INTEGRALES TRIPLES

REGIONES ELEMENTALES EN $\mathbb{R}^3$

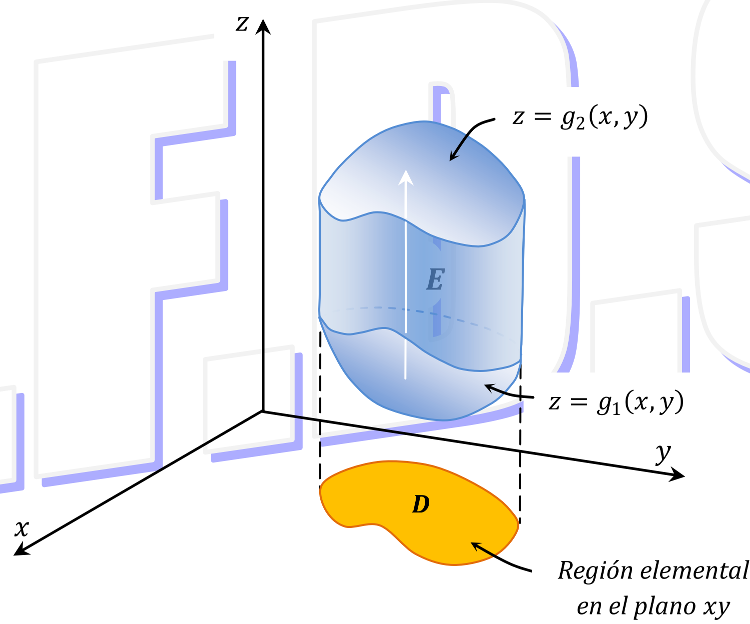
Como en el caso de las integrales dobles, aquí también se restringe la integración triple a ciertos tipos de regiones simples. Una región elemental en $\mathbb{R}^3$ es aquella en la que una de las variables está entre 2 funciones de las otras 2 variables, siendo los dominios de estas funciones una región elemental en el plano.

Región *z-simple* (o de tipo 1)

Una región sólida E es ***z-simple*** si es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en D, siendo D la proyección del sólido E sobre el plano xy, una región elemental en $\mathbb{R}^2$.



Se puede demostrar que:

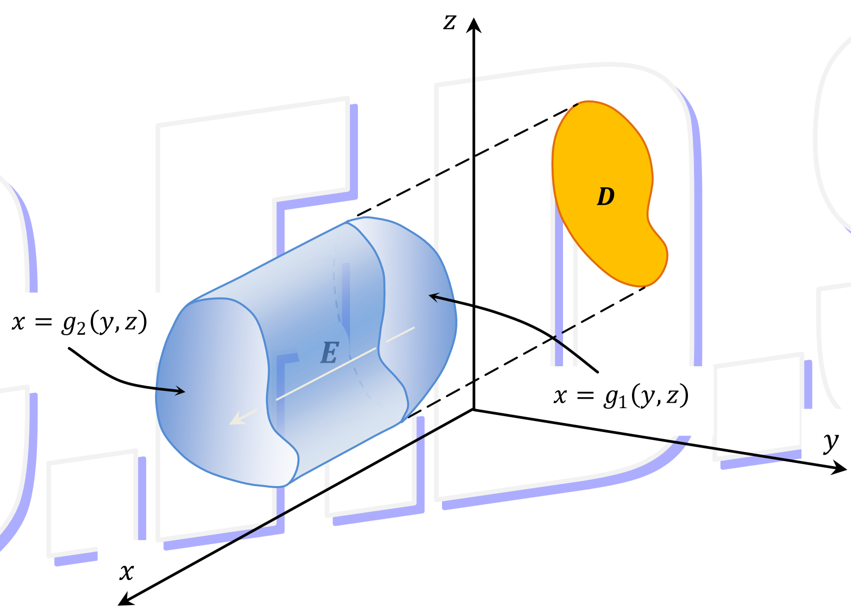
$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA = \begin{cases} \underbrace{\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx}_{\textbf{\textit{Si D es y−simple}}} \\ \\ \overbrace{\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dx\right) dy}^{\textbf{\textit{Si D es x−simple}}} \end{cases}$$

Región *x-simple* (o de tipo 2)

Una región sólida E es ***x-simple*** si es de la forma

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in D, g_1(y,z) \leq x \leq g_2(y,z)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en D, siendo D la proyección del sólido E sobre el plano yz, una región elemental en $\mathbb{R}^2$.



Para este tipo de región se tiene

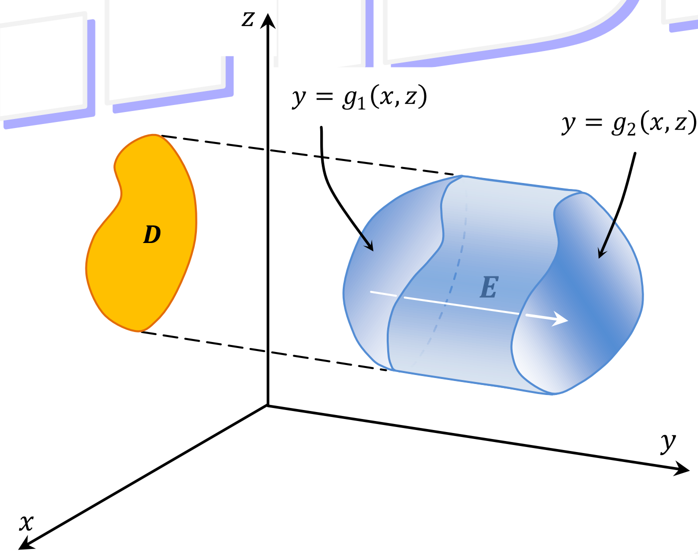
$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right] dA$$

Región *y-simple* (o de tipo 3)

Una región sólida E es ***y-simple*** si es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in D, g_1(x, z) \le y \le g_2(x, z)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en D, siendo D la proyección del sólido E sobre el plano xz, una región elemental en $\mathbb{R}^2$.



Para este tipo de región se tiene

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z)dy\right] dA$$

CÁLCULO DE VOLUMEN

∗ Por ej. si $f(x, y, z) = 1 \ \forall (x, y, z) \in E$ entonces

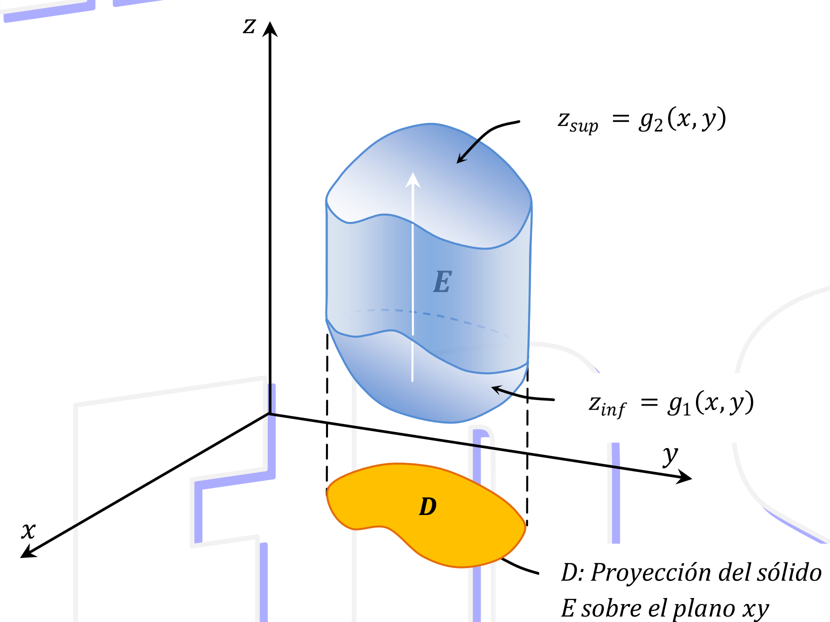
$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \boxed{\iiint_E 1dV = V(E)} \quad \textbf{\textit{Volumen de E}}$$

y si E es una **región *z-simple* o de tipo 1**:

$$V(E) = \iiint_E 1dV = \iint_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz\right) dA$$

$$= \iint_D z|_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \, dA$$

$$\boxed{V(E) = \iint_D \left[\overbrace{g_2(x,y)}^{z_{sup}} - \overbrace{g_1(x,y)}^{z_{inf}}\right] dA}$$



<u>Ejemplo</u>

Utilizando una integral triple obtenga el volumen de la región sólida de $\mathbb{R}^3$ determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

Solución

Cuando se establece una integral triple lo aconsejable es hacer dos diagramas: uno del sólido E y otro de su proyección D sobre el plano xy.

El sólido es:

$$E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x,y)\in D, \underbrace{g_1(x,y)} \le z \le \underbrace{g_2(x,y)}\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x,y)\in D, \overbrace{0} \le z \le \overbrace{1-x-y}\right\}$$

donde D es su proyección sobre el plano xy:

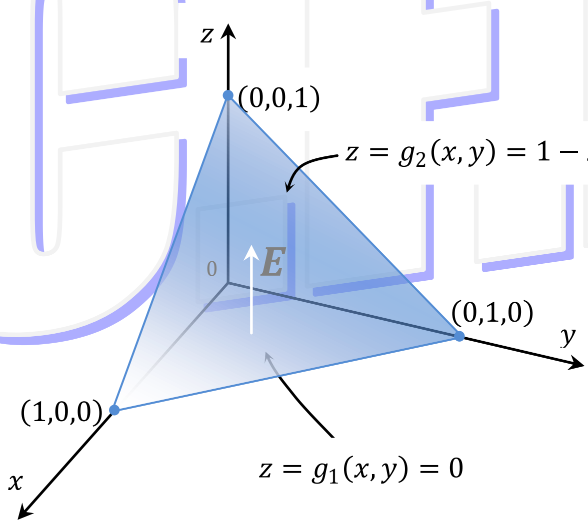
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{a} \le x \le \underbrace{b}, \underbrace{\varphi_1(x)} \le y \le \underbrace{\varphi_2(x)}\right\}$$

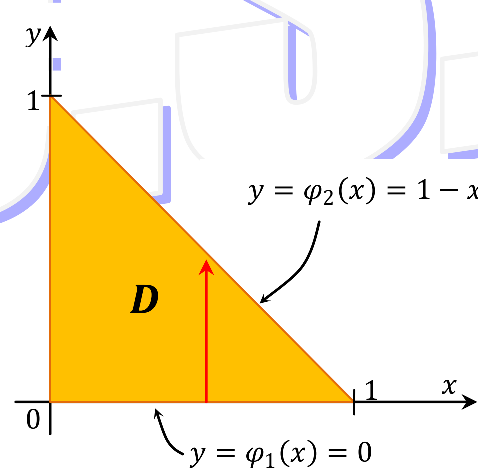
$$= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \overbrace{0} \le x \le \overbrace{1}, \overbrace{0} \le y \le \overbrace{1-x}\right\}$$

(región y- *simple*, también se puede expresar como x-*simple*)

O sea que E es el **tetraedro** sólido acotado por los 4 planos: $x=0$, $y=0$, $z=0$ y $x+y+z=1$.

Y D es el triángulo acotado por las rectas: $x=0$, $y=0$ y $y=1-x$.





Como E es una región tridimensional ***z-simple* o de tipo 1**:

$$V(E) = \iiint_E 1dV = \iint_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz\right) dA$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz\right) dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} [z]_0^{z=1-x-y} dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[1 - x - x + x^2 - \frac{1}{2}(1 - 2x + x^2)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[1 - 2x + x^2 - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[-x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2\right] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

En AMI se utiliza con frecuencia un cambio de variable (una sustitución) para simplificar una integral.

En integrales dobles también puede ser útil realizar un cambio de variables.

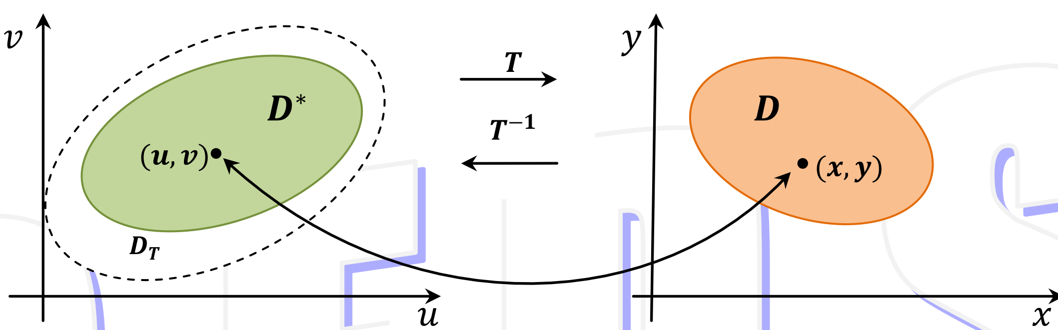
De manera general se considera que un cambio de variables está dado por una transformación

$$T: D_T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; \quad D_T \ \ abierto$$

del plano uv al plano xy

$$(x, y) = T(u, v) = (X(u, v), Y(u, v))$$

con $(u, v) \in \ D^* \subset D_T$



siendo T **regular** en D^*, es decir: $\begin{cases} 1)\ T \in C^1(D^*) \\ 2)\ T\ es\ uno\ a\ uno\ en\ D^*, \\ 3)\ det\,T' \neq 0\ en\ D^* \end{cases}$ de modo que T tiene transformación inversa T^{-1} del plano xy al plano uv.

Al determinante de la matriz Jacobiana de T:

$$\det T' = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

se lo llama **Jacobiano** de la transformación *T*.

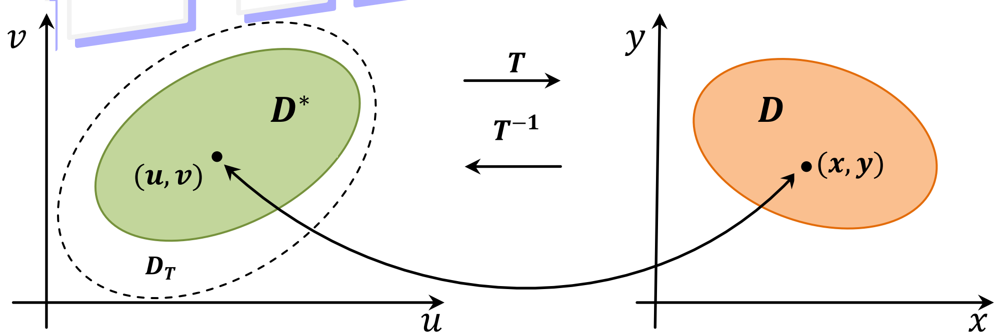
FÓRMULA DEL CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES DOBLES

Sean

- D y D^* regiones elementales en el plano.

- $T: D_T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; D_T abierto
  una transformación regular en $D^* \subset D_T$.

- $D = T(D^*)$, es decir D es la imagen de D^*a través de T.



- $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre $D \subset D_f$.

Entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} \underbrace{f\big(X(u,v), Y(u,v)\big)}_{f\circ T(u,v)} \underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{|\det T'|} dudv$$

Uno de los propósitos del teorema del cambio de variables es el de proporcionar un método que permita simplificar la evaluación de integrales dobles.

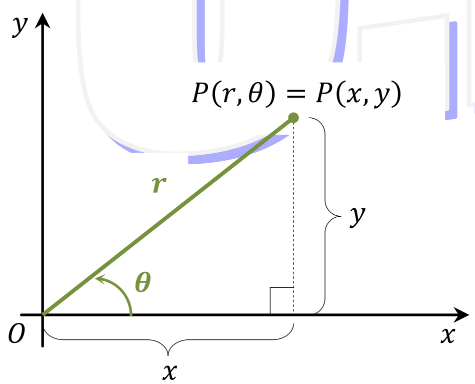
Cuando se tiene que evaluar una $\iint_D f dA$ en la cual el integrando y/ó la región D son complicados, esto suele hacer que el cálculo directo de la integral sea difícil. Por lo tanto, si se elige una transformación adecuada T se puede conseguir que con el nuevo integrando y la nueva región $D^* = T(D)$ la integral sea más fácil de calcular.

Desafortunadamente, a veces, la evaluación de la integral lejos de simplificarse se complica aún más si no se elige a la transformación T cuidadosamente.

COORDENADAS POLARES

Dado que la transformación T definida por:

$$(x, y) = T(r, \theta) = (rcos\theta, rsen\theta)$$



$$con \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & rcos\theta \end{vmatrix}$$

$$= rcos^2\theta + rsen^2\theta = r$$

define el cambio de variables a coordenadas polares, por la fórmula del cambio de variables para integrales dobles se obtiene:

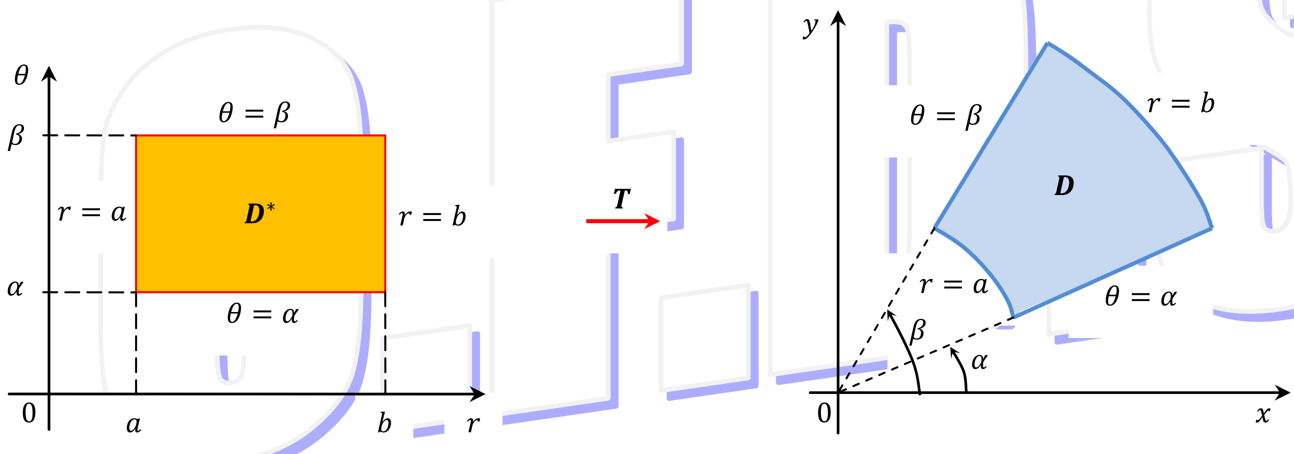
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{D^*} \underbrace{f(rcos\theta, rsen\theta)}_{f \circ T(r,\theta)}\, \underset{\overset{\uparrow}{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|}}{r}\, drd\theta$$

donde $D = T(D^*)$

Por ejemplo, sea el siguiente rectángulo definido por:

$$D^* = \{(r,\theta) | a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \ \leq \beta\} \text{ (rectángulo polar)}$$

Su imagen por T es el anillo D en el plano xy.



Por lo tanto por la fórmula del cambio de variables

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(rcos\theta, rsen\theta)\,r\,drd\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(rcos\theta, rsen\theta)\,r\,dr \right) d\theta$$

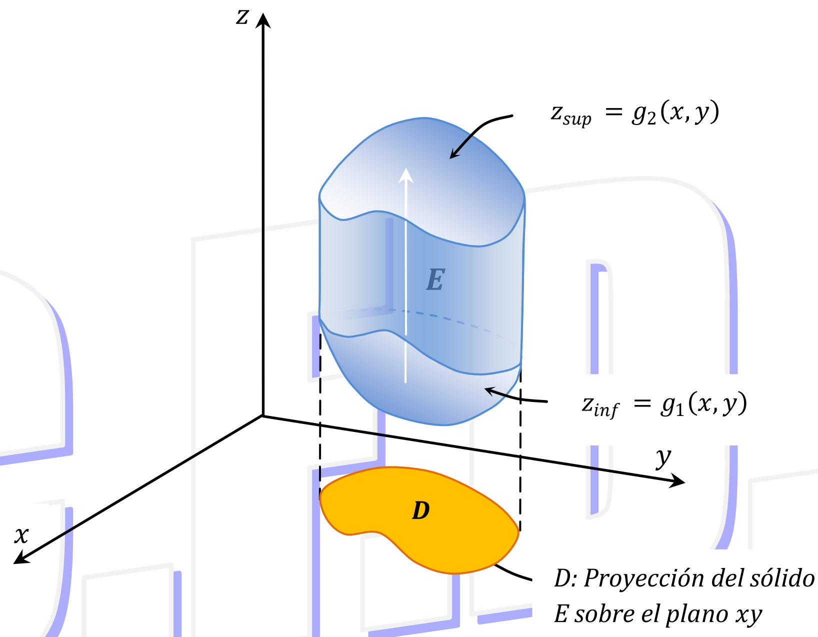
<u>Ejemplo 1</u>

Mediante integración doble obtenga el volumen de la región sólida en $\mathbb{R}^3$ determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x,y,z) que satisfacen la siguiente desigualdad: $x^2 + y^2 \leq z \leq 4$.

<u>Solución</u>

Recordando que para una región z-simple (como es el caso de este ejemplo):

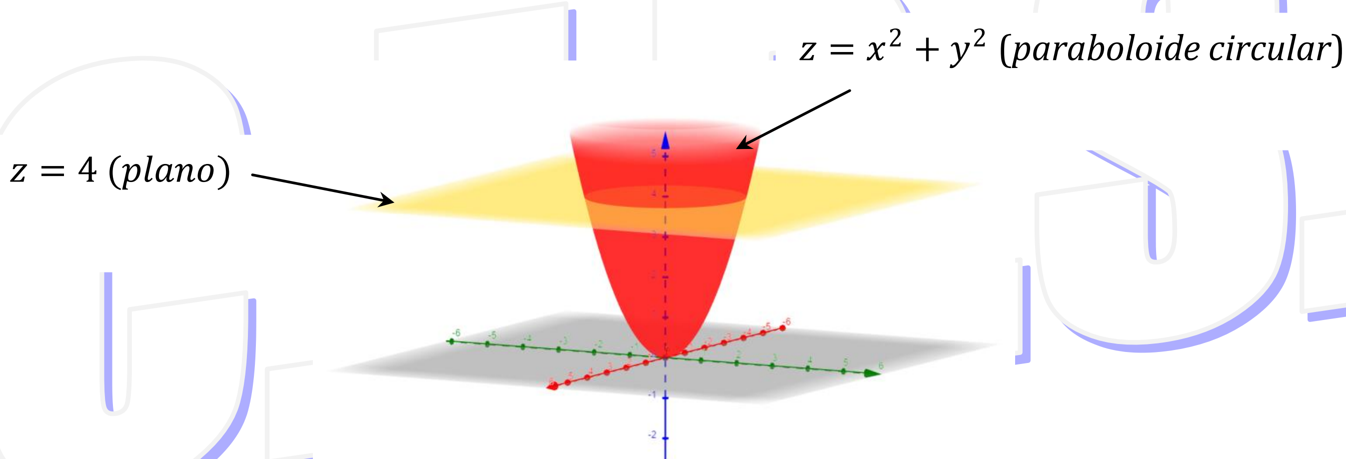
$$V(E) = \iint_D \left[z_{sup} - \quad z_{inf} \right] dA$$



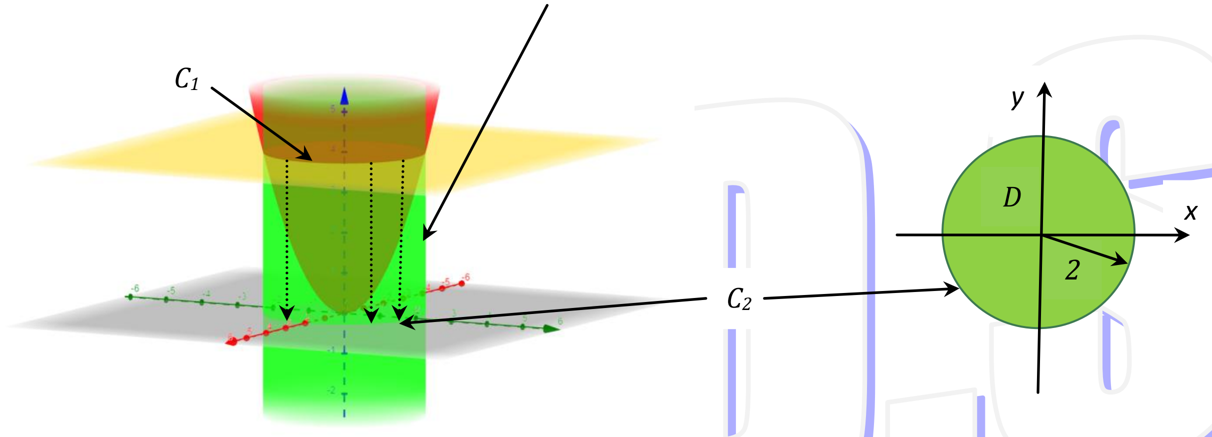
Tenemos entonces:

$$V = \iint_D [g_2(x, y) - g_1(x, y)]\, dA = \iint_D [4 - (x^2 + y^2)]\, dA$$

con $z = g_2(x, y) = 4$ como z_{sup} y $z = g_1(x, y) = x^2 + y^2$ como z_{inf} como se muestra en el siguiente gráfico:



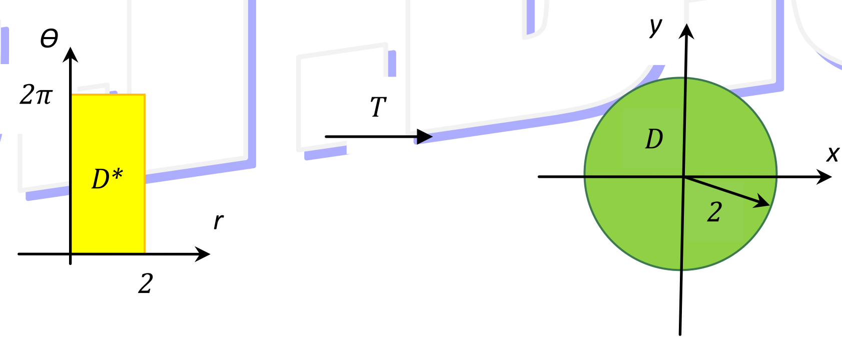
Haciendo $z_{inf} = z_{sup} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2^2$ (cilindro circular de eje z)



A esta superficie cilíndrica $(x^2 + y^2 = 2^2)$ se la llama superficie proyectante porque contiene a la curva C_1 de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el plano *z=4* y la proyecta sobre el plano xy. La curva C_2 -correspondiente a la proyección de C_1 sobre el plano xy- delimita a la región D que es proyección del sólido sobre el plano xy.

$$V = \iint_D \underbrace{[4 - (x^2 + y^2)]}_{f(x,y)} \, dA$$

Pasando a coordenadas polares



$$V = \iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D^*} f(r cos\theta, r sen\theta)\, r\, dr d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(r cos\theta, r sen\theta)\, r\, dr \right) d\theta$$

con $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi, a{=}0,\ b{=}2\ y\ f(r cos\theta, r sen\theta) = 4 - r^2$

$$V=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (4-r^2)\,r\,dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (4r-r^3)\;dr\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2}d\theta$$

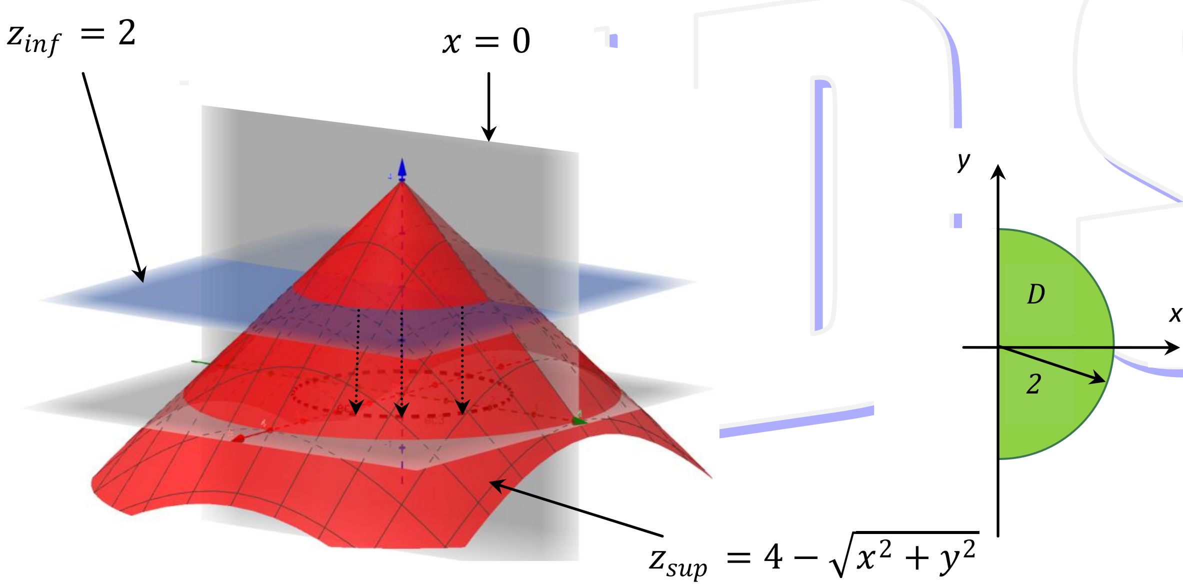
$$\boxed{V=\int_0^{2\pi}(8-4)\,d\theta=\int_0^{2\pi}4\,d\theta=[4\theta]_0^{2\pi}=8\pi}$$

Ejemplo 2

Mediante integración doble obtenga el volumen de la región sólida en $\mathbb{R}^3$ determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x,y,z) que satisfacen el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 2\le z\le 4-\sqrt{x^2+y^2} \\ x\ge 0 \end{cases}$$

Solución



$$z_{inf}=z_{sup}\;\Rightarrow\;\; 2=4-\sqrt{x^2+y^2}\;\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=2\Rightarrow x^2+y^2=2^2$$

$$V = \iint_D \left[z_{sup} - z_{inf}\right] dA = \iint_D \left[4 - \sqrt{x^2+y^2} - 2\right] dA = \iint_D \left[2 - \sqrt{x^2+y^2}\right] dA$$

Pasando a coordenadas polares: $\boxed{D^* = \left\{(r,\theta) \middle| -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\right\}}$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 (2-r)\, r\, dr\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 (2r - r^2)\ dr\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$\boxed{V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \frac{8}{3}\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3} d\theta = \left[\frac{4}{3}\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi}$$

FÓRMULA DEL CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES TRIPLES

Sea

- $E\ y\ E^*$ regiones en el espacio
- $T: D_T \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad ; \ D_T \ abierto$

  una transformación regular en $E^* \subset D_T$
- $E = T(E^*)$, es decir E es la imagen de E^*a través de T
- $f: D_f \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre $E \subset D_f$

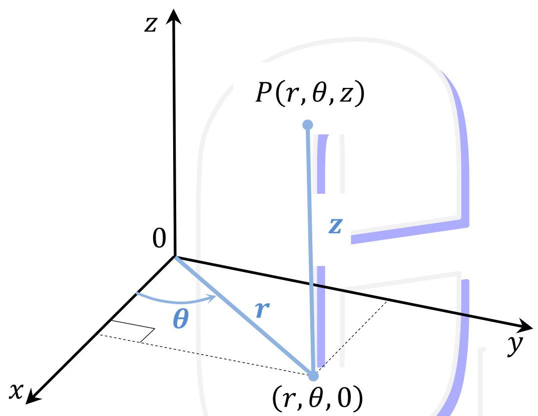
Entonces

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{E^*} f(X(u,v,w), Y(u,v,w), Z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS

Dado que la transformación T definida por:

$$(x, y, z) = T(r, \theta, z) = (rcos\theta, rsen\theta, z)$$



$$con \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

define el cambio de variables a coordenadas cilíndricas, por la fórmula del cambio de variables para integrales triples se obtiene:

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{E^*} f(rcos\theta, rsen\theta, z)\, \underbrace{r}_{\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|}\, drd\theta dz$$

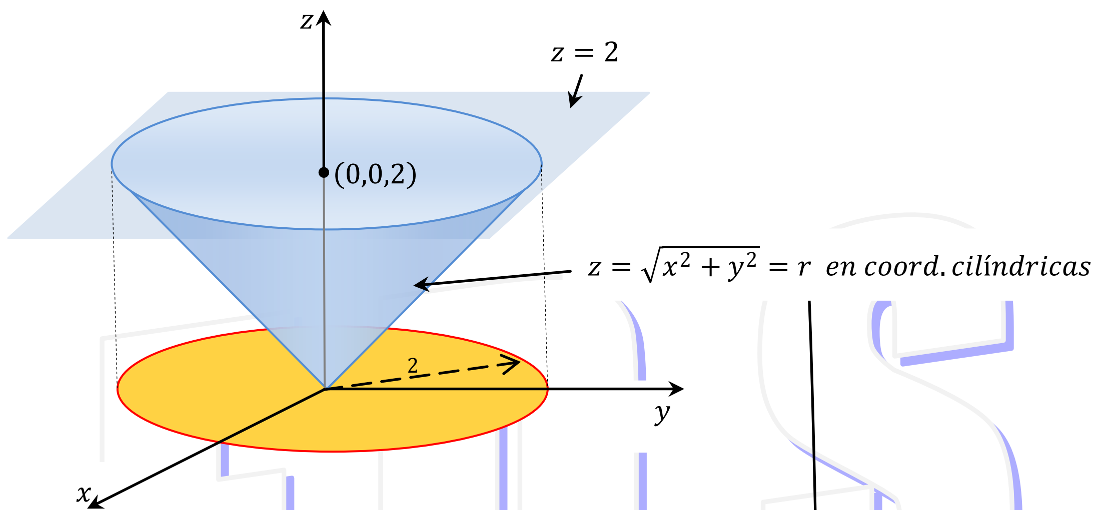
donde $E = T(E^*)$

Ejemplo 3

Utilice coordenadas cilíndricas para evaluar $\iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$ donde E:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2$$

Solución:



$$\iiint_E (x^2+y^2)\,dV = \iiint_E f(x,y,z)\,dV$$

$$= \iiint_{E^*} f(r\cos\theta, r\,sen\theta, z)\, r\, dr d\theta dz$$

$$\boxed{E^* = \{(r,\theta,z) | 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 2, r \le z \le 2\}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_r^2 r^2\, r dz\right)dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_r^2 r^3 dz\right)dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 [r^3 z]_{z=r}^{z=2} dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 [2r^3 - r^4] dr\right)d\theta$$

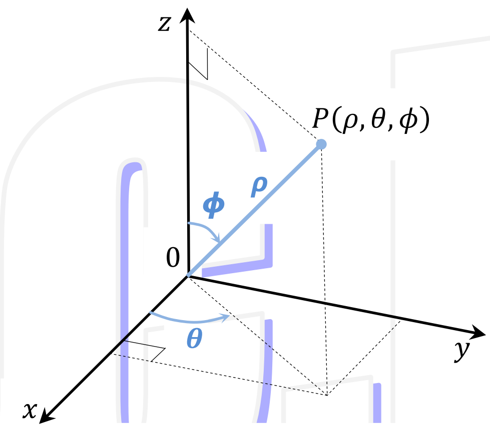
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{2} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{8}{5} d\theta = \frac{16}{5}\pi$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

Dado que la transformación T definida por:

$$(x, y, z) = T(\rho, \theta, \phi) = (\rho sen\phi cos\theta, \rho sen\phi sen\theta, \rho cos\phi)$$



$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \ \phi \leq \pi \qquad 0 \leq \ \theta \leq 2\pi$

$$con \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = -\rho^2 sen\phi$$

define el cambio de variables a coordenadas esféricas, por la fórmula del cambio de variables para integrales triples se obtiene:

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{E^*} f(\rho sen\phi cos\theta, \rho sen\phi sen\theta, \rho cos\phi)\, \underbrace{\rho^2 sen\phi}_{\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)}\right|}\, d\rho d\theta d\phi$$

donde $E = T(E^*)$

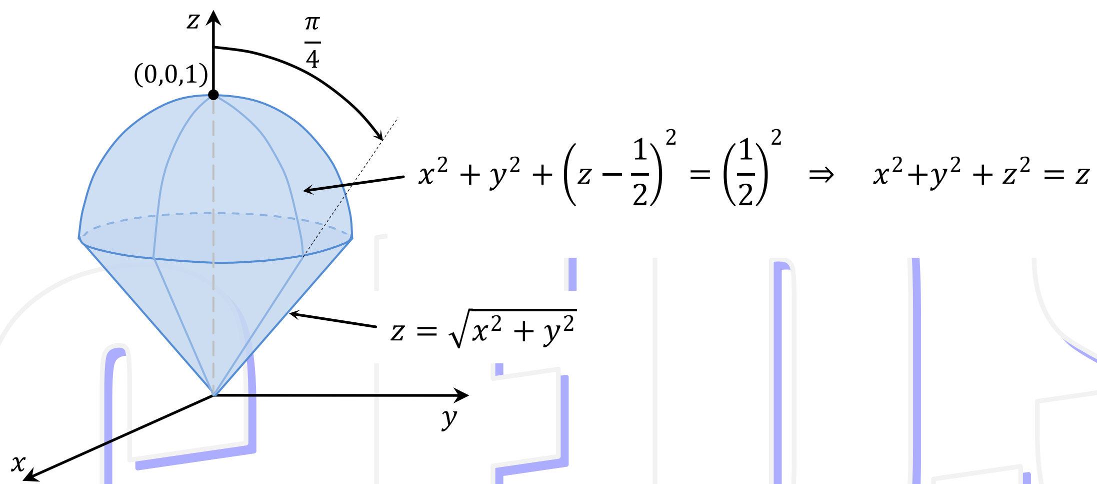
Ejemplo 4

Utilizando coordenadas esféricas obtenga el volumen de la región sólida E en $\mathbb{R}^3$ determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x,y,z) que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}$$

Solución:

$$z=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\ \Rightarrow z-\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\ \Rightarrow\ \left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-x^2-y^2$$



La ecuación del cono en coordenadas esféricas se obtiene del siguiente modo:

$$\underbrace{\rho cos\phi}_{z}=\sqrt{\underbrace{(\rho sen\phi cos\theta)^2}_{x^2}+\underbrace{(\rho sen\phi sen\theta)^2}_{y^2}}$$

$$=\sqrt{\rho^2 sen^2\phi(cos^2\theta+sen^2\theta)}$$

$$\rho cos\phi=\rho sen\phi$$

$$cos\phi=sen\phi\qquad como\ 0\leq\ \phi\leq\pi$$

$$\boxed{\phi=\frac{\pi}{4}}$$

La ecuación de la esfera en coordenadas esféricas se obtiene del siguiente modo:

$$\overbrace{\rho^2sen^2\phi cos^2\theta}^{x^2}+\overbrace{\rho^2sen^2\phi sen^2\theta}^{y^2}+\overbrace{\rho^2cos^2\phi}^{z^2}=\overbrace{\rho cos\phi}^{z}$$

$$\rho^2sen^2\phi(cos^2\theta+sen^2\theta)+\rho^2cos^2\phi=\rho cos\phi$$

$$\rho^2sen^2\phi+\rho^2cos^2\phi=\rho cos\phi$$

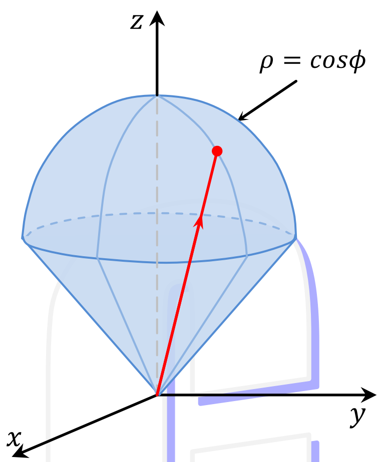
$$\rho^2(sen^2\phi+cos^2\phi)=\rho cos\phi$$

$$\rho^2=\rho cos\phi$$

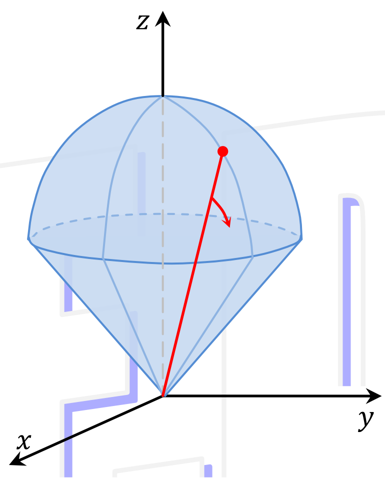
$$\boxed{\rho=cos\phi}$$

$$V(E) = \iiint_E dV = \iiint_{E^*} \rho^2 sen\phi \; d\rho d\phi d\theta$$

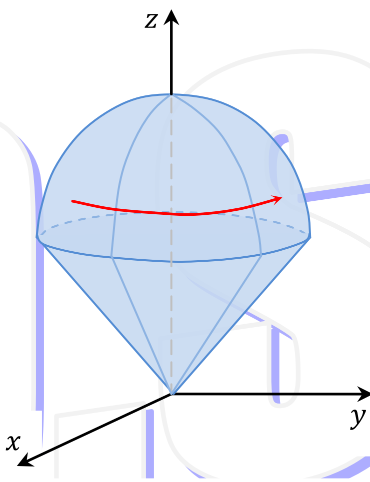
$$E^* = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \middle| \; 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq cos\phi \right\}$$



ρ varía de 0 a $cos\phi$



Φ varía de 0 a $\frac{\pi}{4}$



Θ varía de 0 a 2π

$$V(E) = \iiint_{E^*} \rho^2 sen\phi \; d\rho d\phi d\theta \; = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{cos\phi} \rho^2 sen\phi \; d\rho \right) d\phi \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^3}{3} sen\phi \right]_{\rho=0}^{\rho=cos\phi} d\phi \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos^3\phi}{3} sen\phi \; d\phi \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{cos^4\phi}{12} \right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= -\frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left(cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 \right) d\theta$$

$$= -\frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{16} [\theta]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}$$

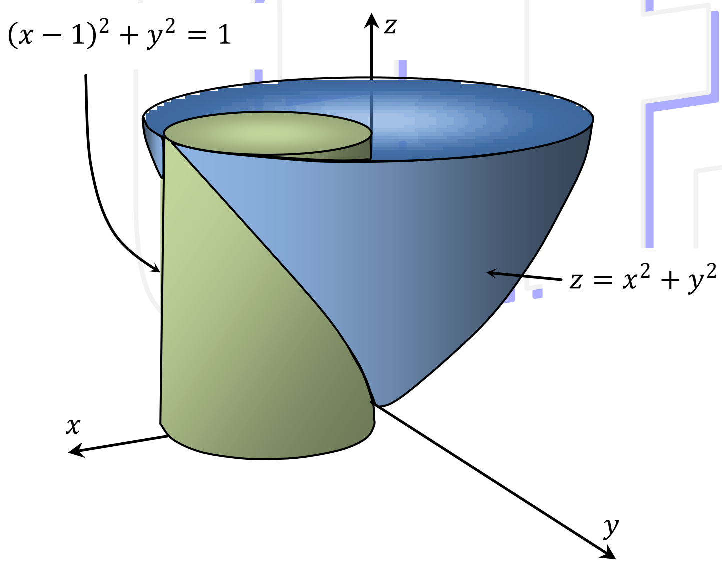
EJERCICIOS

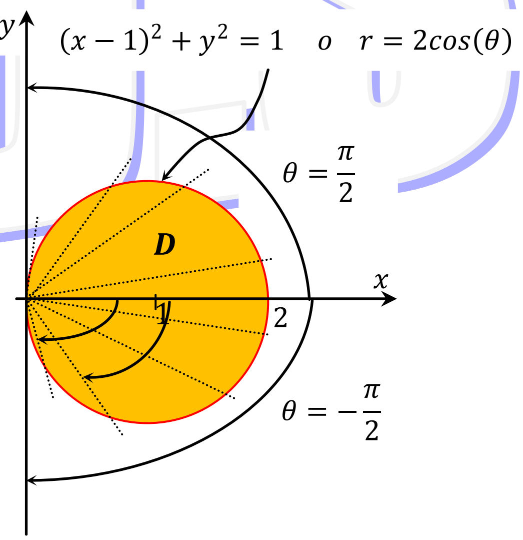
Ejercicio 1

Mediante integración doble obtenga el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \le z \le x^2 + y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$$

Solución





$$V = \iint_D (z_{sup} - z_{inf})dA$$

$$z_{sup} = x^2 + y^2 \quad , \quad z_{inf} = 0$$

$$V = \iint_D (x^2 + y^2 - 0)dA$$

La ecuación de la circunferencia: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ en coordenadas polares es

$$(rcos\theta - 1)^2 + (rsen\theta)^2 = 1$$

$$r^2cos^2\theta - 2rcos\theta + 1 + r^2sen^2\theta = 1$$

$$r^2(cos^2\theta + sen^2\theta) - 2rcos\theta = 0$$

$$r^2 = 2r\cos\theta \quad o \quad r = 2\cos\theta$$

Cambiando a coordenadas polares

$$V = \iint_D (x^2+y^2-0)\,dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} r^2 r\,dr \right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^4\theta = \left[\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right]^2$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right]^2 d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2\cos(2\theta) + \underbrace{\cos^2(2\theta)} \right] d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2\cos(2\theta) + \overbrace{\left(\frac{1+\cos(4\theta)}{2} \right)} \right] d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{2} + 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta) \right] d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta + sen(2\theta) + \frac{1}{8} sen(4\theta) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 + 0 - \frac{3}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0 - 0$$

$$\boxed{V = \frac{3}{2}\pi}$$

$$\int \cos(a\theta)\,d\theta = \frac{1}{a}\int \cos(u)\,du$$

$$= \frac{1}{a} sen(u)$$

$$= \frac{1}{a} sen(a\theta)$$

$$u = a\theta, \quad du = a\,d\theta, \quad d\theta = \frac{1}{a}\,du$$

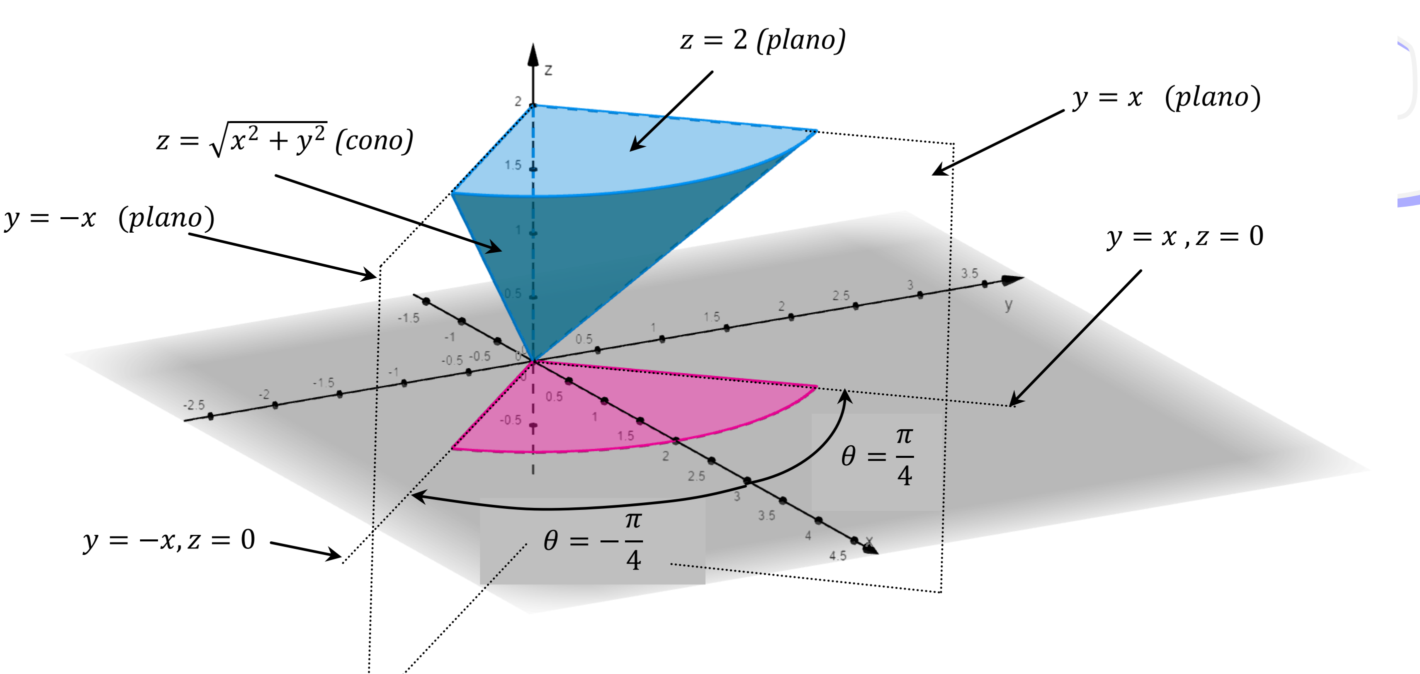
Ejercicio 2

Mediante integración doble obtenga el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \\ -x \leq y \leq x \end{cases}$$

Solución

$$V = \iint_D \left(z_{sup} - z_{inf}\right) dA$$



$$z_{sup} = 2 \quad , \quad z_{inf} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z_{sup} = z_{inf} \quad \Rightarrow \quad 2 = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

$$V = \iint_D \left(z_{sup} - z_{inf}\right) dA = \iint_D \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA$$

Cambiando a coordenadas polares

$$V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 (2-r) r dr \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 (2r - r^2) dr \right) d\theta$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 (2r - r^2) dr \right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(r^2 - \frac{r^3}{3} \right)_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(4 - \frac{8}{3} \right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{3} d\theta$$

$$= \left[\frac{4}{3} \theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{4}{3} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \pi$$

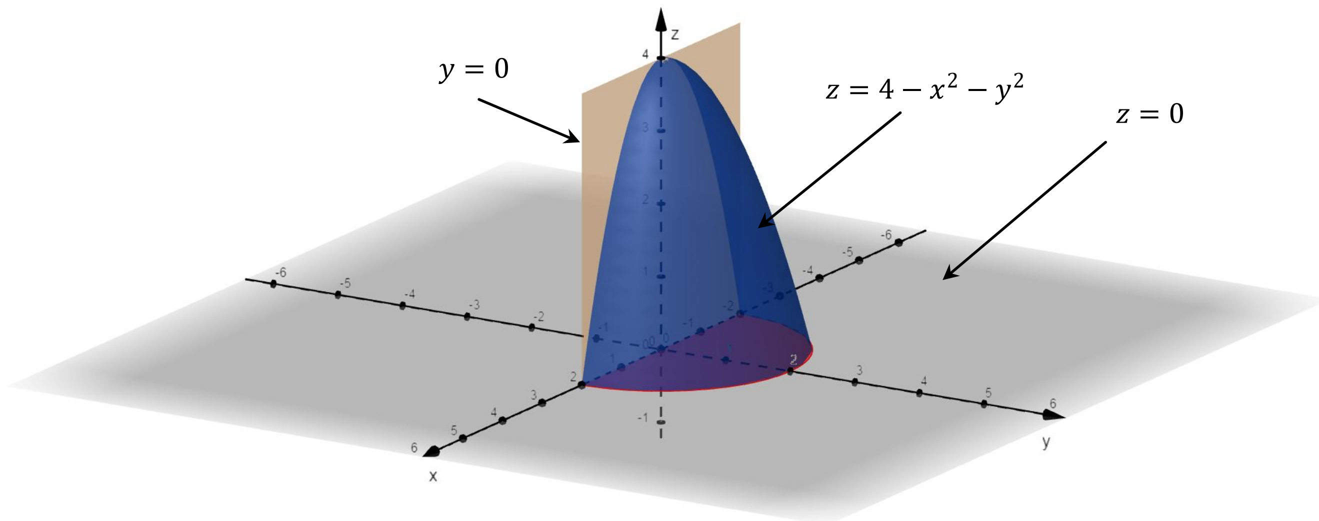
Ejercicio 3

Mediante integración doble obtenga el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución

$$V = \iint_D (z_{sup} - z_{inf}) dA$$



$$z_{sup} = 4 - x^2 - y^2 \quad , \quad z_{inf} = 0$$

$$z_{sup} = z_{inf} \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2$$

Cambiando a coordenadas polares

$$V = \iint_D (z_{sup} - z_{\text{inf}})dA = \iint_D (4 - x^2 - y^2 - 0)\, dA$$

$$= \iint_D \left(4 - (x^2 + y^2)\right) dA$$

Cambiando a coordenadas polares

$$V = \int_0^{\pi} \left(\int_0^2 (4 - r^2)\, r dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_0^2 (4r - r^3)\, dr \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (8 - 4)\, d\theta$$

$$= [4\theta]_0^{\pi} = 4\pi$$