Descripción

- Descripción
- Objetivos
- Temario
- Bibliografía

- Repaso de conceptos de análisis
  - Convergencia
  - Continuidad
  - Derivabilidad
- Se introducen definiciones y consecuencias del trabajo con matemática finita, esto es, las asociadas a las limitaciones de almacena-miento de los ordenadores
- Se define el concepto de algoritmo y estabilidad

Objetivos

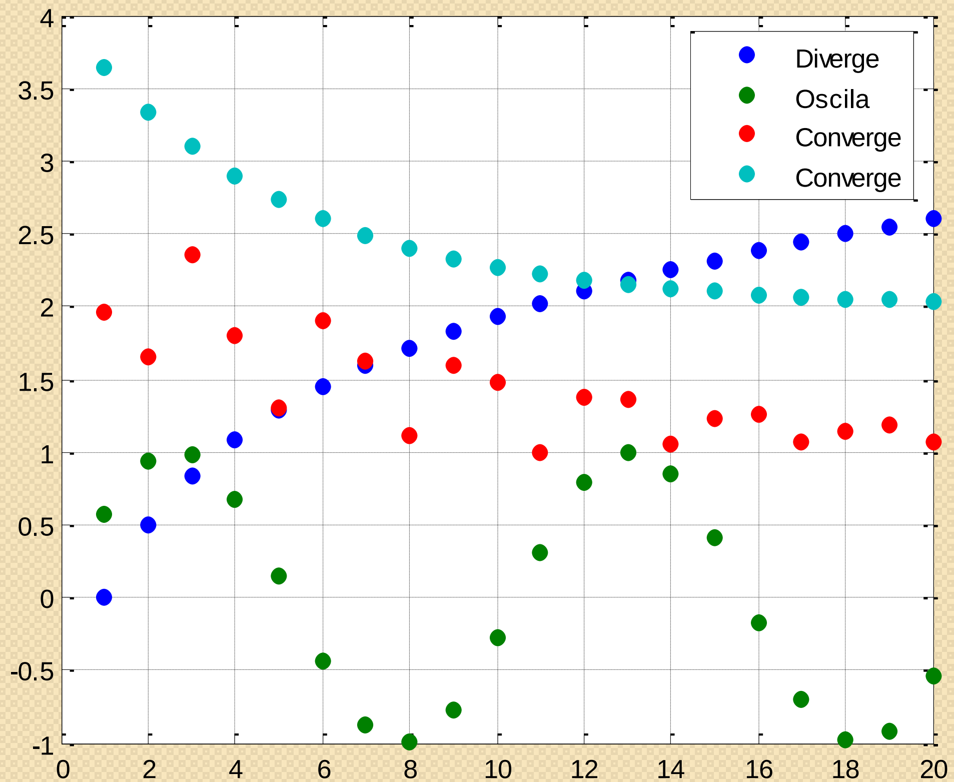
- Descripción
- Objetivos
- Temario
- Bibliografía

- Recordar conceptos de análisis anteriores.
- Entender el concepto de algoritmo y la medida de su eficiencia.
- Comprender la importancia de las técnicas iterativas y su estabilidad.
- Apreciar el significado de la velocidad de convergencia.
- Aprender a utilizar los diagramas de flujo y pseudocódigos.
- Entender la diferencia entre error de truncamiento y de redondeo.
- Entender el concepto de cifras significativas.
- Conocer la diferencia entre exactitud y precisión.
- Apreciar la utilidad del error relativo y de las cotas de error.
- Aprender a relacionar el error relativo con las cifras significativas.
- Saber diferenciar el condicionamiento de un problema del condicionamiento de un algoritmo.

Convergencia

Definición: $$\lim_{n\to\infty} x_n = L \text{ si } \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)/\mathrm{n} > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

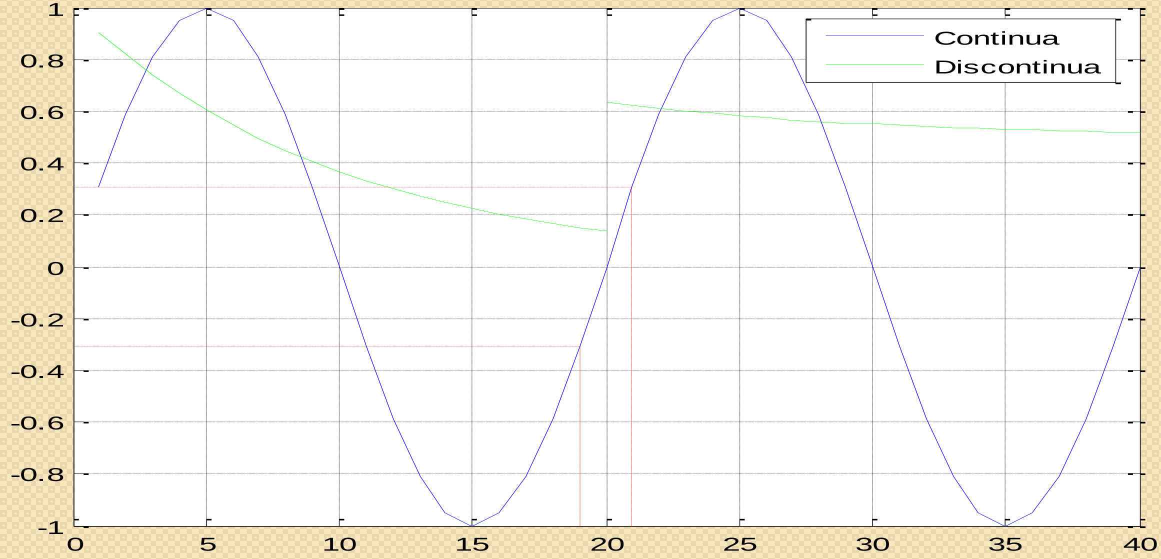
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión infinita de números reales o complejos. Se dice que la sucesión* *converge* *al número L cuando para cualquier número real* $\varepsilon>0$*, existe un entero positivo N(*ε*) tal que cuando n> N(*ε*) se tiene que* $|L-x_n|< \varepsilon$*.*



Límites y continuidad

Definición: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta / |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Sea f(x) una función definida en un conjunto X de números reales. Se dice que f(x) tiene como límite a L en el punto a$\in$X cuando para cualquier número real ε>0, existe otro número real δ tal que siempre que x$\in$X y |x-a|< δ se tiene que |f(x)-L|< ε.



Definición:

Sea f(x) una función definida en un conjunto X de números reales. Se dice que f es continua en a$\in$X si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La función f es continua en X cuando lo es en cada punto de X.

Diferenciabilidad

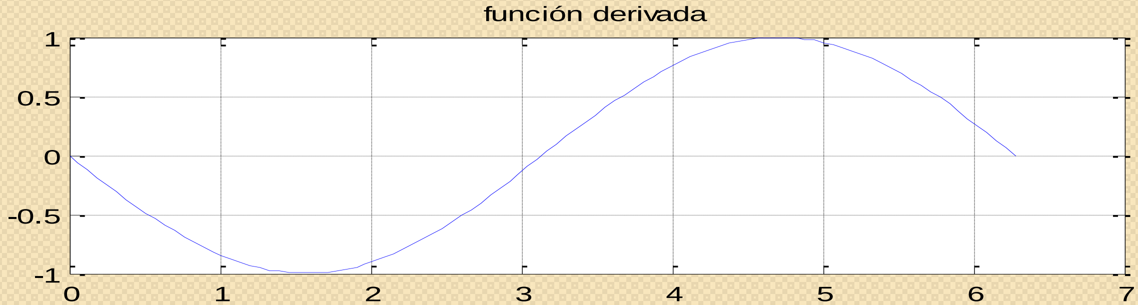
Definición:

Si f es una función definida en un intervalo X abierto que contiene al punto a, se dice que f es diferenciable en a si existe el valor

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La función f es diferenciable en X cuando lo es en cada punto de X.

Se denota por $C^n(X)$ al conjunto de funciones que tienen n derivadas continuas en X



Teoremas Continuidad

Teorema del valor intermedio:

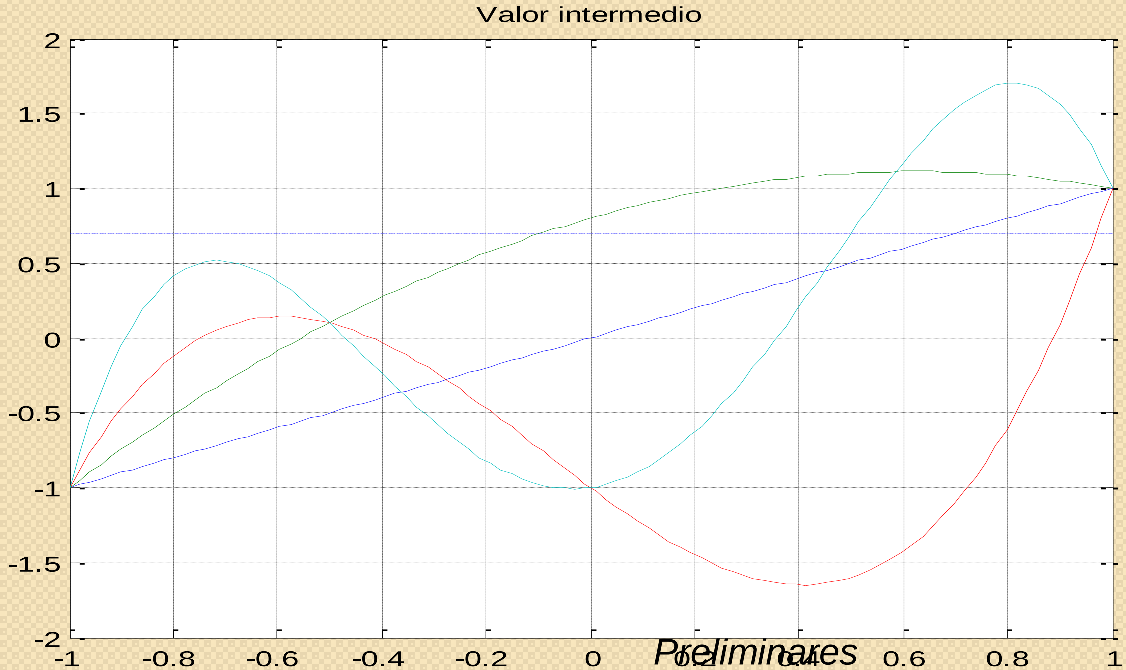
Sea $f(x) \in C([a, b])$ y K un valor cualquiera entre f(a) y f(b), entonces existe un punto $c \in [a,b]$ en que la función toma el valor dado, f(c)=K.

Teorema de Bolzano

Sea f(x) una función continua en [a, b] con valores de signos opuestos en los extremos, entonces existe un punto c en [a,b] en que la función se anula.

Teorema del Valor Extremo

Sea f(x) una función continua en [a, b], entonces alcanza su máximo M y su mínimo m en [a,b], esto es, existen en el intervalo dos puntos c y d tales que f(c)=M y f(d)=m de forma que para todo valor $x \in [a,b]$ se tiene $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$



Teoremas Continuidad y Diferenciabilidad

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

Algoritmos

Bibliografía

Teorema del valor medio:

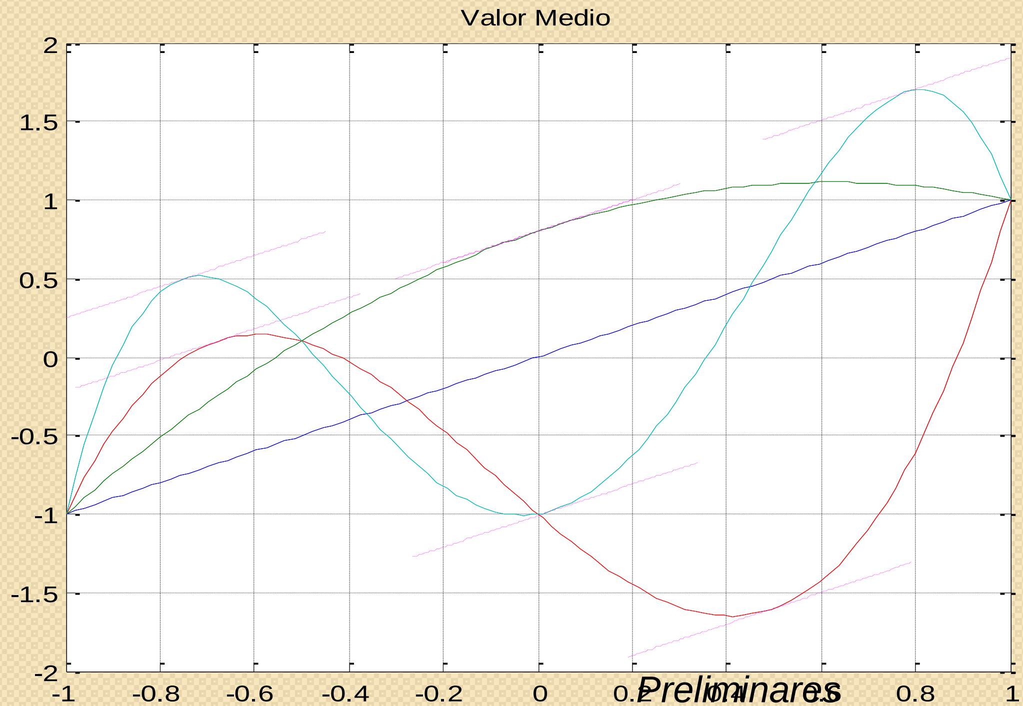
Sea f(x) $\in C[a, b]$ y f(x) $\in C^1(a, b)$ entonces existe un punto c en (a,b) cuya pendiente coincide con la de la recta que une los extremos, esto es

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema del valor medio:generalizado (Cauchy)

Sean f(x),g(x) $\in C[a, b]$ y f(x),g(x) $\in C^1(a, b)$ entonces existe al menos un punto c en (a,b) tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$



Teoremas Diferenciabilidad

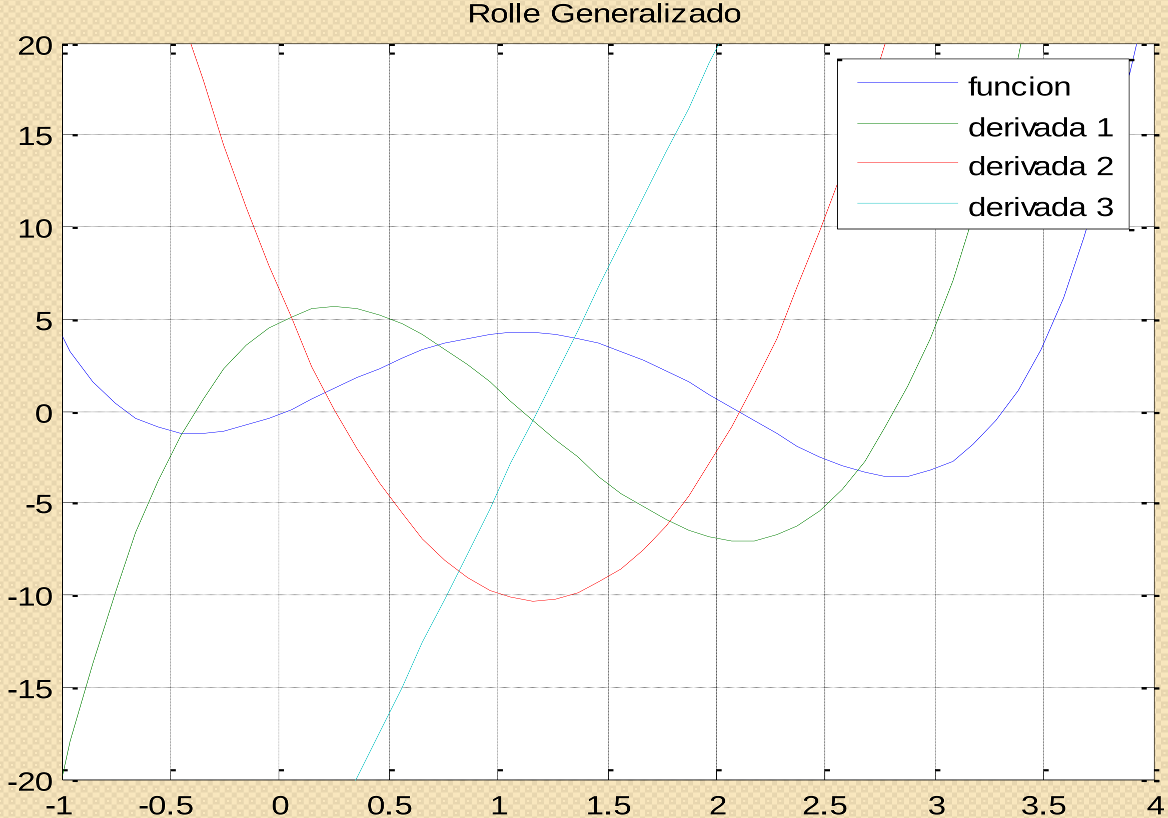
- **Descripción**
- **Objetivos**
- **Temario**
  - **Repaso de Análisis**
    - *Convergencia*
    - *Continuidad*
    - *Diferenciabilidad*
    - *Tmas Continuidad*
    - *Tmas Derivación*
    - *Tmas Integración*
    - *Tmas Desarrollos*
  - **Matemática Finita**
  - **Algoritmos**
- **Bibliografía**

Teorema de Rolle

Sea $f(x) \in C[a, b]$ y $f(x) \in C^1(a, b)$ tal que se anula en sus extremos, entonces existe un punto c en (a,b) que anula su derivada.$f'(c)=0$

Teorema de Rolle Generalizado

Sea $f(x) \in C^{n-1}$ a, b] y $f(x) \in C^n(a, b)$ tal que se anula en (n+1) puntos distintos, entonces existe un punto c en (a,b) que anula su derivada.n-sima $f^{(n)}(c)=0$



Preliminares

Teoremas Integrabilidad

🗀 Descripción

🗀 Objetivos

🗁 Temario

Repaso de Análisis

Convergencia

Continuidad

Diferenciabilidad

Tmas Continuidad

Tmas Derivación

Tmas Integración

Tmas Desarrollos

Matemática Finita

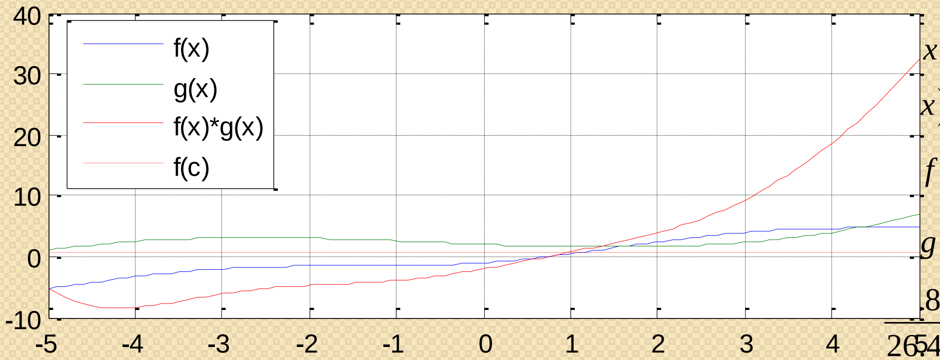
Algoritmos

🗀 Bibliografía

Teorema del valor medio para integrales

Sean f(x), g(x) $\in$ C[a, b] donde g(x) es integrable y no cambia de signo en [a,b], entonces existe un punto c en (a,b) tal que

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$



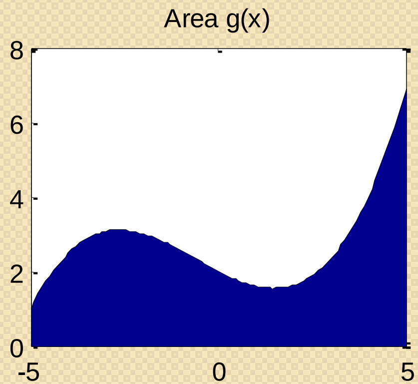
$x) = x - \cos(x)$

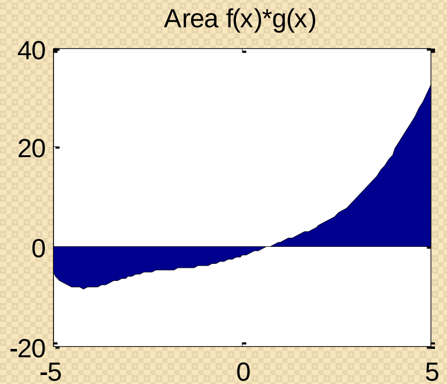
$x) = \frac{2}{45}x^3 + \frac{7}{90}x^2 - \frac{47}{90}x + 2$

$f(x)\cdot g(x)dx = 18.8623$

$g(x)dx = 26.4815$

$\frac{.8623}{26.4815} = 0.7123 = f(1.1347)$





Preliminares

Teoremas de desarrollo en serie

- **Descripción**
- **Objetivos**
- **Temario**
  - **Repaso de Análisis**
    - *Convergencia*
    - *Continuidad*
    - *Diferenciabilidad*
    - *Tmas Continuidad*
    - *Tmas Derivación*
    - *Tmas Integración*
    - *Tmas Desarrollos*
  - **Matemática Finita**
  - **Algoritmos**
- **Bibliografía**

Teorema del Taylor para funciones de una variable

Sea f(x) $\in C^{(n+1)}[a, b]$ *y un punto* $c \in (a,b)$*, entonces para cualquier punto* $x \in (a,b)$ *existe un valor* $\xi_x \in (c,x)$ *tal que* $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ *donde*

$$P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c)\frac{(x-c)^k}{k!}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{n+1!}(x-c)^{n+1}$$

Teorema del Taylor para funciones de varias

Sea f(x,y) $\in C^{(n+1)}D=[a_1, b_1]x[a_2,b_2]$ *y un punto (c,d)* $\in D$*, entonces para cualquier punto (x,y)* $\in D$ *existe un par valor* $(\xi_x, \xi_y) \in [c,x]x[d,y]$ *tales que* $f(x,y) = P_n(x,y) + R_n(x,y)$ *donde*

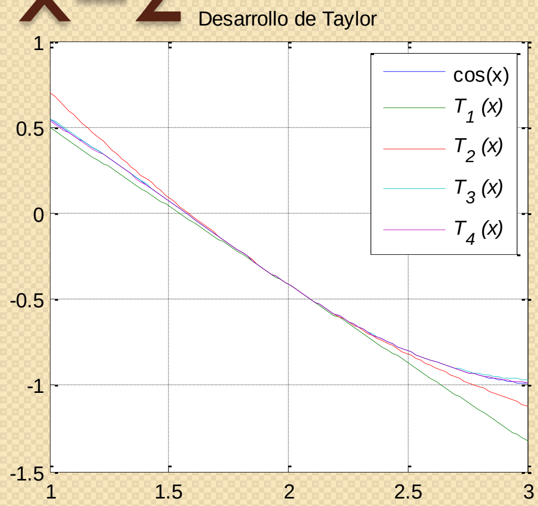
$$P_n(x,y) = f(c,d) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(c,d)\frac{(x-c)}{1!} + \frac{\partial f}{\partial y}(c,d)\frac{(y-d)}{1!} \right\} +$$

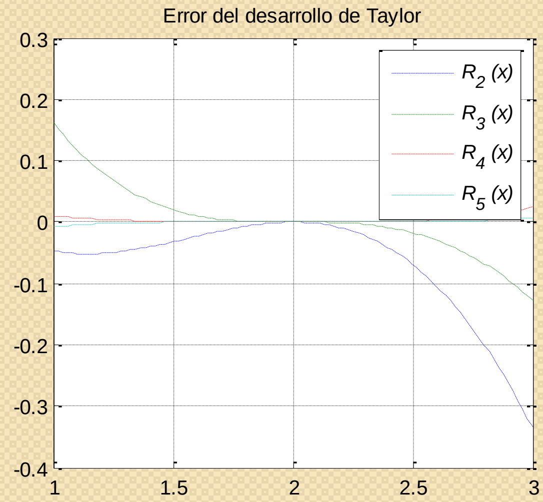
$$+\left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c,d)\frac{(x-c)^2}{2!} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c,d)\frac{(x-c)(y-d)}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c,d)\frac{(y-d)^2}{2!} \right\} + \cdots$$

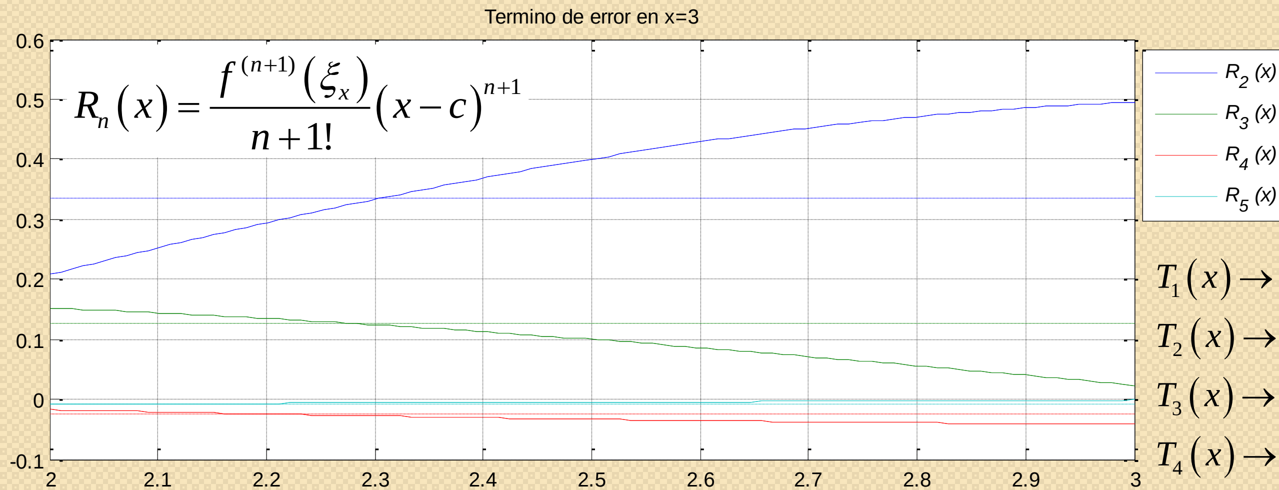
$$+\left\{ (x-c)\frac{\partial}{\partial x} + (y-d)\frac{\partial}{\partial y} \right\}^n f(c,d)$$

$$R_n(x,y) = \left\{ (x-c)\frac{\partial}{\partial x} + (y-d)\frac{\partial}{\partial y} \right\}^{n+1} f(\xi_x, \xi_y)$$

Ejemplo: desarrollo cos(x) en x=2







$T_1(x) \rightarrow \xi_x = 2.3062$

$T_2(x) \rightarrow \xi_x = 2.2717$

$T_3(x) \rightarrow \xi_x = 2.1897$

$T_4(x) \rightarrow \xi_x = 2.1805$

Errores de redondeo y sistemas de numeración

- La aritmética numérica computacional es distinta a la del algebra

  2+2 = 4 4x8 = 32 $\sqrt[2]{3}^2$ =3

- $\sqrt[2]{3}$ = 1,7320508080808………… NO es un numero racional

- $\sqrt[2]{3} \cong$ 1,73205 es una aproximación

- El error que se produce cuando se utiliza una calculadora o computadora para realizar cálculos con números reales recibe el nombre de

  Error de redondeo

- Se presenta porque la presenta porque la aritmética realizada en una maquina incluye números con un numero finito de dígitos y esto da como resultado cálculos realizados únicamente con representaciones aproximadas de los números reales.

- En una computadora, sólo un subconjunto relativamente pequeño del sistema de números reales se usa para la representación de todos los números reales. Incluye a los números racionales (+ o -) y almacena la parte fraccionaria, junto con una parte exponencial.

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Matemática Finita

Definiciones

Representación

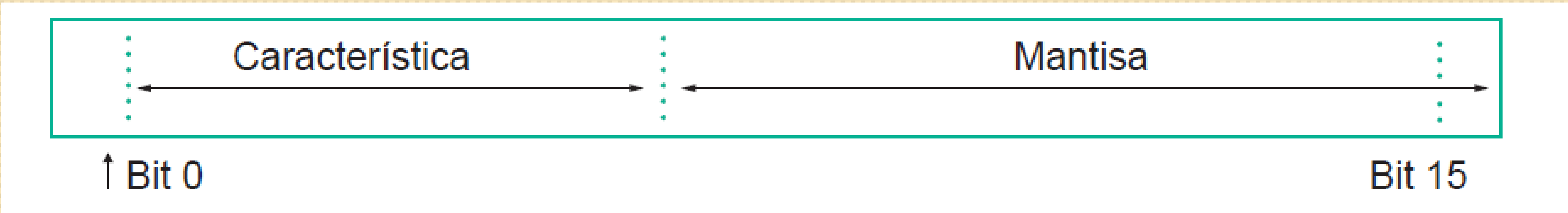
Errores

Algoritmos

Bibliografía

Números binarios

- Una representación de bits se usa para un numero real.
- El primer bit es un indicador del signo, denominado s. *A* éste le sigue un exponente c, llamado **característica**, y una fracción, f, llamada **mantisa**. La base para el exponente es 2
- Por ejemplo en una representación de 16 bits:



Números decimales

- Supondremos que los números de maquina se representan en números con notación de punto flotante

$$\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n, \quad 1 \leq d_1 \leq 9, \quad \text{y} \quad 0 \leq d_i \leq 9,$$

$$i = 2, \ldots, k.$$

Cualquier número real positivo dentro del rango numérico de la máquina puede ser normalizado a la forma:

$$y = 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^n.$$

La forma de punto flotante de y, que se denota fl(y), se obtiene al terminar la mantisa de y en los dígitos decimales de k
Existen dos formas de terminación:

Truncamiento o corte:

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n.$$

Redondeo:

$$fl(y) = 0.\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_k \times 10^n.$$

Para redondear cuando $d_{k+1} \geq 5$. sumamos 1 a d_k, es decir ***redondeamos hacia arriba****. Cuando $d_{k+1} < 5$, simplemente cortamos todo, excepto los primeros dígitos k, es decir* ***redondeamos hacia abajo***

Determine los valores a) de corte y b) de redondeo de cinco dígitos del número irracional π.

Solución El número π tiene una expansión decimal infinita de la forma $\pi = 3.14159265\ldots$. Escrito en una forma decimal normalizada, tenemos

$$\pi = 0.314159265\ldots \times 10^1.$$

a) El formato de punto flotante de π usando el recorte de cinco dígitos es

$$fl(\pi) = 0.31415 \times 10^1 = 3.1415.$$

b) El sexto dígito de la expansión decimal de π es un 9, por lo que el formato de punto flotante de π con redondeo de cinco dígitos es

$$fl(\pi) = (0.31415 + 0.00001) \times 10^1 = 3.1416.$$

- Hay errores en la representación de los valores en el ordenador debido a la limitación de almacenamiento
    - Truncamiento: Se almacenan N decimales y se pierde el resto
    - Redondeo: Se suma media unidad al decimal N y se trunca

4 digitos	Truncamiento	Redondeo
1’41421256…	$0'1414\times10^1$	$0'1414\times10^1$
2’645751311…	$0'2645\times10^1$	$0'2646\times10^1$

Exactitud y precisión

- Se denomina **exactitud** de un proceso, método, fórmula o cálculo a la bondad con que el resultado obtenido representa el valor real que queríamos calcular.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left\{ f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b) \right\}$$ exacta para $P_2(x)$

- Un número p* aproxima a p con t **dígitos significativos (cifras)** si n es el natural más grande tal que

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} \le 5 \times 10^{-t}$$

$\sqrt{2}$ = (1'414213562…) ≈ 1'41421256.

$$\frac{\left\| \sqrt{2} - 1'41421256 \right\|}{\sqrt{2}} = 7'\cdots \times 10^{-7} \Rightarrow$$ Aproxima con 6 dígitos

- Se denomina **precisión** de una representación a la exactitud que se obtendría si todas las cifras calculadas fueran significativas
  - Cálculo de $\sqrt{2}$ =1'41421256
  - Precisión de 9 cifras..

Representación Decimal (I)

- Punto fijo:
  - Los dígitos de almacenamiento se reparten para la parte entera y la parte decimal
  - Ejemplo: 8 dígitos con 3 decimales
    - fl(123.456)=00123456
    - fl(12345.6)=12345600
    - fl(1.23456)=00001235
- Punto flotante:
  - Se representa de forma normalizada, repartiéndose los dígitos para la mantisa y el exponente
  - Ejemplo: 8 dígitos con 2 de exponente
    - fl(123.456)=03123456
    - fl(12345.6)=05123456
    - fl(1.23456)=01123456

Representación Decimal (II)

- Características de la representación elegida
  - Rango de representación:
    - Punto fijo con 8 dígitos y 3 decimales
      [0.001,99999.999]
    - Punto flotante con 8 dígitos y 2 de exponente
      $0.1\times 10^{-44}, 0.999999\times 10^{45}$
  - Cifras significativas:
    - Punto fijo con 8 dígitos y 3 decimales
      Depende del valor: desde 1 hasta 8
    - Punto flotante con 8 dígitos y 2 de exponente
      6 cifras

Errores

Supongamos que p* es una aproximación a p

- ***Error real:*** $p - p^*$

- **Error absoluto**: diferencia entre el valor real y el valor aproximado.

$$|p - p^*|$$

- **Error relativo**: cociente entre el error absoluto y el valor real. Habitualmente ambos se toman en valor absoluto

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} \qquad p \neq 0$$

p	p*	Error real	Error absoluto	Error relativo	
$0{,}3000 \times 10^{1}$	$0{,}3100 \times 10^{1}$	-0,1	0,1	$0{,}3333 \times 10^{1}$	
$0{,}3000 \times 10^{-3}$	$0{,}3100 \times 10^{-3}$	$-0{,}1 \times 10^{-4}$	$0{,}1 \times 10^{-4}$	$0{,}3333 \times 10^{-1}$	
$0{,}3000 \times 10^{4}$	$0{,}3100 \times 10^{4}$	$-0{,}1 \times 10^{3}$	$0{,}1 \times 10^{3}$	$0{,}3333 \times 10^{-1}$	

Dígitos significativos

Un número p aproxima a p con t **dígitos significativos (cifras)** si t es el numero entero no negativo más grande tal que*

$$\frac{|p-p^*|}{|p|} \leq 5 \times 10^{-t}.$$

(1'414213562…) ≈ 1'41421256   Aproxima con 6 dígitos

La tabla ilustra la naturaleza continua de los dígitos significativos al enumerar, para los diferentes valores de p, el límite superior mínimo de $|p-p^*|$, denominado máx. $|p-p^*|$, cuando p^* concuerda con p en cuatro dígitos significativos.

p	0.1	0.5	100	1000	5000	9990	10000
máx $\lvert p-p^*\rvert$	0.00005	0.00025	0.05	0.5	2.5	4.995	5.

Error de operaciones (I)

- Operaciones elementales (suma, resta, multip., división)

$$\tilde{x} = fl(x) = x - \alpha = x(1 - e_x) \quad \tilde{y} = fl(y) = y - \beta = y(1 - e_y)$$

$$x \circ y - fl(x \circ y) = x \circ y - \tilde{x} \bullet \tilde{y} = (x \circ y - \tilde{x} \circ \tilde{y}) + (\tilde{x} \circ \tilde{y} - \tilde{x} \bullet \tilde{y})$$

$$= \text{Error Propagado} + fl(\tilde{x} \circ \tilde{y})$$

Operación	Suma	Resta	Multip.	División
Absoluto	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$	$y\alpha + x\beta \cancel{- \alpha\beta}$	$\dfrac{\alpha - \beta \, {}^{x}\!/_{y}}{y - \beta}$
Relativo	$\dfrac{x}{x+y} e_x + \dfrac{y}{x+y} e_y$	$\dfrac{x}{x-y} e_x - \dfrac{y}{x-y} e_y$	$e_x + e_y \cancel{+ e_x e_y}$	$\dfrac{e_x - e_y}{1 - e_y}$

- Funciones elementales

$$y = f(\vec{x}) = f(x_0, x_1, x_2, \cdots x_n)$$

$$fl(y) = y + E_y = fl(f(x_0 + E_0, x_1 + E_1, x_2 + E_2, \cdots x_n + E_n))$$

$$|E_y| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} E_k \right| \quad |e_y| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{x_k}{y} e_k \right|$$

Error de operaciones (II)

Descripción

Objetivos

Temario

Repaso de Análisis

Matemática Finita

Definiciones

Representación

Errores

Algoritmos

Bibliografía

- Ejemplo de resta

$$x=\pi \qquad y=\tfrac{22}{7} \qquad x-y=-1.2645\ldots\cdot 10^{-3}$$

$$fl(x)=3.1416 \qquad fl(y)=3.1429 \qquad fl(x-y)=-0.0013$$

$$E_x\le 7.35\cdot 10^{-6} \qquad E_y\le 4.29\cdot 10^{-5} \qquad E_{x-y}\le 3.55\cdot 10^{-5}$$

$$e_x\le 2.34\cdot 10^{-6} \qquad e_y\le 1.36\cdot 10^{-5} \qquad e_{x-y}\le 2.8\cdot 10^{-2}$$

- Ejemplo de cociente

$$x=\tfrac{22}{7} \qquad y=\tfrac{1}{3000} \qquad x\div y=9.4286\cdot 10^{3}$$

$$fl(x)=3.1429 \qquad fl(y)=3.3333\cdot 10^{-4} \qquad fl(x\div y)=9.4300\cdot 10^{3}$$

$$E_x\le 1.4286\cdot 10^{-4} \qquad E_y\le 3.3333\cdot 10^{-8} \qquad E_{x-y}\le 1.4286$$

$$e_x\le 4.5455\cdot 10^{-5} \qquad e_y\le 1.0\cdot 10^{-4} \qquad e_{x-y}\le 1.5152\cdot 10^{-4}$$

- Ejemplo de función

$$y=\log_a(x)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln(a)}\\[2ex]\dfrac{\partial y}{\partial a}=\dfrac{-y}{a\ln(a)}\end{cases}\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}\mathrm{E}_y\le\left|\dfrac{1}{x\ln(a)}\right|\mathrm{E}_x+\left|\dfrac{-y}{a\ln(a)}\right|\mathrm{E}_a\\[2ex]e_y\le\dfrac{e_x}{|\ln x|}+\dfrac{e_a}{|\ln a|}\end{array}\right.$$

Fuentes de error en el modelado matemático

- Problema físico: trayectoria de un proyectil

$$m\frac{d^2r(t)}{dt^2} = \underbrace{-mgk}_{GRAVEDAD} - \underbrace{b\frac{dr(t)}{dt}}_{ROZAMIENTO}$$

  - Modelado matemático con hipótesis y simplificaciones
    - Efectos atmosféricos (lluvia, contaminación, vientos)
    - Se desprecia el giro terrestre (fuerzas de Coriolis)
    - Se considera que el rozamiento sólo depende del aire.
  - Errores debido al desconocimiento de los datos físicos (inexactitudes de las medidas o imposibilidad).
  - Errores del Método de Resolución:
    - Algoritmo de predicción-corrección para ecuaciones diferenciales con el error provocado al aproximar la derivada por la secante
  - Errores de Implementación en el ordenador
    - Equivocaciones (errores de programación, cambios inadvertidos de signos, etc.)
    - Errores debidos a la aritmética del ordenador (errores de representación, etc.).

Algoritmos

- **Algoritmo:** Procedimiento que describe sin ninguna ambigüedad una sucesión de pasos a realizar en un orden específico

- **Algoritmo Numérico**: Conjunto de instrucciones para efectuar operaciones matemáticas con números que conducen al valor o valores solución de un problema dado.

Clasificación
- No numéricos: Listas Alfabéticas
- Numéricos: Euclides (m.c.d.)
  - Finitos — Álgebra
  - Infinitos — Análisis

Algoritmos: ejemplo

- **Descripción**
- **Objetivos**
- **Temario**
  - **Repaso de Análisis**
  - **Matemática Finita**
  - **Algoritmos**
    - *Condicionamiento*
    - *Estabilidad*
- **Bibliografía**

- Algoritmos Infinitos: sucesión infinita pero numerable de operaciones

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k$$

- Sucesión de aproximaciones a la solución

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}(-x)^k$$

  - Convergencia
    - Condiciones: |x|<1
    - Velocidad $$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-x)^k+\frac{(-x)^{n+1}}{x+1}$$
    - Acotación del error $$E_n=\left|\frac{1}{1+x}-a_n\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}(-x)^k$$
    - Eficiencia: número de operaciones

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_2x^2+a_1x+a_0=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

$$\begin{cases}P=a_0\\P=P+a_kx^k,k=1,\cdots n\end{cases}\qquad\begin{cases}P=a_n\\P=P\cdot x+a_k,k=n-1,\cdots 0\end{cases}$$

- Alg.1: n+ nx n-1 potencias
- Alg.2: n+ nx 0 potencias

Condicionamiento

- El condicionamiento de un problema mide la sensibilidad de la solución a cambios pequeños en los parámetros del problema.
  - Problema bien condicionado: pequeñas variaciones de los datos dan lugar a pequeñas variaciones en los resultados.
  - Resolución numérica requiere problemas bien condicionadas, ya que la representación de los datos y la aritmética del el ordenador perturban los datos.

- Obtener las raíces del siguiente polinomio al añadirle 1 milésima al término de grado 9

$$P_{10}(x) = \prod_{k=1}^{10}(x-k) = \sum_{k=0}^{10} a_k x^k = x^{10} - 55x^9 + 1320x^8 + \cdots + 3628800$$

$$\tilde{P}_{10}(x) = P_{10}(x) - 0.001x^9 = x^{10} - 55.001x^9 + 1320x^8 + \cdots + 3628800$$

Raíces: {1.,1.9999, 3.0019, 3.9476, 5.1376 ± 0.59304i, 7.2317 ± 1.5827i, 10.155 ±1.14887i}

$$\mathrm{E}_P \approx \frac{\partial P}{\partial a_9}\mathrm{E}_{a_9} = x^9 \cdot 10^{-3} \Rightarrow e_P \approx \frac{\partial P}{\partial a_9}\frac{\mathrm{E}_{a_9}}{P} = \frac{x^9}{P_{10}(x)}10^{-3}$$

Estabilidad numérica

- Un algoritmo es estable cuando un error inicial se propaga decreciendo o creciendo linealmente con las iteraciones. Es inestable cuando el crecimiento es exponencial.

$$E_0 \rightarrow \begin{cases} Estable & \begin{cases} E_n = C \cdot E_0 \\ \qquad C < 1 \end{cases} \\ Inestable & E_n = C^n \cdot E_0 \end{cases}$$

  - Problema mal condicionado: inestable para cualquier algoritmo.
  - Problema bien condicionado: estable o inestable dependiendo del algoritmo

- Ejemplo: calcular $\{p_n\} = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}$ usando aritmética con 5 cifras
  - Nota: $\frac{1}{3} = 0{,}33333 + \varepsilon \;\; \text{con} \;\; \varepsilon = \frac{1}{3} 10^{-5}$
  - Algoritmo I: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \frac{1}{3} \end{cases}$

$$\mathrm{E}_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 0{,}33333^n = \left(0{,}33333 + \varepsilon\right)^n - 0{,}33333^n \approx n\left(0{,}33333\right)^{n-1} \varepsilon$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}_n = 0 \Rightarrow Estable$$

Estabilidad numérica

- Algoritmo II: $\begin{cases} b_0 = 1; \qquad b_1 = 1/3 \\ b_n = \left(10/3\right) b_{n-1} - b_{n-2} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

- Autovalores $\lambda_1 = 1/3 \quad \lambda_2 = 3$
- Solución $b_n = \alpha\left(1/3\right)^n + \beta 3^n$

$$\begin{cases} b_0 = 1 = \alpha\left(1/3\right)^0 + \beta(3)^0 \\ b_1 = 0{,}33333 = \alpha\left(1/3\right)^1 + \beta(3)^1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + 0{,}125 \times 10^{-5} \\ \beta = -0{,}125 \times 10^{-5} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}_n = 0{,}125 \times 10^{-5} \left\{ \left(1/3\right)^n + 3^n \right\}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{E}_n = \infty \Rightarrow \textit{Inestable}$$

Bibliografía Comentada

- Descripción
- Objetivos
- Temario
- Bibliografía

- Burden, R.L. & Faires, J.D.
  - Comienza con una revisión de conceptos y teoremas del Algebra y el Análisis. A continuación estudia la representación numérica, sobre todo en punto flotante, desarrollando varios ejemplos clarificadores en binario. Asimismo hace un estudio del error que desemboca en el concepto de estabilidad de un algoritmo. Finalmente oferta interesantes ejercicios para verificar la comprensión alcanzada.

- Chapra, S.C. & Canale, R.P.
  - Realiza, de forma simple y sucinta, el desarrollo de programas y su aplicación en el Análisis Numérico. En este entorno, tras mostrar con ejemplos el uso de los diagramas de flujo. En el capítulo tercero se dedica al estudio del error, matizando sus diferentes fuentes.