Clase 6

April 20, 2022

Algunas matrices especiales

Definition 1 *Una matriz* $D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *se dice diagonal si* $D_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$. *Es decir que sus elementos fuera de la diagonal principal son todos iguales a* 0.

Example 2 *Estos son ejemplos de matrices diagonales*

$$D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Definition 3 *Una matriz* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *se dice triangular superior si* $A_{ij} = 0$ $\forall i > j$. *Es decir los elementos por debajo de la diagonal principal son todos iguales a* 0.

Example 4 *Las siguientes son matrices triangulares superiores*

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & \frac{4}{7} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Definition 5 *Una matriz* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *se dice triangular inferior si* $A_{ij} = 0$ $\forall i < j$. *Es decir los elementos por encima de la diagonal principal son todos iguales a* 0.

Example 6 *Las siguientes son matrices triangulares inferiores*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ \frac{5}{4} & -7 & 12 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remark 7 *Toda matriz diagonal es triangular superior e inferior al mismo tiempo.*

Matriz transpuesta

Definition 8 *Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, definimos la matriz transpuesta de A, y la denotaremos por $A^T \in \mathbb{F}^{n\times m}$, como aquella cuyos elementos son*

$$A^T_{ij} = A_{ji}.$$

Es decir los elementos de la A intercambiados sus filas y columnas.

Example 9 *Si* $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ \frac{5}{2} & -4 & -\frac{2}{3} \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *entonces* $A^T = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{2} & 9 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 3 \end{bmatrix}$. *Podemos observar por ejemplo que $A^T_{23} = -1 = A_{32}$. También por ejemplo $A^T_{11} = -2 = A_{11}$.*

Example 10 *Si* $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ *entonces* $B^T = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \frac{2}{5} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. *Observamos que $B^T_{31} = 1 = B_{13}$. También notamos que B tiene tamaño 2×3 y la B^T tiene tamaño 3×2.*

Theorem 11 *Si los tamaños de las matrices son adecuados para efectuar las operaciones entonces*

1. $\left(A^T\right)^T = A$.
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$.
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, *con* $\alpha \in \mathbb{F}$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Proof. Solo probaremos el inciso 4 (los demás quedan como ejercicios). Supongamos que $A \in \mathbb{F}^{m\times d}$ y $B \in \mathbb{F}^{d\times n}$. Entonces tenemos que el producto AB tendrá tamaño $m \times n$. Y luego la matriz transpuesta

$$(1)\ (AB)^T \text{ tendrá tamaño } n \times m.$$

Por otro lado la matriz B^T tiene tamaño $n \times d$ y la matriz A^T tendrá tamaño $d \times m$. Entonces es posible hacer el producto $B^T A^T$ y

$$(2)\ B^T A^T \text{ tendrá tamaño } n \times m.$$

(1) y (2) al menos le dan sentido a la igualdad que queremos probar. Veamos que efectivamente dichas matrices tienen los mismos elementos.

Por un lado

$$(3)\ (AB)^T_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{d} A_{jk} B_{ki}.$$

Por el otro

$$(4)\ \left(B^T A^T\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{d} B^T_{ik} A^T_{kj} = \sum_{k=1}^{d} B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^{d} A_{jk} B_{ki}.$$

Como (3) = (4), hemos probado que las matrices $(AB)^T$ y $\left(B^T A^T\right)$ tienen los mismos elementos. ■

Invertibilidad de una transpuesta

Primero observamos que la transpuesta de la matriz identidad es ella misma:

$$I_n^T = I_n.$$

Theorem 12 *Si $A \in GL(n, \mathbb{F})$ (es decir es una matriz invertible $n \times n$) entonces $A^T \in GL(n, \mathbb{F})$ y*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Proof. Debemos mostrar que el producto $A^T.(A^{-1})^T = I_n$ (y el producto en el orden cambiado también). Pero por el inciso 4 del Teorema anterior:

$$A^T.(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n.$$

análogamente

$$(A^{-1})^T.A^T = (A.A^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

■

Definition 13 *Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ se dice simétrica si $A^T = A$.*

Example 14 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & \frac{4}{7} \\ -3 & \frac{4}{7} & 5 \end{bmatrix}$ *es simétrica ya que* $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & \frac{4}{7} \\ -3 & \frac{4}{7} & 5 \end{bmatrix} = A$.

Theorem 15 *Si A,$B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ son matrices simétricas entonces,*

1. *A^T es simétrica.*
2. *$A + B$ es simétrica.*
3. *αA es simétrica $\forall \alpha \in \mathbb{F}$.*

Proof. Solo probaremos el inciso 2 (los demás quedan como ejercicios): Como A y B son matrices simétricas (así lo asumimos) entonces se tiene que $A^T = A$ y $B^T = B$. Luego por las propiedades de las matrices transpuestas (probado más arriba),

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B.$$

■

Theorem 16 *Si A es una matriz simétrica tal que $A \in GL(n, \mathbb{F})$ entonces también A^{-1} será una matriz simétrica.*

Proof. Pues sencillamente,

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}.$$

■

Cálculo de determinante

En esta parte sólo veremos cómo se calcula el determinante de algunas matrices. Al final de la materia vamos a justificar mejor todas las cosas.

Comenzamos diciendo que el determinante es una función que asigna a cada matriz cuadrada un número, y lo denotaremos por $\det(A)$. Es decir

$$\det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$$

Determinante de una matriz de tamaño 2×2

Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ su determinante se calcula de la siguiente manera, si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces

$$\det(A) = ad - bc.$$

Example 17 *Si* $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ *entonces* $\det(A) = (-2).4 - (-1).3 = -5.$

Example 18 *Si* $B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -6 \end{bmatrix}$ *entonces* $\det(B) = (-5).(-6) - 10.3 = 0.$

Determinante de una matriz triangular (superior o inferior) de tamaño $n \times n$

Si A es una matriz triangular superior o inferior su determinante se calcula multiplicando los elementos de la diagonal principal:

Una triangular superior...

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ entonces } \det(A) = a_{11}.a_{22}...a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Example 19 *Si* $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *entonces* $\det(A) = (-2).(-3).(1).(-1) = -6$

Example 20 *Si* $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 51 \\ 0 & 0 & -69 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *entonces* $\det(B) = 8.0.(-1) = 0$.

O una triangular inferior...

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ a_{n1} & ... & ... & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ entonces } \det(A) = a_{11}.a_{22}...a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Example 21 *Si* $C = \begin{bmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 17 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 35 & -87 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ *entonces* $\det(C) = (-24).(-\frac{1}{2}).\frac{1}{3} = 4$.

Cómo afecta las operaciones elementales de fila al determinante?

Ahora vamos a considerar una operación elemental de fila e y mostraremos como calcular el $\det(e(A))$ para cada uno de los tipos de e.

1. Si e es de tipo I, o sea $e_1 : \alpha f_i$. En este caso el determinante de la matriz resultante $e(A)$ es,
$$\det(e_1(A)) = \alpha \det(A).$$

2. Si e es de tipo II, o sea $e_2 : f_i + \alpha f_j$. En este caso el determinante de la matriz resultante es el mismo,
$$\det(e_2(A)) = \det(A).$$

3. Si e es de tipo III, o sea $e_3 : f_{ij}$ (o $f_i \leftrightarrow f_j$). En este caso el determinante cambia de signo,
$$\det(e_3(A)) = -\det(A).$$

Example 22 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. *Entonces claramente* $\det(A) = 10$.

Sea B la resultante de aplicar, a la matriz A, la operación elemental de tipo I: $e_1 : \frac{1}{2} f_2$

$$B = e_1(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \textit{ entonces } \det(B) = 5 = \frac{1}{2}\det(A).$$

Sea C la resultante de aplicar, a la matriz A, la operación elemental de tipo II: $e_2 : f_1 + (-3)f_2$

$$C = e_2(A) = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \textit{ entonces } \det(C) = 10 = \det(A).$$

Sea D la resultante de aplicar, a la matriz A, la operación elemental de tipo III: $e_3 : f_{12}$

$$D = e_3(A) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \textit{ entonces } \det(D) = -10 = -\det(A).$$

Cálculo de determinante de una matriz a partir del método de reducción de Gauss

Si tenemos una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ podemos aplicar eliminación Gaussiana (no necesariamente Gauss-Jordan) para transformar dicha matriz en una triangular superior. Y luego podremos calcular su determinante de la siguiente manera:

Supongamos que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces aplicamos el método de eliminación Gaussiana:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \to e_1 : f_{12} \to B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \to e_2 : \frac{1}{3} f_1 \to C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to e_3 : f_3 + (-2)f_1 \to D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} \to e_4 : f_3 + (-10)f_2 \to T_A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix}$$

Y acá llegamos a la matriz triangular superior T_A. Ahora sabemos calcular el determinante de una triangular superior:

$$\det(T_A) = -55.$$

Ahora para calcular el $\det(A)$ vamos repasando qué operación le fuimos haciendo a A para llegar a T_A:

$$A \to [e_1(A) = B] \to [e_2(B) = C] \to [e_3(C) = D] \to [e_4(D) = T_A].$$

Notemos que

1. e_1 es una operación de tipo III. Con lo que $\det(B) = -\det(A)$.
2. e_2 es una operación de tipo I. Con lo que $\det(C) = \frac{1}{3}\det(B) = -\frac{1}{3}\det(A)$.
3. e_3 es una operación de tipo II. Con lo que $\det(D) = \det(C) = -\frac{1}{3}\det(A)$.
4. e_4 es una operación de tipo II. Con lo que $\det(T_A) = \det(D) = -\frac{1}{3}\det(A)$.

Pero como además tenemos que $\det(T_A) = -55$ entonces se tiene que

$$-\frac{1}{3}\det(A) = -55$$

despejamos y obtenemos que

$$\det(A) = 165.$$

Por último, dejamos un resultado que no vamos a demostrar ahora pero es útil:

Theorem 23 *Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ es invertible si y sólo si* $\det(A) \neq 0$.

En otras palabras, se tiene que

$$GL(n, \mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}.$$