Exercise 1 *(13a) Nos dan los planos en ecuaciones vectoriales*

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(1,1,1)+\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} \\ P_2 &= \{(2,2,1)+\varepsilon(2,1,0)+\delta(4,3,-2),\ \varepsilon,\delta\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Queremos estudiar la intersección $P_1 \cap P_2$. Trabajaremos con las ecuaciones vectoriales directamente. Queremos encontrar los puntos $(x,y,z)\in P_1\cap P_2$.

Para que $(x,y,z)\in P_1$ se debe cumplir que (para ciertos α,β)

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (1,1,1)+\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0) \\ &= (1+\alpha,\ 1+\beta,\ 1) \end{aligned}$$

Para que $(x,y,z)\in P_2$ se debe cumplir que (para ciertos ε,δ)

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= (2,2,1)+\varepsilon(2,1,0)+\delta(4,3,-2) \\ &= (2+2\varepsilon+4\delta,\ 2+\varepsilon+3\delta,\ 1-2\delta) \end{aligned}$$

Entonces para que $(x,y,z)\in P_1\cap P_2$ se debe tener que

$$(1+\alpha,\ 1+\beta,\ 1) = (2+2\varepsilon+4\delta,\ 2+\varepsilon+3\delta,\ 1-2\delta)$$

Es decir, deben existir escalares $\alpha,\beta,\varepsilon,\delta$ tales que

$$\left\{\begin{array}{c} 1+\alpha = 2+2\varepsilon+4\delta \\ 1+\beta = 2+\varepsilon+3\delta \\ 1 = 1-2\delta \end{array}\right.$$

o, equivalentemente,

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha-2\varepsilon-4\delta = 1 \\ \beta-\varepsilon-3\delta = 1 \\ 2\delta = 0 \end{array}\right.$$

Debemos resolver el sistema lineal de parámetros. Pasamos a la matriz ampliada y la llevamos a una MERF:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left(\frac{1}{2}\right) f_3 \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to f_2+3f_3 \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to f_1+4f_3 \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = MERF$$

Reinterpretamos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha-2\varepsilon = 1 \\ \beta-\varepsilon = 1 \\ \delta = 0 \end{array}\right.$$

Vemos que hay una variable libre, la parametrizamos: $\varepsilon = t$ y entonces escribimos la solución general al sistema:

$$\{(\alpha, \beta, \varepsilon, \delta) = (1 + 2t,\ 1 + t,\ t,\ 0) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$$

Esto nos dice que hay infinitas soluciones. Tratándose de la intersección de dos planos caben dos posibilidades, o bien los planos son coincidentes o bien se intersecan en una recta. Cómo darnos cuenta qué es lo que pasa? Simplemente reemplazamos cada parámetro por la solución en las ecuaciones originales de ambos planos:

En P_1:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1,1,1) + \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)\\ &= (1,1,1) + (1+2t)(1,0,0) + (1+t)(0,1,0)\end{aligned}$$

resolvemos la última línea:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1,1,1) + (\mathbf{1} + \mathbf{2t})(1,0,0) + (\mathbf{1} + \mathbf{t})(0,1,0)\\ &= (1,1,1) + \mathbf{1}(1,0,0) + \mathbf{2t}(1,0,0) + \mathbf{1}(0,1,0) + \mathbf{t}(0,1,0)\\ &= (1,1,1) + (1,0,0) + \mathbf{t}(2,0,0) + (0,1,0) + \mathbf{t}(0,1,0)\\ (*) &= (2,2,1) + \mathbf{t}(2,1,0)\end{aligned}$$

(*) sumamos las cosas que no están multiplicando por t por un lado y por el otro las que están multiplicadas por t.

En P_2:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (2,2,1) + \varepsilon(2,1,0) + \delta(4,3,-2)\\ &= (2,2,1) + \mathbf{t}(2,1,0) + \mathbf{0}(4,3,-2)\\ &= (2,2,1) + \mathbf{t}(2,1,0)\end{aligned}$$

Vemos que en ambos casos, al reemplazar los parámetros por la solución obtenida, obtenemos la ecuación vectorial de una recta! O sea que ambos planos se cortan en dicha recta. Es decir:

$$P_1 \cap P_2 : \{(2,2,1) + \mathbf{t}(2,1,0),\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}\}\,.$$