Clase 20

October 11, 2022

Matrices de transformaciones lineales

Lo que veremos en esta clase es que dados los espacios vectoriales V, $\dim(V) = n$ y W, $\dim(W) = m$ entonces cualquier transformación lineal $T : V \to W$ la podremos pensar como una transformación matricial $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Pero cómo construir la matriz A adecuada?

Sean V, W dos $\mathbb{F}-$*espacios vectoriales* con $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Consideramos $\mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada para V y $\mathcal{B}_W = \{w_1, ..., w_m\}$ una base ordenada para W. Lo que se busca entonces es una matriz A que cumpla lo siguiente:

$$(1) \;\; [T(v)]_{\mathcal{B}_W} = A[v]_{\mathcal{B}_V}$$

donde $v \in V$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. En particular podemos intentar ver qué pasa cuando v es un elemento de la base $\mathcal{B}_V$: Pero obviamente

$$[v_1]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

pues $v_1 = 1v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n$. De forma análoga:

$$[v_2]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}; ....; [v_n]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces si escribimos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vemos que

$$A[v_1]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

o sea que $A[v_1]_{\mathcal{B}_V}$ da la primer columna de A. Análogamente:

$$A[v_2]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{bmatrix}; ...; A[v_n]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pero si sustituímos esto en (1) tenemos que

$$\begin{aligned} [T(v_1)]_{\mathcal{B}_W} &= A[v_1]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{bmatrix} \\ [T(v_2)]_{\mathcal{B}_W} &= A[v_2]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{bmatrix} \\ &... \\ [T(v_n)]_{\mathcal{B}_W} &= A[v_n]_{\mathcal{B}_V} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es decir que las columnas de A son las coordenadas de los vectores $T(v_k)$ respecto de la base $\mathcal{B}_W$. Esto es:

$$A = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_{\mathcal{B}_W} & [T(v_2)]_{\mathcal{B}_W} & ... & [T(v_n)]_{\mathcal{B}_W} \end{bmatrix}$$

Vamos a denotar dicha matriz por

$$A = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$$

Entonces ahora la transformación lineal $T : V \to W$ la podemos manejar mediante su matriz en las bases ordenadas (fijas) y trabajar todo en coordenadas. Es decir (se puede ver) que para evaluar $T(v)$ basta calcular $[T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ y escribir a v en coordenadas respecto de la base de V, o sea $[v]_{\mathcal{B}_V}$ y luego

$$(2)\ [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}[v]_{\mathcal{B}_V} = [T(v)]_{\mathcal{B}_W}$$

Es decir que a la transformación $T : V \to W$ la pensamos como $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donde $A = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$.

Example 1 *Sea* $V = P_1$ *y* $W = P_2$. *Y sea* $T : P_1 \to P_2$ *la transformación lineal dada por*

$$T(p) = xp$$

Elijamos las respectivas bases canónicas (por ejemplo) para los correspondientes espacios:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{P_1} &= \{1, x\} \\ \mathcal{B}_{P_2} &= \{1, x, x^2\} \end{aligned}$$

Entonces sabemos, por lo visto antes, que las columnas de la matriz $A = [T]_{\mathcal{B}_{P_2}\mathcal{B}_{P_1}}$ son las coordenadas $[T(1)]_{\mathcal{B}_{P_2}}$, $[T(x)]_{\mathcal{B}_{P_2}}$. Proseguimos a calcularlas:

$$\begin{aligned} T(1) &= x = (0)1 + (1)x + (0)x^2 \\ T(x) &= x^2 = (0)1 + (0)x + (1)x^2 \end{aligned}$$

o sea

$$[T(1)]_{\mathcal{B}_{P_2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } [T(x)]_{\mathcal{B}_{P_2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces la matriz queda

$$A = [T]_{\mathcal{B}_{P_2}\mathcal{B}_{P_1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, por ejemplo, si queremos evaluar $T(2x+3)$ bien podemos calcularlo rápido con la definición de T. O bien apicamos que

$$[T]_{\mathcal{B}_W\mathcal{B}_V}[v]_{\mathcal{B}_V} = [T(v)]_{\mathcal{B}_W}$$

que en nuestro caso sería

$$(*)\ [T]_{\mathcal{B}_{P_2}\mathcal{B}_{P_1}}[2x+3]_{\mathcal{B}_{P_1}} = [T(2x+3)]_{\mathcal{B}_{P_2}}$$

para lo cual necesitamos calcular primero $[2x+3]_{\mathcal{B}_{P_1}}$:

$$2x + 3 = (3)1 + (2)x$$

es decir

$$[2x+3]_{\mathcal{B}_{P_1}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y luego por (*):

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}_{P_2}\mathcal{B}_{P_1}}[2x+3]_{\mathcal{B}_{P_1}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= [T(2x+3)]_{\mathcal{B}_{P_2}} \end{aligned}$$

O sea $T(2x+3) = (0)1 + (3)x + (2)x^2 = 3x + 2x^2$.

La ventaja de trabajar con matrices de una transformación lineal dada es que rápidamente podemos estudiar su núcleo e imagen. Al menos podemos ver su nulidad y su rango. Simplemente debemos estudiar el rango y nulidad de la matriz que la representa. Por ejemplo en este caso al tomar la matriz que representa a la T:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vemos que si la llevamos a su MERF:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to f_1 \leftrightarrow f_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to f_2 \leftrightarrow f_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R_A$$

vemos rápidamente que *rango(A)*= 2 y por ende *nulidad(A)*= 0 (Teorema de la dimensión para matrices). Por ende $Nu(A) = \{0\}$ y luego, como esto representa la transformación lineal T (pensada como T_A) sabemos que por el Teorema 7 (Clase 19) la T es inyectiva. Como $rango(A) = 2$ esto es que $rango(T) = 2$ y luego $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.

Matriz de un operador lineal

En el caso que V y W sean los mismos $\mathbb{F}-$*espacios vectoriales* entonces la $T : V \to V$ es un operador lineal. En este caso podemos tomar una única base ordenada en V para calcular la matriz que represente a dicho T (esto no es obligatorio, también podemos considerar una base para el V como espacio dominio y otra base para V como espacio de llegada).

Suponemos que $\dim(V) = n$. Consideremos una base ordenada para V, $\mathcal{B}_V = \{v_1, ..., v_n\}$. Por lo visto antes las columnas de la matriz $A = [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_V}$, a la cual denotaremos directamente por

$$A = [T]_{\mathcal{B}_V},$$

son las coordenadas:

$$(*)\ A = [[T(v_1)]_{\mathcal{B}_V} [T(v_2)]_{\mathcal{B}_V} ... [T(v_n)]_{\mathcal{B}_V}].$$

Example 2 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por*

$$T(x,y) = (x+y, \ -2x+4y)$$

Tomemos la base canónica para $\mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),\ (0,1)\}$$

entonces aplicamos T a la base $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}$ y calculamos las coordenadas de $T(1,0)$ y de $T(0,1)$, como indica (*):

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (1,-2) = (\mathbf{1})(1,0) + (-\mathbf{2})(0,1) \\ T(0,1) &= (1,4) = (\mathbf{1})(1,0) + (\mathbf{4})(0,1) \end{aligned}$$

y entonces la matriz es

$$[T]_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

También podríamos haber elegido otra base como por ejemplo:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,1),\ (1,2)\}$$

y entonces calculamos la nueva matriz para T:

$$\begin{aligned} T(1,1) &= (2,2) = (\mathbf{2})(1,1) + (\mathbf{0})(1,2) \\ T(1,2) &= (3,6) = (\mathbf{0})(1,1) + (\mathbf{3})(1,2) \end{aligned}$$

y en este caso resulta que la matriz para T queda

$$[T]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

que es una matriz diagonal (más linda que la anterior).

Matrices de composiciones de transformaciones lineales y transformaciones inversas

Theorem 3 *Sean U, V, W tres $\mathbb{F}-$espacios vectoriales. Sean $T : U \to V$ y $S : V \to W$ transformaciones lineales. Si $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ son tres bases ordenadas para U, V, W respectivamente entonces ($S \circ T : U \to W$)*

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U} = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_U}$$

Theorem 4 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial. Y sea $T : V \to V$ un operador lineal. Sea $\mathcal{B}$ una base ordenada para V. Entonces los siguientes ítems son equivalentes:*

1. *T es uno a uno.*
2. *$[T]_{\mathcal{B}}$ es invertible.*

   Además cuando esto vale se tiene

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}}\right)^{-1}.$$

No vamos a demostrar dichos teoremas.

Relación entre la matriz cambio de base y el operador lineal identidad

Recordemos que el operador identidad sobre un $\mathbb{F}-$*espacio vectorial* V es $I : V \to V$ definido naturalmente por

$$I(v) = v.$$

También recordemos cómo era la matriz cambio de base en V :

(**Remark** 15 **de la Clase** 16): Dadas dos bases ordenadas $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $\mathcal{B} = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$. Si queremos calcular la matriz cambio de base que nos transfiera desde la base $\mathcal{B}$ a la $\mathcal{A}$ debemos escribir a los vectores de la base $\mathcal{B}$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{A}$ y poner las coordenadas como columnas de P.

$$[P]_{\mathcal{BA}} = \left[\begin{array}{cccc} [\beta_1]_{\mathcal{A}} & [\beta_2]_{\mathcal{A}} & ... & [\beta_n]_{\mathcal{A}} \end{array}\right].$$

Y entonces tenemos el siguiente...

Theorem 5 *Dado* V *un* $\mathbb{F}-$*espacio vectorial. Y sean* $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *y* $\mathcal{B} = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ *bases ordenadas para* V*. Entonces la matriz del operador identidad con respeto a las bases* $\mathcal{B}$ *y*$\mathcal{A}$*,* $[I]_{\mathcal{AB}}$ *es en realidad la matriz cambio de base* $[P]_{\mathcal{BA}}$*.*

Proof. Como $I : V \to V$ y considerando $\mathcal{B}$ como la base del dominio y $\mathcal{A}$ como la base de la llegada podemos calcular la matriz del I con respecto a dichas bases. Como hicimos antes dicha matriz tiene por columnas a las coordenadas:

$$\begin{array}{rcl} [I]_{\mathcal{AB}} & = & \left[\begin{array}{cccc} [I(\beta_1)]_{\mathcal{A}} & [I(\beta_2)]_{\mathcal{A}} & ... & [I(\beta_n)]_{\mathcal{A}} \end{array}\right] \\ & = & \left[\begin{array}{cccc} [\beta_1]_{\mathcal{A}} & [\beta_2]_{\mathcal{A}} & ... & [\beta_n]_{\mathcal{A}} \end{array}\right] \\ & = & [P]_{\mathcal{BA}} \end{array}$$

■

Cambio de base para las matrices de un operador lineal

Ahora si tenemos dos bases $\mathcal{B}$ y$\mathcal{A}$ para un $\mathbb{F}-$*espacio vectorial* V. ¿Qué relación habrá entre $[T]_{\mathcal{B}}$ y $[T]_{\mathcal{A}}$?

Theorem 6 *Sea* V *un* $\mathbb{F}-$*espacio vectorial, sea* $T : V \to V$ *un operador lineal y sean* $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *y* $\mathcal{B} = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ *bases ordenadas para* V*. Entonces*

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{A}}P$$

donde P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la $\mathcal{A}$, $P = [P]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$.

Proof. Solo basta tener en cuenta que podemos componer a T con el operador identidad I:

$$T = I \circ T \circ I$$

y entonces la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}} = [I \circ T \circ I]_{\mathcal{B}}$$

(No olvidar que $[T]_{\mathcal{B}}$ es la matriz de T con respeto a la misma base en V: $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$)

Ahora podemos aplicar el Teorema que nos dice cómo calcular la matriz de una composición:

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}} &= [I \circ T \circ I]_{\mathcal{B}} \\
&= [(I \circ T) \circ I]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \\
&= [I \circ T]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}[I]_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \\
&= [I]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}[T]_{\mathcal{A}\mathcal{A}}[I]_{\mathcal{A}\mathcal{B}} \\
&= [P]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{A}}[P]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} \\
&= P^{-1}[T]_{\mathcal{A}}P
\end{aligned}$$

■

Example 7 *Consideramos nuevamente la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) = (x + y, \ -2x + 4y)$$

Si tomamos la base canónica $\mathcal{C} = \{(1, 0), \ (0, 1)\}$ vimos que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Si ahora tomamos la base $\mathcal{B} = \{(1, 1), \ (1, 2)\}$ y queremos calcular $[T]_{\mathcal{B}}$ basta calcular la matriz cambio de base $[P]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ (y su inversa) ya que por el Teorema anterior se tiene:

$$(*) \ [T]_{\mathcal{B}} = [P]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}}[P]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

Pero para calcular $[P]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ escribimos a los vectores de la base $\mathcal{B}$ como combinación lineal de la base $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
(1, 1) &= (\mathbf{1})(1, 0) + (\mathbf{1})(0, 1) \\
(1, 2) &= (\mathbf{1})(1, 0) + (\mathbf{2})(0, 1)
\end{aligned}$$

y ponemos las coordenadas en columna:

$$[P]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

calculamos su inversa $[P]_{\mathcal{CB}} = ([P]_{\mathcal{BC}})^{-1}$

$$[P]_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y reemplazamos en (*):

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= [P]_{\mathcal{CB}}[T]_{\mathcal{C}}[P]_{\mathcal{BC}} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como también habíamos calculado más arriba.