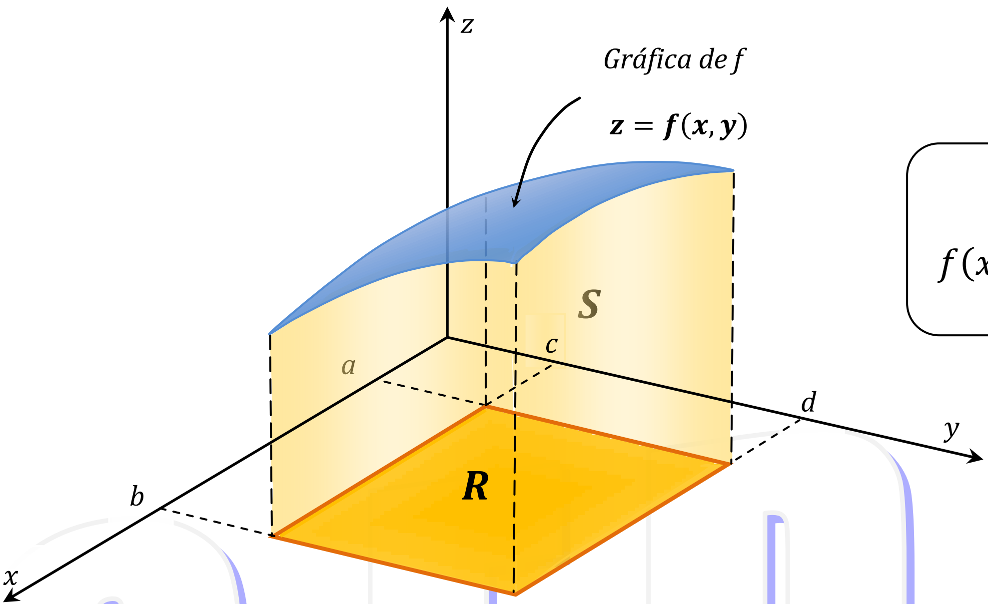
INTEGRALES DOBLES

INTEGRAL DOBLE SOBRE UN RECTÁNGULO. VOLUMEN.

Sean

* $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$ rectángulo.
* $f: R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.
* $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in R, 0 \le z \le f(x,y)\}$ sólido que yace por debajo de la superficie $z = f(x,y)$ y por encima de R.



Suponiendo que

$f(x,y) \ge 0 \ \ \forall (x,y) \in R$

Entonces

Volumen de S ***Integral doble de f sobre R*** ***Integrales iteradas***

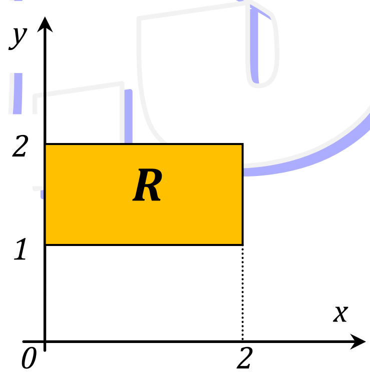
$$\underbrace{V(S) = \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy}_{\textit{Teorema de Fubini}}$$

No es necesario que $f(x,y) \ge 0 \ \ \forall (x,y) \in R$. Esto sólo se usa para interpretar a la integral doble de f sobre R como el volumen bajo la gráfica de f.

Ejemplo

Evalúe la integral doble $\iint_R (x-3y^2)dA$ donde
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$

Solución



Por el teorema de Fubini

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

$$\iint_R (x-3y^2)dA = \int_0^2 \left(\int_1^2 (x-3y^2)dy\right)dx$$

$$= \int_0^2 [xy-y^3]_{y=1}^{y=2}\,dx$$

$$= \int_0^2 \big(2x-8-(x-1)\big)\,dx$$

$$= \int_0^2 (x-7)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}-7x\right]_0^2$$

$$= 2-14-(0-0) = -12$$

Aplicando de nuevo el teorema de Fubini pero esta vez integrando primero respecto de x:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

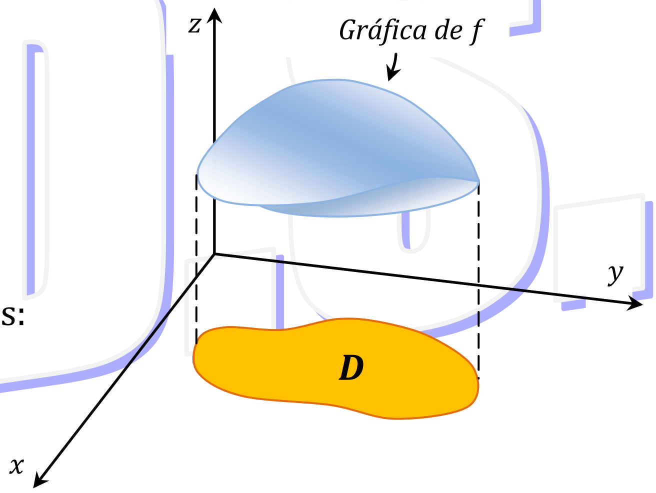
$$\iint_R (x-3y^2)dA = \int_1^2 \left(\int_0^2 (x-3y^2)dx\right)dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2}-3xy^2\right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \int_1^2 \big(2-6y^2-(0-0)\big)\,dy$$

$$= [2y-2y^3]_1^2 = 4-16-(2-2) = -12$$

INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES

Con el objetivo de extender el concepto de integral doble sobre regiones acotadas más generales que rectángulos se definen lo que se denominan **regiones elementales**.



REGIONES ELEMENTALES

Se llaman así a los siguientes tipos de regiones:

Región *y-simple* (o de tipo I)

Si

$* \ \varphi_1 : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$* \ \varphi_2 : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

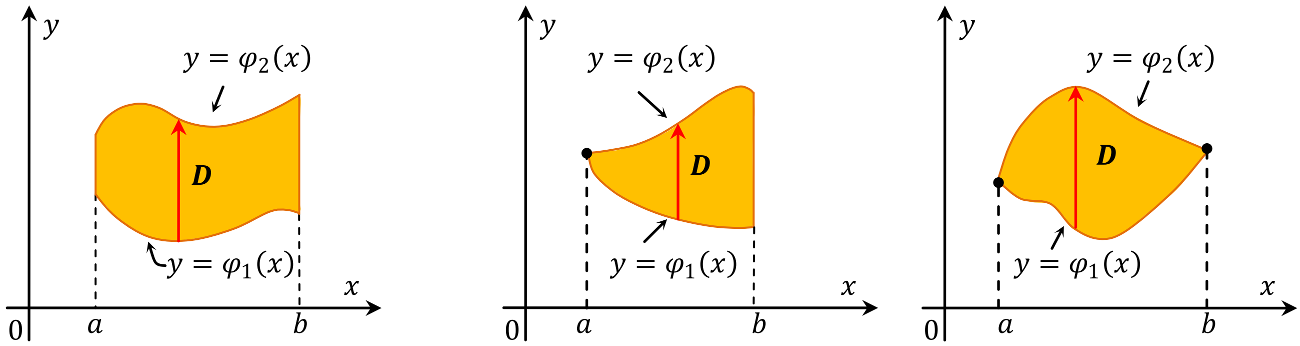
son funciones **continuas** en $[a, b]$

A la región D definida por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

se la llama **región *y-simple* o de tipo I**.

Ejemplos



Se usa la denominación ***y-simple*** porque la región se puede describir de un modo relativamente simple expresando y en función de x.

<u>Región *x-simple* (o de tipo II)</u>

Si

$* \, \psi_1 : [c,d] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$* \, \psi_2 : [c,d] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

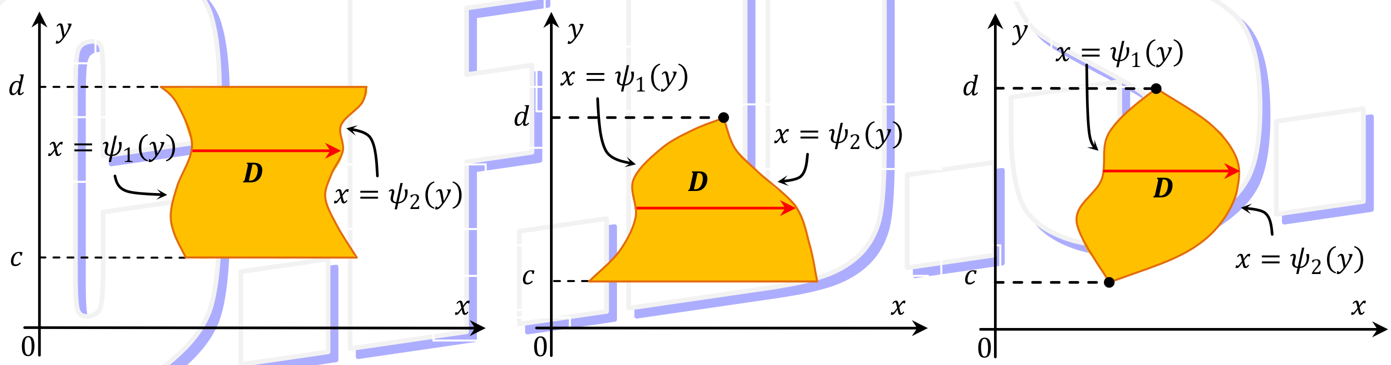
son funciones **continuas** en $[c,d]$

A la región D definida por:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

se la llama **región *x-simple* o de tipo II**.

<u>Ejemplos</u>

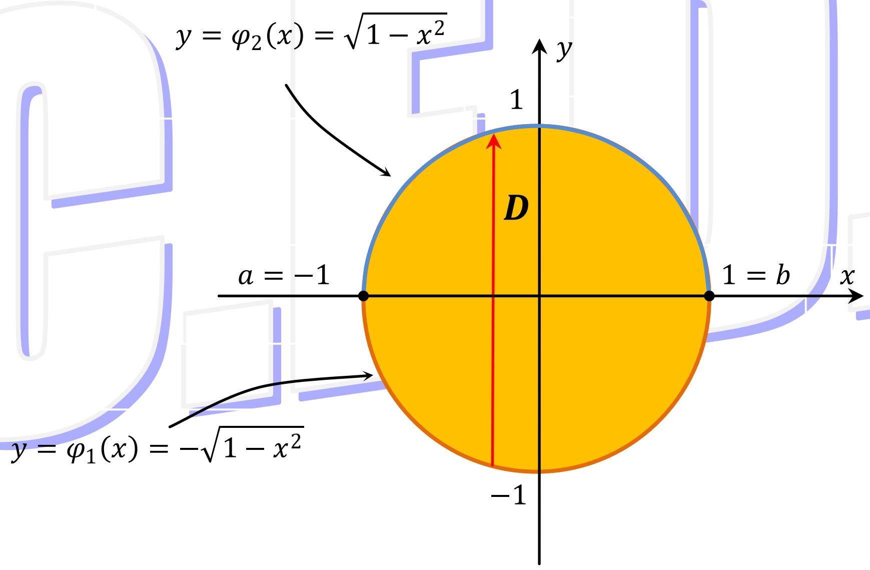


<u>Región simple</u>

Es una región que es ***y-simple*** y ***x-simple*** a la vez.

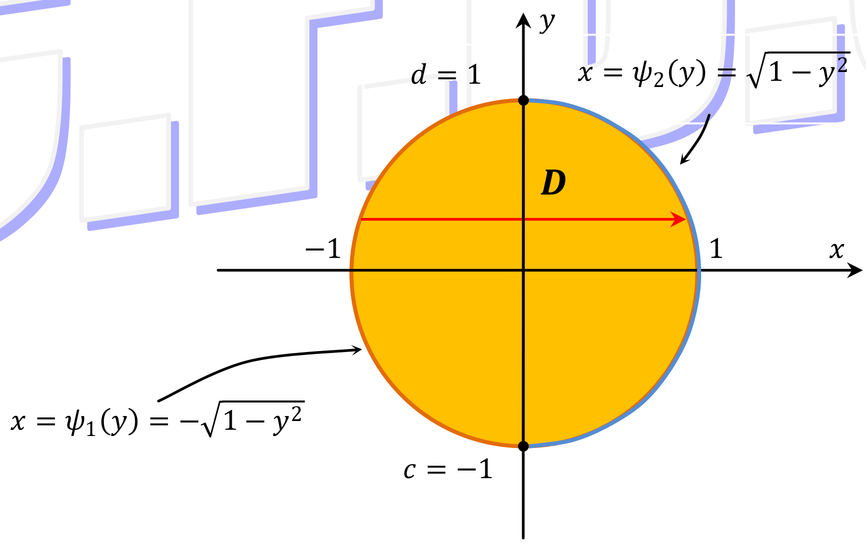
Por ejemplo a la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ se la puede considerar como ***y-simple***:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{-1}_{a}\le x\le \underbrace{1}_{b},\ \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{\varphi_1(x)}\le y\le \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\varphi_2(x)}\right\}$$



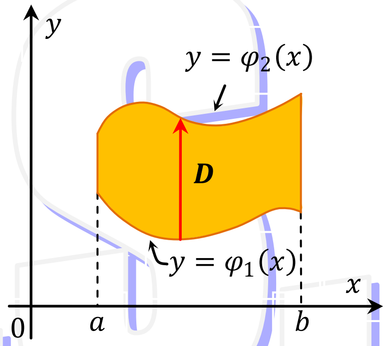
y también como ***x-simple***:

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{-1}_{c}\le y\le \underbrace{1}_{d},\ \underbrace{-\sqrt{1-y^2}}_{\psi_1(y)}\le x\le \underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{\psi_2(y)}\right\}$$



TEOREMA: INTEGRALES ITERADAS PARA REGIONES *Y*-SIMPLE

Si



$*$ D es una región y-*simple*.

$*$ $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es **continua** en D.

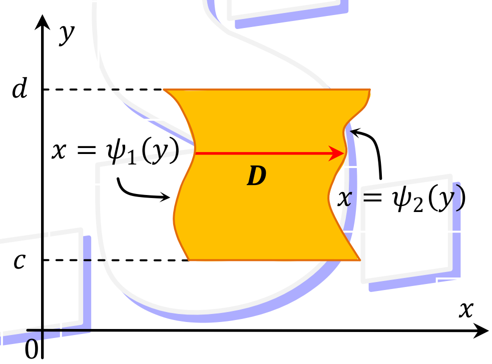
Entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

De manera análoga:

TEOREMA: INTEGRALES ITERADAS PARA REGIONES *X*-SIMPLE

Si



$*$ D es una región x-*simple*.

$*$ $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es **continua** en D.

Entonces

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

En caso que $f(x,y)=1\ \forall(x,y)\in D$, donde D es una región elemental en el plano:

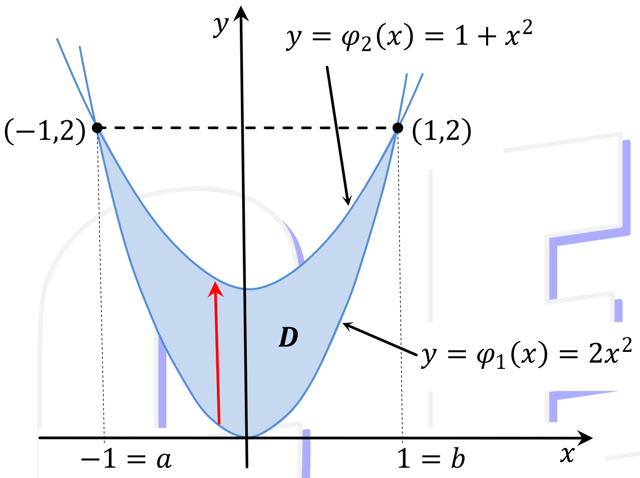
$$\iint_D f(x,y)dA=\iint_D 1dA=\underbrace{A(D)}^{\text{Área de } D}=\begin{cases}\underbrace{\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\right)dx=\int_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx}_{\textbf{Si D es y-simple}}\\ \overbrace{\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}dx\right)dy=\int_c^d[\psi_2(y)-\psi_1(y)]\,dy}^{\textbf{Si D es x-simple}}\end{cases}$$

Ejemplo 1

Evalúe la integral doble $\iint_D (x+2y)dA$ donde D es la región de $\mathbb{R}^2$ determinada por la siguiente desigualdad:

$$2x^2\leq y\leq 1+x^2$$

Solución



Se puede expresar a D como:

$$D=\{(x,y)\,|a\leq x\leq b,\varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\}$$
$$=\{(x,y)\,|-1\leq x\leq 1,2x^2\leq y\leq 1+x^2\}$$

Es decir como región y-simple

$$\iint_D (x+2y)dA=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}(x+2y)dy\right)dx$$

$$=\int_{-1}^1\left(\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)dy\right)dx$$

$$=\int_{-1}^1[xy+y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2}dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - (2x^3 + 4x^4)]dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x + x^3 + 1 + 2x^2 + x^4 - 2x^3 - 4x^4)]dx$$

$$= \int_{-1}^{1} [x - x^3 + 1 + 2x^2 - 3x^4]dx$$

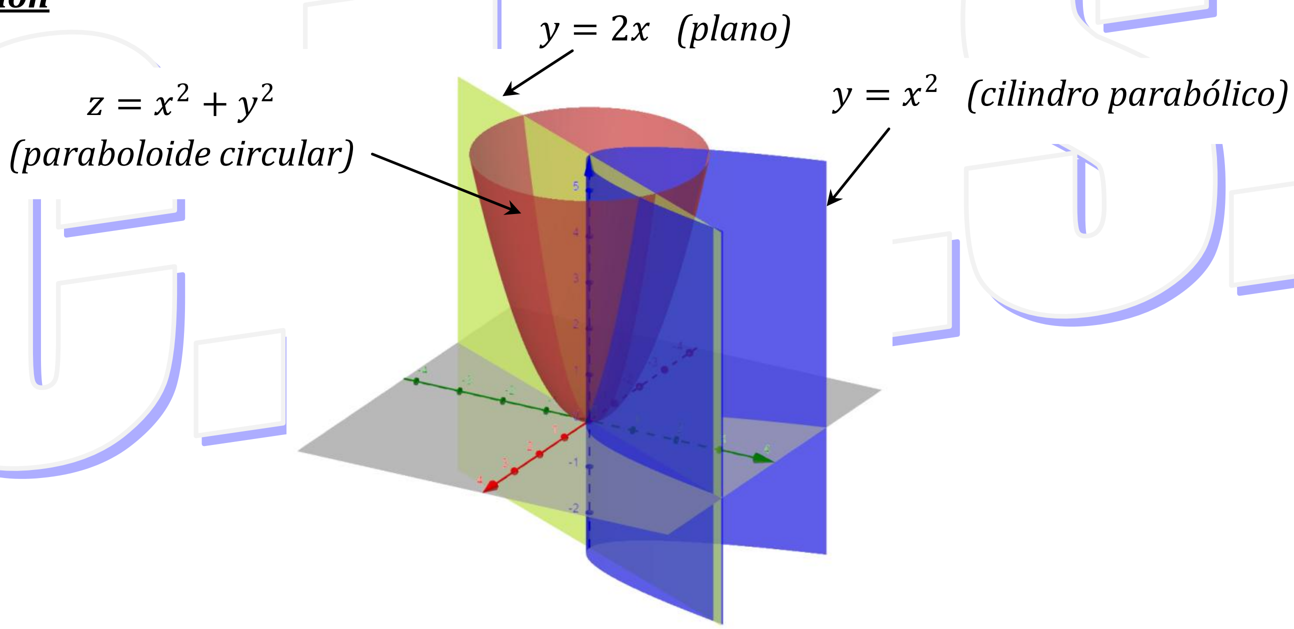
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + x + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

Ejemplo 2

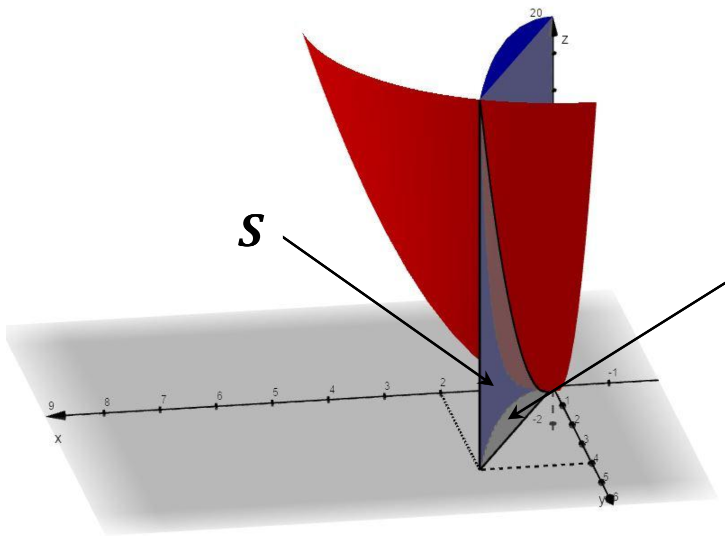
Obtenga el volumen de la región sólida de $\mathbb{R}^3$ *determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x,y,z) que satisfacen el siguiente sistema de desigualdades:*

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \\ \quad x^2 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

Solución



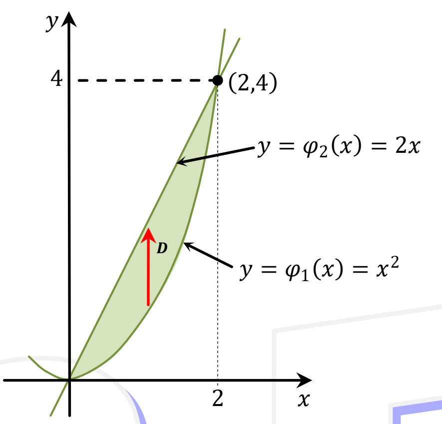
La región sólida S es la que yace debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ *y arriba de la región D del plano xy acotada por la recta* $y = 2x$ *y la parábola* $y = x^2$*.*



O sea que $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|(x,y)\in D, 0\le z\le \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)}\}$ *es la región sólida y*

D puede considerarse tanto y-simple como x-simple, es decir, podemos describirla como:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|0\le x\le 2, x^2\le y\le 2x\}$$ ***(y-simple)***



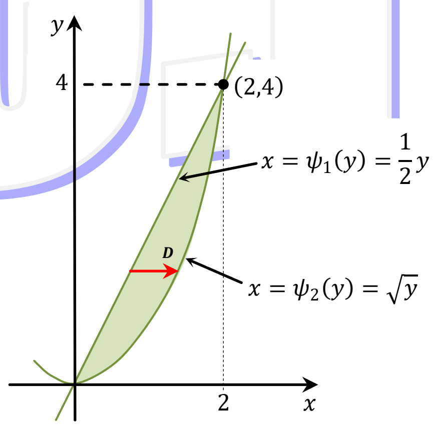
$a=0$

$b=2$

$\varphi_1(x)=x^2$

$\varphi_2(x)=2x$

o $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,0\le y\le 4, \frac{1}{2}y\le x\le\sqrt{y}\right\}$ ***(x-simple)***



$c=0$

$d=4$

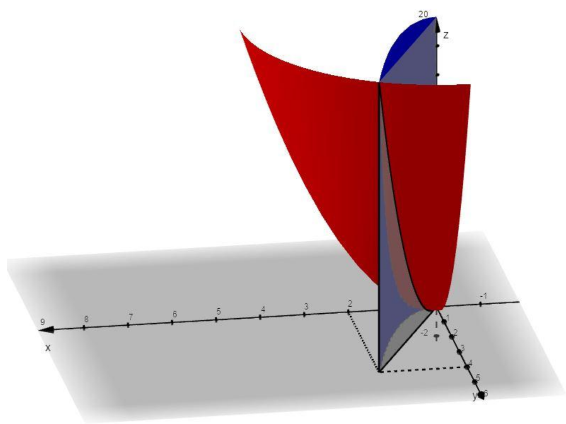
$\psi_1(y)=\frac{1}{2}y$

$\psi_2(y)=\sqrt{y}$

Si se considera a D como región <u>y-simple</u>, el volumen de S se obtiene de la siguiente manera:

$$V(S) = \iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

$$V(S) = \iint_D (x^2 + y^2)dA$$



$$= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dy \right) dx$$

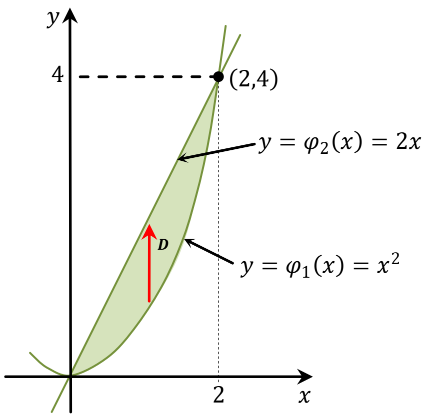
$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[2x^3 + \frac{8}{3}x^3 - \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right] dx$$

$$= \left[\frac{14}{12}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7 \right]_0^2$$

$$= \left[\frac{7}{6}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7 \right]_0^2$$



$$= \frac{112}{6} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21}$$

$$= \frac{56}{3} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21}$$

$$= \frac{1960 - 672 - 640}{105}$$

$$= \frac{648}{105}$$

$$= \frac{216}{35}$$

Si se considera a D como región *<u>x-simple</u>*, *el volumen de S se obtiene de la siguiente manera:*

$$\boxed{V(S) = \iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy}$$

$$V(S) = \iint_D (x^2 + y^2)dA$$

$$= \int_0^4 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)dx \right) dy$$

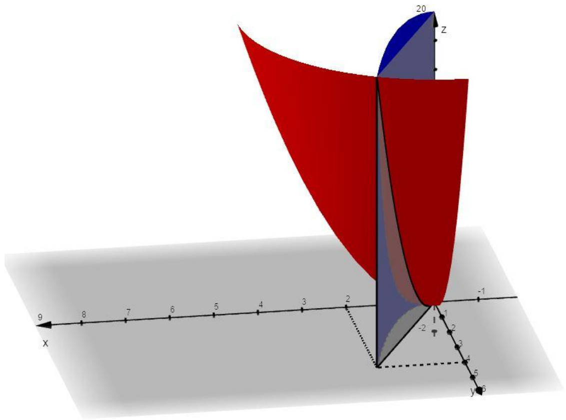
$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy$$

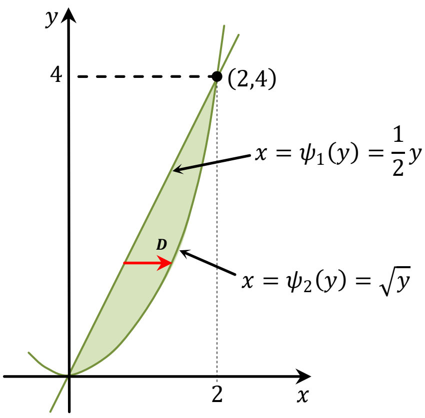
$$= \int_0^4 \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{1}{2}}y^2 - \left(\frac{y^3}{24} + \frac{y^3}{2} \right) \right] dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{5}{2}} - \frac{13y^3}{24} \right] dy$$

$$= \left[\frac{2}{15} y^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} - \frac{13}{96} y^4 \right]_0^4$$

$$= \frac{216}{35}$$



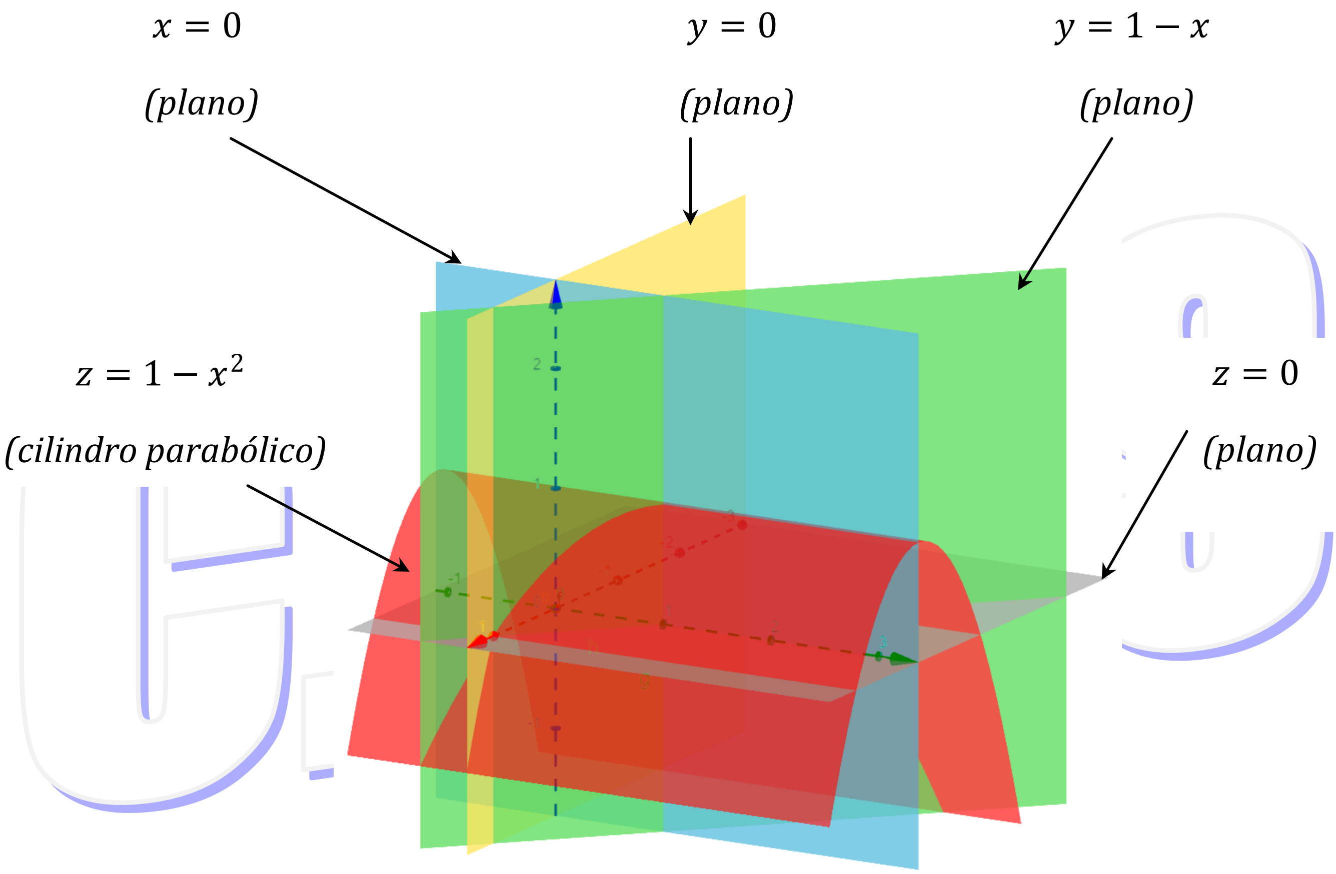


<u>Ejemplo 3</u>

Obtenga el volumen de la región sólida de $\mathbb{R}^3$ *determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x,y,z) que satisfacen el siguiente sistema de desigualdades:*

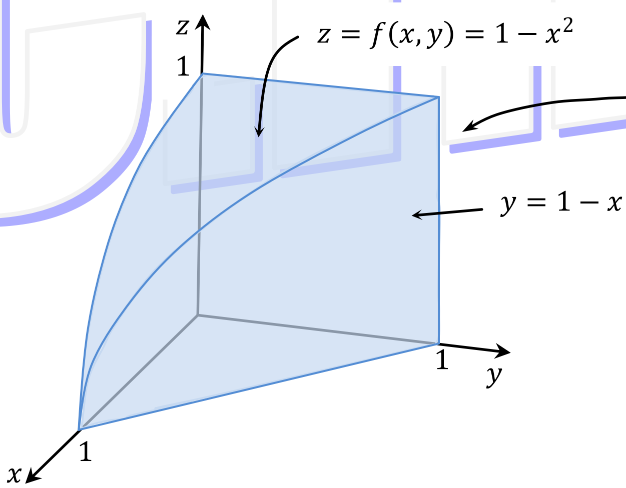
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 \end{cases}$$

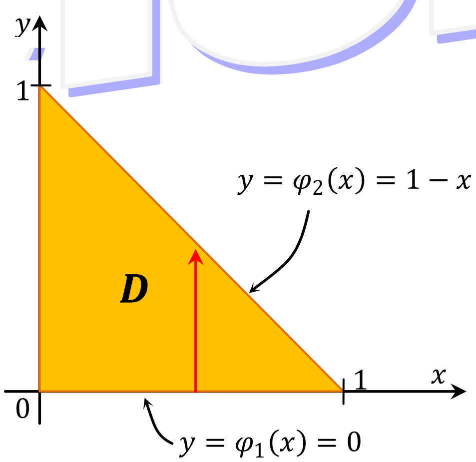
Solución



$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|(x,y) \in D, 0 \le z \le \underbrace{1 - x^2}_{f(x,y)}\}$ *es la región sólida*

con $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$





En este caso se considera a D como y-simple. También se la puede considerar como x-simple ya que es de ambos tipos a la vez.

$$V(S) = \iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

$$V(S) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x^2)dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 [y - x^2 y]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x - x^2(1-x))dx$$

$$= \int_0^1 (1 - x - x^2 + x^3)dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{12 - 6 - 4 + 3}{12}$$

$$= \frac{5}{12}$$