# EXTREMOS

Entre las características geométricas básicas de la gráfica de una función se encuentran sus puntos de extremo, en los que la función alcanza su mayor y menor valor.



## DEFINICIONES

## EXTREMOS GLOBALES O ABSOLUTOS

Sea

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Decimos que $f$ tiene en $\vec{x}_0 \in D_f$ un

$$a)\ \begin{pmatrix} \text{Máximo} \\ \\ \\ \text{Mínimo} \end{pmatrix} \begin{matrix} \textit{global o absoluto} \\ \textbf{\textit{en sentido}} \\ \textbf{\textit{amplio}}\ \textit{de valor} \\ f(\vec{x}_0) \end{matrix} \overset{si\ y\ sólo\ si}{\Longleftrightarrow} \forall \vec{x} \in D_f \Rightarrow f(\vec{x}_0) \begin{pmatrix} \geq \\ \\ \\ \leq \end{pmatrix} f(\vec{x})$$

$$b)\ \begin{pmatrix} \text{Máximo} \\ \\ \\ \text{Mínimo} \end{pmatrix} \begin{matrix} \textit{global o absoluto} \\ \textbf{\textit{en sentido}} \\ \textbf{\textit{estricto}}\ \textit{de valor} \\ f(\vec{x}_0) \end{matrix} \overset{si\ y\ sólo\ si}{\Longleftrightarrow} \forall \vec{x} \in D_f - \{\vec{x}_0\} \Rightarrow f(\vec{x}_0) \begin{pmatrix} > \\ \\ \\ < \end{pmatrix} f(\vec{x})$$

# EXTREMOS LOCALES O RELATIVOS

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Decimos que $f$ tiene en $\vec{x}_0 \in D_f$ un

$$a)\quad \begin{pmatrix} \text{Máximo} \\ \\ \\ \text{Mínimo} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textit{local o relativo} \\ \textbf{\textit{en sentido}} \\ \textbf{\textit{amplio}}\ \textit{de} \\ \textit{valor}\ f(\vec{x}_0) \end{array} \overset{si\ y\ sólo\ si}{\Longleftrightarrow} \exists\, B_r(\vec{x}_0)\ /\ \forall \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0) \cap D_f \Rightarrow\ f(\vec{x}_0) \begin{pmatrix} \geq \\ \\ \\ \leq \end{pmatrix} f(\vec{x})$$

$$b)\quad \begin{pmatrix} \text{Máximo} \\ \\ \\ \text{Mínimo} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \textit{local o relativo} \\ \textbf{\textit{en sentido}} \\ \textbf{\textit{estricto}}\ \textit{de} \\ \textit{valor}\ f(\vec{x}_0) \end{array} \overset{si\ y\ sólo\ si}{\Longleftrightarrow} \exists\, B'_r(\vec{x}_0)\ /\ \forall \vec{x} \in B'_r(\vec{x}_0) \cap D_f \Rightarrow\ f(\vec{x}_0) \begin{pmatrix} > \\ \\ \\ < \end{pmatrix} f(\vec{x})$$

<u>Aclaración:</u> Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (campo escalar) tiene un extremo (máximo o mínimo) en $\vec{x}_0 \in D_f$ entonces:

- $f(\vec{x}_0)$ es valor extremo de $f$
- $\vec{x}_0$ es punto de extremo de $f$

Es decir, $f(\vec{x}_0)$ es extremo de $f$ y no $\vec{x}_0$ .

## TEOREMA: CONDICIÓN NECESARIA DE EXTREMO

Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo en $\vec{x}_0 \in D_f$, entonces $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ ó $f$ no es diferenciable en $\vec{x}_0$.

---

## PUNTO CRÍTICO

### DEFINICIÓN

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Decimos que $\vec{x}_0 \in D_f$ es punto crítico $f$

si y sólo si

$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ ó $f$ no es diferenciable en $\vec{x}_0$

---

En todo punto crítico $f$ tiene

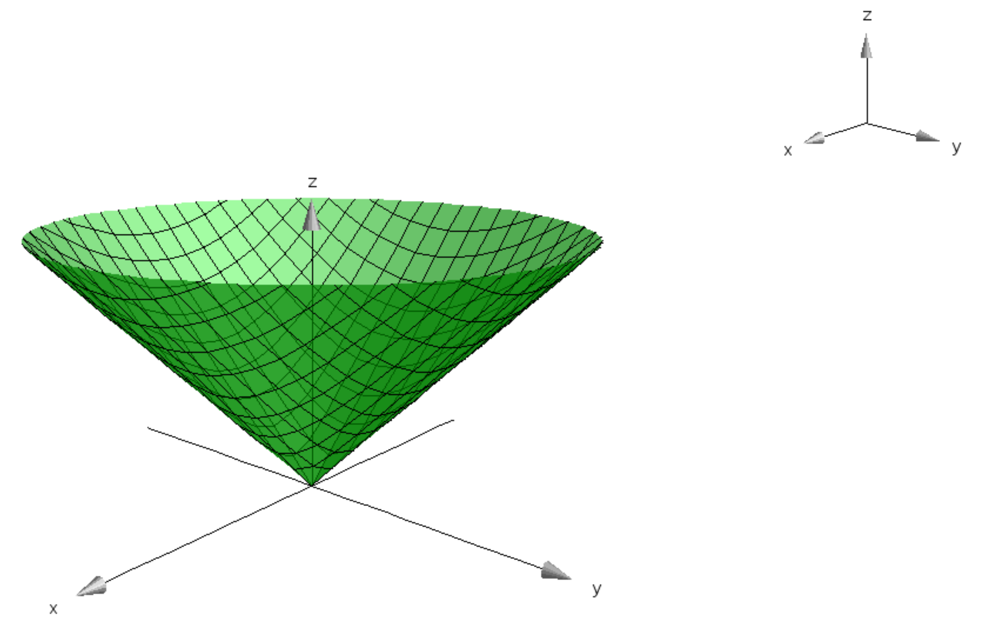
- Extremo
  - Máximo
  - Mínimo
  - Máximo y mínimo simultáneamente
- Punto de ensilladura

---

Un ejemplo de una función $f$ que tiene un extremo en un punto interior de su dominio donde $f$ no es diferenciable es:

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Su gráfica es




**CONO CIRCULAR**

Observando su gráfica y de acuerdo con las definiciones de extremo dadas vemos que $f$ tiene en $(0,0)$ un mínimo local y global en sentido estricto de valor $f(0,0)=0$.

Se puede comprobar que $f$ no es diferenciable en $(0,0)$ (punto interior del dominio de $f$) si hacemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\nexists \Rightarrow \nexists f_x(0,0)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\nexists \Rightarrow \nexists f_y(0,0)$$

O sea que $\nexists\ \vec{\nabla} f(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

# CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Para un campo escalar $f$ diferenciable de $n$ variables se utiliza el siguiente criterio basado en la matriz de las derivadas segundas de $f$ para la clasificación de sus puntos críticos.

Sea

$* \ f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

un campo escalar con $f \in C^2(B_r(\vec{x}_0))$

siendo $\vec{x}_0$ punto crítico de $f$

$$* \ Hf(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$$

la <u>matriz Hessiana de $f$ en $\vec{x}_0$</u> (matriz $n \times n$ simétrica de las derivadas segundas de $f$ en $\vec{x}_0$) y

$$|H_1| = f_{11} \ , \quad |H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad , |H_n| = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

los determinantes denominados menores angulares de la matriz Hessiana de $f$ en $\vec{x}_0$.

El criterio dice:

<u>Caso 1</u>: $|H_n| \neq 0$

a) Si $|H_i| > 0 \quad , \ 1 \leq i \leq n$
$f$ tiene en $\vec{x}_0$ un <u>**mínimo local**</u>

b) Si $|H_i| < 0$ para los $i$ impares
$|H_i| > 0$ para los $i$ pares
$f$ tiene en $\vec{x}_0$ un <u>**máximo local**</u>
$\Big\} \ 1 \leq i \leq n$

c) En otro caso $f$ tiene en $\vec{x}_0$ un <u>**punto de ensilladura**</u>

<u>Caso 2</u>: $|H_n| = 0$

No decide

Para una función de 2 variables ($n = 2$) donde

$$|H_2| = |Hf(\vec{x}_0)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{\vec{x}_0}$$

es el determinante Hessiano de $f$ en $\vec{x}_0$, el criterio se reduce a:

(I) Si $|Hf(\vec{x}_0)| > 0$ y $f_{xx}(\vec{x}_0) > 0$ - Caso 1.a)

$f$ tiene en $\vec{x}_0$ un **mínimo local**

(II) Si $|Hf(\vec{x}_0)| > 0$ $y$ $f_{xx}(\vec{x}_0) < 0$ - Caso 1.b)

$f$ tiene en $\vec{x}_0$ un **máximo local**

(III) Si $|Hf(\vec{x}_0)| < 0$ - Caso 1.c)

$f$ tiene en $\vec{x}_0$ un **punto de ensilladura**

(IV) Si $|Hf(\vec{x}_0)| = 0$ - Caso 2

No decide

---

## EJEMPLOS

**Ejemplo 1:**

Encuentre y clasifique los puntos críticos de la siguiente función

$$f(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

**Solución:**

Por ser $f$ diferenciable, los puntos críticos de $f$ son los puntos $\vec{x} = (x, y, z)$ para los cuales $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{0}$.

Entonces se hace:

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z) = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 0 & \Rightarrow \\ f_y = 0 & \Rightarrow \\ f_z = 0 & \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} yz - 2x = 0 & (1) \\ xz - 2y = 0 & (2) \\ xy - 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

Y se buscan todas las ternas ordenadas $(x, y, z)$ que satisfacen este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

De (1) se obtiene

$$(4) \;\; x = \frac{1}{2} yz$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{2} yz$ en (2)

$$\frac{1}{2} yz^2 - 2y = 0$$

$$\frac{1}{2} y(z^2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} \rightarrow y = 0 \\ \rightarrow z = \pm 2 \end{cases}$$

- <u>Si $y = 0$</u> en (3) se obtiene: $0 - 2z = 0 \;\; \Rightarrow \;\; z = 0.$

Luego con <u>$y = 0 \wedge z = 0$</u> en (4) se obtiene $x = 0.$

Por lo tanto <u>$(x, y, z) = (0,0,0)$ es punto crítico de $f$.</u>

- <u>Si $z = 2$</u> en (3) se obtiene $xy - 2(2) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; xy = 4 \;\; \Rightarrow$

$$\Rightarrow \;\; (5) \;\; y = \frac{4}{x} \quad , \qquad x \neq 0$$

Sustityendo $y = \frac{4}{x}$ y $z = 2$ en (2):

$$x(2) - 2\left(\frac{4}{x}\right) = 0$$

$$\frac{2x^2 - 8}{x} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; 2x^2 = 8 \;\; \Rightarrow x = \pm 2$$

<u>Como $z = 2$</u>, si se sustituye $x = \pm 2$ en (5) se obtienen los <u>puntos críticos: $(2,2,2)$ y $(-2,-2,2)$.</u>

- <u>Si $z = -2$</u> en (3) se obtiene $xy - 2(-2) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; xy = -4 \;\; \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (6)\ \ y = -\frac{4}{x} \quad , \qquad x \neq 0$$

Sustituyendo $y = -\frac{4}{x}$ y $z = -2$ en (2)

$$x(-2) + 2\left(\frac{4}{x}\right) = 0$$

$$\frac{-2x^2 + 8}{x} = 0 \ \Rightarrow \ -2x^2 = 8 \ \Rightarrow x = \pm 2$$

Como $z = -2$, si se sustituye $x = \pm 2$ en (6) se obtienen los puntos críticos: $(2,-2,-2)$ y $(-2,2,-2)$.

Entonces los puntos críticos son:

1) $(0,0,0)$
2) $(2,2,2)$
3) $(-2,-2,2)$
4) $(2,-2,-2)$
5) $(-2,2,-2)$

$f_x = yz - 2x$
$f_y = xz - 2y$
$f_z = xy - 2z$

Clasificación:

La matriz Hessiana de $f$ es:

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & z & y \\ z & -2 & x \\ y & x & -2 \end{pmatrix}$$

Para 1) $(0,0,0)$

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y

$$|H_1| = -2 < 0 \, , |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \ ,$$

$$|H_3| = |H| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

Como $|H_1| < 0$, $|H_2| > 0$ y $|H_3| < 0$ - caso 1.b)

$f$ tiene en (0,0,0) un **máximo local**

Para 2) (2,2,2)

$$Hf(2,2,2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|H_1| = -2 < 0$ , $|H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ ,

$$|H_3| = |H| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 16 + 16 = 32 > 0$$

- caso 1.c)

$f$ tiene en (2,2,2) un **punto de ensilladura**

Para 3) $(-2,-2,2)$

$$Hf(-2,-2,2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|H_1| = -2 < 0$ , $|H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ ,

$$|H_3| = |H| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 16 + 16 = 32 > 0$$

- caso 1.c)

$f$ tiene en $(-2,-2,2)$ un **punto de ensilladura**

Para 4) $(2,-2,-2)$

$$Hf(2,-2,-2)=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & 2\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$|H_1|=-2<0\ ,\ |H_2|=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix}=0\ ,$

$$|H_3|=|H|=\begin{vmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & 2\\ -2 & 2 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}$$

$$=0+16+16=32>0$$

- caso 1.c)

<u>$f$ tiene en $(2,-2,-2)$ un **punto de ensilladura**</u>

Para 5) $(-2,2,-2)$

$$Hf(-2,2,-2)=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & -2 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

$|H_1|=-2<0\ ,\ |H_2|=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix}=0\ ,$

$$|H_3|=|H|=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & -2 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}$$

$$=0+16+16=32>0$$

- caso 1.c)

<u>$f$ tiene en $(2,-2,-2)$ un **punto de ensilladura**</u>

---

**<u>Ejemplo 2:</u>**

Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función:

$$f(x,y)=x^3+3xy^2-3x^2-3y^2+4$$

**<u>Solución:</u>**

Por ser $f$ diferenciable, se buscan los puntos donde:

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 & (1) \\ 6xy - 6y = 0 & (2) \end{cases}$$

Se obtiene un sistema de 2 ecuaciones no lineales con 2 incógnitas.

De (2) $\quad 6y(x-1) = 0 \;\begin{cases} \to y = 0 \\ \to x = 1 \end{cases}$

<u>Si $y = 0$</u> en (1) se obtiene

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \;\begin{cases} \to x = 0 \\ \to x = 2 \end{cases}$$

Entonces se tienen <u>los puntos críticos: $(0,0)$ y $(2,0)$</u>.

<u>Si $x = 1$</u> en (1) se obtiene

$$3 + 3y^2 - 6 = 0 \Rightarrow 3(y^2 - 1) = 0 \;\begin{cases} \to y = 1 \\ \to y = -1 \end{cases}$$

Y los <u>puntos críticos: $(1,1)$ y $(1,-1)$</u>.

<u>Clasificación:</u>

El determinante hessiano de $f$ es:

$$|Hf| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{vmatrix} = (6x-6)^2 - 36y^2$$

<u>Para $(0,0)$</u> se tiene que

$|Hf(0,0)| = 36 > 0$ y $\quad f_{xx}(0,0) = -6 < 0 \quad$ - caso 1.b

Por lo tanto <u>$f$ tiene en $(0,0)$ **un máximo local**</u>

Para (2,0) se tiene que

$|Hf(2{,}0)| = 36 > 0$ y $f_{xx}(2{,}0) = 6 > 0$ - caso 1.a

Por lo tanto $f$ tiene en (2,0) un **mínimo local**

Para (1,1) se tiene que

$|Hf(1{,}1)| = -36 < 0$ - caso 1.c

Por lo tanto $f$ tiene en (1,1) un **punto de ensilladura**

Para $(1,-1)$ se tiene que

$|Hf(1{,}1)| = -36 < 0$ - caso 1.c

Por lo tanto $f$ tiene en $(1,-1)$ un **punto de ensilladura**

---

**Ejercicio 1** Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$.

**Solución**

$$\begin{cases} f_x = 9x^2 - 9 = 0 & (1) \\ f_y = 2y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) $x = \pm 1$ y de (2) $y = -2$

Luego los puntos críticos de $f$ son: $(1,-2)$ y $(-1,-2)$.

$$f_{xx} = 18x \quad , \quad f_{xy} = f_{yx} = 0 \, , \qquad f_{yy} = 2$$

$$|Hf(x,y)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 36x$$

Para $(1,-2)$

$|Hf(1,-2)| = 36 > 0$ , $f_{xx}(1,-2) = 18 > 0$

$f$ tiene en $(1,-2)$ un mínimo local

Para $(-1,-2)$

$|Hf(-1,-2)| = -36 < 0$

$f$ tiene en $(-1,-2)$ un punto de ensilladura

---

**Ejercicio 2** Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{y^2-x^2}$.

**Solución**

$$f_x = 2xe^{y^2-x^2} + (x^2+y^2)(-2x)e^{y^2-x^2}$$

$$f_y = 2ye^{y^2-x^2} + (x^2+y^2)(2y)e^{y^2-x^2}$$

$\begin{cases} 2xe^{y^2-x^2}(1-x^2-y^2) = 0 \\ 2ye^{y^2-x^2}(1+x^2+y^2) = 0 \end{cases}$ como las exponenciales nunca se anulan:

$$\begin{cases} 2x(1-x^2-y^2) = 0 & (1) \\ 2y(1+x^2+y^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) $y = 0$ ya que $1 + x^2 + y^2$ nunca se anula.
Si $y = 0$ en (1)

$$2x(1-x^2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Luego los puntos críticos de $f$ son: $(0,0)$, $(1,0)$ y $(-1,0)$.

$$f_{xx} = 2e^{y^2-x^2}(1-x^2-y^2) - 4x^2(1-x^2-y^2)e^{y^2-x^2} - 4x^2e^{y^2-x^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{y^2-x^2}(1-x^2-y^2) - 4xye^{y^2-x^2}$$

$$f_{yy} = 2e^{y^2-x^2}(1+x^2+y^2) + 4y^2e^{y^2-x^2}(1+x^2+y^2) + 4y^2e^{y^2-x^2}$$

Para $(0,0)$

$$|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad , \quad f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$

<u>$f$ tiene en $(0,0)$ un mínimo local</u>

Para $(\pm 1,0)$

$$|Hf(\pm 1,0)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(\pm 1,0)} = \begin{vmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{4}{e} \end{vmatrix} = -\frac{16}{e^2} < 0$$

<u>$f$ tiene puntos de ensilladura en $(1,0)$ y en $(-1,0)$</u>

---

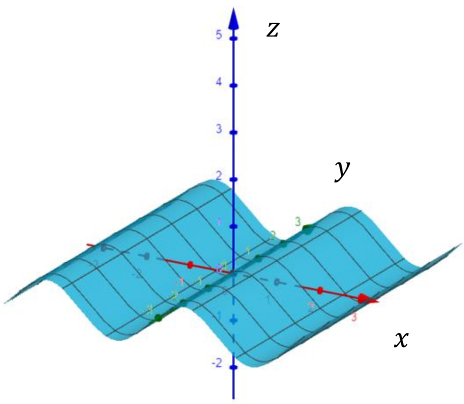
**<u>Ej1</u>**

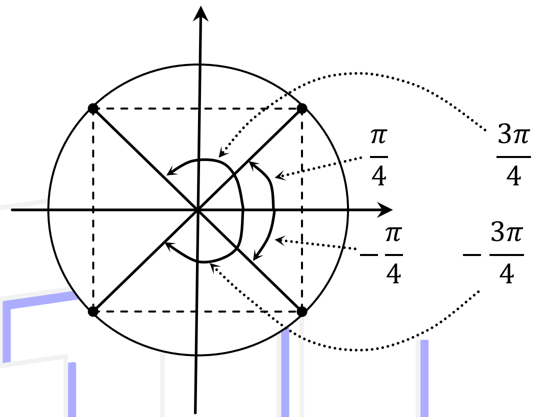
$$f(x,y) = sen(x)cos(x)$$

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y) = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} cos^2(x) - sen^2(x) = 0 & (1) \\ 0 = 0 & (2) \end{cases}$$




$$Puntos\ críticos = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \begin{pmatrix} \pm\frac{\pi}{4} \\ \pm\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$f_{xx} = -2cos(x)sen(x) - 2sen(x)cos(x) = -4cos(x)sen(x)$

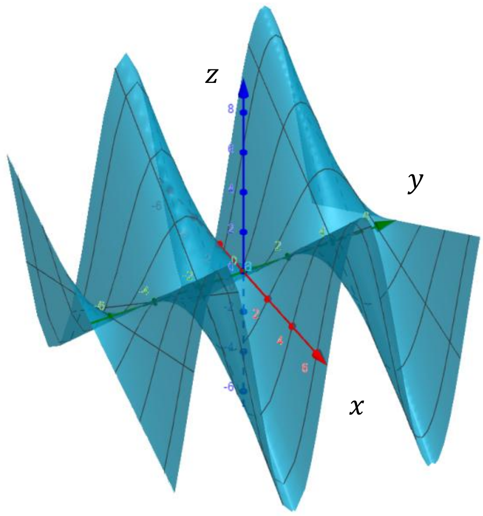
$f_{yy} = 0$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$

$|Hf| = 0$ No decide

**Ej2**

$f(x,y) = x\ sen(y)$




$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y) = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} sen(y) = 0 & (1) \\ x\ cos(y) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) $y = k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$

De (2) $x = 0$ o $y = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi\ , n \in \mathbb{Z}$.

Pero como $sen\left(\overbrace{\pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi}^{y}\right) \neq 0,\ n \in \mathbb{Z}$, se descarta $y = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Luego

$$Puntos\ críticos = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$f_{xx} = 0,\quad f_{yy} = -x\ sen(y),\quad f_{xy} = f_{yx} = cos(y)$

$$|Hf| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & cos(y) \\ cos(y) & -x\ sen(y) \end{vmatrix} = -cos^2(y)$$

$|Hf(0,k\pi)| = -cos^2(k\pi) = -1\ , k \in \mathbb{Z}$

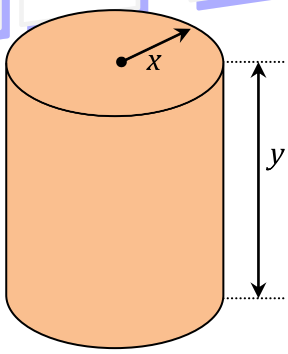
$f$ tiene en $(0,k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$ puntos de ensilladura.

## EXTREMOS LIGADOS

El siguiente ejercicio sirve como motivación para introducir el tema.

**Ejercicio**

Obtenga las dimensiones $x$ e $y$ del siguiente cilindro circular recto de volumen fijo $V$ de modo que su área total $A$ sea mínima.




$x > 0 \ \ radio$

$y > 0 \ \ altura$

Área

$$A(x,y) = f(x,y) = \underbrace{2\pi xy}_{\substack{área\ de\ la\\ superficie\\ lateral\ \ cilíndrica}} + \underbrace{2\pi x^2}_{\substack{área\ de\\ las\ tapas}} \quad (1)$$ **función a extremar**

Volumen

$V = \pi x^2 y \quad$ ó $\quad G(x,y) = \pi x^2 y - V = 0 \quad (2)$ **restricción o condición de ligadura**

Mediante un procedimiento simple se puede llevar el problema de encontrar el extremo de (1) con la restricción (2) a un problema de AM I.

Esto es, despejando $y$ de (2)

$$y = g(x) = \frac{V}{\pi x^2} \quad ; \quad x > 0$$

y sustituyendo en (1)

$$f(x,y) = f\big(x, g(x)\big) = f^*(x) = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$$

se obtiene una función de sola variable para la cual hay que determinar sus extremos libres. Entonces derivando e igualando a cero:

$$f^{*'}(x) = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x = 0 \Rightarrow \frac{-2V + 4\pi x^3}{x^2} = 0 \Rightarrow 2\pi x^3 = V$$

se determina el punto crítico $x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ ; y reemplazando en $y = g(x)$ se obtiene $y_0 = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Luego el problema original tiene a

$$(x_0, y_0) = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,(1,2)$$

como punto crítico, que se puede comprobar que es un punto de mínimo ya que haciendo la derivada segunda de $f^*$ y valuandola en $x_0$ se obtiene $f^{*''}(x_0) > 0$.

Por lo general resolver problemas de extremos ligados no será tan simple como en este caso donde fue posible despejar una variable de la ecuación de restricción y reemplazar en la función original.

Por suerte existe un método general que mediante la aplicación de un procedimiento que se realiza de manera mecánica permite resolver muchos problemas de extremos ligados. Ese método se llama:

## MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sean

- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , $D_f$ abierto

  un campo escalar con $f \in C^1(D_f)$

  $f(\vec{x})$ es la función objetivo o función a extremar.
- $\vec{G}: D_{\vec{G}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , $D_{\vec{G}}$ abierto , $D_{\vec{G}} \subset D_f$

un campo vectorial con $\vec{G} \in C^1(D_{\vec{G}})$ donde $\vec{G}(\vec{x}) = \vec{0}$ es la restricción.

Si $f$ sujeta la restricción $\vec{G}(\vec{x}) = \vec{0} \mid \vec{G}(\vec{x}_0) = \vec{0}$ tiene un extremo en $\vec{x}_0$, entonces la función auxiliar o Lagrangiana:

$$L(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda}\vec{G}(\vec{x})$$

cumple en $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$ con la condición necesaria de extremo "libre":

$$\vec{\nabla}L = \vec{0} \iff L_{\vec{x}} = f_{\vec{x}} + \vec{\lambda}\,\vec{G}_{\vec{x}} = \vec{0}$$

donde $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ es un vector constante <u>(apropiado para cada punto de extremo)</u> denominado multiplicador vectorial de Lagrange.

**<u>EJEMPLO</u>**

Encuentre los puntos más altos y más bajos de la curva de intersección de las superficies:

$$G_1(x,y,z) = 1 - x^2 - z = 0$$

$$G_2(x,y,z) = z - y^2 = 0$$

<u>Interpretación geométrica del problema</u>

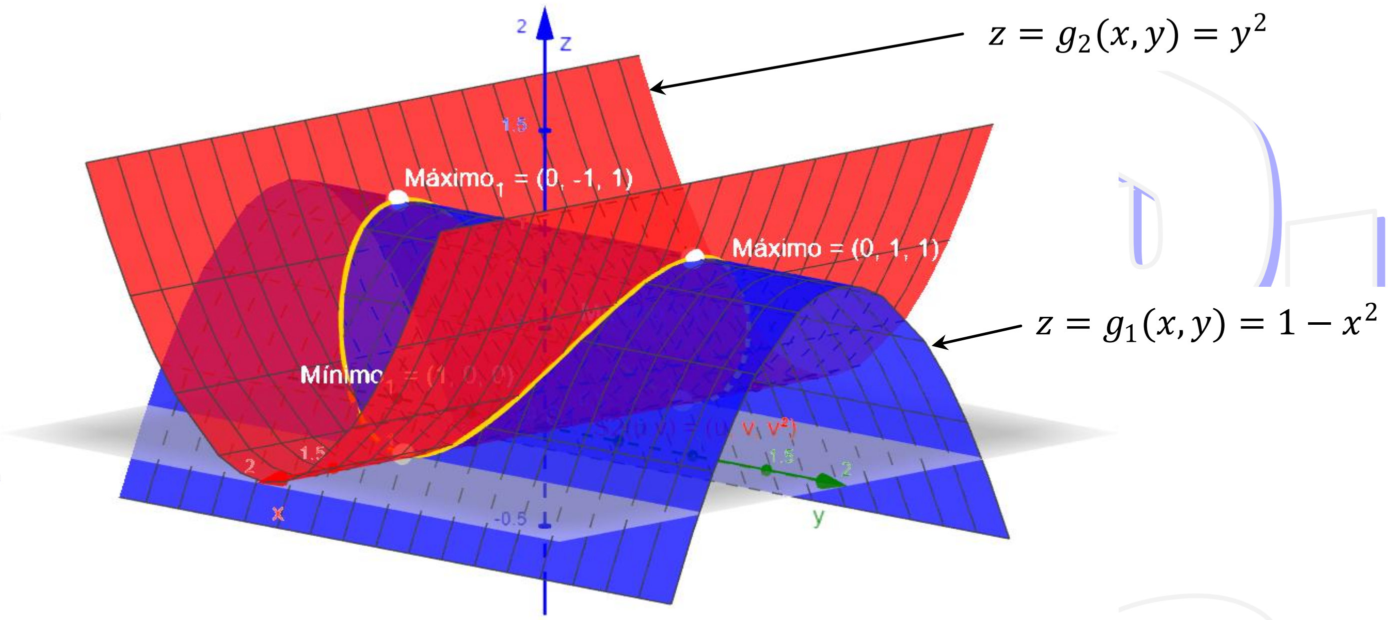
Despejando $z$ de $G_1(x,y,z) = 1 - x^2 - z = 0$ se obtiene:

$$z = g_1(x,y) = 1 - x^2$$

Despejando $z$ de $G_2(x,y,z) = z - y^2 = 0$ se obtiene:

$$z = g_2(x,y) = y^2$$

Las gráficas de las funciones $g_1$ y $g_2$ son los siguientes cilindros parabólicos:




La curva de intersección de las superficies está marcada en color amarillo en el gráfico.

**Solución**

Para encontrar los puntos más altos y más bajos de dicha curva se debe extremar la función

$$f(x, y, z) = z$$

(que da la distancia vertical de cualquier punto (*x,y,z*) respecto del plano *xy*)

sujeta a la restricción o ligadura:

$$\vec{G}(x, y, z) = \begin{pmatrix} G_1(x, y, z) \\ G_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x^2 - z \\ z - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

(es decir con la condición de que (*x,y,z*) pertenezca a la curva de intersección de las superficies dadas).

Se forma entoces la función auxiliar de Lagrange:

$$L(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda}\vec{G}(\vec{x})$$

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \ (\lambda_1,\lambda_2)\begin{pmatrix} G_1(x,y,z) \\ G_2(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda_1 G_1(x,y,z) + \lambda_2 G_2(x,y,z)$$

$$L(x,y,z) = z + \lambda_1(1 - x^2 - z) + \lambda_2(z - y^2)$$

Y se imponen las condiciones de punto crítico:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}L = \vec{0} \\ \vec{G} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ G_1 = 0 \\ G_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x\lambda_1 = 0 & (1) \\ -2y\lambda_2 = 0 & (2) \\ 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (3) \\ 1 - x^2 - z = 0 & (4) \\ z - y^2 = 0 & (5) \end{cases}$$

De (1): $-2x\lambda_1 = 0$ $\nearrow x = 0$, $\searrow \lambda_1 = 0$

<u>Con $x = 0$</u> en (4) se obtiene z = 1, con $z = 1$ en (5) se obtiene $y = \pm 1$ , con $y = \pm 1$ en (2) se obtiene $\lambda_2 = 0$ y con $\lambda_2 = 0$ en (3) se obtiene $\lambda_1 = 1$.

Por lo tanto se tienen los siguientes puntos crítcos:

$$P_1 = (0,1,1)\ ;(\lambda_1,\lambda_2) = (1,0)$$

$$P_2 = (0,-1,1)\ ;(\lambda_1,\lambda_2) = (1,0)$$

<u>Con $\lambda_1 = 0$</u> en (3) se obtiene $\lambda_2 = -1$, con $\lambda_2 = -1$ en (2) se obtiene $y = 0$, con $y = 0$ en (5) se obtiene $z = 0$ y con $z = 0$ en (4) se obtiene $x = \pm 1$.

O sea que se tienen también los siguientes puntos críticos:

$$P_3 = (1,0,0)\ ;(\lambda_1,\lambda_2) = (0,-1)$$

$$P_4 = (-1,0,0)\ ;(\lambda_1,\lambda_2) = (0,-1)$$

<u>Los puntos más altos de la curva son:</u> $P_1 = (0,1,1)$ y $P_2 = (0,-1,1)$ ya que $f(0,\pm 1,1) = 1$.

<u>Y los más bajos son:</u> $P_3 = (1,0,0)$ y $P_4 = (-1,0,0)$ ya que $f(\pm 1,0,0) = 0$.