ALGEBRA Y GEOMETRIA
TRABAJO PRACTICO 7
TEMA: APLICACIONES LINEALES

1.

a) Sea $F:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ una aplicación lineal tal que $F(1,1,3)=(1,2)$ y $F(2,3,5)=(3,-1)$. Hallar las imágenes por F de $2(1,1,3)$, $(-2,-3,-5)$, $(0,0,0)$, $(1,1,3)+(2,3,5)$ y $2(1,1,3)+3(2,3,5)$.

b) Sea $F:\mathrm{R}^{2\times 1} \to \mathrm{R}^{3\times 1}$ una aplicación lineal tal que $F\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$, $F\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$. Calcular $F\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $F\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ y $F\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$.

c) Sea $F:\mathrm{P}_2(\mathrm{R},X) \to \mathrm{P}_2(\mathrm{R},X)$ la aplicación lineal dada por $F(1)=1+X$, $F(X)=X+X^2$ y $F(X^2)=1$. Hallar $F(2+3X-5X^2)$ y $F(a_0+a_1X+a_2X^2)$.

d) Sea $F:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ lineal tal que $F(1,3)=(2,3)$ y $F(2,1)=(-1,5)$. Encontrar $F(3,-5)$ y $F(x,y)$.

e) Sea $F:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ una aplicación tal que $F(1,0)=(2,5)$, $F(0,1)=(-1,3)$ y $F(1,1)=(3,8)$. ¿Es F lineal? Justifique su respuesta.

2.

a) Sea T la transformación lineal del plano definida por las imágenes de la base $\mathsf{B}=(e_1,e_2)$ como se indica en la figura 1. Encontrar gráficamente $T(a)$, $T(b)$ y $T(c)$.

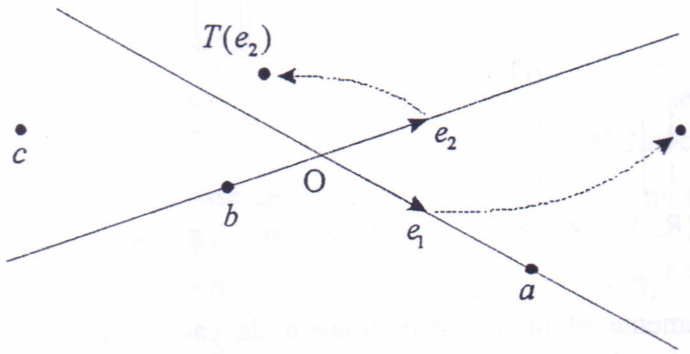


Figura 1

b) Para la aplicación lineal T, definida como se indica en la figura 2, encontrar la imagen, mediante T, del paralelogramo determinado por los puntos O, a, b, c.

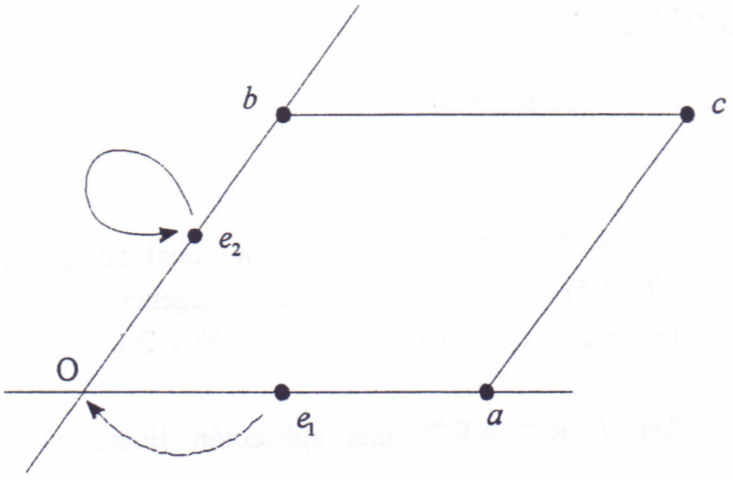


Figura 2

3. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

a) $F: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $F(x,y) = (x,0)$.

b) $F: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $F(x,y) = (x,1)$.

c) $F: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$, $F(x,y,z) = (x,2y,3z)$.

d) $F: \mathrm{R}^{2\times 2} \to \mathrm{R}$, $F\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} + a_{22}$.

e) $F: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, $F(x,y,z) = 5$.

f) $F: \mathrm{P}_2(\mathrm{R},X) \to \mathrm{P}_3(\mathrm{R},X)$, $F(p) = Xp$.

4. Para las siguientes aplicaciones lineales determinar cuáles de los vectores que se dan pertenecen al núcleo y cuáles pertenecen a la imagen.

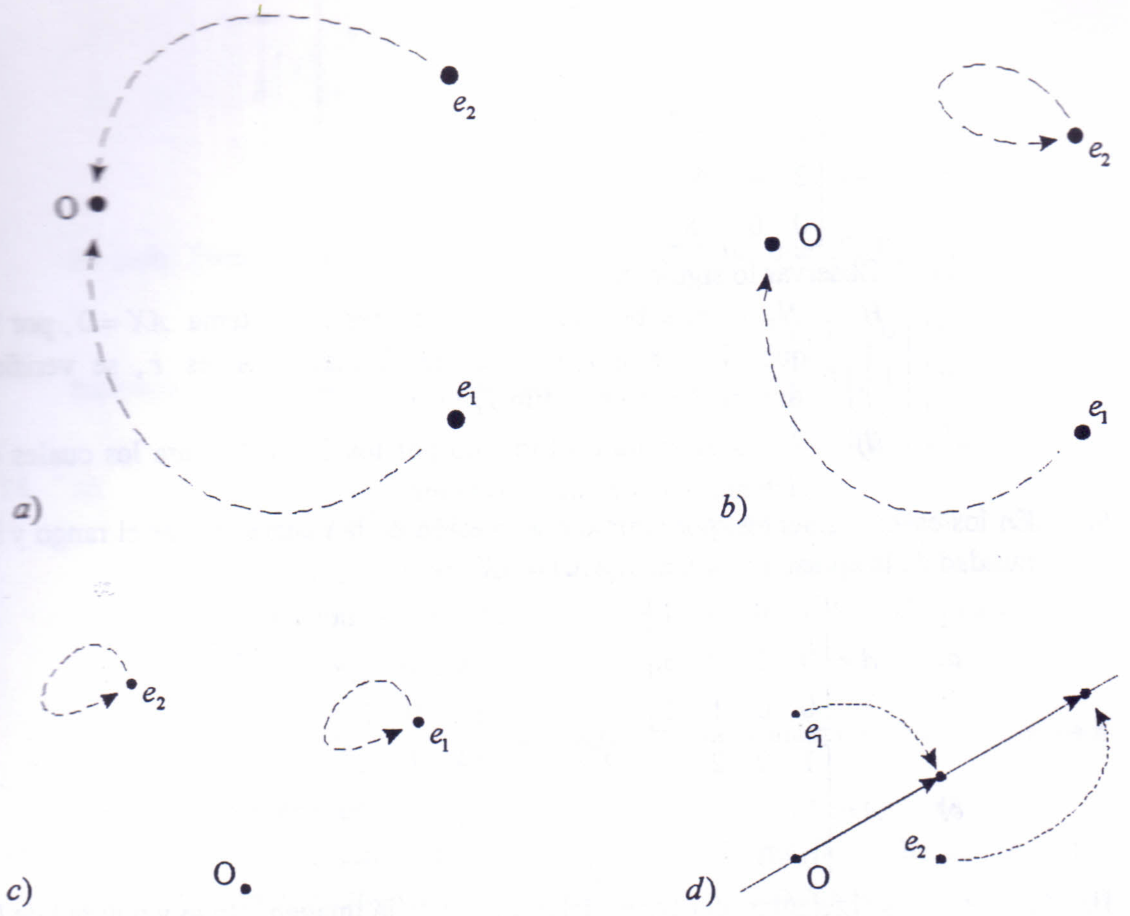
a) $F: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$, $F(x,y) = (2x - y, -8x + 4y, 0)$, $u_1 = (5,10)$, $u_2 = (1,1)$, $v_1 = (1,-4,0)$, $v_2 = (0,0,1)$.

b) $F: \mathrm{R}^{3\times 1} \to \mathrm{R}^{3\times 1}$, $F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) $F: \mathrm{P}_2(\mathrm{R},X) \to \mathrm{P}_3(\mathrm{R},X)$, $F(p) = Xp$, $p_1 = X + X^2$, $p_2 = 1 + X$, $p_3 = 2X + X^2 - 3X^3$, $p_4 = 0$.

5. Encontrar gráficamente el núcleo y la imagen de cada una de las siguientes transformaciones del plano definidas por las imágenes de los vectores de la base B= (e_1, e_2)



6.

a) Dar el rango de las aplicaciones lineales siguientes:

i) $F:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^4$, $\quad \dim(N_F)=0$.

ii) $F:\mathrm{R}^{2\times 2} \to \mathrm{R}^{2\times 2}$, $\quad \dim(N_F)=2$.

b) Dar la nulidad de las siguientes aplicaciones lineales:

i) $F:\mathrm{R}^5 \to \mathrm{R}^7$, $\quad \dim(I_F)=3$.

ii) $F:\mathrm{P}_2(\mathrm{R},X) \to \mathrm{P}_3(\mathrm{R},X)$, $\quad \dim(I_F)=1$.

7. Para cada una de las aplicaciones lineales siguientes se pide: Caracterizar la imagen y (si $I_F \neq \{0\}$) dar una base de la misma. Caracterizar el núcleo y (si $N_F \neq \{0\}$) dar una base del mismo. Dar el rango y la nulidad de la aplicación y decir si es inyectiva y/o suryectiva.

a) $F:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$; $\quad F(x,y)=(x+y,0)$.

b) $F:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$; $\quad \begin{cases} F(1,0)=(1,0,0) \\ F(0,1)=(1,0,1) \end{cases}$.

c) $F:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$; $\quad F(x,y,z)=(x-y,x+y+z,2y+z)$.

8. Idem ejercicio 7 para las aplicaciones lineales $F:\mathrm{R}^{n\times 1} \to \mathrm{R}^{m\times 1}$ dadas por $F(X)=AX$, donde $X \in \mathrm{R}^{n\times 1}$ y $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$.

a) $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -6\end{bmatrix}$

b) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}$

c) Observar lo siguiente:

i) N_F es el subespacio de soluciones del sistema $AX=0$, por lo que si el rango de filas de la matriz A es r, se verifica $\dim(N_F)=n-r$ y $\dim(I_F)=r$.

ii) I_F es el conjunto formado por los $Y\in\mathrm{R}^{m\times 1}$ para los cuales el sistema $AX=Y$ tiene solución.

9. En los casos siguientes, por simple observación de la matriz A, dar el rango y la nulidad de la aplicación lineal $L_A(X)=AX$.

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

b) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

10. En los casos siguientes, dar bases del núcleo y de la imagen, rango y nulidad de la aplicación lineal F.

a) $F:\mathrm{R}^{2\times 2}\to\mathrm{R}^{2\times 2}$, $\quad F\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$.

b) $F:\mathrm{P}_2(\mathrm{R},X)\to\mathrm{P}_2(\mathrm{R},X)$, $\quad F(a+bX+cX^2)=cX^2$

11. Sean las aplicaciones lineales $F,T:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$ dadas por $F(x,y)=(x+2y,0)$ y $T(x,y)=(2x-y,x+y)$.

a) Calcular la imagen del vector $v=(3,5)$ por cada una de las aplicaciones lineales siguientes:

i) $F+T$

ii) $2T$

iii) $F+2T$

iv) TF

v) FT

vi) T^2

vii) F^2

b) Definir cada una de las aplicaciones lineales del punto anterior dando la imagen de (x,y).

12. xx

a) Sea F: $\mathrm{P}_1(\mathrm{R},X)\to\mathrm{R}^2$ dada por $F(a+bX)=(a,a+b)$. Mostrar que F es inversible y determinar F^{-1}.

b) Sea $T:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$ definida por $T(1,0)=(1,1)$ y $T(0,1)=(1,1)$. ¿Es T inversible? Justifique su respuesta.

13. Sea $F:\mathrm{R}^{2\times 1}\to\mathrm{R}^{3\times 1}$ la aplicación lineal dada por

$$F\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \qquad\qquad F\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

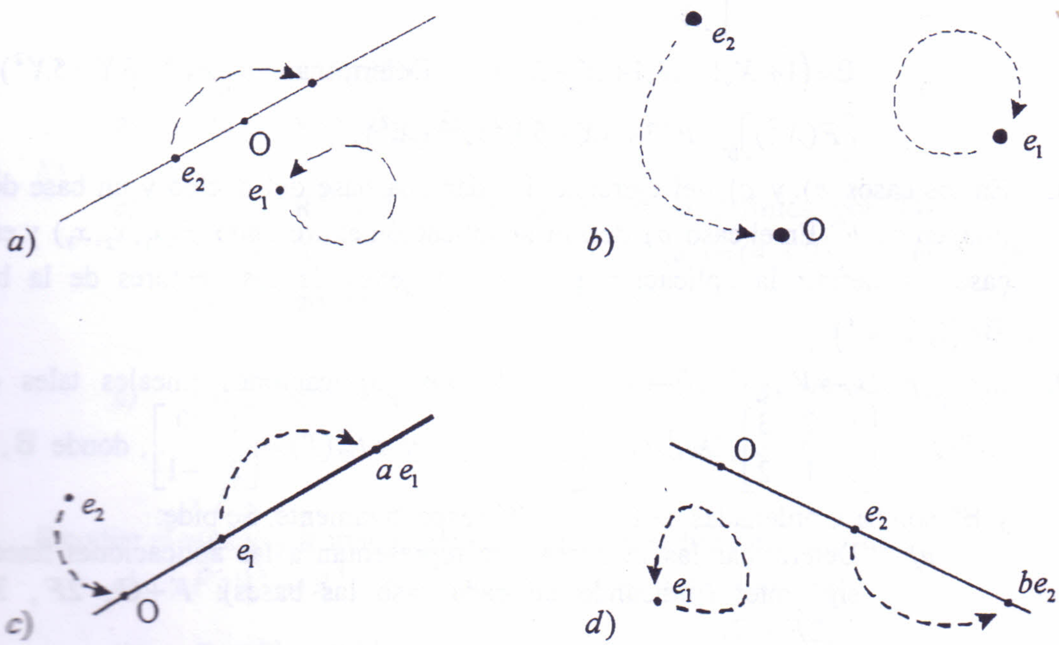
Se pide: Determinar $F\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$. Dar una matriz A tal que $F(X)=AX$. Hallar la matriz de F respecto de las bases $\mathsf{B}=\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$ y $\mathsf{B}'=\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$.

14. xx

a) Sea V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo K. $\mathsf{B}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\mathsf{B}'=(w_1,w_2)$ bases de V y W respectivamente. Si $F:V\to W$ es la aplicación lineal dada por $F(v_1)=2w_1-3w_2$, $F(v_2)=w_1-w_2$ y $F(v_3)=w_1$, calcular $M^{\mathsf{B}}_{\mathsf{B}'}(F)$.

b) Sea $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&4\end{bmatrix}$ la matriz de la aplicación lineal $T:V\to W$ respecto de las bases B y B'. Si $v=2v_1+v_2-3v_3$, calcular $T(v)$.

15. Sea T la transformación lineal del plano definida por las imágenes de la base $\mathsf{B}=(e_1,e_2)$ como se indica en cada una de las figuras siguientes. En cada caso calcular $M_{\mathsf{B}}(T)$.



16. En cada uno de los casos siguientes encontrar la matriz de la aplicación lineal dada respecto de las bases que se indican:

a) $F:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$, $F(x,y)=(x,0)$, $\mathsf{B}=\big((2,1),(3,4)\big)$, $\mathsf{B}'=\big((1,1),(0,3)\big)$.

b) F como en *a)* y $\mathsf{B}=\mathsf{B}'=(e_1,e_2)$.

c) $F:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$, $F\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

B=B′=$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

d) $V=<f,g>$, con $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\cos(x)$. $D:V\to V$ la aplicación derivada y B=B′=(f,g).

17.

a) Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de las bases B=$((2,1),(0,1))$ y B′=$((0,2),(1,1))$ es $M_{\mathsf{B'}}^{\mathsf{B}}(F)=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.
Determinar $[F(2,1)]_{\mathsf{B'}}$, $[F(0,1)]_{\mathsf{B'}}$, $[F(4,5)]_{\mathsf{B'}}$, $F(2,1)$, $F(0,1)$ y $F(4,5)$.

b) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal tal que $M_{\mathsf{B}}(F)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, donde B es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcular $[F(1,0,0)]_{\mathsf{B}}$, $[F(3,5,-2)]_{\mathsf{B}}$, $F(1,0,0)$ y $F(3,5,-2)$.

c) $F:\mathsf{P}_2(\mathbb{R},X)\to\mathsf{P}_2(\mathbb{R},X)$ es la aplicación lineal tal que $M_{\mathsf{B'}}^{\mathsf{B}}(F)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, para las bases ordenadas B=$(1,X,X^2)$ y B=$(1+X,1-X,1+X+X^2)$. Determinar $[F(2+3X-5X^2)]_{\mathsf{B'}}$, $[F(X^2)]_{\mathsf{B'}}$, $F(2+3X-5X^2)$, $F(X^2)$.

18. En los casos *b)* y *c)* del ejercicio 17, dar una base del núcleo y un base de la imagen de F. En el caso *b)* definir la aplicación expresando $F(x_1,x_2,x_3)$ y en el caso *c)* definir la aplicación por las imágenes de los vectores de la base B=$(1,X,X^2)$.

19. Sean $F:U\to V$, $G:U\to V$ y $T:V\to W$ aplicaciones lineales tales que $M_{\mathsf{B'}}^{\mathsf{B}}(F)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $M_{\mathsf{B'}}^{\mathsf{B}}(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $M_{\mathsf{B''}}^{\mathsf{B'}}(T)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, donde B, B′ y B″ son base ordenadas de U, V y W respectivamente. Se pide:

a) Determinar las matrices que representan a las aplicaciones lineales siguientes (indicando en cada caso las bases): $F+G$, $2F$, TG, $T(2F+G)$.

b) En el caso particular $U=\mathsf{P}_2(\mathbb{R},X)$, $V=\mathbb{R}^2$ y $W=\mathsf{P}_1(\mathbb{R},X)$ con B=$(1,X,X^2)$, B′=$((1,0),(0,1))$ y B′=$(1,1+X)$, determinar la imagen de $p=2-3X+X^2$ por la aplicación $T(2F+G)$.

20. Sea $id:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ el operador identidad de $\mathbb{R}^2$. Determinar la matriz de *id* respecto de las bases indicadas:

a) $\mathsf{B}=\mathsf{B}'=(e_1,e_2)$.

b) $\mathsf{B}=((1,1),(0,1))$, $\mathsf{B}'=(e_1,e_2)$.

c) $\mathsf{B}=\mathsf{B}'=((2,3),(3,4))$.

21. Sea $F:V\to V$ un operador lineal tal que $M_{\mathsf{B}}(F)=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$, con B una base ordenada de V.

a) Verificar si F es inversible y, en tal caso, determinar $M_{\mathsf{B}}(F^{-1})$.

b) Si $\mathsf{B}=(v_1,v_2)$, calcular $\left[F^{-1}(2v_1-3v_2)\right]_{\mathsf{B}}$.

22. Sea $F:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^2$ la aplicación lineal tal que, con respecto a las bases canónicas B_1 de R^3 y B_1' de R^2, se tiene

$$M_{\mathsf{B}_1'}^{\mathsf{B}_1}(F)=\begin{bmatrix}1&0&3\\-2&1&0\end{bmatrix}$$

a) Encontrar $M_{\mathsf{B}_2'}^{\mathsf{B}_1}(F)$ si la matriz de cambio de base de B_1' a B_2' es $Q=\begin{bmatrix}3&5\\1&2\end{bmatrix}$.

b) Determinar $M_{\mathsf{B}_1'}^{\mathsf{B}_2}(F)$ si la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 es $P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\2&1&0\end{bmatrix}$.

c) Calcular $M_{\mathsf{B}_2'}^{\mathsf{B}_2}(F)$.

d) Dar las bases B_2 y B_2'.

23. xx

a) Sea $T:\mathrm{R}^4\to\mathrm{R}^3$ la aplicación lineal definida por $T(e_1)=(1,3,2)$, $T(e_2)=(1,0,0)$, $T(e_3)=(2,3,2)$ y $T(e_4)=(4,3,2)$. Dar bases de I_T y N_T. Determinar rango y nulidad de T.

b) Sea $T:\mathrm{R}^{3\mathrm{x}1}\to\mathrm{R}^{3\mathrm{x}1}$ dada por $T(X)=\begin{bmatrix}1&3&4\\3&4&7\\-2&2&0\end{bmatrix}X$. Caracterizar I_T y N_T.

24. Estudiar el núcleo y la imagen de las aplicaciones lineales siguientes:

a) $F:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3$, $F(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_3,4x_1-2x_3,0)$.

b) $F:\mathrm{R}^{4\mathrm{x}1}\to\mathrm{R}^{2\mathrm{x}1}$, $F(X)=\begin{bmatrix}4&1&5&2\\1&2&3&0\end{bmatrix}X$.

c) $F:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3$, $F(x,y,z)=(x-y+3z,5x+6y-4z,7x+4y+2z)$.

d) $F:\mathrm{R}^{3\times1}\to\mathrm{R}^{4\times1}$, $F(X)=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&1&0\\4&1&0\end{bmatrix}X$.

25. Sea $A\in\mathrm{R}^{6\times4}$. Sabiendo que el sistema $AX=0$ tiene solamente solución trivial, dar el rango y la nulidad de la aplicación lineal $L_A:\mathrm{R}^{4\times1}\to\mathrm{R}^{6\times1}$ dada por $L_A(X)=AX$.

26. En los casos siguientes determinar la matriz de la aplicación lineal dada respecto de las bases correspondientes.

a) F: $\mathrm{P}_2(\mathrm{R},X)\to\mathrm{P}_1(\mathrm{R},X)$, $F(a+bX+cX^2)=(a+b)+(b-c)X$, $\mathrm{B}=(1,X,X^2)$, $\mathrm{B}'=(1,X)$.

b) $F:\mathrm{R}^{2\times2}\to\mathrm{R}^{2\times2}$, $F(A)=A^t$, $\mathrm{B}=\mathrm{B}'=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right)$

c) F: $\mathrm{P}_1(\mathrm{R},X)\to\mathrm{P}_3(\mathrm{R},X)$, $F(p)=X^2p$, $\mathrm{B}=(1,1+X)$, $\mathrm{B}'=(1,X,X^2,X^3)$.

d) $V=\langle f_1,f_2,f_3\rangle$, donde $f_1(x)=e^{2x}$, $f_2(x)=xe^{2x}$, $f_3(x)=x^2e^{2x}$. $D:V\to V$ la aplicación derivada y $\mathrm{B}=\mathrm{B}'=(f_1,f_2,f_3)$.

27. Sean $T_1,T_2:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$ dadas por $T_1(x_1,x_2)=(x_1,-x_1+x_2)$, $T_2(x_1,x_2)=(0,-x_1)$. Determinar las matrices de las siguientes aplicaciones lineales, respecto de la base canónica de R^3: T_1, T_2, $2T_1+3T_2$, T_1T_2, T_2T_1.

28. Sean $T_1,T_2,T_3:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3$ aplicaciones lineales definidas como sigue:

i) $T_1(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3,x_2-x_3,x_3)$

ii) $T_2(x_1,x_2,x_3)=(x_2,2x_1,x_3-x_1-x_2)$

iii) $T_3(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_2+x_3,-x_3)$.

Determinar $(2T_1+T_2-T_3)(1,-1,1)$ y $(T_3T_2T_1)(1,-1,1)$.

29.

a) Sea T: $\mathrm{P}_2(\mathrm{R},X)\to\mathrm{R}^3$ dada por $T(1)=(1,1,1)$, $T(X)=(0,1,1)$, $T(X^2)=(0,0,1)$. Mostrar que T es inversible y determinar T^{-1}.

b) Sea $V=\langle f_1,f_2\rangle$ con $f_1(x)=e^x$ y $f_2(x)=e^{2x}$ y sea $T:V\to\mathrm{P}_1(\mathrm{R},X)$ dada por $T(f_1)=1-X$ y $T(f_2)=1+X$. ¿Es T inversible? Justifique su respuesta. En caso afirmativo calcule $T^{-1}(2+3X)$.

c) Sea $T:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3$ dada por $T(e_1)=3e_1+e_2+e_3$, $T(e_2)=e_1-e_2+2e_3$, $T(e_3)=-2e_2+e_3$. Muestre que T es inversible y determine T^{-1}.

30. Sea $V=\langle f_1,f_2,f_3\rangle$ con $f_1(t)=t$, $f_2(t)=\sin^2(t)$, $f_3(t)=\cos^2(t)$. Sea $F:V\to V$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base $\mathrm{B}=(f_1,f_2,f_3)$ es

$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$. Determinar $F(g)$, donde $g(t)=t+\cos(2t)$.

31. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$. Determinar:

a) El núcleo y la imagen de T.

b) La imagen de la recta $l=\{(1,-1,-1)+t(3,0,2)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

32. Sea T: $\mathrm{P}_2(\mathbb{R},X)\to\mathrm{P}_1(\mathbb{R},X)$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de las bases $\mathrm{B}=(1,X,X^2)$ y $\mathrm{B}'=(1,X)$ es $A=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&1\end{bmatrix}$. Determinar $M_{\mathrm{B}_1'}^{\mathrm{B}_1}(T)$ si $\mathrm{B}_1=(1+X+X^2,1+X^2,-X+X^2)$ y $\mathrm{B}_1'=(1+X,-1)$.