Clase 21

October 18, 2022

Cálculo de Determinante

En la clase 6 ya habíamos introducido el cálculo de determinante de una matriz cuadrada. En esta clase vamos a intentar describir mejor lo que es una función determinante.

Para empezar una función determinante es una función $\det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$. Es decir a cada matriz cuadrada le asigna algún número. Para que una función sea un determinante vamos a requerir que cumpla lo siguiente: Si $\{A_1, ..., A_n\}$ son las **filas** de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, es decir

$$A = [A_1, ..., A_n]$$

entonces la función determinante cumple:

1. $\det[A_1, ..., A_i^1 + A_i^2, .., A_n] = \det[A_1, ..., A_i^1, .., A_n] + \det[A_1, ..., A_i^2, .., A_n]$
2. $\det[A_1, ..., \lambda A_i, .., A_n] = \lambda \det[A_1, ..., A_i, .., A_n]$
3. Si $A_i = A_j$ entonces $\det[A_1, ..., A_i, ..., A_j, .., A_n] = 0$
4. $\det(I_n) = 1$ donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

(1) y (2) nos dice que el determinante es una función lineal respecto de las filas de la matriz. Es decir es una función $n - lineal$. (No confundir con que sea *lineal* en el sentido de que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ ya que esto NO SE CUMPLE).

Para ejemplificar esto veamos:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2+3 & 1+4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

y

$$\det\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3.2 & 3.4 \end{bmatrix} = 3\det\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

En consecuencia de la definición tenemos el siguiente Teorema:

Theorem 1 *Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Entonces:*

1. *Si A tiene alguna fila nula entonces* $\det(A) = 0$.
2. *Si B es la matriz que se obtiene intercambiando dos filas de A entonces* $\det(B) = -\det(A)$.
3. *Si B se obtiene de aplicar una operación elemental de fila de tipo* 2 *a A entonces* $\det(B) = \det(A)$.
4. *Si B se obtiene de aplicar una operación elemental de fila de tipo* 1 *a A (multiplicando alguna fila por λ) entonces* $\det(B) = \lambda \det(A)$.

Proof. (1): Como A tiene una fila nula podemos suponer que es la $i-esima\ fila$:

$$A = [A_1, ..., 0_i, ..., A_n]$$

o sea estamos asumiendo que A tiene la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0_{i1} & ... & 0_{ij} & ... & 0_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

pero entonces podemos escribir a la fila i como $[0.a_{i1}, ..., 0.a_{in}]$. Es decir el escalar 0 por los elementos que sean...

$$\begin{aligned} A &= [A_1, ..., 0_i, ..., A_n] \\ &= [A_1, ..., 0.A_i, ..., A_n] \end{aligned}$$

y entonces por (2) de la definición de función determinante el escalar 0 lo podemos sacar afuera y:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det[A_1, ..., 0.A_i, ..., A_n] \\ &= 0 \det[A_1, ..., A_i, ..., A_n] \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2): Supongamos que se han intercambiado las filas A_i con A_j. Es decir

$$\begin{aligned} A &= [A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n] \\ B &= [A_1, ..., A_j, ..., A_i, ..., A_n] \end{aligned}$$

Entonces hacemos los siguientes trucos: una fila cualquiera A_i es igual a el mismo vector A_i más el vector nulo $(A_i + 0)$ y luego aplicamos (1) y (2) de la definición de función determinante,

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det[A_1, ..., A_j, ..., A_i, ..., A_n] \\
&= \det[A_1, ..., A_j + 0, ..., A_i + 0, ..., A_n] \\
&= \det[A_1, ..., A_j + A_i - A_i, ..., A_i + A_j - A_j, ..., A_n] \\
&= \det[A_1, ..., (A_j + A_i) - A_i, ..., (A_i + A_j) - A_j, ..., A_n] \\
&= \det[A_1, ..., (A_j + A_i), ..., (A_i + A_j) - A_j, ...A_n] + \\
&\quad + \det[A_1, ..., -A_i, ..., (A_i + A_j) - A_j, ..., A_n] \\
(*) &= D_1 + D_2
\end{aligned}$$

ahora analizamos cada uno por separado: primero D_1

$$\begin{aligned}
D_1 &= \det[A_1, ..., (A_j + A_i), ..., (A_i + A_j) - A_j, ...A_n] \\
&= \det[A_1, ..., (A_j + A_i), ..., (A_i + A_j), ...A_n] + \det[A_1, ..., (A_j + A_i), ..., -A_j, ...A_n] \\
&= 0 + (-1)\det[A_1, ..., (A_j + A_i), ..., A_j, ...A_n] \\
&= (-1)\det[A_1, ..., A_j, ..., A_j, ...A_n] + (-1)\det[A_1, ..., A_i, ..., A_j, ...A_n] \\
&= 0 + (-1)\det[A_1, ..., A_i, ..., A_j, ...A_n] \\
&= -\det(A)
\end{aligned}$$

ahora D_2

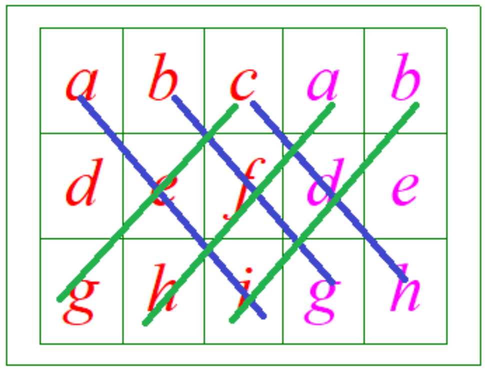
$$\begin{aligned}
D_2 &= \det[A_1, ..., -A_i, ..., (A_i + A_j) - A_j, ..., A_n] \\
&= \det[A_1, ..., -A_i, ..., (A_i + A_j), ..., A_n] + \det[A_1, ..., -A_i, ..., -A_j, ..., A_n] \\
&= \det[A_1, ..., -A_i, ..., A_i, ..., A_n] + \det[A_1, ..., -A_i, ..., A_j, ..., A_n] + \\
&\quad + \det[A_1, ..., -A_i, ..., -A_j, ..., A_n] \\
&= (-1)\det[A_1, ..., A_i, ..., A_i, ..., A_n] + (-1)\det[A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n] + \\
&\quad + \det[A_1, ..., -A_i, ..., -A_j, ..., A_n] \\
&= 0 + (-1)\det(A) + (-1)\det[A_1, ..., A_i, ..., -A_j, ..., A_n] \\
&= -\det(A) + (-1)(-1)\det[A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n] \\
&= -\det(A) + \det(A) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces volviendo a (*)

$$\det(B) = D_1 + D_2 = -\det(A) + 0 = -\det(A).$$

(3) y (4) quedan como ejercicio. ■

Se prueba (muy complicado) que para cada tamaño n la función determinante es única. Es decir que una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tiene definido de manera única su determinante. Luego la notación $\det(A)$ no es ambigüa.



Para matrices $\mathbb{F}^{2\times 2}$ tenemos definida la función determinante como sigue

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

como lo habíamos anunciado en la clase 6. (Se puede ver que esta función así definida cumple con las condiciones de la definiión de función determinante. No lo haremos aquí pero el lector puede verificarlo).

Tambien para matrices $\mathbb{F}^{3\times 3}$ tenemos la famosa "**Regla se Sarrus**" y se expresa como sigue

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - ibd$$

para recordarlo mejor se puede escribir una matriz agregando las dos primeras columnas a la derecha y entonces el determinante es la suma de la diagonal hacia abajo y hacia la derecha de sus elementos multiplicados menos la suma de la diagonal hacia abajo y hacia la izquierda de sus elementos multiplicados (ver $Fig.1$)

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

entonces $\det(A)$ es sumar los producto de los elementos de las diagonales azules menos los productos de las diagonales verdes.

Cofactores

Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, denotaremos por M_{ij} a la matriz $(n-1)\times(n-1)$ (llamado **el menor** del elemento a_{ij} de A) que se obtiene **suprimiendo** la fila i y la columna j de la matriz A. Entonces definimos el cofactor ij como el escalar

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$

(también llamado el cofactor del elemento a_{ij}).

Example 2 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. *Entonces por ejemplo*

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

y

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\det(M_{23}) = -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -(-5) = 5$$

Remark 3 *El cofactor del lugar* (ij) *NO depende de los elementos de la fila* i *ni de los elementos de la columna* j. *Si en la matriz* A *cambiamos la fila* i *y la columna* j *entonces el cofactor* ij *de la nueva matriz es igual al cofactor* ij *de la matriz anterior* A. *Por ejemplo:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ y sea } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -3 & 15 & 21 \\ 3 & 4 & -13 \end{bmatrix}$$

entonces el cofactor (23) *de la* A *es* 5 *y el cofactor* (23) *de la* B *es*

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 5.$$

Cálculo de determinante por desarrollo por cofactores

No vamos a desarrollar toda la teoría necesaria para el siguiente cálculo. Solamente mostraremos cómo se calcula el determinnate de una matriz de cualquier tamaño usando un desarrollo por cofactores.

Theorem 4 *Dada una matriz* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, *su determinante se puede calcular de la siguiente manera:* ***fijando una columna*** j

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + ... + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la $j-esima$ *columna),*
o también ***fijando una fila*** i

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + ... + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la $i-esima$ *fila).*

Example 5 *Si* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$. *Entonces si elegimos el desarrollo por filas conviene elegir aquella fila que tenga más ceros porque entonces nos ahorraremos muchas cuentas!*

elegimos desarrollar por la fila 3*:*

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= 0C_{31} + (-4)C_{32} + 2C_{33} \\ \text{(*)} &= (-4)C_{32} + 2C_{33} \end{aligned}$$

1. ahora solo debemos calcular los cofactores C_{32} y C_{33}.

$$\begin{aligned} C_{32} &= (-1)^{3+2}\det(M_{32}) = -\det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -9 \\ C_{33} &= (-1)^{3+3}\det(M_{33}) = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -3 \end{aligned}$$

y ahora reemplazando en (*):

$$\det(A) = (-4)(-9) + 2(-3) = 30.$$

Si elegimos desarrollar por columnas elegimos (convenientemente) la columna 1:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} \\ &= 3C_{11} + 0C_{21} + 0C_{31} \\ (**) &= 3C_{11} \end{aligned}$$

ahora solamente debemos calcular el cofactor C_{11}.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11}) = \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = 10$$

entonces al reemplazar en (**):

$$\det(A) = 3.10 = 30.$$

Tenemos además el siguiente resultado, el cual vamos a omitir la demostración.

Theorem 6 *Dadas dos matrices* $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *entonces*

1. $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.
2. $\det(A^T) = \det(A)$.

Adjunta de una matriz

Definition 7 *Si* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *y* C_{ij} *son los cofactores de* a_{ij} *entonces la matriz*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & ... & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & ... & C_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ C_{n1} & C_{n2} & ... & C_{nn} \end{bmatrix}$$

es la matriz de cofactores de A.

Se define entonces la matriz adjunta de A *como la transpuesta de la matriz de cofactores,*

$$adj(A) = C^T.$$

Recordemos el Teorema 23 de la clase 6 que decía

Theorem 8 *Una matriz* $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *es invertible si y solo si* $\det(A) \neq 0$.

Proof. Sea R_A la MERF de A. Luego por el Corolario 5 de la Clase 4 existe una matriz P (invertible) tal que

$$R_A = PA$$

donde P es producto de matrices elementales. Pero por el Teorema anterior

$$\det(R_A) = \det(P)\det(A)$$

Como P es producto de matrices elementales se tiene que $\det(P) \neq 0$ (pues cada una de las matrices elementales que llevan de A a R_A tienen determinante $\neq 0$. Pues son matrices que se obtienen de hacer una operación elemental a la matriz identidad (la cual tiene $\det(I_n) = 1$)). Entonces:

$\Rightarrow$) Si A es invertible su R_A es la identidad I_n y luego $\det(R_A) = \det(I_n) = 1$. Con lo cual se tendría

$$1 = \det(R_A) = \det(P)\det(A)$$

de donde se deduce que $\det(A)$ no puede ser 0.

$\Leftarrow$) Si $\det(A) \neq 0$ entonces claramente se deduce de la igualdad

$$\det(R_A) = \det(P)\det(A)$$

que $\det(R_A) \neq 0$. Luego R_A no puede tener filas nulas. Entonces como los 1 están escalonados no queda otra que $R_A = I_n$ (pensarlo bien). Con lo que A es invertible. ■

Con esto tenemos el siguiente teorema que nos permite calcular la inversa de una matriz invertible.

Theorem 9 *Sea $A \in GL(n, \mathbb{F})$. Entonces*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Proof. Primero probemos que

$$A \; adj(A) = \det(A) I_n$$

en efecto,

$$\begin{aligned} A \; adj(A) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & .... & a_{in} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & .... & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & .... & C_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ C_{j1} & C_{j2} & .... & C_{jn} \\ ... & ... & .... & ... \\ C_{n1} & C_{n2} & .... & C_{nn} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ \mathbf{a}_{i1} & \mathbf{a}_{i2} & .... & \mathbf{a}_{in} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & ... & \mathbf{C}_{j1} & ... & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & ... & \mathbf{C}_{j2} & ... & C_{n2} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ C_{1n} & C_{2n} & ... & \mathbf{C}_{jn} & ... & C_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

al multiplicar por ejemplo la $i - esima$ fila de A por la $j - esima$ columna de $adj(A)$ nos da:

$$(*) \; a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + ... + a_{in}C_{jn}.$$

en particular cuando $i = j$ se tiene que el cálculo anterior (*) es justamente $\det(A)$. Y si $i \neq j$ entonces los coeficientes de A, a_{ij} y los cofactores C_{ji} provienen de filas distintas. Entonces en ese caso (*) da justamente 0 (lo vemos al final). Luego se tiene

$$\begin{aligned} A \; adj(A) &= \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \det(A) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \det(A) \end{bmatrix} \\ &= \det(A) I_n \end{aligned}$$

Ya que A es invertible entonces $\det(A) \neq 0$ y luego

$$\frac{1}{\det(A)} [A \; adj(A)] = I_n$$

multiplicamos a ambos lados por A^{-1}:

$$\frac{1}{\det(A)} A^{-1} [A \; adj(A)] = A^{-1} I_n$$

de donde obtenemos claramente que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

veamos el (*) cuando $i \neq j$. (A fin de mostrar rápido lo haremos para un tamaño concreto de A, $n = 3$)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Elegimos tomar en (*) $i = 1$ y $j = 2$ por ejemplo. Debemos calcular C_{21}, C_{22} y C_{23}.

$$\begin{aligned}
C_{21} &= (-1)^{2+1} \det(M_{21}) = -\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\
C_{22} &= (-1)^{2+2} \det(M_{22}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \\
C_{23} &= (-1)^{2+3} \det(M_{23}) = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})
\end{aligned}$$

y ahora hacemos la cuenta (*):

$$\begin{aligned}
(*) &= a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} \\
&= a_{11}[-(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})] + a_{12}[a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}] + a_{13}[-(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})] \\
&= a_{11}[a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}] + a_{12}[a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}] + a_{13}[a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}] \\
&= a_{11}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{12}a_{33} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{31}a_{13} + a_{13}a_{31}a_{12} - a_{13}a_{11}a_{32} \\
&= (a_{11}a_{32}a_{13}) - a_{11}a_{12}a_{33} + [a_{12}a_{11}a_{33}] - [a_{12}a_{31}a_{13}] + a_{13}a_{31}a_{12} - (a_{13}a_{11}a_{32}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Y esto se cumple siempre que tomemos $i \neq j$ (muy largo de escribir).

Con esto queda concluída la prueba del Teorema. ■

Regla de Cramer

Sabemos que en un sistema lineal $Ax = b$, donde $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, si A es invertible entonces dicho sistema tiene solución única. La *Regla de Cramer* da una fórmula para calcular de forma explícita dicha solución.

Theorem 10 *(Regla de Cramer) Si* $Ax = b$ *es un sistema de* n *ecuaciones lineales con* n *incógnitas tal que* $\det(A) \neq 0$ *entonces la única solución del mismo está dada por* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *con*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, ..., x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

donde A_j (j : 1...n) es la matriz que se obtiene al sustituir la $j-esima$ columna de A por el vector

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Proof. Como $\det(A) \neq 0$ entonces vimos que A es invertible. Luego por el Teorema 13 de la Clase 5 se tiene que el sistema $Ax = b$ tiene la única solución

$$x = A^{-1}b.$$

Pero por el Teorema de la adjunta (que probamos más arriba) se tiene que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$. Luego

$$x = \frac{1}{\det(A)} adj(A)b$$

pero recordemos que la matriz adjunta era la transpuesta de la matriz de cofactores de A. Luego,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\det(A)} adj(A)b \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & ... & \mathbf{C}_{j1} & ... & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & ... & \mathbf{C}_{j2} & ... & C_{n2} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ C_{1n} & C_{2n} & ... & \mathbf{C}_{jn} & ... & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Al multiplicar las matrices se tiene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11}b_1 + C_{21}b_2 + ... + C_{n1}b_n \\ C_{12}b_1 + C_{22}b_2 + ... + C_{n2}b_n \\ ... \\ C_{1n}b_1 + C_{2n}b_2 + ... + C_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

entonces la $j-esima$ componente de x es

$$(*)\ x_j = \frac{C_{1j}b_1 + C_{2j}b_2 + ... + C_{nj}b_n}{\det(A)}$$

pero si llamamos A_j a la siguiente matriz:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(es decir A_j es la matriz donde se cambió la $j-esima$ columna de A por el vector b). Al calcular el $\det(A_j)$ por cofactores por la $j-esima$ columna, nos queda que

$$\det(A_j) = b_1C_{j1} + b_2C_{j2} + ... + b_nC_{jn}$$

entonces reemplazando en (*) se concluye que

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}.$$

■

Determinante de un Operador Lineal

Si $T : V \to V$ es un operador lineal entonces su determinante se define como el determinante de la matriz de T en alguna base. (No lo vamos a demostrar pero dejamos afirmado que al cambiar la base no cambia el determinante. Se dice entonces que det es un invariante algebraico).

Si $\mathcal{B}$ es una base ordenada para V, entonces

$$\det(T) = \det[T]_{\mathcal{B}}.$$