# Clase 10

June 7, 2022

**Intersección y paralelismo de planos**

Cuando queremos estudiar las posiciones relativas entre dos planos en $\mathbb{R}^3$ caben tres posibilidades (Ver $Fig.1$)

**Example 1** *Sean $\pi_1$ el plano con ecuación $x - z = 1$ y $\pi_2$ el plano coordenado $xy$. Queremos determinar sus posiciones relativas.*

Podemos notar que al plano $\pi_2$ lo podemos describir con su ecuación cartesiana $z = 0$. Luego debemos estudiar la intersección

$\pi_1 \cap \pi_2$. Es decir los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que satisfacen ambas ecuaciones, o sea resolver el sistema lineal:

$$(*) \left\{ \begin{array}{c} x - z = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

En este caso es muy sencillo ver que si reemplazamos la segunda ecuación en la primera nos queda

$$x = 1$$

Entonces la solución es $(x, y, z) = (1, y, 0)$. Si parametrizamos $y = t$ obtenemos la ecuación vectorial de una recta:

$$(x, y, z) = (1, t, 0)$$

ahora aplicando la definición de suma de vectores separamos lo que tiene "$t$" y lo que no tiene:

$$(1, t, 0) = (1, 0, 0) + (0, t, 0) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0)$$

O sea

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0), \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Esta última es la ecuación vectorial de una recta!

**Otra forma:** Resolvemos el sistema lineal $(*)$ con matrices:

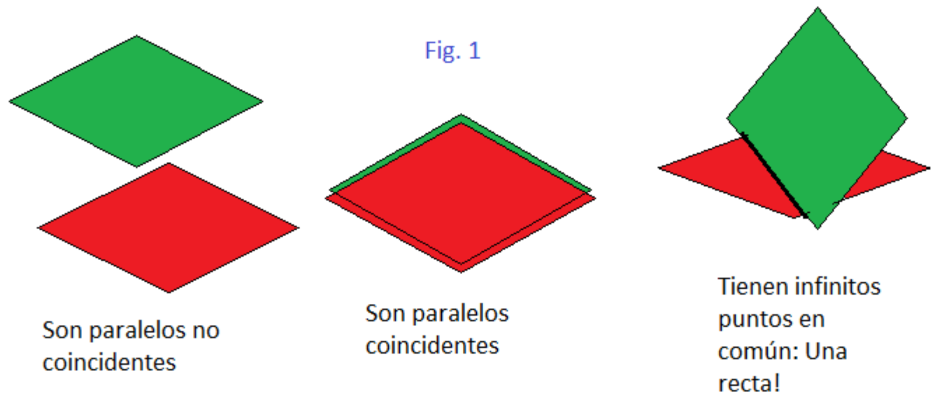



Fig. 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to f_1 + 1.f_2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Reinterpretamos el sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Hay más incógnitas que ecuaciones con lo que se parametriza la variable libre $y = t$ y la solución es

$$\{(x, y, z) = (1, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

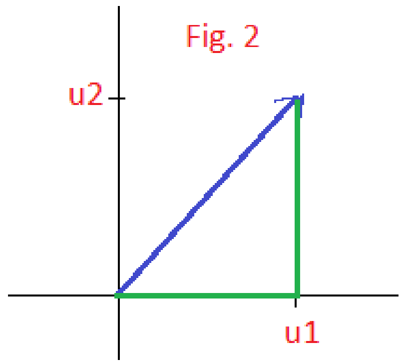
Ahora mediante las definiciones de suma de vectores y producto de vector por escalar podemos ver que

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0)$$

que es, como antes, la ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^3$.

Es decir que ambos planos se cortan en dicha recta.

**Remark 2** *En general cuando queremos estudiar las posiciones relativas entre dos rectas, dos planos, plano y recta debemos buscar los puntos $X$ (en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, según cada caso) de forma tal que satisfaga cada ecuación de los objetos involucrados (rectas o planos). Esto conlleva a resolver un sistema de ecuaciones lineales y de ahí obtener sus "intersecciones". Dicho sistema puede tener solución o no, lo cual diría que los objetos involucrados se intersecan entre si o no, respectivamente.*




**Norma de un vector**

Llamaremos *norma* de un vector (libre) $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ a su longitud y la denotaremos por $\|u\|$. Podemos ver que usando el *Teorema de Pitágoras* que si $u = (u_1, u_2)$, es decir $u_1, u_2$ son los números de dirección del vector $\mathbf{u}$ (también llamados componentes) entonces si dibujamos una representación de dicho vector (Ver $Fig.2$)

vemos que la longitud, $\|u\|$, es la medida del segmento dirigido azul. O sea (Pitágoras)

$$\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2$$

o, equivalentemente:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

En $\mathbb{R}^3$ pasa algo similar (Ver $Fig.3$)

Por lo que sabemos del caso anterior ($\mathbb{R}^2$) la linea roja de la $Fig.3$ es

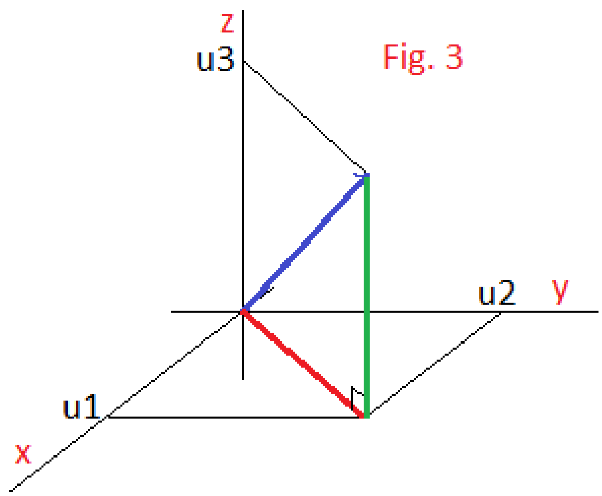
$$\text{longitud linea roja} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Ahora notar que el triángulo con lados azul, verde y rojo es recto. el lado azul es la hipotenusa (lo que sería la norma de nuestro vector $u = (u_1, u_2, u_3)$) y los lados rojo y verde son los catetos. Por el Teorema de Pitágoras (otra vez!) tenemos que

$$(\text{linea azul})^2 = (\text{linea roja})^2 + (\text{linea verde})^2$$

Sabiendo que la linea roja mide $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, la linea verde mide $u_3$ y la linea azul mide $\|u\|$, tenemos que

$$\|u\|^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2 + u_3^2$$




O, equivalentemente:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

**Distancia entre dos puntos**

Dados dos puntos en $\mathbb{R}^3$ (en $\mathbb{R}^2$ es análogo!) $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ podemos calular la distancia entre ambos calculando la norma del vector libre $Q - P$ . Es decir

$$dist(P, Q) = \|Q - P\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

**Example 3** *Queremos saber la distancia entre los puntos* $P = (2, -1, -5)$ *y* $Q = (4, -3, 1)$.

Sencillamente aplicamos la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} dist(P, Q) &= \sqrt{(4-2)^2 + (-3-(-1))^2 + (1-(-5))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{44} \\ &= 2\sqrt{11}. \end{aligned}$$

Otra forma: Consideramos el vector libre $Q - P = (2, -2, 6)$ y le calculamos su norma:

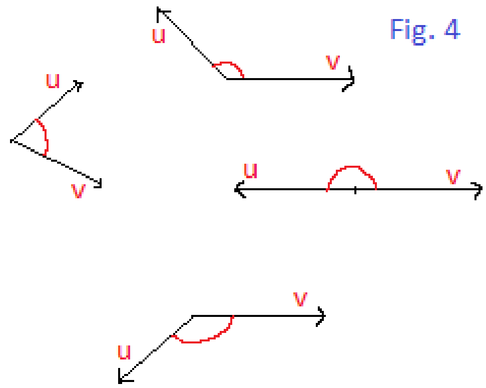


Fig. 4

$$
\begin{aligned}
dist(P,Q) &= \|Q-P\| \\
&= \sqrt{2^2+(-2)+6^2} \\
&= \sqrt{44} \\
&= 2\sqrt{11}.
\end{aligned}
$$

**Producto punto entre dos vectores**

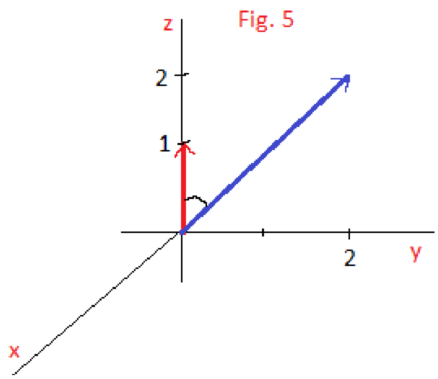
Primero vamos a establecer el ángulo formado entre dos vectores de $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$ es análogo!). Dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ entonces el ángulo entre ellos queda determinado por aquel $\theta$ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$. (recordar que esta medida es en radianes. No olvidar que $\pi$ equivale a $180°$) (Ver $Fig.4$)

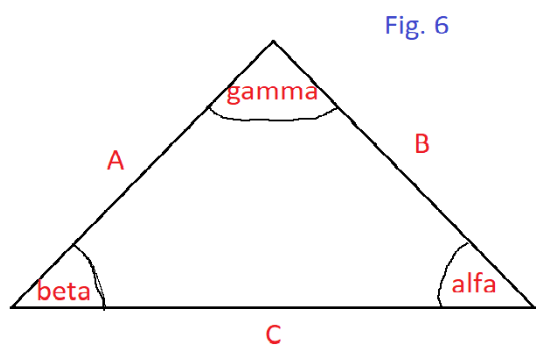
**Definition 4** *Sean $u, v$ vectores en $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$). Sea $\theta$ el ángulo que forman. Entonces definimos el producto punto entre $u$ y $v$, y lo denotamos por $u.v$, como sigue*

$$
u.v = \begin{cases} \|u\| \, \|v\| \cos(\theta) \text{ } si \text{ } u \neq 0, \text{ } v \neq 0 \\ 0 \end{cases}
$$

**Example 5** *Sean $u = (0,0,1)$ y $v = (0,2,2)$. Se ve ($Fig.5$) que el ángulo que forman entre ellos es $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($45°$).*

Entonces, como ambos vectores son no nulos, tenemos que por la definición



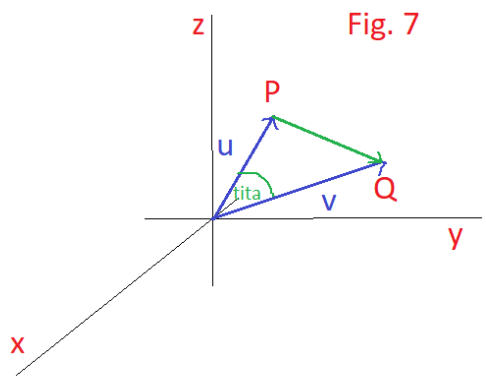




anterior:

$$\begin{aligned}
u.v &= \|u\| \, \|v\| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \left(\sqrt{0^2+0^2+1^2}\right)\left(\sqrt{0^2+2^2+2^2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \sqrt{8}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

**Cómo calcular el producto interno a partir de las componentes de los vectores?**

Para esto necesitamos recordar el *Teorema del coseno.*
Supongamos tener un triángulo cualquiera con lados $A, B, C$ (Ver $Fig.6$)
el ángulo opuesto al lado $A$ es $\alpha$, el ángulo opuesto al lado $B$ es $\beta$ y el ángulo




opuesto al lado $C$ es $\gamma$. Entonces el Teorema del coseno dice que

$$\begin{aligned} A^2 &= B^2 + C^2 - 2BC\cos(\alpha) \\ B^2 &= A^2 + C^2 - 2AC\cos(\beta) \\ C^2 &= A^2 + B^2 - 2AB\cos(\gamma) \end{aligned}$$

Consideremos ahora dos vectores (libres) cuyas componentes (números de dirección) son (en $\mathbb{R}^2$ es análogo)

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, u_3) \\ v &= (v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

(Ver $Fig.7$)

Sabemos que el segmento dirigido $PQ$ es un representante del vector libre $V - U$ (verlo!). Luego aplicamos el Teorema del coseno al triángulo formado por los segmentos dirigidos $u, v$ y $PQ$, siendo $\theta$ el ángulo que forman $u$ y $v$,

$$\begin{aligned} \|PQ\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\|\cos(\theta) \\ \|v-u\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,\|u\|\,\|v\|\cos(\theta) \end{aligned}$$

Pasando términos adecuadamente vemos que

$$\|u\|\,\|v\|\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2\right)$$

O sea que

$$(*)\ u.v = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v-u\|^2\right)$$

Y ahora veamos la norma $\|v-u\|^2$:

$$\begin{aligned}
\|v-u\|^2 &= (v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+(v_3-u_3)^2 \\
&= \left(v_1^2-2v_1u_1+u_1^2\right)+\left(v_2^2-2v_2u_2+u_2^2\right)+\left(v_3^2-2v_3u_3+u_3^2\right) \\
&= \left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)+\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)-2(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3) \\
&= \|v\|^2+\|u\|^2-2(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3)
\end{aligned}$$

Luego reemplazamos en (*):

$$\begin{aligned}
u.v &= \frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2-\|v-u\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\|u\|^2+\|v\|^2-\left[\|v\|^2+\|u\|^2-2(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\|u\|^2+\|v\|^2-\|v\|^2-\|u\|^2+2(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3)\right\} \\
&= \frac{1}{2}2(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3) \\
&= u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3
\end{aligned}$$

Es decir hemos obtenido una fórmula para calcular el producto interno entre dos vectores dados por sus componentes!

$$u.v=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=\sum_{i=1}^{3}u_iv_i.$$

Esta fórmula es análoga para vectores en $\mathbb{R}^2$, si $u=(u_1,u_2)$ y $v=(v_1,v_2)$ entonces

$$u.v=u_1v_1+u_2v_2.$$

**Ahora podemos calcular el ángulo entre dos vectores: Si** $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$ son vectores *no nulos* entonces desde la definición de producto interno tenemos que

$$u.v=\|u\|\,\|v\|\cos(\theta)$$

Despejamos y obtenemos que

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{3}u_iv_i}{\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\right)\left(\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\right)}.
\end{aligned}$$

**Example 6** *Calcular el ángulo entre los vectores* $u=(2,-1,1)$ *y* $v=(1,1,2)$.

Aplicamos lo anterior. Calculamos $u.v$ y las normas de cada vector.

$$u.v=2.1+(-1).1+1.2=3$$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}\\ \|v\| &= \sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}\end{aligned}$$

con lo que

$$\cos(\theta)=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

como $0\leq\theta\leq\pi$ se tiene que $\theta=\frac{\pi}{3}$ ($60°$).

Veamos algunos teoremas del producto interno. **Se enunciarán para vectores de $\mathbb{R}^3$ pero valen igualmente para vectores en $\mathbb{R}^2$.**

**Theorem 7** *Sean $u,v\in\mathbb{R}^3$. Entonces*

1. *$u.u=\|u\|^2$*
2. *Si $u,v$ son ambos no nulos y $\theta$ es el ángulo entre ellos entonces se verifica*
   - *(a) $\theta$ es agudo si solo si $u.v>0$*
   - *(b) $\theta$ es obtuso si solo si $u.v<0$*
   - *(c) $\theta=\frac{\pi}{2}$ si solo si $u.v=0$ (en otras palabras, los vectores son ortogonales cuando $u.v=0$).*

**Proof.** La parte 1 queda como ejercicio, es solo aplicar la definición. Mostraremos

la parte 2 (acá hay que recordar trigonometría!). Si $\theta$ es agudo, como $0\leq\theta\leq\pi$ solo cabe la posibilidad que $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$. Pero esto significa (VER!) que $\cos(\theta)>0$. Y luego como

$$u.v=\|u\|\,\|v\|\cos(\theta)>0.$$

(las normas son longitudes, son siempre positivas cuando los vectores son no nulos!).

Si $\theta$ es obtuso, de nuevo como $0\leq\theta\leq\pi$ solo cabe la posibilidad que $\frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$. Pero esto significa (VER!) que $\cos(\theta)<0$. Y entonces

$$u.v=\|u\|\,\|v\|\cos(\theta)<0.$$

Finalmente, como $0\leq\theta\leq\pi$, entonces $\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\cos(\theta)=0$. Luego $u.v=0$.
■

**Theorem 8** *Sean $u,v,w$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea $k\in\mathbb{R}$. Entonces*

1. *$u.v=v.u$*

2. $u.(v+w) = u.v + u.w$

3. $k(u.v) = (ku).v = u.(kv)$

4. $v.v > 0$ *si* $v \neq 0$ *y* $v.v = 0$ *si* $v = 0$.

**Proof.** Probaremos 2. Los demás ítems quedarán como ejercicio. Escribimos

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, u_3) \\ v &= (v_1, v_2, v_3) \\ w &= (w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} u.(v+w) &= (u_1, u_2, u_3).(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\ &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) \\ &= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3 \\ &= (u_1v_1) + [u_1w_1] + (u_2v_2) + [u_2w_2] + (u_3v_3) + [u_3w_3] \\ &= u.v + u.w \end{aligned}$$

■