Clase 4

April 6, 2022

Definition 1 *Una matriz identidad I_n, de tamaño $n \times n$ es aquella cuyos elementos son*

$$(I_n)_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ } si \text{ } i = j \\ 0 \text{ } si \text{ } i \neq j \end{array} \right. .$$

Es decir aquella que tiene 1 en la diagonal principal y 0 los demás elementos.

Example 2 *Las siguientes son matrices identidades de diferentes tamaños:*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definition 3 *Una matriz elemental E es aquella que se obtiene de hacer una operación de fila a una matriz identidad.*

Por ejemplo si efectuamos la operación elemental $(-2)f_1$ a la I_3 obtenemos la matriz elemental:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to (-3)f_2 \to E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

También obtenemos otra matriz elemental E si efectuamos la operación elemental $f_4 + 2f_2$ a la I_4:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to f_4 + 2f_2 \to E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El siguiente resultado nos dirá que efectuar una operación de fila cualquiera e a una matriz cualquiera A es como PRE-MULTIPLICAR a A por una matriz elemental adecuada!

Lemma 4 *Sea $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ y e una operación elemental de fila cualquiera. Entonces $e(A) = e(I).A$ donde $I = I_m$ (es la matriz identidad de tamaño $m \times m$).*

Proof. La demostración hay que hacerla para cada uno de los tres tipos de operaciones elementales. Lo haremos para una operación de tipo II. Sea

$$e : f_i + \alpha f_j$$

Sea A la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & .... & a_{in} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & .... & a_{jn} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces calculemos primero $e(A)$:

$$e(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & .... & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & .... & a_{jn} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ahora calculemos $e(I_m)$:

$$I_m = \begin{bmatrix} 1_{(11)} & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 1_{(ii)} & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & 1_{(jj)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & 1_{(mm)} \end{bmatrix} \to f_i + \alpha f_j \to$$

$$\begin{bmatrix} 1_{(11)} & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 1_{(ii)} & ... & 0 + \alpha 1_{(jj)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & 1_{(jj)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & 1_{(mm)} \end{bmatrix} = e(I_m)$$

Y ahora, la cuenta más difícil de escribir, $e(I_m).A$ (notemos que I_m es de tamaño $m \times m$ y A de tamaño $m \times n$. Con lo que el producto será de tamaño $m \times n$):

$$e(I_m).A = \begin{bmatrix} 1_{(11)} & 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 1_{(ii)} & ... & \alpha_{(ij)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & 1_{(jj)} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... & ... & 0 & 1_{(mm)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & .... & a_{in} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & .... & a_{jn} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & .... & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & .... & a_{jn} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix} = e(A)$$

Queda calcular para las operaciones de tipo I y tipo II (completar!). ■

Corollary 5 *Sean $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Entonces $B \sim_f A$ sí y solo si existe una matriz $P \in \mathbb{F}^{m \times m}$ donde P es producto de matrices elementales tal que*

$$B = P.A$$

Proof. Como $B \sim_f A$ entonces existen una sucesión finita de operaciones elementales de filas que transforma A en B:

$$(*)\ A \to e_1(A) \to e_2(e_1(A)) \to ... \to e_n(e_{n-1}(...(e_1(A)...) = B.$$

Pero por el Lema anterior tenemos que

$$e_k(A) = e_k(I).A$$

luego reemplazamos esto en (*):

$$\begin{aligned} B &= e_n(e_{n-1}(...(e_1(A)...) \\ &= e_n(I).[e_{n-1}(...(e_1(A)...)] \\ &= e_n(I).e_{n-1}(I).[e_{n-2}(...(e_1(A)...)] \\ &= ... \\ &= e_n(I).e_{n-1}(I)....e_1(I).A \\ &= P.A \end{aligned}$$

donde $P = e_n(I).e_{n-1}(I)....e_1(I)$ es claramente un producto de matrices elementales. ■

Y ahora el gran TEOREMA que justifica todo!

Theorem 6 *Sea $A.X = b$ un sistema lineal. Supongamos que tenemos un sistema equivalente $A'.X = b'$ (es decir la matriz ampliada $A|\,b$ es equivalente por filas a la matriz ampliada $A'|\,b'$). Entonces tienen las mismas soluciones.*

Proof. Basta suponer que el sistema $A'.X = b'$ se obtiene de aplicar una operación elemental e a la matriz $A'|\,b'$. (o sea estamos suponiendo que la matriz ampliada del sistema final se obtuvo aplicando una operación elemental de fila e a la matriz ampliada del sistema inicial). Entonces tenemos que

$$A'.X = b'$$

se reescribe como

$$e(A).X = e(b)$$

Supongamos que X_0 es una solución del sistema inicial $A.X = b$. Es decir que se satisface:

$$A.X_0 = b$$

comprobemos que también es solución del sistema final $A'.X = b'$:

$$\begin{array}{rcl} A'.X_0 & = & e(A).X_0 \\ (*) & = & e(I).\,(A.X_0) \\ & = & e(I).b \\ & = & e(b) \\ & = & b' \end{array}$$

(*) esto es por el Lema de antes que afirmaba que $e(A) = e(I).A$.

Y si suponemos que X_0' es solución del sistema final $A'.X = b'$ como sabemos que podemos volver al sistema inicial con la operación elemental inversa (del mismo tipo que e) e^{-1}, obtenemos, con la misma cuenta, que X_0' es solución del sistema inicial $A.X = b$. ∎

Ahora entra a la cancha el rango de la matriz! Qué nos dice este bicho de las soluciones de un sistema lineal?

Theorem 7 *(**Rouché-Frobenius**) Un sistema de ecuaciones $A.X = b$ tiene solución sí y solo si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada,*

$$rango(A) = rango(A|\,b).$$

Proof. Sea R_A la MERF equivalente por filas a A. Por el Teorema anterior

los sistemas $A.X = b$ y $R_A.X = b'$ tiene las mismas soluciones (b' se obtuvo aplicando a b las mismas operaciones elementales que se aplicaron de A a R_A). Denotemos por $r(A)$ al $rango(A)$. Supongamos $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Si $r(A) \leq m$, entonces esto es que R_A tiene r filas no nulas.

Si $r = m$ entonces R_A no tiene filas nulas y luego el $r(A|\,b) = m$ (pensarlo!) con lo que A y $A|\,b$ tienen el mismo rango.

Si $r < m$ entonces R_A tiene $m - r$ filas nulas (ubicadas al final de R_A). Con lo que, para que el sistema reducido ampliado $R_A|\,b'$ tenga sentido se debe tener que las últimas $m - r$ coordenadas de b' deben ser 0. De lo que se deduce que $r(A|\,b) = r(A)$. ■

Problem 8 *Dado el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y - z = a \\ y + 3z = b \\ x + 3y + 2z = c \end{array} \right.$$

¿Qué condiciones deben satisfacer a, b, c para que el sistema sea compatible?

Solution 9 *Pasamos a la matriz ampliada y reducimos por filas:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 1 & 3 & 2 & c \end{array} \right] \to f_3{+}(-1)f_1 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & 1 & 3 & c-a \end{array} \right] \to f_3{+}(-1)f_2 \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array} \right] \to$$

Aquí ya nos podemos dar cuenta que para que el sistema tenga solución s deberá cumplir que

$$c - a - b = 0$$

pero terminamos de reducir por fila...

$$\to f_1 + (-2)f_2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & a-2b \\ 0 & 1 & 3 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{array} \right]$$

Ahora que la matriz de coeficientes es una MERF veamos los rangos de A y de la ampliada:

$$rango(A) = 2$$

entonces por el Teorema de Rouché Frobenius dicho sistema será compatible si se cumple que

$$rango(A) = rango(A|\,b)$$

y para que eso se deberá verificar que

$$c - a - b = 0.$$

Operaciones entre matrices

Dada una matriz A, para describirla basta decir cómo son sus elementos A_{ij}. De esta manera dadas dos matrices, $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ entonces definimos la suma de ambas mediante sus elementos:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \ \ \forall i = 1...m, \, j = 1...n.$$

Example 10 *Si* $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ *son las matrices siguientes:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{4} & -3 & 0 \end{bmatrix}, \, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ \frac{3}{4} & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Dadas dos matrices, $A \in \mathbb{F}^{m\times l}$ *y* $B \in \mathbb{F}^{l\times n}$*, definimos el producto de ambas (como en la clase* 3*) mediante sus elementos:*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{l} A_{ik}B_{kn}.$$

Example 11 *Si* $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ *y* $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *dadas por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces veamos elemento a elemento:

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{3} A_{1k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{3} A_{1k}B_{k2} \\ \sum_{k=1}^{3} A_{2k}B_{k1} & \sum_{k=1}^{3} A_{2k}B_{k2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2.1 + (-1).(-3) + 0.4 & 2.(-1) + (-1).2 + 0.0 \\ (-3).1 + 0.(-3) + 1.4 & (-3).(-1) + 0.2 + 1.0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

También podemos definir la multiplicación entre un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, como sigue:

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}.$$

Example 12 *Si* $\alpha = -3$ *y* $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *dada por*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\alpha A = (-3)\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Podemos probar las siguientes propiedades:

Proposition 13 *Sea* $\mathbb{F}$ *un cuerpo (conjunto con estructura de campo definido en la clase* 1*) y sean* A, B, C *matrices con tamaños adecuados. Entonces*

1. $A + B = B + A$ para todas matrices $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ para todas matrices $A, B, C \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
3. $A(BC) = (AB)C$ para todas matrices $A \in \mathbb{F}^{m\times L}$, $B \in \mathbb{F}^{L\times R}$, $C \in \mathbb{F}^{R\times n}$.
4. $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$ para todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, para todas matrices $A \in \mathbb{F}^{m\times r}$, $B \in \mathbb{F}^{r\times n}$.
5. $A(B + C) = AB + AC$ para todas matrices $A \in \mathbb{F}^{m\times r}$, $B, C \in \mathbb{F}^{r\times n}$.
6. $(B + C)A = BA + CA$ para todas matrices $B, C \in \mathbb{F}^{m\times r}$, $A \in \mathbb{F}^{r\times n}$.

Proof. Probaremos solo el inciso 5. Tenemos que $A \in \mathbb{F}^{m\times r}$, $B, C \in \mathbb{F}^{r\times n}$. Veamos que los elementos $A(B + C)$ son los mismos que los de $AB + AC$:

$$\begin{aligned} A(B+C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{r} A_{ik}(B+C)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{r} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{r} A_{ik}C_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}. \end{aligned}$$

los demás incisos son análogos (completar). ■