Ejercicios práctico 7: 1 (a,b,c,d,e) $3(a,b,c,d,e,f)$ $4(a,b,c)$ $6(a,b)$ $7(a,b,c)$ $8(a,b,c)$ $9(a,b)$ $10(a,b)$ $11(a,b)$

(1)$a)$ $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineal! tal que $F(1,1,3)=(1,2)$ y $F(2,3,5)=(3,-1)$. Calcular $F(2(1,1,3))$. Esto sale con la linealidad de la

$$\begin{aligned}
F(2(1,1,3)) &= 2F(1,1,3)=2(1,2)=(2,4)\\
F(-2,-3,-5) &= F((-1)(2,3,5))=(-1)F(2,3,5)=(-1)(3,-1)=(-3,1) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Podemos calcular $F(x,y,z)=$? NO! Ya que no tenemos información de la F en una base de $\mathbb{R}^3$.

$b)$ $F:\mathbb{R}^{2x1}\to\mathbb{R}^{3x1}$ dada por

$$\begin{aligned}
F\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\\
F\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En este caso la F viene dada en una base! Luego podemos saber cuánto vale $F\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$...Primero escribimos al vector genérico $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$como comb. lineal de la base dada:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Luego aplicamos F:

$$\begin{aligned}
F\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} &= F\left\{x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}\\
\text{F lineal} &= F\left\{x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}+F\left\{y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}\\
\text{F lineal} &= xF\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+yF\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\
&= x\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2x+3y\\x-y\\3x+2y\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(c) $F:P_2\to P_2$ operador lineal definido por

$$\begin{aligned}
F(1) &= 1+x\\
F(x) &= x+x^2\\
F(x^2) &= 1
\end{aligned}$$

Nos damos cuenta que F viene dada en la base $B = \{1, x, x^2\}$.

Tomamos un polinomio $p \in P_2$:

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

p ya está escrito como combinación lineal de la base dada B. Luego aplicamos F:

$$\begin{aligned} F(p) &= F(a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2) \\ \text{F lineal} &= a_0 F(1) + a_1 F(x) + a_2 F(x^2) \\ &= a_0(1+x) + a_1(x+x^2) + a_2(1) \\ &= a_0 + a_0 x + a_1 x + a_1 x^2 + a_2 \\ &= (a_0 + a_2) + (a_0 + a_1)x + a_1 x^2 \end{aligned}$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} F(-3x^2 + 5 + 2x) &= (5-3) + (5+2)x + 2x^2 \\ &= 2 + 7x + 2x^2 \end{aligned}$$

(3) $b)$ $F(x,y) = (x, 1)$. Intentamos ver si cumple la definición de "lineal": Tomamos dos vectores en $\mathbb{R}^2$, (a,b) y (c,d) y veamos la suma

$$F[(a,b) + (c,d)] = F[(a+c, b+d)] = (a+c, 1)$$

$$F(a,b) + F(c,d) = (a,1) + (c,1) = (a+c, 2)$$

luego no es lineal.

Ejercicio 1 del práctico complementario: Tenemos V un $\mathbb{F}-espacio\ vectorial$ de $\dim(V) = n$. Sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada (fija) para V. Se define una transformación $T : V \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$T(v) = [v]_B$$

Esto quiere decir que si $v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$ entonces

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Luego lo que estamos definiendo es

$$T(v) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix}$$

T es lineal: Tomemos $u, v \in V$. Debemos ver que $T(u+v) = T(u) + T(v)$ (?)

Supongamos que $u = b_1v_1 + ... + b_nv_n$ y $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$. O sea que

$$[u]_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix} \text{ y } [v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix}$$

O sea que

$$T(u) + T(v) = [u]_B + [v]_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix}$$

Por otro lado si

$$(^{**})\ u + v = c_1v_1 + ... + c_nv_n$$

Esto me dice que

$$T(u+v) = [u+v]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ .. \\ c_n \end{bmatrix}$$

Pero si calculamos $u + v$ con las combinaciones lineales de cada uno:

$$\begin{aligned} u + v &= b_1v_1 + ... + b_nv_n + a_1v_1 + ... + a_nv_n \\ u + v &= (b_1 + a_1)v_1 + ... + (b_n + a_n)v_n\ (^*) \end{aligned}$$

Como las combinaciones lineales respecto a una base dada son ÚNICAS!!!!!!!!!!!!!!! SE DEBE TENER NECESARIAMENTE: (*)=(**) o SEA QUE

$$T(u+v) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ .. \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ .. \\ b_n + a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix} = T(u) + T(v)$$

Finalmente veamos $T(cu) = cT(u)$ (?). Tenemos $u = b_1v_1 + ... + b_nv_n$ Luego

$$cT(u) = c[u]_B = c \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}$$

Por otro lado supongamos que

$$T(cu) = [cu]_B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_n \end{bmatrix}$$

o sea $cu = d_1v_1 + ... + d_nv_n$ (*) Pero además

$$cu = c(b_1v_1 + ... + b_nv_n) = cb_1v_1 + ... + cb_nv_n \text{ (**)}$$

Luego (*) y (**) deben ser iguales por la UNICIDAD DE UNA COMBINACIÓN LINEAL RESPECTO DE UNA BASE DADA. o SEA

$$T(cu) = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cb_1 \\ cb_2 \\ ... \\ cb_n \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{bmatrix} = cT(u)$$

Ejercicio 2 (guia complementaria): $V = P_3$. Y consideramos dos subespacios:

$$S = \left\langle 2 - x^2,\ x^3 + 2x - 1 \right\rangle$$

Y

$$T = \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d : \left\{ \begin{array}{c} a - 3c + d = 0 \\ -b + c + d = 0 \end{array} \right\} \right.$$

Por el ejercicio 1 V es "lo mismo" que $\mathbb{R}^4$. Primero elegimos una base (linda) para P_3:

$$C = \{1, x, x^2, x^3\}$$

luego escribo a los vectores de S y T en términos de coordenadas respecto de la base C:

S :

$$\begin{aligned} [2 - x^2]_C &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [x^3 + 2x - 1]_C &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora "vía el isomorfismo" se puede pensar

$$S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

T:

Lo mismo hacemos con T: tomamos el polinomio "genérico" del conjunto T y lo escribimos en coordenadas:

$$\left[ax^3 + bx^2 + cx + d\right]_C = \begin{matrix} d \\ c \\ b \\ a \end{matrix}$$

Luego reescribimos al T como

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{c} a - 3c + d = 0 \\ -b + c + d = 0 \end{array} \right. \right\}$$

En resumen tenemos $V = \mathbb{R}^4$ y los subespacios son

$$\begin{aligned} S &= \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \\ T &= \left\{ \begin{matrix} d \\ c \\ b \\ a \end{matrix} \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{c} a - 3c + d = 0 \\ -b + c + d = 0 \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Y acá seguimos como sabemos.

Volviendo al práctico 7:

Exercise 1 *(4a) Tenemos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y) = (2x - y, -8x + 4y, 0)$. Para ver cuál de los vectores dados u_1, u_2 están en el $Nu(F)$ simplemente debemos aplicar la F y ver si nos da $0 = (0, 0, 0)$.*

$$\begin{aligned} F(u_1) &= F(5, 10) \\ &= (2(5) - (10), \ -8(5) + 4(10), \ 0) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

o sea $u_1 \in Nu(F)$.

Para verificar cuál de los v_1, v_2 están en la $\operatorname{Im}(F) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $F(x, y) = (a, b, c)\}$.

En este caso para ver si v_1 está en la imagen de F debemos ver si existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x, y) = v_1$$

o sea debemos ver si existe (x, y) tal que

$$(2x - y, -8x + 4y, 0) = (1, -4, 0)$$

esto nos lleva a resolver un sistema lineal:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -8x + 4y = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

es decir debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -8x + 4y = -4 \end{cases}$$

pasamos a la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -8 & 4 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -8 & 4 & -4 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema es compatible indeterminado. Es decir podemos encontrar (x, y) *tal que resuelve el sistema que provino de plantear* $F(x, y) = (1, -4, 0)$. *Por ejemplo la solución general es* $\left\{(x, y) : x - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\right\}$. *Luego podemos elegir* $x = 0$, $y = -1$ *y obtenemos*

$$F(0, -1) = (1, -4, 0)$$

luego $v_1 \in \mathrm{Im}(F)$.

(4c) $F : P_2 \rightarrow P_3$ *dada por* $F(p) = xp$. *Veamos si* $p_1 = x + x^2$ *está en* $Nu(F)$*:*

$$F(x + x^2) = x(x + x^2) = x^2 + x^3 \neq 0$$

luego $x + x^2 \notin Nu(F)$.

Veamos si p_1 *está o no en* $\mathrm{Im}(F) = \{q \in P_3 : \exists p \in P_2 \text{ con } F(p) = q\}$. *O sea para ver si* p_1 *está o no en* $\mathrm{Im}(F)$ *debemos ver si existe un polinomio* $p \in P_2$ *de forma tal que*

$$p_1 = F(p)$$

en otras palabras:

$$x + x^2 = xp$$

Para poder resolver esta ecuación de polinomios debemos escribir a p *en una forma genérica:* $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. *Entonces debemos encontrar dicho* p *tal que*

$$\begin{aligned} x + x^2 &= x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \\ x + x^2 &= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 \end{aligned}$$

la única forma que ésta última igualdad sea cierta es que

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 0 \end{aligned}$$

es decir $p = 1 + x$. *Es decir*

$$F(1 + x) = x(1 + x) = x + x^2$$

Luego $p_1 = x + x^2 \in \mathrm{Im}(T)$.

Para el ejercicio 6 ver el Teorema de la dimensión para transformaciones lineales!

Exercise 2 *(7b) Nos dan $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por*

$$\begin{cases} F(1,0) = (1,0,0) \\ F(0,1) = (1,0,1) \end{cases}$$

Primero calculemos la fórmula explícita para F. Para un $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ escribamos dicho vector como combinación lineal de la base dada $C = \{(1,0),(0,1)\}$:

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$$

y ahora aplicamos la F:

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & F[x(1,0) + y(0,1)] \\ F \textit{ lineal} & = & xF(1,0) + yF(0,1) \\ & = & x(1,0,0) + y(1,0,1) \\ F(x,y) & = & (x+y,0,y) \end{array}$$

Busquemos $Nu(F)$: Queremos encontrar los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$F(x, y) = (0,0,0)$$

o sea

$$(x + y, 0, y) = (0,0,0)$$

o sea

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}$$

Luego $(x, y) \in Nu(F)$ si $(x, y) = (0,0)$. Con lo que $Nu(F) = \{(0,0)\}$. Y luego no hay base.

Busquemos $\mathrm{Im}(F)$: Recordemos que

$$\mathrm{Im}(F) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \textit{existe } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \textit{ con } F(x,y) = (a,b,c)\}$$

Tomemos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ debemos ver si existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(x, y) = (a, b, c)$$

o sea

$$(x + y, 0, y) = (a, b, c)$$

o sea debemos ver si existe solución al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ 0 &= b \\ y &= c \end{aligned}$$

con lo cual la solución es de la forma $(x,y) = (a-c,c)$ *y además* $b=0$*. O sea que para que* $(a,b,c) \in \mathrm{Im}(F)$ *se debe tener* $b=0$ *pues si lo vemos como una matriz* $MERF$*:*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a-c \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & b \end{array}\right]$$

O sea $x = a-c$*,* $y=c$*. Y para que el sistema sea compatible se debe tomar* $b=0$*. Entonces* $(a,b,c) \in \mathrm{Im}(F)$ *si satisface la condición de compatibilidad* $b=0$*. O sea*

$$\mathrm{Im}(F) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = 0\}$$

o podemos parametrizar las variables libres $a=t,\ c=s$ *y escribir*

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(F) &= \{(t,0,s) : t,s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{t(1,0,0) + s(0,0,1) : t,s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Hemos obtenido una base para $\mathrm{Im}(F)$*,*

$$B_{\mathrm{Im}(F)} = \{(1,0,0),\ (0,0,1)\}.$$