TEOREMA DE GREEN

Si

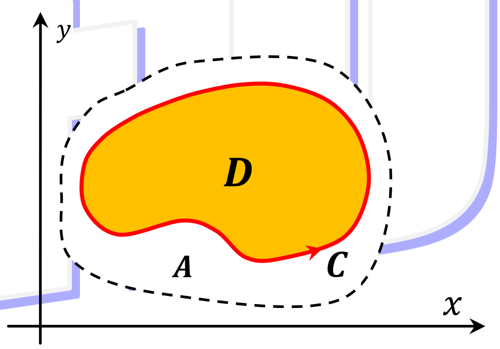
* $D \subset \mathbb{R}^2$ es una unión finita de regiones elementales no solapadas (con interiores disjuntos) en el plano.

* $C = \partial D$ (frontera de D) es una curva cerrada, simple (que no se corta a sí misma), suave por tramos, rectificable (de longitud finita) y orientada positivamente (recorrida en sentido anti-horario).

* $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset A$ (A abierto)

  es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ definido por

  $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ con $\vec{F} \in C^1(D)$



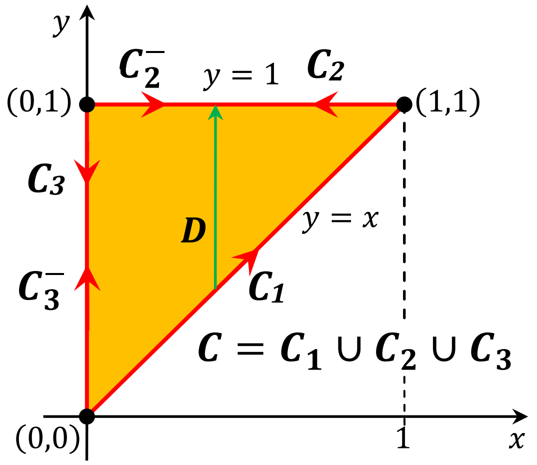
Entonces

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Ejemplo 1

Verifique el teorema de Green para el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (3y + x^2, 4x)$ en la región de $\mathbb{R}^2$ determinada por el siguiente sistema de desigualdades: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq y \leq 1 \end{cases}$

Solución



Para verificar el teorema de Green se deben calcular tanto $\oint_C Pdx + Qdy$ *como* $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ *para comprobar que ambas integrales tienen el mismo valor, es decir que:*

$$\boxed{\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}$$

$$P = 3y + x^2 \quad ; \quad Q = 4x$$

D se puede expresar como y-simple:

$$D = \{(x, y)/0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

Calculando primero la integral doble

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^1 (4-3)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 [y]_{y=x}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

La integral de línea, por propiedad de aditividad (ya que $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$), se puede expresar:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oint_C (3y + x^2)dx + 4xdy$$

$$= \int_{C_1} (3y + x^2)dx + 4xdy + \int_{C_2} (3y + x^2)dx + 4xdy + \int_{C_3} (3y + x^2)dx + 4xdy$$

y por propiedad de inversión del camino

$$= \int_{C_1} (3y + x^2)dx + 4xdy - \int_{C_2^-} (3y + x^2)dx + 4xdy - \int_{C_3^-} (3y + x^2)dx + 4xdy$$

<u>Parametrización para</u> $\boldsymbol{C_1}$

$$y = x; \qquad \begin{cases} x = t & ; \quad dx = dt \\ y = t & ; \quad dy = dt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\int_{C_1} (3y + x^2)dx + 4xdy = \int_0^1 (3t + t^2)dt + 4tdt = \int_0^1 (7t + t^2)dt = \left[\frac{7}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$= \frac{23}{6}$$

<u>Parametrización para</u> $\boldsymbol{C_2^-}$

$$y = 1; \qquad \begin{cases} x = t & ; \quad dx = dt \\ y = 1 & ; \quad dy = 0dt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$-\int_{C_2^-} (3y + x^2)dx + 4xdy = -\int_0^1 (3 + t^2)dt + 0 = \int_1^0 (3 + t^2)dt = \left[3t + \frac{t^3}{3}\right]_1^0$$

$$= -\frac{10}{3}$$

<u>Parametrización para</u> $\boldsymbol{C_3^-}$

$$x = 0; \qquad \begin{cases} x = 0 & ; \quad dx = 0dt \\ y = t & ; \quad dy = dt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$-\int_{C_3^-} (3y + x^2)dx + 4xdy = -\int_0^1 0 + 0 = 0$$

Luego

$$\oint_C (3y + x^2)dx + 4xdy$$

$$= \int_{C_1} (3y + x^2)dx + 4xdy - \int_{C_2^-} (3y + x^2)dx + 4xdy - \int_{C_3^-} (3y + x^2)dx + 4xdy$$

$$= \frac{23}{6} - \frac{10}{3} + 0 = \frac{1}{2}$$

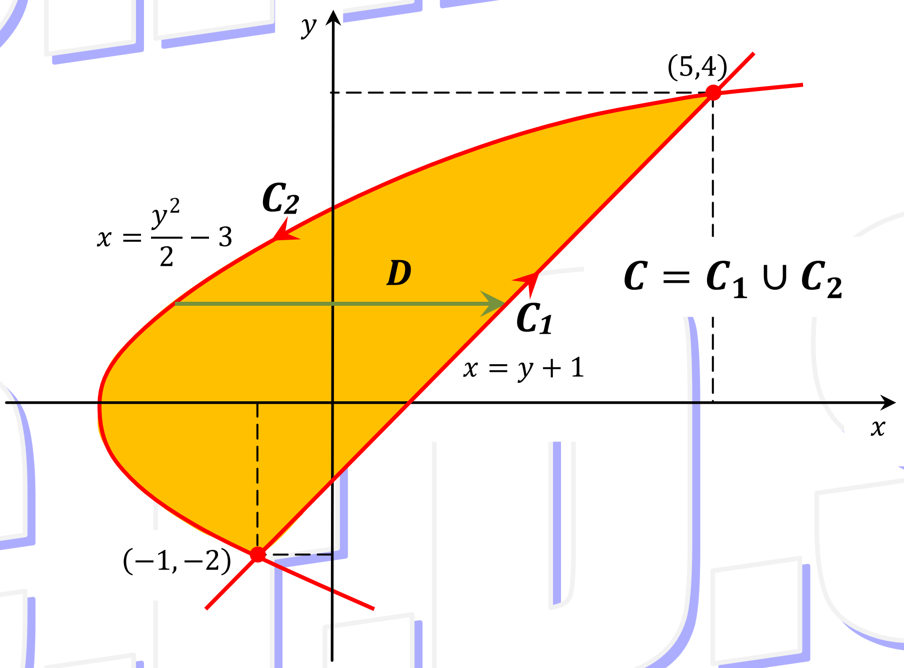
Ejemplo 2

Aplique el teorema de Green para obtener el valor de la siguiente integral de línea:

$$\oint_C \frac{1}{2}xy^2dx + x^2ydy$$

donde C es la curva suave por tramos orientada positivamente correspondiente a la frontera de la región de $\mathbb{R}^2$determinada por: $\frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y + 1$.

Solución



$$P = \frac{1}{2}xy^2 \quad ; \quad Q = x^2y$$

D se puede expresar como *x-simple:*

$$D = \left\{(x,y)/-2 \leq y \leq 4, \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y + 1\right\}$$

Aplicando el teorema de Green se obtiene el valor la integral de línea a partir del cálculo de la integral doble, es decir:

$$\oint_C \frac{1}{2}xy^2dx + x^2ydy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}xy^2\right)\right)dxdy$$

$$= \int_{-2}^{4}\left(\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1}(2xy - xy)\,dx\right)dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy \, dx \right) dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{y^2}{2}-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left[(y+1)^2 y - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right)^2 y \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left[y^3 + 2y^2 + y - \frac{1}{4} y^5 + 3y^3 - 9y \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left[4y^3 + 2y^2 - 8y - \frac{1}{4} y^5 \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[y^4 + \frac{2}{3} y^3 - 4y^2 - \frac{1}{24} y^6 \right]_{-2}^{4}$$

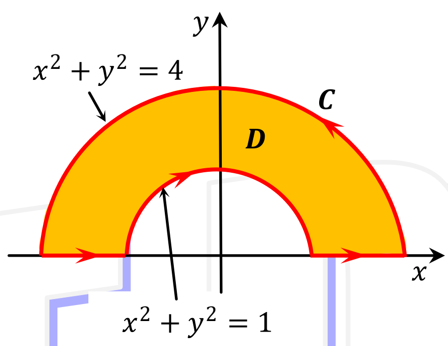
$$= 36$$

Ejemplo 3

Aplique el teorema de Green para obtener el valor de la integral:

$$\oint_c \left(e^{arctanx} - \frac{1}{3} y^3 \right) dx + \frac{1}{3} x^3 dy$$

donde C es la curva con orientación positiva correspondiente a frontera de la región D de la figura:



Solución

$$\oint_c \left(e^{arctanx} - \frac{1}{3} y^3 \right) dx + \frac{1}{3} x^3 dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{arctanx} - \frac{1}{3} y^3 \right) \right] dA$$

Cambiando a coordenadas polares

$$\iint_D [x^2+y^2]dA = \int_0^{\pi}\left(\int_1^2 r^2\, r dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\int_1^2 r^3\, dr\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 d\theta$$

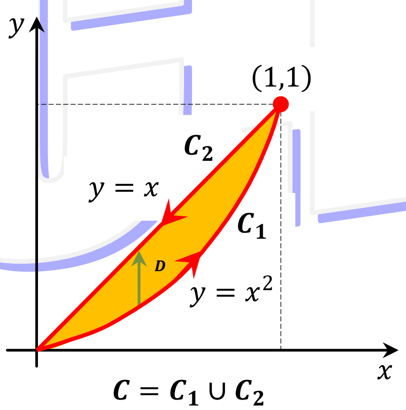
$$= \int_0^{\pi}\left(4-\frac{1}{4}\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{15}{4}\theta\right]_0^{\pi} = \frac{15}{4}\pi$$

Ejemplo 4

Verifique el teorema de Green para el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (y, 2x+y)$ en la región R de $\mathbb{R}^2$ determinada por: $\begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Solución



$$\boxed{\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy}$$

$$P = y \quad ; \quad Q = 2x + y$$

Calculando la integral doble

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right)dy\right)dx$$

$$\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}(2-1)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}dy\right)dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{x}\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right) dA = \frac{1}{6}$$

La integral de línea, por propiedad de aditividad (ya que $C = C_1 \cup C_2$), se puede expresar:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oint_C ydx + (2x+y)dy$$

$$= \int_{C_1} ydx + (2x+y)dy + \int_{C_2} ydx + (2x+y)dy$$

y por propiedad de inversión del camino

$$= \int_{C_1} ydx + (2x+y)dy - \int_{C_2^-} ydx + (2x+y)dy$$

<u>*Parametrización para*</u> ***C_1***

$$y = x^2; \qquad \begin{cases} x = t & ; \quad dx = dt \\ y = t^2 & ; \quad dy = 2tdt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\int_{C_1} ydx + (2x+y)dy = \int_0^1 t^2dt + (2t+t^2)\,2tdt = \int_0^1 (5t^2 + 2t^3)dt$$

$$= \left[\frac{5t^3}{3} + \frac{t^4}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

<u>*Parametrización para*</u> ***C_2^-***

$$y = x; \qquad \begin{cases} x = t & ; \quad dx = dt \\ y = t & ; \quad dy = dt \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\int_{C_2} ydx + (2x+y)dy = -\int_{C_2^-} ydx + (2x+y)dy = -\int_0^1 tdt + (2t+t)\,dt$$

$$= -\int_0^1 4tdt = -[2t^2]_0^1 = -2$$

El valor de la integral de línea es:

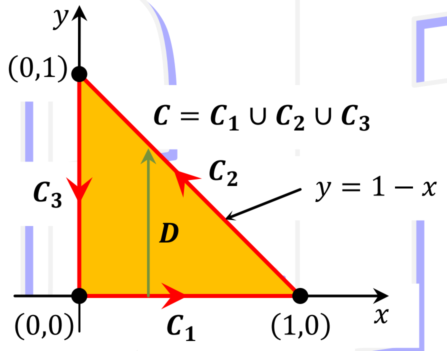
$$\oint_C ydx + (2x+y)dy = \int_{C_1} ydx + (2x+y)dy + \int_{C_2} ydx + (2x+y)dy = \frac{13}{6} - 2 = \frac{1}{6}$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right) dA = \frac{1}{6} = \oint_C ydx + (2x+y)dy$$

Ejemplo 5

Verifique el teorema de Green para el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (y^2, xy)$ en la región D de $\mathbb{R}^2$ determinada por: $\begin{cases} 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Solución



$$\boxed{\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}$$

$$P = y^2 \quad ; \quad Q = xy$$

Integral doble:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (y - 2y)\, dy\right) dx$$

$$= -\int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 (1 - 2x + x^2)\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 - 1 + \frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{6}$$

$$\boxed{\iint_D (y - 2y)\, dA = -\frac{1}{6}}$$

Integral de línea:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oint_C y^2dx + xydy = \int_{C_1} y^2dx + xydy - \int_{C_2^-} y^2dx + xydy - \int_{C_3^-} y^2dx + xydy$$

Parametrización para $\boldsymbol{C_1}$

$$y = 0; \qquad \begin{cases} x = t & ; \quad dx = dt \\ y = 0 & ; \quad dy = 0dt \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_1} y^2dx + xydy = \int_0^1 0 + 0 = 0$$

Parametrización para $\boldsymbol{C_2^-}$

$$y = 1 - x; \qquad \begin{cases} x = t & ; \quad dx = dt \\ y = 1 - t & ; \quad dy = -dt \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_2} y^2dx + xydy = -\int_{C_2^-} y^2dx + xydy = -\int_0^1 (1-t)^2dt + t(1-t)(-dt)$$

$$= -\int_0^1 (1 - 2t + t^2 - t + t^2)dt$$

$$= -\int_0^1 (1 - 3t + 2t^2)dt$$

$$= -\left[t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1$$

$$= -1 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

Parametrización para $\boldsymbol{C_3^-}$

$$x = 0; \qquad \begin{cases} x = 0 & ; \quad dx = 0 \\ y = t & ; \quad dy = dt \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_3} y^2dx + xydy = -\int_{C_3^-} y^2dx + xydy = -\int_0^1 t^2.0 + 0.dt = 0$$

$$\boxed{\oint_C y^2dx + xydy = \int_{C_1} y^2dx + xydy - \int_{C_2^-} y^2dx + xydy - \int_{C_3^-} y^2dx + xydy = 0 - \frac{1}{6} + 0 = -\frac{1}{6}}$$