Clase 3

March 30, 2022

Cómo representamos un sistema lineal con matrices?

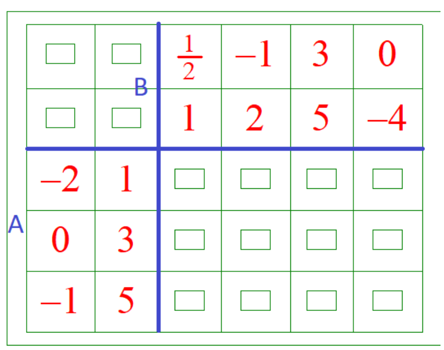
Primero vamos a ver cómo multiplicar dos matrices cuales quiera y cuándo podemos hacer eso. Consideremos dos matrices

$$\begin{aligned} A &\in \mathbb{R}^{3\times 2} \\ B &\in \mathbb{R}^{2\times 4} \end{aligned}$$

como las siguientes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Para multiplicarlas las colocaremos de la siguiente manera:



Y ahora vamos tomando la primer fila de A y la vamos multiplicando (elemento a elemento) por cada columna de B. Por ejemplo multiplicamos la primer fila de A por la primer columna de B de la siguiente forma:

$$(-2).\frac{1}{2} + 1.1 = 0$$

luego hacemos lo mismo con la primer fila de A y la segunda columna de B:

$$(-2).(-1) + 1.2 = 4$$

ahora la primer fila de A por la tercera columna de B:

$$(-2).3 + 1.5 = -1$$

y finalmente la primer fila de A por la cuarta columna de B:

$$(-2).0 + 1.(-4) = -4$$

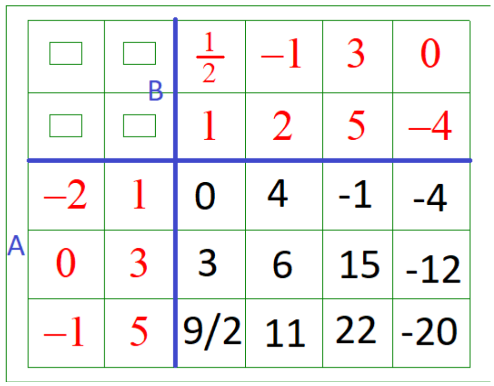
con esto completamos la primer fila del producto $A \times B$:

			B			
	$\square$	$\square$	$\frac{1}{2}$	-1	3	0
	$\square$	$\square$	1	2	5	-4
	-2	1	0	4	-1	-4
A	0	3				
	-1	5				

Hacemos exactamente lo mismo con la segunda fila de A y cada columna de B y obtenemos la segunda fila de $A \times B$:

			B			
	$\square$	$\square$	$\frac{1}{2}$	-1	3	0
	$\square$	$\square$	1	2	5	-4
	-2	1	0	4	-1	-4
A	0	3	3	6	15	-12
	-1	5				

Y finalmente completamos la tercer fila de $A \times B$:



Es decir la matriz producto $A \times B$ es la matriz de tamaño 3×4:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 15 & -12 \\ \frac{9}{2} & 11 & 22 & -20 \end{bmatrix}$$

Notemos que para que este producto sea posible la cantidad de columna de A (matriz de la izquierda) debe coincidir con la cantidad de filas de la B (matriz de la derecha). En nuestro ejemplo $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ podemos hacer la multiplicación $A \times B$ y esta nueva matriz tendrá tamaño 3×4.

Volveremos con esto más adelante. Ahora retomemos los sistemas lineales!

Consideremos el siguiente sistema lineal

$$(*) \begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ x + 2y - z = 1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

A dicho sistema $(*)$ lo podemos escribir en forma matricial

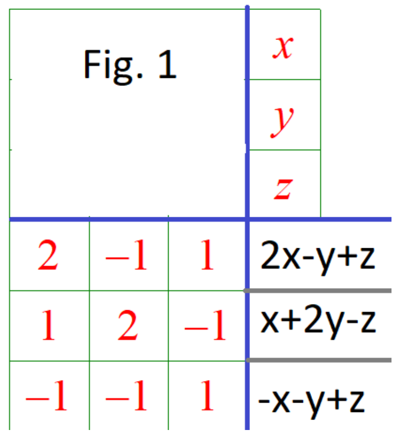
$$A.X = b$$

donde la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

la matriz $X \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ será la matriz de las incógnitas:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



y la matriz $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ será la matriz de los términos independientes:

$$b = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora notemos que si efectuamos el producto $A.X$ (multiplicamos una matriz 3×3 por una matriz 3×1): (Ver $Fig.1$)
obtenemos el lado izquierdo del sistema lineal $(*)$.

Y entonces al expresar $A.X = b$ estamos escribiendo en forma matricial el sistema lineal $(*)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el hecho de que la matriz de coeficientes A tenga tamaño $m \times n$ nos dice que representa a un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas. Por ejemplo

$$(**) \begin{cases} -5x + 2y - 3z + w = 3 \\ x - y + z + 4w = -1 \\ 3x + 2y + 2z - w = -2 \end{cases}$$

lo podemos expresar en la forma matricial $A.X = b$:

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, X es matriz de incógnitas de tamaño 4×1. Luego la matriz producto $A.X$ tendrá el mismo tamaño que la matriz b.

Resolución de sistemas lineales

Ahora que podemos expresar cualquier sistema lineal en su forma matricial vamos a definir lo que se conoce como matriz ampliada del sistema. Si tenemos el siguiente sistema lineal general de m ecuaciones con n incógnitas:

$$(*)\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

entonces la matriz de coeficientes $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ esta dada como sigue

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Y ahora definimos la MATRIZ AMPLIADA del sistema lineal $(*)$ como la siguiente:

$$A|\,b = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & .... & . & . \\ . & . & .... & . & . \\ . & . & .... & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Example 1 *Consideremos el siguiente sistema lineal*

$$\textit{(1)}\left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{array}\right.$$

su matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

Para resolverlo vamos a reducir por fila la matriz A (de coeficientes) haciendo al MISMO TIEMPO las operaciones elementales a la matriz b (la de los términos independientes):

$$A|\,b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right] \to f_2 + 1.f_1 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right] \to$$

$$\to f_3{+}(-3)f_1 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \to (-1)f_2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \to$$

$$\to f_3{+}10.f_2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right] \to \left(-\frac{1}{52}\right) f_3 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to$$

$$\to f_2 + 5.f_3 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to f_1 + (-2)f_3 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to$$

$$\to f_1 + (-1)f_2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] = R_A|\,\tilde{b}$$

Si reescribimos el sistema resultante en su notación de ecuaciones vemos que el sistema lineal (1) se transformó de forma equivalente al sistema (2):

$$(2)\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Justamente el (2) es un sitema lineal, cuya matriz de coeficientes que lo representa es una MERF $R_A \sim_f A$, nos da la solución al sistema inicial (1). (VERIFICAR)

Example 2 *Dado el siguiente sistema lineal*

$$(3)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

tiene su matriz ampliada $A|\,b$ así:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Como antes, intentamos resolverlo aplicando Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow f_1 \leftrightarrow f_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow f_2{+}1.f_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow f_3{+}(-2)f_1 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow f_2 \leftrightarrow f_4 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow f_3{+}(-3)f_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right) f_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] \rightarrow f_4{+}3f_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow f_2{+}(-1)f_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \rightarrow f_1{+}2f_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Reinterpretando el sistema lineal correspondiente:

$$(4) \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_5 = \frac{14}{3} \\ x_3 + x_5 = \frac{7}{3} \\ x_4 = -\frac{4}{3} \\ 0{=}{-2} \end{array} \right.$$

Observamos que la última igualdad es absurda. Entonces el sistema (4) no tiene solución. Luego el sistema (3) tampoco tiene solución.

Example 3 *Si tomamos el mismo ejemplo anterior pero esta vez le modificamos los términos independientes:*

$$(5)\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_5=0 \\ -x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2-2x_3-x_5=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$$

entonces la matriz ampliada correspondiente es

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Si la reducimos por filas como antes observaremos que las operaciones elementales por filas no afectarán a los términos independentes. De manera tal que llegaremos a la matriz ampliada siguiente:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \ldots \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \end{array}\right]$$

Al interpretar el sistema reducido vemos que el sistema (5) es equivalente al sistema (6):

$$(6)\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0 \\ x_3+x_5=0 \\ x_4=0 \\ \mathit{0{=}0} \end{cases}$$

Ahora la última igualdad es una tautología que no depende de las variables. Entonces vemos que en el sistema (6) hay más incógnitas que ecuaciones. Podemos despejar algunas de ellas (que no se repitan) en función de otras llamadas VARIABLES LIBRES (que se repitan):

$$(*)\begin{cases} x_1=-x_2-x_5 \\ x_3=-x_5 \\ x_4=0 \end{cases}$$

Luego las soluciones se expresan de la siguiente manera:

$$Sol=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : x_1=-x_2-x_5;\ x_3=-x_5;\ x_4=0;\ x_2,x_5\in\mathbb{R}\}$$

otra forma es parametrizar las variables "libres" (las que se repitieron!)

$$x_2=t \text{ y } x_5=s$$

entonces (*) se reescribe como

$$\begin{cases} x_1 = -t - s \\ x_3 = -s \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

y el conjunto solución es

$$Sol = \{(-t-s, t, -s, 0, s) \in \mathbb{R}^5 : \ t, s \in \mathbb{R}\}$$

Es decir tenemos que el sistema (6) tiene infinitas soluciones (tantas como valores le demos a t y s). Por ejemplo si elegimos $t = 1$ y $s = 0$ obtenemos una solución particular

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 1, 0, 0, 0)$$

si elegimos $t = -2$ y $s = 1$ obtenemos otra solución particular al sistema (6):

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, -2, -1, 0, 1)$$

Remark 4 *Cuando un sistema lineal tiene sus términos independientes todos iguales a* 0 *se dice que es un sistema lineal homogéneo.*

Remark 5 *Hay tres posibles resultados para un sistema lineal.*

1. El sistema tiene solución única. En este caso diremos que es compatible determinado.

2. El sistema tiene infinitas soluciones. En este caso diremos que es compatible indeterminado.

3. El sistema no tiene solución. En este caso diremos que es incompatible.

Theorem 6 *Si $A \sim_f B$ entonces los sistemas lineales homogéneos $A.X = 0$ y $B.X = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones.*

Proof. Como $A \sim_f B$ existe una secuencia finita de operaciones elementales de fila que llevan A en B:

$$A \to A_1 \to ... \to A_n = B$$

entonces será suficiente probar que los sistemas contiguos $A_k X = 0$ y $A_{k+1} X = 0$ tienen las mismas soluciones. Es decir al aplicar una operación elemental de fila no cambia las soluciones.

Supongamos que X_0 es solución de $A_k X = 0$. Esto significa que

$$A_k X_0 = 0.$$

Ahora como $A_{k+1} = e(A_k)$ donde e es alguna operación elemental de fila, tenemos que

$$A_{k+1}X_0 = e(A_k)X_0 = e(A_kX_0) = e(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

La segunda igualdad es la clave. Y para verlo lo verifiquemos para cada tipo de operación. Lo hacemos para una operación de tipo I:

$$e : \alpha f_i$$

entonces si

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & .... & a_{in} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sabemos que $A_kX_0 = \mathbf{0}$. Esto quiere decir que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & .... & a_{in} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ ... \\ x_0^i \\ ... \\ x_0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}.x_0^k \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}.x_0^k \\ ... \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}.x_0^k \\ ... \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}.x_0^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora como dijimos $A_{k+1} = e(A_k)$:

$$A_{k+1} = e(A_k) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & .... & \alpha a_{in} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

y ahora calculemos $A_{k+1}X_0$:

$$
\begin{aligned}
A_{k+1}X_0 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & .... & \alpha a_{in} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ ... \\ x_0^i \\ ... \\ x_0^m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}.x_0^k \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}.x_0^k \\ ... \\ \sum_{k=1}^n \alpha.a_{ik}.x_0^k \\ ... \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}.x_0^k \end{bmatrix} \\
\text{por (1)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ \alpha \sum_{k=1}^n a_{ik}.x_0^k \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Una misma cuenta muestra que si X_1 es solución del sistema homogéneo $A_{k+1}X = 0$ entonces lo es de $A_kX = 0$ puesto que para volver de A_{k+1} a A_k efectuamos una operación elemental inversa e^{-1} del mismo tipo que e.

Queda como ejercicio verificar para el caso de e de tipo II y de tipo III.

Caso operación tipo II: Si $e : f_i + \alpha f_j$ entonces al hacer la operación se modifica la fila i y luego hacemos el producto matricial $A_{k+1}X_0$ (verlo con cuidado!):

$$
\begin{aligned}
A_{k+1}X_0 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & a_{i2}+\alpha a_{j2} & \dots\dots\dots\dots\dots & a_{in}+\alpha a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots\dots\dots\dots\dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots\dots\dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0^1 \\ \dots \\ x_0^i \\ \dots \\ x_0^j \\ \dots \\ x_0^n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_0^k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n (a_{ik}+\alpha a_{jk})\, x_0^k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{jk}x_0^k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_0^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}x_0^k + \alpha \sum_{k=1}^n a_{jk}x_0^k \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Entonces logramos ver que X_0 también es solución de $A_{k+1}X = 0$.

Queda como ejercicio verificar el caso donde e es una operación de tipo III.

■

Theorem 7 *Si $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ y $m < n$ entonces el sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una solución no trivial (distinta de $X = 0$).*

Proof. Sabemos que podemos aplicar Gauss-Jordan para reducir A a una MERF R_A equivalente por filas a A. Luego por el Teorema anterior los sistemas $AX = 0$ y $R_AX = 0$ tienen exactamente las mismas soluciones. Sea $r = Rango(A)$ =número de filas no nulas de R_A. Entonces ciertamente $r \leq m$ y como por hipótesis $m < n$ entonces $r < n$. Entonces hay más incógnitas que filas no nulas en R_A. Esto nos dice que hay "variables libres" en la reinterpretación del sistema $R_AX = 0$. O sea que tenemos alguna solución (infinitas) distinta a la trivial $X = 0$. ■