Clase 11

June 14, 2022

Producto cruz

Este producto está definido sobre vectores de $\mathbb{R}^3$. Y es de la siguiente manera,

Definition 1 *Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$. Entonces el **producto cruz** $u \times v$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ definido por*

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

o, en notación de determinantes,

$$u \times v = \left(\det \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix},\ -\det \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix},\ \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\right).$$

Remark 2 *Para calcular $u \times v$ y recordar mejor la fórmula de la definición se puede armar una matriz 2×3 donde la primera fila sean las componentes de u y la segunda fila las componentes de v:*

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

y entonces para la primer componente *de $u \times v$ se* elimina la primera columna *y se calcula el determinante de la matriz 2×2 resultante. Luego para la* segunda componente *de $u \times v$ se* elimina la segunda columna *y se calcula el opuesto del determinante de la matriz 2×2 resultante. Finalmente para la* tercera componente *de $u \times v$ se* elimina la tercer columna *y se calcula el determinante de la matriz 2×2 resultante.*

Example 3 *Dados $u = (1, 2, -2)$ y $v = (3, 0, 1)$, calculemos $u \times v$.*

Formamos la matriz 2×3 como dijimos anteriormente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y entonces

$$\begin{aligned} u\times v &= \left(\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ -\det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ u\times v &= (2,-7,-6). \end{aligned}$$

A continuación mostraremos algunas relaciones entre el producto cruz y el producto interno entre vectores de $\mathbb{R}^3$.

Theorem 4 *Si u, v, w son vectores en $\mathbb{R}^3$ entonces*

1. $u.(u\times v)=0$ *(esto dice que $u\times v$ es ortogonal a u)*
2. $v.(u\times v)=0$ *(esto dice que $u\times v$ es ortogonal a v)*
3. $\|u\times v\|^2=\|u\|^2\|v\|^2-(u.v)^2$ *(identidad de Lagrange)*
4. $u\times(v\times w)=(u.w)v-(u.v)w$
5. $(u\times v)\times w=(u.w)\,v-(v.w)u$

Proof. 1) Esto se comprueba calculando primero el vector $u\times v$: Supongamos que $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$ entonces (como en la definición de $u\times v$)

$$u\times v=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)$$

y ahora hacemos el producto punto,

$$\begin{aligned} u.\,(u\times v) &= (u_1,u_2,u_3).(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1) \\ &= u_1(u_2v_3-u_3v_2)+u_2(\ u_3v_1-u_1v_3)+u_3(u_1v_2-u_2v_1) \\ &= u_1u_2v_3-u_1u_3v_2+u_2u_3v_1-u_2u_1v_3+u_3u_1v_2-u_3u_2v_1 \\ &= (u_1u_2v_3-u_2u_1v_3)+(-u_1u_3v_2+u_3u_1v_2)+(u_2u_3v_1-u_3u_2v_1) \\ &= 0+0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) Sale igual que 1).

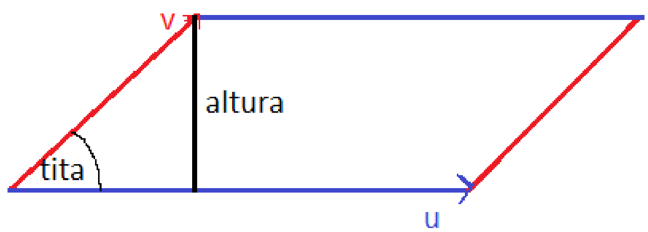
3) Recordemos que la norma al cuadrado de un vector es la suma del cuadrado de sus componentes (Ver *Clase* 10). Luego como

$$u\times v=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)$$

entonces el lado izquierdo,

$$\begin{aligned} \|u\times v\|^2 &= (u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(\ u_1v_2-u_2v_1)^2 \\ &= \left[(u_2v_3)^2-2u_2v_3u_3v_2+(u_3v_2)^2\right]+ \\ &\quad +\left[(u_3v_1)^2-2u_3v_1u_1v_3+(u_1v_3)^2\right]+\left[(u_1v_2)^2-2u_1v_2u_2v_1+(u_2v_1)^2\right] \\ (*) \quad &= (u_1v_3)^2+(u_1v_2)^2+(u_2v_1)^2+(u_2v_3)^2+(u_3v_2)^2+(u_3v_1)^2 \\ &\quad -2u_2v_3u_3v_2-2u_3v_1u_1v_3-2u_1v_2u_2v_1 \end{aligned}$$

Fig. 1



ahora desarrollamos el lado derecho y ver que queda igual a (*)

$$\begin{aligned} \|u\|^2 \|v\|^2 - (u.v)^2 &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \\ &= (\text{terminar}) \,. \end{aligned}$$

4) y 5) se demuestran igual que 3), se desarrollan ambos lados de la igualdad y se ve que coinciden. (ejercicio). ■

Remark 5 *Del inciso* 3) *del Teorema anterior (identidad de Lagrange) podemos deducir lo siguiente: si* θ *es el ángulo que forman* u *y* v*,*

$$\begin{aligned} \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - (u.v)^2 \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 - [\|u\| \|v\| \cos(\theta)]^2 \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 \left[1 - \cos^2(\theta)\right] \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

y luego tomando raiz cuadrada,

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin(\theta).$$

Ahora veamos lo siguiente. Dibujamos un paralelogramo con lados formados por los vectores u y v (Ver $Fig.$1)
vemos que en el triángulo formado por v y la altura queda que

$$altura = \|v\| \sin(\theta)$$

y entonces el *área de dicho paralelogramo* es

$$\begin{aligned} Area &= (base)(altura) \\ &= \|u\| \|v\| \sin(\theta) \\ &= \|u \times v\| \,. \end{aligned}$$

Remark 6 *Incluso si* u *y* v *son paralelos se tendría que* $u \times v = 0$ *(calcular) y no habría paralelogramo ya que ambos vectores están en la misma dirección, con lo que* $Area = 0$*.*

Ecuación normal de un plano en R^3

Recordemos que un plano π puede ser dado mediante su ecuación vectorial

$$(x, y, z) = P + tu + sv$$

donde u, v son vectores directores de dicho plano. Por lo que vimos antes, el vector $u \times v$ es ortogonal a u y v. Luego sería ortogonal a cualquier vector del plano (ya que será combinación lineal de u y v). O sea si w es otro vector del plano π entonces existen escalares a y b tales que

$$w = au + bv$$

y luego si calculamos el producto punto:

$$\begin{aligned} w.(u \times v) &= (au + bv).(u \times v) \\ (1) &= au.(u \times v) + bv.(u \times v) \\ (2) &= a\,[u.(u \times v)] + b\,[v.(u \times v)] \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir que $u \times v$ es ortogonal a w.

(1) inciso 2 del Teorema 8 de la clase 10. (2) inciso 3 del Teorema 8 de la clase 10.

Consideremos ahora $P = (p_1, p_2, p_3)$ un punto en dicho plano. Entonces para cualquier punto genérico $X = (x, y, z)$ que pertenezca al plano π tenemos que el vector $X - P$ está en el plano π. Ahora bien, si $n = (a, b, c)$ es un vector normal al plano π (por ejemplo puede ser el producto cruz entre sus vectores directores) entonces, como antes, se tiene que

$$(X - P)\,.n = 0$$

y esta se denomina la ecuación normal del plano π (Ver $Fig.2$).

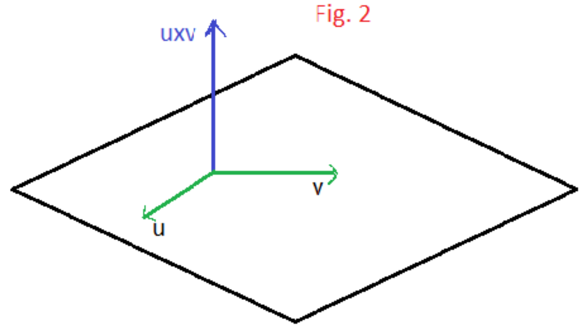
Example 7 *Dar la ecuación normal del plano definido por su ecuación vectorial*

$$(x, y, z) = (1, 1, -2) + t(1, 0, -1) + s(0, 1, 2)$$

Tenemos que $u = (1, 0, -1)$ y $v = (0, 1, 2)$ son los vectores directores del plano en cuestión. Podemos calcular un vector normal $n = u \times v$. Ponemos la matriz 2×3 cuya primera fila son las componentes de u y la segunda fila las componentes de v:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y ahora calculamos



$$
\begin{aligned}
n &= u \times v \\
&= \left(\det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= (1, -2, 1)
\end{aligned}
$$

entonces la ecuación normal queda:

$$
\begin{aligned}
(X - P) . n &= 0 \\
\left[(x, y, z) - (1, 1, -2) \right] . (1, -2, 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Remark 8 *Si $n = (a, b, c)$ es un vector normal a un plano π y $P = (p_1, p_2, p_3) \in \pi$ entonces desde la ecuación normal de dicho plano podemos ver que*

$$
\begin{aligned}
(X - P).n &= 0 \\
(x - p_1, y - p_2, z - p_3).(a, b, c) &= 0 \\
(x - p_1)a + (y - p_2)b + (z - p_3)c &= 0 \\
ax + by + cz + (-p_1 a - p_2 b - p_3 c) &= 0
\end{aligned}
$$

llamando $d = (-p_1 a - p_2 b - p_3 c)$ tenemos que

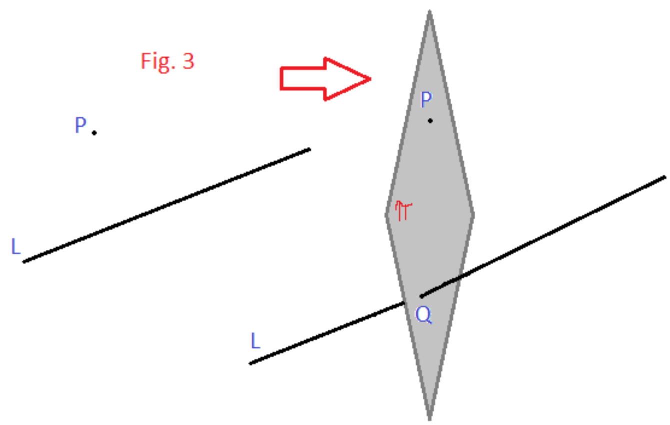
$$ax + by + cz + d = 0$$

es la ecuación cartesiana del plano π. Y se aprecia que los coeficientes a, b, c son justamente las componentes de un vector normal n a dicho plano.

Example 9 *Dado el plano cuya ecuación cartesiana es*

$$5x - 4y - z + 8 = 0$$

dar su ecuación normal.



Por lo que vimos antes tenemos que un vector normal a dicho plano es $n = (5, -4, -1)$. Luego elegimos un punto P que esté en dicho plano. Basta elegir x, y, z que satisfagan la ecuación dada. Por ejemplo $x = 0, y = 0, z = 8$. Y entonces $P = (0, 0, 8)$. Con lo que la ecuación normal queda

$$[(x, y, z) - (0, 0, 8)] . (5, -4, -1) = 0.$$

Cálculo de distancias

Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$

Dado un punto P y una recta L en $\mathbb{R}^3$ para encontrar la distancia entre ambos debemos trazar un plano π que sea perpendicular a la recta L (esto podría interpretarse como que la dirección de la recta sea normal al plano) y que contenga al punto P (Ver $Fig.3$)

luego se calcula la intersección entre la recta L y el plano π (ahí encontramos el punto Q) y finalmente se calcula la distancia entre los puntos P y Q. Esa será la distancia entre el punto P y la recta L (la menor de todas las distancias entre el punto P y los puntos de la recta L).

Example 10 *Calcular la distancia entre el punto $P = (3, 1, 0)$ y la recta L dada por ecuación vectorial $(x, y, z) = (-1, 3, 2) + t(1, 0, 1)$.*

Ya que queremos un plano que pase por P y sea perpendicular a L podemos tomar el vector director de L y que este sea un vector normal a dicho plano! O sea $n = (1, 0, 1)$ y así tenemos la ecuación normal del plano π

$$\begin{aligned} (X - P).n &= 0 \\ [(x, y, z) - (3, 1, 0)] . (1, 0, 1) &= 0 \end{aligned}$$

pasamos a la ecuación cartesiana del plano π:

$$\begin{aligned}
[(x,y,z)-(3,1,0)].(1,0,1) &= 0\\
(x-3,y-1,z).(1,0,1) &= 0\\
x-3+z &= 0\\
\mathbf{x}+\mathbf{z} &= \mathbf{3}
\end{aligned}$$

Ahora debemos encontrar el punto Q que resulta de intersecar la recta L con el plano π. Entonces debemos estudiar la intersección $L \cap \pi$: Podemos trabajar con las ecuaciones vectoriales, con las ecuaciones cartesianas o con ambas! Tomamos la vectorial de L:

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= (-1,3,2)+t(1,0,1)\\
(x,y,z) &= (-1+t,\ 3,\ 2+t)
\end{aligned}$$

y reemplazamos estos (x,y,z) en la ecuación del plano: y encontramos el t

$$\begin{aligned}
x+z &= 3\\
-1+t+2+t &= 3\\
1+2t &= 3\\
t &= 1
\end{aligned}$$

reemplazando dicho valor del parámetro en la ecuación de L encontramos el punto Q:

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= (-1,3,2)+\mathbf{t}(1,0,1)\\
&= (-1,3,2)+\mathbf{1}(1,0,1)\\
&= (0,3,3)
\end{aligned}$$

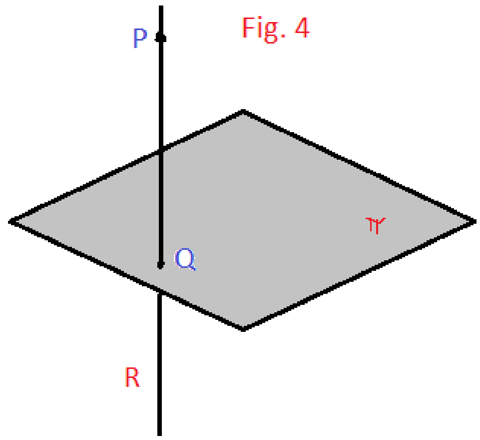
Es decir, $Q=(0,3,3)$.
Finalmente calculamos la distancia entre P y Q:

$$\begin{aligned}
dist(P,Q) &= \|Q-P\|\\
&= \|(0,3,3)-(3,1,0)\|\\
&= \|(-3,2,3)\|\\
&= \sqrt{(-3)^2+2^2+3^2}\\
&= \sqrt{22}.
\end{aligned}$$

Entonces la distancia del punto P a la recta L es de $\sqrt{22}$.

Distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$

Dados un plano π y un punto P fuera del plano entonces podemos calcular su distancia al plano π. La idea será trazar por P una recta R perpendicular



al plano π (podemos pensar que dicha recta tendrá como vector director a un vector normal al plano π). (Ver $Fig.4$)

Entonces estudiamos la intersección $R \cap \pi$ que nos dará un punto Q. Luego medimos la distancia entre P y Q y listo.

Example 11 *Dados el plano π con ecuación cartesiana $2x - y + z = 2$ y el punto $P = (3, 1, 0)$, se pide encontrar su distancia.*

Sabemos que cuando tenemos un plano dado con ecuación cartesiana, podemos obtener las componentes de un vector normal al mismo con los coeficientes que multiplican a x, y, z. O sea que el vector $n = (2, -1, 1)$ es normal al plano π.

Luego queremos una recta que pase por P y que sea perpendicular a π, es decir que su vector director sea justamente n:

$$\begin{aligned} R &: \quad X = P + tn \\ (x, y, z) &= (3, 1, 0) + t(2, -1, 1) \end{aligned}$$

Ahora queremos estudiar encontrar el punto Q que resulta de intersecar $R \cap \pi$. (Aca lo podemos hacer de muchas formas pero al tener ecuación cartesiana para π y ecuación vectorial para R reemplazamos una en la otra):

la ecuación vectorial de R,

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (3, 1, 0) + t(2, -1, 1) \\ &= (3 + 2t,\ 1 - t,\ t) \end{aligned}$$

reemplazo dicho (x,y,z) en la ecuación del plano:

$$\begin{aligned}
2x - y + z &= 2\\
2(3+2t) - (1-t) + t &= 2\\
6 + 4t - 1 + t + t &= 2\\
6t + 5 &= 2\\
t &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

con lo que, reemplazando el valor de dicho parámetro en la ecuación vectorial de la recta R obtenemos

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= (3,1,0) + \mathbf{t}(2,-1,1)\\
&= (3,1,0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(2,-1,1)\\
&= \left(2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

O sea $Q = \left(2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Finalmente calculamos la distancia entre P y Q:

$$\begin{aligned}
dist(P,Q) &= \|Q - P\|\\
&= \left\|\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\|\\
&= \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\\
&= \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Es decir que la distancia entre P y el plano π es $\sqrt{\frac{3}{2}}$.