Investigación Operativa

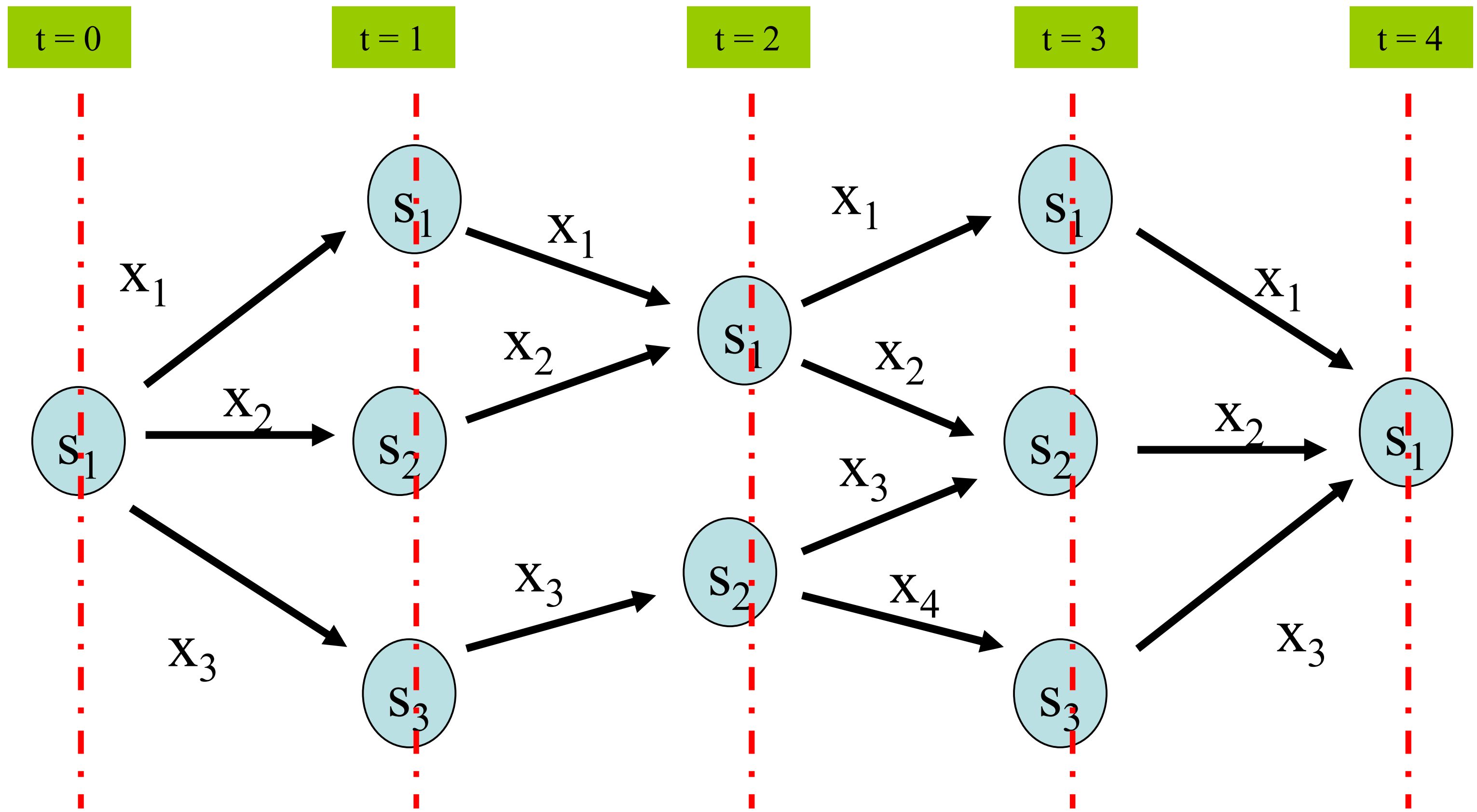
Módulo 2: Programación dinámica

Ing. Sergio Rosa

INTRODUCCION

Se utiliza para resolver problemas de optimización en los cuales intervienen procesos de n etapas. Estos procesos se completan a través de varias (a veces infinitas) decisiones secuenciales o consecutivas, tal que tomada una decisión en un determinado estado desde una determinada etapa condiciona el estado en que se encontrará el sistema al final de la misma. La mayor parte de las veces se obtiene soluciones con un avance en reversa, desde el final hacia el principio, con lo que un problema grande y engorroso se convierte en una serie de problemas más pequeños y tratables.

Representación



Variable etapa: $n \in N \subseteq R \rightarrow$ variable ordenadora

Variable de estado: $s_t \in S_t$

Variables de decisión: $x_t \in X_t$

Objetivo: Maximización/ Minimización

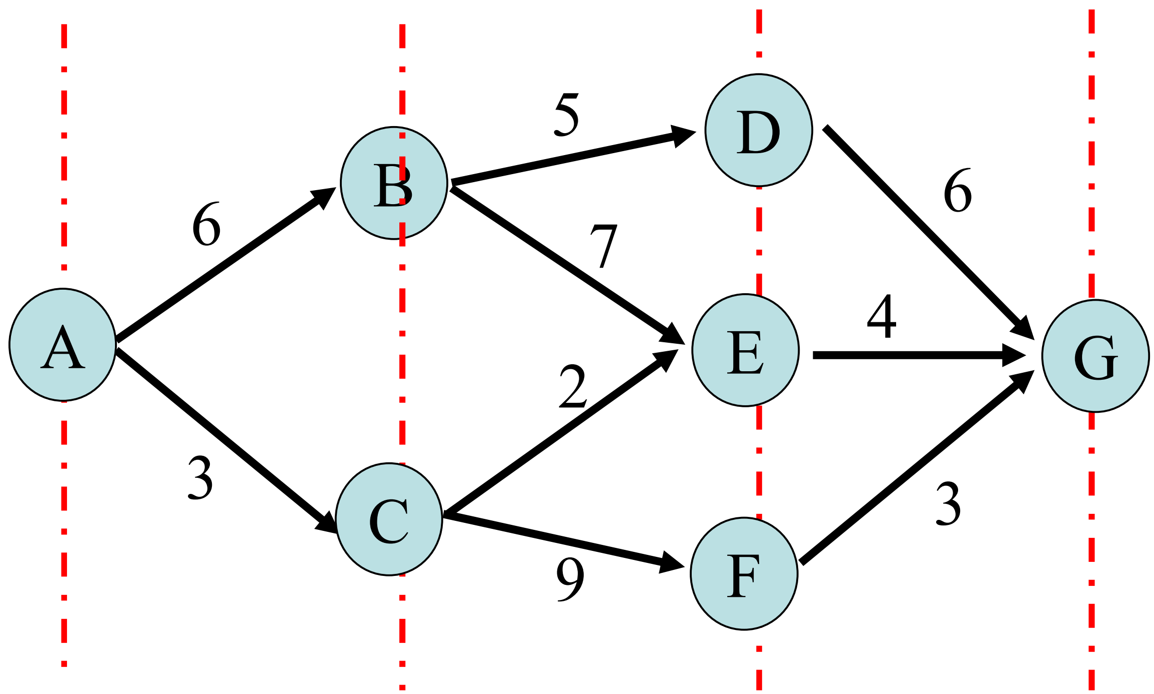
Aplicación de la PD

- Problemas de inversion.
- Problemas del agente viajero.
- Problemas de asignación.
- Problemas de la mochila.
- Problemas de inventarios.
- Problemas de planificación de trabajos.
- Problemas de fiabilidad de sistemas.
- Problemas de reemplazo de equipos.
- Otras aplicaciones.

Problema del agente viajero

- Encontrar un recorrido de longitud mínima para un viajante que tiene que visitar varias ciudades y volver al punto de partida, conocida la distancia existente entre cada dos ciudades.
- Es decir, dado un grafo dirigido con arcos de longitud no negativa, se trata de encontrar un circuito de longitud mínima que comience i y termine j.

Ejemplo agente viajero



Etapa: 3 etapas
Variable de estado: la ciudad en la que me encuentro
Variables de decisión: a que ciudad me dirijo
Objetivo: Minimizar la distancia

Resultado ejemplo agente viajero

03-08-2011 Stage	From Input State	To Output State	Distance	Cumulative Distance	Distance to Node G
1	Node A	Nodo C	3	3	9
2	Nodo C	Node E	2	5	6
3	Node E	Node G	4	9	4
	From Node A	To Node G	Min. Distance	= 9	CPU = 0

Problema selección de cartera

- Tiene como objetivo la maximización del rendimiento.
- En general las etapas lo constituyen los distintos tipos de inversión.
- La decisión consiste en como decidir realizar la inversión que nos dé la máxima contribución.

Caso de inversión

Una persona tiene U$S 4000 que desea invertir y se le presentan 3 opciones: cada opción requiere depósitos en cantidades de U$S 1000. El inversionista pudo colocar todo el dinero entre las tres y las ganancias esperadas se presentan en la siguiente tabla:

	Invierte 0	Invierte 1000	Invierte 2000	Invierte 3000	Invierte 4000
Gananc. Op. I	0	2000	5000	6000	7000
Gananc. Op. II	0	1000	3000	6000	7000
Gananc. Op. III	0	1000	4000	5000	8000

Cuanto debería invertir en cada opción para obtener la máxima ganancia.

Características de los problemas de PD

1. El problema se puede dividir en n etapas, cada etapa requiere de una decisión.

2. Cada etapa tiene un número de estados asociados a ella. Por estado se entiende la información que se necesita en cualquier etapa para tomar una decisión.

3. La decisión tomada en cualquier etapa indica como se transforma el estado actual en el estado en la siguiente etapa.

Características de los problemas de PD

4. Dado el estado actual, la decisión óptima para cada una de las etapas restantes no debe depender los estados previamente alcanzados o de decisiones previamente tomadas. A esta idea se la conoce como principio de optimalidad.
5. Si los estados del problema se han clasificado en una de t etapas, debe haber una fórmula recursiva que relacione el costo o recompensa ganada de las etapas t+1, t+2, ..., tn. En esencia la fórmula recursiva se podría haber escrito del siguiente modo:

$$f_{t,n}(s) = \underset{\text{variando } x}{\text{óptimo}} \left[C_t\,(s_t, x_t) + F_{t+1,n}\,(s_{t+1})\right]$$

Política y trayectoria

Como los estados quedan unívocamente definidos con las decisiones será suficiente conocer s_0, x_1, s_1, x_2, s_2, x_3, s_3, x_4, s_4, ..., s_{t-1}, x_t, ... , s_n, x_n secuencia que designaremos política y la simbolizaremos como π, fijada la política, determina una evolución o trayectoria γ .

$$\gamma = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, ..., s_{t-1}, ... , s_n)$$

Como no hay otra decisión que no sea u_t para pasar de x_{t-1} a x_t se puede asegurar que: conocida una trayectoria podemos determinar perfectamente cual fue la política aplicada.

Política y trayectoria

DEFINIREMOS:

G = conjunto de todas las políticas

G_{ij} = conjunto de todas las subpolíticas entre s_i y s_j

Función de decisión

Asociada a cada política habrá un valor o función de decisión:

$$
\begin{aligned}
F(\gamma) &= F(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, ..., s_{t-1}, ... , s_n) \\
&= C_1(s_0, s_1) + C_2(s_1, s_2) + C_3(s_2, s_3) + ... + C_n(s_{n-1}, s_n)
\end{aligned}
$$

El problema consistirá en determinar la política $\gamma \in G$ que optimice (esto es que maximice o minimice) la $F(\gamma)$. Así si el objetivo fuera maximizar deberíamos determinar la política

$$\gamma_0 \in G \,/\, \forall\, \gamma \in G : F(\gamma_0) \geq F(\gamma)$$

O bien :

$F(\gamma_0) = \text{Max } F(\gamma)$ a la que la política optima $\gamma \in G$

Determinación de una política óptima

TEOREMA DE BELLMAN

Dada una política optima, cualquier subpolítica perteneciente a ella será también optima de entre todas las que parten del mismo estado inicial y llegan al mismo estado final.

Determinación de una política óptima

Para encontrar una política optima debemos aplicar el teorema anterior de la siguiente manera: comiéncese con la última etapa de un proceso de n etapas y determínese para cada estado la mejor subpolítica para abandonar ese estado y completar el proceso. Después continúese hacia atrás a lo largo del proceso etapa por etapa.

Usaremos la fórmula recurrente:

$$f_{t,n}(s) = \text{óptimo}\ [C_t\,(s_t, x_{t+1}) + F_{t+1,n}\,(s_{t+1})]$$

$$\text{variando } (x)$$

Problemas de asignación

- Se tienen n unidades de un recurso que deben asignarse a r proyectos.
- Si se asignan j, $0 \leq j \leq n$, unidades al proyecto i se obtiene un beneficio Ni,j.
- El problema es asignar el recurso a los r proyectos maximizando el beneficio total.

Ejemplo: problema de asignación

El gerente de ventas de “el Molino S. A.” dispone de cuatro promotores para realizar promociones en tres conocidos hipermercados de la ciudad: Carrefour, Libertad, y W. Mart En la siguiente tabla se muestra las ventas según los promotores asignados.

	En miles de $		
Promotores	**Carrefour**	**Libertad**	**W. Mart**
0	35	55	45
1	80	75	65
2	110	120	95
3	145	140	115
4	150	175	160

Se pide:

a) Utilice programación dinámica para indicarle al gerente como asignar los promotores que maximice las ventas.

b) Defina el objetivo, etapas, estados y variables de decisión del problema.

Problemas de la mochila

- Se tienen n objetos fraccionables y una mochila.
- El objeto i tiene peso p_i y una fracción x_i ($0 \leq x_i \leq 1$) del objeto i produce un beneficio $b_i x_i$.
- El objetivo es llenar la mochila, de capacidad C, de manera que se maximice el beneficio.

$$\text{Maximizar } (Z) = \quad b_i\, x_i$$

$$\text{Sujeto a } \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i = C$$

$$\text{Con } 0 \leq xi \leq 1,\ bi > 0,\ ai > 0,\ 1 \leq i \leq n$$

Ejemplo: problema de la mochila

Un camionero que trabaja por su cuenta tiene 8 metros cúbicos de espacio disponible en un camión que saldrá para la ciudad de Buenos Aires. Un distribuidor que tiene grandes cantidades de 3 artículos diferentes, todos destinados para esta ciudad, ha ofrecido al camionero los siguientes pagos por transportar tantos artículos como quepan en el camión.

ARTICULO	PAGO $ /ARTICULO (ganancias)	VOLUMEN m3/ART.
I	11	1
II	32	3
III	58	5

Pregunta: ¿cuantas cantidades de cada artículo deberá aceptar el camionero a fin de maximizar los pagos de embarque, sin exceder la capacidad disponible del camión?

Resultado problema tipo mochila

03-08-2011 Stage	Item Name	Decision Quantity (X)	Return Function	Total Item Return Value	Capacity Left
1	Articulo 1	3	11X	33	5
2	Articulo 2	0	32X	0	5
3	Articulo 3	1	58X	58	0
	Total	Return	Value =	91	CPU = 0,02

Problemas de producción

- La variable oredenadora en general se trata del tiempo.
- El problema puede tratarse maximizar la ganancia o minimizar los costos totales.
- Como variable de estado tenemos la disponibilidad de stock.
- La decisión a tomar, es determinar la cantidad a producir.

Problema de producción

La empresa ELECTRO-MOT S. A. produce motores eléctricos. Sabe que la demanda de su producto durante cada uno de los siguientes 4 meses será como sigue: mes 1, 1 unidad; mes 2, 3 unidades; mes 3, 2 unidades; mes 4, 4 unidades. Al principio de cada mes la empresa debe determinar cuantas unidades se deben producir durante ese mes. Durante un mes en el que se produce cualquier número de unidades, se incurre en un costo de preparación de $3. además hay un costo variable de $1 por cada unidad producida. Al final de cada mes se incurre en un costo de $0,50 por unidad en inventario. Las limitaciones de capacidad permite la producción de un máximo de 5 unidades cada mes. El tamaño del almacén de la empresa restringe el inventario final de cada mes a 4 unidades cuando mucho. La empresa desea determinar un calendario de producción para cada mes que cumpla a tiempo con las demandas y que reduzca al mínimo la suma de los costos de producción y de almacenamiento durante los cuatro meses. Suponer que hay 0 (cero) unidades disponibles a principio del mes. Nota: los costos están expresados en miles de $.

Resultado problema de producción

03-08-2011 Stage	Period Description	Net Demand	Starting Inventory	Production Quantity	Ending Inventory	Setup Cost	Variable Cost Function (P,H,B)	Variable Cost	Total Cost
1	Period1	1	0	1	0	$ 3,00	1P+0.5H	$ 1,00	$ 4,00
2	Period2	3	0	5	2	$ 3,00	1P+0.5H	$ 6,00	$ 9,00
3	Period3	2	2	0	0	0	1P+0.5H	0	0
4	Period4	4	0	4	0	$ 3,00	1P+0.5H	$ 4,00	$ 7,00
Total		10	2	10	2	$ 9,00		$ 11,00	$ 20,00

Problemas de reemplazo de equipo

- Son problemas en los que uno tiene que decidir entre reemplazar un equipo o bien mantenerlo.
- La variable ordenadora es el tiempo.
- Como objetivo se puede tener que maximizar ganancias o minimizar costos.
- La variable de estado lo constituye en general la antigüedad de la máquina.

Caso de reemplazo de equipo

Una empresa se implanta con maquinas con dos años de uso y sabe que los beneficios que de las mismas puede obtener como así también los costos de mantenimiento y reposición son los de la tabla siguiente, según la antigüedad de la maquina.

	Edad, x					
	0	1	2	3	4	5
Ingreso, I(x)	10.000	9.500	9.200	8.500	7.300	6.100
Mantenimiento, M(x)	100	400	800	2.000	2.800	3.300
Reemplazo, R(x)	.....	3.500	4.200	4.900	5.800	5.900

Ninguna maquina se conserva por mas de 6 años y las reposiciones se hacen solo por maquinas nuevas. Debe determinarse la política de reemplazos optima para los próximos cuatro (4) años que maximice los beneficios.