

RESUMEN FÍSICA II

UNIDAD 1: CAMPO ELÉCTRICO Y LEY DE GAUSS

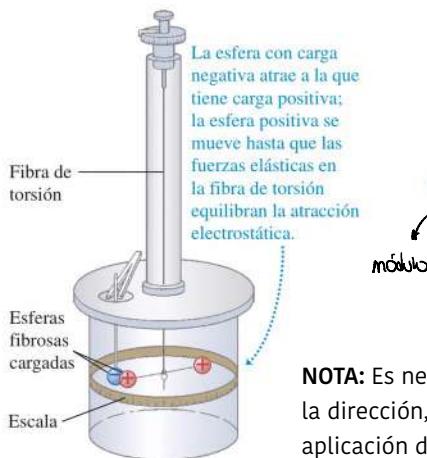
1.2

LEY DE COULOMB

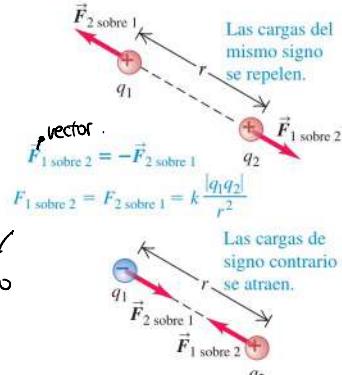
Según Rochetti, expresa la interacción entre cargas PUNTUALES en el vacío. (No son cargas puntuales porque no están concentradas en un punto)

21.10 a) Medición de la fuerza eléctrica entre cargas puntuales. b) Las fuerzas eléctricas entre cargas puntuales obedecen la tercera ley de Newton:
 $\vec{F}_{1 \text{ sobre } 2} = -\vec{F}_{2 \text{ sobre } 1}$

a) Balanza de torsión del tipo utilizado por Coulomb para medir la fuerza eléctrica



b) Interacciones entre cargas puntuales



NOTA: Es necesario establecer el módulo, la dirección, el sentido y el punto de aplicación de cada fuerza.

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

Aclaraciones:

- Se utiliza la notación de valor absoluto ya que la magnitud de la fuerza es siempre positiva.
- Cuando las cargas tienen el mismo signo, hablamos de repulsión, y cuando es distinto, atracción.
- Las fuerzas generadas cumplen con la 3º Ley de Newton. TIENEN IGUAL MAGNITUD Y DIRECCIÓN OPUESTA, aunque las cargas no tengan = magnitud.
- La constante "k" varía según el sistema de unidades empleado. Como nosotros usamos el S.I.,

$$k = 8.987551787 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \approx 8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

En unidades del SI., podemos escribir k como $1/4\pi\epsilon_0$, donde ϵ_0 es otra constante $= 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ que representa la permitividad eléctrica del vacío.

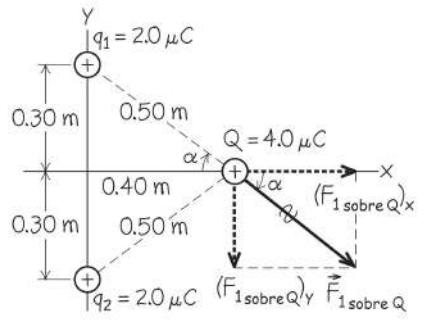
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (\text{ley de Coulomb: fuerza entre dos cargas puntuales}) \quad (21.2)$$

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Los experimentos demuestran que cuando dos cargas ejercen fuerzas de manera simultánea sobre una tercera carga, la fuerza total que actúa sobre esa carga es la *suma vectorial* de las fuerzas que las dos cargas ejercerían individualmente. Esta propiedad importante, llamada **principio de superposición de fuerzas**, se cumple para cualquier número de cargas.

$$(F_{1 \text{ sobre } Q})_x = (F_{1 \text{ sobre } Q}) \cos \alpha = (0.29 \text{ N}) \frac{0.40 \text{ m}}{0.50 \text{ m}} = 0.23 \text{ N}$$

$$(F_{1 \text{ sobre } Q})_y = -(F_{1 \text{ sobre } Q}) \sin \alpha = -(0.29 \text{ N}) \frac{0.30 \text{ m}}{0.50 \text{ m}} = -0.17 \text{ N}$$



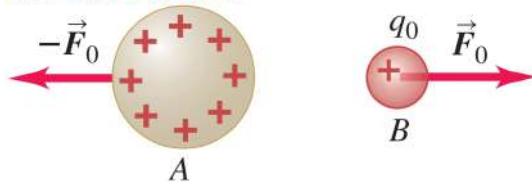
$$\begin{aligned} F_x &= 0.23 \text{ N} + 0.23 \text{ N} = 0.46 \text{ N} \\ F_y &= -0.17 \text{ N} + 0.17 \text{ N} = 0 \end{aligned}$$

La fuerza total sobre Q está en la dirección $+x$, con magnitud de 0.46 N.

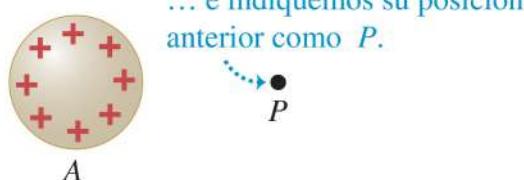
1.3

CAMPO ELECTRICO

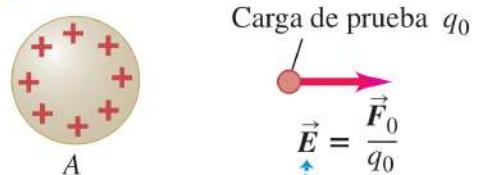
a) Los cuerpos A y B ejercen fuerzas eléctricas uno sobre el otro.



b) Quitemos el cuerpo B ...



c) El cuerpo A genera un campo eléctrico \vec{E} en el punto P.



\vec{E} es la fuerza por unidad de carga que el cuerpo A ejerce sobre una carga de prueba situada en P.

A y B son dos cargas puntiformes. Cuando las acercamos, aparecen fuerzas, de repulsión en este caso.

B es denominada carga de prueba, y es lo más pequeña posible para que su incidencia en las propiedades físicas del espacio. Las cargas de prueba son siempre positivas.

Si retiramos la carga B, en el punto P se observa una propiedad física generada por A

NOTA: Cuando una carga eléctrica genera un campo eléctrico, este no afecta a la carga que lo produjo, pero si a las demás

Entonces, aprovechando la proporcionalidad de \vec{F}_0 y q_0 , obtenemos la expresión mostrada.

Podemos decir que \vec{E} representa la propiedad física generada en P debido a la carga A. Esta propiedad se denomina

CAMPO ELECTRICO
porque es una porque es generado
propiedad extendida por una carga eléctrica.
al espacio

La fuerza eléctrica sobre un cuerpo cargado es ejercida por el campo eléctrico que otros cuerpos cargados originan.

Como necesitamos que q_0 sea lo más pequeña posible, podemos definir a \vec{E} como:

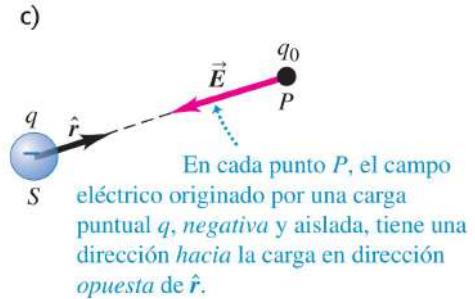
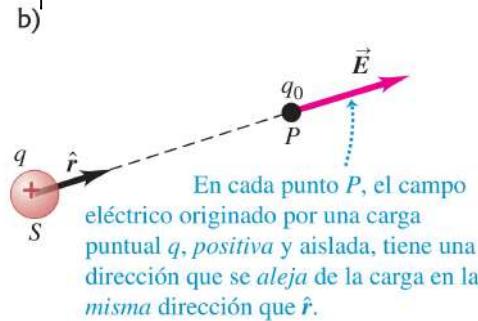
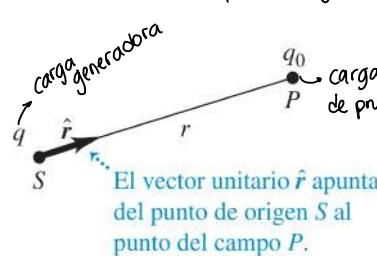
$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

Esta es la expresión más general del campo.

Podemos decir que un campo eléctrico en cierto punto es igual a la FUERZA ELÉCTRICA POR UNIDAD DE CARGA que una carga experimenta en dicho punto.

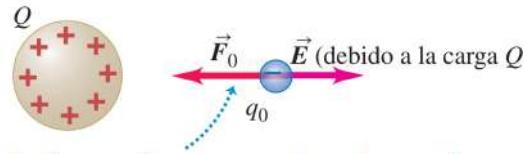
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \quad (\text{definición de campo eléctrico como fuerza eléctrica por unidad de carga})$$

Si aplicamos la definición general a la Ley de Coulomb:

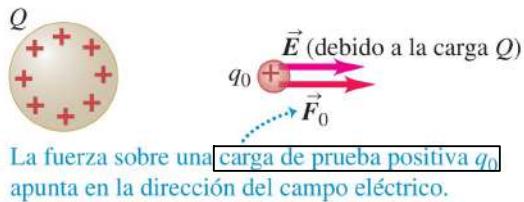


Los campos eléctricos generan fuerzas eléctricas:

21.16 Fuerza $\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}$ ejercida sobre una carga puntual q_0 colocada en un campo eléctrico \vec{E} .



$$\vec{F}_0 = q_0 \vec{E}$$



La fuerza sobre una **carga de prueba positiva q_0** apunta en la dirección del campo eléctrico.

NOTA: Esta expresión solo sirve para cargas de prueba PUNTUALES

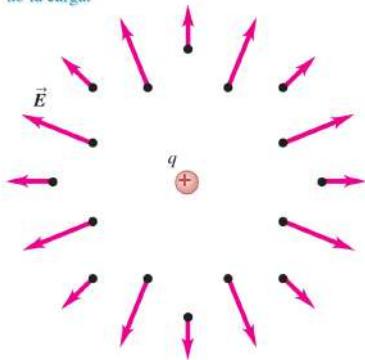
Entonces, reemplazando obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (\text{campo eléctrico de una carga puntual})$$

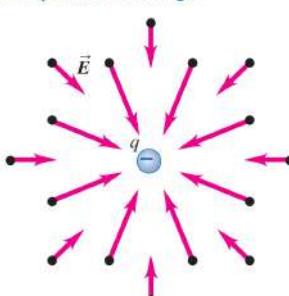
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} \quad (\text{magnitud del campo eléctrico en una carga puntual})$$

Representaciones del vector \vec{E} en el espacio:

a) El campo producido por una carga puntual positiva apunta en una dirección que se aleja de la carga.



b) El campo producido por una carga puntual negativa apunta hacia la carga.



En cada punto, la dirección coincide con la de la distancia radial

El Principio de Superposición también funciona para campos eléctricos:

Necesitamos decir que una distribución de cargas está constituida por muchas cargas puntuales q_1, q_2, \dots . En cualquier punto P , cada carga produce su propio campo eléctrico $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots$. Entonces si colocamos una carga de prueba en P , tenemos que esta experimenta $\vec{F}_i = q_0 \vec{E}_i$. Del Principio de superposición de fuerzas, sabemos:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = q_0 \vec{E}_1 + q_0 \vec{E}_2 + q_0 \vec{E}_3 + \dots$$

Entonces, podemos usar la definición de campo eléctrico y decir:

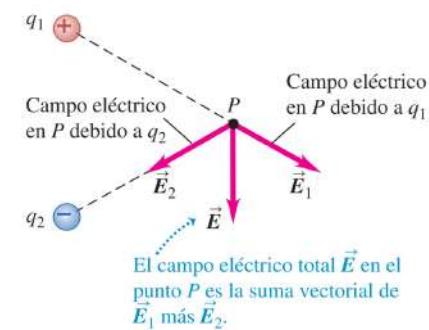
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

DIPOLO ELÉCTRICO

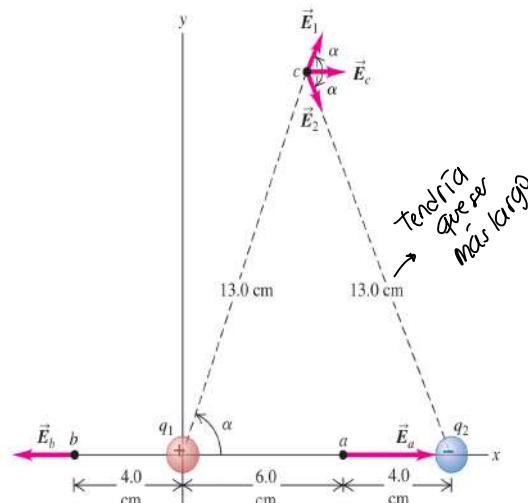
Es el caso de dos cargas de igual módulo y de signos contrarios a una distancia fija. Estudiaremos como afecta este dipolo a puntos que se encuentran a una distancia mucho mayor ($100x$)

En todos los puntos de un plano perpendicular a la distancia entre las cargas y que pasa por el punto C , el campo eléctrico generado va a estar siempre orientado a la carga negativa, y va a ser paralelo a la distancia entre las cargas

21.22 Ilustración del principio de superposición de campos eléctricos.

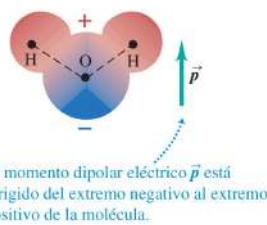


21.23 Campo eléctrico en tres puntos, a, b y c , originado por las cargas q_1 y q_2 , lo que constituye un dipolo eléctrico.



21.31 a) Una molécula de agua es un ejemplo de dipolo eléctrico. b) Cada tubo de ensayo contiene una solución de diferentes sustancias en agua. El momento dipolar eléctrico grande del agua la convierte en un magnífico solvente.

a) Una molécula de agua, con la carga positiva en color rojo, y la carga negativa en azul



$$\vec{p} = qd = \text{momento dipolar eléctrico.}$$

$$p = 6.13 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m. momento dipolar eléctrico para H}_2\text{O}$$

Si ahora tomamos un dipolo que está en un \vec{E} uniforme, vemos en la figura que aparecen fuerzas que afectan a ambas cargas, pero en sentido opuesto, generando una culpa o par de torsión y se calcula

$$\tau = (qE)(d \sin \phi) \implies \tau = pE \sin \phi$$

$$\text{y nos queda } \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (\text{N.m})$$

Como es producto vectorial, $\vec{\tau}$ es perpendicular a \vec{E} y apunta hacia adentro de la hoja en este caso

Ahora podemos calcular la energía potencial:

El trabajo dW realizado por un par de torsión τ durante un desplazamiento infinitesimal $d\phi$ está dado por la ecuación

$$dW = \tau d\phi \text{ y como el par de torsión } \tau \text{ está en la dirección en que } \phi \text{ disminuye, tenemos } -pE \sin \phi d\phi$$

En un desplazamiento finito de ϕ_1 a ϕ_2 , el trabajo total realizado sobre el dipolo es

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE \sin \phi) d\phi \\ = pE \cos \phi_2 - pE \cos \phi_1$$

Sabemos que el trabajo es el negativo del cambio de la energía potencial

$$W = U_1 - U_2$$

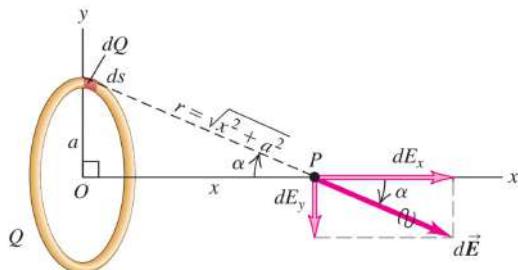
Entonces, podemos decir: $U(\phi) = -pE \cos \phi$ y como esto es un producto escalar,

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

La energía potencial tiene su valor mínimo $U = -pE$ (es decir, su valor más negativo) en la posición de equilibrio estable, donde $\phi = 0$ y \vec{p} es paralelo a \vec{E} . La energía potencial es máxima cuando $\phi = \pi$ y \vec{p} es antiparalelo a \vec{E} ; entonces $U = +pE$. En $\phi = \pi/2$, donde \vec{p} es perpendicular a \vec{E} , U es igual a cero.

CAMPO ELECTRICO DE UN ANILLO DE CARGA

21.24 Cálculo del campo eléctrico sobre el eje de un anillo de carga. En esta figura, se considera que la carga es positiva.



El anillo tiene que ser de un buen conductor como las cargas están distribuidas uniformemente, podemos plantear una. Si integrámos a lo largo del anillo, solo se suman las componentes en x. Entonces:

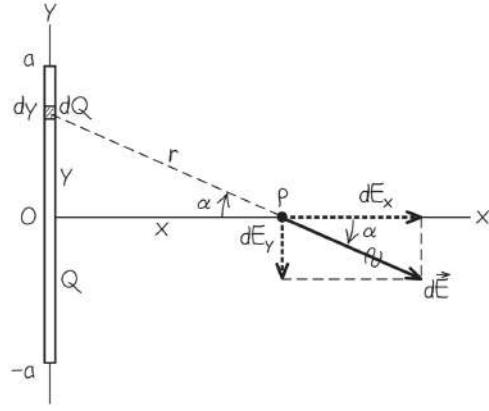
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{x^2 + a^2} \quad . \quad \text{Reemplazando, tenemos} \\ dE_x = dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\text{Integrando: } E_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

, como todos los valores menos dQ son constantes, integramos solo dQ y nos queda Q , que es la carga total.

$$\vec{E} = E_x \hat{i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (\text{N/C})$$

CAMPO ELECTRICO DE UNA LINEA DE CARGA



$$dQ = \lambda dy = \frac{Q dy}{2a}$$

La distancia r entre este segmento y P es $(x^2 + y^2)^{1/2}$, por lo que la magnitud del campo dE , en P , debido a este segmento es

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dy}{2a(x^2 + y^2)}$$

Representamos este campo en términos de sus componentes x y y :

$$dE_x = dE \cos \alpha \quad dE_y = -dE \sin \alpha$$

Se observa que $\sin \alpha = y/(x^2 + y^2)^{1/2}$ y $\cos \alpha = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$; que se combinan con la expresión para dE para obtener

$$dE_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y dy}{2a(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Integrando desde $-a$ hasta a , obtenemos

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{2a} \int_{-a}^a \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \int_{-a}^a \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

o, en forma vectorial

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \hat{i} \quad \left(\frac{N}{C}\right)$$

si la linea es infinitamente larga, sabemos que $Q = 2a\lambda$ y si reemplazamos y simplificamos, tenemos:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x\sqrt{(x^2/a^2) + 1}} \hat{i} \quad . \text{ Tomando } \lim \text{ para } a \rightarrow \infty \text{ (por ser infinita la linea)}, \text{ nos queda } \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \hat{i} \quad , \quad y$$

por lo tanto, la magnitud es:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \left(\frac{N}{C}\right)$$

Entonces vemos que el \vec{E} debido a una linea de carga ∞ es $\propto \lambda \frac{1}{r}$

Si λ es positiva, la dirección de \vec{E} es radial hacia fuera con respecto a la recta, y si λ es negativa es radial hacia dentro.

CAMPO ELECTRICO DE UN DISCO DE CARGA UNIFORME (NO CONDUCTOR)

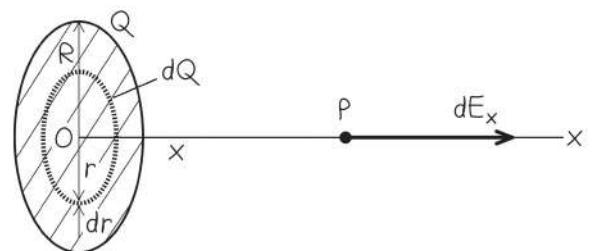
Aplicaremos el resultado del anillo y tomamos una capa de espesor infinitesimal en el disco.

En este caso, $dQ = 2\pi\sigma r dr$, entonces

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2\pi\sigma r dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{Integrando:}$$

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2\pi\sigma r dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{x} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2/x^2) + 1}} \right]$$



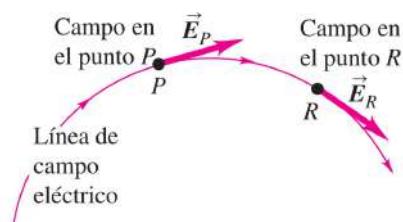
Tambien podemos utilizar esta formula para calcular un campo de un plano infinito c/ carga uniforme, si tomamos $\lim R \rightarrow \infty$ y esto es igual a $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

1.5

LINEAS DE CAMPO (Faraday las llamó líneas de fuerza, pero este nombre es más apropiado)

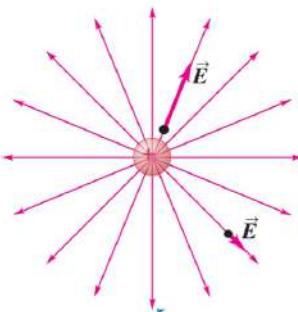
Una linea de campo eléctrico es una recta o curva imaginaria trazada a través de una región del espacio, de modo que es tangente en cualquier punto que esté en la dirección del vector del campo eléctrico en dicho punto.

21.28 La dirección del campo eléctrico en un punto cualquiera es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto.



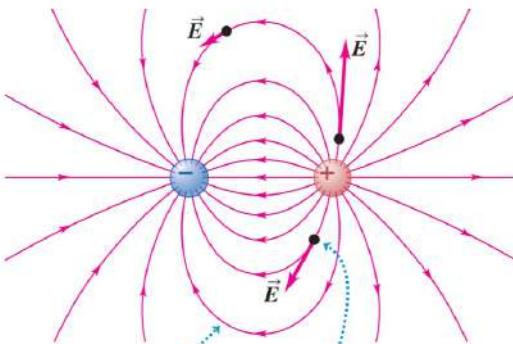
21.29 Líneas de campo eléctrico para tres diferentes distribuciones de carga. En general, la magnitud de \vec{E} es diferente en distintos puntos a lo largo de una línea de campo dada.

a) Una sola carga positiva



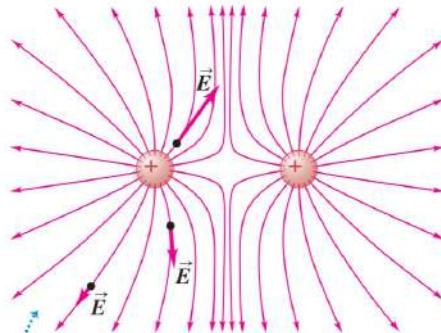
Las líneas de campo siempre apuntan alejándose de las cargas (+) y hacia las cargas (-).

b) Dos cargas iguales y opuestas (un dipolo)



En cada punto en el espacio, el vector de campo eléctrico es tangente a la línea de campo que pasa a través de ese punto.

c) Dos cargas positivas iguales



Las líneas de campo están muy cercanas donde el campo es intenso, y más alejadas donde el campo es débil.

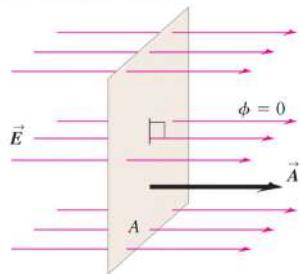
Todas las líneas de campo siempre terminan en alguna carga, que puede ser visible o estar en el infinito. Las líneas de campo NUNCA se van a cruzar entre sí, porque eso significaría que hay dos valores de campo en dicho punto, lo cual es imposible. **Figura b:** si la **q**positiva es de mayor magnitud, hay más líneas que no van a terminar en la negativa. Si la negativa fuera más grande, más líneas van a terminar en ella.

FLUJO DE CAMPO ELÉCTRICO A TRAVÉS DE SUPERFICIES CERRADAS Y ABIERTAS

22.6 Una superficie plana en un campo eléctrico uniforme. El flujo eléctrico Φ_E a través de la superficie es igual al producto escalar del campo eléctrico \vec{E} y el vector de área \vec{A} .

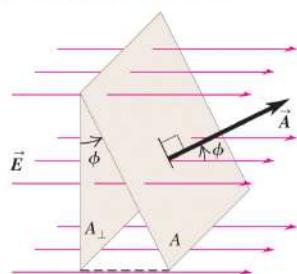
a) La superficie está de frente al campo eléctrico:

- \vec{E} y \vec{A} son paralelos (ángulo entre \vec{E} y \vec{A} es $\phi = 0^\circ$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.



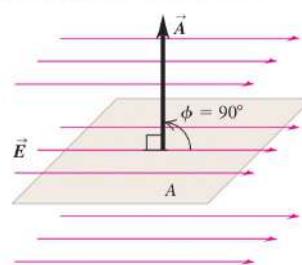
b) La superficie está inclinada un ángulo ϕ respecto de la orientación de frente:

- El ángulo entre \vec{E} y \vec{A} es ϕ .
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.



c) La superficie está de canto en relación con el campo eléctrico:

- \vec{E} y \vec{A} son perpendiculares (el ángulo entre \vec{E} y \vec{A} es $\phi = 90^\circ$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90^\circ = 0$.



La dirección de un vector de área se puede representar con \vec{A} empleando un vector unitario \hat{n} perpendicular al área; \hat{n} significa "normal". De esta forma,

$$\vec{A} = A\hat{n}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Phi_E = EA \cos \phi$$



$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

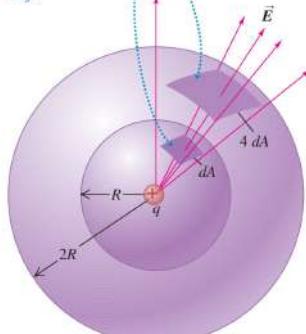
1.6 INTEGRAL DE GAUSS

Si el campo NO es uniforme como arriba, hay que integrar, y nos queda la siguiente fórmula:

$$\Phi_E = \int E \cos \phi \, dA = \int E_{\perp} \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Utilizar una integral de superficie, por lo que nos queda

A través de estos dos elementos de área pasa el mismo número de líneas de campo y el mismo flujo.



22.11 Proyección de un elemento de área dA de una esfera de radio R sobre una esfera concéntrica de radio $2R$. La proyección multiplica las dimensiones lineales por 2, por lo que el elemento de área sobre la esfera más grande es $4dA$.

Ahora, si tomamos una superficie cerrada que tenga una carga adentro, podemos tomar una superficie esférica concéntrica a la carga (radio = doble que el centro). En una superficie, la intensidad de campo va a ser constante porque todos los puntos están ubicados a la misma distancia. Además, el ángulo ϕ entre el vector \vec{E} y el $d\vec{A}$ van a ser paralelos en toda la superficie, por lo que $\cos \phi = 1$ y la integral nos queda $E \cdot \int dA = EA$.

$$\Phi_E = \oint E_\perp dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ para } q^+$$

$$\Phi_E = \oint E_\perp dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}, \text{ para } q^-$$

Generalizando esto,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0 .

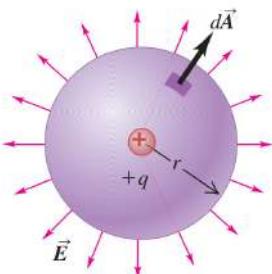
(ley de Gauss), entonces sabemos que no importa la forma de la superficie, porque el flujo siempre va a ser el mismo.

Aplicaciones:

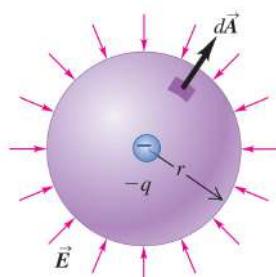
CARGAS PUNTIFORMES

22.14 Superficies gaussianas esféricas alrededor de a) una carga puntual positiva y b) una carga puntual negativa.

a) Superficie gaussiana alrededor de una carga positiva: flujo positivo (saliente)



b) Superficie gaussiana alrededor de una carga negativa: flujo negativo (entrante)



Necesitamos tomar una superficie que cumpla 2 condiciones:

- 1) Que el punto a analizar se encuentre sobre la superficie
- 2) Que la superficie tenga simetría suficiente para poder resolver la integral (una esfera concentrada a la carga en este caso)

Si cumple con las dos condiciones, tenemos una **SUPERFICIE GAUSSIANA**.

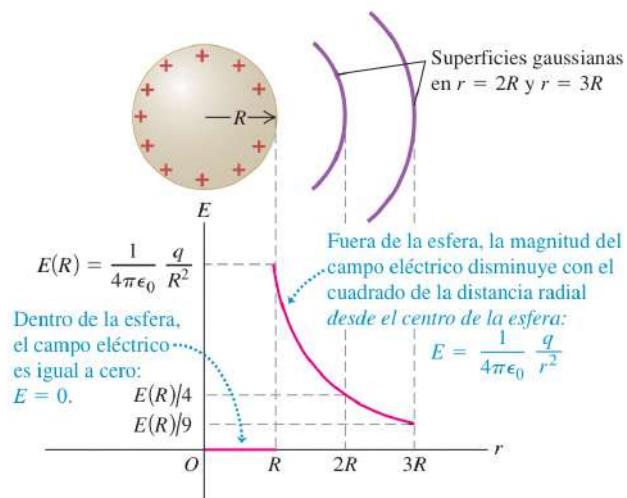
Tomando la expresión anterior para una q^+

$$\Phi_E = \oint E_\perp dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ si despejamos el campo, tenemos } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

y aquí vemos que la ley de Coulomb es un caso específico de la Ley de Gauss. Hacemos el mismo procedimiento para la q^- .

ESFERA CONDUCTORA CARGADA

22.18 Cálculo del campo eléctrico de una esfera conductora con carga positiva q . Fuera de la esfera, el campo es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera.



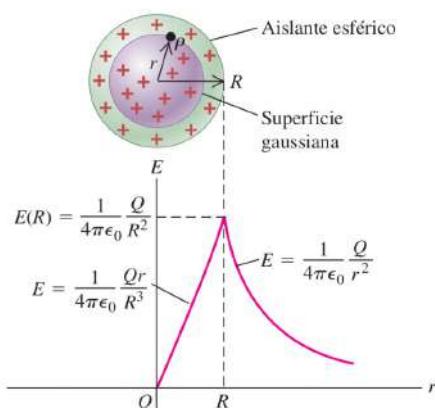
Son cargas ahora distribuidas, ya no son puntiformes. Las cargas se distribuyen de manera homogénea sobre la superficie de la esfera, a una distancia máxima entre ellas porque se repelen. Aplicando una superficie gaussiana esférica podemos calcular el campo.

Hay 3 situaciones:

$r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$	$\left(\frac{N}{C}\right)$
$r = R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$	
$r < R$	$Q_{\text{enc}} = 0, E = 0$	

ESFERA NO CONDUCTORA CARGADA

22.22 Magnitud del campo eléctrico de una esfera aislante con carga uniforme. Compare esto con el campo de una esfera conductora (figura 22.18).



Las cargas están distribuidas en todo el volumen de la misma, por lo que tenemos densidad volumétrica $\rho = \frac{q}{V} \left(\frac{C}{m^3} \right)$ $Q_{\text{enc}} = \rho V_{\text{enc}} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3} \right) \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) = Q \frac{r^3}{R^3}$

Entonces, la Ley de Gauss nos queda:

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \quad \text{o bien, } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}, \quad \text{entonces tenemos 4 casos:}$$

$(r = 0), E = 0$	$r > R, E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$	$r < R, E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$
$r = R, E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$		

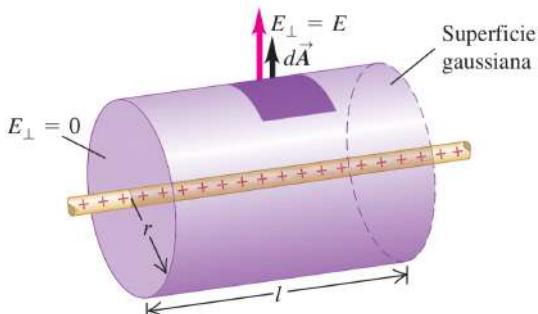
DISTRIBUCION RECTILINEA DE CARGAS

Alambre conductor infinito. La superficie gaussiana tiene que ser un cilindro. A través de los extremos del cilindro no hay flujo, ya que \vec{E} es paralelo a la superficie. Cuando integramos el área nos queda la superficie circular por la longitud l .

$$\Phi_E = (E)(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad \left(\frac{N}{C} \right) \lambda \quad \text{siempre se toma}$$

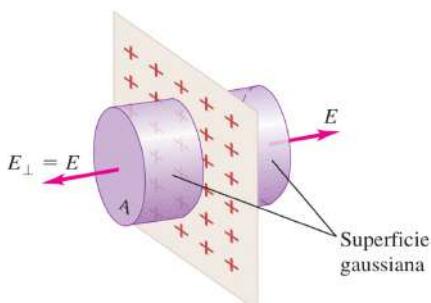
positiva, (se toma la magnitud, $|\lambda|$) aunque la carga sea negativa, por lo que el \vec{E} estaría dirigido hacia adentro.

22.19 Se emplea una superficie gaussiana cilíndrica coaxial para encontrar el campo eléctrico fuera de un conductor cargado de longitud infinita.



LAMINA NO CONDUCTORA CON CARGA DISTRIBUIDA

22.20 Superficie gaussiana cilíndrica que se utiliza para encontrar el campo de una lámina plana infinita cargada.



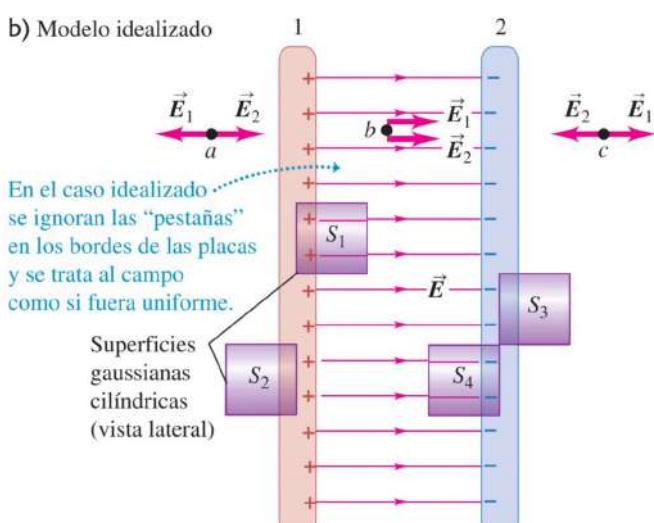
La superficie gaussiana puede ser también un paraleloípedo.

$$\sigma = \text{densidad superficial de cargas} = \frac{q}{\text{Área}}$$

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{N}{C} \right)$$

Como \vec{E} es paralelo a las superficies curvas, no hay flujo en ellas.

b) Modelo idealizado



DOS PLACAS PARALELAS CON CARGAS OPUESTAS

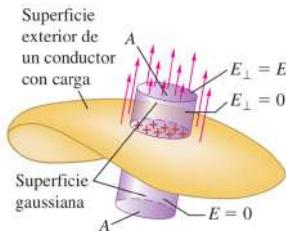
Las superficies gaussianas son cilindros. A través de las paredes laterales de los cilindros no hay flujo porque \vec{E} es paralelo

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$E = 0$ a la izquierda de la placa 1 y a la derecha de la placa 2.

CAMPO EN LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR

22.29 El campo inmediatamente afuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie, y su componente perpendicular E_{\perp} es igual a σ/ϵ_0 .



sobre la cara de 'sativa, el campo eléctrico apunta hacia fuera del conductor y E_{\perp} es positiva; si σ es negativa, el campo eléctrico apunta hacia el interior y E_{\perp} es negativa.) Así, el flujo to-

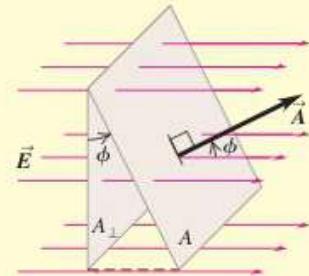
$$E_{\perp}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{campo en la superficie de un conductor})$$

CAPÍTULO 22 RESUMEN

Flujo eléctrico: El flujo eléctrico es una medida del "flujo" del campo eléctrico a través de una superficie. Es igual al producto de un elemento de área por la componente perpendicular de \vec{E} , integrada sobre una superficie. (Véanse los ejemplos 22.1 a 22.3.)

$$\Phi_E = \int E \cos \phi \, dA$$

$$= \int E_{\perp} \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (22.5)$$



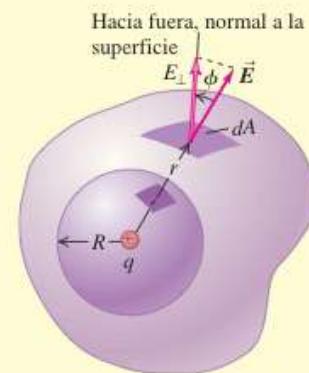
Ley de Gauss: La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada, que se escribe como la integral de superficie de la componente de \vec{E} , que es normal a la superficie, es igual a una constante por la carga total Q_{enc} encerrada por la superficie. La ley de Gauss es un equivalente lógico de la ley de Coulomb, pero su uso simplifica mucho los problemas con un alto grado de simetría. (Véanse los ejemplos 22.4 a 22.10.)

Cuando se coloca carga en exceso en un conductor en reposo, ésta permanece toda en la superficie, y $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos del material del conductor. (Véanse los ejemplos 22.11 a 22.13.)

$$\Phi_E = \oint E \cos \phi \, dA$$

$$= \oint E_{\perp} \, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (22.8), (22.9)$$



Campo eléctrico de varias distribuciones simétricas de carga: En la siguiente tabla se listan los campos eléctricos generados por varias distribuciones simétricas de carga. En la tabla, q , Q , λ y σ se refieren a las *magnitudes* de las cantidades.

Distribución de la carga	Punto en el campo eléctrico	Magnitud del campo eléctrico
Una sola carga puntual	Distancia r desde q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
Carga q en la superficie de una esfera conductora de radio R	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = 0$
Alambre infinito, carga por unidad de longitud λ	Distancia r desde el alambre	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
Cilindro conductor infinito con radio R , carga por unidad de longitud λ	Cilindro exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
	Cilindro interior, $r < R$	$E = 0$
Esfera aislante sólida con radio R , carga Q distribuida de manera uniforme en todo el volumen	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$
Placa infinita cargada con carga uniforme por unidad de área σ	Cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Dos placas conductoras con cargas opuestas con densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$	Cualquier punto entre las placas	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

UNIDAD 2: POTENCIAL Y ENERGIA DEL CAMPO ELECTRICO

2.1

TRABAJO DE FORMACIÓN DE UN SISTEMA DE DOS CARGAS PUNTIFORMES. GENERALIZACION. ENERGÍA POTENCIAL ELECTROSTÁTICA.

Sabemos que el trabajo realizado por una fuerza se calcula como

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F \cos \phi \, dl$$

Si la fuerza es conservativa, podemos hacer

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U$$

→ En este caso es negativo porque el estado de energía final > inicial

$$K_a + U_a = K_b + U_b \rightarrow \text{TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA}$$

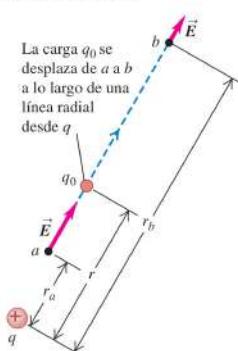
Si tenemos un campo eléctrico UNIFORME, tomamos una partícula que se mueve por la fuerza debida a la acción del campo, que es cte. porque el campo y la carga lo son. A medida que viaja, la energía potencial que tiene la carga se va transformando en energía cinética. Cuando toca la placa negativa, la $U=0$ y la $E_p=\text{máx}$. Como las fuerzas Coulombianas son conservativas, el trabajo realizado es **Independiente del camino recorrido**, entonces:

$$W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) = -(q_0 E y_b - q_0 E y_a) = q_0 E (y_a - y_b)$$

- Regla general:
- U aumenta si la carga de prueba q_0 se mueve en sentido opuesto a la fuerza eléctrica. (Esto pasa porque hay un trabajo externo actuando sobre el sistema y queda almacenado en U .)
 - U disminuye si la carga de prueba q_0 se mueve en el mismo sentido que la fuerza eléctrica. (Acá la partícula se desplaza solo por acción de la fuerza eléctrica.)

Caso: dos cargas puntiformes:

23.5 La carga de prueba q_0 se desplaza a lo largo de una línea recta que se extiende en forma radial desde la carga q . Conforme se desplaza de a a b , la distancia varía de r_a a r_b .



La intensidad de campo decrece con el cuadrado de la distancia, y por consiguiente, el trabajo también varía, y lo calculamos como

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \rightarrow \text{componente radial de la fuerza, que viene dada por la Ley de Coulomb}$$

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = U_b - U_a$$

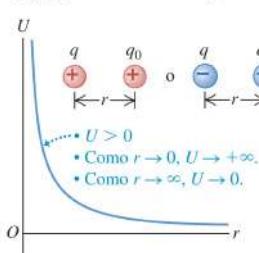
Ahora tomamos un caso más complicado, porque q_0 ahora no sigue la trayectoria de una línea de campo. En este caso, tenemos:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} F \cos \phi \, dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \cos \phi \, dl = U_b - U_a$$

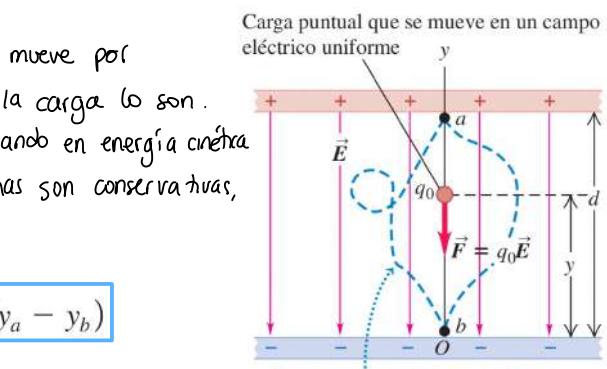
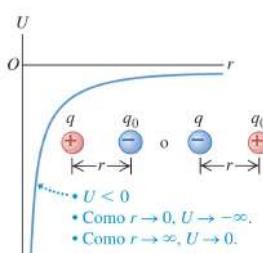
Podemos conducir entonces:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}$$

a) q y q_0 tienen el mismo signo

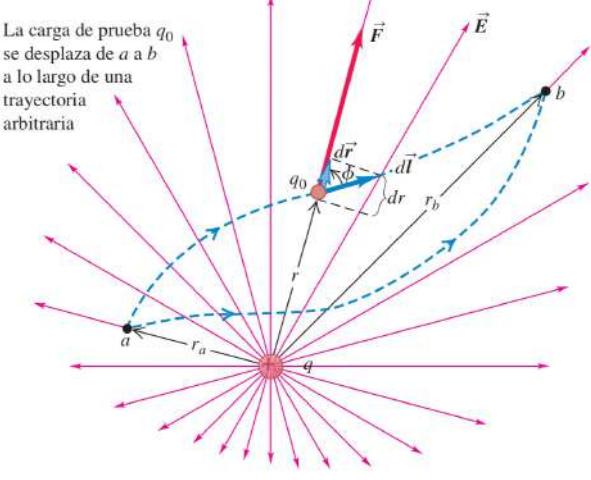


b) q y q_0 tienen signos opuestos



El trabajo realizado por la fuerza eléctrica es el mismo para cualquier trayectoria de a a b :

$$W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = q_0 Ed.$$



Si hay varias cargas puntiformes, se aplica el principio de superposición, y nos queda.

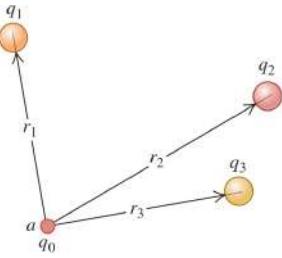
$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots \right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

→ Esta expresión supone que el sistema (q_1, q_2, q_3) ya está formado y que se trae a q_0 desde el infinito.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

→ En cambio, esta fórmula contempla el armado de todo el sistema.

23.8 La energía potencial asociada con la carga q_0 en el punto a depende de las otras cargas q_1, q_2 y q_3 y de sus distancias r_1, r_2 y r_3 desde el punto a .



2.2 POTENCIAL ELÉCTRICO Y DIFERENCIA DE POTENCIAL

Potencial eléctrico

Es la energía por unidad de carga. $V = \frac{U}{q_0}$ o bien, $U = q_0 V$. Se mide en Volt. $1[V] = 1[Joule/Coulomb]$

Diferencia de Potencial: $V_{ab} = V_a - V_b$

$$\text{Es lógico entonces } \frac{W_{a \rightarrow b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b$$

También podemos expresar el trabajo en función del campo:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos \phi \, dl$$

$$\Rightarrow - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

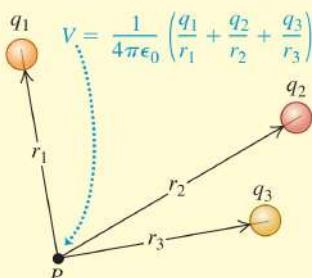
2.3

POTENCIAL DEBIDO A DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE CARGAS PUNIFORMES

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

(23.14)

(debido a una carga puntual)



$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

(23.15)

(debido a un conjunto de cargas puntuales)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

(23.16)

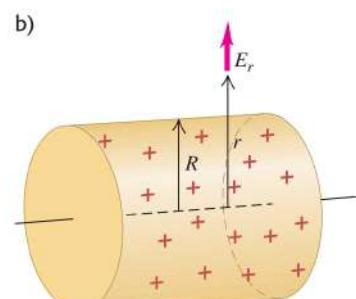
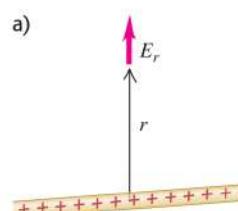
(debido a una distribución de carga)

POTENCIAL DEBIDO A DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGAS

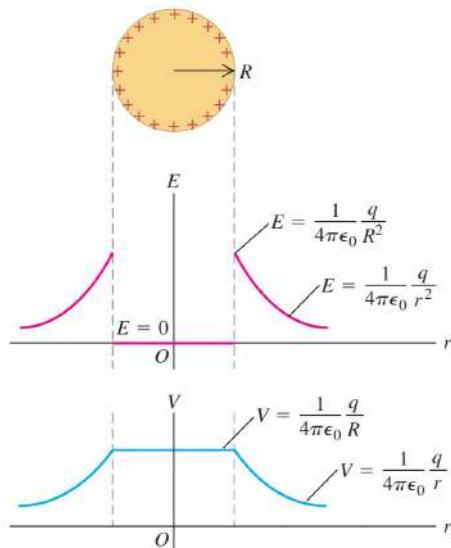
Línea infinita de carga o cilindro conductor

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

23.20 Campo eléctrico afuera de a) un alambre largo con carga positiva, y b) un cilindro largo con carga positiva.



Esfera conductora cargada



$r < R:$ $E = 0 \rightarrow F = 0$ $\rightarrow W_{AB} = 0 = U_A - U_B$ $\therefore V_A - V_B = 0 \rightarrow V_A = V_B = cte$	$r \geq R:$ $V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ El valor máximo de potencial eléctrico es para $r = R$: $V_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} = RE_m$ Entonces: $r \leq R: V_A = V_B = cte = V_m$
---	--

Esfera no conductora cargada

ESFERA NO CONDUCTORA

Densidad volumétrica de carga:

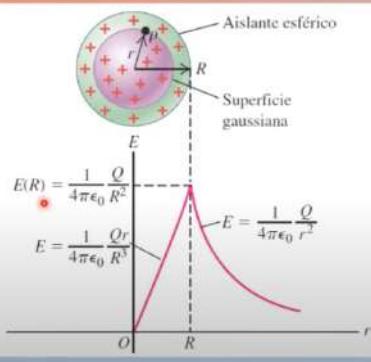
$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3 / 3}$$

Campo eléctrico en el interior:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r$$

Campo eléctrico en el exterior:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$



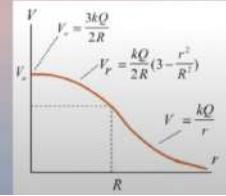
$r \leq R:$

$$V_r - V_R = - \int_R^r \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr = \int_r^R \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr = \frac{1}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2}\right)|_r^R = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right)$$

$$V_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right) + V_R$$

$r \geq R:$

$$V_r - V_\infty = - \int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r}\right)|_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$



2.4

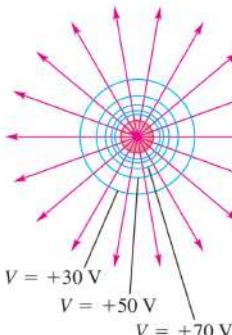
SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES. EQUIPOTENCIALES Y CONDUCTORES

Son superficies imaginarias en las que el valor del potencial es igual en todos sus puntos. Eso significa que si tomamos una carga y la aplicamos a un punto de una sup. equipotencial, la podemos trasladar alrededor de esta sin trabajo, ya que la diferencia de potencial es igual a cero, entonces no hay gasto de energía, por lo que $W = 0$. Pero a su vez, si desplazamos la carga a través de otras superficies equipotenciales pero llegamos a la misma de donde salimos, como el trabajo depende de los estados inicial y final de energía, y como estos son iguales, W sigue siendo cero. (porque son fuerzas conservativas)

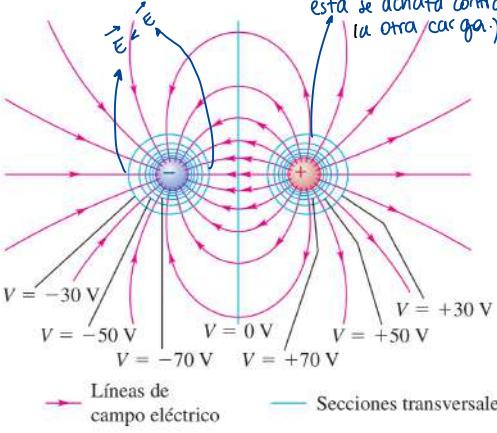
CUIDADO E no necesita ser constante sobre una superficie equipotencial

Las superficies equipotenciales NO se cruzan entre sí, y siempre son PERPENDICULARES a las líneas de campo (esto genera que el producto escalar entre F y $d\ell$ va a ser cero). Dependiendo la carga ($+q$ o $-q$), las superficies van a tener de potencial positivo o negativo.

a) Una sola carga positiva

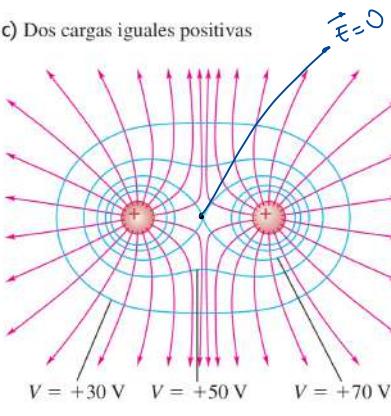


b) Un dipolo eléctrico

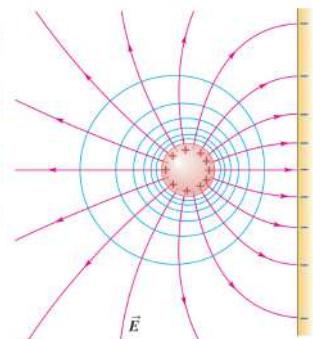


(en este caso, a medida que la s.e. es más grande, esta se achata contra la otra carga.)

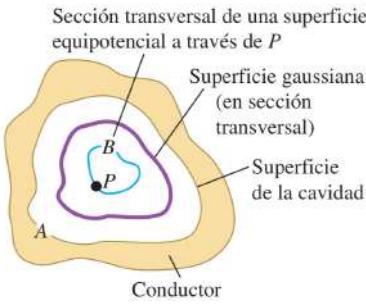
c) Dos cargas iguales positivas



23.25 Cuando las cargas están en reposo, una superficie conductora siempre es una superficie equipotencial. Las líneas de campo son perpendiculares a una superficie conductora.



23.27 Cavidad en un conductor. Si la cavidad no contiene carga, todos los puntos de tal cavidad están al mismo potencial, el campo eléctrico es igual a cero en cualquier lugar de ella, y no hay carga en ningún lugar sobre su superficie.



Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial.

Cuando todas las cargas están en reposo, el campo eléctrico justo afuera de un conductor debe ser perpendicular a la superficie en cada punto

2.5 GRADIENTE DE POTENCIAL

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_b^a dV = - \int_a^b dV , \quad \text{Integrando, tenemos: } -dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

En componentes, tenemos $\vec{E} = \hat{i} E_x + \hat{j} E_y + \hat{k} E_z$ y $d\vec{l} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz$.

y reemplazando nos queda: $-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$. Si derivamos parcialmente la expresión respecto a

cada dirección, nos queda: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$. En términos de vectores unitarios,

Escribimos \vec{E} como $\vec{E} = -\left(\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ (1) (\vec{E} en términos de V) \Rightarrow GRADIENTE DE POTENCIAL

$\vec{\nabla}f = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right)f$ A esta operación se la llama gradiente de la función f , y transforma un escalar en un vector.

Entonces podemos decir que " \vec{E} ES IGUAL AL GRADIENTE NEGATIVO DE V ".

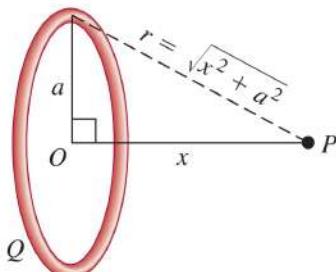
Según Rocheiti: $E \cdot \cos \phi = -\frac{dV}{dl} = E \cdot l$. Podemos derivar en muchas direcciones, pero la derivada direccional será máxima en la dirección del campo: $E = -\left|\frac{dV}{dl}\right|_{\max}$. Ahora: $\left|\frac{dV}{dl}\right|_{\max} = \text{grad } V$, entonces $E = -\text{grad } V$

Ahora bien, (1) se puede escribir como $-\nabla V$, donde $\nabla = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}\right)$. A eso se lo llama

OPERADOR NABLA, y transforma un escalar en un vector.

- Hay 3 usos importantes de ∇ :
- ① cuando opera sobre un escalar, tenemos el GRADIENTE
 - ② cuando opera sobre un vector, a través de producto escalar (\bullet), da la DIVERGENCIA
 - ③ cuando opera sobre un vector, a través de producto vectorial (\times), da el ROTOR

Campo y potencial en un anillo de carga



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

En este caso, el campo \vec{E} tiene una sola componente (x), entonces:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

[NOTA: Aunque y y z no están incluidos, no podemos suponer que $y = z = 0$, porque la expresión esta solo es válida para puntos sobre el eje x. (porque solo tenemos la expresión de V_x)]

CAPÍTULO 23 RESUMEN

Energía potencial eléctrica: La fuerza eléctrica causada por cualquier conjunto de cargas es una fuerza conservativa. El trabajo W realizado por la fuerza eléctrica sobre una partícula con carga que se mueve en un campo eléctrico se representa por el cambio en una función de energía potencial U .

La energía potencial eléctrica para dos cargas puntuales q y q_0 depende de su separación r . La energía potencial eléctrica para una carga q_0 en presencia de un conjunto de cargas q_1, q_2, q_3 depende de la distancia de q_0 a cada una de las demás cargas. (Véanse los ejemplos 23.1 y 23.2.)

Potencial eléctrico: El potencial, denotado por V , es energía potencial por unidad de carga. La diferencia de potencial entre dos puntos es igual a la cantidad de trabajo que se requeriría para trasladar una unidad de carga de prueba positiva entre esos puntos. El potencial V debido a una cantidad de carga se calcula mediante una suma (si la carga es un conjunto de cargas puntuales) o mediante integración (si la carga es una distribución). (Véanse los ejemplos 23.3, 23.4, 23.5, 23.7, 23.11 y 23.12.)

La diferencia de potencial entre dos puntos a y b , también llamada *potencial de a con respecto a b* , está dado por la integral de línea de \vec{E} . El potencial de un punto dado se encuentra obteniendo primero \vec{E} y después resolviendo la integral. (Véanse los ejemplos 23.6, 23.8, 23.9 y 23.10.)

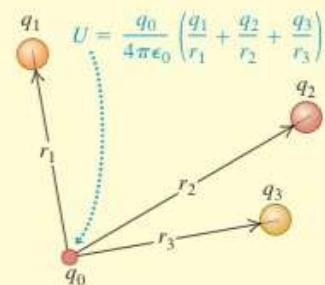
$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b \quad (23.2)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} \quad (23.9)$$

(dos cargas puntuales)

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots \right) \quad (23.10)$$

$(q_0$ en presencia de otras cargas puntuales)



$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (23.14)$$

(debido a una carga puntual)

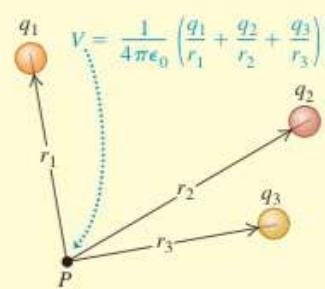
$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.15)$$

(debido a un conjunto de cargas puntuales)

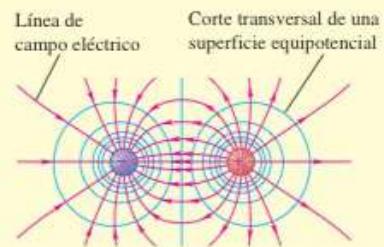
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (23.16)$$

(debido a una distribución de carga)

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos \phi \, dl \quad (23.17)$$



Superficies equipotenciales: Una superficie equipotencial es aquella en la que el potencial tiene el mismo valor en cada punto. En el punto en que una línea de campo crista una superficie equipotencial, ambas son perpendiculares. Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial y todos los puntos en el interior del conductor están al mismo potencial. Cuando una cavidad dentro de un conductor no contiene carga, toda la cavidad es una región equipotencial y no hay carga superficial en ninguna parte de la superficie de la cavidad.



CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DEL POTENCIAL ELÉCTRICO:

Si se conoce el potencial V como función de las coordenadas x, y y z , las componentes del campo eléctrico \vec{E} en cualquier punto están dadas por las derivadas parciales de V . (Véanse los ejemplos 23.13 y 23.14.)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (23.19)$$

$$\vec{E} = -\left(i \frac{\partial V}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (23.20)$$

(forma vectorial)

UNIDAD 3: CAPACIDAD Y AISLANTES

3.2 Cálculo de capacitancia en:

Capacitor plano (en vacío al medio)

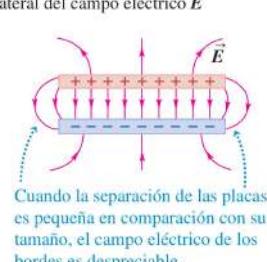
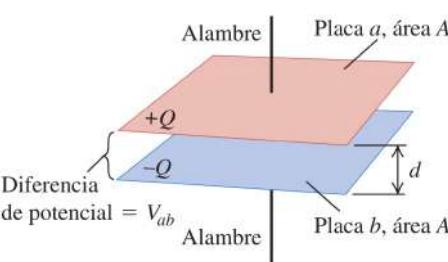
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \quad (\text{definición de capacitancia})$$

Capacitor: Dos conductores separados por un aislante (vacío), que almacena energía.

[1 F = 1 farad = 1 C/V = 1 coulomb/volt]

Suponiendo \vec{E} constante: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ y vimos antes que $V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Qd}{A}$, entonces podemos decir que

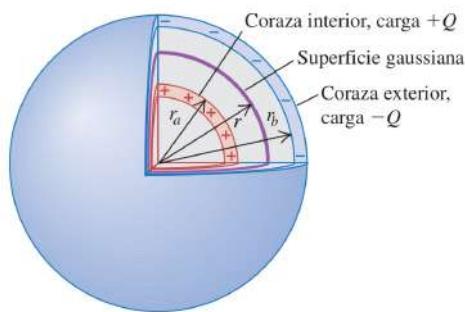
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad [F]$$



Cuando la separación de las placas es pequeña en comparación con su tamaño, el campo eléctrico de los bordes es despreciable.

Capacitor esférico

24.5 Capacitor esférico.



Se toma una superficie gaussiana: Por Ley de Gauss, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$

$$\text{Como } \vec{E} \text{ es cte y } Q_{enc} = Q, \text{ tenemos } (E)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}, \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Como esta expresión es para una carga puntual, podemos usar la de potencial de una carga puntual, y la diferencia de potencial entre las dos esferas es:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

entonces, la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

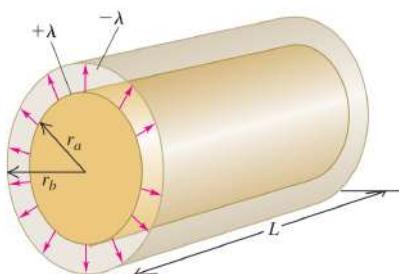
Capacitor cilíndrico

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \text{ y sabemos que en este caso, } E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\lambda}{r} \text{ /}$$

$$\text{y } V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}, \text{ entonces } V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}, \text{ entonces:}$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)} \quad [?]$$

24.6 Un capacitor cilíndrico largo. En esta figura la densidad lineal de carga λ se supone positiva. La magnitud de carga en una longitud L de cualquier cilindro es λL .



3.3

INTERCONEXION DE CAPACITORES

En serie:

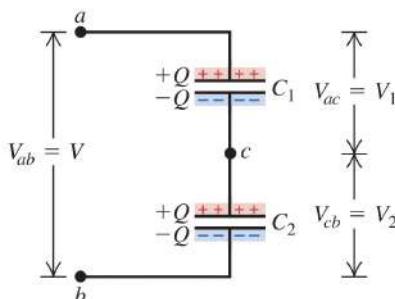
24.8 Conexión en serie de dos capacitores.

a) Dos capacitores en serie

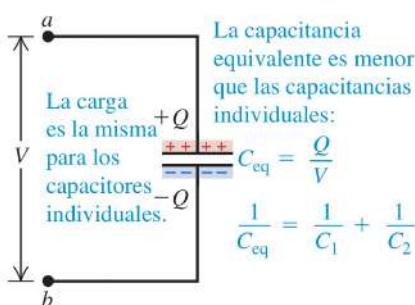
Capacitores en serie:

- Los capacitores tienen la misma carga Q .
- Sus diferencias de potencial se suman:

$$V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}.$$



b) El capacitor equivalente único



Para saber por qué, primero observe que la placa superior de C_1 adquiere una carga positiva Q . El campo eléctrico de esta carga positiva atrae carga negativa hacia la placa inferior de C_1 hasta que todas las líneas de campo que comienzan en la placa superior terminan en la placa inferior. Para ello se requiere que la placa inferior tenga carga $-Q$. Estas cargas negativas tuvieron que venir de la placa superior de C_2 , la cual se carga positivamente con carga $+Q$. Luego, esta carga positiva atrae la carga negativa $-Q$ desde la conexión en el punto b a la placa inferior de C_2 . La carga total en la placa inferior de C_1 y la placa superior de C_2 , en conjunto, debe ser siempre igual a cero porque tales placas sólo están conectadas una con otra y con nada más. Así, en una conexión en serie, la magnitud de la carga en todas las placas es la misma.

Diferencia de Potencial:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} \Rightarrow V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\text{entonces: } \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \text{ y } \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q}. \text{ En general: } \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

$$Q_{eq} = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots$$

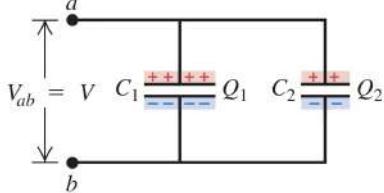
$$V_{total} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

NOTA: ANALIZAR COMO ES UNA CONEXIÓN MIXTA

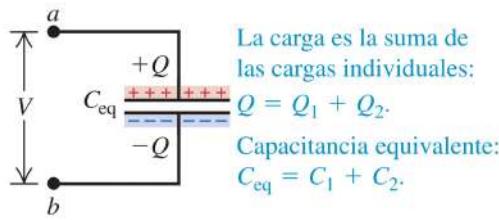
En paralelo

Capacitores en paralelo:

- Los capacitores tienen el mismo potencial V .
- La carga en cada capacitor depende de su capacitancia: $Q_1 = C_1 V$, $Q_2 = C_2 V$.



b) El capacitor equivalente único



$$Q_1 = C_1 V \quad y \quad Q_2 = C_2 V, \quad \text{y}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V,$$

$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

En general: $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots$$

$$V = V_1 = V_2 = \dots$$

3.4 ENERGIA ALMACENADA EN UN CAPACITOR

La energía almacenada es igual al trabajo requerido para cargar el capacitor.

Sean q y v la carga y la diferencia de potencial, respectivamente, en una etapa intermedia del proceso de carga; entonces, $v = q/C$. En esta etapa, el trabajo dW que se requiere para transferir un elemento adicional de carga dq es

El trabajo total W necesario para incrementar la carga q del capacitor, de cero a un valor final Q , es

Entonces:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \quad [\text{J}]$$

$$dW = v dq = \frac{q dq}{C}$$

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

DENSIDAD DE ENERGÍA DEL CAMPO ELÉCTRICO

Se define como la energía por unidad de volumen en el espacio entre las placas paralelas de un capacitor con área A y separación d . (es v dividiendo el volumen)

$u = \text{Densidad de energía} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad}$, pero $C = \epsilon_0 A/d$ y $V = Ed$, entonces

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3}\right]$$

Esto significa que u depende solo de \vec{E} , y concluimos que DONDE HAY UN \vec{E} , HAY ENERGÍA DISTRIBUIDA EN EL ESPACIO

3.6 AISLADORES

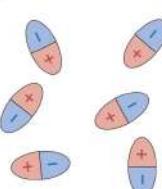
Clasificando los en función de sus propiedades físicas:

- DIÉLECTRICOS \rightarrow ① Isotropos: los fenómenos eléctricos ocurren sin importar la dirección del campo eléctrico.
 ② Anisótropos: La reacción del material varía según la dirección del campo.

Modelo molecular de la carga inducida

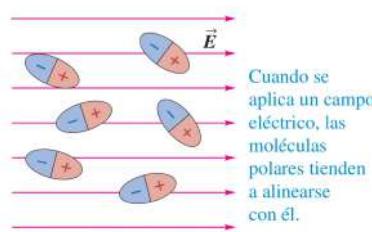
24.18 Moléculas polares a) sin un campo eléctrico aplicado \vec{E} y b) con un campo eléctrico aplicado \vec{E} .

a)



En ausencia de un campo eléctrico, las moléculas polares se orientan al azar.

b)



Esto se produce por Inducción. Para que mantenga este estado, el campo debe permanecer.

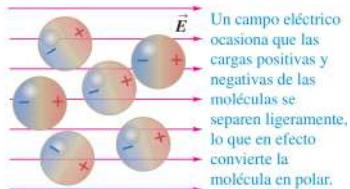
24.19 Moléculas no polares a) sin un campo eléctrico aplicado \vec{E} y b) con un campo eléctrico aplicado \vec{E} .

a)

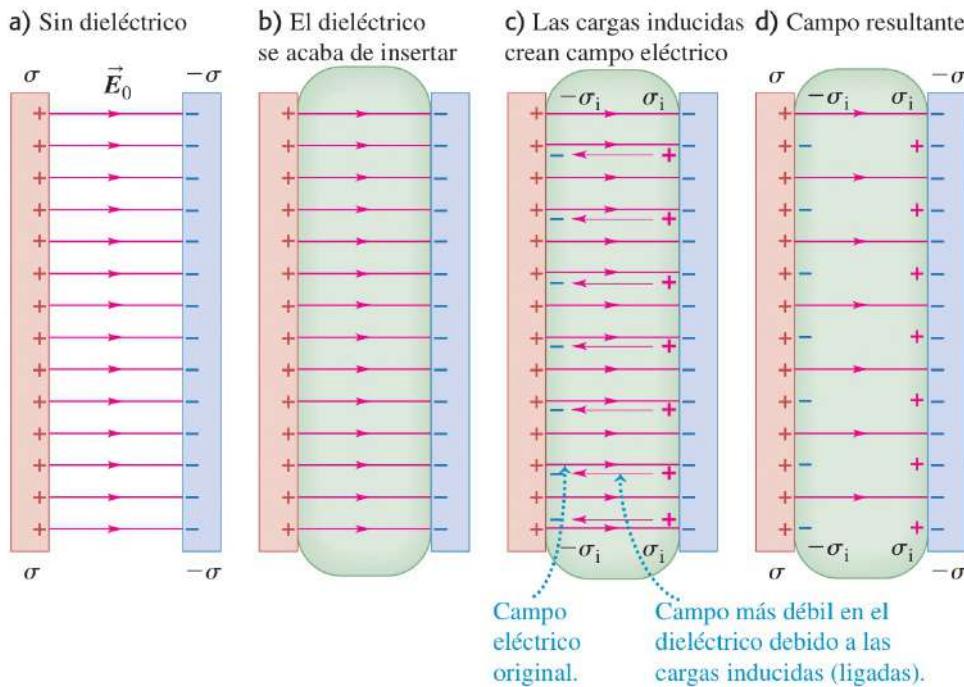


En ausencia de un campo eléctrico, las moléculas no polares no son dipolos eléctricos.

b)



24.21 a) Campo eléctrico de magnitud E_0 entre dos placas con cargas. b) Introducción de un dieléctrico con constante dieléctrica K . c) Las cargas superficiales inducidas y su campo. d) Campo resultante de magnitud E_0/K .



Para una densidad de carga dada σ , las cargas inducidas en las superficies del dieléctrico reducen el campo eléctrico entre las placas.

Constante dieléctrica. (k)

Es particular de cada material y varía según T y otros factores.

Cuando se introduce un dieléctrico:

① Si se mantiene cte. la carga eléctrica:

$$C_d = k \cdot C_0$$

$$V_d = \frac{V_0}{k}$$

$$\|\vec{E}_d\| = \frac{\|\vec{E}_0\|}{k}$$

② Si se mantiene constante la diferencia de potencial:

$$V_{ab} = V_0 = V_d ; \quad \|\vec{E}_0\| = \frac{V_0}{e} ; \quad \|\vec{E}_d\| = \frac{V_d}{e} \quad y \quad \|\vec{E}_d\| = \|\vec{E}_0\|$$

3.9 ENERGIA ALMACENADA EN CAPACITORES CON DIELECTRICOS

Si se mantiene constante la carga:

Si hubiera vacío, $U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$ pero con el dieléctrico $U_d = \frac{1}{2} C_d V_d^2$, con la C y V del dieléctrico. La energía almacenada

por un capacitor con dieléctrico siempre es menor que en uno sin. Esta relación es:

$$U_d = \frac{U_0}{k_d}$$

(para llegar a esto reemplazamos en la fórmula $C_d = k_d \cdot C_0$ y $V_d = \frac{V_0}{k_d}$)

¿Y qué pasa con esa Energía que falta? Los Jóviles que se " pierden" se van como trabajo cuando las cargas "chupan" el dieléctrico cuando este es introducido.

Si se mantiene constante el potencial:

$U_0 = \frac{1}{2} C_0 \cdot V_{ab}^2$, entonces $U_d = \frac{1}{2} C_d \cdot V_{ab}^2$. Teniendo en cuenta que $C_d = k_d \cdot C_0$, reemplazamos y nos queda: $U_d = \frac{1}{2} k_d C_0 \cdot V_{ab}^2$.

Entonces sabemos que $U_d = k_d \cdot U_0$. Esta diferencia se genera por el trabajo de introducir el dieléctrico entre las placas.

RIGIDEZ ELÉCTRICA

Todo dieléctrico tiene un punto máximo antes de pasar a ser conductor. Esto depende del campo eléctrico, ya que cuando este aumenta, aumenta la fuerza. El valor máximo de campo que aguanta el material antes de romperse se denomina rigidez eléctrica.

3.7 ANALISIS DE LOS DIELECTRICOS

Cuando analizamos el dibujo que está en esta página, sabemos que $\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$, entonces $\|\vec{E}_0\| = \frac{Q}{\epsilon_0 S'}$, siendo S' la superficie gaussiana seleccionada (un paralelepípedo). Además sabemos que $\vec{E}_d = \vec{E}_0 + \vec{E}_{inducido}$, entonces $\oint \vec{E}_d \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$, y $\|\vec{E}_d\| = \frac{Q - Q_{inducido}}{\epsilon_0 S'}$. Además, vemos que $\vec{E}_d = \frac{\vec{E}_0}{k_d}$, entonces $\|\vec{E}_d\| = \frac{\|\vec{E}_0\|}{k_d}$. Reemplazando, tenemos que $\|\vec{E}_d\| = \frac{Q}{\epsilon_0 k_d S'}$, entonces $\|\vec{E}_d\| = \frac{Q}{\epsilon_0 k_d S'}$.

Igualando las dos expresiones, y trabajando la expresión, nos queda:

$$\frac{Q}{\epsilon_0 S'} = \frac{Q}{\epsilon_0 k_d S'} + \frac{Q_i}{\epsilon_0 S'}$$

Esto no sirva para todo lo que sigue:

Carga inducida en dielectricos

Simplificando S' y ϵ_0 en ambos miembros, nos queda $Q = \frac{Q}{k_d} + Q_i$. Despejando, nos queda $Q\left(1 - \frac{1}{k_d}\right) = Q_i$.

Como k_d siempre es mayor a 1 (porque no es vacío), podemos decir que $Q_i < Q$.

Polarización eléctrica (\vec{P})

Tomamos el término $\frac{Q_i}{\epsilon_0 \cdot S'}$, tomamos la parte de $\frac{Q_i}{S'}$ y multiplicamos y dividimos por e = ancho del dielectro. Tenemos $\frac{Q_i}{S'} \cdot \frac{e}{e}$

y esto es $\frac{Q_i e}{S' \cdot e} = \frac{\sum \text{momentos dipolares}}{\text{Volumen del dielectro}}$. El numerador queda así porque en un dipolo, $\|\vec{p}\| = q_i \cdot d$. Entonces $\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}}{S' \cdot e} \left(\frac{C}{m^2}\right)$

Susceptibilidad eléctrica (χ)

$\vec{P} \propto \vec{E}_d$, entonces $\vec{P} \propto \epsilon_0 \vec{E}_d$. Podemos decir que $\vec{P} = \chi \cdot \epsilon_0 \vec{E}_d$, entonces $\chi = \frac{\|\vec{P}\|}{\epsilon_0 \|\vec{E}_d\|}$

Relación entre susceptibilidad eléctrica y coeficiente dieléctrico (χ y k_d)

Reemplazando en la expresión: $\frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S'} = \|\vec{E}_d\| + \frac{1}{\epsilon_0} \|\vec{P}\|$, y esto es $k_d \|\vec{E}_d\| = \|\vec{E}_d\| + \frac{1}{\epsilon_0} \chi \epsilon_0 \|\vec{E}_d\|$.

Simplificamos y nos queda que $k_d = 1 + \chi$

Desplazamiento eléctrico

Tomando la expresión $\frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S'} = \|\vec{E}_d\| + \frac{1}{\epsilon_0} \|\vec{P}\|$, y está definido que $\frac{Q}{S'} = D$ (desplazamiento eléctrico).

Como las placas son planas, como dividimos por S' , nos queda un vector normal a la superficie, y definimos el vector \vec{D} .

Relación entre los tres vectores electricos

En la primera expresión, reemplazamos los modulos de los vectores hallados y nos queda

$\frac{1}{\epsilon_0} \|\vec{D}\| = \|\vec{E}_d\| + \frac{1}{\epsilon_0} \|\vec{P}\|$. En el caso de los dielectricos, los tres vectores accionan paralelamente entre sí, por lo

que podemos escribir lo anterior como una relación escalar $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P}$. Si no hubiera dielectro, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_d$

Y como sabemos $\vec{E}_d = k_d \vec{E}_0$, y obtenemos lo siguiente $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 = \epsilon_0 k_d \vec{E}_0 = \epsilon_0 k_{d1} \vec{E}_{d1} = \epsilon_0 k_{d2} \vec{E}_{d2} = \dots$ y podemos calcular campos en base a otros

Integral de Gauss generalizada

Tomamos $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P}$. Aplicando Gauss en \vec{E} tenemos: $\oint_S \vec{E}_d \cdot d\vec{s} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0}$, y como $\vec{E}_d = \frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0}$,

nos queda: $\oint_S \left(\frac{\vec{D} - \vec{P}}{\epsilon_0} \right) \cdot d\vec{s} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S (\vec{D} - \vec{P}) \cdot d\vec{s} = Q - Q_i$. Como \vec{D} no depende de Q_i y \vec{P} no depende de Q ,

podemos separar, y nos queda $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ y $\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s} = Q_i$. La primera se puede aplicar a todos los puntos

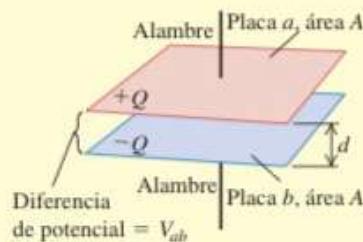
del espacio, con o sin dielectro. A esa se llama Integral de Gauss generalizada

Capacitores y capacitancia: Un capacitor es todo par de conductores separados por un material aislante. Cuando el capacitor está cargado hay cargas de igual magnitud Q y signo opuesto en los dos conductores, y el potencial V_{ab} del conductor con carga positiva con respecto al que tiene carga negativa es proporcional a Q . La capacitancia C se define como la razón de Q a V_{ab} . La unidad del SI para la capacitancia es el farad (F): $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$.

Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con área A , separadas por una distancia d . Si están separadas por vacío, la capacitancia sólo depende de A y d . Para otras geometrías, la capacitancia se obtiene a partir de la definición $C = Q/V_{ab}$. (Véanse los ejemplos 24.1 a 24.4.)

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \quad (24.1)$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (24.2)$$



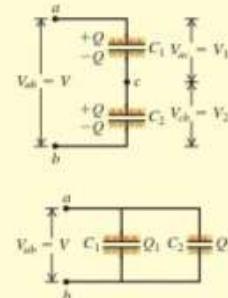
Capacitores en serie y en paralelo: Cuando se conectan en serie capacidores con capacitancias C_1, C_2, C_3, \dots , el recíproco de la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Cuando los capacidores se conectan en paralelo, la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de las capacitancias individuales. (Véanse los ejemplos 24.5 y 24.6.)

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (24.5)$$

(capacitores en serie)

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (24.7)$$

(capacitores en paralelo)

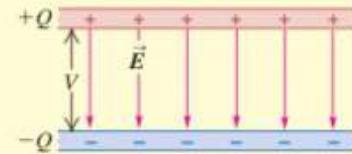


Energía en un capacitor: La energía U que se requiere para cargar un capacitor C a una diferencia de potencial V y carga Q , es igual a la energía almacenada en el capacitor. Esta energía se puede considerar como si residiera en el campo eléctrico entre los conductores; la densidad de energía u (energía por unidad de volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico.

(Véanse los ejemplos 24.7 a 24.9.)

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \quad (24.9)$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (24.11)$$



Dieléctricos: Cuando el espacio entre conductores está ocupado por un material dieléctrico, la capacitancia se incrementa en un factor K , llamado constante dieléctica del material. La cantidad $\epsilon = K\epsilon_0$ se llama permitividad del dieléctrico. Para una cantidad fija de carga en las placas del capacitor, las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico disminuyen el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre las placas en el mismo factor K . La carga superficial proviene de la polarización, que es el reacomodo microscópico de la carga en el dieléctrico. (Véase el ejemplo 24.10.)

Bajo la influencia de campos eléctricos suficientemente intensos, los dieléctricos se vuelven conductores, una situación que se conoce como ruptura del dieléctrico. El campo máximo que un material puede soportar sin sufrir ruptura se llama rigidez dieléctrica.

En un dieléctrico la expresión para la densidad de energía es la misma que en el vacío pero sustituyendo ϵ_0 por $\epsilon = K\epsilon_0$. (Véase el ejemplo 24.11.)

La ley de Gauss en un dieléctrico tiene casi la misma forma que en el vacío, con dos diferencias clave: \vec{E} se sustituye por $K\vec{E}$ y Q_{enc} se sustituye por $Q_{enc-libre}$, que incluye solo la carga libre (no la carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. (Véase el ejemplo 24.12.)

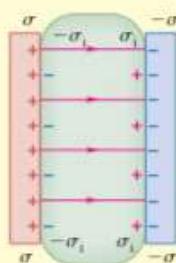
$$C = KC_0 = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{A}{d} \quad (24.19)$$

(capacitor de placas paralelas con un dieléctrico)

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad (24.20)$$

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc-libre}}{\epsilon_0} \quad (24.23)$$

Dieléctrico entre las placas



UNIDAD 4: CORRIENTE ELÉCTRICA

4.1 CORRIENTE ELÉCTRICA

CUIDADO La corriente no es un vector

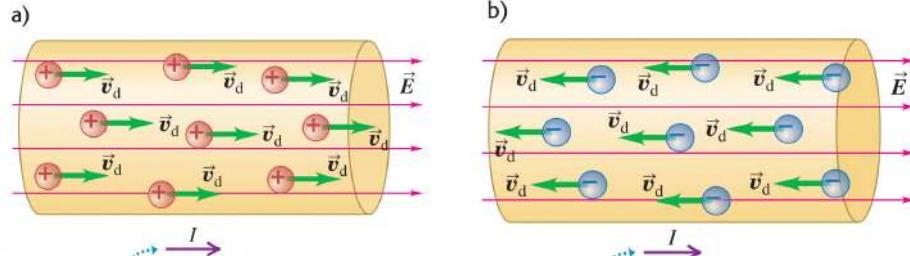
Es todo movimiento de carga de una región a otra por unidad tiempo.

$$\vec{F} = q_e \vec{E}, \quad \vec{a} = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \quad (\text{siendo el subíndice } e \text{ referente a electrón}). \quad \vec{E}$$

desplazamiento es constante, y la corriente eléctrica $= \frac{\Delta q}{\Delta t} = I \left[\frac{C}{s} = \text{Ampere} = A \right]$

25.2 La misma corriente es producida por a) cargas positivas que se trasladan en dirección del campo eléctrico \vec{E} , o b) el mismo número de cargas negativas que se desplazan con la misma rapidez en la dirección opuesta a \vec{E} .

[NOTA: NO CONSIDERAR LOS EJEMPLOS CON CARGAS POSITIVAS, ROCHETTI DICE QUE NO ES ASÍ EN LA REALIDAD.]

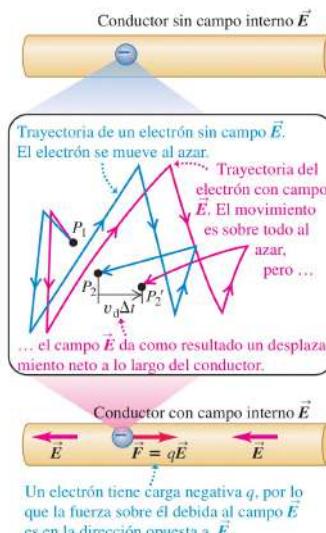


Una corriente convencional es tratada como un flujo de cargas positivas, sin importar si las cargas libres en el conductor son positivas, negativas o ambas.

En un conductor metálico, las cargas en movimiento son electrones, pero la corriente aún apunta en la dirección en que fluirían las cargas positivas.

Teoría cinética de la corriente eléctrica

Velocidad de arrastre y movilidad electrónica



Cuando no hay campo, los electrones se mueven libremente. Cuando se agrega un campo, a este movimiento se le agrega un desplazamiento debido al campo. La velocidad de este desplazamiento se denomina "velocidad de arrastre" o "de deriva", y viene dada por $\|\vec{v}_d\| = \frac{d}{t}$. Los electrones se mueven en dirección opuesta al campo: $\|\vec{v}_d\| = \frac{d}{t}$.

Relación entre velocidad de arrastre y campo eléctrico:

$$\|\vec{v}_d\| \propto \|\vec{E}\|; \quad \|\vec{v}_d\| = \mu_e \|\vec{E}\|, \quad (\mu_e \text{ es la movilidad electrónica y es particular a cada material}). \text{ Transformando la ecuación en una vectorial, nos queda:} \quad \vec{v}_d = -\mu_e \vec{E} \left[\frac{m^2}{V.s} \right]$$

Densidad de corriente eléctrica

La corriente por unidad de área de la sección transversal se denomina **densidad de corriente** J :

(j representa con j minúscula)

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

Podemos expresar la dirección vectorial de I como:

$$I = j \cdot S \quad \text{o} \quad I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{J}_d = -\frac{\vec{j}}{n.q}$$

Otro punto a aclarar es que si trabajamos las expresiones, llegamos a que

En conclusión, la \vec{J}_d se relaciona con el \vec{E} dentro del conductor, y también la podemos relacionar con la \vec{j} .

[NOTA: Recorremos que q es la carga de los electrones, porque estos son los involucrados en el proceso. Por eso, Rochetti suele escribir "e" en vez de "q".]

Resistividad eléctrica: Igualando $-\mu_e \vec{E} = -\frac{\vec{j}}{n.e}$, obtenemos que $\vec{E} = \frac{1}{n.e.\mu_e} \cdot \vec{j}$. Entonces al factor que relaciona a \vec{E} y \vec{j} , lo llamamos resistividad eléctrica $\rho = \frac{1}{n.e.\mu_e} \left[\frac{1}{m^2 C m^2 V.s} \right] = \frac{V.m}{S} = \frac{V}{A.m}$. Y obtenemos la "Forma Puntual" $\Rightarrow \frac{V}{A} = \Omega, \Rightarrow [\Omega.m]$

$$\vec{E} = \rho \vec{j} \quad (\text{puntual porque se cumple en todos los puntos})$$

4.2 Resistencia eléctrica

Sabemos que $\vec{E} = \rho \vec{J}$. Cuando se cumple esto, $\rho = \text{cte}$.

Supongamos que tenemos un alambre con sección transversal A y longitud L . Si V es positiva, la corriente \vec{I} fluye en dirección de \vec{E} , y \vec{E} apunta en dirección de V decreciente. Sabemos que $I = jA$, entonces $j = \frac{I}{A}$; y $V = E \cdot L$, entonces $E = \frac{V}{L}$ y reemplazando en la Ley de Ohm, tenemos:

$$\frac{V}{L} = \frac{\rho I}{A} \quad \text{o bien,} \quad V = \frac{\rho L}{A} I, \quad \text{entonces} \quad \frac{\rho L}{A} = R = \frac{V}{I} \quad [\Omega]$$

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (\text{relación entre la resistencia y la resistividad})$$

$$V_{AB} = IR \quad (\text{relación entre voltaje, corriente y resistencia}) \Rightarrow \text{LEY DE OHM}$$

→ Solo se la llama así cuando $R = \text{cte}$.

(podemos escribir la ley de ohm como) $I = G \cdot V_{AB}$

$$\text{Conductividad eléctrica} = \sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$\text{Conductancia eléctrica} = G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{A}{L} \quad [\text{Siemens}]$$

Variación de la resistividad con la temperatura

Cuando aumenta la T^o , ρ disminuye porque el material se dilata. Además, como aumenta el nº de choques, porque los átomos vibran más intensamente, los e^- pierden un poco de movilidad, por lo que ρ disminuye. Por ende, la ρ aumenta.

Como esta curva es una función compleja, para calcular su ecuación, rectificamos un segmento de la curva (hacemos una recta, teniendo en cuenta que el error sea chico en el tramo que elegimos). Entonces nos que da una recta $y = mx + y_0$, y tomando $y = \rho$; $y_0 = \rho_0$ y ($x = T - T_0$), podemos escribir $\rho = \rho_0 + m \cdot (T - T_0)$. Sacando factor común ρ_0 en el segundo miembro, tenemos $\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{m}{\rho_0} (T - T_0) \right]$, donde $\frac{m}{\rho_0} = \alpha_0 \left[\frac{1}{\text{C}} \right]$, y llamamos α_0 al "coeficiente de variación de la resistividad con la T^o ". Esto nos queda:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad . \quad \text{Para poder usar esta}$$

fórmula, ρ y α tienen que encontrarse en la misma T^o . Si no lo están, tenemos que usar un sistema de ecuaciones de ρ_0 y ρ para calcular el que está a distinta T^o .

Variación de la resistencia con la temperatura

igual que arriba,

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

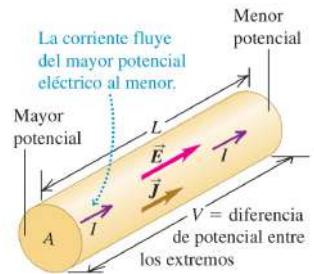
4.4 GENERADORES. FUERZA ELECTROMOTRIZ (E)

Es la influencia que hace que la carga viaje de un potencial menor al mayor (pero NO es una fuerza, sino una cantidad de energía por unidad de carga, como el potencial).

Los generadores tienen una "resistencia interna", entonces en el generador, $V_{ab} = E - I_r = IR$, entonces

$$I = \frac{E}{R + r} \quad [\text{A}]$$

25.7 Conductor con sección transversal uniforme. La densidad de corriente es uniforme sobre cualquier sección transversal, y el campo eléctrico es constante en toda la longitud.

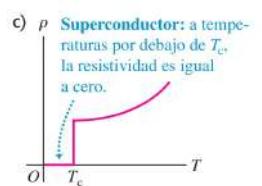
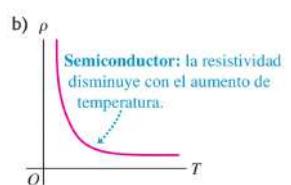
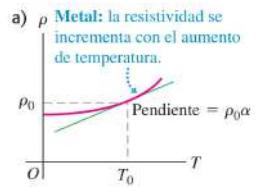


→ Solo se la llama así cuando $R = \text{cte}$.

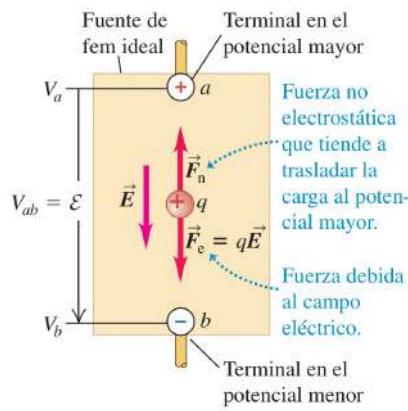
(podemos escribir la ley de ohm como) $I = G \cdot V_{AB}$

$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{A}{L} \quad [\text{Siemens}]$

25.6 Variación de la resistividad ρ con la temperatura absoluta T para a) un metal normal, b) un semiconductor y c) un superconductor. En a), la aproximación lineal a ρ como función de T se muestra con línea color verde; la aproximación coincide exactamente en $T = T_0$, donde $\rho = \rho_0$.



25.14 Diagrama de una fuente de fem en una situación de "círculo abierto". La fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y la fuerza no electrostática \vec{F}_n se ilustran actuando sobre una carga positiva q .



Cuando la fuente de fem no es parte de un circuito cerrado, $F_n = F_e$ y no hay movimiento neto de carga entre las terminales.

$$V_{ab} = \mathcal{E}$$

en este caso, $\vec{E}_c = -\vec{E}_n$

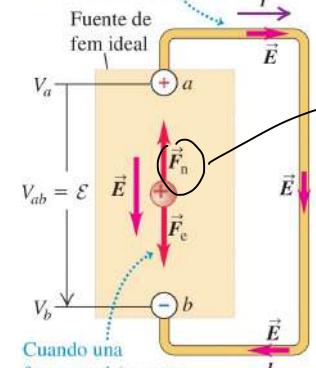
en la realidad, hay una resistencia en el medio interno, entonces

$$\mathcal{E} = V_{ab} = IR$$

en este caso, $\vec{E}_n > \vec{E}_c$

25.15 Diagrama de una fuente ideal de fem en un circuito completo. La fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y la fuerza no electrostática \vec{F}_n se ilustran para una carga q positiva. La dirección de la corriente es de a a b en el circuito externo y de b a a en el interior de la fuente.

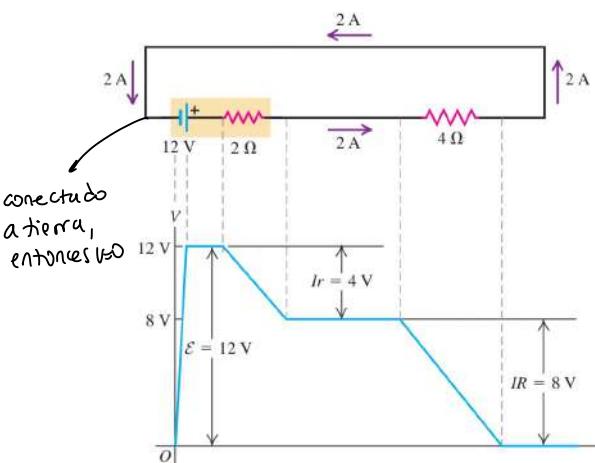
El potencial a través de las terminales crea un campo eléctrico en el circuito, lo que hace que la carga se desplace.



Cuando una fuente real (opuesta a la ideal) de fem se conecta a un circuito, disminuye V_{ab} y por lo tanto F_c , de manera que, $F_n > F_e$ y \vec{F}_n realiza un trabajo sobre las cargas.

en este caso, las cargas viajan de \oplus a \ominus por el alambre conductor y luego la \vec{F}_n (fuerza no Coulombiana) la lleva hasta \oplus y sigue el ciclo

Cambios de potencial alrededor de un circuito



4.5 ENERGÍA Y POTENCIA EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS. EFECTO JOULE

25.22 La potencia de alimentación al elemento de circuito entre a y b es $P = (V_a - V_b)I = V_{ab}I$.

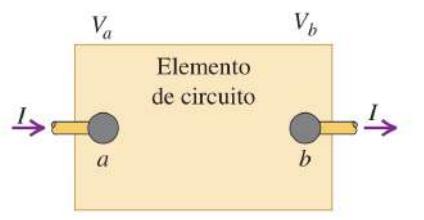
$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R}$$

Efecto Joule: calor generado por un circuito circular I por un tiempo t .

$$Q = Pt$$

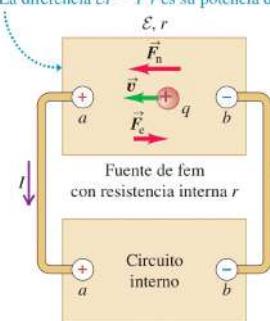
Es la rapidez con la que se entrega energía a un elemento de circuito o se extrae de éste.

Esta energía se almacena en la resistencia en forma de energía interna, entonces aumenta la vibración y por ende la T° . Si esta T° subiría indefinidamente, se derretiría el material, pero pasa lo siguiente: cuando se calienta, se generan 3 fenómenos que impiden que esto pase: conducción, convección y radiación.



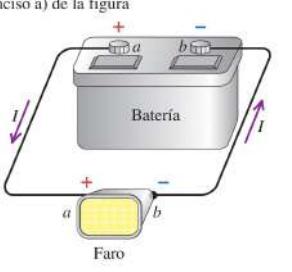
a) Diagrama del circuito

- La fuente de fem convierte energía que no es eléctrica en energía eléctrica, a una tasa de EI .
- Su resistencia interna disipa energía a una tasa de I^2r .
- La diferencia $EI - I^2r$ es su potencia de salida.



25.23 Conversión de la energía en un circuito simple.

b) Circuito real del tipo que se ilustra en el inciso a) de la figura



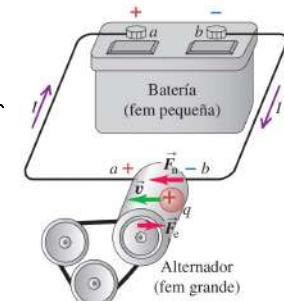
Potencia de salida (descarga)

$$P = V_{ab}I = EI - I^2R$$

Potencia de entrada (carga)

$$P = V_{ab}I = EI + I^2r$$

25.24 Cuando se conectan dos fuentes en una espira simple, la fuente con mayor fem entrega energía a la otra fuente.



Teorema de la máxima transferencia de energía:

Sabemos que $P = R \cdot I^2 = R \left(\frac{\mathcal{E}}{r+R} \right)^2$, entonces $P = \frac{R \mathcal{E}^2}{(r+R)^2}$. Para saber el momento en el que P_{\max} , vemos la derivada respecto de R , haciendo $\frac{\partial P}{\partial R} = 0$: $\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\mathcal{E}^2(r+R)^2 - 2(r+R)R \mathcal{E}^2}{(r+R)^4} = 0$ nos queda: $\mathcal{E}^2(r+R)^2 - 2(r+R)R \mathcal{E}^2 = 0$ y vemos que esto sucede cuando $R = r$.

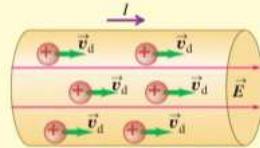
Las transferencias de energía nunca son mayores a 50%. Se calcula como $\frac{I \cdot R}{\mathcal{E}}$

CAPÍTULO 25 RESUMEN

Corriente y densidad de corriente: Corriente es la cantidad de carga que fluye a través de un área especificada, por unidad de tiempo. La unidad del SI para la corriente es el ampere, que es igual a un coulomb por segundo ($1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$). La corriente I a través de un área A depende de la concentración n y la carga q de los portadores de carga, así como de la magnitud de su velocidad de deriva \vec{v}_d . La densidad de corriente es corriente por unidad de área de la sección transversal. La corriente se describe convencionalmente en términos de un flujo de carga positiva, aun cuando los portadores de carga real sean negativos o de ambos signos. (Véase el ejemplo 25.1.)

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A \quad (25.2)$$

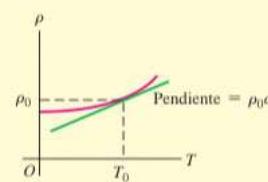
$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad (25.4)$$



Resistividad: La resistividad ρ de un material es la razón de las magnitudes del campo eléctrico y la densidad de corriente. Los buenos conductores tienen poca resistividad; los buenos aislantes tienen alta resistividad. La ley de Ohm, que obedecen en forma aproximada muchos materiales, establece que ρ es una constante independiente del valor de E . La resistividad por lo general se incrementa con la temperatura; para cambios pequeños de temperatura, esta variación queda representada aproximadamente por la ecuación (25.6), donde α es el coeficiente de temperatura de la resistividad.

$$\rho = \frac{E}{J} \quad (25.5)$$

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (25.6)$$

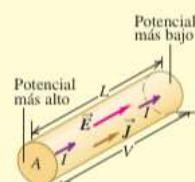


Metal: ρ aumenta con el incremento de T

Resistores: Para los materiales que obedecen la ley de Ohm, la diferencia de potencial V a través de una muestra particular de material es proporcional a la corriente I a través del material. La razón $V/I = R$ es la resistencia de la muestra. La unidad del SI para la resistencia es el ohm ($1 \Omega = 1 \text{ V/A}$). La resistencia de un conductor cilíndrico se relaciona con su resistividad ρ , longitud L y área de sección transversal A . (Véanse los ejemplos 25.2 a 25.4.)

$$V = IR \quad (25.11)$$

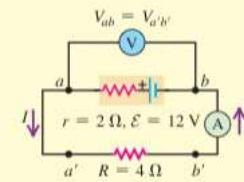
$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (25.10)$$



Circuitos y fem: Un circuito completo tiene una trayectoria continua por la que circula corriente. Un circuito completo que lleva una corriente constante debe contener una fuente de fuerza electromotriz (fem) \mathcal{E} . La unidad del SI para la fuerza electromotriz es el volt (1 V). Una fuente ideal de fem mantiene una diferencia de potencial constante, independiente de la corriente que pasa a través del dispositivo, pero toda fuente real de fem tiene alguna resistencia interna r . Por consiguiente, la diferencia de potencial terminal V_{ab} depende de la corriente. (Véanse los ejemplos 25.5 a 25.8.)

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \quad (25.15)$$

(fuente con resistencia interna)



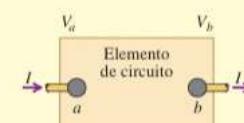
Energía y potencia en los circuitos: Un elemento de circuito con diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ y corriente I introduce energía al circuito si la dirección de la corriente es del potencial más bajo al más alto en el dispositivo, y extrae energía del circuito si la corriente es la opuesta. La potencia P (tasa de transferencia de energía) es igual al producto de la diferencia de potencial por la corriente. Un resistor siempre extrae energía eléctrica del circuito. (Véanse los ejemplos 25.9 a 25.11.)

$$P = V_{ab}I \quad (25.17)$$

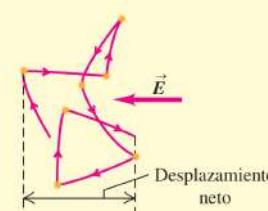
(elemento general de circuito)

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R} \quad (25.18)$$

(potencia que entra en un resistor)



Conducción en los metales: La base microscópica de la conducción en los metales es el movimiento de los electrones que se desplazan con libertad por el cristal metálico, chocando con los centros iónicos del cristal. En un modelo clásico aproximado de este movimiento, la resistividad del material se relaciona con la masa del electrón, la carga, la rapidez de movimiento aleatorio, la densidad y el tiempo libre medio entre las colisiones. (Véase el ejemplo 25.12.)

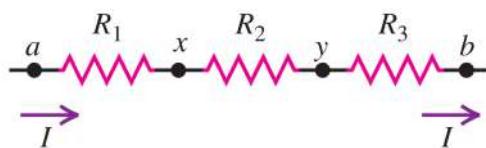


UNIDAD 5: CIRCUITOS DE CONEXIÓN CONTINUA

5.1 CONEXIÓN DE RESISTENCIAS

Conexión en serie

a) R_1, R_2 y R_3 en serie

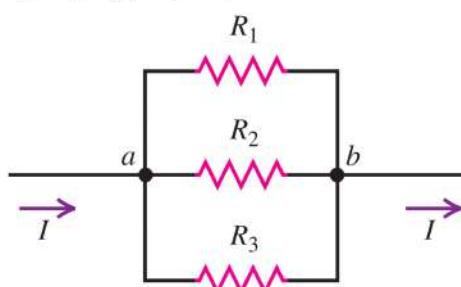


$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

el voltaje es directamente proporcional a la carga común, pero inversamente proporcional a la capacitancia.

Conexión en paralelo

b) R_1, R_2 y R_3 en paralelo



$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{dos resistores en paralelo})$$

Las corrientes conducidas por dos resistores en paralelo son inversamente proporcionales a sus resistencias.

En este caso, esto es porque están conectados a la misma diferencia de potencial

5.2 REGLAS DE KIRCHHOFF. MÉTODO DE KIRCHHOFF.

Nudo: (uniones): Es el punto que une 3 o más conductores.

Rama: (espira): Es el camino eléctrico que une 2 nudos.

Malla: es el camino eléctrico cerrado que permite, a partir de un elemento cualquiera del circuito, recorrerlo y volver al elemento

El sentido de las corrientes es elegido de forma arbitraria y las mallas se recorren en un sentido elegido al azar.

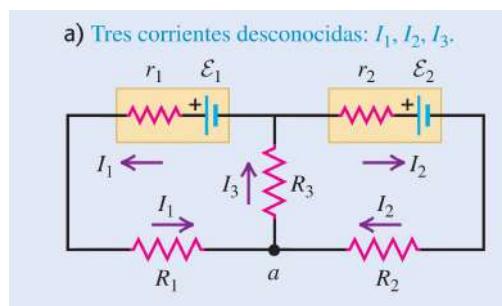
Armando un sistema de ecuaciones con $(N-1)$ ecuaciones de nudos (con n =número de nudos) y el resto con ecuaciones de malla. Estas ecuaciones tienen que ser linealmente independientes

Regla N° 1:

Regla de Kirchhoff de las uniones: la suma algebraica de las corrientes en cualquier unión es igual a cero. Es decir:

Regla N° 2:

Regla de Kirchhoff de las espiras: la suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier espira, incluso las asociadas con las fem y las de elementos con resistencia, debe ser igual a cero. Es decir:



a) Convenciones de signo para las fem

$+\mathcal{E}$: sentido del recorrido de $-a+$:



b) Convenciones de signo para los resistores

$-\mathcal{E}$: sentido del recorrido de $+a-$:



$+IR$: sentido del recorrido opuesto al de la corriente:



$-IR$: recorrido en el sentido de la corriente:



5.3 INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN

Galvanómetro de D'Arsonval

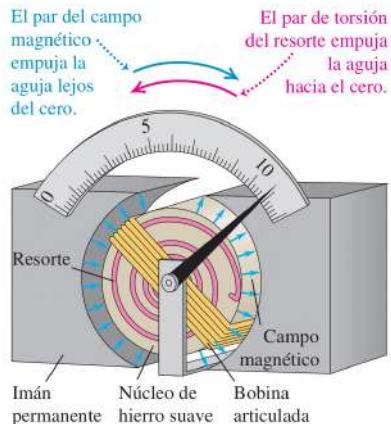
Se utiliza para medir la dif. de potencial (Voltage), corriente o resistencia.

En la siguiente exposición será frecuente que lo llamemos simplemente *medidor*. En el campo magnético de un imán permanente se coloca una bobina de pivote de alambre delgado (figura 26.14). Unido a la bobina está un resorte, similar a la espiral del volante de un reloj. En la posición de equilibrio, sin corriente en la bobina, la aguja está en el cero. Cuando hay una corriente en la bobina, el campo magnético ejerce un par de torsión sobre la bobina que es proporcional a la corriente. (En el capítulo 27 se verá en detalle esta interacción magnética.) A medida que la bobina gira, el resorte ejerce un par de torsión restaurador que es proporcional al desplazamiento angular.

Así, la desviación angular de la bobina y la aguja es directamente proporcional a la corriente en la bobina, y el dispositivo se puede calibrar para que mida corriente. La desviación máxima, lo común es de 90° , se denomina *desviación de escala completa*.

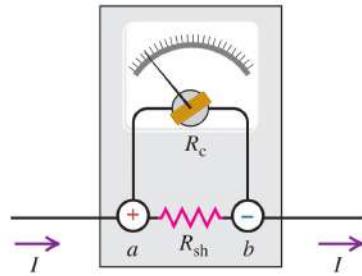
La desviación del medidor es proporcional a la corriente en la bobina. Si ésta obedece la ley de Ohm, la corriente es proporcional a la *diferencia de potencial* entre las terminales de la bobina, y la desviación también es proporcional a esta diferencia de potencial.

26.14 Galvanómetro de d'Arsonval con una bobina de pivote o articulada a la que está adherida una aguja; un imán permanente suministra un campo magnético de magnitud uniforme, y el resorte proporciona un par de torsión restaurador que se opone al par de torsión del campo magnético.



Ampliación de escala como amperímetros

a) Amperímetro de bobina móvil

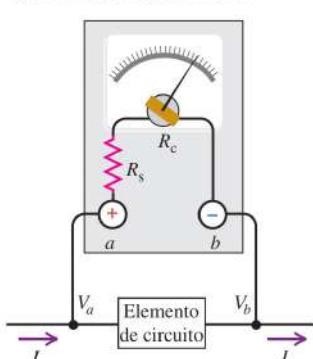


Es un medidor de corriente. Un medidor puede adaptarse para medir corrientes mayores que lo que puede leer, y esto se hace agregando un resistor en paralelo que desvía parte de la corriente de la bobina del medidor. A este resistor se le llama "Resistor de derivación", y se denota R_{sh} .

$$I_{fs} R_c = (I_a - I_{fs}) R_{sh}, \text{ con } I_{fs} = \text{Corriente de escala completa}; R_{sh} = \text{Resistencia de derivación}; R_c = \text{Resistencia del instrumento}; I_a = \text{Corriente a medir mayor que } I_{fs}. V_{ab} \text{ es la misma d.p. para ambas trayectorias.}$$

Ampliación de escala como voltímetro

b) Voltímetro de bobina móvil



Mide la diferencia de potencial. En este caso, se conecta una resistencia en serie para extender la escala de medición,

$$V_V = I_{fs} (R_c + R_s)$$

, con $V_V =$ Tensión de escala completa, $R_s =$ resistencia en serie; $R_c =$ resistencia del instrumento; y $V_{ab} =$ d.p. a medir mayor a V_V

Puente de Wheatstone

Se da en un arreglo donde no hay contacto (nodos en común) entre la entrada y la salida

, donde R_4 es desconocida.

(G)=galvanómetro de cero central. Indica el sentido de la corriente, y tiene la capacidad de medir la corriente=0, cuando variamos las corrientes para que $I_G=0$, decimos que el puente está calibrado. Esto sucede porque $V_{dc} = V_{ad}$; $V_{cb} = V_{db}$, y esto significa que $I_1 R_1 = I_2 R_2$ y $I_1 R_3 = I_2 R_4$

$$\text{Dividiendo miembro a miembro, nos queda } \frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}, \text{ entonces } R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} [\Omega].$$

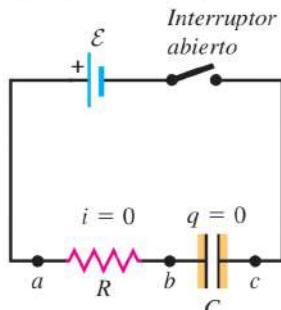
$$\text{También podemos escribir } R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$$

5.4 Circuitos RC

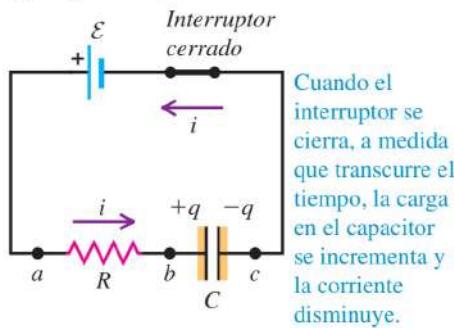
Carga

26.21 Carga de un capacitor. a) Antes de que se cierre el circuito, la carga q es igual a cero. b) Cuando el interruptor se cierra (en $t = 0$), la corriente pasa de cero a \mathcal{E}/R . A medida que transcurre el tiempo, q se acerca a Q_f , y la corriente i se acerca a cero.

a) Capacitor descargado al inicio



b) Carga del capacitor



26.22 Corriente i y carga del capacitor q como funciones del tiempo para el circuito de la figura 26.21. Al principio, la corriente inicial es I_0 y la carga del capacitor vale cero. La corriente tiende a cero en forma asintótica, y la carga del capacitor se approxima en forma asintótica a su valor final Q_f .

NOTA: Para construir estas curvas, sacamos la pendiente en el origen

Energía:

Al suministrar corriente al generador, ha suministrado energía. Parte fue absorbida por la resistencia, y es transformada en calor (I^2R) y parte fue almacenada como energía potencial en el capacitor ($\frac{1}{2}Q^2/C$). Sabemos que en cualquier momento $0 < t < \infty$, la ecuación de malla es $\mathcal{E} - iR - q/C = 0$. Todos los miembros están en Volts [V]. Si multiplicamos por la corriente, la dimensión pasa a ser Watt [W], de potencia, y nos queda $\mathcal{E}i - i^2R - i\frac{q}{C} = 0$, y si lo multiplicamos por el tiempo dt , corriente por dt nos va a dar la carga final. En la ecuación de arriba, $\mathcal{E}i$ es potencia suministrada por la batería, i^2R es la potencia disipada en el resistor y $i\frac{q}{C}$ es la potencia almacenada en el capacitor. Cuando hacemos el reemplazo de las corrientes, nos queda que $\mathcal{E}Q_f = Q_f\mathcal{E}/2 + Q_f\mathcal{E}/2$. Esto significa que la mitad se almacena en el capacitor, y la otra mitad se pierde en el resistor. De esta manera:

$$\int_0^\infty P \cdot dt = \int_0^\infty \mathcal{E}i \cdot dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-t/RC} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left[-RC e^{-t/RC} \right]_0^\infty = C\mathcal{E}^2 = \mathcal{E} \cdot Q_f \rightarrow \text{Energía total suministrada por la batería.}$$

Energía total disipada por el resistor:

$$\int_0^\infty P \cdot dt = \int_0^\infty i^2R \cdot dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \left[\left(-\frac{RC}{2} \right) e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 = \frac{\mathcal{E} Q_f}{2}$$

Aca ya la corriente no es más constante.

En cualquier momento $t \neq 0$, la ecuación de malla es $\mathcal{E} - V_{ab} - V_{bc} = 0$

Reemplazando, $\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0$. Las dos incógnitas son q e i , y están relacionadas entre sí. Reemplazando i por la corriente instantánea $= \frac{dq}{dt}$, nos queda: $\mathcal{E} - \frac{dq}{dt}R - \frac{q}{C} = 0$, y dividiendo m.a.m por R , nos queda:

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{dq}{dt} - \frac{q}{RC} = 0, \text{ y despejando: } \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - CE)$$

Reordenando esta expresión, podemos dividir las dos variables:

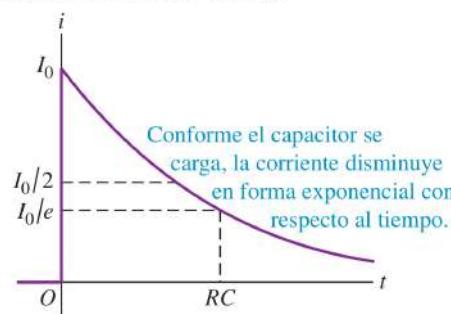
$\frac{dq}{q - CE} = -\frac{dt}{RC}$. Cambiamos las variables q y t por q' y t' para utilizarlas como límites de integración: $\int_0^q \frac{dq'}{q' - CE} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}$, entonces nos queda:

$$\ln\left(\frac{q - CE}{-CE}\right) = -\frac{t}{RC}. \text{ Aplicando función exponencial: } \frac{q - CE}{-CE} = e^{-t/RC}$$

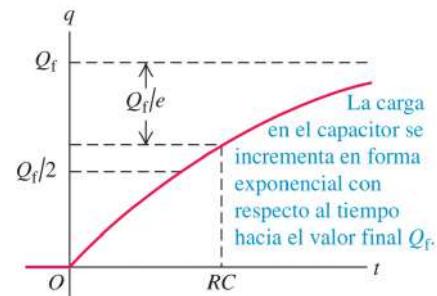
Entonces:

$$q = CE(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \quad i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga



b) Gráfica de la carga de un capacitor contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga



Energía total almacenada por el capacitor:

$$U = \frac{Q_f^2}{2C} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 = \frac{\mathcal{E} Q_f}{2}$$

Constante de tiempo

Es la rapidez con la que se carga y descarga un capacitor.

$$\text{Para } t = \tau, \bullet q = Q_f \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0,632 Q_f.$$

$$\bullet i = I_0 e^{-t/\tau} = 0,368 I_0$$

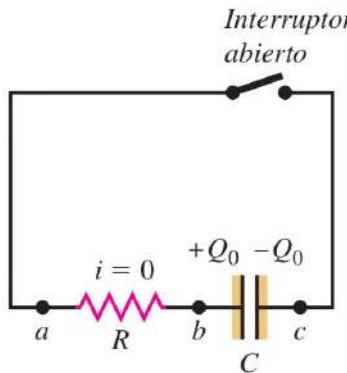
$$\tau = RC \quad [s]$$

NOTA: En el proceso de carga, la corriente circula en sentido horario, y en el de descarga, circula en sentido antihorario.

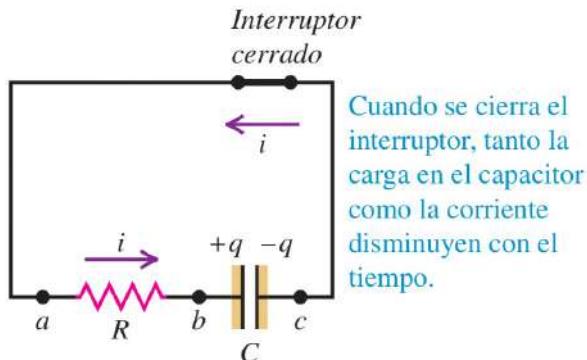
Descarga

26.23 Descarga de un capacitor. a) Antes de que el interruptor esté cerrado en el momento $t = 0$, la carga del capacitor es Q_0 y la corriente es igual a cero. b) En el momento t , una vez que el interruptor se ha cerrado, la carga del capacitor es q y la corriente es i . El sentido real de la corriente es opuesto al sentido que se ilustra; i es negativa. Después de un tiempo prolongado, tanto q como i tienden a cero.

a) Capacitor inicialmente cargado



b) Descarga del capacitor



En este caso, la ecuación de malla es $V_{ab} + V_{bc} = 0$, ya que $E = 0$. Entonces tenemos que $-iR - \frac{q}{C} = 0$, y $i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$. Trabajando como en el caso anterior, nos queda:

$$\int_{Q_0}^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \Rightarrow \ln \frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

Entonces:

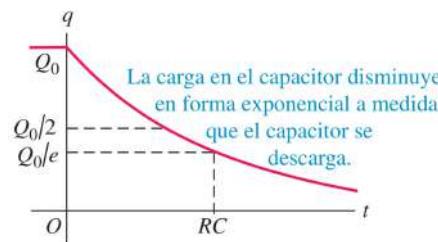
$$q = Q_0 e^{-t/RC}, \text{ y derivando respecto de } t,$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

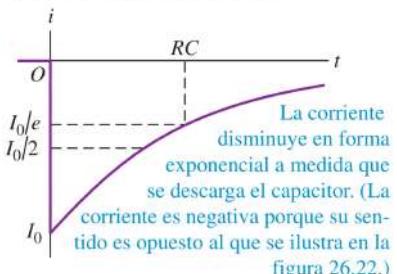
← esto significa que va en sentido opuesto.

26.24 La corriente i y la carga q del capacitor como funciones del tiempo para el circuito de la figura 26.23. La corriente inicial es I_0 y la carga inicial del capacitor es Q_0 . Tanto i como q tienden a cero de manera asintótica.

b) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en descarga



a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en descarga



El proceso para construir estas curvas es igual a los del proceso de carga.

CAPÍTULO 26 RESUMEN

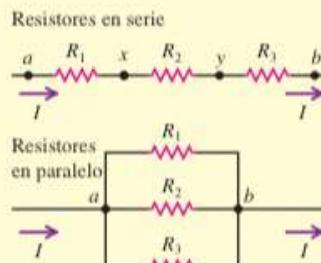
Resistores en serie y en paralelo: Cuando se conectan en serie varios resistores R_1, R_2, R_3, \dots , la resistencia equivalente R_{eq} es la suma de las resistencias individuales. En una conexión en serie fluye la misma corriente a través de todos los resistores. Cuando se conectan en paralelo varios resistores, el recíproco de la resistencia equivalente R_{eq} es la suma del recíproco de las resistencias individuales. Todos los resistores en una conexión en paralelo tienen la misma diferencia de potencial entre sus terminales. (Véanse los ejemplos 26.1 y 26.2.)

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (26.1)$$

(resistores en serie)

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (26.2)$$

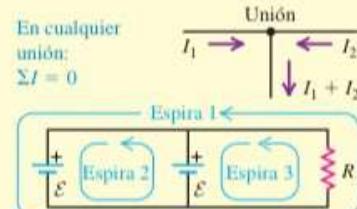
(resistores en paralelo)



Reglas de Kirchhoff: La regla de Kirchhoff de las uniones se basa en la conservación de la carga. Establece que la suma algebraica de las corrientes en una unión debe ser igual a cero. La regla de Kirchhoff de las espiras se basa en la conservación de la energía y la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos. Dice que la suma algebraica de las diferencias de potencial alrededor de una espira debe ser igual a cero. Al aplicar las reglas de Kirchhoff es esencial tener cuidado con los signos. (Véanse los ejemplos 26.3 a 26.7.)

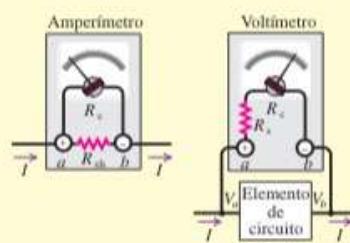
$$\sum I = 0 \quad (\text{regla de las uniones}) \quad (26.5)$$

$$\sum V = 0 \quad (\text{regla de las espiras}) \quad (26.6)$$



Alrededor de cualquier espira: $\sum V = 0$.

Instrumentos de medición eléctrica: En un galvanómetro de d'Arsonval, la desviación es proporcional a la corriente en la bobina. Para tener una escala de corriente más amplia se agrega un resistor de derivación, de manera que parte de la corriente se desvía de la bobina del medidor. Un instrumento de este tipo se llama amperímetro. Si la bobina y cualquier resistencia adicional en serie obedecen la ley de Ohm, el instrumento también se puede calibrar para que lea diferencias de potencial o voltaje, en cuyo caso recibe el nombre de voltímetro. Un buen amperímetro tiene resistencia muy baja; un buen voltímetro tiene resistencia muy alta. (Véanse los ejemplos 26.8 a 26.11.)



Circuitos R-C: Cuando un capacitor se carga mediante una batería en serie con un resistor, la corriente y la carga en el capacitor no son constantes. La carga tiende a su valor final de manera asintótica, y la corriente tiende a cero del mismo modo. La carga y la corriente en el circuito están dadas por las ecuaciones (26.12) y (26.13). Después del tiempo $\tau = RC$, la carga se ha acercado a menos de $1/e$ de su valor final. Este tiempo se llama constante de tiempo o tiempo de relajación del circuito. Cuando se descarga el capacitor, la carga y la corriente están dadas como función del tiempo por las ecuaciones (26.16) y (26.17). La constante de tiempo es la misma en la carga y en la descarga. (Véanse los ejemplos 26.12 y 26.13.)

Capacitor en carga:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) \quad (26.12)$$

$$= Q_f(1 - e^{-t/RC})$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \quad (26.13)$$

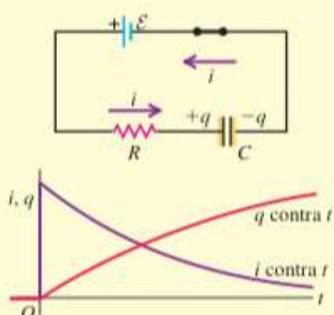
$$= I_0e^{-t/RC}$$

Capacitor en descarga:

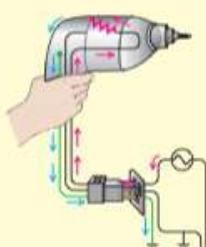
$$q = Q_0e^{-t/RC} \quad (26.16)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} \quad (26.17)$$

$$= I_0e^{-t/RC}$$



Cableado de una casa: En los sistemas de cableado doméstico, los distintos aparatos eléctricos están conectados en paralelo a través de la línea de energía, que consiste en un par de conductores, uno "con corriente" y otro "neutro". Además, por seguridad se incluye un alambre "a tierra". La corriente máxima permisible en un circuito está determinada por el tamaño de los alambres y la temperatura máxima que pueden tolerar. Los fusibles e interruptores de circuito dan seguridad contra un exceso de corriente y el incendio que podría resultar. (Véase el ejemplo 26.14.)



UNIDAD 6: FUENTES DE CAMPO MAGNETICO

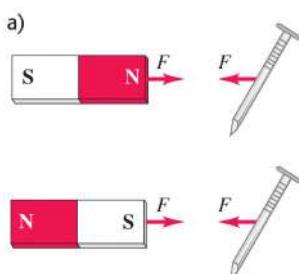
6.1 Campo magnético

Fuentes de campo magnético

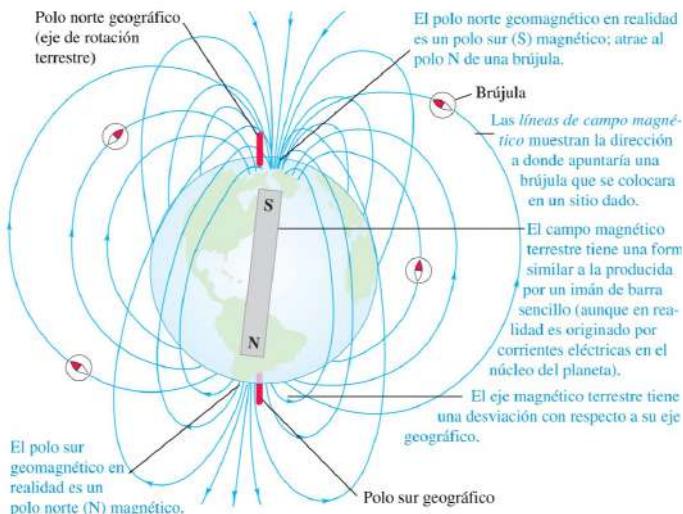
- Imán permanente
- Carga eléctrica en movimiento
- Corriente eléctrica
- Campo eléctrico variable en el tiempo.

Imán permanente

27.2 a) Cualquiera de los polos de un imán de barra atrae a un objeto no magnetizado que contenga hierro como un clavo. b) Ejemplo de este efecto en la vida real.



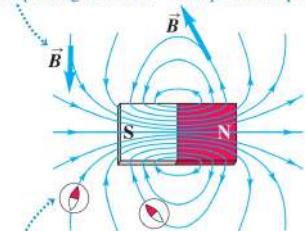
27.3 Esquema del campo magnético terrestre. El campo, que es generado por corrientes en el núcleo fundido del planeta, cambia con el tiempo; hay evidencia geológica que demuestra que invierte por completo su dirección en intervalos de alrededor de medio millón de años.



27.11 Líneas de campo magnético de un imán permanente. Observe que las líneas de campo pasan por el interior del imán.

En cada punto, la línea de campo es tangente al vector del campo magnético \vec{B} .

Cuanto más saturadas estén las líneas de campo, más intenso será el campo en ese punto.

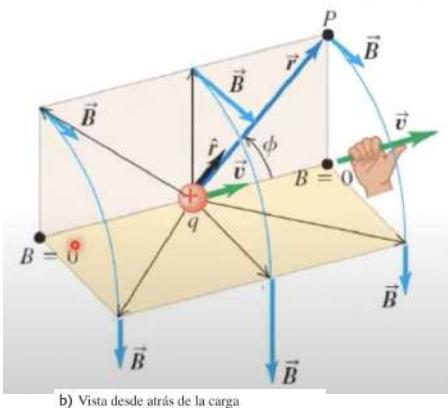


... por lo tanto, las líneas de campo magnético siempre señalan hacia fuera de los polos N y en dirección a los polos S.

EN LA 3º IMAGÉN, Vemos que, a diferencia de campo eléctrico donde las líneas de campo eran abiertas y nacían en cargas positivas y terminaban en cargas negativas, en campos magnéticos, las líneas son cerradas, y esto significa que no existen cargas magnéticas o polos magnéticos individuales. Además de esto, las otras características son parecidas a las de campo eléctrico.

CUIDADO Las líneas de campo magnético no son "líneas de fuerza" → No apuntan en dirección de la fuerza que se ejerce sobre la carga.

Carga eléctrica en movimiento



b) Vista desde atrás de la carga



Analizamos el campo que produce la carga q en movimiento, en el instante que se encuentra en un punto, sobre el punto P.

Observamos que el campo magnético que aparece en P es perpendicular al plano generado por \vec{r} y \vec{v} , y podemos decir que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} . \quad (\frac{\mu_0}{4\pi} \text{ es una constante que indica proporcionalidad})$$

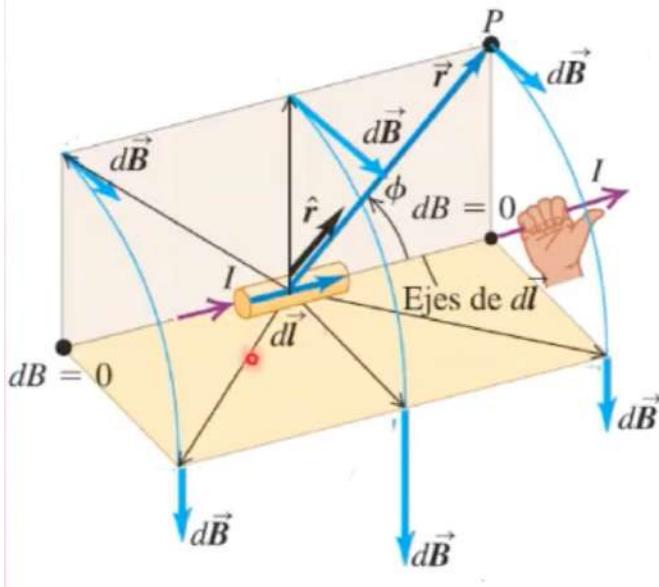
Vemos que el campo disminuye con el cuadrado de la distancia. También podemos decir que la intensidad de B es \propto al seno del ángulo comprendido (ϕ), y mientras menor es el ángulo, es decir a medida que el punto P se va acercando a la recta de acción de la carga, menor es la intensidad del campo, y para un punto sobre esta, $B=0$. Cuando el ángulo llega a $\pi/2$ (90°), B es max.

μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. La influencia de los materiales en la formación de un campo magnético \vec{B} se denomina permeabilidad magnética del material. Para eso, definimos μ_r , y en el SI $\mu_r = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{N}{A^2} \right]$. Esto significa que la dimensión de B sea $\left[\frac{N}{A \cdot m} \right] = [T]$. Vemos en la imagen que las líneas de campo forman círculos si las vemos desde atrás de la carga.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = |q|vB \sin\phi$$

6.2

Corriente eléctrica



27.26 Segmento recto de alambre con longitud \vec{l} que lleva una corriente I en la dirección de \vec{l} . La fuerza magnética en este segmento es perpendicular tanto a \vec{l} como al campo magnético \vec{B} .

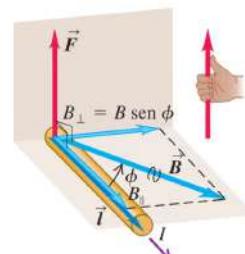
Fuerza \vec{F} sobre un alambre recto que lleva corriente positiva y está orientado a un ángulo ϕ con respecto a un campo magnético \vec{B} :

- La magnitud es $F = IIB_{\perp} = IIB \sin \phi$.
- La dirección de \vec{F} está dada por la regla de la mano derecha.

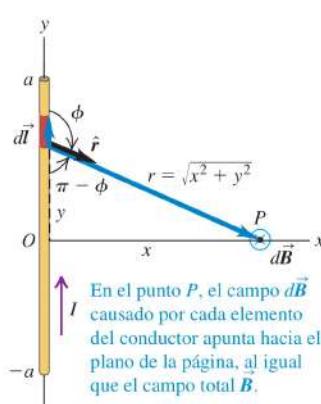
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \cdot d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

"LEY ELEMENTAL DEL CAMPO MAGNÉTICO"
(elemental porque el resultado es infinitesimal)

[NOTA: El campo magnético total generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos generados por las cargas individuales.]



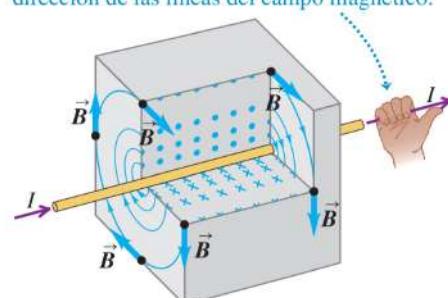
Aplicaciones Conductor recto



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \text{ entonces}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x \sqrt{x^2 + a^2}}$$

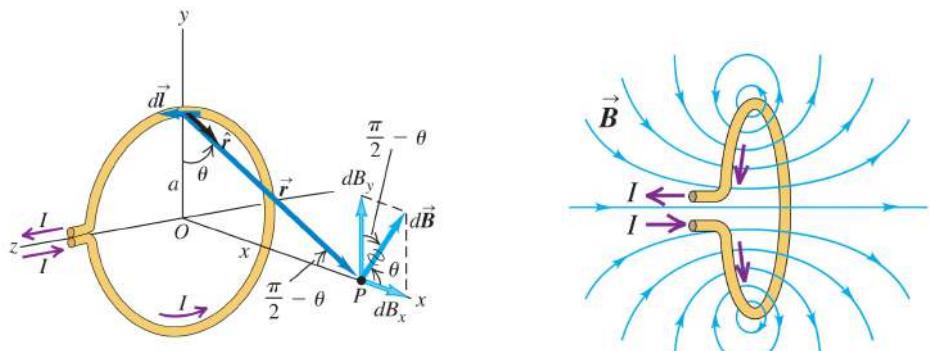
Regla de la mano derecha para el campo magnético alrededor de un alambre que conduce corriente: Apunte el pulgar de su mano derecha en dirección de la corriente. Cierre sus dedos alrededor del alambre en dirección de las líneas del campo magnético.



Si el conductor es infinitamente largo ($a \rightarrow \infty$), nos queda $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$

Bobina circular

28.12 Campo magnético en el eje de una espira circular. La corriente en el segmento $d\vec{l}$ genera el campo $d\vec{B}$, que está en el plano xy . Las corrientes de los otros $d\vec{l}$ generan $d\vec{B}$ con componentes perpendiculares al eje x ; la suma de estas componentes es cero. Las componentes x de los elementos $d\vec{B}$ se combinan para dar el campo total \vec{B} en el punto P .



Como a medida que nos movemos en la espira, la dirección de $d\vec{B}$ cambia, entonces no lo podemos asociar a un escalar y por ende no podemos efectuar la integral. Entonces lo dividimos en componentes dB_x y dB_y . Lo que sucede es que los dB_y en direcciones opuestas se anulan, por lo que $dB_y = 0$. Entonces:

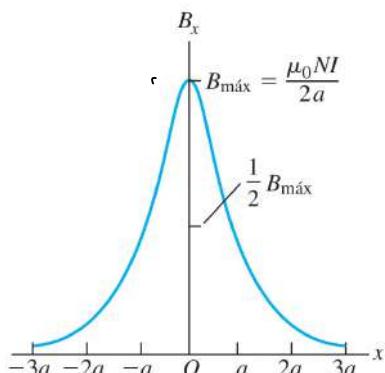
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \quad \begin{aligned} dB_x &= dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \Rightarrow B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (x^2 + a^2)^{3/2}} dl \\ dB_y &= dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = 0 \end{aligned}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

(28.15)

Si tuvieramos N espiras,

28.14 Gráfica del campo magnético a lo largo del eje de una bobina circular con N espiras. Cuando x es mucho más grande que a , la magnitud del campo disminuye aproximadamente con $1/x^3$.

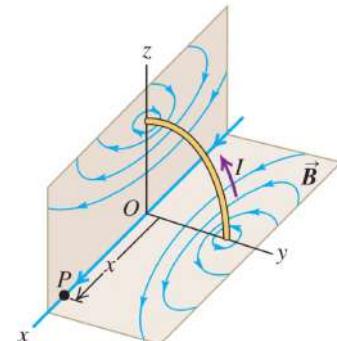


$$\text{En el eje: } B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

En el centro:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a}$$

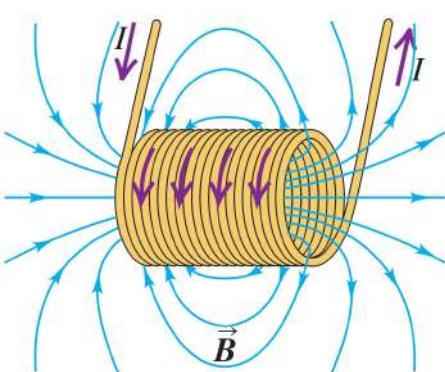
28.15 Líneas de campo magnético producidas por la corriente en una espira circular. En los puntos sobre el eje, el campo \vec{B} tiene la misma dirección que el momento magnético de la espira.



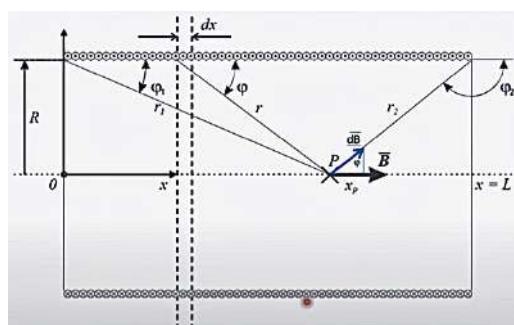
CUIDADO Campo magnético de una bobina Las ecuaciones (28.15), (28.16)

son válidas sólo sobre el eje de una espira o bobina. ¡No trate de aplicarlas en otros puntos!

Solenoide



N = número de espiras ; L = largo del solenoide y R = radio del solenoide.
 $N/L = n$ = espiras por unidad de longitud.



Calculamos \vec{B} en P , un punto sobre el eje x .

De vuelta, cuando integramos, las componentes en y se anulan, entonces el campo está en x .

Por ley de Biot y Savart, $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot dc \cdot \sin \theta}{r^2}$. Como $B = B_x$, nos queda $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot dc \cdot \sin \theta}{r^2} \cdot \cos \varphi$. Ahora multiplicamos por el

el número de espiras contenido en el dx que tomamos, y nos quedará $d^2 B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot dc \cdot \sin \theta}{r^2} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{N dx}{L} \cdot \theta = \text{cte} = 90^\circ, \sin \theta = 1$

Luego, el campo total en la dirección del eje, nos queda $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{x=0}^{x=L} \oint_C \frac{i \cdot d\ell}{r^2} \cdot \frac{N dx}{L} \cdot \cos \varphi$. Integrando, nos queda $B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{Ni}{L} \cdot \left[\frac{L - x_p}{\sqrt{R^2 + (L - x_p)^2}} + \frac{x_p}{\sqrt{R^2 + x_p^2}} \right]$.

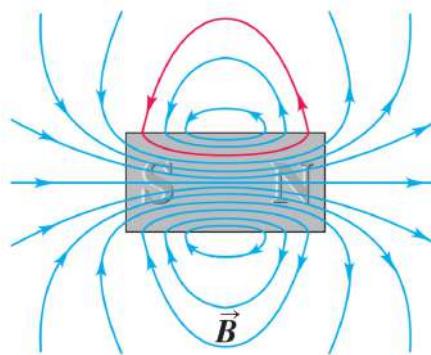
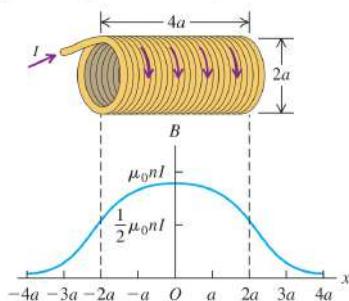
Para el punto medio del solenoide, $x_p = \frac{L}{2}$

$$B = \mu_0 \cdot \frac{Ni}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\frac{R^2}{L^2} + 1}}$$

Para los extremos del eje del solenoide, donde $x_p = 0$ y $x_p = L$

$$B = \mu_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Ni}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + 1}}$$

28.24 Magnitud del campo magnético en puntos a lo largo del eje de un solenoide con longitud $4a$, equivalente a cuatro veces su radio a . La magnitud del campo en cada extremo es alrededor de la mitad de su valor en el centro. (Compare con la figura 28.14 para el campo de N espiras circulares.)



→ ESTO NO ES UN SOLENOIDE, PERO LAS LINEAS DE CAMPO SE COMPORTAN IGUAL.

Ejemplo:

Si el solenoide es un solenoide largo ($R \ll L$), nos queda:

$$\text{para } x_p = L/2 : B = \mu_0 \frac{Ni}{L}$$

$$\text{Para } x_p = 0 \text{ ó } x_p = L : B = \mu_0 \frac{1}{2} \frac{Ni}{L}$$

Si el solenoide es un solenoide corto ($L \ll R$), nos queda

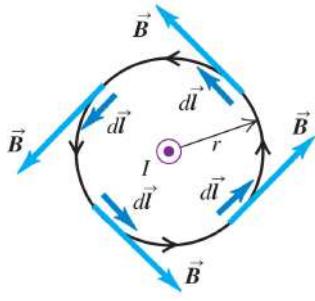
$$B = \mu_0 \frac{1}{2} \frac{Ni}{L} \left[\frac{L - x_p}{R} + \frac{x_p}{R} \right] = \mu_0 \frac{1}{2} \frac{Ni}{L} \left[\frac{L}{R} \right] = \mu_0 \frac{1}{2} \frac{Ni}{R} \rightarrow \text{es igual al campo en el centro de una bobina plana}$$

6.4 Integral de Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

- a) La trayectoria de integración es un círculo centrado en el conductor; la integración recorre el círculo en sentido antihorario.

Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$



Tomando una curva, donde el campo \vec{B} es siempre tangente a la curva, $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R}$ entonces $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. como \vec{B} y $d\vec{l}$ son paralelos, $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$ y como

R es cte alrededor del circuito concentríco con el conductor, podemos sacar \vec{B} de la integral, por lo que nos queda la integral del círculo que es igual a la circunferencia.

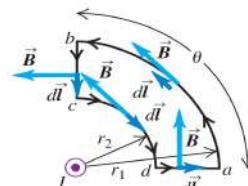
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (2\pi r) = \mu_0 I \rightarrow \text{Circulación de } \vec{B}$$

La circulación puede ser negativa, por lo que

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -B dl, \text{ entonces nos queda } = -\mu_0 I.$$

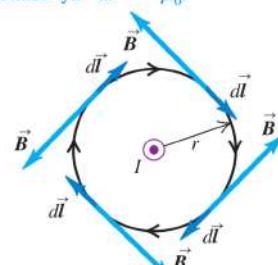
- c) Trayectoria de integración que no encierra el conductor.

Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$



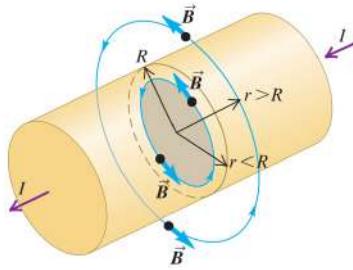
- b) Misma trayectoria de integración que en el inciso a), pero la integración recorre el círculo en sentido horario.

Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$



Conductor rectilíneo

28.20 Para encontrar el campo magnético en el radio $r < R$, se aplica la ley de Ampère al círculo que encierra el área de color roja. La corriente a través del área roja es $(r^2/R^2)I$. Para obtener el campo magnético en el radio $r > R$, se aplica la ley de Ampère al círculo que encierra todo el conductor.

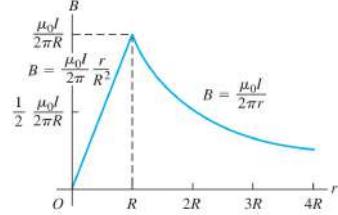


Como \vec{B} dentro del conductor no varía y es tangente a la trayectoria circular de integración, la magnitud de la integral es $B(2\pi r)$. Para calcular la I_{enc} , utilizamos el concepto de densidad de corriente $J = I/\pi r^2$ (corriente por unidad de área). Entonces, la integral de Ampère da:

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2}$$

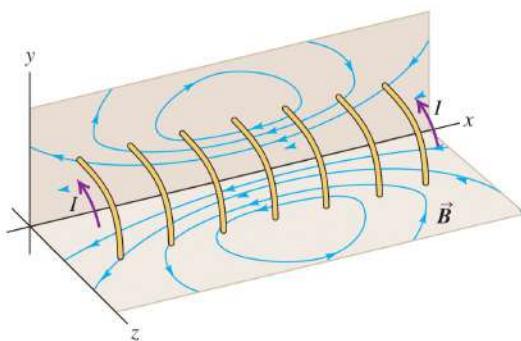
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{r}{R^2}, \text{ cuando } r > R$$

28.21 Magnitud del campo magnético dentro y fuera de un conductor cilíndrico, largo y recto con radio R , que transporta una corriente I .

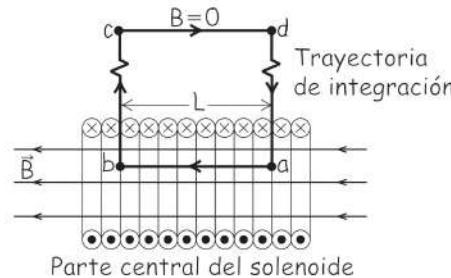


Solenoide largo

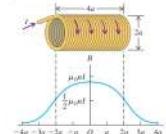
28.22 Líneas de campo magnético producidas por la corriente en un solenoide. Por claridad, sólo se ilustran unas cuantas espiras.



28.23 Nuestro dibujo para este problema.



28.24 Magnitud del campo magnético en puntos a lo largo del eje de un solenoide con longitud 4a, equivalente a cuatro veces su radio a. La magnitud del campo en cada extremo es siete veces la mitad de su valor en el centro. (Compare con la figura 28.14 para el campo de N espiras circulares.)



L (está más arriba)

Para el lado \overline{ab} , \vec{B} va en la misma dirección, así que son paralelos. Entonces, tenemos

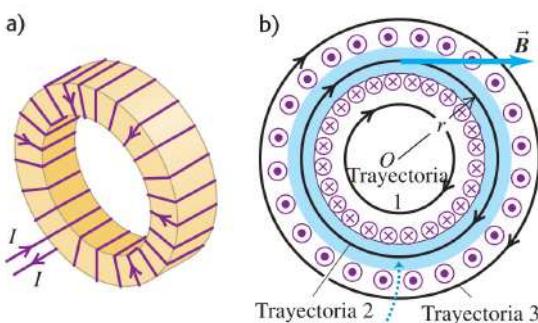
$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$$

A lo largo de \overline{bc} y \overline{da} , $\vec{B}=0$ porque \vec{B} es perpendicular a ellos. A lo largo de \overline{cd} , $\vec{B}=0$ porque la integral se reduce a BL . El número de espiras en el tramo L es nL . Por cada uno de ellos pasa una corriente I . Entonces, $I_{enc} = n \cdot L \cdot I$. Según Ley de Ampère, como la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es positiva, I_{enc} también. Entonces, la ley de Ampère da la magnitud de B :

$$BL = \mu_0 \cdot n \cdot L \cdot I \Rightarrow B = \mu_0 \cdot n \cdot I, \text{ en donde } n \text{ es el número de vueltas por unidad de longitud}$$

Solenoide toroidal

28.25 a) Solenoide toroidal. Por claridad, sólo se muestran algunas espiras. **b)** Trayectorias de integración (círculos negros) usadas para calcular el campo \vec{B} establecido por la corriente (se representa con puntos y cruces).



El campo magnético está confinado casi por completo en el espacio encerrado por los devanados (en azul).

Para la trayectoria de integración 1, como no se encierra corriente por ella, $\vec{B}=0$ en cualquier punto de la trayectoria.

Para la trayectoria 3, cada espira pasa dos veces a través del área delimitada por ella, por lo que las corrientes se cancelan (porque tienen sentidos opuestos). Entonces $\vec{B}=0$.

Para la trayectoria 2, la corriente total encerrada es $I_{enc} = NI$, donde N es el número total de espiras. En la figura b) se ve que I_{enc} es positiva para la trayectoria de integración en sentido horario. Entonces:

$$2\pi r B = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Si tenemos un toroide, no podemos saber si circula corriente porque no tenemos acceso al interior del mismo.

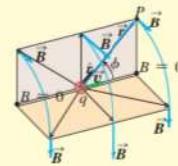
CAPÍTULO 28 RESUMEN

Campo magnético de una carga en movimiento:

El campo magnético \vec{B} creado por una carga q en movimiento con velocidad \vec{v} depende de la distancia r entre el punto de fuente (ubicación de q) y el punto de campo (donde se mide \vec{B}). El campo \vec{B} es perpendicular a \vec{v} y a \hat{r} , el vector unitario dirigido del punto de fuente al punto de campo. El principio de superposición de campos magnéticos dice que el campo total \vec{B} producido por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos producidos por las cargas individuales.

(Véase el ejemplo 28.1.)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28.2)$$

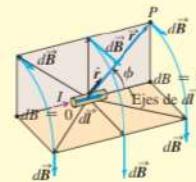


Campo magnético de un conductor que transporta corriente:

La ley de Biot y Savart da el campo magnético $d\vec{B}$ creado por un elemento $d\vec{l}$ de un conductor que transporta una corriente I . El campo $d\vec{B}$ es perpendicular tanto a $d\vec{l}$ como a \hat{r} , el vector unitario dirigido desde el elemento hasta el punto de campo. El campo \vec{B} creado por un conductor finito que transporta corriente es la integral de $d\vec{B}$ sobre la longitud del conductor.

(Véase el ejemplo 28.2.)

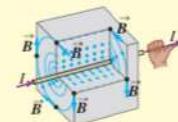
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (28.6)$$



Campo magnético de un conductor largo, recto y portador de corriente:

El campo magnético \vec{B} a una distancia r de un conductor largo, recto y que transporta una corriente I tiene una magnitud inversamente proporcional a r . Las líneas de campo magnético son círculos coaxiales con el cable, con direcciones dadas por la regla de la mano derecha. (Véanse los ejemplos 28.3 y 28.4.)

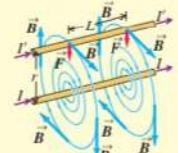
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (28.9)$$



Fuerza magnética entre conductores que transportan corriente:

Dos conductores largos, paralelos y que transportan corriente se atraen si las corrientes van en el mismo sentido, y se repelen si las corrientes tienen sentidos opuestos. La fuerza magnética por unidad de longitud entre los conductores depende de sus corrientes I y I' y su separación r . La definición de ampere se basa en esta relación. (Véase el ejemplo 28.5.)

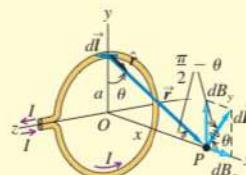
$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \quad (28.11)$$



Campo magnético de una espira de corriente: La ley de Biot y Savart permite calcular el campo magnético producido a lo largo del eje de una espira circular conductora, de radio a , que transporta una corriente I . El campo depende de la distancia x a lo largo del eje desde el centro de la espira al punto de campo. Si hay N espiras, el campo se multiplica por N . En el centro de la espira, $x = 0$. (Véase el ejemplo 28.6.)

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (28.15)$$

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \quad (28.17)$$



Ley de Ampère: La ley de Ampère establece que la integral de línea de \vec{B} alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a μ_0 multiplicado por la corriente neta a través del área encerrada por la trayectoria. El sentido positivo de la corriente se determina mediante la regla de la mano derecha.

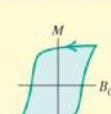
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (28.20)$$



Campos magnéticos debidos a distribuciones de corriente: La siguiente tabla lista los campos magnéticos causados por varias distribuciones de corriente. En cada caso, el conductor transporta una corriente I .

Distribución de corriente	Punto en el campo magnético	Magnitud del campo magnético
Conductor largo y recto	Distancia r desde el conductor	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Espira circular de radio a	Sobre el eje de la espira	$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$
	En el centro de la espira	$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$ (para N espiras, multiplique estas expresiones por N)
Conductor largo y cilíndrico de radio R	Dentro del conductor, $r < R$	$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$
	Afuera del conductor, $r > R$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Solenoide largo, con devanado compacto y n vueltas por unidad de longitud, cerca de su punto medio	Dentro del solenoide, cerca del centro	$B = \mu_0 n I$
	Afuera del solenoide	$B \approx 0$
Solenoide toroidal (toroide) con devanado compacto y N vueltas	Dentro del espacio encerrado por los devanados, a una distancia r del eje de simetría.	$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$
	Afuera del espacio encerrado por los devanados	$B \approx 0$

Materiales magnéticos: Cuando están presentes materiales magnéticos, la magnetización del material ocasiona una contribución adicional a \vec{B} . Para materiales paramagnéticos y diamagnéticos, μ_0 se sustituye en las expresiones del campo magnético por $\mu = K_m \mu_0$, donde μ es la permeabilidad del material y K_m es su permeabilidad relativa. La susceptibilidad magnética χ_m se define como $\chi_m = K_m - 1$. Las susceptibilidades magnéticas para materiales paramagnéticos son pequeñas cantidades positivas; las de los materiales diamagnéticos son pequeñas cantidades negativas. Para materiales ferromagnéticos, K_m es mucho mayor que la unidad y no es constante. Algunos materiales ferromagnéticos son imanes permanentes y retienen su magnetización aun después de retirado el campo magnético externo. (Véanse los ejemplos 28.11 y 28.12.)



UNIDAD VII: INTERACCIÓN MAGNÉTICA**7.1 Fuerzas magnéticas sobre cargas móviles.****Interacciones magnéticas:**

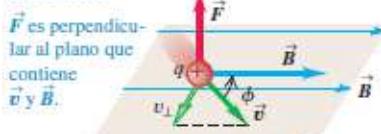
- Una carga o corriente móvil crea un campo magnético en el espacio circundante.
- El campo magnético ejerce una fuerza \vec{F} sobre cualquier otra carga o corriente en movimiento presente en el campo.

Fuerza magnética:Características: $F = |q|v_{\perp}B = |q|vB \sin\phi$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Su magnitud es proporcional a la magnitud de la carga y la magnitud del campo.
- La fuerza depende de la velocidad de la partícula.
- La fuerza no tiene la misma dirección que \vec{B} , sino que siempre es perpendicular al campo y a la velocidad.

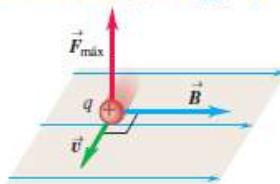
Una carga que se mueva con un ángulo ϕ con respecto a un campo magnético experimenta una fuerza magnética con magnitud $F = |q|v_{\perp}B = |q|vB \sin\phi$.



Una carga que se mueve en forma paralela al campo magnético experimenta una fuerza magnética igual a cero.



Una carga que se mueva de manera perpendicular a un campo magnético experimenta una fuerza magnética máxima con magnitud $F_{\max} = qvB$.

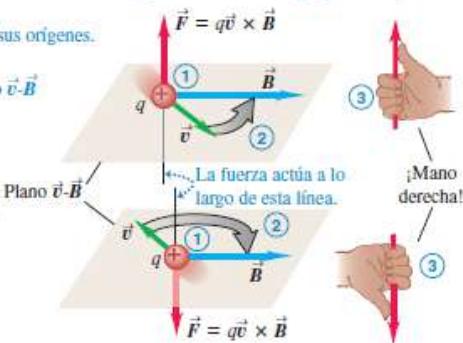
**Regla de la mano derecha**

Regla de la mano derecha para la dirección de la fuerza magnética sobre una carga positiva que se mueve en un campo magnético:

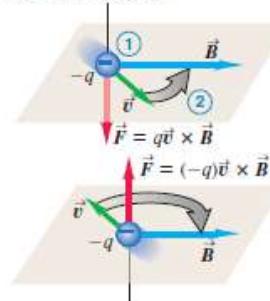
① Coloque los vectores \vec{v} y \vec{B} unidos en sus orígenes.

② Imagine que gira \vec{v} hacia \vec{B} en el plano $\vec{v}-\vec{B}$ (en el menor ángulo).

③ La fuerza actúa a lo largo de una línea perpendicular al plano $\vec{v}-\vec{B}$. Enrolle los dedos de su mano derecha en torno a esta línea en la misma dirección que giró a \vec{v} . Ahora, su pulgar apunta en la dirección que actúa la fuerza.



Si la carga es negativa, la dirección de la fuerza es *opuesta* a la que da la regla de la mano derecha.

**7.3 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético. Aplicaciones: Selector de velocidades; Experimento de J.J. Thompson. Espectrómetro de masas. Efecto Hall.**

Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético: el movimiento de una partícula cargada bajo la sola influencia de un campo magnético siempre ocurre con rapidez constante.

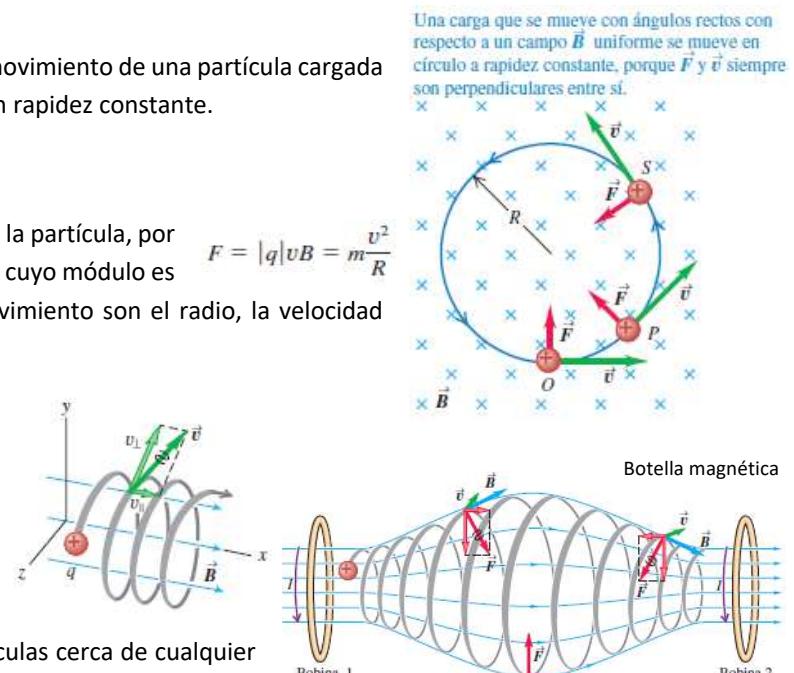
Caso de una órbita de una partícula en un campo uniforme:

- La fuerza es siempre perpendicular a la trayectoria circular de la partícula, por lo que esta experimenta una fuerza centrípeta hacia el centro cuyo módulo es $F = |q|vB = m\frac{v^2}{R}$
- Otros aspectos que se pueden calcular a partir de este movimiento son el radio, la velocidad angular y la frecuencia.

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad \omega = \frac{v}{R} = v \frac{|q|B}{mv} = \frac{|q|B}{m} \quad f = \omega/2\pi.$$

Caso de movimiento no perpendicular al campo magnético: el movimiento de esta partícula tiene componentes tanto paralelos como perpendiculares al campo magnético, por lo que se mueve en una trayectoria helicoidal.

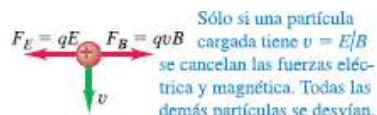
Caso de movimiento en campo magnético no uniforme: las partículas cerca de cualquier extremo de la región experimentan una fuerza magnética hacia el centro de la región. Esta es una forma de contener un gas ionizado con temperatura del orden de 10^6 K que vaporizaría cualquier material para contenedores.



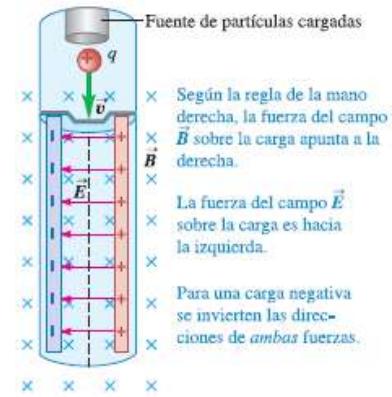
Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas

Selector de velocidades de campo cruzado: es un arreglo de campos eléctricos y magnéticos que permite seleccionar partículas que tengan una velocidad específica, dado un haz de partículas cargadas. Está formado por 2 campos, uno eléctrico y otro magnético, perpendiculares entre sí, de manera que las fuerzas tengan sentido opuesto. Por Fuerza de Lorentz,

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow -qE + qvB = 0 \rightarrow v = \frac{E}{B}$$

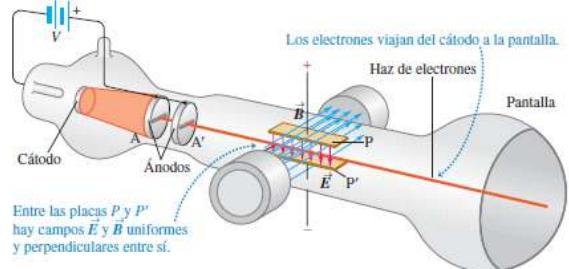


Sólo si una partícula cargada tiene $v = E/B$ se cancelan las fuerzas eléctrica y magnética. Todas las demás partículas se desvían.



Experimento de J. J. Thomson: su objetivo fue medir la razón que hay entre la carga y la masa del electrón (relación e/m). El aparato está formado por un tubo vacío al alto vacío (con una presión de 0,1 y 0,3 mmHg). Como fuentes de electrones se colocan dos electrodos: un cátodo (potencial negativo) y ánodo (potencial positivo). Al cátodo se lo calienta a una gran temperatura, aumentando la cantidad emisiva de electrones. Algunos electrones pasan el ánodo, llegando a una zona donde no hay campo eléctrico, por lo que tendrán un MRU. Este haz de electrones atraviesa una región donde hay campos eléctricos y magnéticos cruzados (un selector de velocidades). Entre ánodo y cátodo se cumple que:

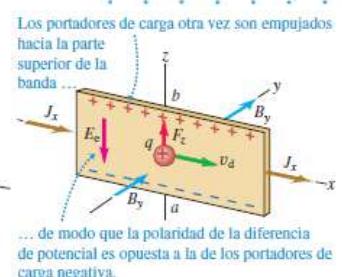
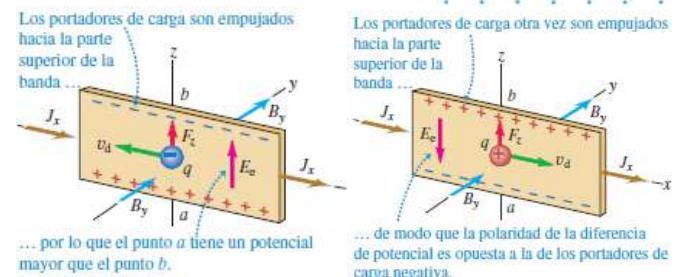
$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad \text{o bien,} \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \longrightarrow \quad \frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{o bien,} \quad \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} \quad \longrightarrow \quad e/m = 1.75882012(15) \times 10^{11} \text{ C/kg}$$



Espectrómetro de masas: sirve para medir las masas de iones y separar isótopos de diferentes masas de un elemento. Los iones positivos forman una fuente que pasa a través de las ranuras S1 y S2 para formar un haz estrecho. Despues, los iones pasan a través de un selector de velocidad para bloquear todos los iones, excepto quienes cumplen con $v = E / B$. Por último, los iones pasan hacia una región con un campo magnético \vec{B}' perpendicular a la figura, donde se mueven en arcos circulares con radio R determinado por $R = mv / qB'$. Así, el campo magnético separa las partículas por masa y cuanto más grande sea la masa de una partícula, mayor será el radio de su trayectoria. Se utiliza con el carbono y con el uranio.

Efecto Hall: se utiliza para determinar el signo de los portadores de carga, su concentración n y para medir la rapidez de deriva de las partículas.

- Se considera un conductor en forma de banda plana, la corriente en la dirección de $+x$ y un campo magnético uniforme y perpendicular al plano de la banda en la dirección de $+y$. Además, la velocidad de deriva de las cargas tiene una magnitud v_d y la fuerza magnética va en ambos casos hacia arriba, sin importar el signo de las cargas ($F_z = |q|v_d B$).
- Si los portadores de carga son negativos, en el borde superior se acumula un exceso de carga negativa, y en el inferior, de positiva. Esto ocurre hasta que el campo electrostático transversal \vec{E}_c se hace suficientemente grande como para generar una fuerza que sea igual y opuesta a la fuerza magnética. Este campo eléctrico provoca una diferencia de potencial llamada voltaje o fem de Hall.
- Si los portadores de carga son positivos, sucede lo contrario y la diferencia de potencial es opuesta.



Desarrollo matemático:

$$qE_z + qu_d B_y = 0 \longrightarrow E_z = -v_d B_y \longrightarrow J_x = nqv_d \longrightarrow nq = \frac{-J_x B_y}{E_z}$$

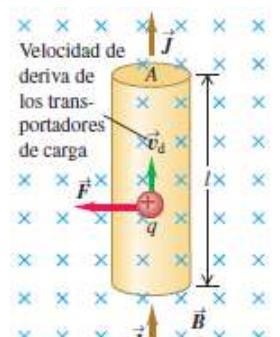
7.4 Fuerza magnética sobre conductores con corriente. Fuerza entre conductores con corriente.

Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente: las fuerzas magnéticas sobre las cargas en movimiento en el interior del conductor transmiten al material del conductor, el cual en conjunto experimenta una fuerza distribuida en toda su longitud. Si la fuerza sobre una partícula es $\vec{F}_q = q(\vec{v}_d \times \vec{B})$, entonces la fuerza total sobre las cargas en movimiento en el segmento de longitud l y sección S es:

$$F = (nAl)(qv_d B) = (nqv_d A)(IB)$$

Como la densidad de corriente es $J = nqv_d$ y el producto JA es la corriente total I, queda que

$$F = IIB \longrightarrow \vec{F} = \vec{I} \vec{L} \times \vec{B}$$



Resumen Física II

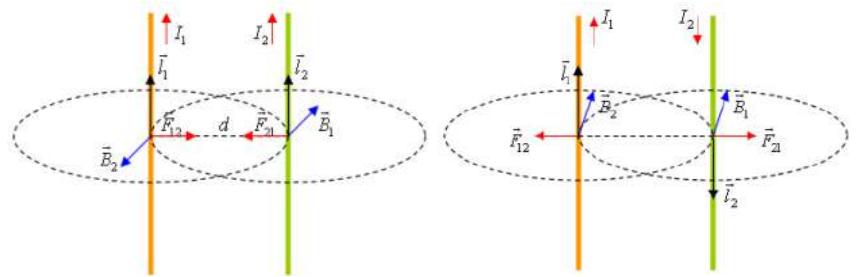
Fuerza magnética entre conductores paralelos con corriente: sean 2 conductores paralelos que conducen corrientes eléctricas en el mismo sentido. Por líneas de flujo magnético cada conductor producirá un campo magnético saliente a su izquierda y entrante a su derecha.

$$\vec{F}_{21} = I_1 l \times \vec{B}_{12}$$

$$\vec{F}_{12} = I_2 l \times \vec{B}_{21}$$

Si $l \rightarrow \infty$, entonces

$$\frac{F_{12}}{l} = I_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}; \quad \frac{F_{21}}{l} = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

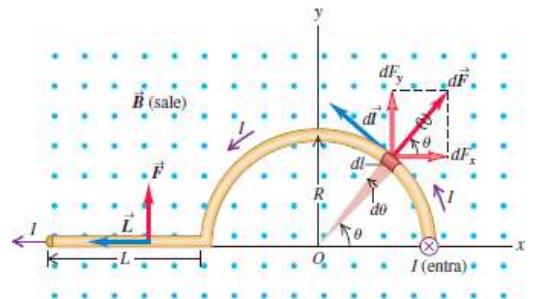


Conclusión: si las corrientes tienen el mismo sentido, las fuerzas serán de atracción, y si tienen sentidos opuestos, las fuerzas serán de repulsión.

Definición de Ampere (anterior): un Ampere es la corriente invariable que, si está presente en dos conductores paralelos de longitud infinita y separados por una distancia de un metro de espacio vacío, provoca que cada conductor experimente una fuerza de $2 \times 10^{-7} \left(\frac{N}{A}\right)$. Es decir, si $l \rightarrow \infty$ y $r = 1 \text{ m}$, entonces $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ y $\frac{F_{12}}{l} = \frac{F_{21}}{l} = 2 \times 10^{-7} \left(\frac{N}{A}\right)$.

Fuerza magnética en un conductor curvo: si tomo una pequeña parte del conductor dl , entonces la fuerza será $d\vec{F} = Idl \times \vec{B}$ y perpendicular al conductor y al campo magnético. De esta manera, si dividimos a la fuerza en sus componentes x e y, y consideramos a $dl = R \cdot d\theta$:

$$\begin{cases} dF_x = IRB \cos\theta \, d\theta \\ dF_y = IRB \sin\theta \, d\theta \end{cases}$$



Integrando resulta:

$$\begin{aligned} F_x &= IRB \int_0^\pi \cos\theta \, d\theta = 0 \\ F_y &= IRB \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = 2IRB \end{aligned}$$

Por lo que sobre el tramo curvo, la fuerza es $\vec{F} = 2IRB \hat{j}$, sobre el tramo recto es $\vec{F} = ILB \hat{j}$ y la fuerza total sobre el conductor es: $\vec{F} = IB(L + 2R)\hat{j}$.

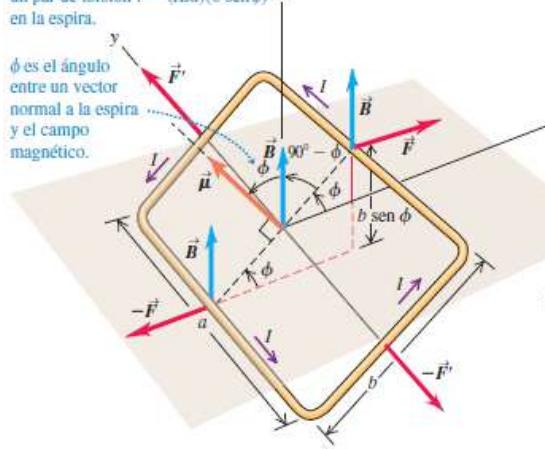
7.5 Momento mecánico sobre una espira. Momento magnético dipolar. Trabajo electromagnético. Aplicación a motor de corriente continua.

Momento mecánico sobre una espira: sea una espira de corriente inclinada un ángulo ϕ con respecto al plano horizontal. La fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme es cero ya que las fuerzas en lados opuestos se cancelan por pares. Sin embargo, el par de torsión neto en general no es igual a cero.

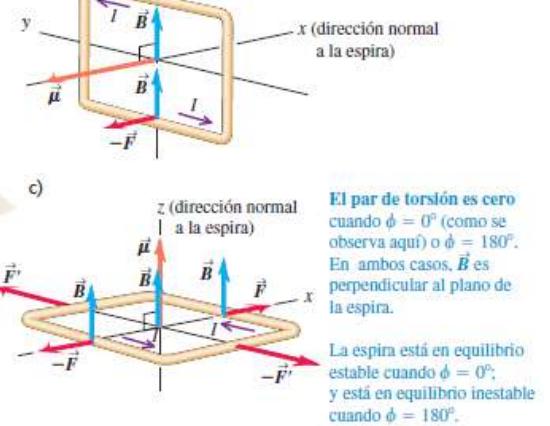
- Sobre el conductor de longitud b la fuerza en dirección +y es: $F' = IbB \sin(90 - \phi) = IbB \cos\phi$. Las fuerzas F' se cancelan.
- La fuerza sobre el lado derecho de la espira con longitud a en dirección +x es: $F = IaB$.
- Las fuerzas producen un par de torsión o momento mecánico en dirección +y: $\tau = Fb \sin\phi = (Ia)(b \sin\phi) = IBS \sin\phi$ ($S = ab$)
- El momento magnético $\vec{\mu} = IS$ (Am^2), por lo que el momento mecánico

$$\tau = \mu B \sin\phi \rightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Los dos pares de fuerzas que actúan sobre la espira se cancelan, por lo que no hay fuerza neta que actúe sobre ella.
Sin embargo, las fuerzas en los lados a de la espira (\vec{F}' y $-\vec{F}'$) producen un par de torsión $\tau = (Ia)(b \sin\phi)$ en la espira.



El par de torsión es máximo cuando $\phi = 90^\circ$ (de modo que \vec{B} está en el plano de la espira).

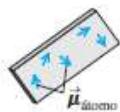


El par de torsión es cero cuando $\phi = 0^\circ$ (como se observa aquí) o $\phi = 180^\circ$. En ambos casos, \vec{B} es perpendicular al plano de la espira.
La espira está en equilibrio estable cuando $\phi = 0^\circ$; y está en equilibrio inestable cuando $\phi = 180^\circ$.

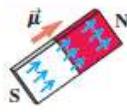
Resumen Física II

Momento magnético dipolar: los polos norte y sur de un imán representan la cabeza y la cola del momento magnético dipolar $\vec{\mu}$. 3 casos:

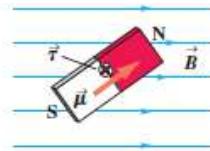
a) Hierro no magnetizado: los momentos magnéticos se orientan al azar.



b) En un imán de barra, los momentos magnéticos están alineados.



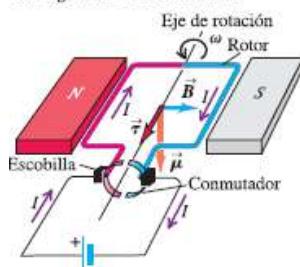
c) Un campo magnético crea un par de torsión sobre el imán de barra que tiende a alinear su momento dipolar con el campo \vec{B} .



Trabajo electromagnético: cuando un dipolo magnético cambia de orientación en un campo magnético, éste realiza trabajo sobre aquel. En un desplazamiento angular infinitesimal $d\phi$ el trabajo $dW = \tau d\phi$. Si integramos dW se obtiene que la energía potencial para un dipolo magnético es $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \phi$. De esta manera, U es igual a cero cuando el momento magnético es perpendicular al campo.

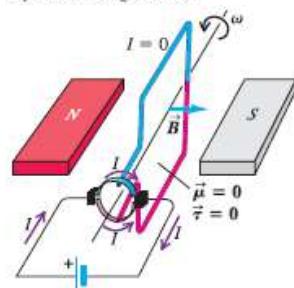
Aplicación a motor de corriente continua: un campo magnético ejerce un par de torsión sobre una corriente en el rotor. Así, se transforma energía eléctrica en mecánica. El movimiento del rotor a través del campo magnético causa una fuerza llamada fuerza contra-electromotriz.

a) Las escobillas están alineadas con los segmentos del commutador



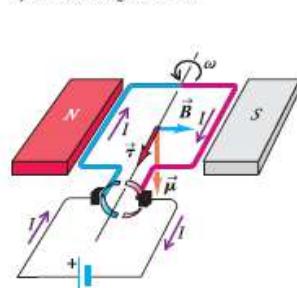
- La corriente ingresa por el lado rojo del rotor y sale por el lado azul.
- Por lo tanto, el par de torsión magnético hace que el rotor gire en sentido antihorario.

b) El rotor ha girado 90°



- Cada escobilla está en contacto con ambos segmentos del comutador, por lo que la corriente se desvía totalmente del rotor.
- Ningún par de torsión magnético actúa sobre el rotor.

c) El rotor ha girado 180°

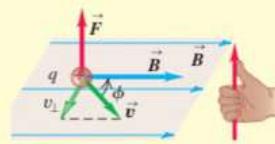


- Las escobillas están alineadas otra vez con los segmentos del comutador. Esta vez la corriente entra por el lado azul del rotor y sale por el lado rojo.
- Por lo tanto, el par de torsión magnético otra vez ocasiona que el rotor gire en sentido antihorario.

CAPÍTULO 27 RESUMEN

Fuerzas magnéticas: Las interacciones magnéticas son fundamentalmente interacciones entre partículas cargadas en movimiento. Estas interacciones se describen mediante el campo magnético vectorial, denotado con \vec{B} . Una partícula con carga q que se mueve con velocidad \vec{v} en un campo magnético \vec{B} experimenta una fuerza \vec{F} perpendicular tanto a \vec{v} como a \vec{B} . La unidad del SI para el campo magnético es la tesla: ($1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$). (Véase el ejemplo 27.1.)

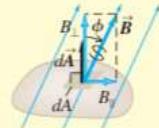
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (27.2)$$



Campo y flujo magnético: Un campo magnético se representa gráficamente con líneas de campo magnético. Para un punto cualquiera, una línea de campo magnético es tangente a la dirección de \vec{B} en ese punto. Donde las líneas de campo están muy cercanas entre sí, la magnitud del campo es grande y viceversa. El flujo magnético Φ_B a través de un área se define en forma similar al flujo eléctrico. La unidad del SI para el flujo magnético es el weber ($1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$). El flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero (ley de Gauss del magnetismo). Como resultado, las líneas de campo magnético siempre se cierran sobre sí mismas. (Véase el ejemplo 27.2.)

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int B_{\perp} dA \\ &= \int B \cos \phi dA \\ &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A}\end{aligned} \quad (27.6)$$

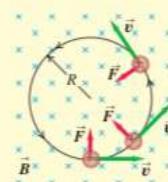
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{superficie cerrada}) \quad (27.8)$$



Movimiento en un campo magnético: La fuerza magnética siempre es perpendicular a \vec{v} ; una partícula que se mueve solo bajo la acción de un campo magnético lo hace con rapidez constante. En un campo uniforme, una partícula con velocidad inicial perpendicular al campo se mueve en un círculo con radio R , que depende de la intensidad del campo magnético B , y la masa de la partícula m , la rapidez v y la carga q . (Véanse los ejemplos 27.3 y 27.4).

Los campos eléctricos y magnéticos transversales se usan como selector de velocidad. Las fuerzas eléctricas y magnéticas se cancelan exactamente si $v = E/B$. (Véanse los ejemplos 27.5 y 27.6.)

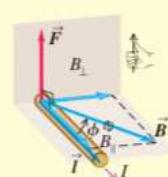
$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad (27.11)$$



Fuerza magnética sobre un conductor: Un segmento rectilíneo de conductor que transporta una corriente I en un campo magnético uniforme \vec{B} experimenta una fuerza \vec{F} perpendicular tanto a \vec{B} como al vector \vec{I} , que apunta en la dirección de la corriente y tiene magnitud igual a la longitud del segmento. Una relación similar da la fuerza $d\vec{F}$ sobre un segmento infinitesimal que transporte corriente $d\vec{I}$. (Véanse los ejemplos 27.7 y 27.8.)

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad (27.19)$$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (27.20)$$

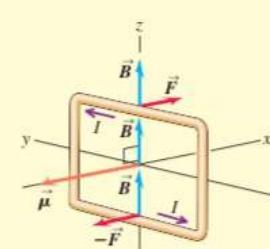


Par de torsión magnético: Una espira de corriente con área A y corriente I en un campo magnético uniforme \vec{B} no experimenta fuerza magnética neta, pero sí un par de torsión magnético de magnitud τ . El par de torsión vectorial $\vec{\tau}$ se expresa en términos del momento magnético $\vec{\mu} = IA$ de la espira, igual que la energía potencial U de un momento magnético en un campo magnético \vec{B} . El momento magnético de una espira sólo depende de la corriente y del área; es independiente de la forma de la espira. (Véanse los ejemplos 27.9 y 27.10.)

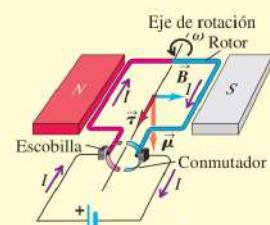
$$\tau = IBA \sin \phi \quad (27.23)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (27.26)$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \phi \quad (27.27)$$

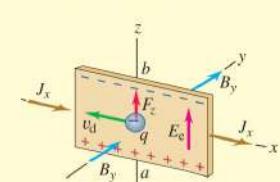


Motores eléctricos: En un motor de cd, un campo magnético ejerce un par de torsión sobre una corriente en el rotor. El movimiento del rotor a través del campo magnético causa una fem inducida llamada fuerza contraelectromotriz. Para un motor en serie, en el que la bobina del rotor está conectada en paralelo con las bobinas que producen el campo magnético, el voltaje terminal es la suma de la fuerza contraelectromotriz y la caída I_r a través de la resistencia interna. (Véase el ejemplo 27.11.)



El efecto Hall: El efecto Hall es una diferencia de potencial perpendicular a la dirección de la corriente en un conductor, cuando el conductor se coloca en un campo magnético. El potencial de Hall está determinado por el requerimiento de que el campo eléctrico asociado debe compensar exactamente la fuerza magnética sobre una carga en movimiento. Las mediciones del efecto Hall se utilizan para determinar el signo de los portadores de carga y su concentración n . (Véase el ejemplo 27.12.)

$$nq = \frac{-J_x B_y}{E_z} \quad (27.30)$$



UNIDAD VIII: LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY-LENZ**8.1 Ley de Faraday-Lenz; aplicación a: espira rotante (generador de C.A. y de C.C.); conductor recto; disco de Faraday.****Introducción (Experimentos de inducción):**

Fem inducida: es la fem que se requiere para generar una corriente inducida.

- a) Un imán fijo NO induce una corriente en una bobina.



- b) Mover el imán acercándolo o alejándolo de la bobina.



- c) Mover una segunda bobina que conduce corriente, acercándola o alejándola de la primera.



- d) Variar la corriente en la segunda bobina (cerrando o abriendo el interruptor).



Todas estas acciones SÍ inducen una corriente en la bobina. ¿Qué tienen en común?*

*Provocan que el campo magnético a través de la bobina cambie.

A partir de este experimento, se pueden hacer distintas variaciones. En todas estas, el elemento común es el flujo magnético cambiante a través de la bobina conectada al galvanómetro. El flujo cambia ya sea porque el campo magnético cambia con el tiempo o porque la bobina se mueve a través de un campo magnético no uniforme.

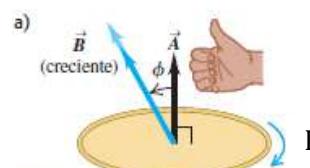
$$\text{Flujo magnético: } d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{\perp} dA = B dA \cos\phi \rightarrow \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B dA \cos\phi \rightarrow \Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos\phi$$

Ley de Faraday-Lenz: la fem inducida en una espira cerrada es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético a través de la espira con respecto al tiempo, es decir,

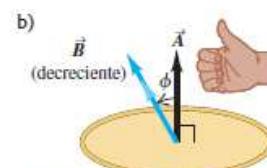
$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} [\text{V}]$$

Ley de Lenz: la dirección de cualquier efecto de la inducción magnética es la que se opone a la causa del efecto.

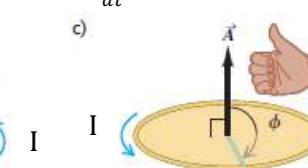
Sentido de la corriente inducida: indicará si la corriente está dirigida en sentido antihorario u horario alrededor de la espira, según si la fem inducida es positiva o negativa. Si fueran N espiras, entonces: $\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt} [\text{V}]$



- El flujo es positivo ($\Phi_B > 0$) ...
- ... y se torna más positivo ($d\Phi_B/dt > 0$).
- La fem inducida es negativa ($\varepsilon < 0$).



- El flujo es positivo ($\Phi_B > 0$) ...
- ... y se torna menos positivo ($d\Phi_B/dt < 0$).
- La fem inducida es positiva ($\varepsilon > 0$).



- El flujo es negativo ($\Phi_B < 0$) ...
- ... y se torna más negativo ($d\Phi_B/dt < 0$).
- La fem inducida es positiva ($\varepsilon > 0$).



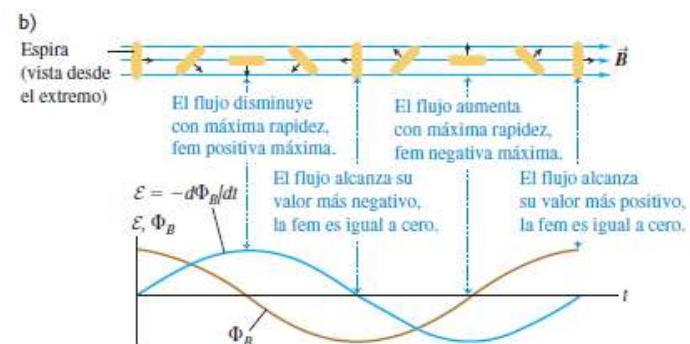
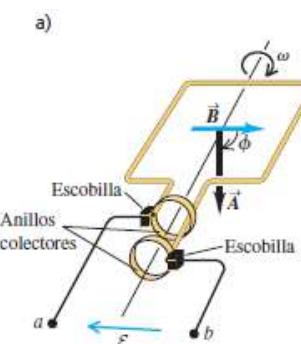
- El flujo es negativo ($\Phi_B < 0$) ...
- ... y se torna menos negativo ($d\Phi_B/dt > 0$).
- La fem inducida es negativa ($\varepsilon < 0$).

Aplicaciones

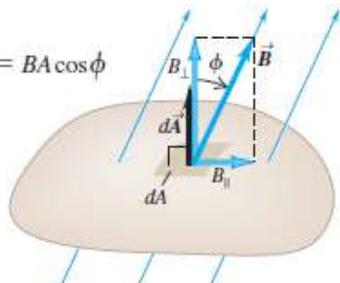
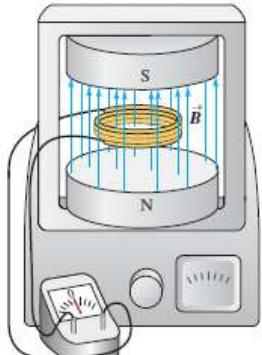
Espira rotante – generador de CA: una espira conductora gira en un campo magnético, lo que produce una femi.

$$\Phi_B = BA \cos\phi = BA \cos\omega t$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega BA \sin\omega t$$



Las corrientes al cerrar y abrir el interruptor de la bobina se llaman extracorriente de cierre y extracorriente de apertura.



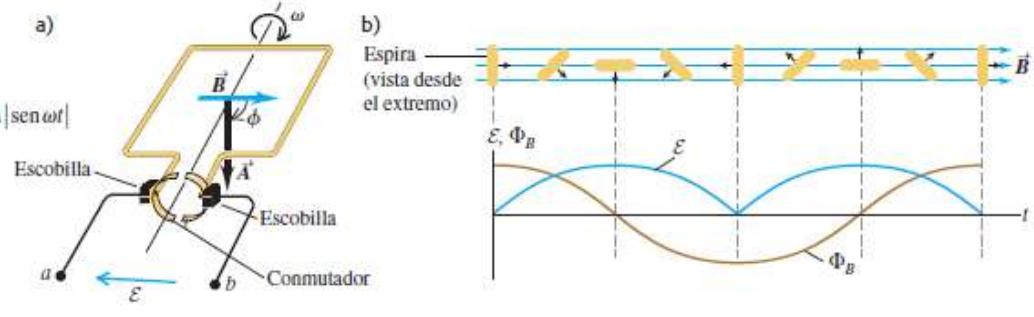
29.2 Bobina en un campo magnético. Cuando el campo \vec{B} es constante y la forma, ubicación y orientación de la bobina no cambian, no hay corriente inducida en la bobina. Sólo se induce corriente cuando cambia alguno de estos factores.

Espira rotante – generador de CC y FCEM en un motor:

Fuerza contra electromotriz: $|\mathcal{E}| = N\omega BA |\sin \omega t|$

$$(\sin \omega t)_{\text{med}} = \frac{\int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t dt}{\pi/\omega} = \frac{2}{\pi}$$

$$\mathcal{E}_{\text{med}} = \frac{2N\omega BA}{\pi}$$



Generador de conductor corredizo: una espira conductora se desplaza en un campo magnético, lo que produce una fem que se induce a lo largo de la varilla y que depende de la velocidad de la misma.

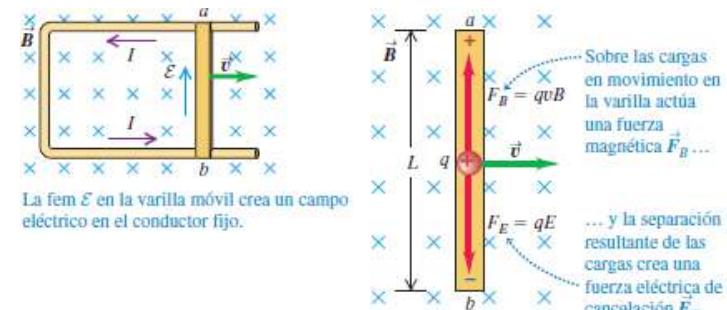
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B \frac{dA}{dt}$$

$$\text{Si el área es } dA = L v dt, \quad \mathcal{E} = -B \frac{Lv dt}{dt} = -BLv$$

$$\text{Como } \vec{L} \text{ y } \vec{B} \text{ son perpendiculares y } I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{BLv}{R} \rightarrow F = ILB = \frac{BLv}{R} LB = \frac{B^2 L^2 v}{R} \rightarrow P_{\text{disipada}} = I^2 R = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \quad P_{\text{aplicada}} = Fu = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

Conclusión: la tasa a la que se realiza trabajo es exactamente igual a la tasa a la que la energía se disipa en la resistencia del conductor. Se respeta el principio de conservación de la energía.

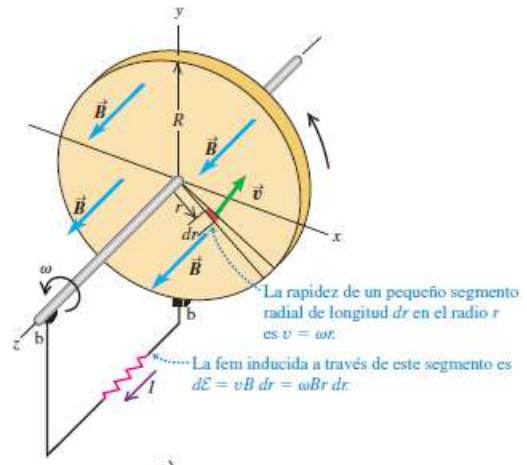
- Se produce un equilibrio entre las 2 fuerzas F_B , F_E , por lo que $qE = qvB$. De esta manera, $E = vB$.
- $V_{ab} = EL = vBL = \mathcal{E} = IR$ (Fuerza electromotriz de movimiento)
- En general, $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \rightarrow \mathcal{E} = \phi(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$



Disco de Faraday: sea un disco conductor de radio R que gira con velocidad constante ω sumergido en un campo magnético uniforme y perpendicular al plano del disco. Al moverse, se induce una fem entre el centro del disco y un extremo.

- Si tomamos un radio dr , la velocidad va a ser $v = \omega r$ y $d\vec{l} = \vec{dr}$.
- Reemplazando en la forma general de antes, $d\mathcal{E} = (\omega r B) \cdot dr$.
- Integrando esta expresión, en los extremos habrá una fem continua dada por

$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega Br dr = \frac{1}{2} \omega B R^2$$



8.2 Campos eléctricos inducidos; campos no electrostáticos. Corrientes de Foucault.

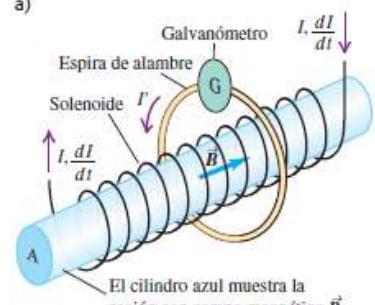
Campos eléctricos inducidos: tomamos un solenoide largo para que el cálculo del campo magnético sea sencillo. Este solenoide tiene concatenado una bobina de una sola espira con un galvanómetro que detecta la variación de corriente. La corriente que circula por el solenoide va a ir variando con el tiempo. El flujo total de este solenoide está dado por

$$\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$$

Cuando la corriente cambia con el tiempo, el flujo cambia, y por la Ley de Faraday, la fem en la espira

$$\text{es: } \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA \frac{dI}{dt} \quad \text{y la corriente inducida es } I' = \mathcal{E}/R.$$

29.17 a) El devanado de un solenoide largo lleva una corriente que se incrementa a una tasa dI/dt . El flujo magnético en el solenoide aumenta a una tasa $d\Phi_B/dt$, y este flujo cambiante pasa a través de una espira de alambre. En la espira se induce una fem $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$, la cual induce una corriente I' que se mide con el galvanómetro G. **b)** Vista transversal.



Resumen Física II

Como circula una corriente en un circuito cerrado que es un conductor, para que haya corriente debe haber un campo eléctrico inducido en el interior de la espira. Este campo eléctrico está asociado al valor de la fem

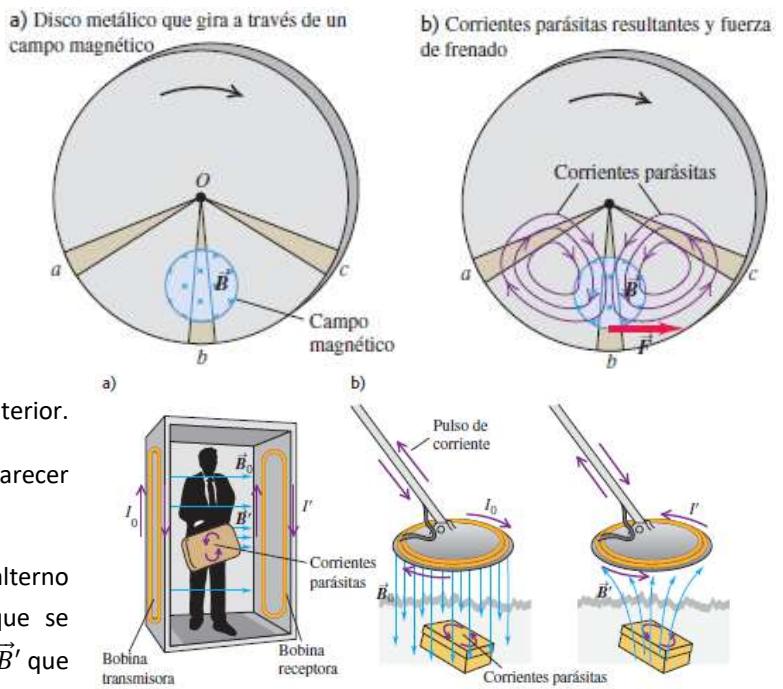
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} = -d\Phi_B/dt = 2\pi r E \rightarrow E = \frac{1}{2\pi r} \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| \quad [N/C]$$

Campos no electrostáticos: el campo presentado arriba es de este tipo ya que es no conservativo o no coulombiano. En vez de ser generado por una distribución de carga, es ocasionado por un flujo magnético cambiante. Además, las líneas de campo son cerradas.

Corrientes de Foucault/parásitas: son corrientes inducidas originadas en masas de metal que se mueven en campos magnéticos variables. Al circular por el conductor, estas corrientes a su vez generan un campo magnético que se opone al anterior.

La fem inducida cierra su camino por el resto del disco, haciendo aparecer circuitos de corriente cerrados a todo lo largo del disco.

Aplicación: detector de metales. Genera un campo magnético alterno \vec{B}_0 que induce corrientes parásitas en un objeto conductor que se interpone. Estas corrientes producen un campo magnético alterno \vec{B}' que induce una corriente eléctrica en la bobina receptora del detector.



8.3 Mutua-inductancia; aplicación al cálculo de M para dos bobinas toroidales. Autoinductancia; aplicación al cálculo de L para bobina toroidal.

Mutua-inductancia:

- Sean 2 bobinas coaxiales (que comparten el eje). Cada bobina tiene 2 alambres que son sus extremos, y al conectarlos a un generador, por la bobina circula corriente.
- $\Phi_{B1} \propto B \propto i_1$
- En la zona donde está la bobina 2, parte del flujo total está concatenado por la bobina 2 y producido por la bobina 1. Por lo tanto, este flujo será una fracción de B.
- $\Phi_{B2} \propto \Phi_{B1}$ y $\Phi_{B2} \propto i_1$, donde Φ_{B2} es el flujo concatenado por cada espira de la bobina 2. Como la bobina tiene en total N_2 espiras, la fem inducida en la bobina 2 por el flujo variable es: $\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt}$

Coeficiente de mutua-inducción: se utiliza para representar la proporcionalidad entre Φ_{B2}

e i_1 , multiplicando uno de los miembros por este coeficiente. Así, la proporcionalidad queda: $N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1$

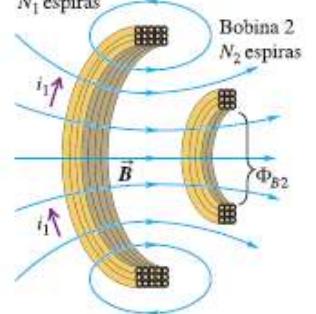
Despejando obtenemos: $M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} \quad [H] = \left[\frac{Wb}{A} \right]$

Derivando respecto a t a la expresión $N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1$ resulta $N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$ y usando la ecuación de fem inducida, obtenemos que,

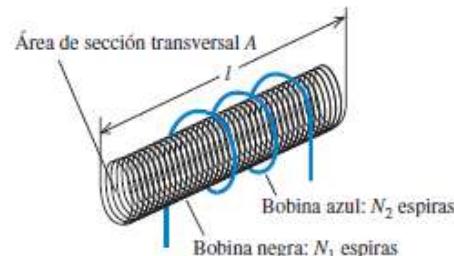
$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad \text{en la cual solo se depende de la corriente. Invirtiendo el experimento se deduce que } M_{12} = M_{21} = M \text{ y entonces}$$

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}$$

$$\text{donde la inductancia mutua es} \quad M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B1}}{i_2} \quad 1 H = 1 Wb/A = 1 V \cdot s/A = 1 \Omega \cdot s = 1 J/A^2$$



Aplicación: dos bobinas senoidales.



un solenoide largo que conduce una corriente i_1 produce un campo magnético \vec{B}_1 que apunta a lo largo del eje del solenoide. La magnitud del campo B_1 es proporcional a i_1 y a n_1 , el número de espiras por unidad de longitud:

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

El flujo a través de una sección transversal del solenoide es igual a $B_1 A$. Como un solenoide muy largo no produce campo magnético por fuera de sus espiras, este flujo también es igual al flujo Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina circundante exterior, sin importar cuál sea el área de la sección transversal de la bobina exterior. De acuerdo con la ecuación (30.5), la inductancia mutua M es

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2 \mu_0 N_1 i_1}{l} A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$$

Nota: la inductancia mutua M sólo depende de la geometría de las 2 bobinas.

Resumen Física II

Autoinductancia: en esta, analizamos la relación de una bobina con ella misma. Si tenemos una bobina con N vueltas que produce un campo magnético, se crea un flujo magnético a través del mismo circuito que cambia cuando la corriente cambia. Cualquier circuito que conduzca una corriente variable tiene una fem inducida en él por la variación en su propio campo magnético llamada fem autoinducida. Entonces se define a la autoinductancia o coeficiente de autoinducción como: $L = \frac{N\Phi_B}{i}$ [H].

Si la corriente cambia, el flujo cambia en el tiempo. Derivando por dt $\frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{di}{dt}$ y si la fem autoinducida es $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$, se puede escribir como $\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$

Esto muestra que la femi se opone a los cambios de la corriente eléctrica.

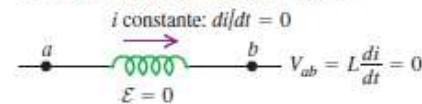
Inductor: es el elemento de un circuito diseñado para tener una inductancia particular. Su finalidad es oponerse a cualquier variación en la corriente a través del circuito. Si el circuito tiene una fuente de fem variable, habrá una corriente a los extremos de a y b, y está variación de corriente va a inducir una fem.

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} \quad \text{por campos eléctricos inducidos puede escribirse como} \quad \oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L \frac{di}{dt} \rightarrow \int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L \frac{di}{dt}$$

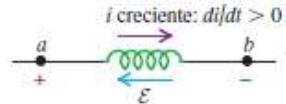
$$\text{Dentro del inductor se cumple que } \vec{E}_e + \vec{E}_n = 0 \quad \text{por lo que} \quad \int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = L \frac{di}{dt} \quad \text{lo cual es igual a} \quad V_{ab} = V_a - V_b = L \frac{di}{dt}$$

La diferencia de potencial a través de un inductor depende de la tasa de cambio de la corriente eléctrica.

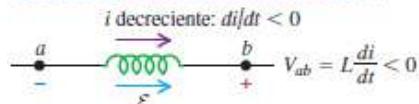
b) **Inductor con corriente constante i que fluye de a a b: no hay diferencia de potencial.**



c) **Inductor con corriente i creciente que fluye de a a b: el potencial disminuye de a a b.**

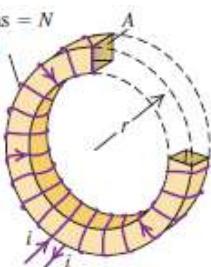


d) **Inductor con corriente i decreciente que fluye de a a b: el potencial se incrementa de a a b.**



Aplicación: solenoide toroidal.

Número de espiras = N
(sólo se muestran algunas)



EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (30.6), la autoinductancia es $L = N\Phi_B/i$. Del ejemplo 28.10, la magnitud del campo a una distancia r del eje del toroide es $B = \mu_0 Ni/2\pi r$. Si suponemos que el campo tiene esta magnitud en toda el área A de la sección transversal, entonces el flujo magnético a través de la sección transversal es

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} A$$

El flujo Φ_B es el mismo a través de cada espira, y la autoinductancia L es

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} \quad (\text{autoinductancia de un solenoide toroidal})$$

Nota: la inductancia L sólo depende de la geometría del solenoide toroidal

8.4 Energía almacenada en una inductancia. Densidad de energía del campo magnético.

Energía almacenada en una inductancia:

- La potencia instantánea almacenada por el inductor es $P = V_{ab}i = Li \frac{di}{dt}$
- La energía elemental suministrada al inductor durante dt es $dU = P dt = L i di$.
- La energía total suministrada por la fuente y almacenada en el inductor, mientras la corriente aumenta de 0 a un valor final I es

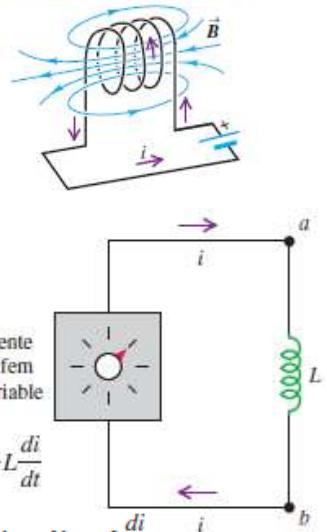
$$U = L \int_0^I i di = \frac{1}{2} LI^2$$

Cuando una corriente estable fluye a través de un inductor, no entra ni sale energía, pero se mantiene una cierta energía almacenada.

Densidad de energía del campo magnético: es la energía magnética almacenada por unidad de volumen. Supongamos un toroide de radio r y sección transversal A con N espiras y núcleo de aire o vacío.

- $u = \frac{U}{V}$ donde $U = \frac{1}{2} LI^2$; $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$; $V = 2\pi r A$ por lo que $u = \frac{U}{2\pi r A} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 I^2}{(2\pi r)^2}$
- En términos de la magnitud $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ la densidad es $u = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Cuando el material dentro del toroide no es un vacío sino un material con permeabilidad magnética $\mu = K_m \mu_0$, entonces $u = \frac{B^2}{2\mu}$

Autoinductancia: si la corriente i en la bobina está cambiando, el flujo cambiante a través de ésta induce una fem en la bobina.



8.5 Transitorio de conexión y desconexión de una fuente de continua a un circuito R-L serie.

Circuito R-L: es una malla donde se tiene conectada en serie una resistencia y un inductor, principalmente.

Transitorio de conexión: sea un circuito R-L serie conectado a una fuente de alimentación continua y un interruptor.

- La ecuación de la malla está dada por $\varepsilon - v_R - v_L = 0 \rightarrow \varepsilon - iR - L \frac{di}{dt} = 0$.

$$\ln\left(\frac{i - (\varepsilon/R)}{-\varepsilon/R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

- Dividiendo miembro a miembro por $R \frac{\varepsilon}{R} - i - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} = 0$.

- Despejando: $-\frac{L}{R} \frac{di}{dt} = i - \frac{\varepsilon}{R}$ y reordenando: $\frac{di}{i - \frac{\varepsilon}{R}} = -\frac{R}{L} dt \rightarrow \int_0^i \frac{di'}{i' - (\varepsilon/R)} = -\int_0^t \frac{R}{L} dt'$

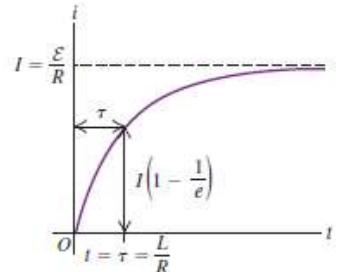
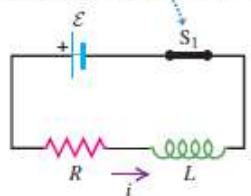
- Resultado final: la corriente en un circuito R-L con fem es $i = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$

- Tensión a los extremos de la inductancia: $v_L = L \frac{di}{dt} = \varepsilon e^{-(R/L)t}$

- Constante de tiempo del circuito: $\tau = \frac{L}{R}$

- Potencia puesta en juego: $\varepsilon i = i^2 R - L i \frac{di}{dt}$

El interruptor S_1 se cierra en $t = 0$.



Transitorio de desconexión:

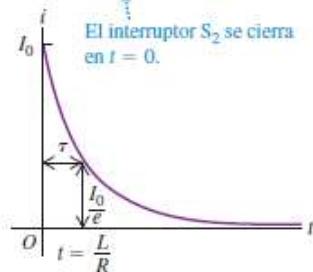
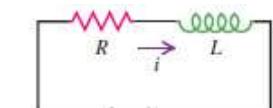
- La ecuación de la malla está dada por $-iR - L \frac{di}{dt} = 0$.

- Dividiendo miembro a miembro por R: $i = -\frac{L}{R} \frac{di}{dt}$.

- Despejando di y dt: $\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$ e integrando: $\int_I^i \frac{di'}{i'} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt' \rightarrow i = I_0 e^{-(R/L)t}$

- Potencia puesta en juego: $0 = i^2 R + L i \frac{di}{dt} \rightarrow -L i \frac{di}{dt} = i^2 R$

El interruptor S_2 se cierra en $t = 0$.



CAPÍTULO 29

RESUMEN

Ley de Faraday: La ley de Faraday establece que la fem inducida en una espira cerrada es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo a través de la espira. Esta relación es válida ya sea que el cambio de flujo se deba a un campo magnético variable, al movimiento de la espira, o ambos factores.

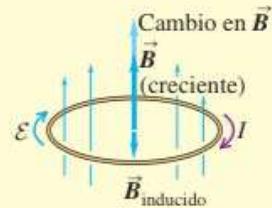
(Véanse los ejemplos 29.1 a 29.7.)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (29.3)$$



El movimiento del imán ocasiona un campo magnético cambiante a través de la bobina, lo que induce una corriente en esta última.

Ley de Lenz: La ley de Lenz afirma que una corriente o fem inducida siempre tiende a oponerse al cambio que la generó, o a cancelarlo. La ley de Lenz se deduce de la de Faraday y a menudo es más fácil de usar. (Véanse los ejemplos 29.8 y 29.9.)



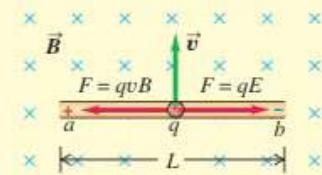
Fem de movimiento: Si un conductor se mueve en un campo magnético, se induce una fem de movimiento. (Véanse los ejemplos 29.10 y 29.11.)

$$\mathcal{E} = vBL \quad (29.6)$$

(conductor con longitud L se mueve en un campo \vec{B} uniforme, \vec{L} y \vec{v} son perpendiculares a \vec{B} y entre sí)

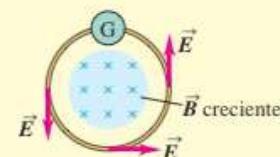
$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (29.7)$$

(la totalidad o parte de una espira cerrada se mueve en un campo \vec{B})



Campos eléctricos inducidos: Cuando un flujo magnético cambiante a través de un conductor fijo induce una fem, hay un campo eléctrico inducido \vec{E} de origen no electrostático. Este campo es no conservativo y no está asociado con un potencial. (Véase el ejemplo 29.12.)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (29.10)$$



Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell:

Un campo eléctrico que varía en el tiempo genera una corriente de desplazamiento i_D , que actúa como fuente de un campo magnético exactamente de la misma manera que una corriente de conducción. La relación entre los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes se enuncia en forma compacta en las cuatro ecuaciones de Maxwell. En conjunto forman una base completa para la relación de los campos \vec{E} y \vec{B} con sus fuentes.

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (29.14)$$

(corriente de desplazamiento)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (29.18)$$

(ley de Gauss para campos \vec{E})

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (29.19)$$

(ley de Gauss para campos \vec{B})

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{enc} \quad (29.20)$$

(ley de Ampère que incluye la corriente de desplazamiento)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (29.21)$$

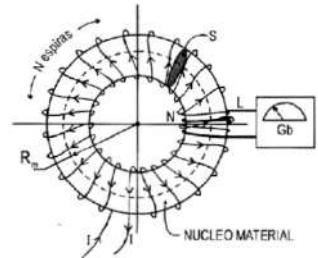
(ley de Faraday)

UNIDAD IX: PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA**9.1 Coeficiente magnético km. Clasificación de los materiales en función de su comportamiento magnético: paramagnéticos, diamagnéticos, ferromagnéticos.**

Magnetismo en los medios materiales: sea un toroide de radio medio R_m , por el que circula una corriente I , llamado Anillo de Rowland. En el vacío, el campo magnético generado es:

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi R_m} [T]$$

Hay una forma de aproximar este campo haciendo que la diferencia $(R_2 - R_1) \ll R_m$, lo cual hará que el campo se mantenga constante en su intensidad.



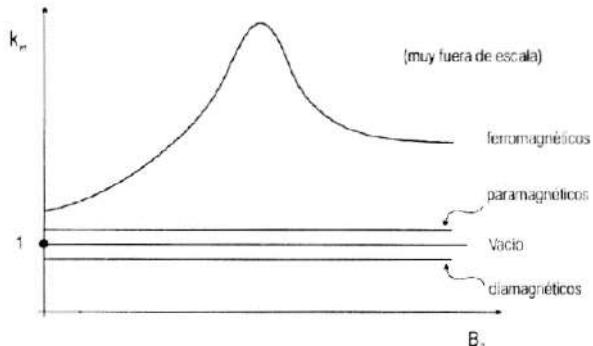
Si reemplazamos el núcleo material por diferentes materiales, entonces se establece una relación con el campo magnético en el vacío utilizando un coeficiente. De esta manera, el campo es:

$$B = k_m B_0 = \mu_r B_0 [T]$$

donde k_m es el coeficiente magnético del material (o permeabilidad magnética relativa) y $\mu = k_m \mu_0 = \mu_r \mu_0 \left[\frac{T \cdot m}{A} \right]$ es la permeabilidad magnética absoluta del material.

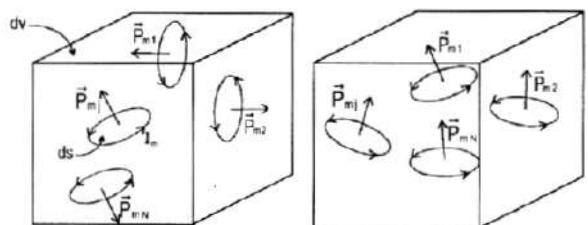
Clasificación de los materiales: se realiza a partir del valor de k_m .

- **Diamagnéticos:** k_m es ligeramente menor a 1. No depende de B_0 , aunque si de la temperatura. Ejemplos: helio, hidrógeno, argón, agua, bismuto.
- **Paramagnéticos:** k_m es ligeramente mayor a 1. No depende de B_0 , aunque si de la temperatura. Ejemplos: oxígeno, sodio, aluminio, platino.
- **Ferromagnéticos:** k_m es mucho mayor a 1. Depende de B_0 y de la temperatura. Ejemplos: hierro, níquel, cobalto, gadolinio, dispropio.

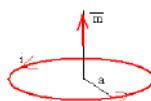
**9.2 Teoría de las corrientes magnetizantes. Vector magnetización M. Vector excitación magnética H. Susceptibilidad magnética. Relación entre los tres vectores magnéticos.**

Teoría de las corrientes magnetizantes: en un trozo de material existen corrientes magnetizantes con su correspondiente momento magnético. Sin campo magnético externo, los momentos magnéticos están orientados al azar; con campo magnético, se orientan.

- Consideramos un electrón que se mueve en una órbita, este es una carga que va girando un número de rev. por segundo. Al multiplicarlo por el valor de la carga, tendremos la cantidad de carga eléctrica que se mueve por unidad de tiempo, que es la corriente eléctrica.
- A una corriente eléctrica que circula por una espira, se le puede asociar un momento magnético $\vec{p} = I_m dS \hat{n}$.
- Cada electrón en un átomo tiene un momento magnético propio definido, así como un conjunto de electrones también tiene uno.
- El espín del electrón define el movimiento de rotación del electrón sobre sí mismo.
- Cada átomo tiene un momento magnético normal a la superficie, los cuales se anulan y neutralizan unos a otros mutuamente.
- Si al material le aplicamos un campo magnético \vec{B}_0 , este le aplicará un momento magnético de torsión que enderezara los momentos magnéticos en el sentido del campo, es decir, todos serán paralelos y en planos horizontales.



Momento magnético de la espira de corriente: $\overrightarrow{dM} = I \overrightarrow{dS}$.

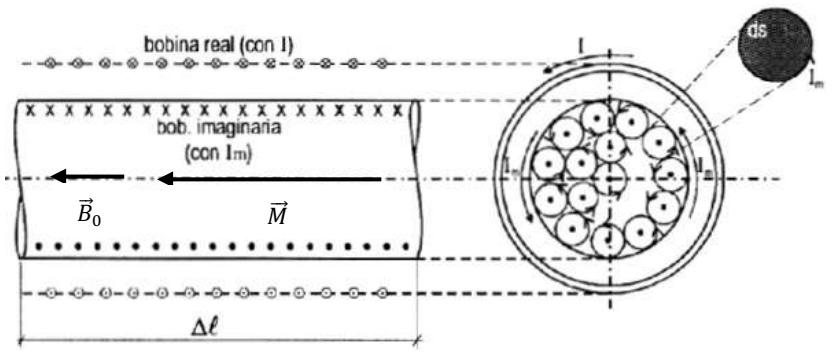


- Material desmagnetizado: $\sum \overrightarrow{dM} = 0$.
- Material magnetizado: $\sum \overrightarrow{dM} \neq 0$.

Vector magnetización M: es la suma de los momentos magnéticos por unidad de volumen.

$$\vec{M} = \sum \frac{I \overrightarrow{dS}}{dV} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Sea un trozo de toroide con núcleo de material ferromagnético. Se consideran tantas “espiras amperianas o de magnetización” como espiras reales tiene el arrollamiento toroidal. En cualquier punto en el interior del material, las corrientes son nulas. En cambio, en la superficie límite del material, aparece una corriente de magnetización I_m que no es una corriente real, sino que es una suma del movimiento de los electrones de una enorme cantidad de átomos. Esta corriente producirá un vector magnetización paralelo y en el mismo sentido de \vec{B}_0 .



$$M = \frac{I_m S n \Delta l}{S \Delta l} = I_m n = I_m \frac{N}{l} \rightarrow M = \frac{I_m N}{2 \pi R} \left[\frac{A v}{m} \right] \rightarrow M 2 \pi R = I_m N = \oint_l \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

Vector excitación magnética H:

- Si efectuamos la circulación de \vec{B} a lo largo de la longitud media del anillo de Rowland, teniendo en cuenta que se tiene la corriente I_m , por la ley de Ampere resulta: $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (NI + NI_m)$. Con el resultado de arriba esto se puede escribir como

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI + \mu_0 \oint_l \vec{M} \cdot d\vec{l} \rightarrow \oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = NI$$

- A partir de esto se define el vector excitación magnética

$$\vec{H} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \rightarrow \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \rightarrow H = \frac{NI}{l} = \frac{NI}{2 \pi R_m} \left[\frac{A v}{m} \right]$$

Relación entre los 3 vectores: si despejamos \vec{B} del vector de excitación magnética, obtenemos la siguiente ecuación que relaciona los 3 vectores: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$.

Susceptibilidad magnética:

- Como los tres vectores son paralelos entre sí, la ecuación se cumple en forma escalar. De esta manera, $\|\vec{B}\| = \mu_0 \|\vec{H}\| + \mu_0 \|\vec{M}\|$.
- Sacamos factor común $\mu_0 \|\vec{H}\|$, entonces $\|\vec{B}\| = \mu_0 \|\vec{H}\| \left(1 + \frac{\|\vec{M}\|}{\|\vec{H}\|} \right)$.
- Dentro del paréntesis queda la relación entre M y H , y fuera, queda la magnitud de $\|\vec{B}_0\|$, por lo que $\|\vec{B}\| = \|\vec{B}_0\| \left(1 + \frac{\|\vec{M}\|}{\|\vec{H}\|} \right)$.
- A la relación $\frac{\|\vec{M}\|}{\|\vec{H}\|} = \chi_m$ se la llama susceptibilidad magnética del material.
- $\|\vec{B}\| = \|\vec{B}_0\| (1 + \chi_m) \rightarrow \frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{B}_0\|} = k_m = 1 + \chi_m$.

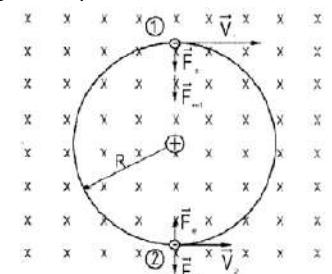
Clasificación de los materiales:

- Cuando $\chi_m > 0$, el material es paramagnético.
- Cuando $\chi_m < 0$, el material es diamagnético.
- En los ferromagnéticos, el valor de k_m es mucho más grande, por lo que no se usa la susceptibilidad magnética para clasificarlos.

9.3 Diamagnetismo. Paramagnetismo.

Diamagnetismo:

- En los materiales diamagnéticos $\chi_m < 0$, $\vec{B} < \vec{B}_0$ y \vec{M} es opuesto a \vec{H} .
- Sean 2 electrones apareados orbitando en sentidos contrarios (con espín opuesto) en órbitas de radio R constante, que equivalen a las I_m .
- El momento dipolar del electrón 1 es entrante, y el del electrón 2 es saliente, por lo que se equilibran ($M = 0$).
- Cuando los electrones se someten a un campo magnético externo, aparecen fuerzas magnéticas sobre estos dadas por $\vec{F}_m = e \vec{V} \times \vec{B}$.
- Sobre el electrón 1: $F_e + F_m = \frac{mv_1^2}{R}$.
- Sobre el electrón 2: $F_e - F_m = \frac{mv_2^2}{R}$.
- Conclusión: cuando aplicamos un campo magnético, $V_1 > V_2$ y $M_1 > M_2$ por lo que se desequilibran los momentos dipolares.



Resumen Física II

- Los átomos de los materiales magnéticos no poseen por sí momento dipolares, pero un campo exterior induce un momento antagónico al campo. Además, I_m circula en sentido contrario a I y $I_m \ll I$.
- Un material es diamagnético cuando el efecto magnético del diamagnetismo supera al paramagnetismo.

Paramagnetismo:

- En los materiales paramagnéticos $\chi_m > 0$, $\vec{B} > \vec{B}_0$ y \vec{M} es del sentido de \vec{H} .
- Los átomos poseen un momento cinético relacionado con el spin.
- Este momento cinético produce un momento magnético denominado Magnetón de Bohr.
- En presencia de un campo magnético exterior, los dipolos se alinean.
- La corriente magnetizante tiene el mismo sentido que la corriente de conducción y $I_m \ll I$.
- Un material es paramagnético cuando el efecto magnético del paramagnetismo supera al diamagnetismo.

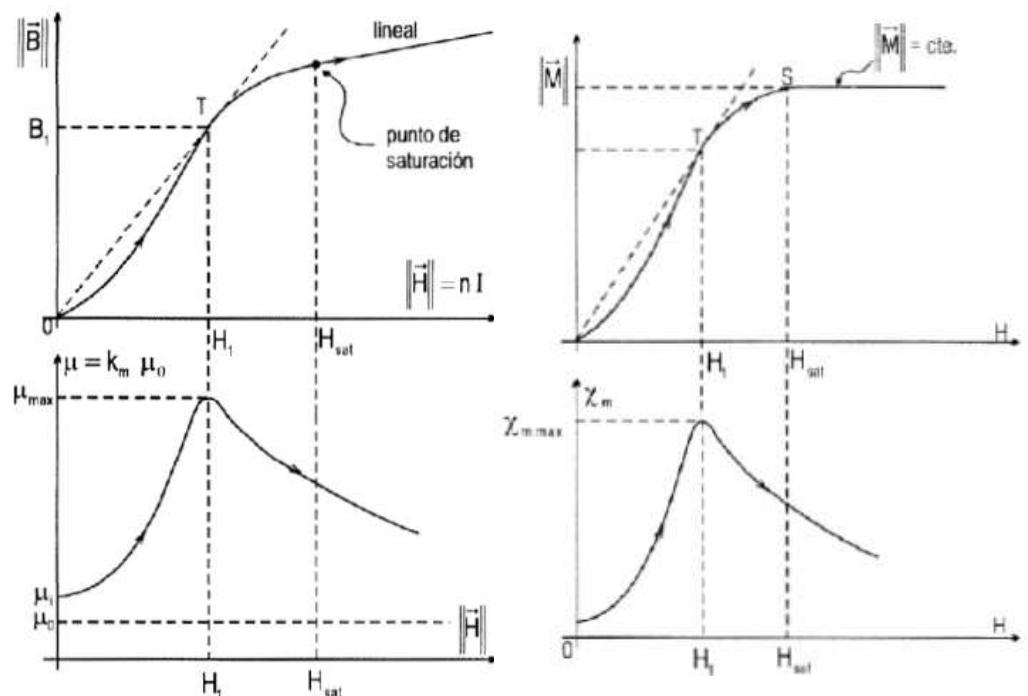
9.4 Ferromagnetismo. Temperatura de Curie. Curvas características. Teoría de los dominios magnéticos.

Ferromagnetismo: en los materiales magnéticos, $\chi_m \gg 0$, $\vec{B} \gg \vec{B}_0$ y $I_m \gg I$.

Temperatura de Curie: el fenómeno ocurre debajo de cierta temperatura llamada temperatura de Curie, que tiene un valor especial para cada tipo de material. Si se supera esa temperatura, el material pasa a ser paramagnético. Ejemplos: $Co = 1115^{\circ}C$, $Fe = 850^{\circ}C$, $Ni = 351^{\circ}C$, $Gd = 19^{\circ}C$, $Dy = -185^{\circ}C$. Así, se puede ver la gran amplitud de temperaturas.

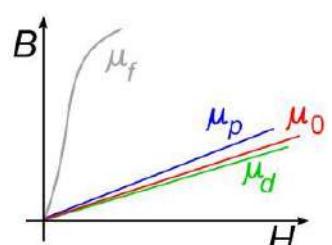
Curvas características:

- No hay una relación lineal entre $\|\vec{H}\|$ y $\|\vec{B}\|$.
- La pendiente aumenta hasta un valor máximo en el que empieza a disminuir hasta un punto conocido como punto de saturación del material. Allí cualquier crecimiento del valor del campo se debe al crecimiento de la excitación H .
- La curva se llama curva de magnetización inicial ya que, si se reduce el valor de H , no se sigue la misma curva.
- La variación de $\|\vec{M}\|$ es similar a la de $\|\vec{B}\|$ solo que al llegar a S, la saturación del material, la curva se hace horizontal y $\|\vec{M}\|$ va a ser constante.



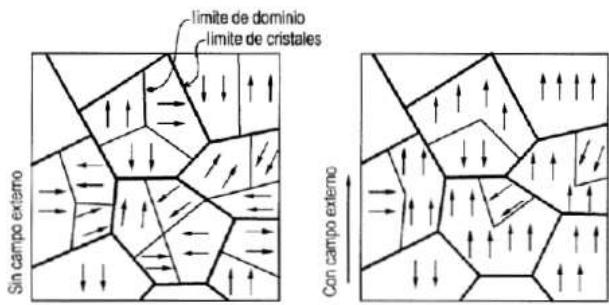
En este gráfico se muestra la curva de la permeabilidad para los diamagnéticos (μ_d), en el vacío (μ_0), para los paramagnéticos (μ_p) y para los ferromagnéticos (μ_f).

Materiales ferromagnéticos: tienen una constitución amorfa (no cristalina), pero en la práctica tienen un ordenamiento cristalino particular, es decir, los átomos se agrupan entre sí formando cristales llamados granos de cristal. Usando un ácido suave, se puede visualizar esta estructura microscópicamente.



Teoría de los dominios magnéticos:

- En un primer momento, los momentos magnéticos están orientados en el mismo sentido dentro de cada sector.
- En los granos de cristal, puede suceder que haya más de una orientación.
- Dominios magnéticos: son los diferentes sectores separadas por zonas de transición llamadas paredes de Bloch.
- En las paredes, el momento magnético sufrirá una transición de un dominio al otro.
- Si le aplicamos un campo magnético externo, comienza a haber un crecimiento de los dominios magnéticos que se encuentran en el sentido del campo magnético.
- Cuando el campo externo sube lo suficiente, se orientan todos los momentos magnéticos y se alcanza la saturación del material.

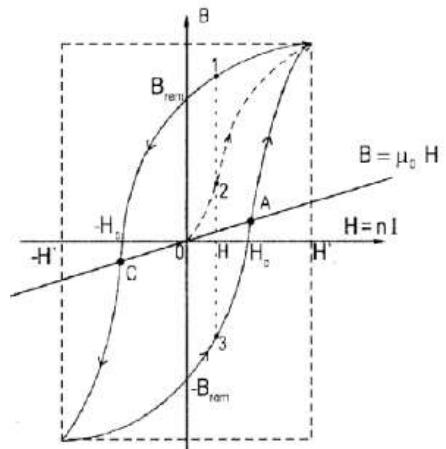


9.5 Histéresis. Histéresis magnética. Ciclo de histéresis. Energía del ciclo. Materiales magnéticamente "blandos" y "duros".

Histéresis: proviene de hystera, que significa retardo o quedarse atrás. Ocurre en cualquier deformación que supera el nivel elástico de un material. En magnetismo, se denomina histéresis magnética.

Ciclo de histéresis: en él se muestra la histéresis magnética. Si se llega a un valor de H' y luego comienza a disminuir, el valor B disminuye pero siguiendo otros valores. B varía siguiendo una curva cerrada llamada curva o ciclo de histéresis.

- El término rem se refiere a remanente, y la letra c se refiere a la fuerza coercitiva.
- Para $H = 0$, B no se anula. En cambio, toma el valor B_{rem} llamado campo remanente.
- En el punto de saturación S, la ecuación es $\vec{B}_s = \mu_0 \vec{H}_s + \mu_0 \vec{M}_s$
- En el punto del campo remanente B_{rem} , la ecuación es $\vec{B}_{rem} = \mu_0 \vec{M}_{rem}$
- En el punto de excitación coercitiva H_c , se anula \vec{B} por lo que la ecuación es $0 = -\mu_0 \vec{H}_c + \mu_0 \vec{M}_c$.
- Una vez que excitamos a un material ferromagnético, ya no podemos volver al origen (H_0, B_0).



Energía del ciclo: el área encerrada por el ciclo de histéresis representa la energía por unidad de volumen de núcleo y por ciclo que se disipa como calor. La energía es absorbida por el material y transformada en calor. Entonces, es importante conocer el área del ciclo de histéresis ya que permite saber el tipo de material en cuestión. Haciendo un análisis dimensional:

$$B \cdot H = \left[\frac{N}{A} \frac{A}{mm} \right] = \left[\frac{N}{m^2} \frac{m}{m} \right] = \left[\frac{J}{m^3} \right] = \left(\frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} \right)$$

Materiales magnéticos "blandos": el área de su ciclo de histéresis es pequeña. Ideales para los núcleos de los transformadores eléctricos, los motores y los generadores eléctricos, ya que la energía absorbida por cada ciclo es muy pequeña.



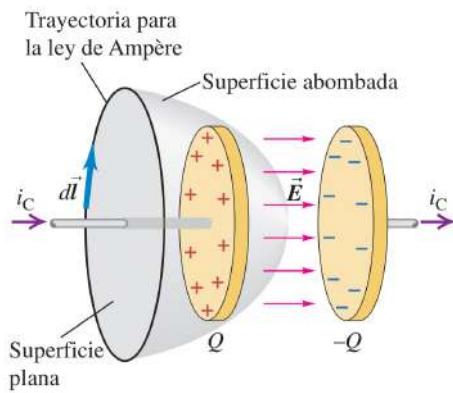
Materiales magnéticos "duros": el área de su ciclo de histéresis es grande. Se utilizan para imanes permanentes, ya que, al excitarlo, su valor de magnetismo remanente es elevado, lo que lo convierte en un imán. También se usan en una memoria magnética.

UNIDAD 10: ECUACIONES DE MAXWELL

10.1 Generalización de la integral de Ampere. Campos magnéticos inducidos y corriente de desplazamiento

Sabemos que un campo magnético variable en el tiempo genera un campo eléctrico. ($E = \frac{1}{2\pi r} \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| [N_C]$)

29.22 Capacitor de placas paralelas en proceso de carga. La corriente de conducción a través de la superficie plana es i_C , pero no hay corriente de conducción a través de la superficie que se abomba para pasar entre las placas. Las dos superficies tienen una frontera común, por lo que esta diferencia en I_{enc} lleva a una contradicción aparente al aplicar la ley de Ampère.



Aplicaremos la ley de Ampère a la trayectoria circular que se muestra. La integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de esta trayectoria es igual a $\mu_0 I_{enc}$. Para el área circular plana limitada por el círculo, I_{enc} es tan sólo la corriente i_C en el conductor de la izquierda. Pero la superficie que se abomba hacia la derecha está delimitada por el mismo círculo, y la corriente a través de esa superficie es igual a cero. Por lo tanto, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual a $\mu_0 i_C$, y ¡al mismo tiempo es igual a cero! Ésta es una contradicción evidente.

Pero algo más ocurre en la superficie abombada. A medida que el capacitor se carga, el campo eléctrico \vec{E} y el flujo eléctrico Φ_E a través de la superficie aumentan. Sus tasas de cambio se pueden determinar en términos de la carga y la corriente. La carga instantánea es $q = Cv$, donde C es la capacitancia y v es la diferencia de potencial instantánea. Para un capacitor de placas paralelas, $C = \epsilon_0 A/d$, donde A es el área de las placas y d es la separación. La diferencia de potencial v entre las placas es $v = Ed$, donde E es la magnitud del campo eléctrico entre las placas. (Se ignora el efecto de borde y se supone que \vec{E} es uniforme en la región comprendida entre las placas.) Si esta región se llena con un material con permitividad ϵ , se remplaza ϵ_0 por ϵ en todo lugar; en el análisis que sigue se empleará ϵ .

Al sustituir estas expresiones para C y v en $q = Cv$, la carga en el capacitor, q , se expresa como

$$q = Cv = \frac{\epsilon A}{d} (Ed) = \epsilon EA = \epsilon \Phi_E \quad (29.12)$$

donde $\Phi_E = EA$ es el flujo eléctrico a través de la superficie.

De campos eléctricos inducidos sabemos que $E = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$, y por ley de Faraday-Lenz, $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_E}{dt}$. Suponiendo que su contraparte es simétrica, se cumple $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \propto \frac{d\Phi_E}{dt}$. Para transformar esto en una igualdad, multiplicamos el segundo miembro por una constante cuya dimensión transforme la dimensión del segundo miembro en la dimensión del primer miembro, que es $[T.m]$. El factor que nos lo permite es $\mu_0 \epsilon_0$, entonces nos queda $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$. Ahora, podemos arreglar la contradicción que se había planteado, adicionando el otro término asociado a la variación de flujo

eléctrico. Entonces nos queda: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$. Aquí vemos que en donde hay conductor, el segundo miembro se anula, y donde no hay conductor se anula el primero. Entonces, Maxwell define a $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = I_d [A]$, que se denomina corriente de desplazamiento, una corriente no real (virtual) que existe entre las placas del capacitor.

Por esto, podemos simplificar la Integral de Ampere generalizada y nos queda:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_C + i_D)_{enc}$$

[NOTA: $\frac{d\Phi_E}{dt}$ es la derivada del flujo eléctrico respecto del tiempo.]

10.2 Forma integral de las Ecuaciones de Maxwell

En 1865, Maxwell utiliza el método de los Quaterniones para agrupar 20 ecuaciones diferenciales para unificar electricidad y magnetismo. En 1884, Heaviside y Gibbs desarrollan el concepto de vector y cálculo vectorial para resumir las en 4.

Nosotros partimos de 3 ecuaciones fundamentales para la electricidad y el magnetismo:

Integral de Gauss:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Integral de Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Ley de Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Maxwell buscó una forma para darle simetría a estas ecuaciones. Por ahora tenemos dos integrales de linea y una de superficie, y dos de campo eléctrico y una de campo magnético. Entonces para mejorar la simetría de esto, necesita mos una integral de superficie que sea de campo magnético. Para esto, Maxwell aplica la integral de Gauss a un campo magnético. $\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$. Siempre va a ser igual a cero porque el número de líneas que entra va a ser igual al número que sale. Esto es una propiedad que nos dice que EL CAMPO MAGNÉTICO NO ESTÁ PROducido POR CARGAS MAGNÉTICAS, a diferencia de un campo eléctrico que está producido por cargas eléctricas. Como es una propiedad, la podemos incluir al trío de ecuaciones. Entonces tenemos:

Ley de Gauss para E:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Ley de Gauss para B:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Ley de Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

Integral de Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

[Hay una ecuación más que podemos agregar que es la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, pero no es esencial como las otras]

Así, Maxwell logra unificar los conceptos de electroestática, electricidad y magnetismo.

Notas: → ① En la primera ecuación, \vec{E} es un campo coulombiano (porque si no, $q=0$). En la tercera ecuación, el campo es no coulombiano (porque está definido con líneas cerradas). Para solucionar esto, podemos expresar \vec{E} como ($\vec{E}_{coulombiano} + \vec{E}_{no coulombiano}$) y se anulará cuando corresponda.

10.3 Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell: a) transformación de las dos integrales de superficie

Esto se hace para convertirlas en leyes, es decir, para que indiquen propiedades de cada punto del espacio. Para esto, hay que transformar sus curvas y líneas en superficies infinitesimales (puntos).

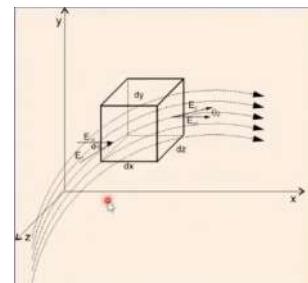
Ecuación ①: $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$

Tomamos una superficie infinitesimal (un paralelepípedo en este caso).

Por la superficie de la izquierda entra un flujo (negativo porque entra). Este flujo es $= E_{1x} \cdot dy \cdot dz$.

Podemos expresar esta superficie como $d\vec{s}$, que apunta hacia afuera, y así tenemos calculado el flujo negativo.

Lo mismo hacemos para la cara opuesta: $\vec{E}_2 \cdot d\vec{s}$. Entonces:



$$||\vec{E}_2|| \cdot ||d\vec{s}|| \cdot \cos \theta_2 = E_{2x} \cdot (dy \cdot dz)$$

(flujo saliente)

$$-||\vec{E}_1|| \cdot ||d\vec{s}|| \cdot \cos \theta_1 = - E_{1x} \cdot (dy \cdot dz)$$

(flujo entrante)

Existe una diferencia entre el flujo entrante y el saliente, que escribimos como $d\phi_x = (E_{2x} - E_{1x}) \cdot (dy \cdot dz)$. Despejando, tenemos $(E_{2x} - E_{1x}) = d\phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dx$. (Esto se hace approximando la derivada por serie de Taylor y nos queda esa expresión). Entonces podemos expresar la diferencia de flujo $d\phi_x$ como

$$d\phi_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} (dx \cdot dy \cdot dz) = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV$$

Si hacemos lo mismo para E_y y E_z y los sumamos, tenemos el flujo total en el paralelepípedo. Entonces:

$$d\phi_E = \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot dV + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot dV + \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot dV \Rightarrow \frac{d\phi_E}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{E}$$

Podemos aplicar el operador nabla y nos queda $\nabla \cdot \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E}$. Esto representa el primer término de la

integral de Gauss ($\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s}$). El segundo miembro, como q es infinitesimal, queda $\frac{dq}{\epsilon_0}$. Entonces, escribimos

$$d\phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q \quad \text{y como } \frac{dq}{dV} = P \text{ [C/m}^3\text{]}, \text{ tenemos que}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

→ 1º ECUACIÓN DIFERENCIAL DE MAXWELL

Haciendo el mismo procedimiento con la segunda ecuación (teniendo en cuenta que ahora el segundo miembro es = 0, nos queda:

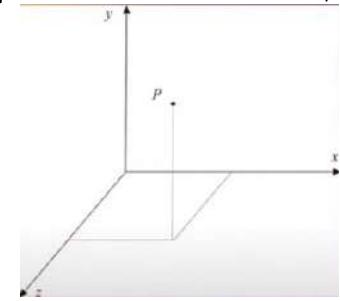
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

→ 2º ECUACIÓN DIFERENCIAL DE MAXWELL.

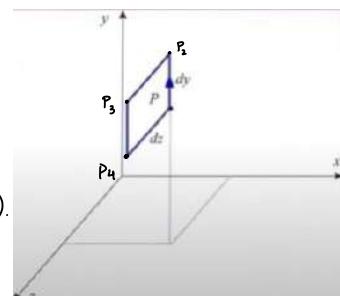
10.4 Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell: b) transformación de las dos integrales de linea

Transformamos primero la 4º. $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$. Para esto, primero transformamos el primer miembro, luego el primer término del segundo miembro y luego el segundo del segundo.

1º Término: llevamos la curva a una curva infinitesimal. Para esto, tomamos un punto P en el espacio. Vamos a trabajar con 3 rectángulos para tomarlo como referencia de cualquier tipo de curva. A estos rectángulos los vamos a desplazar un poquito para que el punto P forme parte y así simplificar el análisis.



Ahora aplicamos la integral a una curva rectangular que nace y termina en P . Entonces, el cuadrado tiene los 2 lados paralelos al eje y y al eje z y la curva encierra una superficie perpendicular al eje x .



Entonces, podemos descomponer la integral en 4 términos (por los 2 lados dy y los dz) Partimos del punto P en la dirección mostrada. El primer lado es $\vec{B} \cdot dy$ en la dirección \hat{j} . Pero para el lado siguiente, tenemos que tomar el valor del campo en otro punto, y ese punto es P_2 , y para hacerlo, tenemos que aproximar por serie de Taylor. Entonces el valor del campo en ese punto es $(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dy)$ (donde \vec{B} es el valor del campo en P). Todo esto lo multiplicamos por \hat{k} porque es la dirección en la que nos movemos.

Ahora, si hacemos lo mismo para P_3 , la serie de Taylor se nos va a complicar mucho, entonces vamos a trabajar con el valor de \vec{B} en el punto P_4 . Esto es el campo en P más la aproximación por serie de Taylor, es decir $(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz)$ y lo multiplicamos por dy pero con signo menos porque ahora nos movemos en sentido opuesto y en la dirección \hat{j} . Por último, para el 4º camino, que es dz , tomamos el valor de \vec{B} en P y nos queda $\vec{B} \cdot dz$ pero con signo menos porque de vuelta vamos al revés de \hat{k} . Este término es en dirección del vector \hat{k} . Entonces, la expresión nos queda:

$$① \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \underbrace{\vec{B} \cdot dy \cdot \hat{j}}_{1^{\text{o}} \text{ tramo}} + \underbrace{\left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} dy \right) dz \cdot \hat{k}}_{2^{\text{o}} \text{ tramo}} - \underbrace{\left(\vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz \right) dy \cdot \hat{j}}_{3^{\text{o}} \text{ tramo}} - \underbrace{\vec{B} \cdot dz \cdot \hat{k}}_{4^{\text{o}} \text{ tramo}}$$

Separando los términos, nos queda

$$② \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \vec{B} \cdot dy \cdot \hat{j} + \vec{B} \cdot dz \cdot \hat{k} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cdot dy \cdot dz \cdot \hat{k} - \vec{B} \cdot dy \cdot \hat{j} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz \cdot dy \cdot \hat{j} - \vec{B} \cdot dz \cdot \hat{k}$$

ahora podemos simplificar y nos queda:

$$③ \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cdot dy \cdot dz \cdot \hat{k} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} dz \cdot dy \cdot \hat{j}$$

Sacando factor común $dy dz$, tenemos

$$④ \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = dy dz \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \cdot \hat{k} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \cdot \hat{j} \right)$$

Esto es lo mismo que escribir

$$⑤ \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = dy dz \left[\frac{\partial}{\partial y} (\vec{B} \cdot \hat{k}) - \frac{\partial}{\partial z} (\vec{B} \cdot \hat{j}) \right] . \quad \begin{array}{l} \text{El producto punto entre } \vec{B} \text{ y } \hat{k} \text{ es } \vec{B} \text{ en la dirección de } z, \text{ es decir } B_z \\ \text{El producto punto entre } \vec{B} \text{ y } \hat{j} \text{ es } \vec{B} \text{ en la dirección de } y, \text{ es decir } B_y. \end{array}$$

⑥ Entonces, nos queda

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = dy dz \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right)$$

→ Hay que tener en cuenta que este resultado es para el rectángulo que elejimos. No es algo que podamos generalizar.

Ahora vamos por el 1º miembro del segundo término: $\mu_0 i$ ①

Nos damos cuenta que si la región en el espacio está formada por un conductor, toda la zona va a estar atravesada por cargas en movimiento. Pero i es un valor macroscópico que se refiere al flujo total de cargas a través de una superficie discreta. Entonces no podemos usar el concepto de i en una curva infinitesimal como la que elegimos. Por eso acudimos al concepto de densidad de corriente j . Entonces, definimos a i como:

$$② i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}, \text{ (siendo } S \text{ la curva que habíamos elegido nosotros)}$$

Reemplazamos $d\vec{s}$ por el módulo de ello, es decir $dydz$ y como va en la dirección de x , lo multiplicamos por \hat{i} . Nos queda:

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \hat{i} dy dz. \quad ③$$

$\vec{j} \cdot \hat{i}$ es la componente de \vec{j} en la dirección de x , entonces nos queda: $i = \iint_S j_x dy dz$. ④

Como tenemos una sola superficie, la integral es igual al integrando, entonces $i = j_x dy dz$ ⑤

Ahora vamos a trabajar con el 2º término del segundo miembro: $\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$ ①

El flujo del campo, Φ_E sería el flujo de líneas de campo que pueden estar atravesando la zona encerrada por la curva. Entonces, si fuera un material conductor, lo que vale es el primer término del 2º miembro de la ecuación, el que calculamos antes. Si no es un material conductor, el primer término sería =0 y cobraría relevancia el segundo. Entonces el flujo es el flujo que encierra nuestra superficie elemental. Entonces

$$② \Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

La derivada respecto de t es:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad ③$$

Esta derivada $\frac{d}{dt}$ se puede colocar en el interior de la integral: $\frac{d\Phi_E}{dt} = \iint_S \frac{d}{dt} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ④

Y como $d\vec{s}$ no cambia a través del tiempo, la podemos sacar como constante y vemos que la derivada solo opera sobre \vec{E} . Como \vec{E} es función de x, y, z y t , nos queda una derivada parcial:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad ⑤$$

En este caso, sabemos que $d\vec{s} = dy \cdot dz \cdot \hat{i}$, reemplazamos y nos queda:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dy dz \cdot \hat{i} \quad ⑥$$

y si resolvemos el producto punto entre \vec{E} y \hat{i} , nos queda $\frac{d\Phi_E}{dt} = \iint_S \frac{\partial E_x}{\partial t} dy dz$. Es evidente que solo tenga componente en x , porque es la única que tiene flujo a través de la superficie porque y y z son paralelas a la superficie.

Entonces, se cumple de vuelta que el resultado de la integral es el integrando:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_x}{\partial t} dy dz \quad ⑦$$

Haciendo esto, reemplazamos y la 4º ecuación de Maxwell nos queda así:

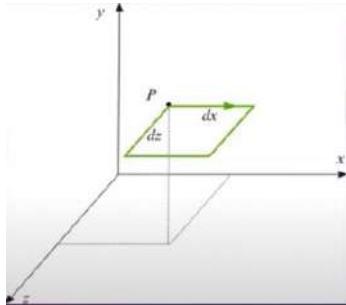
$$dy dz \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \mu_0 I_x \cdot dy dz + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} dy dz$$

Podemos simplificar el $\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$ y nos queda:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 I_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

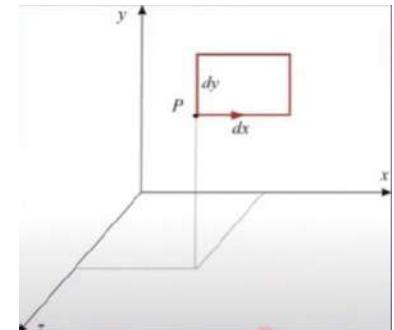
Pero esta expresión es válida solamente para una curva infinitesimal perpendicular al eje x. Para poder generalizarla, tenemos que trazar dos curvas más:

- 1 perpendicular al eje y
- 1 perpendicular al eje z.



→ Haciendo el mismo procedimiento, nos queda: $\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \mu_0 I_y + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \mu_0 I_y + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$



Haciendo el mismo procedimiento, nos queda: $\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 I_z + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$

←

Unificando los tres casos, podemos usarlo para cualquier de una curva cerrada en el espacio componiendo los resultados, es decir, sumando miembro a miembro los mismos teniendo en cuenta las dimensiones de cada uno. Nos queda:

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{k} = \mu_0 (j_x \hat{i} + j_y \hat{j} + j_z \hat{k}) + \mu_0 \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{k} \right)$$

Entonces vemos que la suma de los j 's nos va a dar directamente el vector \vec{j} (densidad de corriente) y las sumas de las derivadas del último término nos va a dar la derivada de E con respecto a t . Pero el primer miembro es más difícil. Para este, hacemos operaciones de matrices. A todo el primer miembro lo podemos asociar a un determinante de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{ROT } \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

4º ECUACIÓN DIFERENCIAL DE MAXWELL

Para la tercera, realizamos el mismo procedimiento y obtenemos

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \text{ROT } \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

→ 3º ECUACIÓN DIFERENCIAL DE MAXWELL

Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

1ra. Divergencia del campo eléctrico: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

2da. Divergencia del campo magnético: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

3ra. Rotor del campo eléctrico: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4ta. Rotor del campo magnético: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

Ahora podemos decir que en la naturaleza ninguna expresión eléctrica y magnética es estática. En general los dos campos varían con el tiempo y se producen campos análogos. Todos estos cambios se explican con estas 4 ecuaciones. Por la 3^o ecuación vemos que siempre $\vec{E} \perp \vec{B}$, en direcciones características de las aplicaciones. Por la 4^o, vemos que $\vec{B} \perp \vec{J}$ siempre.

Agregando a estas 4 ecuaciones el concepto de fuerza de Lorentz, tenemos definidas todas las variaciones de campo eléctrico y magnético y su influencia en la naturaleza.

10.5 Aplicación de las ecuaciones de Maxwell al estudio de las ondas electromagnéticas: relación entre las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de d'Alembert.

Las ondas electromagnéticas se propagan por el vacío y por diferentes medios materiales, salvo en el interior de los conductores metálicos. Estudiaremos la propagación en el vacío. Esto nos permite simplificar las ecuaciones ya que no va a haber densidad de carga (ρ) y tampoco va a haber densidad de corriente eléctrica (\vec{J}). Entonces las ecuaciones nos quedan así:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Podemos operar con ellas:

Tomamos la tercera ecuación: $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ y le aplicamos el rotor: $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Aprovechando la propiedad conmutativa que tiene tanto ∇ como la derivada, podemos decir: $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$.

Reemplazando $\nabla \times \vec{B}$ por la 4^o ecuación de Maxwell, tenemos: $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

y como μ_0 y ϵ_0 no se derivan, nos queda $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

De la identidad: $\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$

Aplicándolo a \vec{E} : $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$, pero sabemos que en el vacío, $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, entonces $\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$

Entonces:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1)$$

De la misma manera podemos operar con el rotor del campo magnético y obtenemos

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (2)$$

Estas dos son ecuaciones de d'Alembert (son una forma de representar en el espacio tridimensional a las ecuaciones de onda). Estas están en forma vectorial, pero las podemos transformar a cada una en tres ecuaciones escalares, una para cada una de las componentes x, y, z. Nos quedan:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Demostramos que las expresiones de Maxwell llevan implícitamente la expresión de la ecuación diferencial de onda. Entonces, cualquier campo electromagnético que cumple con las ec. de Maxwell va a ser una onda electromagnética.