Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo

2. $W_0 = 2000 \text{ rad/s}$
$\alpha_f = -80 \text{ rad/s}^2$ ¡desacelera!
$W_f = 0 \text{ rad/s}$

a) rapidez angular después de 10 segundos

$$W = 2000 \text{ rad/seg} + (-80 \text{ rad/s}^2) \cdot 10\text{s}$$

$$\boxed{W_f = 1200 \text{ rad/seg}}$$

b) t necesario hasta parar completamente

$$0 \text{ rad/seg} = 2000 \text{ rad/seg} - 80 \text{ rad/s}^2 \cdot t$$

$$+80 \text{ rad/s}^2 \cdot t = 2000 \text{ rad/seg}$$

$$t = \frac{2000 \text{ rad/s}}{80 \text{ rad/s}^2} = \boxed{25 \text{ segundos}}$$

3. $t = 3{,}20\text{s}$
$\alpha = \text{cte}$?
$W_0 = 0 \text{ rev/seg}$
$W = 2{,}51 \times 10^4 \text{ rev/min}$
$\theta = ?$

$$2{,}51 \times 10^4 \cdot \left(\frac{2\pi}{60}\right) = 2628{,}5 \text{ rad/s}$$

$$2628{,}5 \text{ rad seg} = 0 \text{ rev/s} + \alpha \cdot 3{,}20\text{s}$$

$$\frac{2628{,}5 \text{ rad/s}}{3{,}20\text{ s}} = \boxed{821{,}4 \text{ rad/s}^2 = \alpha}$$

$$\theta = \theta_0 + W_0 \cdot t + \tfrac{1}{2}\alpha \cdot t^2$$

$$\theta = \tfrac{1}{2} \cdot 821{,}4 \text{ rad/s}^2 \cdot (3{,}20\text{s})^2$$

$$\boxed{\theta = 4205{,}6 \text{ radianes}}$$

$2\pi \text{ rad} \longrightarrow 1 \text{ rev}$
$4205{,}6 \text{ rad} \longrightarrow \boxed{x \cong 670 \text{ revoluciones}}$

4.
$W_0 = 0 \text{ rev/s}$
$t = 8\text{s}$
$W_f = 5 \text{ rev/s}$
$t_f = 12\text{s}$

1ra etapa

$W_0 = 0 \text{ rev/s}$
$W_f = 5 \text{ rev/s} \rightarrow 31{,}41 \text{ rad/s}$
$t = 8\text{s}$

$$\theta_1 = \cancel{0 \text{ rev}} + \cancel{0 \text{ rev/s} \cdot t} + \tfrac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (8\text{s})^2$$

$$\theta_1 = \tfrac{1}{2} \cdot 3{,}93 \text{ rad/s}^2 \cdot (8\text{s})^2$$

$$\theta_1 = 125{,}76 \text{ radianes}$$

$$31{,}41 = \alpha \cdot 8\text{s}$$

$$\frac{31{,}41 \text{ rev/s}}{8\text{s}} = 3{,}93 (\text{rad/s}^2) = \alpha$$

2da etapa

$W_0 = 5 \text{ rev/s}$
$W_f = 0 \text{ rev/s}$
$t = 12\text{s}$

$$\theta_2 = \cancel{\theta_0} + W_0 \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

¡de desaceleración!

$$\theta_2 = 31{,}41 \text{ rad/s} \cdot 12\text{s} + \tfrac{1}{2} \cdot (-2{,}62 \text{ rad/s}^2) \cdot (12\text{s})^2$$

$$\theta_2 = 188{,}3 \text{ radianes}$$

$$\cancel{W} = W_0 + \alpha \cdot t$$

$$\frac{-31{,}41 \text{ rev/s}}{12\text{ s}} = -2{,}62 \text{ rad/s}^2 = \alpha$$

$$\theta_{FINAL} = \theta_1 + \theta_2 = 125{,}76 \text{ rad} + 188{,}3 \text{ rad} = 314{,}04 \text{ rad} = 50 \text{ rev.}$$

5.

$r = 8cm \rightarrow 0{,}08m$

$w = 1200 rev/min$ ↓ CONSTANTE

$1200 \times \left(\frac{2\pi}{60}\right) = 125{,}7 \frac{rad}{s}$

a) $\alpha = ?$

b) V p/ punto a 3cm del centro

c) a_r punto en el borde

d) S (distancia) que recorre un punto del borde en 2 segundos

a) Si se mueve con velocidad angular constante, no posee aceleración angular, es un MCU.

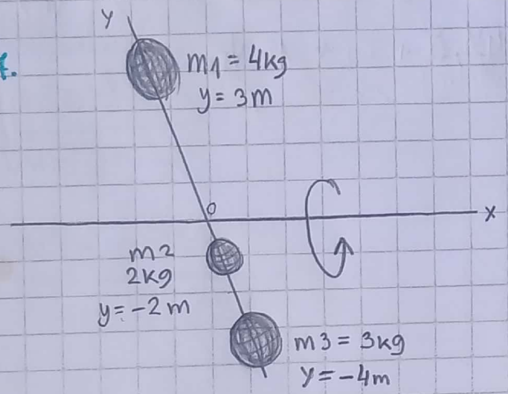
$V = w \cdot r = 125{,}7 \frac{rad}{s} \cdot 0{,}03m = \boxed{3{,}77\ m/s}$ b)

$a_r = w^2 \cdot r \rightarrow a_r = \left(125{,}7 \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 0{,}08m = \boxed{1264{,}04\ m/s^2}$ c)

$\theta = \frac{S}{r} \rightarrow S = 251{,}4 rad \cdot 0{,}08m$ $\quad \theta = w \cdot t = 125{,}7 \frac{rad}{\cancel{s}} \cdot 2\cancel{s} = 251{,}4\ rad$

$\boxed{S = 20{,}12\ m}$

7.



$W = 2 rad/s$

a) I respecto eje x
K_R evaluada a partir de $\frac{1}{2} I w^2$

b) V_t cada partícula
K_T total evaluada a partir de $\sum_i \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot V_t^2$

$I_x = m_1 \cdot (y_1)^2 + m_2 \cdot (y_2)^2 + m_3 \cdot (y_3)^2 = 4kg \cdot (3m)^2 + 2kg \cdot (-2m)^2 + 3kg \cdot (-4m)^2$

$= 36\ kg \cdot m + 8\ kg \cdot m + 48\ kg \cdot m = \boxed{92\ kg \cdot m^2}$

$K_R = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{92\ kg \cdot m^2}_{I_x} \cdot \underbrace{(2 rad/s)^2}_{w^2} = \boxed{184\ J}$ $\quad \frac{1}{2}$ sin $(kg \cdot m^2) \cdot \left(\frac{rad}{s}\right)^2$

$kg \cdot m^2 \cdot \frac{1^2}{s^2}$

$V_1 = w \cdot \cancel{x}\, y_1 = 2rad/s \cdot 3m = 6\ m/s$ [saliente]

$V_2 = w \cdot y_2 = 2 rad/s \cdot (-2m) = -4\ m/s$ [entrante]

$V_3 = w \cdot y_3 = 2rad/s \cdot (-4m) = -8m/s$ [entrante]

son iguales

$\frac{kg\ m^2}{s^2}$

$K_T = \frac{1}{2} m_1 \cdot (V_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (V_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (V_3)^2$

N

$K_T = \frac{1}{2} \cdot 4kg \cdot (6m/s)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2kg \cdot (-4m/s)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3kg \cdot (-8m/s)^2$

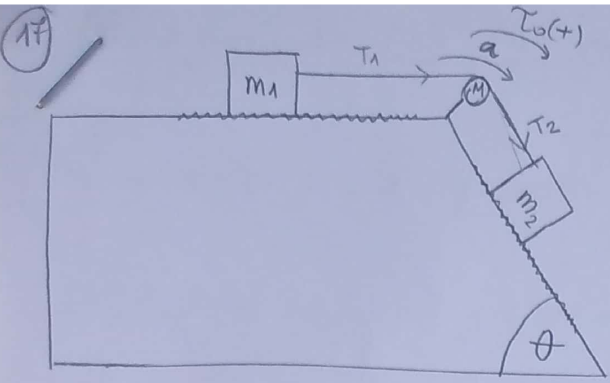
$\frac{kg \cdot m \cdot m}{s^2}$

$K_T = 76\ J + 16\ J + 96\ J = \boxed{184\ J}$

N · M

J

17

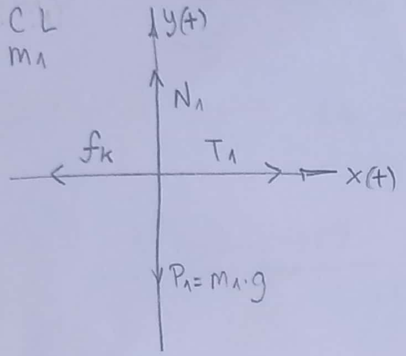


$m_1 = 2kg$
$m_2 = 6kg$
$r = 0{,}25m$
$M = 10kg$
$\theta = 30°$
$\mu_k = 0{,}36$

I_0 disco sólido
$\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$

$a = ?$
$T_1 = ?$
$T_2 = ?$

D.C.L
m_1



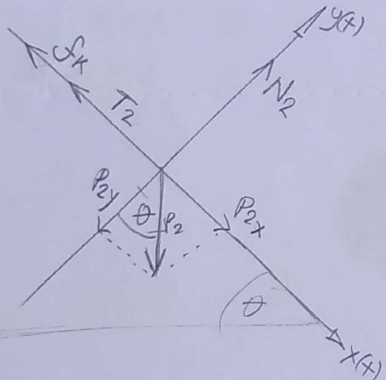
$$\sum F_x = m \cdot a_x$$
$$T_1 - f_k = m_1 \cdot a$$
$$T_1 - \mu_k \cdot N_1 = m_1 \cdot a \quad (1)$$

$$\sum F_y = \cancel{m \cdot a_y}^{\,0}$$
$$N_1 - P_1 = 0$$
$$N_1 = m_1 \cdot g \quad (2)$$

reemplazo (2) en (1)

$$T_1 - \mu_k \cdot m_1 \cdot g = m_1 \cdot a$$
$$T_1 = m_1 \cdot a + \mu_k \cdot m_1 \cdot g \quad (3)$$

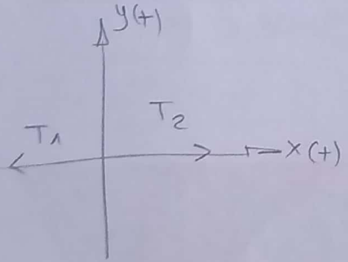
m_1



$$\sum F_x = m_2 \cdot a$$
$$P_{2x} - f_k - T_2 = m_2 \cdot a$$
$$P \cdot sen\theta - \mu_k \cdot N_2 - T_2 = m_2 \cdot a$$
$$m_2 \cdot g \cdot sen\theta - \mu_k \cdot m_2 \cdot g \cdot cos\theta - T_2 = m_2 \cdot a$$
$$m_2 \cdot g \cdot sen\theta - \mu_k \cdot m_2 \cdot g \cdot cos\theta - m_2 \cdot a = T_2 \quad (4)$$

$$\sum F_y = m_2 \cdot \cancel{a}^{\,0}$$
$$N_2 - P_{2y} = 0$$
$$N_2 = m_2 g \cdot cos\theta$$

m_2



$$\sum \tau_0 = I_0 \cdot \alpha$$
$$(T_2 - T_1) \cdot \cancel{R} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \cancel{R^2} \cdot \frac{a}{\cancel{R}}$$
$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot a \quad (5)$$

polea

$a = \alpha \cdot r$
$a/r = \alpha$

emplazando (3) y (4) en (5)

$$\left(m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu_K \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\theta - m_2 \cdot a\right) - \left(m_1 \cdot a + \mu_K \cdot m_1 \cdot g\right) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot a$$

$$m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu_K \cdot m_2 \cdot g \cos\theta - m_2 \cdot a - m_1 \cdot a - \mu_K \cdot m_1 \cdot g = \frac{1}{2} \cdot M \cdot a$$

$$m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu_K \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\theta - \mu_K \cdot m_1 \cdot g = \frac{1}{2} \cdot M \cdot a + m_2 \cdot a + m_1 \cdot a$$

$$m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu_K \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\theta - \mu_K \cdot m_1 \, g = a \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot M + m_2 + m_1\right)$$

$$\frac{m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta - \mu_K \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\theta - \mu_K \cdot m_1 \cdot g}{\frac{M}{2} + m_2 + m_1} = a$$

$$\frac{6kg \cdot 9{,}8 m/s^2 \cdot \operatorname{sen} 30° - 0{,}36 \cdot 6kg \cdot 9{,}8 m/s^2 \cdot \cos 30° - 0{,}36 \cdot 2kg \cdot 9{,}8 m/s^2}{\frac{10 kg}{2} + 2kg + 6kg} = a$$

$$\boxed{0{,}30 m/s^2 = a}$$

reemplazando en (3)

$$T_1 = 2kg \cdot 0{,}30 m/s^2 + 0{,}36 \cdot 2kg \cdot 9{,}8 m/s^2$$

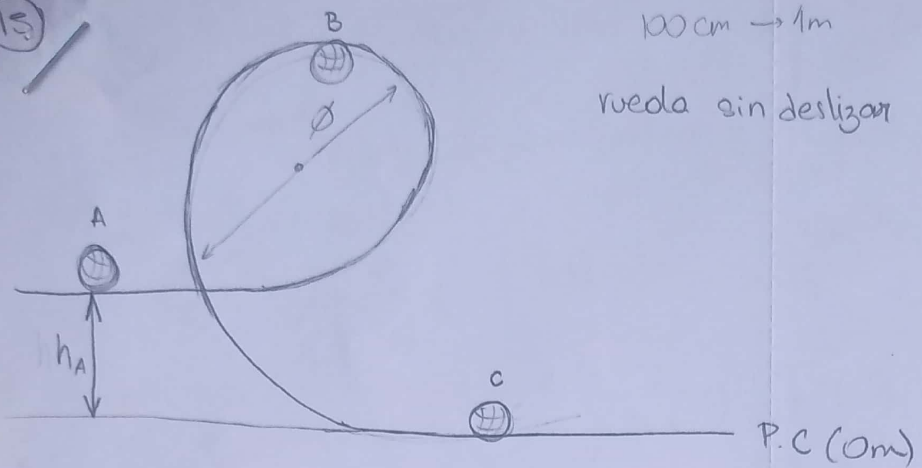
$$\boxed{T_1 = 7{,}65 N}$$

reemplazando en (4)

$$T_2 = 6kg \cdot 9{,}8 m/s^2 \cdot \operatorname{sen} 30° - 0{,}36 \cdot 6kg \cdot 9{,}8 m/s^2 \cos 30° - 6kg \cdot 0{,}30 m/s^2$$

$$\boxed{T_2 = 9{,}26 N}$$

15



100 cm → 1m

rueda sin deslizar

esfera hueca I_O: $\frac{2}{3} \cdot M \cdot R^2$

$V_0 = 4{,}03$ m/s

$\varnothing = 90$cm $= 0{,}9$m

$V_B = ?$

$V_C = ?$

V_B si sólo se traslada = ?

$h = 20$cm $= 0{,}2$ m

$V = \omega \cdot r$

$\frac{V}{r} = \omega$

$$E(A) = E(B)$$

$$m \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_0^2 + \frac{1}{2} \cdot I_o \cdot (\omega_1)^2 = m \cdot g \cdot h_B + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_B^2 + \frac{1}{2} \cdot I_o \cdot (\omega_2)^2$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot (V_0)^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \cancel{m} \cdot \cancel{r^2} \cdot \frac{V_0^2}{\cancel{r^2}} = \cancel{m} \cdot g \cdot h_B + \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot (V_B)^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cancel{m} \cdot \cancel{r^2} \cdot \frac{V^2}{\cancel{r^2}}$$

$$g \cdot h_A + \frac{1}{2} \cdot (V_0)^2 + \frac{1}{3} V_0^2 = g \cdot (\varnothing + h_A) + \frac{1}{2} (V_B)^2 + \frac{1}{3} V_B^2$$

$$\cancel{g \cdot h_A} + \frac{1}{2} \cdot V_0^2 + \frac{1}{3} (V_0)^2 = g \cdot \varnothing + \cancel{g \cdot h_A} + \frac{5}{6} (V_B)^2$$

$$\frac{5}{6} V_0^2 = g \cdot \varnothing + \frac{5}{6} (V_B)^2$$

$$\sqrt{\frac{\frac{5}{6} V_0^2 - g \cdot \varnothing}{5/6}} = V_B$$

$$\sqrt{\frac{5/6 \cdot (4{,}03 \text{ m/s})^2 - (9{,}8 \text{m/s}^2 \cdot 0{,}9 \text{m})}{5/6}} = V_B$$

a) $\boxed{2{,}37 \text{ m/s} = V_B}$

$$V = \omega . r$$

$$V/r = \omega$$

$$E(A) = E(C)$$

$$m \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (V_A)^2 + \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot (\omega_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (V_C)^2 + \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot (\omega_C)^2$$

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot (V_A)^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \cancel{m} \cdot \cancel{r^2} \cdot \frac{V_A^2}{\cancel{r^2}} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot (V_C)^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \cancel{m} \cdot \cancel{r^2} \cdot \frac{V_C^2}{\cancel{r^2}}$$

$$g \cdot h_A + \frac{1}{2}(V_A)^2 + \frac{1}{3}(V_A)^2 = \frac{1}{2} \cdot (V_C)^2 + \frac{1}{3}(V_C)^2$$

$$g \cdot h_A + \frac{5}{6}(V_A)^2 = \frac{5}{6}(V_C)^2$$

$$\sqrt{\frac{g \cdot h_A + 5/6 (V_A)^2}{5/6}} = V_C$$

$$\sqrt{\frac{9{,}8 m/s^2 \cdot 0{,}2 m + 5/6 \cdot (4{,}03 m/s)^2}{5/6}} = \boxed{4{,}31 m/s = \vec{V_C}} \quad b)$$

pelota se desliza en vez de rodar.

$$E(A) = E(B)$$

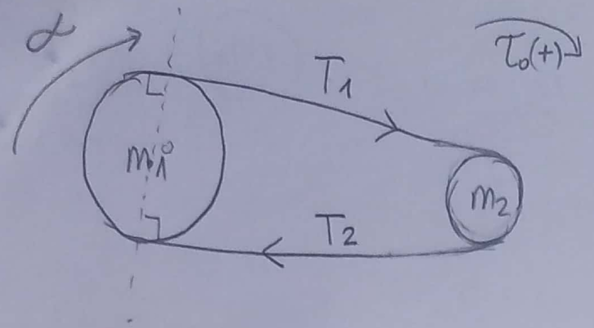
$$\cancel{m} \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot (V_A)^2 = \cancel{m} \cdot g \cdot h_B + \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot (V_B)^2$$

$$g \cdot h_A + \frac{1}{2} \cdot (V_A)^2 - g \cdot (\varnothing + h_A) = \frac{1}{2} \cdot V_B^2$$

$$\sqrt{\frac{\cancel{g \cdot h_A} + \frac{1}{2} \cdot V_A^2 - g\varnothing - \cancel{g \cdot h_A}}{1/2}} = V_B$$

$$\sqrt{\frac{1/2 \cdot (4{,}03)^2 - 9{,}8 \cdot 0{,}9m}{1/2}} = \sqrt{\ominus} = V_B$$

la pelota no llega al punto B.



$m_1 = 80kg$

$\varnothing = 1{,}25m \quad r_1 = 0{,}625$

$m_2 < m_1$

$r_2 = 0{,}23m$

$T_1 = 135N$

$\alpha = 1{,}67 \, rad/s^2$

$T_2 = ?$

$$\sum \tau_o = I_o \cdot \alpha$$

$$T_1 \cdot r_1 - T_2 \cdot r_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (r_1)^2 \cdot \alpha$$

¡Cuidado con los bp!

$$r_1 (T_1 - T_2) = 1/2 \cdot m_1 \cdot (r_1)^2 \cdot \alpha$$

$$T_1 - T_2 = \frac{1/2 \cdot m_1 \cdot (r_1)^2 \cdot \alpha}{r_1}$$

$$T_1 - \frac{1/2 \cdot m_1 \cdot (r_1)^2 \cdot \alpha}{r_1} = T_2$$

$$135N - \frac{0{,}5 \cdot 80kg \cdot (0{,}625)^2 \cdot 1{,}67 rad/s^2}{0{,}625} = T_2$$

$$135 - 41{,}75 = \boxed{93{,}25N = T_2}$$

Rotación de un cuerpo alrededor de un eje Fijo

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha (\theta - \theta_0)$$

α = aceleración angular $\left[\frac{rad}{seg^2}\right]$

ω = velocidad angular $\left[\frac{rad}{seg}\right]$

$\frac{rev}{s} \times 2\pi \rightarrow \frac{rad}{s}$

$\frac{rev}{min} \times \left(\frac{2\pi}{60}\right) \rightarrow \frac{rad}{s}$

"objeto rígido bajo aceleración angular constante"

$K_R = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2$ (J) energía cinética rotacional

momento de Inercia ($kg \cdot m^2$) $I_0 = m_1 \cdot x_1^2 + m_2 \cdot x_2^2 + \ldots$

depende de la masa y su distribución en el espacio. Es una medida de la resistencia de un obj a cambios en su movimiento rotacional. (masa: medida de la tendencia obj. a resistir cambio en mov. traslacional).

$$\boxed{\text{Teorema de Steiner o de los ejes paralelos: } I_A = I_{CM} + M \cdot D^2}$$

$$\sum \vec{\tau_0} = \underbrace{I_0}_{m \cdot r^2} \cdot \vec{\alpha}$$ → proporcional al momento de torsión neto sobre el objeto.

- el momento de torsión total sobre el cuerpo está dado por la sumatoria de los momentos de torsión individuales

perpendicular al plano donde están $\vec{r}$ y $\vec{p}$

Momento angular o cinético $\vec{L_0}$

→ módulo, direcc. y sentido
→ es un vector
→ es una magnitud física rotacional equivalente a la cantidad de movimiento o el momento lineal en el mov. traslacional.

$$\vec{L_0} = r \times P \rightarrow \vec{L_0} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

depende de la masa de la partícula, su posición y la rapidez tangencial de giro

Rotación y Traslación (rototraslación)

$$\sum \tau_0 = \frac{d\vec{L_0}}{dt}$$

movimiento de rotación pura de un objeto al rededor de un eje fijo que pasa por "0"; llamado Centro Instantáneo de Rotación (C.I.R)

⊕ torca = ⊕ aceleración = ⊕ velocidad.

Traslación

si $\sum_i \vec{F_{ext}} = 0$

P = constante;

$\vec{P}(0) = \vec{P}(f)$

Rotación

si $\sum_i \tau_0 = 0$

$\vec{L_0}$ = constante

$\vec{L_0}(0) = \vec{L_0}(f)$

cuando $\sum \tau_0 = 0$

$$I_0 \cdot w_0 = I_f \cdot w_f = cte$$

$$\boxed{K_{R(CM)} + K_T = K_{R-T}}$$

$K_{R(CM)} = \frac{1}{2} \cdot I_{cm} \cdot w^2$; $K_T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{CM}^2$

$$L_0 = I_0 \cdot w$$

momento angular

velocidad del centro de masas