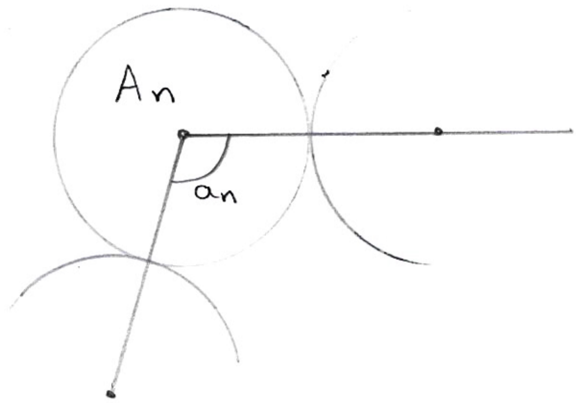
Questão 1:

Soma dos ângulos internos de um polígono de $\underline{n}$ lados é: $S_n = (n-2)\, 180°$

Área de um setor circular de raio $\underline{r}$ e amplitude $\underline{\alpha}$ é $A_c = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360°}$

Seja A_i o centro dos círculos do colar e α_i

os correspondentes ângulos internos do polígono:



$S_1 \rightarrow$ Soma das áreas dos setores circulares interiores

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi r^2 \alpha_i}{360°}$$

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{360°} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$ soma dos ângulos internos de um polígono.

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{360} \cdot (n-2)180°$$

$$S_1 = \frac{(n-2)\pi r^2}{2}$$

S_2 é a área dos $\underline{n}$ círculos subtraídos de S_1.

$$S_2 = n\pi r^2 - S_1$$

então $S_2 - S_1 = n\pi r^2 - S_1 - S_1$

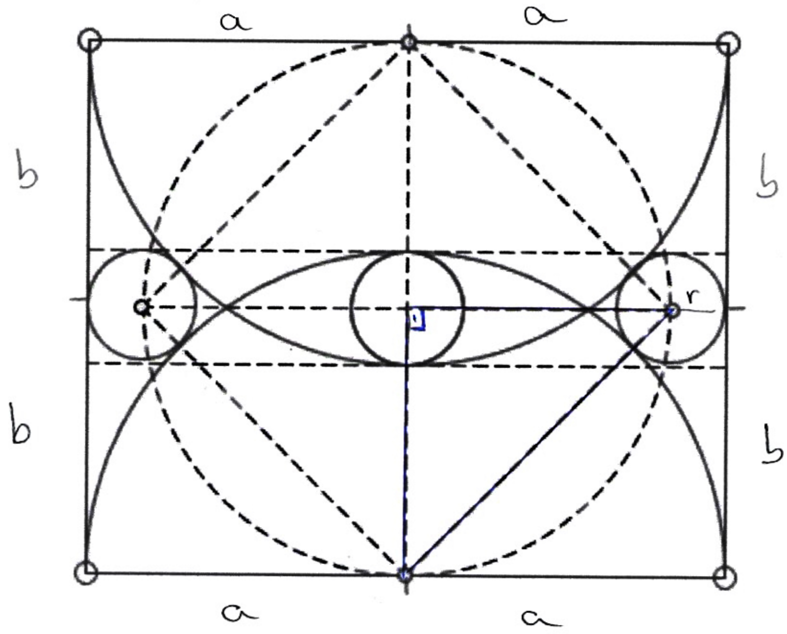
$$S_2 - S_1 = n\pi r^2 - 2S_1$$

$$S_2 - S_1 = n\pi r^2 - 2\frac{(n-2)\pi r^2}{2}$$

$$S_2 - S_1 = n\pi r^2 - n\pi r^2 + 2\pi r^2$$

$$S_2 - S_1 = 2\pi r^2 \;//$$

Questão 2



Assumindo que o lado mais longo do retângulo tem tamanho $\underline{\underline{2a}}$ e o mais curto tem tamanho $\underline{\underline{2b}}$.

Observando um dos triângulos retângulos com ponto no centro da figura, e usando o teorema de pitágoras:

$$b^2 + (a-r)^2 = (a+r)^2$$

de onde tiramos que $r = \frac{b^2}{4a}$

Também podemos observar na figura que $r = a - b$

$$a - b = \frac{b^2}{4a}$$

$$4a^2 - 4ab = b^2$$

$$b^2 + 4ab - 4a^2 = 0$$

então temos que:

$$b^2 + 4ab = 4a^2$$, somando $4a^2$ dos dois lados.

$$b^2 + 4ab + 4a^2 = 8a^2$$

$$(b+2a) = 8a^2$$

$$b + 2a = 2\sqrt{2}a$$

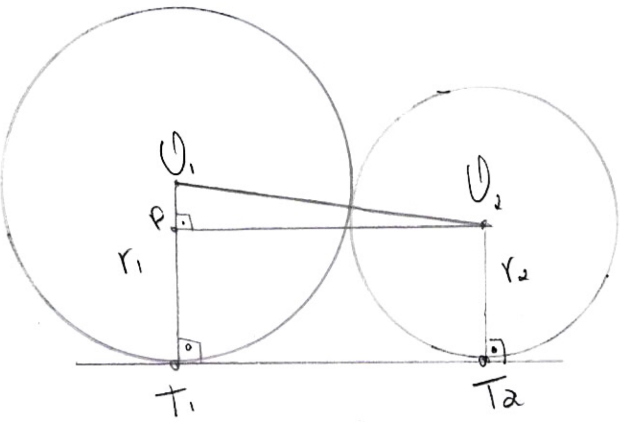
$$b = 2\sqrt{2}a - 2a$$

$$\frac{b}{a} = 2\sqrt{2} - 2$$

//

Questão 3.

Analisando primeiro apenas as duas maiores circunferências temos.

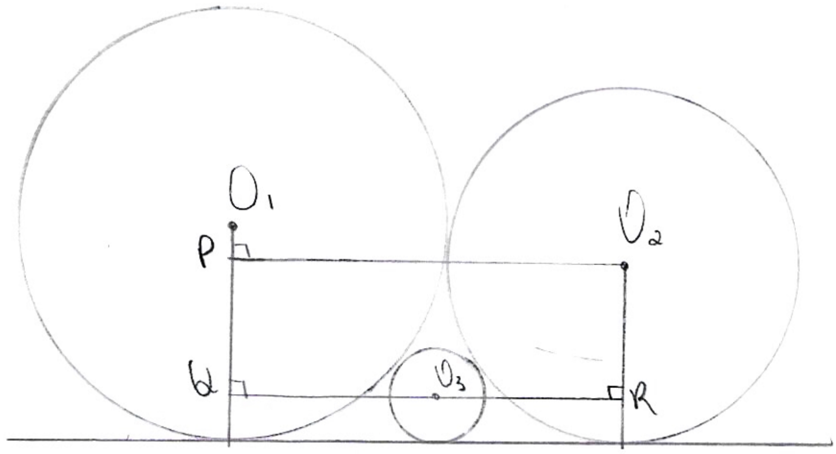


Sendo O_1 e O_2 centros das circunferências de raios r_1 e r_2,

Seja P o ponto do segmento O_1T_1 tal que os segmentos T_1T_2 e PO_2 são paralelos.
Aplicando teorema de pitágora no triângulo O_1O_2P temos que:

$$PO_2 = \sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}$$

Agora vamos considerar a terceira circunferência de centro O_3 e raio r_3.



Repetindo o argumento anterior para as circunferências de centros O_1 e O_3 temos que

$$PO_3 = 2\sqrt{r_1r_2}$$

E repetindo para os centros O_2 e O_3 temos que.

$$RO_3 = 2\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}$$

Então podemos concluir que:

$$PO_2 = WR = WO_3 + O_3R$$

$$2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3}$$

$$\sqrt{r_1}\sqrt{r_2} = \sqrt{r_1}\sqrt{r_3} + \sqrt{r_2}\sqrt{r_3}$$

Dividindo tudo por $\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}\sqrt{r_3}$ temos:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$