METODO DE NEWTON-RAPHSON

---

1 Sean $f(x) = x^2 - 6$ y $p_0 = 1$. Aplique el método de Newton para encontrar p_2

Recordemos la fórmula de aproximacion del método de Newton-Raphson:

$$\boxed{x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}}$$

(Notar que, en este caso, no es necesario encerrar a la raíz). La función dato es:

$$f(x) = x^2 - 6$$

Derivemos esta función:

$$f'(x) = 2x$$

Por lo tanto, ya podemos armar la formula de aproximacion para este caso:

$$\boxed{x_{j+1} = x_j - \frac{x_j^2 - 6}{2x_j}}$$

Esto arroja las siguientes aproximaciones sucesivas:

$$x_0 = 1; \quad x_1 = 3{,}5\,; \quad \boxed{x_2 = 2{,}607}$$

---

2 Sean $f(x) = -x^3 - \cos(x)$ y $p_0 = -1$. Aplique el método de Newton para encontrar p_2. ¿Podríamos utilizar $p_0 = 0$?

En este caso tenemos:

$$f(x) = -x^3 - \cos(x)$$

Y su derivada es:

$$f'(x) = \sin(x) - 3x^2$$

Por lo tanto, la fórmula de iteración es:

$$x_{j+1} = x_j + \frac{x_j^3 + \cos(x_j)}{\sin(x_j) - 3x_j^2}$$

Esto arroja:

$$x_0 = -1; \quad x_1 = -0{,}88\ldots \quad x_2 = -0{,}8656\ldots.\, x_3 = 0{,}86547\ldots$$

INTERPOLACION DE LAGRANGE

3 Use los polinomios interpolantes de Lagrange apropiados de grados uno, para aproximar lo siguiente:

a) $f(8{,}4)$ si se tienen los siguientes valores:

x	y
8,3	17,56492
8,6	18,50515

En este caso queremos realizar interpolación mediante un polinomio de primer grado:

$$f(x) = A_0 + A_1 x$$

En un primer intento podríamos hacer:

$$A_0 + A_1 x_0 = y_0$$

$$A_0 + A_1 x_1 = y_1$$

Pasemos al formato matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{Bmatrix}$$

La matriz obtenida se conoce como *Matriz de Vandermonde* y es muy bonita, pero tiene un inconveniente: Por lo general, si buscamos evaluar los coeficientes A_i vamos a tener un sistema mal resuelto, es decir, mal acondicionado o, lo que equivalente, con mucha impreción (Este tema se trata en las unidades siguientes de la materia). Por lo tanto, lo ideal seria no calcular los coeficientes directamente. Lagrange propuso trabajar con la matriz extendida y además agregarle una fila con el polinomio genérico propuesto. Dicho polinomio debe ser satisfecho en los puntos dato, por lo tanto, el determinante de la matriz debe ser nulo. Esto se puede observar fácilmente si valuamos la primera fila genérica en alguno de los puntos dato, pues terminará siendo combinación lineal de las demás:

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x \\ y_0 & 1 & x_0 \\ y_1 & 1 & x_1 \end{vmatrix} = 0$$

Evaluando el determinante resulta:

$$f(x)(x_1 - x_0) - y_0(x_1 - x) + y_1(x_0 - x) = 0$$

Despejando, obtenemos el polinomio de Lagrange para el caso de primer orden:

$$f(x) = \frac{(x_1 - x)}{(x_1 - x_0)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1$$

Si por lo contrario quisiéramos un polinomio de segundo grado, debiéramos calcular:

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2 \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \\ y_2 & 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

Y si sucesivamente…

Resolvamos el caso tomando el polinomio de primer grado:

Reemplazando los valores dato:

$$f(8{,}4) = \frac{(8{,}6 - 8{,}4)}{(8{,}6 - 8{,}3)} y_0 + \frac{(8{,}4 - 8{,}3)}{(8{,}6 - 8{,}3)} y_1$$

$$f(8{,}4) = \frac{2}{3} y_0 + \frac{1}{3} y_1$$

Notar que la suma de los coeficientes que multiplican a los valores de y deben sumar 1.

Reemplazando los valores de "y" resulta finalmente:

$$f(8{,}4) = \frac{2}{3} 17{,}56492 + \frac{1}{3} 18{,}50515 = 17{,}87833$$

Es decir, hemos interpolado la función en $x = 8{,}4$ el cual es un valor que no había sido medido. El resultado obtenido es que para $x = 8{,}4$ el valor aproximado de y es 17,88833