Clase 19

October 4, 2022

Cálculo de núcleo e imagen de algunas transformaciones lineales

Example 1 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *lineal dada por*

$$T(x, y, z) = (x + y, x + z, y - z)$$

Calcularemos su núcleo e imagen.

Solution 2 Para el núcleo *debemos ver estudiar cuándo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *es tal que* $T(x, y, z) = 0 = (0, 0, 0)$. *O sea,*

$$(x + y, x + z, y - z) = (0, 0, 0)$$

que conlleva a plantear y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Y para esto lo mismo de siempre...

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to f_2 - f_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to (-1)f_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{array}{c} f_1 - f_2 \\ f_3 - f_2 \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_A$$

entonces el conjunto solución de dicho sistema es

$$Nu(T) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

y si parametrizamos el conjunto... $(z = t)$

$$Nu(T) = \{(-t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

y entonces sacamos una base...

$$Nu(T) = \langle(-1, 1, 1)\rangle$$

Para la imagen *debemos buscar las condiciones que deben satisfacer las componentes de un vector genérico* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y, z) = (a, b, c)$ *tenga solución! (pues es lo mismo decir que dicho vector sea alcanzado por algún* (x, y, z) *del* $\mathbb{R}^3$ *de partida). O sea,*

$$(x + y, x + z, y - z) = (a, b, c)$$

esto conlleva a resolver el siguiente sistema no homogéneo y ver las condiciones (de compatibilidad) para las componentes a, b, c*:*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ y - z = c \end{cases}$$

y a este sistema ya lo resolvimos antes pero homogéneo. Las mismas operaciones ahora para ver cómo se modifica el término independiente...

$$A|\, b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{array}\right] \to f_2 - f_1 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b - a \\ 0 & 1 & -1 & c \end{array}\right] \to (-1)f_2$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & a - b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{array}\right] \to \begin{array}{c} f_1 - f_2 \\ f_3 - f_2 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & a - b \\ 0 & 0 & 0 & c - a + b \end{array}\right] = R_A|\, \tilde{b}$$

y aquí nos aparece la condición de compatibilidad...

$$c - a + b = 0$$

entonces tendremos que

$$\mathrm{Im}(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c - a + b = 0\}$$

o, si parametrizamos la solución... $b = t$, $c = s$ *podemos sacar una base para la* $\mathrm{Im}(T)$*:*

$$\mathrm{Im}(T) = \{(t + s, t, s) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

o sea...

$$\mathrm{Im}(T) = \langle(1, 1, 0); (1, 0, 1)\rangle$$

Example 3 *Sea* $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *(la multiplicación a izquierda por* A*) donde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution 4 Para el núcleo, *como antes, debemos ver qué vector* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *es tal que*

$$T_A(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces nuevamente esto nos lleva a plantear y resolver el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y acá lo de siempre, debemos reducir por filas la matriz de coeficientes A...

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} f_2 + (-5)f_1 \\ f_3 + (-7)f_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & -19 \\ 0 & 11 & -19 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{11} f_2 \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{11} \\ 0 & 11 & -19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} f_1 + f_2 \\ f_3 + (-11)f_2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_A$$

entonces el conjunto solución de dicho sistema es

$$Nu(T) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{c} x + 3z = 0 \\ y + \frac{14}{11} z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

y si parametrizamos el conjunto... ($z = t$)

$$Nu(T) = \left\{ \left(-3t, -\frac{14}{11} t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

y entonces sacamos una base...

$$Nu(T) = \left\langle \left(-3, -\frac{14}{11}, 1 \right) \right\rangle$$

Para la imagen *debemos buscar las condiciones que deben satisfacer las componentes de un vector genérico* $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $T_A(x, y, z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ *tenga solución! (pues es lo mismo decir que dicho vector sea alcanzado por algún* $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *del* $\mathbb{R}^3$ *de partida). O sea,*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

esto conlleva a resolver el sistema no homogéneo en cuestión y ver las condiciones (de compatibilidad) para las componentes a, b, c: Pasamos a la matriz ampliada y reducimos (las mismas cuentas que acabamos de hacer antes)

$$A|\,b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & a \\ 5 & 6 & -4 & b \\ 7 & 4 & 2 & c \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} f_2 + (-5)f_1 \\ f_3 + (-7)f_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 11 & -19 & b-5a \\ 0 & 11 & -19 & c-7a \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{11}f_2 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & -\frac{19}{11} & \frac{b-5a}{11} \\ 0 & 11 & -19 & c-7a \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} f_1 + f_2 \\ f_3 + (-11)f_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & a + \frac{b-5a}{11} \\ 0 & 1 & \frac{14}{11} & \frac{b-5a}{11} \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-b \end{array}\right] = R_A$$

y aquí nos aparece la condición de compatibilidad...

$$c - 2a - b = 0$$

entonces tendremos que

$$\mathrm{Im}(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : c - 2a - b = 0\}$$

o, si parametrizamos la solución... $a = t$, $b = s$ *podemos sacar una base para la* $\mathrm{Im}(T)$*:*

$$\mathrm{Im}(T) = \{(t, s, 2t + s) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

o sea...

$$\mathrm{Im}(T) = \langle (1, 0, 2); (0, 1, 1) \rangle$$

Invertibilidad de una transformación lineal

Definition 5 *Sean V, W dos $\mathbb{F}-$espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Diremos que T es* uno a uno *o* inyectiva *si $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. En otras palabras, si manda vectores distintos de V en vectores distintos de W. y diremos que T es suryectiva (o sobreyectiva) si* $\mathrm{Im}(T) = W$.

Example 6 *Sea $T : P_3 \to P_4$ lineal dada por $T(p) = xp$, donde $p \in P_3$ (es un polinomio de grado menor o igual que 3). Veamos que T es inyectiva según la definición anterior: Supongamos tener $p, q \in P_3$, es decir*

$$\begin{aligned} p &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ q &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \end{aligned}$$

tales que $T(p) = T(q)$. Es decir,

$$\begin{aligned} xp &= xq \\ x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) &= x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) \\ a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 &= b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + b_3 x^4 \end{aligned}$$

Pero esta última igualdad implica que, como ambos polinomios son iguales, deben tener el mismo grado y los mismos coeficientes en cada término. Es decir $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$. Luego esto significa que $p = q$ como queríamos probar. Así resulta T inyectiva.

En general se podría hacer esta cuenta que acabamos de hacer cada vez que querramos ver si una transformación lineal es inyectiva. Pero el siguiente teorema nos facilita la comprobación de la inyectividad con solo ver su núcleo.

Theorem 7 *Sean V, W dos $\mathbb{F}-$espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *T es inyectiva (uno a uno)*
2. *$Nu(T) = \{0_V\}$*
3. Nulidad(T)= 0.

Proof. Probaremos $a) \Leftrightarrow b)$. Y luego $b) \Leftrightarrow c)$.

Veamos primero $a) \Rightarrow b)$: Asumimos que T es inyectiva. Queremos ver que $Nu(T) = \{0\}$. Supongamos, por el contrario, que existe $v \neq 0$ tal que $v \in Nu(T)$. Pero entonces se tiene que $T(v) = 0 = T(0)$. (Ya que obviamente cualquier transformación lineal cumple que $T(0) = 0$ (Teorema 8 de la clase 17)). O sea que $T(v) = T(0)$. Pero por definición de inyectiva esto implica que $v = 0$ lo cual es un absurdo. Luego claramente no queda otra que $Nu(T) = \{0\}$.

$b) \Rightarrow a)$: Asumimos ahora que $Nu(T) = \{0\}$. Queremos ver que T es inyectiva. Supongamos entonces que

$$T(v) = T(u)$$

con $u, v \in V$. Esto se lo puede expresar de la siguiente manera,

$$T(u) - T(v) = 0$$

pero por la linealidad de T,

$$T(u - v) = 0$$

y como estamos asumiendo que $Nu(T) = \{0\}$ entonces no queda otra que $u - v = 0$ con lo que se tiene

$$u = v$$

Luego hemos probado que T es inyectiva por definición.

Veamos ahora $b) \Rightarrow c)$. Asumimos que $Nu(T) = \{0_V\}$. Pero entonces obviamente por definición de *Nulidad(T)*= $\dim(Nu(T)) = 0$.

$c) \Rightarrow b)$ También es obvio ya que estamos asumiendo ahora que 0 =*Nulidad(T)*= $\dim(Nu(T)$. Luego esto quiere decir que $Nu(T)$ es necesariamente el espacio nulo $\{0_V\}$. ■

Example 8 *Sea $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ donde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Exercise 9 *determinar si T es o no inyectiva.*

Proof. Por el Teorema anterior basta estudiar su núcleo. Esto es

$$Nu(T) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : T_A(a,b,c,d) = 0\}$$

pero

$$T_A(a,b,c,d) = 0$$

es resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir la solución del sistema homogéneo que se plantea. Entonces reducimos por filas y veamos la solución!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} f_2 + (-2)f_1 \\ f_3 + (-3)f_1 \\ f_4 - f_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$f_4 \leftrightarrow f_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) f_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$f_1 + (-3)f_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{7} f_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} f_2 + 3f_3 \\ f_1 + (-7)f_3 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_A$$

Luego el núcleo de T_A es

$$Nu(T_A) = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{c} a + 17d = 0 \\ b - 5d = 0 \\ c - d = 0 \end{array} \right. \right\}$$

podemos parametrizar la variable libre $d = t$

$$Nu(T_A) = \{(-17t, 5t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

o sacar su generador (base)

$$Nu(T_A) = \langle (-17, 5, 1, 1) \rangle$$

Entonces claramente $Nu(T_A) \neq \{0\}$. Y luego T_A no es inyectiva. ■

Remark 10 *Recordemos que el Teorema de la dimensión para transformaciones lineales decía que si* $T : V \to W$ *lineal con* $\dim(V) = n$ *entonces*

$$\text{rango(T)} + \text{nulidad(T)} = n.$$

Pero si dicha T *es* inyectiva *entonces se tendrá que* nulidad(T)$= 0$*. Luego* *rango*$(T) = n$.

Inversa de una transformación lineal

Si tenemos una transformación lineal $T : V \to W$ *inyectiva* esto quiere decir, básicamente, que a cada vector v de V le corresponde un único vector w en la llegada $\text{Im}(T)$. Entonces esta *unicidad* nos permite definir una "vuelta" de dicho vector w al v mediante $T^{-1} : \text{Im}(T) \to V$.

Si $T(v) = w$ entonces $T^{-1}(w) = v$ y vemos que

$$\begin{array}{rcl} (1)\ T^{-1}(T(v)) & = & T^{-1}(w) = v = I_V(v) \\ (2)\ T(T^{-1}(w)) & = & T(v) = w = I_W(w) \end{array}$$

es decir que la composición de T con T^{-1} nos da la transformación lineal identidad (en ambos casos). Veamos que efectivamente T^{-1} es lineal. Tomemos $w, z \in \text{Im}(T)$. Es decir $w = T(u)$ y $z = T(v)$ con $u, v \in V$ (equivalentemente $u = T^{-1}(w)$ y $v = T^{-1}(z)$). Entonces

$$\begin{array}{rcl} T^{-1}(w+z) & = & T^{-1}(T(u) + T(v)) \\ & = & T^{-1}(T(u+v)) \\ & = & u + v \\ & = & T^{-1}(w) + T^{-1}(v) \end{array}$$

si además $c \in \mathbb{F}$ entonces

$$\begin{array}{rcl} T^{-1}(cw) & = & T^{-1}(cT(u)) \\ & = & T^{-1}(T(cu)) \\ & = & cu \\ & = & cT^{-1}(w) \end{array}$$

Definition 11 *Sean* V, W *dos* $\mathbb{F}-$*espacios vectoriales y sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Diremos que* T *es un* isomorfismo *si es invertible. Es decir si existe* $T^{-1} : W \to V$ lineal *tal que*

$$\begin{array}{rcl} \textit{(1)}\ \left(T^{-1} \circ T\right)(v) & = & v \\ \textit{(2)}\left(\ T \circ T^{-1}\right)(w) & = & w \end{array}$$

Remark 12 *Para que una transformación $T : V \to W$ lineal sea invertible tiene que ser biyectiva, es decir inyectiva (o uno a uno) y suryectiva (o sobreyectiva).*

Remark 13 *Podemos ver de forma sencilla que si T es invertible entonces su inversa debe ser única. En efecto supongamos que $T : V \to W$ tiene dos transformaciones lineales "inversas". Digamos S y R. Cada una cumple (1) y (2) de la definición anterior. Pero entonces para $w \in \mathrm{Im}(T)$ ($w = T(u)$)*

$$S(w) = S(T(u)) = u = R(T(u)) = R(w)$$

luego debe ser que $S = R$. De ahí tiene sentido que se denote por T^{-1} a la transformación lineal inversa de T.

Theorem 14 *Si $T : U \to V$ y $S : V \to W$ son transformaciones lineales inyectivas entonces:*

1. *$S \circ T$ es inyectiva*
2. *$(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$*

Proof. 1) Veamos que el núcleo de $S \circ T$ es el subespacio $\{0\}$. Para eso tomemos $v \in Nu(S \circ T)$. Esto quire decir que $(S \circ T)(v) = 0$. Por definición tenemos que

$$0 = S(T(v))$$

Luego esto quiere decir que $T(v) \in Nu(S)$. Pero como S es inyectiva se tiene que $T(v) = 0$. Pero como también T es inyectiva se tiene que $v = 0$. Luego tenemos que $Nu(S \circ T) = \{0\}$. Con lo que claramente $S \circ T$ es inyectiva por el Teorema que vimos más arriba.

2) Ahora que sabemos que $S \circ T$ es inyectiva tiene sentido hablar de su inversa $(S \circ T)^{-1}$. Consideremos la composición de las transformaciones lineales $T^{-1} \circ S^{-1}$ que claramente es una trasnformación lineal (pues por el Teorema 13 de la clase 17 la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal). Entonces

$$\begin{aligned}
(T^{-1} \circ S^{-1}) \circ (S \circ T)(u) &= (T^{-1} \circ S^{-1})(S(T(u))) \\
&= T^{-1}(S^{-1}(S(T(u)))) \\
&= T^{-1}(T(u)) \\
&= u
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
(S \circ T) \circ (T^{-1} \circ S^{-1})(v) &= (S \circ T)(T^{-1}(S^{-1}(v))) \\
&= S(T(T^{-1}(S^{-1}(v)))) \\
&= S(S^{-1}(v)) \\
&= v
\end{aligned}$$

Es decir que $(T^{-1} \circ S^{-1})$ cumple la definición de inversa de $S \circ T$. Y por el Remark anterior sabemos que hay una sola inversa con lo que debe ser

$$(S \circ T)^{-1} = (T^{-1} \circ S^{-1})$$

$\blacksquare$

Remark 15 *Por último vamos a ver que la transformación (lineal) $T : V \to \mathbb{R}^n$ dada como sigue, es un isomorfismo. ($\dim(V) = n$)*

$$T(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

donde $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base ordenada (fija) para V.

Ya habíamos visto que era lineal (en el práctico). Para ver que es un isomorfismo nos falta ver que es inyectiva y suryectiva. Para ver que es inyectiva veamos que $Nu(T) = \{0_V\}$:

Sea $v \in V$ tal que $T(v) = 0$. Esto significa que

$$[v]_{\mathcal{B}} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

pero esto quiere decir, por definición de coordenadas, que

$$v = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n$$

o sea que

$$v = 0_V$$

Luego $Nu(T) = \{0_V\}$ y así T es uno a uno (inyectiva).

Para ver que es sobreyectiva debemos ver que

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^n$$

Para ver esta igualdad de conjuntos debemos ver que $\text{Im}(T) \subset \mathbb{R}^n$ y que $\mathbb{R}^n \subset \text{Im}(T)$.

La primera inclusión: $\text{Im}(T) \subset \mathbb{R}^n$ es obvia por definición. Pues al menos T lleva cosas de V a, justamente $\mathbb{R}^n$.

Para la segunda inclusión: $\mathbb{R}^n \subset \text{Im}(T)$, tomemos

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

me quiero construir un $v \in V$ de forma tal que $T(v) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix}$. O sea que $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix}$. Pero esto es sencillo pues tomando

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

es obvio que $v \in V$ (es combinación lineal de la base). Y además

$$T(v) = [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix}$$

como queríamos.

Hemos probado entonces que $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^n$ y así T resulta un isomorfismo de V en $\mathbb{R}^n$.