Clase 16

August 30, 2022

Bases para el espacio fila, espacio columna y espacio nulo

Comenzaremos probando que las operaciones elementales de filas no modifican el espacio nulo de una matriz (es decir el espacio de soluciones de $Ax = 0$)

Theorem 1 *Las operaciones elementales de filas no cambian el espacio nulo de una matriz.*

Proof. Sea la matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Sea B una matriz que se obtiene de aplicar alguna operación elemental e a la matriz A,

$$B = e(A)$$

Pero entonces por el Teorema 6 (de la clase 4) tenemos que los sistemas $Ax = 0$ y $Bx = 0$ tienen las mismas soluciones (pues $B \sim_f A$). Luego los espacios soluciones de A y B deben ser los mismos. ∎

Theorem 2 *Las operaciones elementales de filas no cambian el espacio fila de una matriz.*

Proof. Sea la matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Y sean $r_1, ..., r_m$ las filas de A. Sea B la matriz que se obtiene de aplicar alguna operación de fila e a la matriz A:

$$B = e(A).$$

Mostraremos que el espacio fila de B está contenido en el espacio fila de A y viceversa. Concluyendo entonces que ambos espacios son iguales.

Si e es una operación de tipo 3 entonces las filas de B son las mismas filas de A pero algunas cambiadas de lugar. Luego el espacio generado por las filas de B es el mismo que el generado por las filas de A.

Si e es una operación de tipo 2, por ejemplo $e : f_i + \alpha f_j$. Es decir a la fila i le sumamos la fila j multiplicada por el escalar α. Con lo que las filas de B

serán $r_1, ..., r_i + \alpha r_j, ..., r_j, ..., r_m$. Entonces todas las filas son iguales a las de A salvo la fila i que es una combinación lineal de la fila r_i y r_j. Pero entonces todo vector que sea combinación lineal de $r_1, ..., r_i + \alpha r_j, ..., r_j, ..., r_m$ en particular es combinación lineal de los vectores $r_1, ..., r_i, ..., r_j, ..., r_m$. En otras palabras que el espacio fila de B está contenido en el espacio fila de A.

Si e es una operación de tipo 1 el razonamiento es idéntico al anterior. Sea $e : \alpha f_i$, es decir multiplicar a la fila i por el escalar α. Esto significa que las filas de B son $r_1, ..., \alpha r_i, ..., r_m$. Pero entonces todo vector que sea combinación lineal de los vectores $r_1, ..., \alpha r_i, ..., r_m$ será, en particular, combinación lineal de los vectores $r_1, ..., r_i, ..., r_m$. Luego esto significa que el espacio fila de B está contenido en el espacio fila de A (1).

Hasta acá hemos probado que, sea cual sea la e, el espacio fila de B está contenido en el espacio fila de A.

Para ver lo recíproco razonemos como sigue: Ya que B se obtiene de aplicar e a la matriz A entonces sabemos que existe la operación elemental inversa e^{-1} tal que

$$A = e^{-1}(B)$$

y ahora razonamos como antes para cada tipo de operación elemental. Concluímos, de forma análoga, que el espacio fila de A está contenido en el espacio fila de B (2).

Finalmente (1) y (2) nos dicen que el espacio fila de A debe ser igual al espacio fila de B. ∎

Theorem 3 *Sean $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ tales que $B \sim_f A$. Entonces:*

1. *Si los vectores columnas de A son linealmente independientes entonces los vectores columnas de B son linealmente independientes.*

2. *Si los vectores columnas de A forman una base para el espacio columna de A entonces los vectores columnas de B forman una base para el espacio columna de B.*

Proof. (1) Como $B \sim_f A$ entonces por el Teorema 7 (de la clase 4) los sistemas $Ax = 0$ y $Bx = 0$ tienen las mismas soluciones. Llamemos $x_0 = (x_1, ..., x_n)$ una solución de $Ax = 0$ (también de $Bx = 0$). Y sean $c_1, ..., c_n$ las columnas de A y $d_1, ..., d_n$ las columnas de B. Entonces por el Teorema 23 (de la clase 15) tenemos que 0 pertenece al espacio columna de A y al espacio columna de B:

$$\begin{aligned} x_1 c_1 + ... + x_n c_n &= 0 \\ x_1 d_1 + ... + x_n d_n &= 0 \end{aligned}$$

Esto se interpreta como sigue: Cada vez que escribimos una combinación lineal nula de las columnas de A (o de B) los escalares de dicha combinación lineal nula forman un vector solución de los sistemas homogéneos $Ax = 0$ y

$Bx = 0$. Pero esto dice que si los vectores columnas de A son LI entonces $x_i = 0 \ \forall i$. Así el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene a la solución trivial ($x = 0$) como única solución. Luego el sistema B también tendrá a la solución trivial como única solución. Y de esta forma los vectores columnas de B serán también LI.

(2) Como sabemos que los vectores columnas generan los respectivos espacios columnas, si las columnas de A son LI entonces las columnas de B también son LI (inciso (1)). Luego esto quiere decir que si las columnas de A forman base para el espacio columna de A entonces las columnas de B forman base para el espacio columna de B. ■

Finalmente el Teorema siguiente junto al anterior justificarán los pasos del **Problema** 24 (de la clase 15).

Theorem 4 *Si una matriz R está en forma escalonada entonces los vectores filas que contengan a los* 1 *principales forman una base para el espacio fila de R y los vectores columnas que contengan a los* 1 *principales forman una base para el espacio columna de R.*

No vamos a demostrar este teorema. Pero su utilidad es notoria!

Rango y Nulidad

Comenzaremos con un resultado que nos indica que el espacio fila y el espacio columa de una matriz no son tan diferentes, en algún sentido.

Theorem 5 *Si A es cualquier matriz entonces el espacio fila y el espacio columna de A tienen la misma dimensión.*

Proof. Sea R la MERF de A. Por el segundo Teorema de esta clase (probado más arriba) tenemos que los espacios filas de R y de A son los mismos. Esto implica que

$$\dim(\text{espacio fila de } A) = \dim(\text{espacio fila de } R)$$

Por el tercer Teorema de esta clase, parte b, (probado más arriba) tenemos que los espacios columnas de A y de R tienen la misma dimensión,

$$\dim(\text{espacio columna de } A) = \dim(\text{espacio columna de } R)$$

Entonces bastará probar que el espacio fila de R tiene la misma dimensión que el espacio columna de R. Por el Teorema 4 de esta clase (que omitimos la prueba) la dimensión del espacio fila de R es el número de vectores filas, diferentes de 0, de R. Y la dimensión del espacio columna de R es el número de columnas que contienen 1 princpales. Pero ya que las filas de R distintas de

0 son las que contienen 1 principales entonces el número de vectores filas no nulas de R es igual al número de vectores filas que contienen los 1 principales. Ahora cabe notar que por un 1 principal pasa una fila y una columna. Luego el número de filas no nulas de R coincide con el número de columnas con 1 principales. Lo que demuestra que la dimensión del espacio fila de R debe ser igual a la dimensión del espacio columna de R. ■

Definition 6 *La dimensión común del espacio fila y del espacio columna de una matriz A se llama* rango *de A. La dimensión del espacio nulo de A se llama* nulidad *de A.*

Remark 7 *Recordar que esta definición coincide con lo que habíamos definido rango en la primera parte de la materia (el rango de A es el número de filas no nulas de la MERF R_A). Denotaremos por $rango(A)$ al rango de A.*

Ahora, relacionamos A con A^T.

Theorem 8 *Sea $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Entonces $rango(A) = rango(A^T)$.*

Proof. Ya que las filas de A^T son las columnas de A y por el Teorema anterior el espacio fila y el espacio columna de A tienen la misma dimensión, tenemos que

$$rango(A^T) = \dim(\text{espacio fila de } A^T) = \dim(\text{espacio columna de } A) = rango(A).$$

■

Theorem 9 *(Teorema de la dimensión para matrices) Sea $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Entonces*

$$\text{rango}(A) + \text{nulidad}(A) = n.$$

Proof. Como A tiene n columnas, el sistema lineal homogéneo $Ax = 0$ tiene n variables que se clasifican en principales y libres. Si l =cantidad de variales libres y r =cantidad de variables principales entonces:

$$(1)\ l + r = n.$$

Pero el número de variables principales es el número de 1 principales en la MERF R_A, que es justamente el rango de A. Es decir:

$$(2)\ r = rango(A).$$

Y el número de variables libres es igual a la nulidad de A. Pues la nulidad de A es el número de parámetros que hay en la solución general del sistema homogéneo $Ax = 0$. O sea

$$(3)\ l = nulidad(A).$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$nulidad(A)\ +\ rango(A)\ =\ n.$$

■

Example 10 *Encontrar el rango y la nulidad de la siguiente matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Reduciendo por fila obtenemos

$$R_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego se tienen 2 filas no nulas. Con lo que $rango(A) = 2$ (es decir el espacio fila y el espacio columna tienen dimensión 2). Ahora bien, la matriz tiene 6 columnas. Luego por el Teorema de la dimensión para matrices se tiene que

$$\begin{aligned} nulidad(A) &= 6 - rango(A) \\ &= 6 - 2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Esto significa que la dimensión del espacio nulo, es decir del espacio solución del sistema $Ax = 0$, es 4. Podemos hallar una base de hecho (parametrizando $R_A x = 0$). Ejercicio.

Coordenadas

La idea es generalizar el concepto de "componentes" de un vector libre. Cuando pensamos en las componentes de un vector de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, pensamos en que si $v = (a, b)$ entonces sus "componentes" (o números de dirección) son a y b. Pero observemos que si consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (como $\mathbb{R}-$*espacio vectorial*)

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$$

donde $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$, entonces a, b no son más que los escalares que aparecen en la combinación lineal del vector v respecto de dicha base:

$$v = (a,b) = a(1,0) + b(0,1).$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definition 11 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial de dimensión finita. Una* base ordenada *para V es un* conjunto ordenado *de vectores de V, $\{v_1, ..., v_n\}$, tales que generan V y son linealmente independientes.*

Example 12 *El conjunto $\{(1,3);(0,-1)\}$ forma una base para $\mathbb{R}^2$ (como $\mathbb{R}-$espacio vectorial). Y podemos establecer que una base ordenada sea*

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,3);(0,-1)\}$$

y otra base ordenada sea

$$\mathcal{B}_2 = \{(0,-1);(1,3)\}.$$

Sea V un $\mathbb{F}-$*espacio vectorial* de dimensión finita. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ordenada para V. Entonces sabemos que todo vector $v \in V$ se escribe como combinación lineal ÚNICA de los vectores de dicha base:

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

con $\alpha_i \in \mathbb{F}$.

A los escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ lo llamaremos las coordenadas del vector v con respecto a la base ordenada $\mathcal{B}$. Y lo expresaremos de la siguiente forma:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Example 13 *Consideramos $V = \mathbb{R}^3$ (como $\mathbb{R}-$espacio vectorial). Y sea $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base ordenada canónica ($e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$). Sea $\mathcal{B} = \{(1,1,0);(2,0,-1);(0,-1,3)\}$ otra base ordenada. Sea $v = (7,-5,2) \in V$. Entonces sabemos que*

$$(7,-5,2) = 7e_1 + (-5)e_2 + 2e_3$$

lo que nos dice que las coordenadas de v resepcto de la base canónica son naturalmente

$$[v]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(es decir, como viene dado de entrada).

Ahora si intentamos escribir a v como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$, debemos buscar escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$(7, -5, 2) = a(1, 1, 0) + b(2, 0, -1) + c(0, -1, 3)$$

Es decir debemos resolver el siguiente sistema lineal,

$$\begin{cases} a + 2b = 7 \\ a - c = -5 \\ -b + 3c = 2 \end{cases}$$

Pasamos a la matriz ampliada y resolvemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \to f_2 - f_1 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -12 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \to \left(-\frac{1}{2}\right) f_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right] \to$$

$$\begin{array}{c} f_1 + (-2) f_2 \\ f_3 + f_2 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 8 \end{array}\right] \to \frac{2}{5} f_3 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{5} \end{array}\right] \to$$

$$\begin{array}{c} f_2 + \frac{1}{2} f_3 \\ f_1 - f_3 \end{array} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{41}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{38}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{5} \end{array}\right]$$

Esto quiere decir que $a = -\frac{41}{5}$; $b = \frac{38}{5}$ y $c = \frac{16}{5}$. Es decir:

$$(7, -5, 2) = -\frac{41}{5}(1, 1, 0) + \frac{38}{5}(2, 0, -1) + \frac{16}{5}(0, -1, 3).$$

O sea que las coordenadas de v respecto de la base $\mathcal{B}$ son:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -41/5 \\ 38/5 \\ 16/5 \end{bmatrix}.$$

Cómo podemos hacer para expresar, de forma rápida, todo vector con coordenadas en una base dada como combinación lineal de otra base? En otras palabras, cómo podemos cambiar de base a un vector dado? Lo que haremos es construir una *matriz cambio de base*!

Lo haremos con un ejemplo concreto. Sea $V = \mathbb{R}^2$ (como $\mathbb{R}-$*espacio vectorial*). Consideremos dos bases ordenadas: la canónica $\mathcal{C} = \{(1, 0); (0, 1)\}$ y la base $\mathcal{B} = \{(-1, 2); (3, -4)\}$.

Escribimos a los vectores de la base $\mathcal{B}$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{rcl} (-1, 2) & = & (-\mathbf{1})(1, 0) + \mathbf{2}(0, 1) \\ (3, -4) & = & \mathbf{3}(1, 0) + (-\mathbf{4})(0, 1) \end{array}$$

A los escalares de dicha combinación lineal los ponemos como columnas de una matriz:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Dicha matriz se llama matriz cambio de base y permite pasar vectores cuyas coordenadas sean con respecto a la base ordenada $\mathcal{B}$ a coordenadas en la base ordenada $\mathcal{C}$. Para la transición inversa debemos calcular P^{-1}. Esta nos permitirá pasar de un vector con coordenadas en la base $\mathcal{C}$ a sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$.

¿Cómo? Debemos premultiplicar P^{-1} con un vector columna con sus coordenadas en la base $\mathcal{C}$ y obtenemos dicho vector columna pero con sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$. Por ejemplo tomemos el vector en base canónica $u = (2, -2)$. Es decir

$$[u]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para encontrar $[u]_{\mathcal{B}}$ primero debemos calcular P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Y ahora multiplicamos P^{-1} a izquierda por $[u]_{\mathcal{C}}$

$$[u]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\,[u]_{\mathcal{C}}$$

$$\begin{aligned} [u]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ [u]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De hecho podemos comprobar fácilmente que

$$(1)(-1, 2) + (1)(3, -4) = (2, -2)$$

nos da el vector original (que estaba en base canónca).

Por qué funciona esto? Veamos el siguiente razonamiento de forma general: Supongamos que tenemos un $\mathbb{F}-$*espacio vectorial* V y consideremos dos bases ordenadas para V: $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ y $\mathcal{B} = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$. Tomamos cualquier vector $u \in V$. Supongamos que las coordenadas de u en la base $\mathcal{B}$:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que

$$(1)\ u = y_1\beta_1 + ... + y_n\beta_n.$$

Como $\mathcal{B}$ es base de V se debe poder escribir a cada vector de esta base como combinación lineal de los vectores de base $\mathcal{A}$. De forma conveniente lo hacemos como sigue:

$$(2)\quad \begin{array}{c} \beta_1 = P_{11}\alpha_1 + ... + P_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = P_{21}\alpha_1 + ... + P_{2n}\alpha_n \\ ... \\ \beta_n = P_{n1}\alpha_1 + ... + P_{nn}\alpha_n \end{array}$$

Donde P_{ij} son escalares que hacen posible las combinaciones lineales.

Reemplazando (2) en (1) tenemos que

$$\begin{array}{rcl} u & = & y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + ... + y_n\beta_n \\ u & = & y_1(P_{11}\alpha_1 + ... + P_{1n}\alpha_n) + y_2(P_{21}\alpha_1 + ... + P_{2n}\alpha_n) + ... + y_n(P_{n1}\alpha_1 + ... + P_{nn}\alpha_n) \\ (3)\ u & = & (y_1P_{11} + y_2P_{21} ... + y_nP_{n1})\,\alpha_1 + ... + (y_1P_{1n} + y_2P_{2n} + ... + y_nP_{nn})\alpha_n \end{array}$$

Pero esto último (3) nos da las coordenadas de u respecto de la base $\mathcal{A}$!

$$(4)\ \ [u]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} y_1P_{11} + y_2P_{21} + ... + y_nP_{n1} \\ ... \\ ... \\ y_1P_{1n} + y_2P_{2n+} ... + y_nP_{nn} \end{bmatrix}$$

Notemos que a (4) lo podemos reescribir como un producto de matriz por vector

$$\begin{array}{rcl} [u]_{\mathcal{A}} & = & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & ... & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & ... & P_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ P_{1n} & P_{2n} & ... & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix} \\ (5)\ \ [u]_{\mathcal{A}} & = & P\,[u]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

Es decir la P es la matriz cambio de base que nos lleva de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{A}$.

Se puede ver que dicha P es invertible, existe P^{-1} y lo que hace esta matriz es llevar $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{rcl} [u]_{\mathcal{A}} & = & P\,[u]_{\mathcal{B}} \\ P^{-1}\,[u]_{\mathcal{A}} & = & P^{-1}\,(P\,[u]_{\mathcal{B}}) \\ & = & \left(P^{-1}P\right)[u]_{\mathcal{B}} \\ & = & I\,[u]_{\mathcal{B}} \\ & = & [u]_{\mathcal{B}} \end{array}$$

O sea

$$(6) \ \ [u]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\,[u]_{\mathcal{A}}$$

Todo se resume en el siguiente Teorema (no lo vamos a demostrar pero lo que hicimos arriba es la idea de la prueba).

Theorem 14 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial. Consideremos dos bases ordenadas para V, $\mathcal{A},\mathcal{B}$. Si P es la matriz cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$ entonces*

1. *P es invertible.*
2. *P^{-1} cambia de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$.*

Remark 15 *Para acordarse cómo armar la P podemos resumir todo como sigue. Tenemos dos bases ordenadas $\mathcal{A}=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ y $\mathcal{B}=\{\beta_1,...,\beta_n\}$. Si queremos calcular la matriz cambio de base que nos transfiera desde la base $\mathcal{B}$ a la $\mathcal{A}$ debemos escribir a los vectores de la base $\mathcal{B}$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{A}$ y poner las coordenadas como columnas de P.*

$$[P]_{\mathcal{B}\mathcal{A}} = \left[\ [\beta_1]_{\mathcal{A}} \quad [\beta_2]_{\mathcal{A}} \quad \cdots \quad [\beta_n]_{\mathcal{A}}\ \right].$$

Y para calcular la transición inversa simplemente podemos calcular la inversa de esta matriz...

$$[P]_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \left([P]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}\right)^{-1}.$$

Example 16 ***Problem 17*** *Sea $V = P_3[\mathbb{R}] = \{$polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales$\}$ como $\mathbb{R}-$espacio vectorial.*

Consideramos las bases ordenadas $\mathcal{B}_1=\{1,x,x^2,x^3\}$ y $\mathcal{B}_2=\{-3,1-x,1+x^2,x^3\}$. Se pide:

1. *Verificar que $\mathcal{B}_2$ es una base para V.*
2. *Dar las coordenadas del polinomio $p = 3x^2-2x+5$ respecto de ambas bases ordenadas.*
3. *Hallar la matriz cambio de base $[P]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ y $[P]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$.*
4. *Sea $q\in V$ tal que $[q]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$. Hallar $[q]_{\mathcal{B}_1}$.*

Solution 18 1) *Veamos que son LI. Supongamos la combinación lineal nula*

$$a(-3)+b(1-x)+c(1+x^2)+d(x^3)=\mathbf{0}$$

el $\mathbf{0}$ *es el polinomio nulo. Entonces*

$$\begin{aligned} -3a+b-bx+c+cx^2+dx^3 &= 0 \\ (-3a+b+c)-bx+cx^2+dx^3 &= 0 \end{aligned}$$

como el polinomio nulo es constante esto implica que ambos polinomios son iguales si:

$$\begin{cases} -3a+b+c=0 \\ -b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases}$$

el cual tiene como solución única: $a=0,\ b=0,\ c=0$ *y* $d=0$*. Lo cual implica que los vectores de* $\mathcal{B}_2$ *son LI.*

Ahora bien, sabemos que el espacio V *es de dimensión* 4*. Luego un conjunto LI con* 4 *vectores debe necesariamente generar todo* V*. Así* $\mathcal{B}_2$ *resulta una base para* V*.*

2) *Claramente el polinomio* $p=3x^2-2x+5$ *está en base canónica pues:*

$$p=\mathbf{0}x^3+\mathbf{3}x^2-\mathbf{2}x+\mathbf{5}$$

con lo que

$$\textit{(1)}\ [p]_{\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora para encontrar $[p]_{\mathcal{B}_2}$ *podemos calcular la matriz cambio de base pero eso lo haremos luego. Lo que haremos es escribir* p *como combinación lineal de los vectores de la base* $\mathcal{B}_2$*:*

$$3x^2-2x+5=a(-3)+b(1-x)+c(1+x^2)+d(x^3)$$

para encontrar los a,b,c,d *debemos desarrollar el lado derecho de la igualdad:*

$$\begin{aligned} 3x^2-2x+5 &= a(-3)+b(1-x)+c(1+x^2)+d(x^3) \\ &= (-3a+b+c)-bx+cx^2+dx^3 \end{aligned}$$

ahora los polinomios del lado izquierdo y derechos son iguales si cumplen que

$$\begin{cases} -3a+b+c=5 \\ -b=-2 \\ c=3 \\ d=0 \end{cases}$$

Lo cual implica que $d=0,\ c=3,\ b=2$ *y* $a=0$*. Luego esto dice que*

$$\textit{(2)}\ [p]_{\mathcal{B}_2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3) *Para calcular $[P]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}$ (la que hace la transición de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$) debemos escribir a los vectores de la base $\mathcal{B}_2$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}_1$ (como $\mathcal{B}_1$ es la base canónica este es el camino fácil):*

$$\begin{gathered}-3=(-3)1+(0)x+(0)x^2+(0)x^3\\ 1-x=(1)1+(-1)x+(0)x^2+(0)x^3\\ 1+x^2=(1)1+(0)x+(1)x^2+(0)x^3\\ x^3=(0)1+(0)x+(0)x^2+(1)x^3\end{gathered}$$

Luego ponemos a las coordenadas de dicha combinación lineal como columnas:

$$[P]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix}-3&1&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Podemos calcular la inversa como lo sabemos hacer y obtener...

$$[P]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}=\left([P]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

4) *Ya que nos dan $[q]_{\mathcal{B}_2}$ podemos calcular $[q]_{\mathcal{B}_1}$*

$$\begin{aligned}[q]_{\mathcal{B}_1}&=[P]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}[q]_{\mathcal{B}_2}\\ [q]_{\mathcal{B}_1}&=\begin{bmatrix}-3&1&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\\ [q]_{\mathcal{B}_1}&=\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Lo que significa que $q=-2-x+x^2+x^3$.