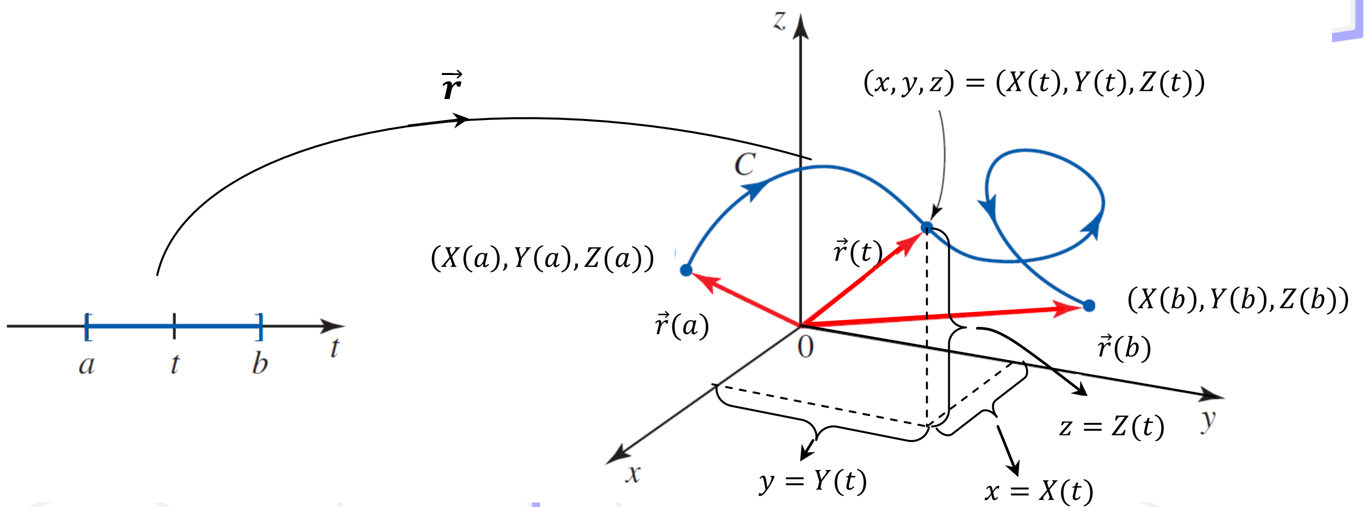
CURVAS EN $\mathbb{R}^3$

Una curva C es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ *que son la imagen del conjunto* $I = [a, b]$ *por* $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Es decir, $C = \vec{r}(I)$ *donde* $\vec{r}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ *con* $t \in I$.

Decimos que $\vec{r}$ *es una parametrización para C.*

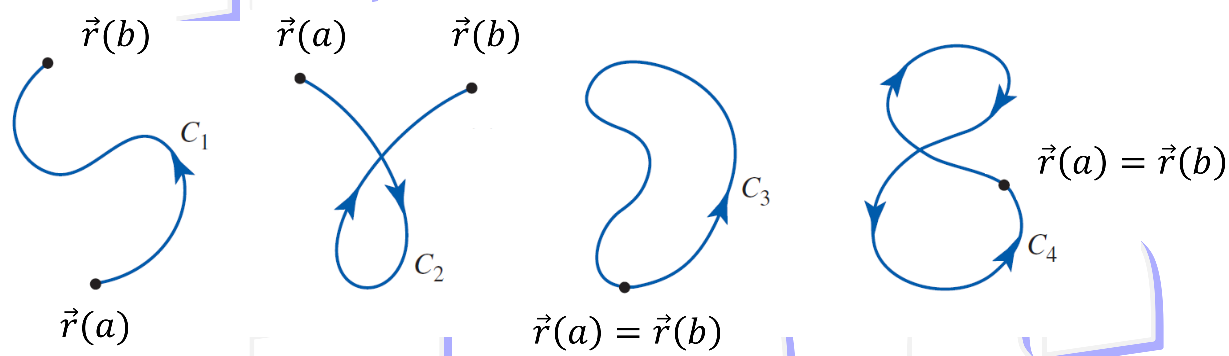


Los puntos $\vec{r}(a)$ *y* $\vec{r}(b)$ *son los extremos de la curva C.*

** Se dice que C es cerrada si y sólo si* $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

** Se dice que C es simple si y sólo si* $\forall\, t_1, t_2 \in (a, b) / \, t_1 \neq t_2 \Rightarrow \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$. *Es decir que C no se corta a sí misma excepto quizás en sus puntos extremos.*

Por ejemplo:



C_1 es una curva simple no cerrada.

C_2 es una curva no simple no cerrada.

C_3 es una curva simple cerrada.

C_4 es una curva no simple cerrada.

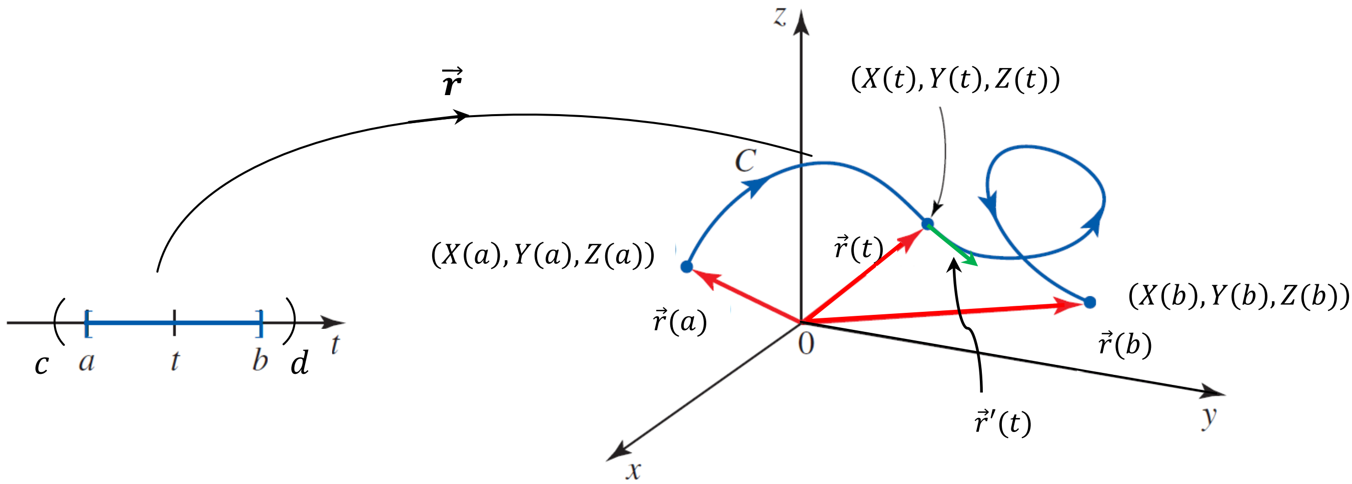
LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA SUAVE

Sea

$$\vec{\boldsymbol{r}}: (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

una parametrización para la curva C, definida por:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t}))\ con\ t \in I = [a, b] \subset (c, d)$$



*Decimos que C es **suave** si y sólo si*

$$\vec{\boldsymbol{r}} \in \boldsymbol{C}^1(\boldsymbol{I}) \ \ y \ \ \underbrace{\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})}_{\text{Vector tangente a C en el punto } \vec{r}(t)} \neq \vec{\boldsymbol{0}} \ \ \forall \boldsymbol{t} \in \boldsymbol{I}$$

La longitud L de C (curva suave) viene dada por:

$$\boldsymbol{L} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \|\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})\|\, \boldsymbol{dt} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \sqrt{[\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t})]^2 + [\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{t})]^2 + [\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{t})]^2}\, \boldsymbol{dt}$$

Ejemplo

En cada uno de los siguientes casos determine la longitud de la curva indicada:

a) $C = \vec{r}(I)$ con $\vec{r}(t) = (2t - 3, 2t)$ y $t \in I = [2, 4]$

b) $C = \vec{r}(I)$ con $\vec{r}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t)$ y $t \in I = [0, 1]$

Solución

a) $\vec{r}(t) = (2t - 3, 2t)$, $2 \le t \le 4$

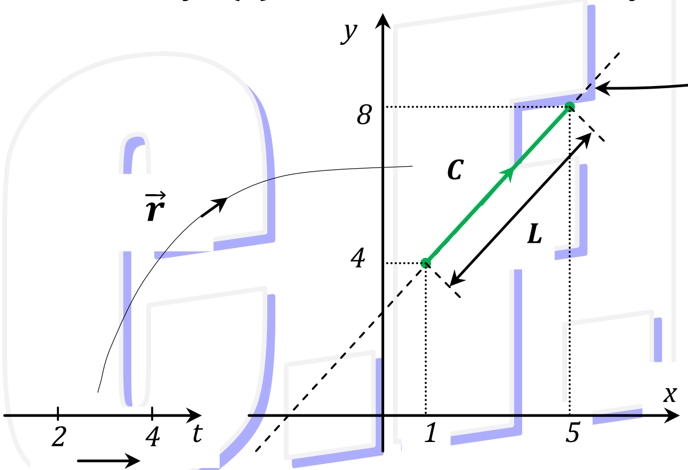
$\vec{r}\,'(t) = (2, 2)$; $L = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_2^4 \sqrt{2^2 + 2^2}\, dt$

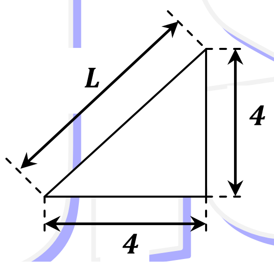
$$L = 2\sqrt{2} \int_2^4 1\, dt = 2\sqrt{2}\, [t]_2^4 = 4\sqrt{2}$$

Como $(x, y) = \vec{r}(t) = (2t - 3, 2t)$ *se tiene que:*

$$\begin{cases} x = 2t - 3 & (1) \\ y = 2t & (2) \end{cases} \qquad 2 \le t \le 4$$

Si se sustituye (2) en (1) se obtiene: $x = y - 3 \Rightarrow y = x + 3$





$$L = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{16.2} = 4\sqrt{2}$$

---

b) $\vec{r}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 1$

$\vec{r}\,'(t) = (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t,\ e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{(e^t)^2[(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2]}$$

$$= e^t \sqrt{[(\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2]}$$

$$= e^t \sqrt{\cos^2 t - 2\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 2\cos t \operatorname{sen} t + \cos^2 t}$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = e^t \sqrt{2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)} = \sqrt{2} e^t$$

$$L = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{2} e^t\, dt = \sqrt{2} \int_0^1 e^t\, dt = \sqrt{2}\, [e^t]_0^1 = \sqrt{2}\,(e - 1)$$

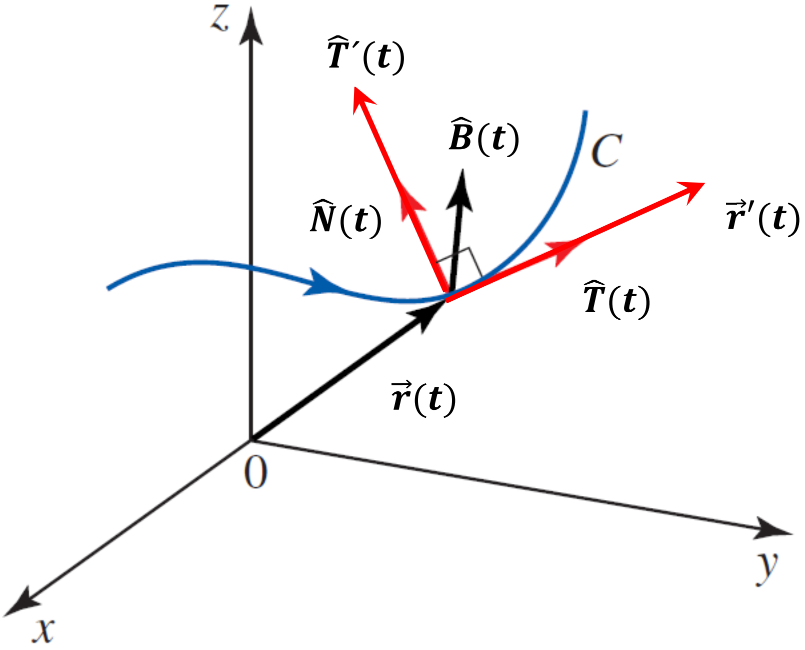
TRIEDRO DE FRENET. PLANO OSCULADOR. CURVATURA.TORSIÓN

Sea

$$\vec{\boldsymbol{r}}: (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \quad clase\ C^3(I)\ ;\ I = [a, b] \subset (c, d)$$

una parametrización para la curva ***suave*** *C, definida por:*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t}))\ con\ t \in I$$



VECTOR TANGENTE UNITARIO

Como $\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})$ es un vector tangente a C en el punto $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ definimos al ***vector tangente unitario*** *como:*

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})}{\|\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})\|}$$

VECTOR NORMAL PRINCIPAL

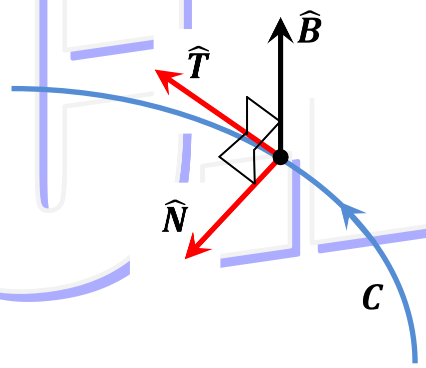
Como se demuestra que $\hat{\boldsymbol{T}}'(\boldsymbol{t})$ (vector no unitario) es ortogonal a $\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t})$, se puede definir un ***vector normal unitario principal*** *por:*

$$\hat{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\hat{\boldsymbol{T}}'(\boldsymbol{t})}{\|\hat{\boldsymbol{T}}'(\boldsymbol{t})\|} \quad ; \quad \hat{\boldsymbol{T}}'(\boldsymbol{t}) \neq \vec{\mathbf{0}}$$

VECTOR BINORMAL

Se define como:

$$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{t}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}) \times \hat{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{t})$$



$\hat{\boldsymbol{T}}, \hat{\boldsymbol{N}}$ **y** $\hat{\boldsymbol{B}}$ *constituyen una base de vectores unitarios ortogonales entre si que siguen la regla de la mano derecha y se denominan* ***TRIEDRO DE FRENET***.

$$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}) = \hat{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{t}) \times \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{t})$$

$$\hat{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{t}) = \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{t}) \times \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t})$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{t}) = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}) \times \hat{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{t})$$

FÓRMULAS

Para los cálculos suele ser conveniente utilizar las siguientes fórmulas:

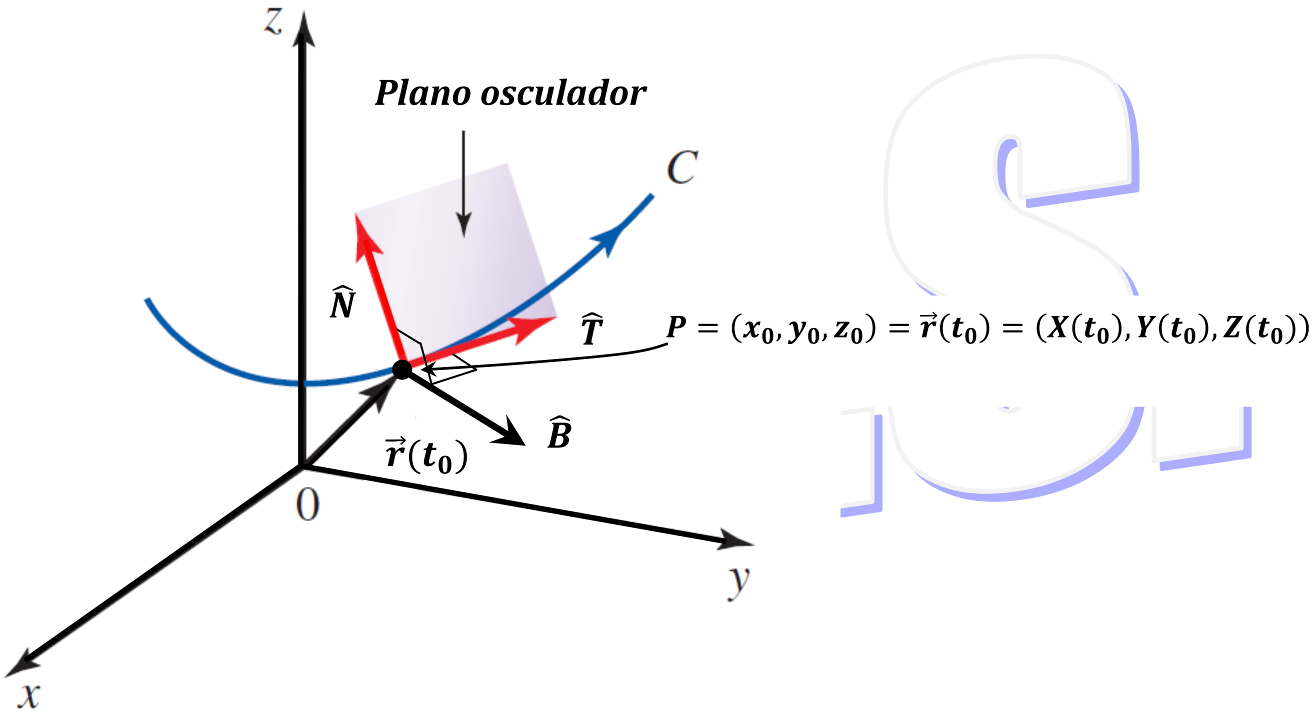
$$\boxed{(\mathbf{1}) \qquad \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})}{\|\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})\|}}$$

$$\boxed{(\mathbf{2}) \qquad \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \times \vec{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})}{\|\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \times \vec{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})\|}}$$

$$\boxed{(\mathbf{3}) \qquad \hat{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{t}) = \hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{t}) \times \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{t})}$$

PLANO OSCULADOR

El plano definido por los vectores $\hat{\boldsymbol{T}}$ *y* $\hat{\boldsymbol{N}}$ *en el punto P de la curva C se llama* ***plano osculador*** *de C en P. Es el plano que está más cerca de contener la parte de la curva C cerca de P. Para una curva plana el plano osculador es el plano que contiene a la curva.*



Como $\hat{\boldsymbol{B}}$ es ortogonal al plano osculador, si

$$\vec{B}(t_0) = (A, B, C)$$

llamando $\vec{x} = (x, y, z)$

luego $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = \vec{r}(t_0)$

y podemos escribir:

$$\vec{B}(t_0) \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

$$(A, B, C) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\boxed{(4) \quad \boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}}$$ *Ecuación cartesiana del Plano Osculador de C en P*

CURVATURA

La curvatura de C en un punto es una medida de qué tan rápido cambia la curva de dirección en ese punto.

$$\boxed{(5) \quad \boldsymbol{\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}}}$$

Una recta tiene curvatura cero.

TORSIÓN

Una curva que no es plana se llama alabeada.

La torsión de C en un punto es una medida de cuánto se aleja la curva de ser plana en ese punto, es decir, mide la tendencia de la curva a "alabearse", a salirse o apartarse del plano osculador.

$$\boxed{(6)\ \ \boldsymbol{\tau(t)} = \frac{\left(\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \times \vec{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})\right)\bullet \vec{\boldsymbol{r}}'''(\boldsymbol{t})}{\|\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t}) \times \vec{\boldsymbol{r}}''(\boldsymbol{t})\|^2}}$$

La torsión de una curva plana es cero.

Ejemplo

En cada uno de los casos siguientes, determine $\widehat{\boldsymbol{T}}, \widehat{\boldsymbol{N}}, \widehat{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\tau}$ *y la ecuación del plano osculador en el punto que se indica:*

(I) $\quad \vec{r}(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t\right)$ ***para*** $t = 0$

(II) $\quad \vec{r}(t) = \left(t^2, e^t, te^t\right)$ ***en*** $(0, 1, 0)$

Solución

$$\widehat{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \qquad \widehat{B}(t) = \frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\|} \qquad \widehat{N}(t) = \widehat{B}(t)\times\widehat{T}(t)$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \qquad \tau(t) = \frac{\left(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right)\bullet\vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\|^2}$$

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \quad ; \quad \vec{B}(t_0) = (A, B, C)$$

(I) $\vec{r}(t) = \left(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}\, t\right) \quad ; \quad \vec{r}(0) = (1, 1, 0) = (x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{r}'(t) = \left(e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}\right) \ ; \ \vec{r}\,'(0) = \left(1, -1, \sqrt{2}\right) \ ; \quad \|\vec{r}'(0)\| = \sqrt{1+1+2} = 2$$

$$\vec{r}''(t) = \left(e^t, e^{-t}, 0\right) \quad ; \ \vec{r}\,''(0) = (1, 1, 0)$$

$$\vec{r}'''(t) = \left(e^t, -e^{-t}, 0\right) \quad ; \ \vec{r}\,'''(0) = (1, -1, 0)$$

$$\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right)$$

$$\left(\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\right)\bullet\vec{r}\,'''(0) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right)\bullet(1, -1, 0) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\| = \sqrt{2+2+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\hat{T}(0) = \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} = \frac{(1,-1,\sqrt{2})}{2} = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\hat{B}(0) = \frac{\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)}{\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\|} = \frac{(-\sqrt{2},\sqrt{2},2)}{2\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (A,B,C)$$

$$\hat{N}(0) = \hat{B}(0)\times\hat{T}(0) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$$

$$\kappa(0) = \frac{\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\|}{\|\vec{r}'(0)\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{2^3} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ ; \qquad \tau(0) = \frac{(\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0))\bullet\vec{r}'''(0)}{\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\|^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow -\tfrac{1}{2}(x-1)+\tfrac{1}{2}(y-1)+\tfrac{\sqrt{2}}{2}(z-0)=0$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0 \quad \Rightarrow \quad x-y-\sqrt{2}\,z=0 \ \ \textit{ec.plano osculador}$$

(II) $\vec{r}(t) = (t^2, e^t, te^t)$ ***en*** $(0,1,0)$

Como $(x_0,y_0,z_0) = (0,1,0) \Rightarrow t = t_0 = 0$ ***ya que*** $\vec{r}(0) = (0,1,0)$

$$\vec{r}'(t) = (2t, e^t, e^t+te^t)\ ;\ \vec{r}'(0) = (0,1,1)\ ;\ \|\vec{r}'(0)\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{r}''(t) = (2, e^t, 2e^t+te^t)\ ;\ \vec{r}''(0) = (2,1,2)$$

$$\vec{r}'''(t) = (0, e^t, 3e^t+te^t)\ ;\ \vec{r}'''(0) = (0,1,3)$$

$$\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,2,-2)$$

$$\left(\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\right)\bullet\vec{r}'''(0) = (1,2,-2)\bullet(0,1,3) = 0+2-6 = -4$$

$$\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\hat{T}(0)=\frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|}=\frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\hat{B}(0)=\frac{\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)}{\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\|}=\frac{(1,2,-2)}{3}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=(A,B,C)$$

$$\hat{N}(0)=\hat{B}(0)\times\hat{T}(0)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\times\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

$$\kappa(0)=\frac{\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\|}{\|\vec{r}'(0)\|^3}=\frac{3}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\quad ;\qquad \tau(0)=\frac{\left(\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\right)\bullet\vec{r}'''(0)}{\|\vec{r}'(0)\times\vec{r}''(0)\|^2}=\frac{-4}{9}$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{3}(x-0)+\frac{2}{3}(y-1)-\frac{2}{3}(z-0)=0$$

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}(y-1)-\frac{2}{3}z=0\quad\Rightarrow\quad x+2y-2z=2\ \textit{ec. plano osculador}$$

INTEGRALES DE LÍNEA

INTEGRALES DE LÍNEA DE CAMPOS VECTORIALES

Sea

$$* \ \vec{\boldsymbol{r}}: (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

una parametrización para la curva ***suave*** *C, definida por:*

$$\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t})) \text{ con } t \in I = [a, b] \subset (c, d)$$

$$* \ \vec{\boldsymbol{F}}: \boldsymbol{D}_{\vec{\boldsymbol{F}}} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ ***continuo*** *sobre C, definido por:*

$$\vec{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}), \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\big)$$

Definimos a la integral de línea del campo vectorial $\vec{\boldsymbol{F}}$ *a lo largo de* $\boldsymbol{C}$ *como:*

$$\int_C \vec{\boldsymbol{F}} = \int_a^b \big(\vec{\boldsymbol{F}} \, \boldsymbol{o} \, \vec{\boldsymbol{r}}\big)(\boldsymbol{t}) \bullet \vec{\boldsymbol{r}}\,'(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{dt}$$

y

$$= \int_C \boldsymbol{Pdx} + \boldsymbol{Qdy} + \boldsymbol{Rdz} \ \text{ es su forma diferencial}$$

PROPIEDADES

Si

$$\vec{\boldsymbol{F}}: \boldsymbol{D}_{\vec{\boldsymbol{F}}} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad y$$

$$\vec{\boldsymbol{G}}: \boldsymbol{D}_{\vec{\boldsymbol{G}}} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

son campos vectoriales continuos sobre una curva suave C de $\mathbb{R}^3$

Entonces se tienen las siguientes propiedades:

(1) <u>LINEALIDAD</u>

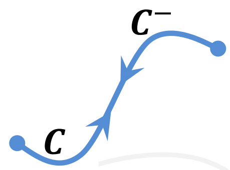
$$\int_C (\vec{F} \pm \vec{G}) = \int_C \vec{F} \pm \int_C \vec{G}$$

(2) <u>HOMOGENEIDAD</u>

$$\int_C k\vec{F} = k \int_C \vec{F} \qquad ; \ k \in \mathbb{R}$$

(3) <u>INVERSIÓN DEL CAMINO</u>

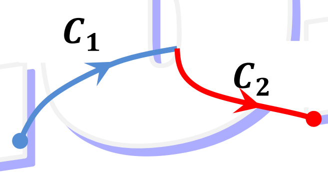
$$\int_C \vec{F} = -\int_{C^-} \vec{F}$$



donde C^- denota la curva que consiste en los mismos puntos que C pero con la orientación opuesta.

(4) <u>ADITIVIDAD</u>

$$\int_C \vec{F} = \int_{C_1} \vec{F} + \int_{C_2} \vec{F}$$



*donde $C = C_1 U C_2$, con C_1 y C_2 **curvas suaves** de modo que C es lo que se llama una **curva suave por tramos**.*

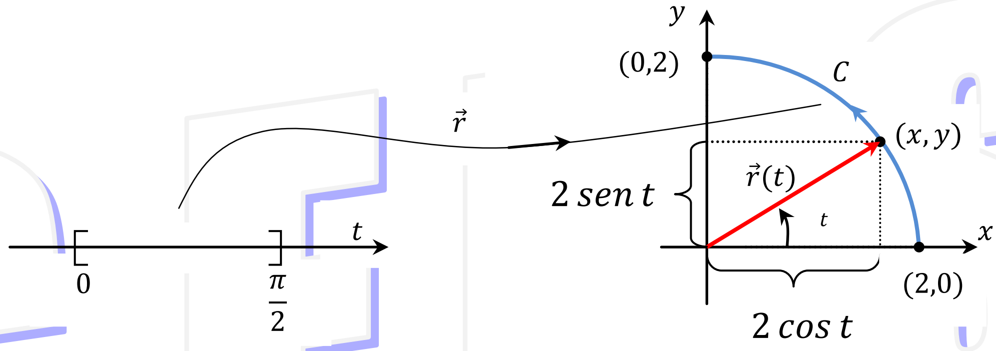
<u>Ejemplo</u>

Sea el campo vectorial $\vec{F}\,(x, y) = (2x, y)$. Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ para mover una partícula a lo largo del arco de circunferencia (centrada en el origen) C que une el punto (2,0) con el punto (0,2).

<u>Solución</u>

Una parametrización para C es:

$$(x,y)=\vec{r}\,(t)=(X(t),Y(t))=(2\cos t\,,2sen\ t)\quad con\ \ t\in I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$



$$W=\int_C\ \vec{F}=\int_a^b\left(\vec{F}o\,\vec{r}\right)(t)\bullet\vec{r}\,'(t)dt\,;$$

$$\left(\vec{F}o\,\vec{r}\right)(t)=(2\,(\overbrace{2cos\ t}^{x}),\overbrace{2sen\ t}^{y})$$

$$\left(\vec{F}o\,\vec{r}\right)(t)=(4\cos\ t\,,2sen\ t)$$

$$\vec{r}\,'(t)=(-2\ sen\ \ t\,,2cos\ t)$$

$$a=0\quad,b=\frac{\pi}{2}$$

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos\ \ t\,,2sen\ t)\bullet(-2\ sen\ \ t\,,2cos\ t)dt$$

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-8\cos t\ sen\ t+4\cos t\ sen\ t)\,dt$$

$$W=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ sen\ t\,dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ sen\ t\,dt=\int_0^1 udu=\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$u=sen\,t\ \ ,\ du=cost\ dt\ \ ,\ \ si\ t=0\ \ \Rightarrow\ \ u=sen(0)=0$$

$$si\ t=\frac{\pi}{2}\ \ \Rightarrow\ \ u=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\boxed{W=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ sen\ t\,dt=-4\left(\frac{1}{2}\right)=-2}$$

Otra forma

Usando la forma diferencial

$$\int_C \vec{F} = \int_C Pdx + Qdy$$

$$\vec{F}\,(x,y) = (2x,y) \quad \Rightarrow \quad P = 2x \quad ; Q = y$$

Ecuaciones paramétricas para C:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \;\; \Rightarrow \;\; dx = -2sen\, t dt \\ y = 2\, sen\, t \;\; \Rightarrow \;\; dy = 2\cos t\, dt \end{cases} \quad ; \; 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$W = \int_C \vec{F} = \int_C Pdx + Qdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{2(2\cos t\,)}_{P}\underbrace{(-2sen\, t)dt}_{dx} + \underbrace{2\, sen\, t}_{Q}\,\underbrace{(2\cos t)dt}_{dy}$$

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-8\cos t\; sen\, t + 4\cos t\;\; sen\, t]\, dt$$

$$W = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\;\; sen\, t\, dt = -2$$

INTEGRALES DE LÍNEA DE CAMPOS ESCALARES

Sea

$* \;\; \vec{\boldsymbol{r}}: (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{3}}$

*una parametrización para la curva **suave** C, definida por:*

$\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t}))$ *con* $t \in I = [a,b] \subset (c,d)$

$* \;\; \boldsymbol{f}: \boldsymbol{D_f} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \longrightarrow \mathbb{R}$

*un campo escalar **continuo** sobre C*

*Definimos a la integral de línea del campo escalar **f** a lo largo de **C** como:*

$$\int_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{f} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} (\boldsymbol{f}\, \boldsymbol{o}\, \vec{\boldsymbol{r}})\,(\boldsymbol{t}) \|\vec{\boldsymbol{r}}'\,(\boldsymbol{t})\|\, \boldsymbol{dt}$$

(Si f(x,y,z)=1 sobre C, entonces esta integral de línea da la longitud de la curva C)

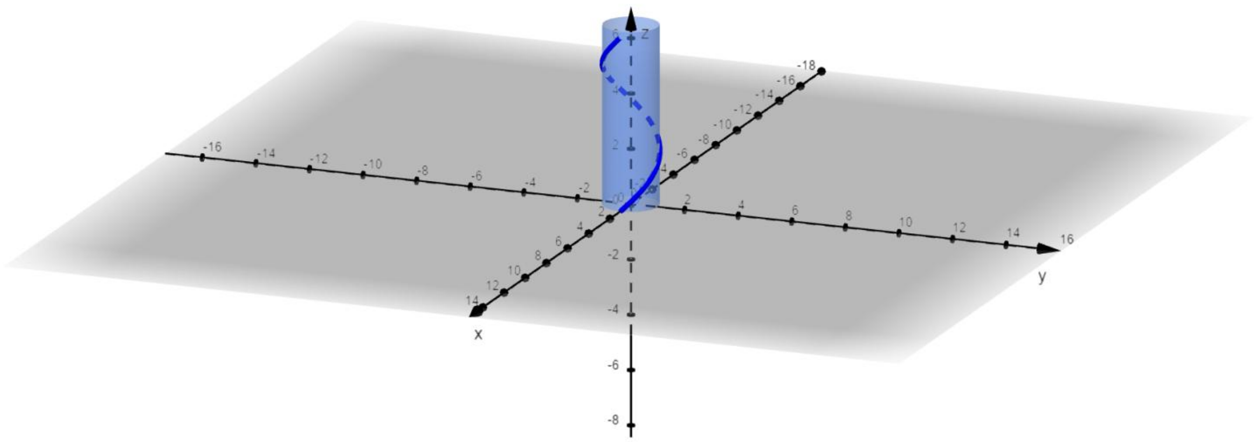
Ejemplo

Obtenga la masa de un alambre en forma de hélice parametrizado por:

$$\vec{r}\,(t) = (X(t), Y(t), Z(t)) = (\cos t\,, sen\, t, t) \quad con \;\; t \in I = [0, 2\pi]$$

si la densidad viene dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución



$$m = \int_a^b (\rho o\, \vec{r})\,(t) \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt \quad ; \qquad (\rho o\, \vec{r})(t) = cos^2\, t + sen^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-\text{sen}\, t\,, cos\, t, 1)$$

$$\|\, \vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{sen^2 t + cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$m = \int_0^{2\pi} (\rho o\, \vec{r})\,(t) \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,(1 + t^2)\, dt = \sqrt{2}\left(t + \frac{t^3}{3}\right)_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}\,(4\pi^2 + 3)$$