Clase 8

May 10, 2022

Recordemos que llamamos *vector libre* al conjunto de todos los vectores equipolentes entre si. A todo esa colección de vectores que son *equipolentes* entre si (tienen la *misma dirección, el mismo sentido y la misma longitud*) la vamos a representar como una misma cosa, y le daremos el nombre de vector libre.

También recordamos que los vectores libres están caracterizados por sus números de dirección. Esto es un par ordenado (a, b) de forma tal que (Ver $Fig.1$).

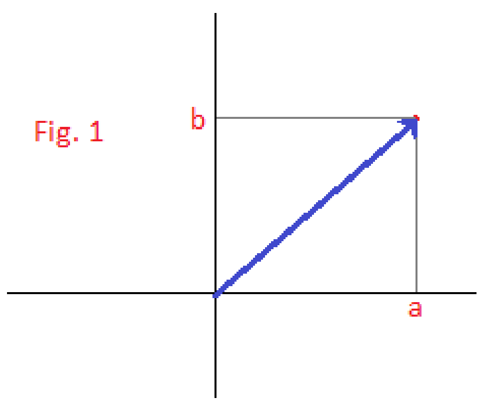
En otras palabras, podemos asociar un vector libre con un punto en el plano mediante sus números de dirección. Es decir que al vector libre con números de dirección (a, b) lo podemos dibujar en el plano como en la $Fig.1$ con orígen en $(0, 0)$ y extremo en (a, b).

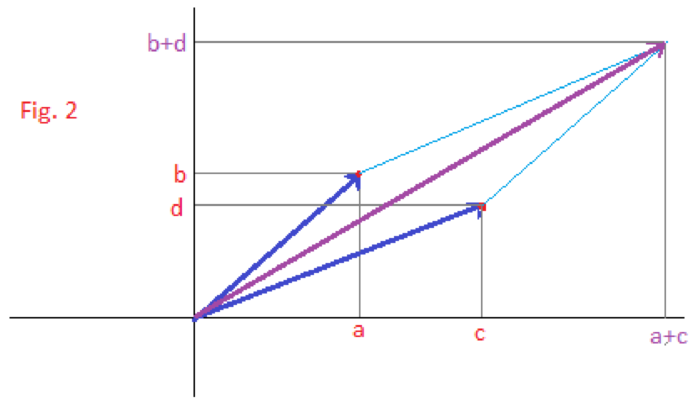
Operaciones con vectores libres

Suma de vectores

Dados dos vectores libres (que lo podemos pensar como un punto en el plano en el sentido que hemos dicho más arriba!) $u = (a, b)$ y $v = (c, d)$ entonces el

Fig. 1





vector suma queda definido por

$$u + v = (a + c \ , \ b + d)$$

Lo vemos gráficamente en la $Fig.2$.

La suma de vectores cumplen las siguientes propiedades (que se desprenden de la definición misma): Si u, v, w son vectores (libres) entonces se verifican

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ (asociatividad).

2. $u + v = v + u$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$ (conmutatividad).

3. El vector *nulo* $0 = (0, 0)$ actúa como elemento neutro: $u + 0 = 0 + u = u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.

4. Dado cualquier vector $u = (u_1, u_2)$ tenemos su vector opuesto $-u = (-u_1, -u_2)$ de forma tal que $u + (-u) = 0$.

Multiplicación por un escalar

Dados un vector $u = (a, b)$ y un escalar $k \in \mathbb{R}$ entonces el producto k por u queda determinado por

$$ku = (ka, kb).$$

Gráficamente (Ver $Fig.3$) estamos modificando la longitud y/o del vector!

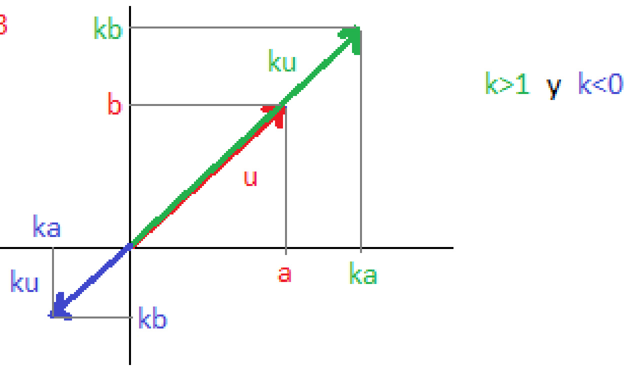
También se verifican las siguientes propiedades:

1. $k(u + v) = ku + kv$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$.

2. $(k + l)u = ku + lu$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$, $k, l \in \mathbb{R}$.

3. $(k.l)u = k.(lu)$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$, $k, l \in \mathbb{R}$.

Fig. 3



4. $1u = u$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.

Definition 1 *Dos vectores libres u, v son paralelos si uno es múltiplo escalar del otro. Es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $ku = v$. En tal caso lo denotamos por $u \| v$.*

Claramente u y v tienen la misma dirección aunque podrían no tener el mismo sentido.

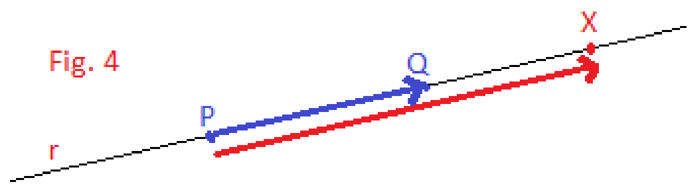
Remark 2 *Si bien $\mathbb{R}^2$ denota el conjunto de puntos en el plano, recordemos que hemos identificado a dichos puntos con vectores libres, mediante sus números de dirección. Por lo tanto también denotaremos por $\mathbb{R}^2$ al conjunto de vectores libres del plano.*

Remark 3 *Todo lo hecho para $\mathbb{R}^2$ lo hacemos análogamente para $\mathbb{R}^3$ (vectores libres del espacio).*

Ecuación de la recta en el plano R^2

Dados dos puntos en el plano, $P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2)$, estos determinan una única recta que pasa por ellos. La denotamos por r (ver $Fig.4$). En dicha recta resaltamos el segmento dirigido PQ ($(*)$ que visualiza el vector libre con números de dirección $(q_1 - p_1\ ,\ q_2 - p_2)$, o sea el vector $Q - P$)

Entonces, queremos saber bajo qué condición un punto cualquiera X estará en la recta r. Notemos que podemos considerar el segmento dirigido entre X y P mediante $X - P$ (como hicimos en $(*)$). Luego este vector es paralelo a $Q - P$ (ver $Fig.4$),



$$X - P \| Q - P$$

pero esto quiere decir que existe un escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$X - P = t(Q - P)$$

O, lo que es equivalente,

$$X = P + t(Q - P)$$

O, si llamamos $v = Q - P$ (que es un vector) nos queda

$$X = P + t.v$$

Esta última ecuación se la conoce como *ecuación vectorial* de la recta r.

Si pasamos a las coordenadas en el plano $\mathbb{R}^2$, $P = (p_1, p_2)$, $v = (v_1, v_2)$ (y si $Q = (q_1, q_2)$ entonces tendremos $v_1 = q_1 - p_1$, $v_2 = q_2 - p_2$) entonces un punto $X = (x_1, x_2)$ estará sobre la recta r si cumple que

$$(x_1, x_2) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$$

para algún $t \in \mathbb{R}$ (al cuál llamaremos parámetro).
A $v = (v_1, v_2)$ lo llamamos *vector director* de la recta r.

Distintas formas de ecuaciones para la recta en $\mathbb{R}^2$

A partir de la ecuación vectorial podemos hacer distintas manipulaciones algebraicas para dar con otras ecuaciones para una recta en $\mathbb{R}^2$.

$$(x_1, x_2) = (p_1, p_2) + t(v_1, v_2)$$

esta ecuación se puede escribir coordenada a coordenada para obtener

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \end{cases}$$

la cuál se denomina *ecuaciones paramétricas* de la recta r.

Si despejamos el t de las ecuaciones anteriores e igualamos: $(v_1, v_2 \neq 0)$

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2}$$

la cuál se denomina *ecuación cartesiana simétrica* de la recta r.

Si en la ecuación anterior pasamos términos e igualamos a 0,

$$\begin{aligned}
v_2(x_1 - p_1) &= v_1(x_2 - p_2) \\
v_2(x_1 - p_1) - v_1(x_2 - p_2) &= 0 \\
v_2x_1 - v_2p_1 - v_1x_2 + v_1p_2 &= 0 \\
(v_2)\,x_1 + (-v_1)x_2 + (v_1p_2 - v_2p_1) &= 0 \\
Ax_1 + Bx_2 + C &= 0
\end{aligned}$$

Esta última ecuación se la denomina *ecuación cartesiana implícita* de la recta r.

Si en la ecuación anterior despejamos x_2 en función de x_1 obtenemos

$$\begin{aligned}
Ax_1 + Bx_2 + C &= 0 \\
x_2 &= -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B} \\
x_2 &= m.x_1 + n
\end{aligned}$$

m es la *pendiente* y n es la *ordenada al orígen.*
Esta última ecuación se denomina *ecuación cartesiana explícita.*

Finalmente si en la ecuación *implícita* se tiene que $A, B, C \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
Ax_1 + Bx_2 + C &= 0 \\
Ax_1 + Bx_2 &= -C \\
\frac{A}{-C}x_1 + \frac{B}{-C}x_2 &= 1 \\
\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} &= 1
\end{aligned}$$

donde $a = -\frac{C}{A}$ (abcsisa al orígen) y $b = -\frac{C}{B}$ (ordenada al orígen).
Esta última ecuación se denomina *ecuación segmentaria* de la recta r.

Análogamente en $\mathbb{R}^3$.

La *ecuación vectorial* para una recta en el espacio $\mathbb{R}^3$ sería

$$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t(v_1, v_2, v_3).$$

Las *ecuaciones paramétricas* son

$$\begin{array}{l} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \\ z = p_3 + tv_3 \end{array} .$$

Las *ecuaciones cartesianas simétricas* son $(v_1, v_2, v_3 \neq 0)$

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_3}{v_3}.$$

Las *ecuaciones cartesianas generales* son de la forma

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

Veremos más luego que una recta en el espacio se puede pensar como la intersección de dos planos. En el espacio no tiene sentido hablar de pendientes y ordenada al orígen por eso que no se habla de ecuación cartesiana explícita.

Example 4 *Sean $P = (-2, 3)$ y $Q = (1, -2)$ puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Dar la ecuación vectorial de la recta que pasa por estos dos puntos. Y luego dar todas las demás ecuaciones posibles.*

Ecuación vectorial: Calculamos el vector director $Q - P = (3, -5)$ y luego la ecuación vectorial es

$$(x, y) = (-2, 3) + t(3, -5)$$

Ecuaciones paramétricas escalares:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$$

Ecuación cartesiana simétrica:

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 3}{-5}$$

Ecuación cartesiana implícita:

$$-5x - 3y = 1$$

Ecuación cartesiana explícita:

$$y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$$

Ecuación segmentaria:

$$\frac{x}{-1/5} + \frac{y}{-1/3} = 1$$

Example 5 *Sean* $P = (-2, 1, 3)$ *y* $Q = (1, 1, -2)$ *puntos del espacio* $\mathbb{R}^3$*. Dar la ecuación vectorial de la recta que pasa por ambos y luego dar todas las demás ecuaciones posibles.*

Ecuación vectorial: Calculemos el vector director $Q - P = (3, 0, -5)$ y luego la ecuación vectorial es

$$(x, y, z) = (-2, 1, 3) + t(3, 0, -5)$$

Ecuaciones paramétricas escalares:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = -2 + 3t \\ y = 1 \\ z = 3 - 5t \end{array} \right.$$

Ecuaciones cartesianas:

Despejamos t de la primera y tercera ecuación anteriores y escribimos la segunda:

$$\left\{ \begin{array}{c} y = 1 \\ -5x - 3z = 1 \end{array} \right. .$$