Clase 18

September 27, 2022

Núcleo e Imagen de una Transformación Lineal

Definition 1 *Sean V, W dos $\mathbb{F}-$espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Definimos el núcleo de T como el conjunto*

$$Nu(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

También definimos la imagen de T como el conjunto

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ de forma tal } w = T(v)\}.$$

Example 2 *(importante) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la multiplicación por la matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, es decir $T(u) = Au$, entonces claramente*

$$Nu(T) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\}$$

no es más que el espacio nulo de A.

Y la imagen de T claramente es

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in \mathbb{R}^m : \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ de forma tal } w = Av\},$$

es decir el espacio columna de A (pues al escribir Av estamos haciendo combinaciones lineales de las columnas de A). Veamos esto con un ejemplo sencillo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Y sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Luego:

$$\begin{aligned} Av &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -x + 2y + z \\ 3x - y - 2z \end{bmatrix} \\ &= x \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es decir Av está en el espacio columna de A.

Example 3 *Sea* $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ *es derivable en* $\mathbb{R}\}$. *Y sea* $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. *Sea* T *el operador lineal derivación* $T(f) = f'$. *Claramente* $T : V \to W$ *es lineal.*

Entonces $Nu(T) = \{f \in V : T(f) = 0\} = \{f \in V : f' = 0\} = \{f \in V : f =$ *cte.*$\}$.

Example 4 *Sea* V *un* $\mathbb{F}-$*espacio vectorial y sea* $I : V \to V$ *el operador lineal identidad,* $I(v) = v$. *Luego claramente se tiene que* $Nu(I) = \{0\}$ *y* $\mathrm{Im}(I) = V$.

Sospechamos que cada uno de estos conjuntos son en realidad subespacios vectoriales. En efecto,

Theorem 5 *Sean* V, W *dos* $\mathbb{F}-$*espacios vectoriales y sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Entonces*

1. $Nu(T)$ *es un subespacio vectorial de* V.
2. $\mathrm{Im}(T)$ *es un subespacio vectorial de* W.

Proof. (1). Por el Teorema 8 (Clase 17) sabemos que $T(0_v) = 0_w$. Luego esto dice que $0_v \in Nu(T)$. Y así claraemente $Nu(T)$ es no vacío.

Tomamos $u, v \in Nu(T)$. Esto quiere decir que $T(u) = 0$ y $T(v) = 0$. Luego

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0$$

con lo que $u + v \in Nu(T)$.

Si además $\alpha \in \mathbb{F}$, vemos que

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha 0 = 0$$

con lo que $\alpha u \in Nu(T)$.

Luego por el Teorema 12 de la clase 13 se tiene que $Nu(T)$ es un subespacio vectorial de V.

(2). Análogamente ya que por el Teorema 8 (Clase 17) sabemos que $T(0_v) = 0_w$, esto dice también que $0_w \in \mathrm{Im}(T)$. Luego $\mathrm{Im}(T)$ es no vacío.

Sean $w, z \in \mathrm{Im}(T)$. Esto quiere decir que existen $u, v \in V$ tales que $w = T(u)$ y $z = T(v)$. Luego

$$w + z = T(u) + T(v) = T(u + v)$$

y obviamente como $u + v \in V$ esto dice que $w + z \in \mathrm{Im}(T)$.

Si además $\beta \in \mathbb{F}$ entonces

$$\beta w = \beta T(u) = T(\beta u)$$

y obviamente $\beta u \in V$. Esto dice que $\beta w \in \operatorname{Im}(T)$.

Y por el Teorema 12 de la clase 13 se tiene que $\operatorname{Im}(T)$ es un subespacio vectorial de V. ■

Rango y Nulidad de las transformaciones lineales...

Definition 6 *Sean V, W dos $\mathbb{F}-$espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. A la dimensión de la* $\operatorname{Im}(T)$ *se la denomina rango de T, se lo denota por* rango(T)*. Y a la dimensión del núcleo de T se la denomina nulidad de T, se la denota por* nulidad(T).

Si, en particular, T es la multiplicación por $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ entonces la nulidad y el rango es dicha transformación lineal es lo mismo que la nulidad y rango de la matriz A.

Notation 7 *Cuando T sea la transformación lineal "multiplicación por A" la denotaremos por T_A. Es decir*

$$T_A(v) = Av.$$

Example 8 *Sea $T_A : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ donde*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Encontrar $Nu(T_A)$ y la $\operatorname{Im}(T_A)$.

Solution 9 *Para encontrar la* $\operatorname{Im}(T_A)$ *debemos buscar los $v \in \mathbb{R}^4$ para los cuales exista $u \in \mathbb{R}^6$ con $T_A(u) = v$. O, lo que es lo mismo, $Au = v$. En otras palabras la cuestión es para cuáles $v = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ existe $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$ de forma tal que*

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

pero esto ya lo sabemos hacer. Hay que encontrar la $MERF$ de la matriz de coeficientes y ver las condiciones que deben satisfacer a, b, c, d para que el sistema sea compatible!

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 & a \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 & c \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 & d \end{array}\right] \to (-1)f_1 \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 & -5 & 3 & -a \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 & c \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 & d \end{array}\right] \to$$

$$\begin{array}{c} f_2 + (-3)f_1 \\ f_3 + (-2)f_1 \\ f_4 + (-4)f_1 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 & -5 & 3 & -a \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 & 3a+b \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 & 2a+c \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 & 4a+d \end{array}\right] \to$$

$$\to (-1)f_2 \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 0 & -4 & -5 & 3 & -a \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 & -3a-b \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 & 2a+c \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 & 4a+d \end{array}\right] \to$$

$$\to \begin{array}{c} f_1 + 2f_2 \\ f_3 + f_2 \\ f_4 + f_2 \end{array} \to \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 & -7a-b \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 & -3a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-b+d \end{array}\right] = R_A$$

Luego el sistema es compatible si

$$\left\{ \begin{array}{c} -a-b+c=0 \\ a-b+d=0 \end{array} \right. .$$

En otras palabras, tenemos una caracterización de la $\mathrm{Im}(T)$*:*

$$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{c} -a-b+c=0 \\ a-b+d=0 \end{array} \right. \right\}$$

Y claramente podemos sacar una base: Parametrizamos las variables libres $a = t$ y $b = s$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T_A) &= \{(t, s, t+s, s-t) : t, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(1,0,1,-1) + s(0,1,1,1) : t, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,1,-1),\ (0,1,1,1) \rangle \end{aligned}$$

Así se tiene que $\dim(\mathrm{Im}(T_A)) = 2$*.*

Para hallar el $Nu(T)$ claramente debemos buscar los $u \in \mathbb{R}^6$ tales que $Au = 0$. O sea las soluciones del sistema homogéneo. Entonces debemos plantear la matriz correspondiente al sistema homogéneo y llegar a su R_A:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

pero como ya la reducimos antes simplemente tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \to ... \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_A$$

Pero reinterpretando las ecuaciones tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Parametrizamos $x_3 = t$*,* $x_4 = s$*,* $x_5 = r$*,* $x_6 = p$ *escribimos el conjunto solución (justamente el espacio nulo de* A*):*

$$\begin{aligned} Nu(T_A) &= \{(4t + 28s + 37r - 13p,\ 2t + 12s + 16r - 5p,\ t, s, r, p) : t, s, r, p \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(4, 2, 1, 0, 0, 0) + s(28, 12, 0, 1, 0, 0) + r(37, 16, 0, 0, 1, 0) + p(-13, -5, 0, 0, 0, 1) : t, s, r, p \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (4, 2, 1, 0, 0, 0),\ (28, 12, 0, 1, 0, 0),\ (37, 16, 0, 0, 1, 0),\ (-13, -5, 0, 0, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Con lo que $\dim(Nu(T_A)) = 4$.

Teorema de la dimensión para las transformaciones lineales...

Theorem 10 *Sean* V, W *dos* $\mathbb{F}-$*espacios vectoriales y sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Supongamos* $\dim(V) = n$*, entonces*

$$\text{rango(T)} + \text{nulidad(T)} = n.$$

Proof. Supongamos primero que $1 \leq \dim(Nu(T)) < n$. Llamemos $r = \dim(Nu(T))$. Sea $\{v_1, ..., v_r\}$ una base para $Nu(T)$. Luego podemos completar a una base para V agregando $n - r$ vectores adecuados $v_{r+1}, ..., v_n \notin Nu(T)$ (por el Lema 16 de la Clase 15). Con lo que el conjunto $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ forma una base para V.

Afirmación: $\{T(v_{r+1}), ..., T(v_n)\}$ forma una base para $\text{Im}(T)$.

En efecto veamos que dicho conjunto es un generador de $\text{Im}(T)$. Sea $b \in \text{Im}(T)$. Entonces existe $v \in V$ tal que $b = T(v)$. Podemos escribir a v como combinación lineal de la base para V:

$$v = c_1 v_1 + ... + c_r v_r + c_{r+1} v_{r+1} + ... + c_n v_n$$

y entonces aplicamos T:

$$\begin{aligned} b &= T(v) \\ &= T(c_1 v_1 + ... + c_r v_r + c_{r+1} v_{r+1} + ... + c_n v_n) \\ &= T(c_1 v_1 + ... + c_r v_r) + T(c_{r+1} v_{r+1} + ... + c_n v_n) \\ (1) &= T(c_{r+1} v_{r+1} + ... + c_n v_n) \\ (2) &= c_{r+1} T(v_{r+1}) + ... + c_n T(v_n) \end{aligned}$$

(1) Pues como $c_1v_1 + ... + c_rv_r \in Nu(T) \Rightarrow T(c_1v_1 + ... + c_rv_r) = 0$.
(2) Linealidad de T.
Así se tiene que $b \in \mathrm{Im}(T)$ es combinación lineal de los $T(v_{r+1}), ..., T(v_n)$. Luego

$$(*)\ \ \mathrm{Im}(T) = \langle T(v_{r+1}), ..., T(v_n) \rangle \,.$$

Veamos la independencia lineal. Supongamos tener la combinación lineal nula:

$$(3)\ k_{r+1}T(v_{r+1}) + ... + k_nT(v_n) = 0.$$

Como T es lineal tenemos que

$$T(k_{r+1}v_{r+1} + ... + k_nv_n) = 0.$$

Esto quiere decir que $k_{r+1}v_{r+1} + ... + k_nv_n \in Nu(T)$. Luego este vector se puede escribir como combinación lineal de la base de $Nu(T)$:

$$k_{r+1}v_{r+1} + ... + k_nv_n = k_1v_1 + ... + k_nv_n$$

De esta manera tenemos que

$$k_{r+1}v_{r+1} + ... + k_nv_n - k_1v_1 - ... - k_nv_n = 0$$

que es una combinación lineal nula de los vectores de la base de V. Esto implica (por su independencia lineal) que

$$k_{r+1} = ... = k_n = -k_1 = ... = k_n = 0.$$

En particular los escalares de la combinación lineal nula (3) son todos nulos necesariamente. Loq ue hemos probado que el conjunto

$$(**)\ \ \{T(v_{r+1}), ..., T(v_n)\}\ \text{ es linealmente independiente.}$$

(*) y (**) prueban que $\{T(v_{r+1}), ..., T(v_n)\}$ es una base para $\mathrm{Im}(T)$. Así $\dim(\mathrm{Im}(T)) = n - r$.
Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} \textit{rango(T)} + \textit{nulidad(T)} &= \dim(\mathrm{Im}(T)) + \dim(Nu(T)) \\ &= n - r + r \\ &= n. \end{aligned}$$

■