Clase 15

August 29, 2022

Bases y dimensión de un espacio vectorial

Ya sabemos que podemos general un espacio vectorial. Pero ahora veremos que existe un mínimo de generadores. Cuando logramos obtener el conjunto con el menor número de generadores posibles (suficiente para expresar cualquier vector como combinación lineal de estos) estamos en presencia de una base.

Definition 1 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial. Un subconjunto de vectores S de V se dice linealmente dependiente si existen vectores $v_1, ..., v_n \in S$ y escalares $c_1, ..., c_n \in \mathbb{F}$, no todos nulos, tales que*

$$0 = c_1 v_1 + ... + c_n v_n.$$

Si nunca pasa eso, es decir si S no es linealmente dependiente entonces se dice que S es linealmente independiente.

Example 2 *Sea $V = \mathbb{R}^4$ como $\mathbb{R}-$espacio vectorial. Entonces el conjunto $S = \{(2, -1, 0, 3);\ (1, 2, 5, -1); (7, -1, 5, 8)\}$ es linealmente dependiente: Pues en efecto se puede ver que*

$$\mathbf{3}(2, -1, 0, 3) + \mathbf{1}(1, 2, 5, -1) + (-\mathbf{1})(7, -1, 5, 8) = (0, 0, 0, 0)$$

Example 3 *Sea $V = \mathbb{R}[x]$ (espacio de polinomios con coeficientes reales) como $\mathbb{R}-$espacio vectorial. Entonces el conjunto $S = \{1-x;\ 5+3x-2x^2; 1+3x-x^2\}$ es linealmente dependiente: Pues se puede observar que*

$$\begin{aligned} \mathbf{3}(1-x) + (-\mathbf{1})(5+3x-2x^2) + \mathbf{2}(1+3x-x^2) &= 3 - 3x - 5 - 3x + 2x^2 + 2 + 6x - 2x^2 \\ &= (3-5+2) + (-3-3+6)x + (2-2)x^2 \\ &= 0 + 0x + 0x^2 \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Example 4 *Sea $V = \mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}-$espacio vectorial. Entonces el conjunto $S = \{(1, 0);\ (0, 1)\}$ es un conjunto linealmente independiente: Debemos ver que si queremos expresar la combinación lineal nula con escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$$

entonces solo es posible con $\alpha = 0 = \beta$. Veamos:

$$\begin{aligned}(0,0) &= \alpha(1,0) + \beta(0,1)\\ &= (\alpha,0) + (0,\beta)\\ &= (\alpha,\beta)\end{aligned}$$

pero entonces los vectores $(0,0)$ y (α,β) son iguales. Esto significa que su números de dirección (o componentes homólogas) coinciden. Es decir $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ como deseábamos ver.

Example 5 *Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ como $\mathbb{R}-$espacio vectorial. Entonces el conjunto $S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente: Como antes, debemos probar que si escribimos la combinación lineal nula con escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$:*

$$a \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

solo es posible que $a = b = c = 0$.

En efecto se tiene que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -a & 2a \\ 0 & 3a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2b \\ b & -3b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & 0 \\ c & c \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} -a+3c & 2a+2b \\ b+c & 3a-3b+c \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ahora recordando que dos matrices son iguales si sus componentes homólogas lo son, entonces esto significa que

$$\begin{cases} -a+3c = 0 \\ 2a+2b = 0 \\ b+c = 0 \\ 3a-3b+c = 0 \end{cases}$$

debemos estudiar las soluciones de este sistema. Pasamos a la matriz correspondiente y reducimos a una MERF:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to (-1)f_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} f_2 + (-2)f_1 \\ f_4 + (-3)f_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 10 \end{bmatrix} \to \frac{1}{2}f_2$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} f_3 - f_2 \\ f_4 + 3f_2 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix} \to \left(-\frac{1}{2}\right) f_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 19 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{matrix} f_4 + (-19)f_3 \\ f_2 + (-3)f_3 \\ f_1 + 3f_3 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que la solución es única y es: $a = 0,\ b = 0$ y $c = 0$. Con lo que resulta que el conjunto de matrices dadas es linealmente independiente.

Remark 6 *De la definición resulta lo siguiente,*

1. *Cualquier conjunto de vectores S que contenga un subconjunto linealmente dependiente será en si un conjunto linealmente dependiente.*

2. *Si S es un subconjunto linealmente independiente entonces cualquier subconjunto de S será también linealmente independiente.*

3. *En consecuencia del ítem 1, cualquier conjunto S, de un $\mathbb{F}-$espacio vectorial, que contenga al vector nulo $\mathbf{0}$ será un conjunto linealmente dependiente (pues el subconjunto trivial $\{\mathbf{0}\}$ es linealmente dependiente ya que por ejemplo $1.\mathbf{0} = \mathbf{0}$ con $1 \in \mathbb{F}$).*

4. *Un conjunto S, de un $\mathbb{F}-$espacio vectorial, es linealmente independiente si y solo si toda combinación lineal nula de la forma*

$$c_1 v_1 + ... + c_k v_k = 0$$

con $v_i \in S$ y $c_i \in \mathbb{F}$, implica necesariamente que $c_i = 0\ \forall i$.

Ahora definimos lo que es una base.

Definition 7 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial. Una base para V es un conjunto linealmente independiente de vectores que generan todo V.*

Notemos que una base para un $\mathbb{F}-$*espacio vectorial* V es un conjunto linealmente de vectores de V, $B = \{v_1, ..., v_n\}$, de tal forma que cualquier vector arbitrario $v \in V$ se escribe como combinación lineal de los vectores de la base B:

$$v = c_1 v_1 + ... + c_n v_n$$

Veamos que en realidad no hay muchas maneras de expresar dicha combinación lineal...

Theorem 8 *Si $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base para un V, $\mathbb{F}-$espacio vectorial, entonces todo vector de V se expresa en forma única como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$.*

Proof. Supongamos, por el contrario, que tenemos al menos dos formas de expresar a un vector $v \in V$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$:

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

$$v = c_1 v_1 + ... + c_n v_n$$

pero entonces

$$\begin{aligned} 0 &= v - v \\ 0 &= (a_1 v_1 + ... + a_n v_n) - (c_1 v_1 + ... + c_n v_n) \\ 0 &= a_1 v_1 + ... + a_n v_n - c_1 v_1 - ... - c_n v_n \\ 0 &= (a_1 - c_1) v_1 + ... + (a_n - c_n) v_n \quad (1) \end{aligned}$$

ahora el hecho de que los vectores $v_1, ..., v_n$ formen una base quiere decir que son linealmente independientes. Luego la única manera de expresar la combinación lineal nula (1) es que los escalares $a_i - ci$ sean todos 0:

$$0 = a_1 - c_1 = ... = a_n - c_n$$

esto quiere decir que $a_i - c_i = 0 \Rightarrow a_i = c_i \ \forall i$. Es decir que en realidad el v no tiene dos formas distintas de expresarse como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$. ■

Cabe preguntar ahora si toda base tiene la misma cantidad de vectores. La respuesta es afirmativa y para eso probaremos el siguiente Teorema:

Theorem 9 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial y sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base para V. Entonces*

1. *Todo conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente.*
2. *Ningún conjunto con menos de n vectores genera V.*

Proof. 1) Sea S cualquier conjunto de m vectores con $m > n$. Por ejemplo $S = \{w_1, ..., w_m\}$. Veamos que S es linealmente dependiente: Como $\mathcal{B}$ es base entonces todo vector w_i se expresa de forma única (Teorema anterior) como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$:

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} w_1 = a_{11} v_1 + ... + a_{n1} v_n \\ w_2 = a_{12} v_1 + ... + a_{n2} v_n \\ . \\ . \\ . \\ w_m = a_{1m} v_1 + ... + a_{nm} v_n \end{array} \right.$$

Por otro lado para probar que el conjunto de vectores $S = \{w_1, ..., w_m\}$ es linealmente dependiente hay que encontrar escalares $k_1, ..., k_m \in \mathbb{F}$, **no todos nulos**, tales que

$$(2)\ k_1 w_1 + ... + k_m w_m = 0$$

Si combinamos (1) y (2) nos quedaría que

$$(3)\ k_1(a_{11}v_1 + ... + a_{n1}v_n) + ... + k_m(a_{1m}v_1 + ... + a_{nm}v_n) = 0$$

O, reescribiendo (3), de forma equivalente:

$$(4)\ \ (k_1 a_{11} + ... + k_m a_{1m})\, v_1 + ... + (k_1 a_{n1} + ... + k_m a_{nm}) v_n = 0$$

pero en vista de que los vectores $v_1, ..., v_n$ son linealmente independientes (pues forman la base $\mathcal{B}$) la única posibilidad de escribir la combinación nula (4) es que necesariamente se tenga:

$$(5) \begin{cases} a_{11}k_1 + ... + a_{1m}k_m = 0 \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ a_{n1}k_1 + ... + a_{nm}k_m = 0 \end{cases}$$

Pero el sistema homogéneo (5) tiene más incógnitas (m) que ecuaciones (n) ($m > n$ porque así comenzamos!).

Entonces si recordamos el Teorema 7 de la clase 3 nos decía que todo sistema homógeneo que tiene más incógnitas que ecuaciones tiene al menos una solución no trivial. Esto quiere decir que efectivamente existen $k_1, ..., k_m$ NO TODOS NULOS tales que resuelven (5). O sea que resuelve (4), o sea que resuelve (3), o sea que resuelve (2). O sea que los vectores $w_1, ..., w_m$ son linealmente dependientes.

2) Supongamos que el conjunto $T = \{z_1, ..., z_k\}$ con $k < n$ genera todo V. Esto quiere decir que cualquier vector de V se expresa en forma única como combinación lineal de los vectores de T. En particular cada vector de la base $\mathcal{B}$ se expresa como combinación lineal de los vectores de T:

$$(1) \begin{cases} v_1 = a_{11}z_1 + ... + a_{k1}z_k \\ v_2 = a_{12}z_1 + ... + a_{k2}z_k \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ v_n = a_{1n}z_1 + ... + a_{kn}z_k \end{cases}$$

Supongamos que escribimos la combinación lineal nula:

$$(2)\ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1(a_{11}z_1 + ... + a_{k1}z_k) + ... + \lambda_n(a_{1n}z_1 + ... + a_{kn}z_k) &= 0 \\ (3)\ \ (\lambda_1 a_{11} + ... + \lambda_n a_{1n})\, z_1 + ... + (\lambda_1 a_{k1} + ... + \lambda_n a_{kn})\, z_1 &= 0 \end{aligned}$$

Luego de la independencia lineal de los v_i en (2) implicaría que $\lambda_i = 0 \ \forall i$.

Luego en (3) tenemos que cada
sumando es 0, es decir:

$$(4)\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + ... + \lambda_n a_{1n} = 0 \\ \qquad ... \\ \qquad ... \\ \lambda_1 a_{k1} + ... + \lambda_n a_{kn} = 0 \end{cases}$$

A su vez (4) es un sistema lineal homogéneo con n incógnitas y k filas (con $k < n$). O sea con más incógnitas que ecuaciones, lo que implica que existe al menos una solución no trivial (o sea existen λ_i no todos nulos como solución de dichas ecuaciones). Pero esto es un absurdo por lo que implica (2). Es decir implica que los v_i no sean linealmente independientes.

Luego el conjunto $\{z_1, ..., z_k\}$ no puede generar todo V. ■

Remark 10 *El Teorema anterior afirma, de forma indirecta, que todas las bases de un mismo espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores. Entonces estamos en condiciones de definir el concepto de dimensión de un espacio vectorial.*

Definition 11 *Dado V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial, definimos la dimensión de V como la cantidad de elemento de cualquier base del mismo. Es decir, si $\mathcal{B}$ es una base para V entonces denotamos por $\dim(V)$ a la dimensión de V y*

$$\dim(V) = \#\mathcal{B}$$

(donde $\#\mathcal{B}$ denota el cardinal del conjunto $\mathcal{B}$).

Remark 12 *Si $V = \{0\}$ entonces $\dim(V) = 0$.*

Example 13 *Si $V = \mathbb{R}^5$ como $\mathbb{R}-$espacio vectorial. Entonces*
$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0,0); (0,1,0,0,0); (0,0,1,0,0); (0,0,0,1,0); (0,0,0,0,1)\}$ *forma una base para V.*

Luego $\dim(V) = 5$.

Example 14 *Análogamente si $V = \mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ como $\mathbb{R}-$espacio vectorial, entonces $\dim(V) = n$.*

Example 15 *Si $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$, como $\mathbb{R}-$espacio vectorial, entonces una base para V es*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

En efecto veamos que dicho conjunto genera todo V y es LI (Linealmente Independiente).

Llamemos E_{ij} a la matriz que tiene un 1 en la posición i, j y 0 en las demás posiciones. Por ejemplo E_{12} tiene un 1 en la posición $1, 2$ y 0 en las demás:

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces la base dada la podemos escribir asi:

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$$

Sea $A \in V$. Entonces tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Luego se puede ver muy fácilmente que

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \\ &= aE_{11} + bE_{12} + cE_{13} + dE_{21} + eE_{22} + fE_{23} \end{aligned}$$

lo cual dice que el conjunto $\mathcal{B}$ genera todo V (1).

Supongamos que tenemos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = \lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{12} + \lambda_3 E_{13} + \lambda_4 E_{21} + \lambda_5 E_{22} + \lambda_6 E_{23}$$

o sea que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \lambda_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o sea que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{bmatrix}$$

Esta igualdad de matrices implica que $\lambda_i = 0 \ \forall i : 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Es decir que el conjunto $\mathcal{B}$ es linealmente independiente (2).

Luego (1) y (2) afirman que $\mathcal{B}$ es una base para V.

A continuación probaremos algunos resultados claves sobre bases que nos servirán para probar un reconocido Teorema (de la dimensión).

Lemma 16 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial y sea S un subconjunto de vectores linealmente independientes de V. Supongamos que $\beta \in V$ sea un vector tal que $\beta \notin \langle S \rangle$. Entonces el conjunto obtenido de agregar β a S, $S \cup \{\beta\}$, es linealmente independiente.*

Proof. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in S$. Y supongamos que

$$(1)\ a_1\alpha_1 + ... + a_n\alpha_n + b\beta = 0$$

la combinación lineal nula de elementos de $S \cup \{\beta\}$. Si $b = 0$ entonces nos queda la combinación lineal

$$a_1\alpha_1 + ... + a_n\alpha_n = 0$$

y por la independencia lineal de los α_i se tendría que $a_i = 0\ \forall i$ en (1). Luego se tendría que el conjunto $S \cup \{\beta\}$ es linealmente independiente.

Pero si $b \neq 0$ entonces en (1) se puede despejar:

$$\left(\frac{a_1}{-b}\right)\alpha_1 + ... + \left(\frac{a_n}{-b}\right)\alpha_n = \beta$$

pero esto implicaría que $\beta \in \langle S \rangle$. Lo cual es un absurdo.

Luego la única posibilidad es que $b = 0$ como hemos mostrado antes y entonces el conjunto $S \cup \{\beta\}$ es linealmente independiente. ∎

Theorem 17 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial de dimensión finita. Y sea W un subespacio de V. Entonces todo subconjunto linealmente independiente de W es finito y es parte de una base para W.*

Proof. Sea S_0 un subconjunto de vectores linealmente independientes de W. Si S_0 genera W entonces es una base para W por definición (no habría nada que probar).

Si S_0 no genera W entonces debe existir un $\beta_1 \in W$ tal que $\beta_1 \notin \langle S_0 \rangle$. Luego por el lema anterior el conjunto $S_1 = S_0 \cup \{\beta_1\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de W. Si $\langle S_1 \rangle = W$ ya está. Si no nuevamente podemos encontrar un $\beta_2 \in W$ tal que $\beta_2 \notin \langle S_1 \rangle$. Y por el lema anterior el conjunto $S_2 = S_1 \cup \{\beta_2\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de W. Teniendo en cuenta que V es de dimensión finita llegará un momento que tendremos $S_0 \cup \{\beta_1, ..., \beta_m\}$ deberá ser un conjunto linealmente independiente y que genere todo W. Lo cual habremos encontrado una base para W. Así hemos probado que el conjunto S_0 es una parte de una base para W. ∎

Corollary 18 *Si W es un subespacio propio de V, un $\mathbb{F}-$espacio vectorial de dimensión finita, es decir $W \subset V$ (contenido estrictamente); entonces $\dim(W)$ es finita y se tiene*

$$\dim(W) < \dim(V).$$

Corollary 19 *En un $\mathbb{F}-$espacio vectorial de dimensión finita V, todo conjunto linealmente independiente de vectores de V es parte de una base para V.*

Finalmente, probamos uno de los grandes Teoremas!

Theorem 20 *(Teorema de la dimensión) Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial y sean W_1 y W_2 subespacios de V de dimensión finitas. Entonces $W_1 + W_2$ tiene dimensión finita y,*

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

Proof. Por los corolarios anteriores, claramente $W_1 \cap W_2$ tiene una base finita (pues es un subespacio de W_1 y de W_2). Es decir $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ es una base para $W_1 \cap W_2$. Pero entonces por el Lema anteior dicho conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ es parte de una base para W_1:

$$\{\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_m\}$$

es una base para W_1.

Análogamente el conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ es parte de una base para W_2:

$$\{\alpha_1, ..., \alpha_k, \gamma_1, ..., \gamma_n\}$$

es una base para W_2.

Así, el subespacio $W_1 + W_2$ es generado por los vectores

$$\alpha_1, ..., \alpha_k \ , \ \beta_1, ..., \beta_m \ , \ \gamma_1, ..., \gamma_n.$$

O sea

$$W_1 + W_2 = \langle \alpha_1, ..., \alpha_k \ , \ \beta_1, ..., \beta_m \ , \ \gamma_1, ..., \gamma_n \rangle$$

Veamos que son linealmente independientes... Supongamos escribir la combinación lineal nula,

$$(1)\ 0 = \sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} b_i \beta_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i$$

entonces, despejando, tenemos que

$$(2)\ \ -\sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} b_i \beta_i$$

lo cual muestra que

$$-\sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i \in W_1$$

como además $\sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i \in W_2$ (pues es combinación lineal de vectores de la base de W_2) se tiene entonces que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i \in W_1 \cap W_2$$

con lo que se puede escribir como combinación lineal de la base de $W_1 \cap W_2$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i &= \sum_{j=1}^{k} x_j\alpha_j \\ 0 &= \sum_{j=1}^{k} x_j\alpha_j - \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i \end{aligned}$$

para ciertos escalares $x_1, ..., x_k \in \mathbb{F}$. Pero ya que el conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_k, \gamma_1, ..., \gamma_n\}$ es linealmente independiente se tendría en particular que los $c_i = 0\ \forall i$. (también los x_j). Luego en (2) tendríamos

$$0 = \sum_{i=1}^{k} a_i\alpha_i + \sum_{i=1}^{m} b_i\beta_i$$

pero ya que el conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_m\}$ también es linealmente independiente se tendría que $a_i = 0$ y $b_i = 0\ \forall i$.

En conlusión tenemos que en la combinación lineal (1) todos los escalares a_i, b_i, c_i son todos iguales a 0. Lo cual implica que el conjunto $\{\alpha_1, ..., \alpha_k\ ,\ \beta_1, ..., \beta_m\ ,\ \gamma_1, ..., \gamma_n\}$ es linealmente independiente. Y como además generaba $W_1 + W_2$, entonces es una base para $W_1 + W_2$.

Finalmente entonces tenemos que $\dim(W_1 + W_2) = k + m + n$.

También $\dim(W_1 \cap W_2) = k$, $\dim(W_1) = k + m$ y $\dim(W_2) = k + n$. Con lo que podemos comprobar que

$$\begin{aligned} \dim(W_1) + \dim(W_2) &= (k + m) + (k + n) \\ &= (k + m + n) + k \\ &= \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2). \end{aligned}$$

■

Espacio filas, espacio columnas y espacio nulo de una matriz

Definition 21 *Dada una matriz* $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

los vectores de $\mathbb{F}^m$

$$\begin{aligned} r_1 &= [a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}] \\ r_2 &= [a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}] \\ &... \\ r_m &= [a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}] \end{aligned}$$

formados a partir de las filas de A *se llaman vectores filas de* A*.*
Los vectores de $\mathbb{F}^n$

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{bmatrix}; \quad ... ; \; c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

formados a partir de las columnas de A *se llaman vectores columnas de* A*.*

Definition 22 *Dada una matriz* $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$*. Se denomina espacio filas al subespacio de* $\mathbb{F}^m$ *generado por los vectores filas de* A*. Se denomina espacio columna al subespacio de* $\mathbb{F}^n$ *generado por los vectores columnas de* A*. Y se denomina espacio nulo al espacio solución del sistema homogéneo* $Ax = 0$*.*

Tenemos algunos Teoremas...

Theorem 23 *Un sistema de ecuaciones* $Ax = b$ *es compatible si y solo si* b *pertenece al espacio columna de* A*.*

Proof. Daremos la idea de la prueba. Supongamos que es compatible es sistema. Entonces existe

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

solución del mismo. Esto quiere decir que $Ax^0 = b$. Pero cuando multiplicamos A por x^0 estamos haciendo lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ ... \\ x_n^0 \end{bmatrix} = b$$

O sea,

$$\left[a_{11}x_1^0 + ... + a_{1n}x_n^0 \;,\; a_{21}x_1^0 + ... + a_{2n}x_n^0 \;,\; ... \;,\; a_{m1}x_1^0 + ... + a_{mn}x_n^0\right] = b$$

Que lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$x_1^0 [a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}] + ... + x_n^0 [a_{1n}, ..., a_{mn}] = b$$

es decir b es combinación lineal de los vectores columnas de A. En otras palabras b está en el espacio columna de A. ■

En la próxima clase demostraremos algunos resultados que nos permitirán justificar lo que mostraremos a continuación. El problema que mostraremos a continuación es el siguiente:

Problem 24 *Dado un conjunto de vectores $S = \{v_1, ..., v_k\}$ en $\mathbb{R}^n$. Cómo deducir una base para el subespacio $\langle S \rangle$?*

Solution 25 *Debemos efectuar los siguientes pasos:*

1. Formar una matriz A que tiene como sus columnas a los vectores $v_1, ..., v_k$.
2. Reducir A a su MERF correspondiente R_A. LLamemos $w_1, ..., w_k$ los vectores columnas de R_A.
3. Identificar las columnas que tienen 1 principales en R_A. Los vectores columnas correspondientes en A formarán una base para $\langle S \rangle$.
4. El resto de los vectores columnas de R_A se podrá expresar como combinación lineal de los vectores de la base.

Example 26 *Tomemos en $\mathbb{R}^2$ el conjunto de vectores $\{v_1 = (1, -2); v_2 = (2, -3); v_3 = (1, 1)\}$*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to f_2{+}2f_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to f_1{+}(-2)f_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = R_A$$

entonces los vectores columnas de R_A son

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ w_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Los que contienen un 1 principal son w_1 y w_2. Con lo que $\{v_1, v_2\}$ forma una base para $\mathbb{R}^2$. Y de hecho se puede verificar que

$$w_3 = (-5)w_1 + (3)w_2$$

como así también

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= (-5)\mathbf{v}_1 + (3)\mathbf{v}_2 \\
(1,1) &= (-5)(1,-2) + (3)(2,-3) \\
(1,1) &= (-5,10) + (6,-9)
\end{aligned}$$