,75A	I=1,00A	I=1,20A	I=1,50A	
0,30	1,660	3,175	4,788	6,370	7,640	9,542	
2,11	1,576	3,134	4,684	6,260	7,493	9,340	
4,17	1,518	3,049	4,535	6,053	7,236	9,063	
4,40	1,506	3,021	4,498	6,000	7,182	8,984	
4,93	1,473	2,962	4,453	5,921	7,062	8,845	
6,43	1,430	2,859	4,317	5,760	6,895	8,624	
8,58	1,368	2,721	4,066	5,411	6,451	8,097	
10,69	1,298	2,573	3,828	5,099	6,116	7,638	
13,06	1,127	2,289	3,431	4,603	5,493	6,883	
14,84	1,067	2,127	3,204	4,266	5,118	6,401	
16,50	1,001	1,987	2,983	3,986	4,763	5,973	
18,46	0,923	1,831	2,729	3,641	4,374	5,466	
20,53	0,840	1,671	2,525	3,349	4,016	5,027	
22,68	0,758	1,509	2,264	3,020	3,614	4,521	
24,84	0,685	1,367	2,074	2,723	3,286	4,104	
26,97	0,596	1,193	1,788	2,388	2,863	3,595	
29,02	0,551	1,103	1,646	2,185	2,620	3,287	
30,87	0,507	1,006	1,516	2,025	2,433	3,036	
33,05	0,453	0,914	1,363	1,817	2,180	2,725	
34,95	0,417	0,831	1,243	1,653	1,982	2,481	
37,00	0,375	0,759	1,132	1,508	1,809	2,258	
39,28	0,331	0,676	1,006	1,338	1,608	2,009	
41,37	0,312	0,619	0,926	1,231	1,467	1,841	
43,15	0,287	0,566	0,850	1,136	1,357	1,697	
45,22	0,252	0,506	0,760	1,009	1,213	1,513	
47,05	0,240	0,477	0,714	0,951	1,140	1,425	
49,14	0,216	0,433	0,647	0,868	1,036	1,300	
51,22	0,198	0,395	0,592	0,787	0,942	1,177	
53,35	0,183	0,363	0,545	0,726	0,869	1,086	
55,14	0,163	0,329	0,495	0,660	0,792	0,990	
58,55	0,142	0,283	0,428	0,570	0,685	0,857	

Uma vez obtidos os dados experimentais, usou-se a técnica de ajuste de curva por mínimo erro quadrático, tendo como base a eq.(66) da força magnética total para o caso de campo uniforme sobre o imã ($F_{\it med} = K.M_z.I.f(d)$), para encontrar o valor de M_z que minimizou o erro no intervalo de 5 a 25 mm, obtendo-se para cada curva:

Tabela 11 Indução Magnética Intrínseca obtida experimentalmente

$B_{di}=\mu_0.M_z$ (em T)						
I=0,25A						
0.8375	0,8352	0,8355	0,8351	0,8331	0,8342	
MÉ	MÉDIA: 0,8351					

Com a hipótese de M uniforme <u>independente</u> do "air gap" e da intensidade de campo externo da bobina, adotou-se a média entre os valores encontrados de forma que:

$$B_{di} = \mu_0 . M_z = 0.8351 \Rightarrow \boxed{M_z = 664,55 KA/m}$$

Com este valor de M_z , foi possível traçar as curvas teórica e experimental da força de atração magnética:

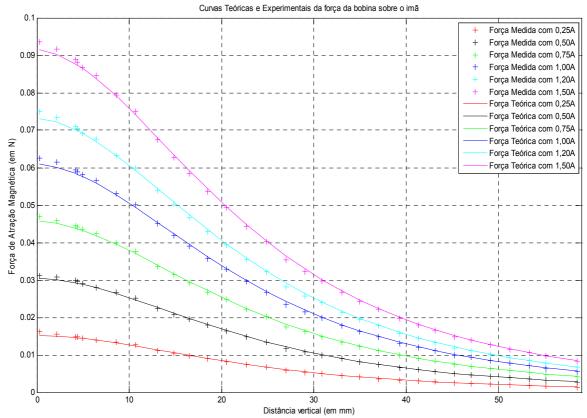


Figura 23 Curvas teóricas e experimentais da força entre bobina e imã permanente

Os resultados alcançados foram bastante satisfatórios. Os erros percentuais máximos foram encontrados exatamente fora do intervalo de 5 a 25mm (como era de se esperar) e foram de:

Tabela 12 Erros percentuais máximos entre as forças teórica e experimental

(F-F _{med})/F _{med} (em %)						
I=0,25A	I=0,50A	I=0,75A	I=1,00A	I=1,20A	I=1,50A	
6,43	3,84	3,93	3,75	3,85	3,38	

4.3.2 Determinação das demais variáveis da Planta

Com as dimensões da bobina e imã determinadas, pode-se obter:

Da eq.(67):
$$K = \frac{\pi.\mu_0.N.D^2}{4.h.(d_3-d_1)} \Rightarrow K = \frac{\pi.\mu_0.1550.8^2}{4.61.(78-50)} \Rightarrow \boxed{K = 5,7322.10^{-5}}$$

Conforme definido anteriormente, a faixa de trabalho do levitador está entre 0≤d≤20mm. Portanto, será adotado como d_0 o ponto médio deste intervalo. Então, $|d_0=10mm|$.

Da eq.(68):
$$f(d_o = 10mm) = 0,0011$$

Da eq.(71):
$$\left| \frac{\partial f}{\partial d} \right|_{d=10mm} = -0.0449$$

Da eq.(71):
$$\frac{\partial f}{\partial d}\Big|_{d_o=10mm} = -0.0449$$
Da eq.(72): $I_0 = \frac{P}{K.M_z.f(d_0)} \Rightarrow I_0 = \frac{14.5.10^{-3}}{5.7322.10^{-5}.664.55.10^3.0,0011} \Rightarrow I_0 = 345.8mA \approx 0.346A$

Com um multímetro MINIPA ET-2082B (freqüência de teste de 160Hz), obtêm-se os seguintes valores da resistência total do enrolamento R_i e da indutância L do modelo série da bobina: L = 48mH e $R_i = 8,6\Omega$

Da eq.(81), pode-se calcular o valor de
$$V_0$$
: $V_0 = R_i I_0 = 8, 6.0, 346 \Rightarrow V_0 = 2,976V$

O ganho do driver de potência foi identificado como: $K_v = 0.94$

Com todos os parâmetros definidos, a função de transferência da planta estendida relativa à eq.(84) é:

$$G(s) = -\frac{\frac{0.94.5,7322.10^{-5}.664,55.10^{3}.0,0011}{48.10^{-3}.1,477.10^{-3}}}{\left(s + \frac{8.6}{48.10^{-3}}\right) \cdot \left(s + \sqrt{\frac{9.81}{0.0011} \cdot \left| -0.0449 \right|}\right) \cdot \left(s - \sqrt{\frac{9.81}{0.0011} \cdot \left| -0.0449 \right|}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\Delta D(s)}{\Delta V_{C}(s)} = -\frac{555,581}{\left(s + 179.167\right) \cdot \left(s + 20.017\right) \cdot \left(s - 20.017\right)}}$$
(89)

4.4 O SENSOR DE POSIÇÃO

O tipo de sensor a ser utilizado neste trabalho é o de efeito Hall, o qual apresenta uma saída proporcional ao campo indução magnética incidente sobre si. Neste trabalho, o sensor de campo será utilizado indiretamente como um sensor de posição do imã uma vez que a variação da posição deste ocasionará uma variação do campo magnético total sob o sensor.

O sensor é fabricado pela Allegro MicroSystems, modelo A1323 SIP, com uma sensibilidade de 2,5 mV/G e com as seguintes características elétricas:

Characteristic	Symbol	Test Conditions	Min. Typ. ²		Max.	Units
Electrical Characteristics; V _{CC} =	= 5 V, unless oth	erwise noted	•			
Supply Voltage	V _{cc(op)}	Operating; Tj < 165°C			5.5	V
Supply Current	I _{cc}	B = 0, I _{out} = 0 – 5.6				mA
Quiescent Voltage	$V_{out(q)}$	B = 0, T _A = 25°C, I _{out} = 1 mA	2.425	2.5	2.575	V
Output Voltage ³	V _{out(H)}	$B = +X$, $I_{out} = -1 \text{ mA}$	-	4.7	-	V
	V _{out(L)}	B = -X, I _{out} = 1 mA	-	0.2	-	V
Output Source Current Limit ³	I _{out(LM)}	$B = -X$, $V_{out} \rightarrow 0$	-1.0	-1.5	-	mA
Supply Zener Clamp Voltage	Vz	I _{cc} = 11 mA = I _{cc(max)} + 3	6	8.3	-	V
Output Bandwidth	BW		-	30	-	kHz
Clock Frequency	f _C		-	150	-	kHz
Output Characteristics; over V _C	c range, unless	otherwise noted				
		A1321; C _{bypass} = 0.1 µF, no load	-	-	40	mV
Noise, Peak-to-Peak ⁴	V _N	A1322; C _{bypass} = 0.1 µF, no load	-	-	25	mV
		A1323; C _{bypass} = 0.1 µF, no load	-	-	20	mV
Output Resistance	R _{out}	l _{out} ≤ ±1 mA	-	1.5	3	Ω
Output Load Resistance	R _L	I _{out} ≤ ±1 mA, VOUT to GND	4.7	-	-	kΩ
Output Load Capacitance	Cı	VOUT to GND	-	-	10	nF

Tabela 13 Características elétricas do sensor Hall A1323

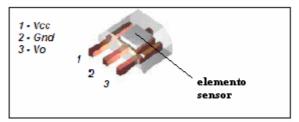


Figura 24 Pinagem do sensor de efeito hall

A curva característica teórica do sensor pode ser vista a seguir:

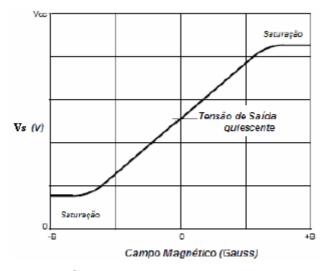


Figura 25 Curva característica teórica do sensor

Percebem-se uma extensa faixa de linearidade e duas regiões de saturação, uma superior e outra inferior. Quando não exposto a nenhum campo magnético, a saída do sensor apresenta uma voltagem quiescente que é tipicamente igual à metade da tensão de alimentação *Vcc*.

Como se deseja usar o sensor Hall como indicativo da distância entre bobina-imã é prioritário tomar previamente os três cuidados a seguir:

- deve-se operar na região linear do sensor para que a variação de posição do imã seja percebida;
- uma vez que o sensor "enxerga" o campo magnético resultante sobre si, deve-se anular o efeito do campo magnético gerado pela bobina; e
- deve-se anular o efeito do campo magnético ambiental, o qual pode variar de um local para outro, evitando-se assim ajustes na leitura para cada mudança de local do levitador.

Para garantir que o sistema opere na região linear do sensor, é necessário estabelecer quais são os limites de campo magnético suportados. Da Tabela 13, os seguintes dados nominais são extraídos:

$$V_H = 4,7V$$
 $V_L = 0,2V$ $V_q = 2,5V \text{ (paraVcc=5V)}$ $V_s = 2,5mV/G$

O limite superior do sensor pode ser calculado da seguinte forma:

$$V_H - V_q = K_s \cdot (B_H - 0) \Rightarrow 4,7 - 2,5 = 2,5.10^{-3}.B_H \Rightarrow B_H = 880G = 0,088T = 88mT$$

De modo análogo, o limite inferior é obtido:

$$V_q - V_L = K_s \cdot (0 - B_L) \Rightarrow 2.5 - 0.2 = -2.5 \cdot 10^{-3} \cdot B_L \Rightarrow B_L = -920G = -0.092T = -92mT$$

Pela figura 16, observa-se que o campo magnético máximo no exterior da bobina é de cerca de 14mT o que é insuficiente para saturar os sensores. Através da Tabela 16 tem-se que, para distâncias sensor-imã superiores a 4,7 mm, o campo magnético do imã <u>isolado</u> já é inferior a 88mT (na prática, o campo é inferior em virtude do ponto de operação do imã). Como o sensor mais próximo ao imã está embutido 5mm a partir do flange inferior do carretel de nylon, para evitar a saturação, bastou fixar um obstáculo que impedisse a entrada do imã para o interior do carretel o que foi conseguido através de uma fita adesiva transparente.

Para garantir que o sensoriamento enxergue apenas o campo magnético do imã, foram utilizados dois sensores Hall A1323, um instalado no centro da face superior da bobina (em Z=0) e o outro, no centro da face inferior do enrolamento da bobina (em Z=-61mm, ou seja, interno ao flange inferior de nylon em 5mm), ambos no eixo de simetria da bobina. Os sensores foram instalados com as suas faces arredondadas voltadas para baixo de forma que todo campo magnético que apontar para cima é tido por eles como sendo negativo. A partir de então, a saída do sensor n° 1 (sensor superior) é subtraída da saída do sensor n° 2 da seguinte forma:

$$\left| \Delta V_s = V_{s,1} - V_{s,2} = \left(V_{q,1} + K_{s,1}.B_1 \right) - \left(V_{q,2} + K_{s,2}.B_2 \right) \right| \tag{90}$$

Admitindo que ambos apresentem o comportamento típico ($K_{s,1}=K_{s,2}=K_s$ e $V_{q,1}=V_{q,2}$), a eq.(90) pode ser aproximada a $\Delta V_s \cong K_s$. (B_1-B_2) . Então:

$$\boxed{\Delta V_s \cong K_s. \left\{ \left(-B_{z_{bobinu}}(0,0) - B_{z^{im\tilde{a}}}(0,d+e+h) + B_{ambiente1} \right) - \left(-B_{z_{bobinu}}(0,-h) - B_{z^{im\tilde{a}}}(0,d+e) + B_{ambiente2} \right) \right\}} \quad \textbf{(91)}$$

Considerando que o campo B do ambiente seja aproximadamente igual nos dois sensores:

$$\Delta V \cong K_s. \left\{ -B_{zim\tilde{a}}(0, d + e + h) + B_{zim\tilde{a}}(0, d + e) \right\}$$
 (92)

Para *h*=61mm, o campo do imã sobre o sensor superior é muito pequeno de modo que:

$$\Rightarrow \left[\Delta V \cong K_s.B_{_zim\tilde{a}}(0,d+e) \right]$$
 (93)

Variou-se experimentalmente a corrente na bobina de 0 até 1,2A e constatou-se que, na <u>ausência do imã</u>, a tensão do conjunto sensor apresentou um off-set de 0,01V, o que está bastante razoável.

Uma vez tomados os cuidados necessários, o passo seguinte foi de caracterizar o conjunto sensor variando-se a distância *d* entre o imã e o flange inferior <u>ao longo do eixo de simetria</u> e medindo os valores da diferença das tensões de saída dos sensores. Os dados obtidos encontram-se tabelados a seguir:

Tabela 14 Resultado experimental da saída dos sensores de posição

Dados Experimentais do Conjunto-Sensor Hall										
d	ΔV_{s}	d	ΔV_s	d	ΔV_{s}	d	$\Delta \mathbf{V_s}$			
(em mm)	(em V)	(em mm)	(em V)	(em mm)	(em V)	(em mm)	(em V)			
0,0	2,424	5,5	0,57	12,0	0,155	23,0	0,039			
0,5	2,194	6,0	0,49	13,0	0,134	24,0	0,034			
1,0	2,000	6,5	0,445	14,0	0,113	25,0	0,030			
1,5	1,714	7,0	0,388	15,0	0,097	26,0	0,028			
2,0	1,440	7,5	0,360	16,0	0,085	27,0	0,025			
2,5	1,230	8,0	0,318	17,0	0,075	28,0	0,0225			
3,0	1,078	8,5	0,288	18,0	0,067	29,0	0,021			
3,5	0,910	9,0	0,265	19,0	0,058	30,0	0,020			
4,0	0,800	9,5	0,239	20,0	0,050	31,0	0,018			
4,5	0,720	10,0	0,212	21,0	0,046	32,5	0,017			
5,0	0,610	11,0	0,179	22,0	0,042	33,5	0,015			

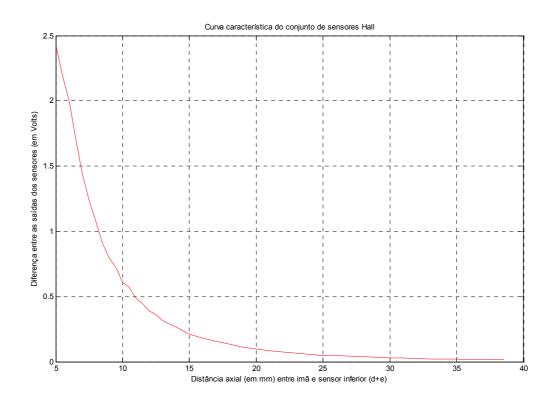


Figura 26 Curva característica do conjunto sensor de posição

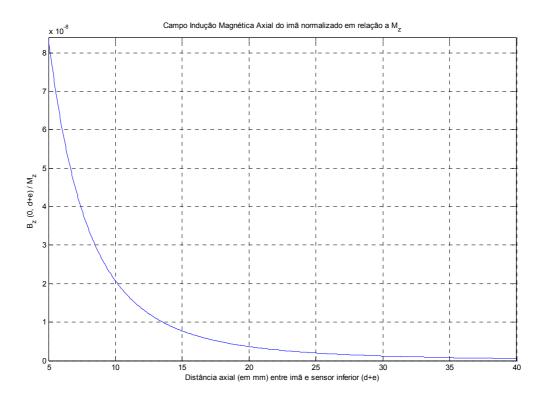


Figura 27 Indução Magnética axial ao longo do eixo central do imã normalizada em relação a M

Pelas figuras 26 e 27, pode-se observar que, como esperado pela eq.(93), a curva característica dos sensores tem um formato muito próximo ao da curva $B_{_{zim\bar{a}}}(0,d+e)$ do imã. A não-linearidade da curva, como será visto mais adiante, é compensada através de uma tabela de conversão (Look-up Table).

Com o a placa de captura e o Simulink, os quais serão apresentados no Capítulo 5, foi possível coletar a saída do conjunto sensor para uma distância fixa do imã permanente (período de amostragem de 0,001s). Com estes dados, procedeu-se uma análise deste sinal através de sua densidade espectral de potência estimada pelo Método de Welch.

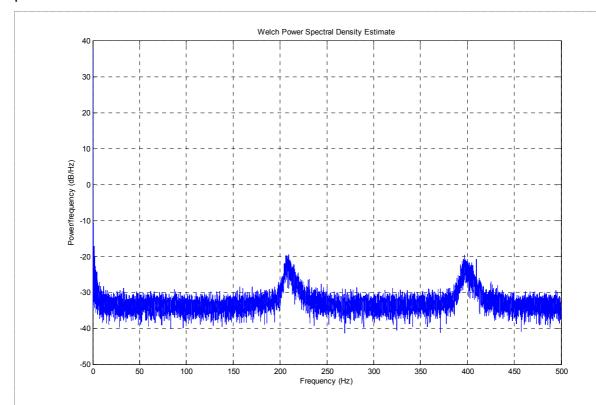


Figura 28 Densidade Espectral de Potência do sinal dos sensores

Apesar de ter apresentado dois picos em torno de 210Hz e 400Hz, a maior concentração de energia do sinal do conjunto sensor está nas baixas freqüências. Os ruídos nas demais freqüências são pequenos mas podem ser percebidos como será visto nos gráficos de resultados experimentais do Capítulo 7.

5 IMPLANTAÇÃO FÍSICA DO SISTEMA DE LEVITAÇÃO

O sistema de levitação foi implementado de forma a possibilitar sua utilização para fins acadêmicos no laboratório de Controle da Escola Politécnica. Neste sentido, buscou-se usar o microcomputador e uma ferramenta de desenvolvimento e simulação de uso freqüente pelos graduandos em engenharia: o Simulink, da Mathworks.

5.1 A PLACA DE AQUISIÇÃO DE DADOS

Para interfacear o sistema de levitação e o microcomputador, foi utilizada a placa de aquisição PCI 6221 da National Instruments. Esta placa, embora idealizada para trabalhar com o Labview da própria National, é totalmente compatível com o Simulink através do Toolbox "Real-Time Windows Target" do Matlab. Ela possui 16 entradas analógicas (com uma taxa de amostragem máxima de 250k amostras/s, resolução ADC de 16 bits e amplitudes admissíveis de até ±11 Volts) e 2 saídas analógicas (com uma taxa de atualização máxima de 740k amostras/s, resolução DAC de 16 bits e variação de ±10 Volts) entre tantas outras facilidades (10 entradas/saídas digitais, timer, saída 5VDC, etc.) conforme podem ser vistas no diagrama de pinagem (figura 30).



Figura 29 Placa de aquisição de dados PCI-6221, da National Instruments

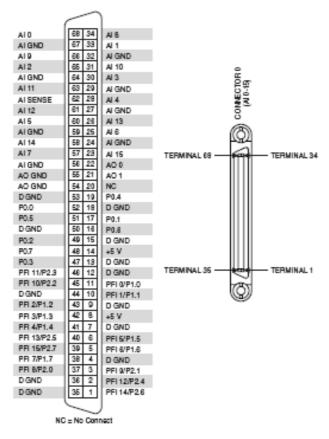


Figura 30 Pinagem da placa PCI-6221

Todas as entradas e saídas da placa PCI-6221 são disponibilizadas externamente por meio da placa de interface CB-68LP.



Figura 31 Placa de interface externa CB-68LP

A Placa PCI 6221 fornece uma amplitude máxima das saídas analógicas de ±10 Volts. Como a capacidade máxima do enrolamento 21AWG é de 1,2A (vide Tabela

9) e a resistência da bobina é de 8,6Ω, esta restrição de voltagem de trabalho é contornável. Entretanto, há uma limitação mais séria: estas saídas analógicas só conseguem disponibilizar uma corrente máxima de ±5 mA, muito aquém das necessidades do levitador deste trabalho. A solução para tal é o projeto de um driver de potência para amplificar a capacidade de corrente da PCI 6221.

5.2 O DRIVER DE POTÊNCIA

Para o driver de potência, duas soluções são possíveis: o uso de um amplificador linear de corrente ou usando um sinal PWM ("Pulse Width Modulation"). Um importante critério para a escolha de qual das duas soluções adotar é a amperagem requerida pela carga, neste caso a bobina. O método PWM, pela sua característica de chaveamento em alta frequência, tem alcançado prestígio pelo fato de operar com maior eficiência, praticamente sem dissipação de energia em seus circuitos. Na maioria dos amplificadores lineares, a eficiência gira em torno de 50% em virtude da dissipação de potência em seus transistores de saída. Por outro lado, as perdas por dissipação térmica nos circuitos PWM chegam a ser menores do que 10% das perdas existentes nos circuitos correspondentes usando amplificadores lineares sendo, atualmente, largamente utilizados para substituí-los. Portanto, o uso do PWM é extremamente recomendado em sistemas que precisam de correntes maiores que alguns amperes. Como desvantagem, o PWM adiciona complexidade no circuito, causa um ripple indesejável na corrente de saída além de poder causar interferência nos demais subsistemas. Neste trabalho, optou-se pelo uso do amplificador linear de corrente por três motivos:

- Simplicidade do circuito facilitando sua compreensão;
- Baixa demanda de corrente elétrica (I_{max}=1,2A e I_o≈ 350mA); e
- Busca de um circuito menos ruidoso possível.

5.2.1 O circuito amplificador de corrente

A maioria dos chips amplificadores de potência pode ser usada neste caso. A opção adotada neste trabalho foi o uso do driver linear L149V. O L149V é um amplificador de potência de propósito geral capaz de suprir correntes de até 4A com ganho unitário de voltagem (em uma <u>banda de 200KHz</u>) e proteções térmica e contra curtocircuito.



Figura 32 O CI L149V e sua pinagem

Para operar com os ±10 Volts disponibilizados pela placa PCI-6221, o L149V exige uma fonte simétrica DC que o alimente com, no mínimo, ±10 Volts conforme visualizado abaixo:

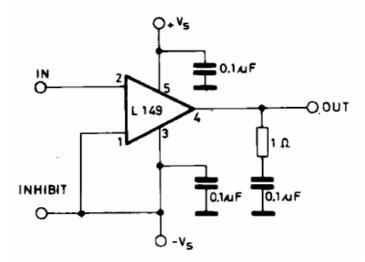


Figura 33 Esquema elétrico do circuito amplificador de corrente

Injetando-se um sinal PRBS em sua entrada e coletando-se sua saída, identificou-se o circuito de amplificação de corrente através do "System Identification Tool" do Matlab, obtendo-se que, para o levitador em questão, o circuito funciona como um amplificador de ganho aproximadamente constante e igual a K_v =0,94.

5.2.2 O circuito da fonte simétrica DC

Este circuito tem uma arquitetura simétrica e não necessita de maiores explicações: como qualquer fonte DC, ele possui um transformador de entrada, para reduzir os 110VAC da rede elétrica para a voltagem a ser retificada (+V, 0 e –V); uma ponte retificadora para a retificação da voltagem alternada e os filtros capacitivos para a redução do ripple.

A partir daí, a voltagem positiva +V é aplicada ao CI LM317T que é um regulador de tensão positiva ajustável que regula a tensão de saída conforme o divisor de tensão composto pelo potenciômetro P1 e o resistor R3. Assim, consegue-se no terminal positivo uma saída que varia entre +1,25VDC (que é a tensão de referência interna entre os pinos OUT e ADJUST do LM317T) e uma tensão menor em cerca de 3V da tensão +V aplicada em seu terminal IN. Por um processo análogo, a tensão negativa –V passa pelo CI regulador de tensão negativa ajustável LM337T garantindo uma saída entre -1,25V e (–V+3). Depois de construído, verificou-se que o ajuste obtido em suas saídas foi de ±(1,2V a 20VDC). Esta fonte simétrica foi projetada para alimentar o circuito amplificador de potência com até 1,5A de corrente.

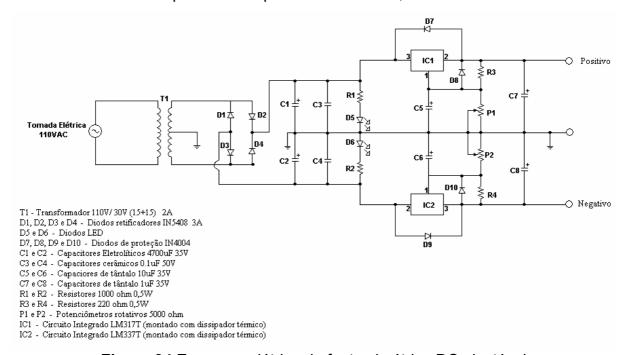


Figura 34 Esquema elétrico da fonte simétrica DC ajustável

Além de sua simplicidade, outra vantagem deste circuito é que, para atender amperagens maiores, pode ser facilmente modificado, aumentando-se a

amperagem de T1 e da ponte retificadora D1 a D4, aumentando-se a capacitância de C1 e C2 e substituindo-se o LM317T pelos LM150T (para 3A) ou LM138T (para 5A) e o LM337T pelo LM333 (para 3A).

5.3 O SIMULINK E O REAL-TIME WINDOWS TARGET

Para o projeto e aprimoramento do controlador, foi utilizada uma ferramenta bastante usual: o Simulink. Porém, através do toolbox "Real-Time Windows Target (RTWT)", pode-se fazer com que o modelo do controlador projetado em Simulink interaja efetivamente com a planta de levitação em tempo real, via placa PCI-6221, o que facilita muito o desenvolvimento do projeto. Assim, por se tratar de um protótipo inicial, ao invés de construir hardwares específicos, limitou-se à construção da fonte simétrica DC e do driver de potência e usou-se o Simulink para a implementação do controlador e demais circuitos acessórios (filtros analógicos, tabelas de conversão, ajustes de calibração, set-points, etc.).

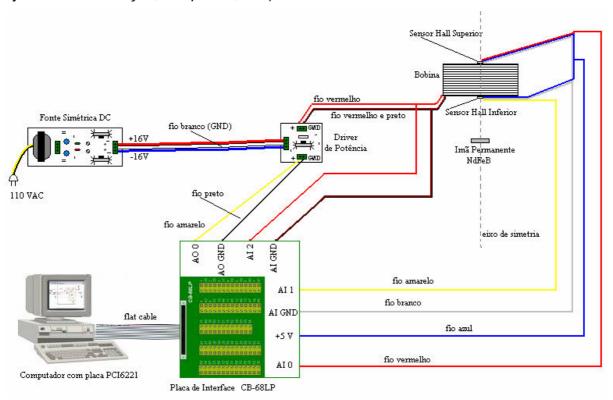


Figura 35 Diagrama funcional do sistema de levitação

As versões dos softwares usados são Matlab R2007b, Simulink 7.0, RTWT 3.0.0. Usou-se um Basic Sample Time de 0,001s.

Maiores informações de como configurar o Simulink para usar o RTWT podem ser adquiridas junto aos manuais constantes no site da Mathworks (www.mathworks.com).

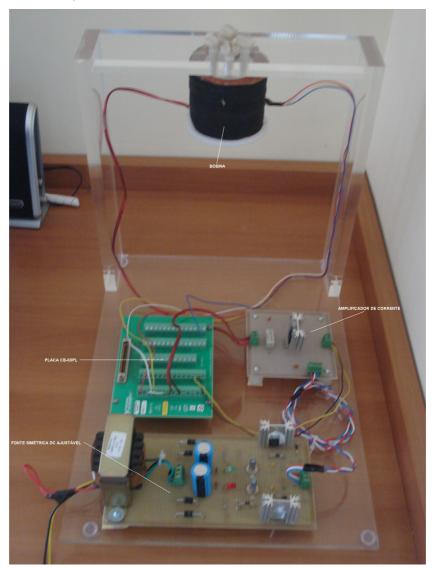


Figura 36 Bancada do sistema de levitação

6 SÍNTESE DOS CONTROLADORES

6.1 REQUISITOS DE PROJETO

Sendo a planta altamente não-linear e instável em malha aberta, a <u>preocupação principal</u> do projeto do controlador é garantir a <u>estabilidade</u> robusta do sistema. Entretanto, para o projeto do controlador do levitador magnético, são assumidos os seguintes requisitos de desempenho:

- Erro de regime estacionário nulo para entradas tipo degrau;
- Bom "tracking": erro de acompanhamento do sinal de referência não deve ser superior a 10% na faixa de freqüências inferiores a 0,1 Hz (ω ≤ 6.28 rad/s);
- Alto ganho de malha nas baixas freqüências de modo a adquirir robustez frente a incertezas, variação de parâmetros e distúrbios na entrada da planta;
- Atenuação maior que 99% para ruídos de medida acima de 100 Hz; e
- Banda passante em torno de 10 Hz que garante um bom tempo de resposta do sistema sem comprometer a capacidade de rejeitar ruídos.

Com os requisitos de projeto, é possível estabelecer-se as barreiras de desempenho (CRUZ, 1996). Seja o diagrama de blocos abaixo:

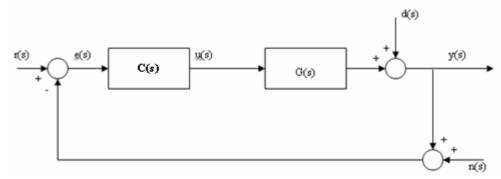


Figura 37 Diagrama de blocos de um sistema de controle genérico

Para o sistema representado, valem as duas expressões a seguir:

$$y(s) = \frac{G(s).C(s)}{1 + G(s).C(s)}.r(s) - \frac{G(s).C(s)}{1 + G(s).C(s)}.n(s) + \frac{1}{1 + G(s).C(s)}.d(s)$$
(94)

$$e(s) = \frac{1}{1 + G(s).C(s)}.r(s) - \frac{1}{1 + G(s).C(s)}.n(s) - \frac{1}{1 + G(s).C(s)}.d(s)$$
(95)

Para atender ao requisito de bom "tracking" do sinal de referência:

$$\frac{|e(jw)|}{|r(jw)|} = \frac{1}{|1 + G(jw).C(jw)|} \le 10\% \quad \text{(para } w \le 2.\pi.0,1 \text{ rad/s)} \Rightarrow \boxed{|1 + G(jw).C(jw)| \ge 10} \quad \text{(96)}$$

Como condição aproximada e suficiente, a ineq.(96) acima resulta em:

$$|G(jw).C(jw)| \ge 10 \Rightarrow \overline{|G(jw).C(jw)|} \ge 20dB \quad \text{(para } w \le 2.\pi.0,1 \text{ rad/s)}$$
 (97)

ou seja, o ganho da função de transferência de malha aberta do sistema compensado deve ser <u>superior a 20dB</u> para freqüências inferiores a 0,1Hz.

Em CRUZ (1996), é demonstrado que em baixas freqüências, um alto valor de |G(jw).C(jw)| também garante uma boa rejeição de perturbações d(s) bem como uma insensibilidade a variações de parâmetros na planta da forma abaixo:

Para rejeição de distúrbios:
$$\frac{|e(jw)|}{|d(jw)|} \le \alpha_d$$
 (para $w \le w_d$) $\Rightarrow |G(jw).C(jw)| \ge \frac{1}{\alpha_d}$ (98)

Para robustez à variações na planta:

$$\frac{\left|\frac{\delta y(jw)}{y(jw)}\right|}{\left|\frac{\delta G(jw)}{G(jw)}\right|} \le \alpha_{\delta} \quad (\text{para } w \le w_{\delta}) \Rightarrow \left|G(jw).C(jw)\right| \ge \frac{1}{\alpha_{\delta}}$$
(99)

Com relação aos erros de medida, os quais normalmente concentram sua energia em um espectro de freqüências superior se comparado às freqüências da planta, pode-se estabelecer a seguinte condição:

$$y(s) = -\frac{G(s).C(s)}{1 + G(s).C(s)}.n(s) \Rightarrow \boxed{\frac{y(jw)}{n(jw)}} = \boxed{\frac{G(jw).C(jw)}{1 + G(jw).C(jw)}} \le \alpha_n \text{ (para } w \ge w_n)$$
 (100)

Para uma rejeição 99% destes erros, deve-se ter $\frac{|y(jw)|}{|n(jw)|} \le 1\% = -40dB$.

Admitindo que $|G(jw).C(jw)| \ll 1$, a expressão |1+G(jw).C(jw)| se torna aproximadamente igual a 1. Como $\alpha_n \ll 1$, uma condição suficiente é garantir que:

$$|G(jw).C(jw)| \le \alpha_n \text{ (para } w \ge w_n) \Rightarrow \overline{|G(jw).C(jw)|} \le -40dB \text{ (para } w \ge 2\pi.100)$$
 (101)

Tais condições estabelecem barreiras de desempenho (vide figura a seguir), tanto em altas quanto em baixas freqüências, entre as quais a curva de |G(jw).C(jw)| deve se situar. Tal metodologia facilita muito a sintonia de compensadores, principalmente quando esta se faz por meio de ferramentas gráficas.

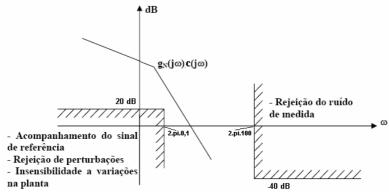


Figura 38 Barreiras de Desempenho

Vale neste momento a ressalva de que toda a formulação matemática envolvida neste trabalho partiu da análise <u>estática</u> das eq.(2) e (4) de Maxwell. É esperado, então, um erro de modelamento quando há movimentação do imã o que provoca uma variação de fluxo magnético sobre a bobina. Sendo esta variação rápida, como acontece durante os regimes transitórios rápidos, por força da Lei de Lenz (QUEVEDO, 1993), ela faz surgir efeitos como uma força contra-eletromotriz no enrolamento da bobina para compensar a variação deste fluxo. Estes efeitos afetam principalmente a força magnética incidente sobre o imã. Portanto, este erro de modelamento, crescente com a freqüência, faz surgir uma barreira de robustez de estabilidade em alta freqüência que a função de transferência em malha aberta deve superar como é ilustrado a seguir (CRUZ, 1996):

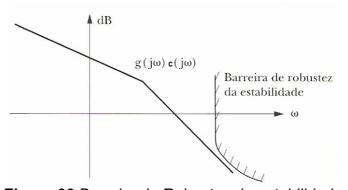


Figura 39 Barreira de Robustez de estabilidade

Neste trabalho, não foi feita a análise deste erro de modelagem de forma que não foi possível definir esta barreira. Entretanto, fica a sugestão para trabalhos futuros.

6.2 PROJETO DO CONTROLADOR PID

A função de transferência da Planta estendida G(s) obtida pela eq.(89) possui três pólos (-179,17 e $\pm 20,02$), sendo dois deles simétricos em relação ao eixo imaginário. O pólo $\pm 20,02$, por se localizar no semiplano direito, é o responsável pela instabilidade do sistema em Malha Aberta. O diagrama de Lugar das Raízes da figura 40 confirma tal fato.

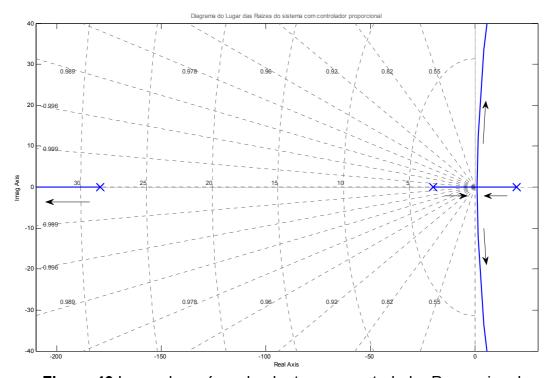


Figura 40 Lugar das raízes da planta com controlador Proporcional

Para estabilizar o sistema deve-se, portanto, acrescentar zeros no semiplano esquerdo para trazer o Lugar das Raízes para a esquerda. Acrescentar um zero significa dotar o controlador de uma ação derivativa de maneira que controladores clássicos como P (Proporcional) ou PI (Proporcional-Integral) não servem. O requisito de erro estacionário nulo à entrada degrau exige um pólo na origem (ou seja, um integrador), descartando-se o controlador PD. Portanto, será implementado um controlador PID o qual possui a seguinte função de transferência:

$$C(s) = \frac{\Delta V_c(s)}{E(s)} = K_p. \left(1 + \frac{1}{T_i.s} + \frac{T_d.s}{1 + \frac{T_d.s}{N_d}} \right), \text{ onde}$$
 (102)

 $\Delta V_c(s)$ e E(s) são, respectivamente, as transformadas de Laplace da saída do controlador e do sinal de erro. Neste modelo de controlador PID está incluso um filtro com constante de tempo T_d/N_d para a parte derivativa.

Esta mesma função de transferência pode ser escrita na forma de pólos e zeros:

$$C(s) = \frac{\Delta V_c(s)}{E(s)} = K_{PID} \cdot \frac{(s+z_1) \cdot (s+z_2)}{s \cdot (s+p_1)}$$
(103)

Através da ferramenta Sisotool do Matlab, foram feitas diversas simulações e ajustes no controlador de forma que o diagrama de Bode em Malha Aberta do sistema respeitasse as barreiras de desempenho chegando-se ao controlador abaixo:

$$\Rightarrow C(s) = 1300. \frac{(s+2).(s+18)}{s.(s+80)}$$
(104)

Com este controlador, os pólos em Malha Fechada são -205, -17,6±42,1, -15 e -4,06 comprovando a estabilidade do sistema por estarem todos localizados no semiplano esquerdo (vide quadrados vermelhos na figura 41).

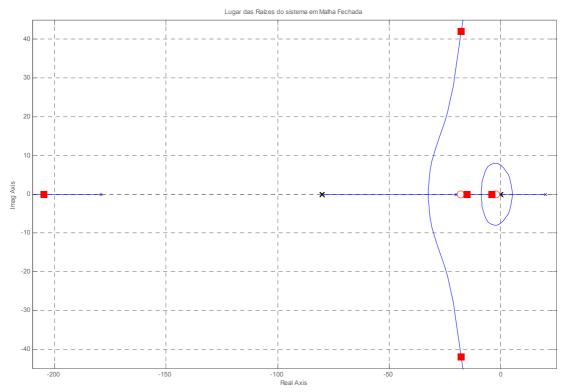


Figura 41 Lugar das raízes do sistema em Malha Fechada com K_{PID}=1300

Pelo Diagrama de Nyquist da função de transferência de Malha Aberta G(jw).C(jw) (figura 42) também se comprova esta estabilidade em razão de ocorrer apenas 1 envolvimento do ponto -1, mesma quantidade de pólos de G(jw).C(jw) no semiplano direito do plano s (OGATA, 2003).

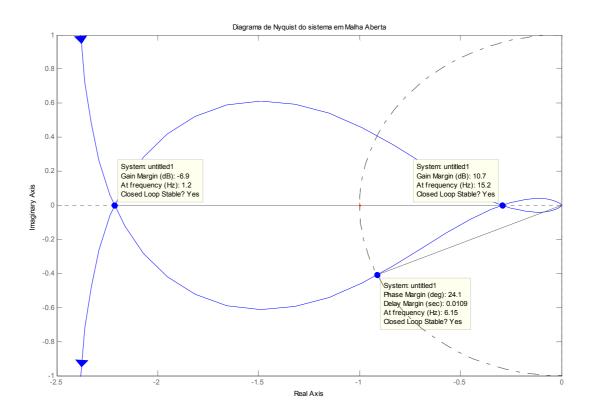


Figura 42 Diagrama de Nyquist de |G(jw).C(jw)|

Ainda pelo diagrama da figura 42, dois dados indicadores de estabilidade relativa, a Margem de Ganho (MG) e a Margem de Fase (MF), são obtidos (OGATA, 2003):

- $-6.9 \text{ dB (em } 1.2\text{Hz}) \le \text{MG} \le 10.7 \text{ dB (em } 15.2\text{Hz})$
- MF = $24,1^{\circ}$ (em 6,15Hz)

Ambos conjuntamente indicam uma boa robustez de estabilidade.

Pelo diagrama da figura 43, nota-se que a declividade da curva no trecho inicial de baixas freqüências é de cerca de 20dB/década indicando a existência de um pólo na origem. Isto atende ao requisito de erro nulo a entradas do tipo degrau.

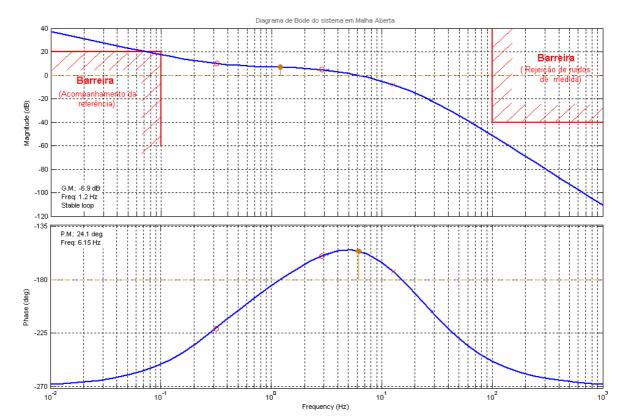


Figura 43 Diagrama de Bode de Malha Aberta

Analisando ainda o diagrama da figura 43, observa-se que, na freqüência de 0,1Hz, o módulo da função de transferência de Malha Aberta $|G(j.2.\pi.0,1).C(j.2.\pi.0,1)|$ é igual a 17,5735 dB não atendendo os 20 dB que a barreira de desempenho em baixa freqüência exigia. Por a eq.(97) ser apenas uma condição aproximada da eq.(96), esta restrição não significa necessariamente que o requisito de acompanhamento do sinal de referência não tenha sido alcançado.

De fato, pelo diagrama de Bode da figura 44, nota-se que o sistema em Malha Fechada responde com um ganho de 0,3048dB às entradas de 0,1Hz o que representa um erro de acompanhamento de apenas 3,57%.

Do diagrama da figura 44, ainda podem ser obtidos os seguintes dados:

- a frequência de canto (ou de -3dB) é de 12,24Hz atendendo ao critério de banda passante; e
- para um sinal de 100Hz, o sistema responde com um ganho de -51,12dB (ou 0,28%), ou seja, ruídos de medida nesta freqüência são atenuados em cerca de 99,72% o que é uma boa característica da planta.

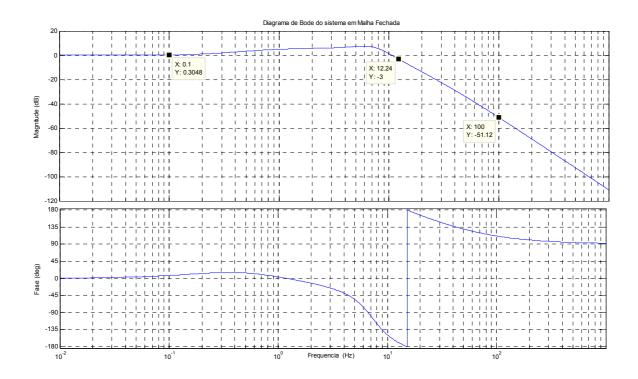


Figura 44 Diagrama de Bode para o sistema em Malha Fechada

Conforme demonstrado, todos os requisitos de projeto foram atendidos. Além deles, a figura 45 indica que o sistema responderá a um sinal tipo degrau unitário com um sobressinal de 115% e um tempo de acomodação (critério dos 5%) de 0,75s.

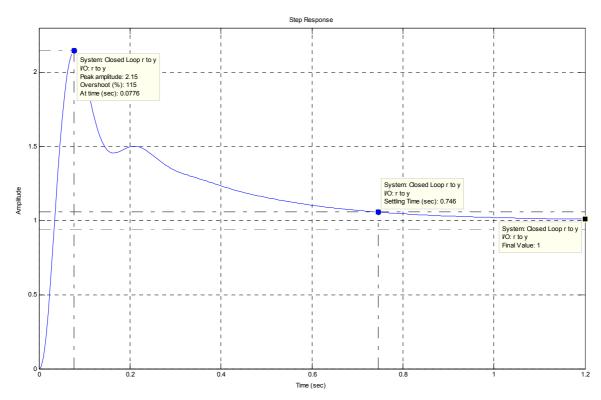


Figura 45 Resposta ao degrau unitário do sistema em Malha Fechada

7 RESULTADOS OBTIDOS E VALIDAÇÃO DO MODELO

7.1 MODELOS EM SIMULINK

Três modelos em Simulink foram construídos para simulação e testes do controlador em Malha Fechada com as plantas linearizada, não-linear e real:

Modelo com a planta linearizada da eq.(89):

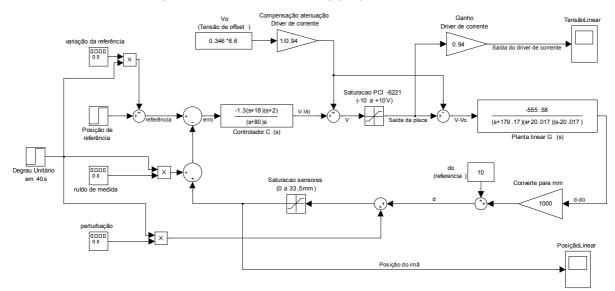


Figura 46 Modelo em Simulink do sistema em malha fechada com a planta linearizada

Modelo com a planta não-linear baseada na eq.(69):

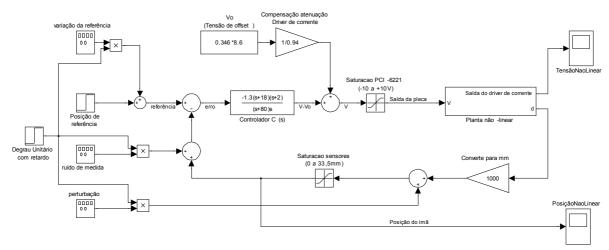


Figura 47 Modelo em Simulink do sistema em malha fechada com a planta nãolinear

Expandindo-se o subsistema "Planta não-linear" do modelo anterior, tem-se:

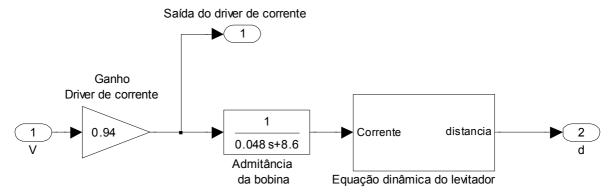


Figura 48 Subsistema "Planta não-linear"

O bloco "Equação dinâmica do levitador" da figura 48 também pode ser expandido em:

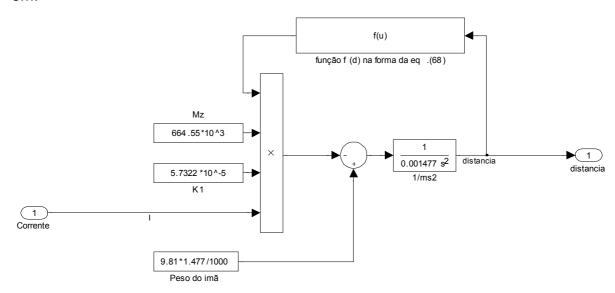


Figura 49 Subsistema "Equação dinâmica do levitador"

A representação acima corresponde exatamente à equação dinâmica da planta apresentada pela eq.(69) com a função f(d) no formato definido pela eq.(68).

Compensação atenuação PCI-6221 [auto] variação da referência Driver de corrente Tensão efetiva da bobina (Tensão de offset 0000 Analog 0.346 *8.6 1/0.94 (-10 a +10 V) -1.3(s+18)(s+2) Analog s(s+80) ra driver de corre PCI-6221 [auto] 000 Degrau Unitário com retardo Posição do imã distanci Sensores Hall 000 ×

• Modelo para controle em tempo real da planta de levitação magnética:

Figura 50 Modelo em Simulink para execução em tempo real com a planta de levitação

Expandindo-se o subsistema "Sensores Hall", obtém-se:

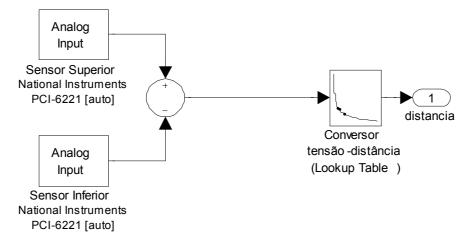


Figura 51 Subsistema "Sensores Hall"

A tensão de saída de cada sensor chega à placa PCI-6221 diretamente, sem o uso de qualquer tipo de filtro analógico A diferença das saídas dos sensores Hall instalados nas faces inferior e superior da bobina é calculada internamente pelo Simulink. Como visto na seção 4.4, a diferença destas saídas é proporcional ao campo densidade de fluxo magnético do imã permanente, o qual é não-linear em função da distância d. Para eliminar esta não-linearidade do sistema, optou-se pelo uso de uma tabela de conversão Look-up Table com os dados ensaiados constantes na Tabela 14.

7.2 GRÁFICOS DE RESULTADOS

O primeiro teste foi criado simplesmente para verificar se o levitador consegue fazer com que o imã atinja uma levitação estável. Para tal, ajusta-se a posição de levitação desejada (sinal de referência) para 10 mm e a posição inicial do imã para d=13mm. O ajuste da posição inicial do imã é feito através da rotação de uma peça de nylon (tipo "macho") em uma base fixa de nylon (tipo "fêmea") por meio de uma rosca interna (vide figura 52)



Figura 52 Base de nylon para ajuste da posição inicial do imã permanente

Observando-se a figura 53, comprova-se que o sistema alcança a levitação estável com erro de regime estacionário nulo, o que já atende a um dos requisitos de projeto. Com relação ao sinal de saída propriamente dito, percebe-se que ele está muito ruidoso. Em parte, isto pode ser atribuído aos ruídos de medida uma vez que os sinais dos sensores não recebem qualquer tipo de filtragem (vide figura 51) e ainda são usados pela tabela de conversão do Simulink em uma interpolação numérica. Esta situação já era prevista e assim foi mantida por não se desejar acrescentar qualquer dinâmica extra (como a de um filtro analógico) que pudesse comprometer a validação do modelo matemático deste levitador.

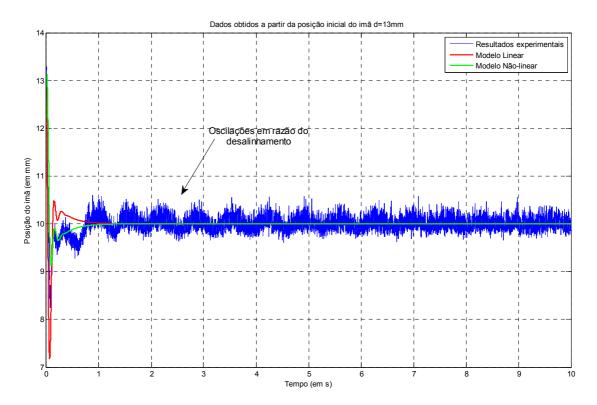


Figura 53 Curva de posição do imã com posição inicial 13mm

Ainda pela figura 53, podem-se perceber algumas oscilações que são significativas nos instantes iniciais e vão se atenuando ao longo do tempo. Elas ocorrem em virtude de um desalinhamento entre o eixo longitudinal central da bobina, o eixo longitudinal central do imã e o eixo vertical da gravidade. Todo o desenvolvimento matemático realizado neste trabalho pressupõe a simetria axial entre os dispositivos o que só ocorre com o preciso alinhamento entre eles. Os sensores também devem obedecer a este alinhamento para que não forneçam medidas erradas.

Pela eq.(64), foi visto que a força magnética sobre o imã tem sua direção determinada pelas linhas de campo da bobina as quais convergem para o centro da bobina. Assim, de grosso modo, pode-se afirmar que o imã vai sempre tentar alinhar o seu eixo com o eixo da bobina. Por exemplo, se o imã estiver deslocado radialmente ao eixo da bobina, será criada sobre si uma força restauradora que o trará para o eixo central; porém, por inércia, ele passa um pouco para o outro lado. A força restauradora inverte sua direção para trazê-lo novamente para o eixo central. Este movimento pendular dá origem a estes oscilações.

No levitador em questão, percebeu-se na prática um pequeno desalinhamento entre o eixo da bobina e o eixo da gravidade de modo que a bobina tenta alinhar o imã ao

seu eixo enquanto que a gravidade tenta trazê-lo de volta para a vertical. Esta disputa gera uma oscilação do imã que permanece até que seja alcançada uma posição de equilíbrio.

Para os próximos testes, primeiramente o imã era deixado em levitação por tempo suficiente para que todas as oscilações fossem atenuadas. Somente após ter atingido uma levitação estável é que os sinais de teste foram efetivamente aplicados.

O segundo teste serviu para analisar a resposta do sistema às entradas tipo degrau principalmente no tocante ao regime transitório uma vez que o erro de regime nulo já foi comprovado no teste anterior. Foram elaboradas duas situações: uma para o degrau positivo e outra para o degrau negativo.

Para o degrau positivo, o imã se encontrava levitando na posição de 10mm quando foi aplicado um degrau de amplitude 2mm. Para o degrau negativo, o imã também levitava a 10mm quando ajustou-se a referência para 9mm. Os gráficos da posição do imã e da tensão na bobina foram incluídos a seguir:

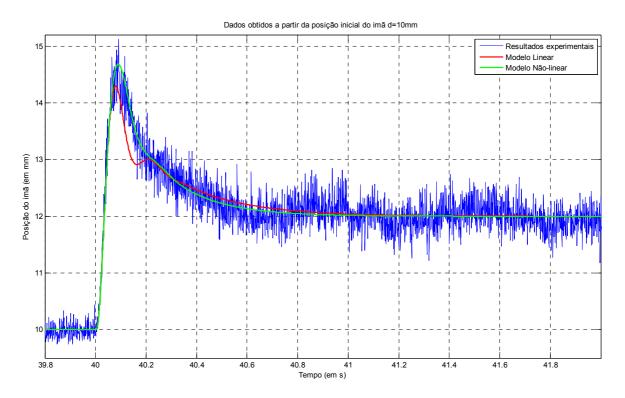


Figura 54 Curva da posição do imã em resposta ao degrau +2mm

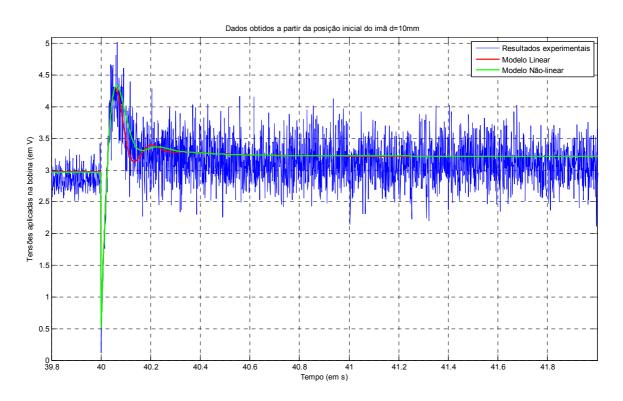


Figura 55 Curva da tensão na bobina em resposta ao degrau +2mm

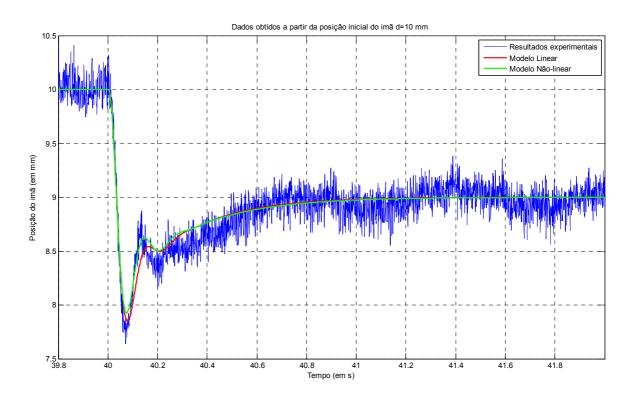


Figura 56 Curva da posição do imã em resposta ao degrau unitário negativo

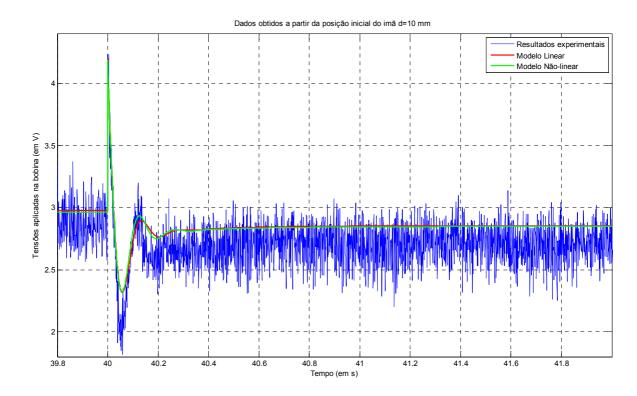


Figura 57 Curva da tensão na bobina em resposta ao degrau unitário negativo

Observando os quatro gráficos das figuras 54 a 57, verifica-se que os regimes transitórios dos dois modelos simulados (linear e não-linear) estão muito próximos entre si e, descontados os erros de medida e as oscilações por desalinhamento, também estão muito próximos aos transitórios dos resultados experimentais obtidos com a planta real.

Em razão das oscilações, é difícil precisar qual foi o tempo de acomodação; porém, certamente, ficou em torno de 1s.

Graficamente, o sobressinal obtido com a planta real foi maior do que o obtido com os dois modelos simulados. Para o degrau positivo (figura 54), a maior distância alcançada pelo imã foi de 15,12mm o que representa um sobressinal de 156%. Já para o degrau negativo (figura 56), a mínima distância ficou em 7,64mm gerando um sobressinal de 136%. A simulação com o modelo não-linear apresentou, respectivamente, 134% e 107%. O valor esperado por ocasião do projeto do controlador com o modelo linear era de 115% (vide figura 45).

Nos dois gráficos da tensão (figuras 55 e 57), pode-se visualizar o grande esforço de controle que é empreendido pelo controlador de modo que os ruídos de medida e a perturbação causada pelo desalinhamento dos eixos não perturbem a saída do sistema (posição do imã).

No terceiro teste de desempenho, objetivou-se verificar se o acompanhamento do sinal de referência ocorria conforme projetado. Para tal, após a levitação do imã na posição de referência ter se estabilizado, somou-se ao sinal de referência uma onda senoidal de freqüência 0,1Hz.

A curva experimental da figura 58, mesmo com os ruídos, apresentou um máximo erro de acompanhamento de cerca de 3,75% que é muito próximo do valor esperado de 3,57% que foi calculado na fase de projeto do controlador com o modelo linear. Já o resultado experimental da figura 59 apresentou um erro em torno de 10%.

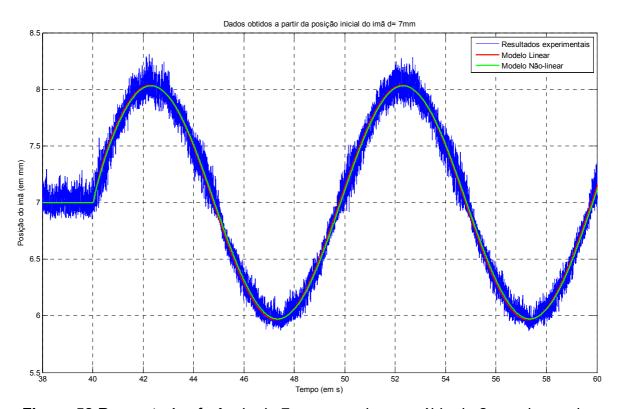


Figura 58 Resposta à referência de 7mm somada a senóide de 2mm pico-a-pico

Percebe-se que, nestes dois gráficos, apesar de uma maior dificuldade de seguir o sinal nas regiões mais distantes da bobina, o imã desloca-se fielmente ao sinal de referência dentro do limite de 10% estabelecido de forma que este requisito de desempenho foi atendido satisfatoriamente.

Em virtude dos ruídos, fica impraticável qualquer tentativa de se comparar o erro obtido com a planta real com àqueles obtidos através de simulação com os modelos linear e não-linear.

Uma característica bastante interessante alcançada com este tipo de levitador é a grande excursão (em torno de 14 mm) permitida ao imã em levitação controlada ao acompanhar o sinal de referência (vide figura 59).

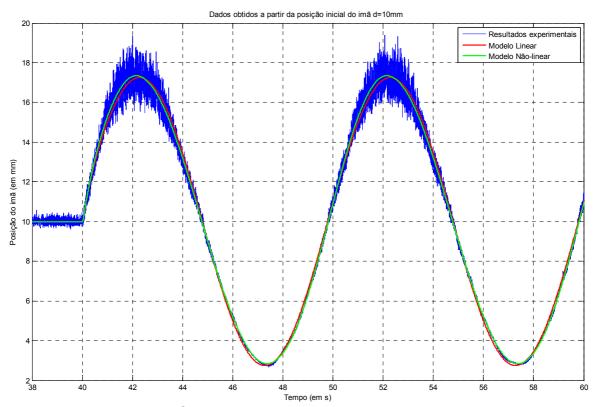


Figura 59 Resposta à referência de 10mm somada a senóide de 14mm pico-a-pico

No quarto teste de desempenho, manteve-se o imã levitando em 8 mm e, apesar de os sensores já apresentarem ruídos de medida, após 40s adicionou-se na saída dos sensores uma senóide de 4 mm pico-a-pico na freqüência de 100Hz.

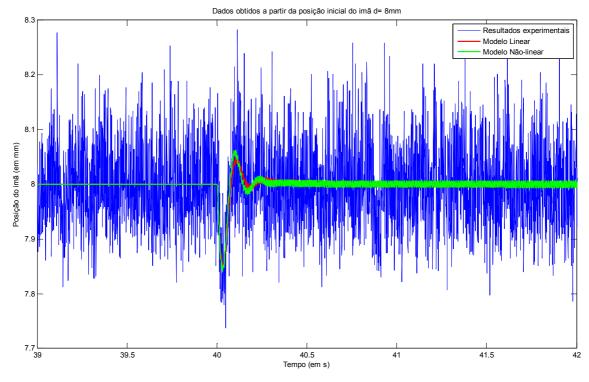


Figura 60 Resposta do sistema com ruídos de medida de 4mm pico-a-pico (100Hz)

Pelo gráfico da figura 60, excetuando o pequeno transitório ocorrido a partir de t=40s (transitório este que está presente também nas curvas simuladas dos modelos linear e não-linear), nenhuma alteração adicional na posição do imã é percebida na saída do sistema real em Malha Fechada com a adição do ruído de medida artificial. No entanto, olhando-se o gráfico da tensão da bobina constante na figura 61, percebese o esforço de controle efetuado pelo controlador para compensar este sinal indesejável.

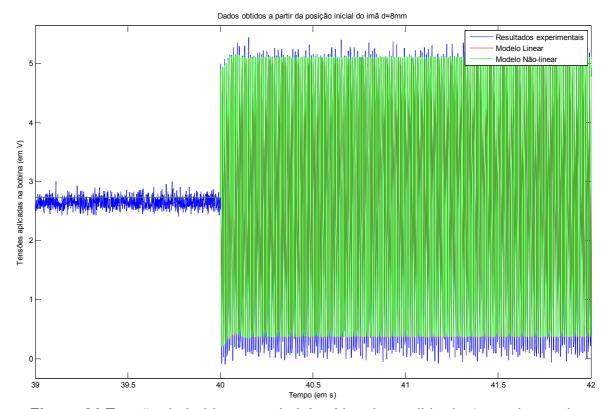


Figura 61 Tensão da bobina quando há ruídos de medida de 4mm pico-a-pico (100Hz)

Pode-se considerar que o critério de rejeição a ruídos de medida foi atendido conforme o esperado.

No quinto teste de desempenho, deseja-se avaliar o comportamento do sistema frente a perturbações na saída da planta. Para tal, manteve-se o imã levitando em 8mm e, após t=40s, adicionou-se uma perturbação senoidal simulada na posição axial do imã de 4mm pico-a-pico na freqüência de 0,1Hz. Com isto, obteve-se a seguinte resposta:

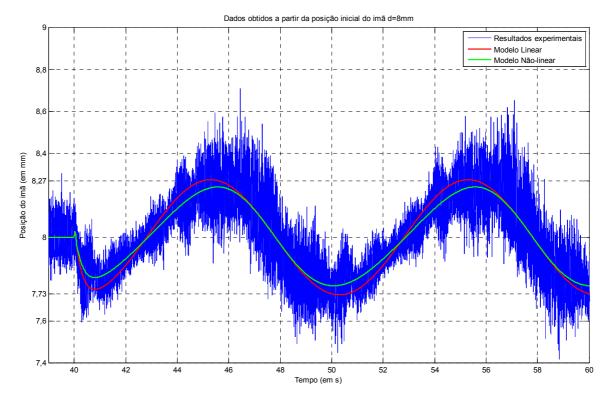


Figura 62 Resposta do sistema com uma perturbação na saída de 4mm pico-a-pico (0,1Hz)

Do Diagrama de Bode do sistema em Malha Aberta (figura 43), obtém-se que $G(j\omega).C(j\omega)=17,5735dB\angle-251,06^{\circ}\cong7,56\angle108,94^{\circ}\cong-2,45+7,15i$ para a freqüência f=0,1Hz. Da eq.(94), pode-se calcular a atenuação de perturbações na saída da planta para esta freqüência:

$$y(j2\pi f) = \frac{1}{\left|1 + G(j2\pi f).C(j2\pi f)\right|}.d(j2\pi f) = \frac{1}{\left|1 + \left(-2,45 + 7,15i\right)\right|}.d(j2\pi f) = \frac{1}{7,29}.d(j2\pi f) \cong 0,137.d(j2\pi f)$$

Desconsiderando-se os ruídos característicos da resposta deste sistema, percebese que o sistema real tende a um comportamento muito próximo ao obtido com os modelos simulados os quais acompanham a perturbação em seus 13,7%. Logicamente para perturbações de freqüências inferiores a 0,1Hz, a atenuação é maior.

Conforme verificado no Apêndice D, as 10 amostras de imã permanente apresentam variações em sua magnetização. Na seção 4.3.1, a planta do levitador foi obtida através da magnetização M_z de apenas uma dentre as 10 amostras (a amostra X). Entretanto, foram realizados testes para se verificar o grau de insensibilidade do

sistema às variações na planta. Nestes testes, o sistema em Malha Fechada garantiu a levitação estável de todas as 10 amostras.

Uma característica bastante interessante conseguida com este tipo de levitador é a sua capacidade de "puxar" o imã de distâncias relativamente grandes rumo a uma levitação estável. Isto pode ser comprovado pelo gráfico da figura 63 que mostra o imã sendo puxado de uma posição inicial *d*=30,0mm:

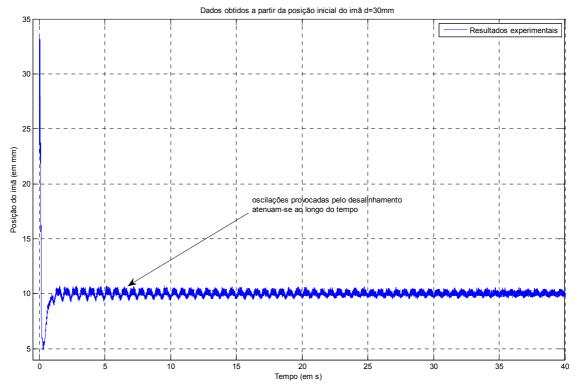


Figura 63 Curva de posição do imã com posição inicial 30mm

Uma outra característica observada é que o levitador apresentou uma boa rejeição a perturbações radiais (ou laterais) resultado da natureza do imã permanente de buscar o alinhamento do seu eixo magnético com as linhas de campo de maior intensidade, neste caso, presentes no eixo central da bobina. Isto é inerente aos levitadores por atração que gozam de instabilidade axial e de estabilidade radial. Para demonstrar esta propriedade, deixou-se o imã em levitação em 10mm até que alcançasse uma posição de equilíbrio livre de qualquer movimentação lateral. Então, com os dedos, deu-se um leve empurrão no imã no sentido radial. A curva a seguir demonstra esta capacidade de rejeição em que as oscilações provocadas são atenuadas ao longo do tempo:

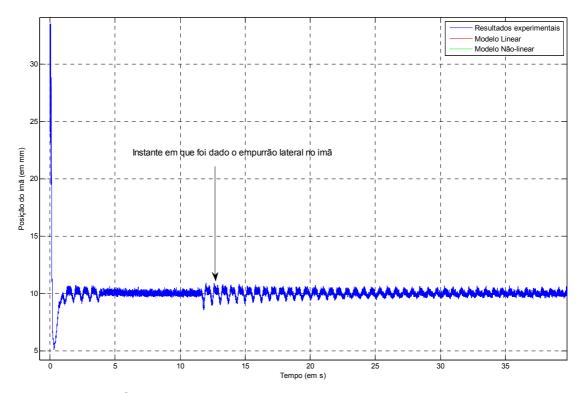


Figura 64 Curva de posição do imã em resposta à perturbação lateral

Como uma análise final de todos os testes feitos, considerou-se que todos os requisitos de projeto foram atendidos de modo que o controlador foi aprovado. Todos os resultados obtidos com a planta real, tanto em regime permanente quanto em regime transitório, ficaram muito próximos àqueles simulados com os modelos não-linear e linear, sendo que o modelo não-linear foi quem se aproximou mais o que já era de se esperar. Assim, não somente o modelo analítico da função de transferência da eq.(89) foi validado, mas também todas as hipóteses adotadas ao longo do seu desenvolvimento matemático.

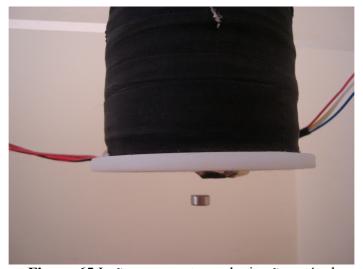


Figura 65 Imã permanente em levitação estável

8 CONCLUSÕES

Analisando os resultados alcançados, pode-se concluir que o modelo analítico foi validado satisfatoriamente. Em razão da grande proximidade dos resultados obtidos experimentalmente com àqueles obtidos por simulação computacional, consideramse aprovadas todas as hipóteses simplificadoras que foram adotadas ao longo da modelagem fenomenológica.

O método de determinação da magnetização do imã usado neste trabalho mostrouse extremamente eficiente colaborando sobremaneira para o sucesso dos resultados.

O controle PID implementado atendeu satisfatoriamente a todos os requisitos de estabilidade e de desempenho.

Boas características foram observadas no levitador usando imã permanente:

- a de conseguir a levitação estável a grandes distâncias, na ordem de 10 a 15mm, o que tem sido matéria de estudos recentes com outros tipos de levitadores e que gera uma boa expectativa e incentivo para a continuação deste trabalho;
- a de acompanhar o sinal de referência mesmo em grandes excursões (em torno de 14mm);
- a capacidade de iniciar a levitação mesmo quando o imã se encontra em distâncias relativamente grandes; e
- a de permitir a levitação estável do imã em um grande intervalo de distâncias em torno do ponto de operação bastando o simples ajuste do sinal de referência.

O uso de dois sensores Hall, um na face superior e o outro na face inferior da bobina, mostrou-se eficaz no tocante à redução do efeito dos campos magnéticos estranhos ao campo do imã permanente além de permitir a medição indireta da posição do imã em distâncias relativamente grandes à face da bobina.

O pequeno desalinhamento entre os eixos do carretel, bobina e da gravidade gerou perturbações na levitação do imã que podem ser minimizadas desde que atenção especial seja despendida na fase de enrolamento da bobina no carretel. O eixo dos sensores também deve obedecer ao alinhamento supracitado.

É importante ressaltar o grande potencial do toolbox Real-Time Windows Target do Matlab na fase de desenvolvimento e prototipagem do levitador em questão. Esta ferramenta, juntamente com a placa PCI-6221, tornaram possível a implementação física do sistema de uma maneira rápida e fácil, permitindo ajustes e otimização de parâmetros. Portanto, são uma boa sugestão para uso em bancadas didáticas.

Algumas sugestões para trabalhos futuros:

- estudar até quanto de redução na dimensão da bobina é tolerável para este modelo analítico de levitador;
- implementar um controle autônomo usando, por exemplo, um DSP;
- estudar o erro de modelagem existente neste modelo e, através de técnicas modernas como LQG/LTR ou H∞, melhorar o desempenho e aumentar a robustez do levitador; e
- elaborar uma análise comparativa entre o sistema usual de levitação de corpo ferromagnético e o levitador de imã permanente proposto neste trabalho.

REFERÊNCIA

ATHERTON, D. L. Maglev using permanent magnets, **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 16, n. l., p. 146-148, 1980.

BOBBIO, Scipione; DELFINO, Federico; GIRDINIO, Paola; MOLFINO, Paolo. Equivalent Sources Methods for the Numerical Evaluation of Magnetic Force with Extension to Nonlinear Materials. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 36, n. 4, p. 663-666, Jul. 2000.

BROWN, Gerald V.; FLAX, Lawrence; ITEAN, Eugene C.; LAURENCE, James C. **Axial and radial magnetic fields of thick, finite-length solenoids**. Cleveland, Ohio: Lewis Research Center (NASA). 1962. 98 p.

CHOI, Hong Soon; LEE, Se Hee; PARK, II Han. General Formulation of Equivalent Magnetic Charge Method for Force Density Distribution on Interface of Different Materials. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 41, n. 5, p. 1420-1423, Mai. 2005.

CHOI, Hong Soon; PARK, II Han; LEE, Se Hee. Force Calculation of Magnetized Bodies in Contact using Kelvin's Formula and Virtual Air-Gap. **IEEE Transactions on applied Superconductivity**, v. 16, n. 2, p. 1832-1835, Jun. 2006.

CHOI, Hong Soon; PARK, II Han; LEE, Se Hee. Generalized Equivalent Magnetizing Current Method for Total Force Calculation of Magnetized Bodies in Contact. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 42, n. 4, p. 531-534, Abr. 2006.

CRUZ, José Jaime. **Controle Robusto Multivariável: O método LQG/LTR**. São Paulo: Editora da Universidade de são Paulo (EDUSP), 1996. 163 p.

DAMANTE, Hélio José. **Cálculo de Forças sobre Ímãs Permanentes: uma análise do problema 23 do TEAM Workshop.** 2001. 71 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

DELFINO, Federico; MANELLA, Andrea; MOLFINO, Paolo; ROSSI, Mansueto. Numerical calculation of total force upon permanent magnets using equivalent source methods. **COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering**, v. 20, n. 2, p. 431-447, 2001.

EBIHARA, Daiki; SUZUKI, Toshinao; IMAGAWA, Xazuhiko. The reduction of lateral force by the arrangement of permanent magnets in the PM-type magnetic levitation device. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 23, n. 5, p. 2347-2349, Set.1987.

FURLANI, Edward P. **Permanent Magnet and Electromechanical Devices: Materials, Analysis, and Applications.** San Diego: Academic Press, 2001. 518 p.

HENNEBERGER, G.; SATTLER, Ph. K.; SHEN D. Nature of the equivalent magnetizing current for the force calculation. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 28, n. 2, p. 1068-1071, Mar. 1992.

IDA, Nathan; BASTOS, João Pedro Assumpção. Forces in Permanent Magnets: **TEAM Workshop Problem 23**. Okayama University, p.49-56, Japão, Mar. 1996.

KIM, Y. B.; HWANG, W. G.; KEE, C. D.; YI, H. B. Active vibration control of a suspension system using an electromagnetic damper. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering**, v. 215, n. 8, p. 865-873, 2001.

MARSDEN, Guy. Levitation! **Nuts and Volts Magazine**, v. 24, n. 9, p. 58–61, Set. 2003. Disponível em http://www.arttec.net/Press/N&V/Levitation.html.

MEDEIROS, L. H. de; REYNE, G.; MEUNIER, G. Comparison of Global Force Calculations on Permanent Magnets. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 34, n. 5, p. 3560-3563, Set. 1998.

MEDEIROS, L. H. de; REYNE, G.; MEUNIER, G. About the distribution of forces in permanent magnets. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 35, n. 3, p. 1215-1218. Mai. 1999.

MÜLLER, W. Comparison of different methods of force calculation. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 26, n. 2, p. 1058-1061, Mar. 1990.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de Controle Moderno**. Tradução Paulo Álvaro Maya. Revisão Técnica Fabrizio Leonardi; Heraldo Silveira Barbuy; José Barbosa Júnior; Marco Antonio Arouca. 4ª Edição, São Paulo: Prentice Hall, 2003. 788 p.

PARKER, Rollin J. **Advances in Permanent Magnetism**, New York: John Wiley & Sons, 1990. 337 p.

PERRELLA, Nuncio. Laboratório de controle utilizando processador digital de sinal (DSP). 2005. 94 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

QUEVEDO, Carlos Peres. **Eletromagnetismo**. São Paulo: Edições Loyola. 1993. 587 p.

REN, Z. Comparison of Different Force Calculation Methods in 3D Finite Element Modelling. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 30, n. 5, p.3471-3474, Set. 1994.

KABASHIMA, Takefumi; KAWAHARA, Atsushi; GOTO, Tadahiko. Force calculation using magnetizing currents. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 24, n. 1, p. 452-454, Jan. 1988.

WANG, Ing-Yann Albert; BUSCH-VISHNIAC, Ilene. A New Repulsive Magnetic Levitation Approach Using Permanent Magnets and Air-Core Electromagnets. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 30, n. 4, p. 1422-1432, Jul. 1994.

WANG, Tsih C.; TZENG, Yeou-Kuang. A new electromagnetic levitation system for rapid transit and highspeed transportation. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 30, n. 6, p. 4734-4736, Nov. 1994.

APÊNDICE A – Desenvolvimento analítico da expressão do campo magnético gerado pelo imã permanente

Na seção 2.3.2, foram obtidas as seguintes expressões para o campo potencial escalar magnetostático e para o vetor magnetização do imã de NdFeB:

$$\Psi_m(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{\text{Superficies do ima}} \frac{\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} \cdot dS \qquad \overrightarrow{M} \cong M_z \cdot \overrightarrow{u}_z$$

Em virtude da simetria axial, este problema pode ser simplificado a um sistema de 2 dimensões. Será usado o sistema de coordenadas cilíndricas da figura 7, sendo o ponto P' um ponto interno do volume magnetizado e o ponto P é onde se deseja calcular o campo magnético.

Então, tomando θ como referência zero($\theta = 0$):

$$\Psi_{m}(R,z) = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{Face \text{ Norte}} \frac{(M_{z} \cdot \overrightarrow{u_{z}}) \cdot \overrightarrow{u_{z}}}{|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'_{N}}|} \cdot dS_{N} + \frac{1}{4\pi} \cdot \iint_{Face \text{ Sul}} \frac{(M_{z} \cdot \overrightarrow{u_{z}}) \cdot (-\overrightarrow{u_{z}})}{|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'_{S}}|} \cdot dS_{S} \Rightarrow$$

$$\Psi_{m}(R,z) = \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\frac{D}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{M_{z}}{|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_{N}'}|} R'.d\theta'.dR' - \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\frac{D}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{M_{z}}{|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_{S}'}|} R'.d\theta'.dR' \Rightarrow$$

$$\Psi_{m}(R,z) = \frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{12} - 2.R.R'.\cos\theta'}} .dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{12} - 2.R.R'.\cos\theta'}} .dR' \right\} .d\theta'$$
 (105)

Desenvolvendo a integral acima em relação ao raio R':

$$\int_{0}^{\frac{D}{2}} + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R.\cos\theta'\right)^{2} + \left(R.\sin\theta'\right)^{2}}} .dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R.\cos\theta'\right)^{2} + \left(R.\sin\theta'\right)^{2}}} .dR' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R' - R.\cos\theta' + R.\cos\theta'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R.\cos\theta'\right)^{2} + \left(R.\sin\theta'\right)^{2}}} .dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R' - R.\cos\theta' + R.\cos\theta'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R.\cos\theta'\right)^{2} + \left(R.\sin\theta'\right)^{2}}} .dR' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R' - R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' + \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' \\ - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R' - R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2} + \left(R \cdot sen\theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos \theta'}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(R' - R \cdot \cos \theta'\right)^{2}}} . dR' - \int_{0}^{\frac{D}{2}} \frac{R \cdot \cos$$

Ambas as integrais têm soluções tabeladas, resultando:

$$\Psi_{m}(R,z) = \frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta' + R.\cos\theta' \cdot \ln\left|R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}\right|} \right\}_{0}^{\frac{D}{2}} .d\theta'$$

$$\left\{ -\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta' - R.\cos\theta' \cdot \ln\left|R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}\right|} \right\}_{0}^{\frac{D}{2}} .d\theta'$$

$$\left\{ -\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta' - R.\cos\theta' \cdot \ln\left|R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}\right|} \right\}_{0}^{\frac{D}{2}} .d\theta'$$

$$\left\{ -\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta' - R.\cos\theta' \cdot \ln\left|R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}\right|} \right\}_{0}^{\frac{D}{2}} .d\theta'$$

A integral da eq.(106) não pode ser resolvida analiticamente a não ser com o uso de funções matemáticas especiais como, por exemplo, integrais elípticas e expansão serial.

A intensidade magnética produzida pela matéria magnetizada é obtida da eq.(15).

Da eq.(35), tem-se que a componente axial (em z) da indução magnética H é obtida pela derivada direcional em z do Potencial Magnetostático $\overrightarrow{H}_{zimã}(R,z) = -\frac{\partial \Psi_m}{\partial z}.\overrightarrow{u_z}$:

$$H_{zim\hat{a}}(R,z) = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{12} - 2.R.R^{1}.\cos\theta^{1}}} + R.\cos\theta^{1} \cdot \frac{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{12} - 2.R.R^{1}.\cos\theta^{1}}}{R^{1} - R.\cos\theta^{1} + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{12} - 2.R.R^{1}.\cos\theta^{1}}} \right\}^{\frac{D}{2}} d\theta^{1} d\theta^$$

,o que resulta, depois de submetidos aos intervalos de integração:

$$H_{z^{im\hat{a}}}(R,z) = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{'2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \cdot \left(1 + \frac{R.\cos\theta'}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{'2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}\right) \right\} \int_{0}^{\frac{D}{2}} d\theta' \Rightarrow \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{'2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \left(1 + \frac{R.\cos\theta'}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{'2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}\right) \right\}_{0}^{\frac{D}{2}}$$

$$H_{zimd}(R,z) = -\frac{M_{z}}{4\pi} \int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'}} \cdot \left(1 + \frac{R.\cos\theta'}{\frac{D}{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} - \frac{z - \frac{L}{2}}{-R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'}} \right) - \frac{z - \frac{L}{2}}{-R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2}}} \right\} d\theta'$$

$$= \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'}} \left(1 + \frac{R.\cos\theta'}{\frac{D}{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2} - R.D.\cos\theta'} + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2}} \right) + \frac{z + \frac{L}{2}}{-R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2}}} \right\} d\theta'$$

Já a componente radial da indução magnética gerada pelo imã permanente é obtida da eq.(35) por: $\overrightarrow{H}_{r,imã}(R,z) = -\frac{\partial \Psi_m(R,z)}{\partial R}.\overrightarrow{u_r}$

$$H_{,imd}(R,z) = -\frac{M_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{R - R' \cdot \cos\theta'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} + \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R' + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R' + R'^2 - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R' + R' - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}} \right| + R \cdot \cos\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R' + R' - 2.R.R' \cdot \cos\theta'}$$

A expressão acima pode ser simplificada se fizermos a integração parcial das segunda e quinta integrais. Desenvolvendo a segunda integral, tem-se (a quinta integral é desenvolvida de maneira análoga):

$$\Rightarrow -\frac{M_z}{4\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \underbrace{\cos\theta'}_{j} \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| d\theta' \right|_0^{2\pi} = -\frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R'^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R'^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right| \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \left\{ \underbrace{sen\theta' \cdot \ln \left| R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}_{g} \right\}_0^{2\pi} - \frac{M_z}{4\pi} \cdot \frac{$$

$$-\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ sen\theta' + \frac{R.R'.sen\theta'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \right\} d\theta' \right\} = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \right\} d\theta' = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \right\} d\theta' = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \right\} d\theta' = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \right\} d\theta' = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \right\} d\theta' = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \right\} d\theta' = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \right\} d\theta' = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}}{R' - R.\cos\theta' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}} \right\} d\theta' = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{1 + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}{R' - R.\cos\theta' + \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}} \right\} d\theta' + \frac{R'}{2\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R.sen^{2}\theta' \cdot \left\{ \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}{R' - R' - R'} \right\} d\theta' + \frac{R'}{2\pi} \cdot \frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2} - 2.R.R'.\cos\theta'}}} d\theta' + \frac{R'}$$

Com a simplificação mencionada, obtém-se a seguinte expressão do campo radial:

$$H_{r,im\bar{a}}(R,z) = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{R' \cdot (R-R' \cdot \cos\theta') + R' \cdot R \cdot \sec^{2}\theta'}{\sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}} \right\} d\theta'$$

$$-\frac{R-R' \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z-\frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}{\sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'} + \sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}} d\theta'$$

$$-\frac{R' \cdot (R-R' \cdot \cos\theta') + R' \cdot R \cdot \sec^{2}\theta'}{R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}}{R' - R \cdot \cos\theta' - R \cdot \cos2\theta'}$$

$$-\frac{R-R' \cdot \cos\theta' - R \cdot \cos2\theta'}{R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}}{R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{\left(z+\frac{L}{2}\right)^{2} + R^{2} + R^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'}}}$$

Da eq.(107), para o campo ao longo do eixo axial, tem-se para a componente axial do campo magnético:

$$H_{z,imd}(0,z) = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2}} \cdot \left(1 + \frac{0}{\frac{D}{2} - R \cdot \cos \theta^{2} + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2}}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2}}} \right\} d\theta'$$

$$\Rightarrow -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2}}} - 1 - \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2}}} + 1 \right\} d\theta' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{z,imd}(0,z) = \frac{M_{z}}{2} \cdot \left\{ \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2}}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + \left(\frac{D}{2}\right)^{2}}} \right\}$$

$$(109)$$

E da eq.(108) tem-se que a componente radial é nula em todo o eixo central (como era esperado pela simetria axial):

$$H_{,im\bar{a}}(0,z) = -\frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} \left\{ +\frac{R' \cdot (-R' \cdot \cos\theta')}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \cdot \left(-\frac{R' \cdot \cos\theta'}{R' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right) + \frac{-R' \cdot \cos\theta'}{R' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right\} d\theta' \right\} \Rightarrow \frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R' \cdot \cos\theta' \cdot \left\{ -\frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \cdot \left(-\frac{R' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right) - \frac{-R' \cdot \cos\theta'}{R' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right\} d\theta' \right\} \Rightarrow \frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R' \cdot \cos\theta' \cdot \left\{ -\frac{R'}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \cdot \left(-\frac{R' + \sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right) - \frac{1}{R' + \sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right\} d\theta' \right\} \Rightarrow \frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R' \cdot \cos\theta' \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right\} d\theta' \right\} \Rightarrow \frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R' \cdot \cos\theta' \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right\} d\theta' \right\} \Rightarrow \frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R' \cdot \cos\theta' \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(z + \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right\} d\theta' \Rightarrow \frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R' \cdot \cos\theta' \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right\} d\theta' \Rightarrow \frac{M_{z}}{4\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi} R' \cdot \cos\theta' \cdot \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} - \frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right\} d\theta' \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} \right\} d\theta' \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(z - \frac{L}{2}\right)^{2} + R'^{2}}} d\theta$$

APÊNDICE B – Desenvolvimento analítico da expressão do campo magnético gerado pelo enrolamento da bobina

B1. EXPRESSÃO GERAL:

Conforme visto na seção 2.4.2, o campo magnético gerado pelo enrolamento é obtido pela fórmula de Biot-Savart abaixo:

$$\overrightarrow{B}_{bobina}(R,Z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_{rol. da} \left(\frac{\overrightarrow{J}(r') \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|^3} \right) \cdot dV' =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi \cdot h \cdot (d_2 - d_1)} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{\cos \theta' \cdot (Z - Z') \cdot \overrightarrow{u_r} + sen\theta' \cdot (Z - Z') \cdot \overrightarrow{u_\theta} + (R' - R \cdot \cos \theta') \cdot \overrightarrow{u_z}}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^2} \right)^3} \right) \cdot R' \cdot d\theta' \cdot dR' \cdot dZ'$$

A seguir, segue o desenvolvimento algébrico para a definição das três componentes de $\overrightarrow{B}_{bobina}(R,Z)$.

B1.1. Cálculo do campo azimutal:

$$\vec{B}_{\theta_{bobina}}(R,Z) = \frac{\mu_{0}.N.I}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{sen\theta'.(Z-Z').\overrightarrow{u_{\theta}}}{\left(\sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}}\right)^{3}} \cdot R'.d\theta'.dR'.dZ' \Rightarrow
= \frac{\mu_{0}.N.I}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \frac{(Z-Z').\overrightarrow{u_{\theta}}}{R} \left(-\frac{1}{\sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}}} \right)_{0}^{2\pi} \cdot dR'.dZ' \Rightarrow
\Rightarrow \overline{B}_{\theta bobina}(R,Z) = 0.\overrightarrow{u_{\theta}}$$
(111)

, o que era de se esperar em razão da densidade de corrente ser azimutal!

B1.2. Cálculo do campo axial:

$$\vec{B}_{z_{bobina}}(R,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{(R' - R.\cos\theta').\vec{u_z}}{(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2})^3} \cdot R'.d\theta'.dR'.dZ'$$

Vamos resolver as integrais passo-a-passo. Primeiramente, a integral em Z' deve ser calculada através de substituição de variáveis:

$$\int_{-h}^{0} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^2}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{0} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Z - Z'}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}}\right)^2}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}\right)^3} \cdot dZ' = \int_{-h}^{h} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}$$

Fazendo a substituição de variável:
$$tg(u) = \frac{Z - Z'}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta'}}$$
 e $\sec^2(u).du = -\frac{dZ'}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta'}}$

$$\Rightarrow -\int_{-h}^{0} \frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(R^{2} + R'^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Z - Z'}{\sqrt{R^{2} + R'^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}}\right)^{2}}\right)^{3} \cdot \frac{dZ'}{\sqrt{R^{2} + R'^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(R^{2} + R'^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'\right)} \cdot \int_{u_{1}}^{u_{2}} \frac{\sec^{2}(u)}{\sqrt{1 + tg^{2}(u)}} \cdot du = -\frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(R^{2} + R'^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'\right)} \cdot \int_{u_{1}}^{u_{2}} \frac{\sec^{2}(u)}{\sqrt{\sec^{2}(u)}} \cdot du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(R^{2} + R'^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'\right)} \cdot \int_{u_{1}}^{u_{2}} \cos(u) \cdot du = -\frac{R' \cdot (R' - R \cdot \cos \theta')}{\left(R^{2} + R'^{2} - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta'\right)} \cdot sen(u) \Big|_{u_{1}}^{u_{2}}$$

Voltando às variáveis originais:

$$\Rightarrow B_{z_{bobins}}(R,Z) = -\frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{R'.(R' - R.\cos\theta').(Z - Z')}{\left(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta'\right).\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2}} .d\theta'.dR' \Big|_{-h}^{0}$$
(112)

Agora, para resolver a integral em R', deve-se fazer a substituição de variáveis $x = R' - R \cdot \cos \theta'$ e dx = dR':

$$\frac{\frac{d_2}{2}}{\sqrt{\frac{d_1}{2}(R^2 + R^{12} - 2.R.R'.\cos\theta').(Z - Z')}} \cdot \frac{R'.(R' - R.\cos\theta').(Z - Z')}{\sqrt{R^2 + R^{12} - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2}} \cdot dR' = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x + R.\cos\theta').x.(Z - Z')}{(R^2.sen^2\theta' + x^2).\sqrt{R^2.sen^2\theta' + x^2 + (Z - Z')^2}} \cdot dx$$

Após algumas manipulações algébricas, fazendo n = (Z - Z') e $a = R.sen\theta'$, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{(x+R.\cos\theta').x.(Z-Z')}{(R^2.sen^2\theta'+x^2).\sqrt{R^2.sen^2\theta'+x^2+(Z-Z')^2}}.dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x+R.\cos\theta').x.n}{(a^2+x^2).\sqrt{a^2+x^2+n^2}}.dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_{1}}^{x_{2}} \frac{(x^{2} + a^{2}) \cdot n}{(a^{2} + x^{2}) \cdot \sqrt{a^{2} + x^{2} + n^{2}}} \cdot dx - \int_{x_{1}}^{x_{2}} \frac{a^{2} \cdot n}{(a^{2} + x^{2}) \cdot \sqrt{a^{2} + x^{2} + n^{2}}} \cdot dx + \int_{x_{1}}^{x_{2}} \frac{R \cdot x \cdot \cos \theta' \cdot n}{(a^{2} + x^{2}) \cdot \sqrt{a^{2} + x^{2} + n^{2}}} \cdot dx$$

A integral (I) já tem sua resolução tabelada e é igual a :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{n}{\sqrt{a^2 + x^2 + n^2}} . dx = n . \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2 + n^2}\right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Voltando a integral (I) às variáveis originais:

$$\Rightarrow (Z - Z') \cdot \ln \left(R' - R \cdot \cos \theta' + \sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^2} \right) \Big|_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}}$$
 (113)

Integrando (II), via substituição de variáveis: $tg(u) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + n^2}}$ e $\sec^2(u).du = \frac{dx}{\sqrt{a^2 + n^2}}$

$$-\int_{x_1}^{x_2} \frac{a^2 \cdot n}{\left(a^2 + x^2\right) \cdot \sqrt{a^2 + x^2 + n^2}} \cdot dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{a^2 \cdot n}{\left(a^2 + x^2\right) \cdot \sqrt{a^2 + n^2}} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + n^2}}\right)^2} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_{u_1}^{u_2} \frac{a^2 \cdot n \cdot \sec^2(u)}{\left(a^2 + tg^2(u) \cdot \left(a^2 + n^2\right)\right) \cdot \sqrt{1 + tg^2(u)}} \cdot du = -\int_{u_1}^{u_2} \frac{a^2 \cdot n \cdot \sec(u)}{\left(a^2 \cdot \sec^2(u) + tg^2(u) \cdot n^2\right)} \cdot du = -\int_{u_1}^{u_2} \frac{a^2 \cdot n \cdot \cos(u)}{\left(a^2 + sen^2(u) \cdot n^2\right)} \cdot du$$

Fazendo uma nova substituição de variáveis:

$$v = \frac{n.sen(u)}{a}$$
 e $dv = \frac{1}{a}$

$$-\int_{u_{1}}^{u_{2}} \frac{a^{2}.n.\cos(u)}{\left(a^{2} + sen^{2}(u).n^{2}\right)}.du = -\int_{u_{1}}^{u_{2}} \frac{n.\cos(u)}{\left(1 + \left(\frac{sen(u).n}{a}\right)^{2}\right)}.du = -\int_{v_{1}}^{v_{2}} \frac{a}{\left(1 + v^{2}\right)}.dv = -a.arctg(v)\Big|_{v_{1}}^{v_{2}}$$

Voltando a integral (II), passo-a-passo, às variáveis originais:

$$-a.arctg(v)\Big|_{v_{1}}^{v_{2}} = -a.arctg(\frac{n.sen(u)}{a})\Big|_{u_{1}}^{u_{2}} = -R.sen\theta'.arctg\left(\frac{(Z-Z').\frac{X}{\sqrt{a^{2}+n^{2}+x^{2}}}}{R.sen\theta'}\right)\Big|_{x_{1}}^{x_{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R.sen\theta'.arctg\left(\frac{(Z-Z').(R'-R.\cos\theta')}{R.sen\theta'.\sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}}}\right)\Big|_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}}$$

$$(114)$$

E por fim, integra-se a expressão (III), adotando a seguinte variável: $w^2 = a^2 + x^2 + n^2$ e w.dw = x.dx

$$\int_{x_{1}}^{x_{2}} \frac{R.x.\cos\theta'.n}{\left(a^{2}+x^{2}\right).\sqrt{a^{2}+x^{2}+n^{2}}}.dx = \int_{w_{1}}^{w_{2}} \frac{R.\cos\theta'.n.w}{\left(w^{2}-n^{2}\right).\sqrt{w^{2}}}.dw = \int_{w_{1}}^{w_{2}} \frac{R.\cos\theta'.n}{\left(w^{2}-n^{2}\right)}.dw = -R.\cos\theta'.\int_{\frac{w_{1}}{2}}^{w_{2}} \frac{n}{\left(n^{2}-w^{2}\right)}.dw \Longrightarrow \frac{1}{\left(a^{2}+x^{2}\right).\sqrt{a^{2}+x^{2}+n^{2}}}.dx = \int_{w_{1}}^{w_{2}} \frac{R.\cos\theta'.n.w}{\left(w^{2}-n^{2}\right).\sqrt{w^{2}}}.dw = -R.\cos\theta'.\int_{\frac{w_{1}}{2}}^{w_{2}} \frac{n}{\left(n^{2}-w^{2}\right)}.dw \Longrightarrow \frac{1}{\left(n^{2}+x^{2}\right).\sqrt{a^{2}+x^{2}+n^{2}}}.dx = \int_{w_{1}}^{w_{2}} \frac{R.\cos\theta'.n.w}{\left(w^{2}-n^{2}\right).\sqrt{w^{2}}}.dw = -R.\cos\theta'.\int_{\frac{w_{1}}{2}}^{w_{2}} \frac{n}{\left(n^{2}-w^{2}\right)}.dw = -R.\cos\theta'.\int_{\frac{w_{1}}{2}}^{w_{2}} \frac{n}{\left(n^{2}-w^{2}\right)}.dw = -R.\cos\theta'.\int_{\frac{w_{2}}{2}}^{w_{2}} \frac{n}{\left(n^{2}-w^{2}\right)}.dw = -R.\cos\theta'.\int_{\frac{w_{1}}{2}}^{w_{2}} \frac{n}{\left(n^{2}-w^{2}\right)}.dw = -R.\cos\theta'.\int_{\frac{w_{2}}{2}}^{w_{2}} \frac{n}{\left(n^{2}-w^{2}\right)}.dw = -R.\cos\theta'.$$

$$\Rightarrow -R.\cos\theta'.\cot nh^{-1}\left(\frac{w}{n}\right)\Big|_{w_1}^{w_2} = -R.\cos\theta'.\frac{1}{2}.\ln\left(\frac{\frac{w}{n}+1}{\frac{w}{n}-1}\right)\Big|_{w_1}^{w_2} = \frac{R.\cos\theta'}{2}.\ln\left(\frac{w-n}{w+n}\right)\Big|_{w_1}^{w_2}$$

Voltando, passo-a-passo, às variáveis originais, tem-se:

$$\frac{R.\cos\theta'}{2}.\ln\left(\frac{w-n}{w+n}\right)\Big|_{w_{1}}^{w_{2}} = \frac{R.\cos\theta'}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{a^{2}+x^{2}+n^{2}}-n}{\sqrt{a^{2}+x^{2}+n^{2}}+n}\right)\Big|_{x_{1}}^{x_{2}} \Rightarrow
\Rightarrow \frac{R.\cos\theta'}{2}.\ln\left(\frac{\sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}}-(Z-Z')}{\sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}}+(Z-Z')}\right)\Big|_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \tag{115}$$

Juntando as expressões (I), (II) e (III), temos a expressão para o campo $\vec{B}_{abbina}(R,Z)$:

$$\Rightarrow B_{zbobina}(R,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \begin{cases} -(Z - Z').\int_0^{2\pi} \ln\left(R' - R.\cos\theta' + \sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2}\right).d\theta' \\ + R\int_0^{2\pi}.sen\theta'.arctg\left(\frac{(Z - Z').(R' - R.\cos\theta')}{R.sen\theta'.\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2}}\right).d\theta' \\ - \frac{R}{2}.\int_0^{2\pi}\cos\theta'.\ln\left(\frac{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2} - (Z - Z')}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2} + (Z - Z')}\right).d\theta' \end{cases} \right|_{Z' = -h} |_{R'} = \frac{d_1}{2}$$

Ainda é possível uma simplificação na expressão acima através da resolução parcial da 3ª integral:

$$+\frac{R}{2} \cdot \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos \theta'}{\int_{0}^{1}} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{R^{2} + R^{12} - 2.R.R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}} - (Z - Z')}{\sqrt{R^{2} + R^{12} - 2.R.R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}} + (Z - Z')} \right) . d\theta' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +\frac{R}{2} \cdot \left\{ -\int_{0}^{2\pi} sen\theta' \cdot \left(\frac{\frac{RR' \cdot sen\theta'}{\sqrt{R^{2} + R^{12} - 2.R.R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}} + (Z - Z')}{\sqrt{R^{2} + R^{12} - 2.R.R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}} - (Z - Z')} \right) . d\theta' + \right\} \Rightarrow$$

$$+ \frac{RR' \cdot sen\theta'}{\sqrt{R^{2} + R^{12} - 2.R.R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}} - (Z - Z')} . d\theta' + \left\{ -\int_{0}^{2\pi} sen\theta' \cdot \left(\frac{\frac{RR' \cdot sen\theta'}{\sqrt{R^{2} + R^{12} - 2.R.R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}} - (Z - Z')} {\sqrt{R^{2} + R^{12} - 2.R.R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}} + (Z - Z')} \right) . d\theta' + \left\{ -\int_{0}^{2\pi} sen\theta' \cdot \left(\frac{\frac{RR' \cdot sen\theta'}{\sqrt{R^{2} + R^{12} - 2.R.R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}} + (Z - Z')} {\sqrt{R^{2} + R^{12} - 2.R.R' \cdot \cos \theta' + (Z - Z')^{2}} + (Z - Z')} \right) . d\theta'$$

$$\Rightarrow -\frac{R^{2}.R'}{2} \cdot \int_{0}^{2\pi} \frac{sen^{2}\theta'}{\sqrt{R^{2} + R'^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta' + (Z - Z')^{2}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{R^{2} + R'^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta' + (Z - Z')^{2}} - (Z - Z')} - \frac{1}{\sqrt{R^{2} + R'^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta' + (Z - Z')^{2}} + (Z - Z')} \right) . d\theta' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -R^{2}.R' \cdot \int_{0}^{2\pi} \frac{sen^{2}\theta' \cdot (Z - Z')}{\left(R^{2} + R'^{2} - 2.R.R' \cdot \cos\theta' + (Z - Z')^{2} - (Z - Z')\right)} . d\theta'$$

A expressão de $B_{zbobina}(R,Z)$ fica da seguinte forma:

$$B_{z \text{ bobina}}(R, Z) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi \cdot h \cdot \left(d_2 - d_1\right)} \cdot \begin{cases} (Z' - Z) \cdot \int_0^{2\pi} \ln\left(R' - R \cdot \cos\theta' + \sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta' + (Z - Z')^2}\right) \cdot d\theta' + \\ + R \int_0^{2\pi} \cdot \operatorname{sen}\theta' \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{(Z - Z') \cdot \left(R' - R \cdot \cos\theta'\right)}{R \cdot \operatorname{sen}\theta' \cdot \sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta' + (Z - Z')^2}}\right) \cdot d\theta' + \\ + R^2 \cdot R' \cdot (Z - Z') \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta'}{\left(R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta'\right) \cdot \sqrt{R^2 + R'^2 - 2 \cdot R \cdot R' \cdot \cos\theta' + (Z - Z')^2}} \cdot d\theta' \end{cases}$$

B1.3. Cálculo do campo radial:

$$\vec{B}_{rbobina}(R,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\theta'.(Z - Z').\vec{u_r}}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2}\right)^3} \cdot R'.d\theta'.dR'.dZ'$$

Inicia-se resolvendo a integral em Z':

$$B_{r,bobina}(R,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_0^{2\pi} \cos\theta'.d\theta' \cdot \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} R'.dR' \cdot \int_{-h}^{0} \frac{(Z - Z').dZ'}{\left(\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2}\right)^3} \Rightarrow B_{r,bobina}(R,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_0^{2\pi} \cos\theta'.d\theta' \cdot \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \frac{R'}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2}} \Big|_{-h}^{0} dR'$$

Após, procede-se a resolução da integral em R':

$$B_{rbobina}(R,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_0^{2\pi} \cos\theta' . d\theta' \cdot \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \frac{R'}{\sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z - Z')^2}} \bigg|_{-h}^{0} dR' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_{0}.N.I}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \int_{0}^{2\pi} \cos\theta' .d\theta' \cdot \int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \left(\frac{R'-R.\cos\theta'}{\sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}}} + \frac{R.\cos\theta'}{\sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}}} \right) dR' \bigg|_{Z'=-h}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_{0}.N.I}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \int_{0}^{2\pi} \cos\theta' .d\theta' \cdot \left(\frac{\sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}}}{\sqrt{R^{2}.sen^{2}\theta'+(R'-R.\cos\theta')^{2}+(Z-Z')^{2}}} \right) dR' \bigg|_{Z'=-h}^{\infty}$$

$$= \frac{\mu_{0}.N.I}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \int_{0}^{2\pi} \cos\theta' \cdot \left(\frac{\sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}}}{\sqrt{R^{2}.sen^{2}\theta'+(R'-R.\cos\theta')^{2}+(Z-Z')^{2}}} \right) d\theta' \bigg|_{R'=-h}^{\infty}$$

$$\Rightarrow B_{,boblina}(R,Z) = \frac{\mu_{0}.N.I}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} \left(\int_{0}^{2\pi} \cos\theta' \cdot \sqrt{R^{2}+R'^{2}-2.R.R'.\cos\theta'+(Z-Z')^{2}} d\theta' \right) \bigg|_{R'=-h}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \left(\int_{0}^{2\pi} \frac{d_{1}}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} d\theta' \cdot \int_{0}^{2\pi} \frac{d_{2}}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} d\theta' \cdot \int_{0}^{2\pi} \frac{d_{2}}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} d\theta' \cdot \int_{0}^{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} d\theta' \cdot \int_{0}^{2\pi.h.(d_{2}$$

B2. EXPRESSÃO DO CAMPO AO LONGO DO EIXO AXIAL:

Fazendo R=0 na fórmula de Biot-Savart obtida na seção 2.4.2, tem-se:

$$\vec{B}_{bobina}(0,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_2}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{\cos\theta'.(Z - Z').\overrightarrow{u_r} + sen\theta'.(Z - Z').\overrightarrow{u_\theta} + R'.\overrightarrow{u_z}}{\left(\sqrt{R'^2 + (Z - Z')^2}\right)^3} \right) R'.d\theta'.dR'.dZ'$$
(119)

A seguir segue o desenvolvimento algébrico para a definição das três componentes de $\overrightarrow{B}_{bobina}(0,Z)$.

B2.1. Cálculo do campo azimutal:

$$\vec{B}_{\theta_{bobina}}(R,Z) = \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{sen\theta'.(Z - Z').\overrightarrow{u_{\theta}}}{\left(\sqrt{R'^2 + (Z - Z')^2}\right)^3} \right) . R'.d\theta'.dR'.dZ' \implies$$

$$= \frac{\mu_0.N.I}{2\pi.h.(d_2 - d_1)} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_1}{2}}^{\frac{d_2}{2}} \frac{(Z - Z').R'.\overrightarrow{u_\theta}}{\left(\sqrt{R'^2 + (Z - Z')^2}\right)^3} \cdot \left(-\cos\theta'\right) \Big|_{0}^{2\pi}.dR'.dZ' \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{B}_{\theta_{bobina}}(0, Z) = 0.\overrightarrow{u_\theta}}$$
(120)

B2.2. Cálculo do campo axial:

$$\overrightarrow{B}_{z_{bobina}}\left(0,Z\right) = \frac{\mu_{0}.N.I}{2\pi.h.\left(d_{2}-d_{1}\right)}. \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{R^{12} \overrightarrow{u_{z}}}{\left(\sqrt{R^{12}+(Z-Z')^{2}}\right)^{3}}.d\theta'.dR'.dZ' = \frac{\mu_{0}.N.I}{h.\left(d_{2}-d_{1}\right)}. \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \frac{R^{12} \overrightarrow{u_{z}}}{\left(\sqrt{R^{12}+(Z-Z')^{2}}\right)^{3}}.dR'.dZ' = \frac{\mu_{0}.N.I}{h.\left(d_{2}-d_{1}\right)}. \int_{-h}^{0} \frac{d_{2}}{d_{1}} \frac{d^{2}}{d_{1}} \frac{d^{$$

Resolvendo a integral em R' por integração parcial:

$$\int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \frac{R'^{2}}{\left(\sqrt{R'^{2} + (Z - Z')^{2}}\right)^{3}} . dR' = \int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \frac{R'}{\left(\sqrt{R'^{2} + (Z - Z')^{2}}\right)^{3}} . \underbrace{R'}_{g} . dR' = -\frac{R'}{\sqrt{R'^{2} + (Z - Z')^{2}}} \Big|_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} - \underbrace{\int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} - \frac{1}{\sqrt{R'^{2} + (Z - Z')^{2}}} . dR'}_{integral tabelada}$$

$$\Rightarrow \left[\left(-\frac{R'}{\left(\sqrt{R'^{2} + (Z - Z')^{2}}\right)} + \ln\left|R' + \sqrt{R'^{2} + (Z - Z')^{2}}\right| \right) \Big|_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \right]$$
(121)

Agora, a integral em Z':

$$\int_{-h}^{0} \left\{ -\frac{R'}{\left(\sqrt{R'^2 + (Z - Z')^2}\right)} + \ln \left| R' + \sqrt{R'^2 + (Z - Z')^2} \right| \right\} . dZ'$$

Integrando (I) (via tabela de integrais): $\Rightarrow \left(R' \cdot \ln \left| Z - Z' + \sqrt{R'^2 + (Z - Z')^2} \right| \right) \Big|_{-h}^{0}$ Integrando (II) por partes:

$$\int_{-h}^{0} \underbrace{\frac{1}{f}} \cdot \ln \left| R' + \sqrt{R'^{2} + (Z - Z')^{2}} \right| \cdot dZ' = \underbrace{(Z' - Z)}_{f} \cdot \ln \left| R' + \sqrt{R'^{2} + (Z - Z')^{2}} \right|_{-h}^{0} - \underbrace{\left(\frac{IIa}{g}\right)}_{g} \cdot \underbrace{\left(\frac{IIa}{g}\right)}_{g}$$

Manipulando algebricamente (IIb), temos a integral resultante:

$$= -\int_{-h}^{0} \frac{(Z-Z')^{2}}{R'^{2}+(Z-Z')^{2}} \cdot \frac{R'^{2}-\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}}{R'^{2}-\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}} \cdot \frac{R'^{2}-\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}}{R'^{2}-\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}} \cdot dZ' = -\int_{-h}^{0} \frac{(Z-Z')^{2}}{\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}} \cdot \left(R'^{2}-\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}\right) \cdot dZ' \Rightarrow -\int_{-h}^{0} \left(\frac{-R'}{\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}} + \frac{\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}}{\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}}\right) \cdot dZ' = \left(-R' \cdot \ln\left|Z-Z'^{2}+\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}\right| - Z'\right) \Big|_{-h}^{0}$$

Juntando as expressões (I), (IIa) e (IIb), temos a expressão para o campo $\vec{B}_{z_{bobina}}(0,Z)$:

$$\vec{B}_{z_{bobina}}(0,Z) = \frac{\mu_{0}.N.I}{h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \left\{ (Z'-Z).\ln \left| R' + \sqrt{R'^{2} + (Z-Z')^{2}} \right| - Z' \right\} \Big|_{Z'=-h}^{0} \Big|_{R'=\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \vec{u}_{z} \Rightarrow \frac{\mu_{0}.N.I}{h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \left\{ (Z'-Z).\ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{(\frac{d^{2}}{2})^{2} + (Z-Z')^{2}}}{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{(\frac{d^{2}}{2})^{2} + (Z-Z')^{2}}} \right| \vec{Z}' + \vec{Z}' \right\} \Big|_{Z'=-h}^{0} \Rightarrow \vec{B}_{z_{bobina}}(0,Z) = \frac{\mu_{0}.N.I}{h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \left\{ (Z+h).\ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{(\frac{d^{2}}{2})^{2} + (Z+h)^{2}}}{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{(\frac{d^{2}}{2})^{2} + (Z+h)^{2}}} \right| - Z.\ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{(\frac{d^{2}}{2})^{2} + Z^{2}}}{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{(\frac{d^{2}}{2})^{2} + Z^{2}}} \right| \vec{u}_{z} \right\}$$

$$(122)$$

B2.3. Cálculo do campo radial:

$$\vec{B}_{r_{bobina}}(0,Z) = \frac{\mu_{0}.N.I}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\theta'.(Z-Z').\overrightarrow{u_{r}}}{\left(\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}\right)^{3}} \cdot R'.d\theta'.dR'.dZ' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{r_{bobina}}(0,Z) = \frac{\mu_{0}.N.I}{2\pi.h.(d_{2}-d_{1})} \cdot \int_{-h}^{0} \int_{\frac{d_{1}}{2}}^{\frac{d_{2}}{2}} \frac{(Z-Z').R'.\overrightarrow{u_{r}}}{\left(\sqrt{R'^{2}+(Z-Z')^{2}}\right)^{3}} \cdot (sen\theta') \int_{0}^{2\pi} .dR'.dZ' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{r_{bobina}}(0,Z) = 0.\overrightarrow{u_{r}}$$
(123)

APÊNDICE C – Desenvolvimento analítico da expressão da força vertical magnética no imã permanente

Pelo Método das Cargas Magnéticas Equivalentes exposto na Seção 3.2, o cálculo da força total no imã permanente é realizado através da seguinte expressão:

$$\overrightarrow{F} = \mu_0 . \bigoplus_{\text{Superfice}} \sigma_M . \overrightarrow{H}_{\text{ext}} . dS + \mu_0 . \iiint_{\text{Volume do im} \widetilde{a}} \rho_M . \overrightarrow{H}_{\text{ext}} . dV$$

Adotando, como <u>primeira hipótese simplificadora</u>, que a magnetização do imã de NdFeB seja uniforme torna $\nabla .\overrightarrow{M} = 0$ de modo que $\rho_{\scriptscriptstyle M} = -\nabla .\overrightarrow{M} = 0$. Então, a expressão acima se simplifica para:

$$\overrightarrow{F} = \mu_0 . \bigoplus_{\text{Superficien}} \sigma_M . \overrightarrow{H}_{\text{ext}} . dS$$

O imã permanente de terras-raras pode ser modelado, com bons resultados, como anisotrópico. Assim, como <u>segunda hipótese simplificadora</u>, considera-se que sua magnetização seja axial, ou seja, paralela ao eixo vertical $\overrightarrow{M}\cong M_z\overrightarrow{u_z}$. Assim, a expressão pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\vec{F} = \mu_{0} \cdot \bigoplus_{\text{Superficise}} \sigma_{M} \cdot \vec{H} \text{ ext. } dS = \mu_{0} \cdot \bigoplus_{\text{Superficise}} \left(\vec{M} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{H} \text{ ext. } dS \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \mu_{0} \cdot \bigoplus_{\text{Sup. Superior}} \left((M_{z} \cdot \vec{u_{z}}) \cdot \vec{u_{n}} \right) \cdot \vec{H} \text{ bobina. } dS \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \mu_{0} \cdot \bigoplus_{\text{Sup. Superior}} \left(M_{z} \cdot \vec{u_{z}} \cdot \vec{u_{z}} \right) \cdot \vec{H} \text{ bobina. } dS + \mu_{0} \cdot \bigoplus_{\text{Sup. Inferior}} \left(M_{z} \cdot \vec{u_{z}} \cdot (-\vec{u_{z}}) \right) \cdot \vec{H} \text{ bobina. } dS \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \mu_{0} \cdot \bigoplus_{\text{Sup. Superior}} \left(M_{z} \right) \cdot \vec{H} \text{ bobina. } dS + \mu_{0} \cdot \bigoplus_{\text{Sup. Inferior}} \left(-M_{z} \right) \cdot \vec{H} \text{ bobina. } dS \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \mu_{0} \cdot M_{z} \cdot \int_{0}^{\frac{D}{2}} \left(\vec{H} \text{ eletroimā}_{\text{face sup erior}} - \vec{H} \text{ eletroimā}_{\text{face inferior}} \right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot dR \Rightarrow$$

$$\vec{F} = 2 \cdot \pi \cdot M_{z} \cdot \int_{0}^{\frac{D}{2}} \left(\vec{B} \text{ bobina}_{\text{face sup erior}} - \vec{B} \text{ bobina}_{\text{face inferior}} \right) \cdot R \cdot dR$$

$$(124)$$

Como o sistema de levitação é simétrico axialmente e pretende-se que o controle mantenha esta simetria, somente a força vertical será considerada. Com isto, tem-se que:

$$F_{z} = 2\pi.M_{z}.\int_{0}^{\frac{D}{2}}R.\left(B_{z_{bobina}}(R,-d-h-e) - B_{z_{bobina}}(R,-d-h-e-L)\right).dR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{z} = \frac{\mu_{0}.N.I.M_{z}}{h.(d_{2}-d_{1})} \int_{0}^{\frac{D}{2}} R.(f(R,-d-h-e)-f(R,-d-h-e-L)).dR$$
(125)

Onde:

$$f(R,Z) = \begin{cases} (Z'-Z) \cdot \int_{0}^{2\pi} \ln\left(R'-R.\cos\theta' + \sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}\right) . d\theta' + \\ + R \int_{0}^{2\pi} .sen\theta'.arctg\left(\frac{(Z-Z') \cdot (R'-R.\cos\theta')}{R.sen\theta' \cdot \sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}}\right) . d\theta' + \\ + R^2 \cdot R' \cdot (Z-Z') \cdot \int_{0}^{2\pi} \frac{sen^2\theta'}{\left(R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta'\right) \cdot \sqrt{R^2 + R'^2 - 2.R.R'.\cos\theta' + (Z-Z')^2}} . d\theta' \end{cases}$$

$$\left| \begin{cases} (126) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{aligned} \right|_{Z'=-h} \left|_{R'=\frac{d_1}{2}} \right|_{Z'=-h} \left|_{R'=\frac{d_1}{$$

Como pode ser visto acima, a resolução analítica é extremamente complexa de modo que é necessário algum artifício de projeto para se obter uma expressão para a força de atração entre bobina e imã permanente. Uma solução, que é a adotada no presente trabalho como a terceira hipótese simplificadora, é o dimensionamento da bobina de forma a garantir um campo aproximadamente constante sobre as faces do imã. Neste caso, pode-se achar a expressão aproximada da força vertical total usando o valor do campo indução magnético ao longo do eixo axial central, como a seguir. Da eq.(124), obtém-se:

$$\begin{split} F_z &\cong 2\pi.M_z. \int\limits_0^{\frac{D}{2}} R. \Big(B_{z_{bobina}}(0, -d-h-e) - B_{z_{bobina}}(0, -d-h-e-L)\Big).dR \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_z \cong 2\pi.M_z. \Big(B_{z_{bobina}}(0, -d-h-e) - B_{z_{bobina}}(0, -d-h-e-L)\Big). \int\limits_0^{\frac{D}{2}} RdR \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_z \cong 2\pi.M_z. \Big(B_{z_{bobina}}(0, -d-h-e) - B_{z_{bobina}}(0, -d-h-e-L)\Big). \left(\frac{R^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{D}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_z \cong \frac{\pi.M_z.D^2}{A}. \Big(B_{z_{bobina}}(0, -d-h-e) - B_{z_{bobina}}(0, -d-h-e-L)\Big) \Rightarrow \end{split}$$

$$+(-d-h-e+h). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e+h)^{2}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{1}}{2}^{2} + (-d-h-e+h)^{2}}} \right|$$

$$-(-d-h-e). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e)^{2}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e)^{2}}} \right|$$

$$-(-d-h-e). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e)^{2}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L+h)^{2}}}} \right|$$

$$+(-d-h-e-L). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L+h)^{2}}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L+h)^{2}}}} \right|$$

$$+(-d-h-e-L). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}} \right|$$

$$+(-d-h-e-L). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}} \right|$$

$$+(-d-h-e-L). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}} \right|$$

$$+(d+e-L). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}} \right|$$

$$+(d+e+L). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}} \right|$$

$$-(d+h+e+L). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}}} \right|$$

$$-(d+h+e+L). \ln \left| \frac{\frac{d^{2}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}}{\frac{d^{1}}{2} + \sqrt{\frac{d^{2}}{2}^{2} + (-d-h-e-L)^{2}}}}} \right|$$

APÊNDICE D – Determinação experimental da magnetização de um imã permanente isolado

Um imã permanente isolado está sujeito à ação desmagnetizante de seu próprio campo magnético, de forma que sua magnetização tende a ser diferente à informada pelo fabricante. Esta diferença, nos imãs de terras-raras, depende principalmente da geometria do imã e do formato de sua curva de desmagnetização.

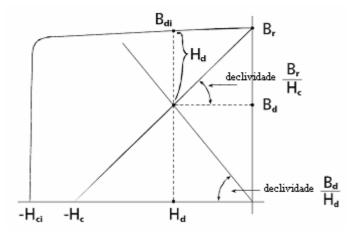


Figura 66 Curvas de Desmagnetização características dos imãs de terras-raras

Para a determinação da magnetização do ponto de operação do imã (B_d , H_d), um método de cálculo aproximado usando o Coeficiente de Permeância é utilizado. Além dele, dois ensaios são realizados com o imã em circuito magnético totalmente aberto para se determinar experimentalmente o valor da magnetização do imã em uso neste trabalho. Estes três métodos são descritos abaixo:

D.1 <u>USANDO O COEFICIENTE DE PERMEÂNCIA:</u>

Este é um método aproximado proposto por PARKER(1990) o qual associa o comprimento e o raio dos imãs cilíndricos com a declividade da reta de operação. Entretanto, usa o sistema CGS de unidades de medidas de forma que $1\text{Tesla}=10^4\text{Gauss}$ e $1\text{A/m}=4\pi.10^{-3}\text{Oersted}$. Definindo a densidade de fluxo magnético intrínseco no sistema SI: $B_{di}\left[T\right]=\mu_0.M\left[\frac{A}{m}\right]$ (128)

Então, a eq.(22) fica da seguinte forma no sistema SI:

$$B_{d}[T] = B_{di}[T] + \mu_{0}.H_{d}[A/m]$$
(129)

Convertendo a expressão acima para o sistema CGS:

$$B_{d}[G] = B_{di}[G] + H_{d}[Oersted]$$
(130)

A equação da curva de desmagnetização para os imãs de terras-raras é:

$$\Rightarrow B_d = B_r + \frac{B_r}{H_c} . H_d$$
 (131)

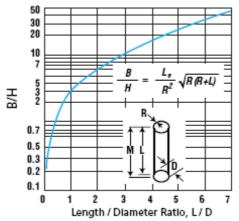


Figura 67 Coeficiente de Permeância para imãs cilíndricos magnetizados axialmente (PARKER, 1990)

A equação do Coeficiente de Permeância é:

$$\Rightarrow \overline{\frac{B_d}{H_d} = -\frac{L}{R^2} . \sqrt{R.(R+L)}}$$
 (132)

Substituindo os dados do fabricante (Tabela 8) nas duas equações anteriores:

$$\begin{split} &\frac{B_d}{H_d} = -\frac{4}{4^2} . \sqrt{4.(4+4)} \Rightarrow \boxed{B_d = -\sqrt{2}.H_d} \\ &B_d = 12800 + \left| \frac{12800}{11500} \right| . H_d \Rightarrow -\sqrt{2}.H_d = 12800 + 1,113.H_d \Rightarrow \boxed{H_d = -5064,780 ersted} \\ &\Rightarrow \boxed{B_d = 7162,68Gauss} \end{split}$$

Da eq.(130), encontra-se B_{di} :

$$B_{di} = 7162,68 - (-5064,78) \Rightarrow B_{di} = 12227,46Gauss = 1,22Tesla$$

D.2 <u>USANDO FLUXÍMETRO E BOBINA DE HELMHOLTZ:</u>



Figura 68 Fluxímetro "Magnet-Physik Electronic Fluxmeter EF-5"

Neste método, coloca-se o imã no interior da bobina de Helmholtz "Magnet-Physik MS150" interligada ao fluxímetro "Magnet-Physik Electronic Fluxmeter EF-5", o qual calcula o valor do momento magnético. Com a fórmula abaixo, obtém-se a densidade de fluxo magnético:

$$B_{di} \text{ [em Tesla]} = \frac{MomentoMagnético [em Vs] .K_{Helm} [em m]}{V_{\text{im}\tilde{a}} [em m^3]} . \left(1 + \frac{R_{Helm}}{10K\Omega}\right)$$
(133)

As características da bobina de Helmholtz MS-150 são:

$$K_{Helm} = 0.1521.10^{-3} m$$
 e $R_{Helm} = 36,99\Omega$

Foram utilizadas 10 amostras de imã de Neodímio e os resultados demonstram uma variação de magnetização entre eles:

Tabela 15 Dados do ensaio com o fluxímetro

	lmã									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Momento										
Máximo	1515	1496	1541	1482	1528	1486	1570	1511	1475	1534
[10 ⁻⁶ Vs]										
Momento										
Mínimo	-1528	-1520	-1559	-1509	-1553	-1384	-1549	-1529	-1510	-1566
[10 ⁻⁶ Vs]										
Momento										
Médio	1521,5	1508	1550	1495,5	1540,5	1435	1559,5	1520	1492,5	1550
[10 ⁻⁶ Vs]										
B _{di} [Tesla]	1,1552	1,1450	1,1769	1,1355	1,1697	1,0896	1,1841	1,1541	1,1332	1,1769

Foi escolhida a amostra X para uso neste trabalho.

D.3 <u>USANDO O TESLAMETER E RETA DE AJUSTE DE CURVA:</u>



Figura 69 Magnet-Physik FH55 Gauss Teslameter

Neste método, mede-se o campo magnético ao longo do eixo central z a distâncias d da face do imã sem interferência de campo magnético externo. Vale relembrar que, neste eixo, a intensidade magnética gerada só terá componente z em razão da simetria (vide cálculo no Apêndice A).

Com um instrumento de medida de densidade de fluxo magnético "*Magnet-Physik FH55 Gauss Teslameter*", as seguintes medidas de densidade de fluxo magnético axiais foram obtidas para a <u>amostra X</u> do imã:

Tabela 16 Dados do ensaio com o Teslameter

d (em mm)	B (em T)	d (em mm)	B (em T)	d (em mm)	B (em T)
0,50	0,402	4,17	0,106	11,68	0,013
0,81	0,354	4,45	0,095	12,85	0,011
1,10	0,322	4,70	0,087	14,35	0,00858
1,39	0,277	5,06	0,077	15,49	0,00682
1,69	0,247	5,35	0,070	16,67	0,00572
2,00	0,224	5,62	0,063	17,89	0,00477
2,31	0,206	6,20	0,053	19,03	0,00400
2,71	0,171	6,82	0,045	20,24	0,00343
2,95	0,160	7,58	0,036	21,39	0,0029
3,24	0,143	8,46	0,029	23,97	0,00208
3,59	0,132	9,73	0,022	26,60	0,00183
3,85	0,121	10,52	0,018	28,50	0,00133

A fórmula analítica da densidade de fluxo magnético ao longo do eixo axial central é obtida da eq. (109) fazendo-se z=L/2+d e R=0. Assim:

$$B_{zim\tilde{a}}(0,d) = \mu_0.H_{zim\tilde{a}}(0,\frac{L}{2}+d) = \mu_0.\frac{M}{2}.\left(\frac{d+L}{\sqrt{(d+L)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}} - \frac{d}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}}\right) \Rightarrow$$
Para L=4mm e D=8mm $\Rightarrow B_{zim\tilde{a}}(0,d) = \frac{B_{di}}{2}.\left(\frac{d+4}{\sqrt{(d+4)^2 + 16}} - \frac{4}{\sqrt{d^2 + 16}}\right)$ (134)

Com a fórmula cima e com o auxílio do Matlab, encontrou-se uma curva de aproximação $B_{\rm di}=1{,}189T$ que apresentou um somatório de erro quadrático da ordem de 10^{-5} , o que representa um excelente ajuste (vide gráfico abaixo).

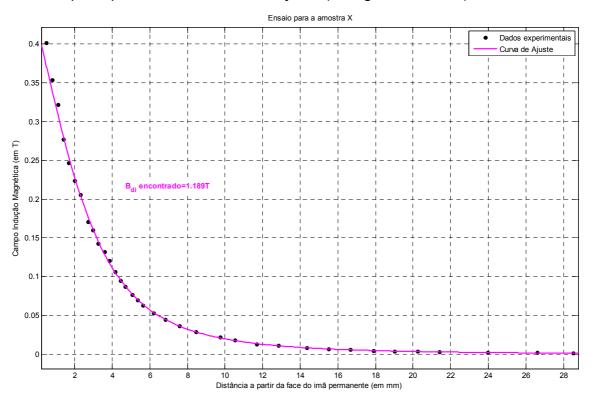


Figura 70 Curvas experimental e de ajuste para a amostra X de imã

Os valores de densidade de fluxo magnético intrínseco obtidos nos dois métodos experimentais ficaram bem próximos entre si e, considerando que o método do Coeficiente de Permeância é um método aproximado, também apresentou um resultado satisfatório. Como esperado, os valores são inferiores ao informado pelo fabricante (B_r =1,28T).

 $B_{di} = 1,2227T$ (com o Coeficiente de Permeância) $B_{di} = 1,1769T$ (com o fluxímetro e bobina de Helmholtz) $B_{di} = 1,189T$ (com o Teslameter e ajuste de curva)

Com os dados acima, o valor da magnetização do imã isolado é facilmente calculado:

$$M = \frac{B_{di}}{\mu_0} \Rightarrow \begin{pmatrix} M = 972,99 & KA/m \text{ (com o Coeficiente de Permeância)} \\ M = 936,55 & KA/m \text{ (com o fluxímetro e bobina de Helmholtz)} \\ M = 946,18 & KA/m \text{ (com o Teslameter e ajuste de curva)} \end{pmatrix}$$

APÊNDICE E - Rotinas em Matlab para dimensionamento da bobina

Arquivo Dados.m:

```
% Izaias José Botelho NUSP: 2999307
% Modelagem e controle linear de um sistema de levitação
               de imã permanente
% Arquivo: Dados.m
global Kmax M L D;
q=9.81; % gravidade em m/s2
% Dados da bobina
h=61/1000;% comprimento da bobina (m)
d1=50/1000; % diametro interno da bobina (m)
d2=78/1000; % diametro externo da bobina (m)
N inicial=1500; % numero de espiras teorico desejado (requisito de projeto)
N=1550;% numero real de espiras do enrolamento
Imax=1;% corrente maxima (em A) no enrolamento da bobina (requisito de
projeto)
mi=4*pi*1.0e-7;% permeabilidade magnetica do vacuo
e=5/1000; % espessura do flange inferior do carretel da bobina (em m)
Li=48/1000;% indutancia interna da bobina (em henry)
Ri=8.6;% resistencia do enrolamento da bobina (em ohm)
Kmax=mi*N*Imax/(h*(d2-d1)); % constante de multiplicacao do campo magnetico
da bobina para Imax
% Dados do ima permanente
Br nominal=1.28;% Inducao Magnetica Remanente nominal (em Tesla)
M nominal=Br nominal/mi; % Magnetização Remanente nominal (valor em A/m)
Bd=0.8351;% Inducao Magnetica intrinseco no ponto de operação (em Tesla)
M=Bd/mi;% Magnetização no ponto de operação (valor em A/m)
L=4/1000;% espessura do ima (m)
D=8/1000;% diametro do ima (m)
densidade=7.4;% 7.4g/cm3 = 7.4Kg/dm3 = 7400Kg/m3
m ima= (densidade*1000)*L*pi*(0.5*D)^2;% massa do ima
P ima=m ima*g;% peso do ima
```

Arquivo solenoide.m:

```
% Sub-funcao que descreve a expressao total da integral em teta do Campo
Axial considerando os limites de z1 e r1
function axial = Axial(theta, Z, R, h, d1, d2, K)
axial=K/(2*pi).*(L(theta,Z,R,0,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-L(th
L(theta, Z, R, 0, 0.5*d1) + L(theta, Z, R, -h, 0.5*d1));
% Sub-funcao que descreve a expressao total da integral em teta do Campo
Radial considerando os limites de z1 e r1
function radial = Radial(theta, Z, R, h, d1, d2, K)
radial=K/(2*pi).*(M(theta,Z,R,0,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(theta,Z,R,-h,0.5*d2)-M(t
M(theta, Z, R, 0, 0.5*d1) + M(theta, Z, R, -h, 0.5*d1));
% Sub-funcao que descreve as tres expressoes dentro da integral em teta do
Campo Axial sem considerar os limites de z1 e r1 (equação 116)
function Ax = L(theta, Z, R, z1, r1)
Ax1=-(Z-z1).*log(abs(r1-R.*cos(theta)+sqrt(r1.^2+R.^2-
2*R.*r1.*cos(theta)+(Z-z1).^2));
Ax2=R.*sin(theta).*atan((Z-z1).*(r1-
R.*cos(theta))./(R.*sin(theta).*sqrt(r1.^2+R.^2-2*R.*r1.*cos(theta)+(Z-2*R.*r1.*cos(theta)).
z1).^2)));
Ax3=R.^2.*r1.*(Z-z1).*(sin(theta).^2)./(r1.^2+R.^2-
2*R.*r1.*cos(theta))./sqrt(r1.^2+R.^2-2*R.*r1.*cos(theta)+(Z-z1).^2);
Ax=Ax1+Ax2+Ax3;
% Sub-funcao que descreve as duas expressoes dentro da integral em teta do
Campo Radial sem considerar os limites de z1 e r1 (equação 118)
function Rad = M(theta, Z, R, z1, r1)
Rad1=cos(theta).*sqrt(r1.^2+R.^2-2*R.*r1.*cos(theta)+(Z-z1).^2);
Rad2=R.*cos(theta).^2.*log(abs(r1-R.*cos(theta)+sqrt(r1.^2+R.^2-range))
2*R.*r1.*cos(theta)+(Z-z1).^2));
Rad=Rad1+Rad2;
```

Arquivo dimensiona bobina.m:

```
% Izaias José Botelho NUSP: 2999307
% Modelagem e controle linear de um sistema de levitação
                                                  응
              de imã permanente
                                                  응
% Arquivo: dimensiona bobina.m
Dados;
warning off all; % desabilita os avisos de erros
erro limite=1;
d2=0;
while d2<=0.08, % limite máximo adotado para o diametro externo da bobina:
80 mm
   d1=0;
   while d1<d2,
      h=N inicial/(81.92*(d2-d1)*10000); % relacao valida para fios 21
AWG eq. (85)
      if h<=0.06 % limite maximo adotado para a altura 60 mm
          for raio=0:0.1*D:0.5*D, % variação incremental da distância
radial
             i=0;
             j=j+1;
             r(j)=raio*1000; % vetor das distancias radiais em mm
             for distancia=0:0.002:0.06, % variação incremental da
distância axial de 2 em 2 mm ate 60 mm
```

```
i=i+1;
                    d(i)=distancia*1000; % vetor das distancias axiais em
mm
                    [Baxial(i,j),Bradial(i,j)] = solenoide(-h-
distancia, raio, h, d1, d2, Kmax); % calcula as componentes axial e radial da
indução
                end;
            end;
            Baxial eixo=Baxial(:,1); % valores da indução magnética ao
longo do eixo longitudinal central
[maximas diferencas, indices raio] = max(abs((Baxial eixo*ones(1,j)-
Baxial)),[],2);
[erro percentual, indice distancia] = max (abs (maximas diferencas./Baxial eixo)
); % calculo o maior erro percentual
            if erro percentual<erro limite</pre>
                d2 best=d2;
                d1 best=d1;
                h best=h;
                erro limite=erro percentual;
                distancia erro=d(indice distancia); % distancia axial onde
ocorre a maior variação entre os campos
                raio_erro=r(indices_raio(indice_distancia)); % distancia
radial onde ocorre a maior variação entre os campos
        end;
        d1=d1+0.001; % incremento de 1 em 1 mm
    d2=d2+0.001; % incremento de 1 em 1 mm
end;
clc;
erro limite % Mostra na tela o máximo erro percentual de campo na bobina
dimensionada
d2 best % Mostra na tela o diametro externo da bobina dimensionada
d1 best % Mostra na tela o diametro interno da bobina dimensionada
h best % Mostra na tela o comprimento da bobina dimensionada
distancia erro % Mostra na tela a posição axial onde ocorre a maior
diferença de campos
raio erro % Mostra na tela a posição radial onde ocorre a maior diferença
de campos
N=round(h best*(81.92*(d2 best-d1 best)*10000)) % para fios 21AWG
warning on all; % habilita os avisos de erros
```