Clase 13

August 9, 2022

Espacios vectoriales

Ahora vamos a generalizar la noción de "vector". Vamos a definir estos nuevos objetos que tendrán una estructura determinada y luego trataremos de entender la generalización de vector.

Definition 1 *Sea V un conjunto no vacío y sea $\mathbb{F}$ un cuerpo (campo) de escalares, junto a dos operaciones: suma,*

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \to & u + v \end{array}$$

y multiplicación por escalar,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} \times V & \to & V \\ (k, v) & \to & kv \end{array}$$

donde $u \in V$, $k \in \mathbb{F}$ y el elemento $kv \in V$ (la multiplicación entre un elemento de V y uno de $\mathbb{F}$ es un elemento de V). Si tales operaciones cumplen los siguientes axiomas que enumeramos a continuación entonces se dirá que V es un $\mathbb{F}-$espacio vectorial (o espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$).

1. *$u, v \in V$ entonces $u + v \in V$ (la suma es una operación cerrada en V)*
2. *$u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (propiedad asociativa)*
3. *$u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ (propiedad commutativa)*
4. *Existe un objeto $0 \in V$ tal que $u + 0 = 0 + u = u$, $\forall u \in V$ (existencia de elemento neutro)*
5. *Para cada $u \in V$ existe el objeto $v \in V$ tal que $u+v = v+u = 0$ (existencia de elemento opuesto)*
6. *$u \in V$, $k \in \mathbb{F}$ entonces $kv \in V$ (la multiplicación por escalar es un elemento de V)*

7. $k(u+v) = ku + kv$, $\forall k \in \mathbb{F}$ *y* $\forall u, v \in V$ *(distributiva del escalar respecto de la suma de elementos de* V*)*

8. $(k+l)u = ku + lu$, $\forall k, l \in \mathbb{F}$ *y* $\forall u \in V$ *(distributiva de un elemento de* V *respecto de la suma de escalares)*

9. $k(lu) = (kl)u$, $\forall k, l \in \mathbb{F}$ *y* $\forall u \in V$ *(asociatividad entre multiplicaciones de escalares y escalar por elemento de* V*)*

10. $1u = u$, $\forall u \in V$.

Ejemplos de espacios vectoriales

Example 2 *El plano* $\mathbb{R}^2$ *o el espacio* $\mathbb{R}^3$ *junto con las operaciones de suma y multiplicación por escalar estándar. Es decir, si* $u = (a, b)$ *y* $v = (c, d)$ *son vectores libres del plano y* $k \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &= (a+c, b+d) \\ k(a,b) &= (ka + kb). \end{aligned}$$

Tanto el plano como el espacio forman un $\mathbb{R}-$*espacio vectorial.*

Example 3 *Generalizando la noción anterior podemos definir* $\mathbb{R}^n$ *como el conjunto de las* $n-$ *uplas de la forma* $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ *con* $u_j \in \mathbb{R}$*. Y con la suma y multiplicación por escalar análogo al ejemplo anterior se puede ver que* $\mathbb{R}^n$ *es un* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial (verificar)*

Example 4 $V = \mathbb{F}^{m \times n}$ *(el espacio de las matrices de tamaño fijo* $m \times n$*) forman un* $\mathbb{F}-$*espacio vectorial (verificar). Por ejemplo* $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$*,*

$$\mathbb{R}^{2\times 3} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall i : 1,2 \ \forall j : 1,2,3 \right\}$$

definido con la suma y multiplicación por escalar como sabemos:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \ \forall i : 1,2 \ \forall j : 1,2,3$$

$$(kA)_{ij} = k(A)_{ij}, \ \forall i : 1,2 \ \forall j : 1,2,3.$$

Example 5 *Tomemos el espacio de las funciones con valores reales,*

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ funciones}\}$$

con la suma de funciones conocida: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ *y la multiplicación por escalar* $(kf)(x) = kf(x)$*, forma un* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial.*

Veamos este ejemplo un poco más detenidamente. Tomamos funciones: $f, g, h \in V$ y escalares $k, l \in \mathbb{R}$. Entonces verificamos cada axioma de la definición.

Antes recordemos el concepto de igualdad de funciones. Decimos que las funciones F y G son iguales si tienen el mismo dominio D y se verifica que $F(x) = G(x)\ \forall x \in D$.

(la suma es cerrada en V): Por definición $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son números reales. Luego $f+g$ es una función que toma cualquier $x \in \mathbb{R}$ y nos devuelve un elemento de $\mathbb{R}$ (pues $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$ para cada x). Así la suma es cerrada en V.

(propiedad asociativa):

$$\begin{aligned}
[f+(g+h)](x) &= f(x) + (g+h)(x) \\
&= f(x) + [g(x) + h(x)] \\
Asoc. de\ \mathbb{R} &= [f(x) + g(x)] + h(x) \\
def. &= (f+g)(x) + h(x) \\
def. &= [(f+g)+h](x)
\end{aligned}$$

(propiedad commutativa):

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
Asoc. de\ \mathbb{R} &= g(x) + f(x) \\
def. &= (g+f)(x)
\end{aligned}$$

(existencia de elemento neutro): La función nula definida por $\mathbf{0}(x) = 0\ \forall x$. Pues $(f+\mathbf{0})(x) = f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x) + 0 = f(x)$.

(existencia de elemento opuesto): Dada una $f \in V$ definimos $g \in V$ por $g(x) = -f(x)$. Entonces claramente vemos que $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) + (-f(x)) = 0\ \forall x$. O sea que la función $(f+g)$ coincide con la función $\mathbf{0}$ en todo x. Luego $f + g = \mathbf{0}$.

(la multiplicación por escalar es un elemento de V): Por definición tenemos que $(kf)(x) = kf(x)$ y esto último es un producto de dos números reales: k y $f(x)$. Luego la función kf toma valores en $\mathbb{R}$ (x) y nos devuelve otro número real $(kf(x))$.

(distributiva del escalar respecto de la suma de elementos de V):

$$\begin{aligned}
[k(f+g)](x) &= k\ (f+g)(x) \\
&= k\ [f(x) + g(x)] \\
Dist.\ en\ \mathbb{R} &= kf(x) + kg(x) \\
def. &= (kf)(x) + (kg)(x) \\
&= [kf + kg](x)
\end{aligned}$$

(distributiva de un elemento de V respecto de la suma de escalares):

$$\begin{aligned}
[(k+l)\ f](x) &= (k+l)\ f(x) \\
&= kf(x) + lf(x) \\
&= [kf + lf](x)
\end{aligned}$$

(asociatividad entre multiplicaciones de escalares y escalar por elemento de V):

$$\begin{aligned} [k\ \ (lf)]\,(x) &= k\ \ [lf(x)] \\ &= [kl]\ \ f(x) \\ &= [(kl)\ \ f]\,(x) \end{aligned}$$

(multiplicación por $1 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} [1f]\,(x) &= 1\ f(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Definition 6 *1. luego las funciones $1f$ y f son las mismas.*

Así hemos probado que el conjunto $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones$\}$ forman un $\mathbb{R}-$*espacio vectorial*.

Problem 7 ***(Para pensar)*** *Si $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax+by+cz+d = 0\}$ (o sea un plano en $\mathbb{R}^3$). Con la suma de sus vectores libres (identificamos los puntos con vectores libres) y multiplicación de vector libre por escalar como sabemos. Qué se tiene que cumplir para que sea un $\mathbb{R}-$espacio vectorial ?*

Notemos que los axiomas 3 y 5 de la definición de espacio vectorial hablan sobre la existencia de un "*vector nulo*" y "*vector opuesto*" (Para cada $u \in V$ existe el objeto $v \in V$ tal que $u + v = v + u = 0$). La pregunta que surge es: ¿el vector nulo es único en cada espacio vectorial? ¿cada v tendrá varios *vectores opuestos* ? Las respuestas las da el siguiente,

Lemma 8 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial y sea $v \in V$. Entonces el vector nulo 0 es único y el opuesto de v es único.*

Proof. Unicidad del elemento nulo: Supongamos que existe otro elemento nulo 0^*. Es decir que cumple:

$$(1)\ 0^* + u = u + 0^* = u \ \ \forall u \in V$$

pero entonces si $u = 0$, por (1) tenemos que

$$(\text{A})\ 0^* + 0 = 0$$

y por el axioma 4 el 0 cumple el papel de elemento opuesto,

$$(\text{B})\ 0 + 0^* = 0^*$$

entonces (A) y (B) dicen que $0^* = 0$.

Unicidad del opuesto: Supongamos que v tiene dos opuestos distintos: u y w ($u \neq w$). Ambos cumplen con el axioma 5:

$$\begin{aligned} v+u &= u+v=\mathbf{0} \\ v+w &= w+v=\mathbf{0} \end{aligned}$$

pero entonces

$$\mathbf{u}=u+\mathbf{0}=u+(v+w)=(u+v)+w=\mathbf{0}+w=\mathbf{w}$$

O sea contradicción con $u \neq v$. Con lo que cada vector debe tener un único vector opuesto. ■

Notation 9 *Ahora que sabemos que cada vector v tiene su único opuesto en un espacio vectorial, denotaremos a dicho opuesto por $-v$. No confundir con una multiplicación por escalar! $-v$ denota aquel elemento de v que cumple el axioma 5, o sea*

$$v+(-v)=\mathbf{0}$$

Theorem 10 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial. Sean $u \in V$ y $k \in \mathbb{F}$. Entonces*

1. $0u=\mathbf{0}$
2. $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$
3. $(-1)u=-u$
4. *Si $ku=\mathbf{0}$ entonces $k=0$ o $u=\mathbf{0}$.*

Proof. Demostraremos los incisos 1 y 3. Los demás quedan como ejercicios.

1) Sabemos que $\mathbf{0}$ denota al vector nulo dado por el axioma 4. Luego por el axioma 8 se tiene que

$$0u+0u=(0+0)u=0u$$

entonces por el axioma del opuesto tenemos que existe el vector opuesto de $0u$: $-0u$. Se lo sumamos a ambos lado de la igualdad anterior

$$\begin{aligned} 0u+0u &= 0u \\ [0u+0u]+(-0u) &= 0u+(-0u) \end{aligned}$$

entonces por el axioma 2 en la izquierda y el axioma 5 en la derecha tenemos que

$$\begin{aligned} [0u+0u]+(-0u) &= 0u+(-0u) \\ 0u+[0u+(-0u)] &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

por el axioma 5 en la izquierda tenemos

$$\begin{aligned} 0u+[0u+(-0u)] &= 0 \\ 0u+\mathbf{0} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

finalmente por el axioma 4 en la izquierda se tiene que

$$\begin{aligned} 0u + \mathbf{0} &= \mathbf{0} \\ 0u &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

3) No olvidemos que $-u$ *denota* el vector opuesto de u (dado por el axioma 4). Veamos que por ejemplo el vector $(-1)u$ cumple el rol de vector opuesto de u: Por el axioma 10

$$u + (-1)u = \mathit{1}u + (-1)u$$

entonces aplicamos el axioma 8 a la derecha:

$$\begin{aligned} u + (-1)u &= \mathit{1}u + (-1)u \\ &= [1 + (-1)]\, u \\ &= 0u \end{aligned}$$

y luego por el inciso 1) tenemos que $0u = \mathbf{0}$, o sea que

$$u + (-1)u = \mathbf{0}$$

Es decir que $(-1)u$ es opuesto de u. Pero por el Lema anterior que afirma la unicidad dicho elemento opuesto no queda otra que $(-1)u = -u$. ■

Subespacios Vectoriales

Definition 11 *Un subconjunto W de un $\mathbb{F}-$espacio vectorial V se denomina subespacio de V si W es un $\mathbb{F}-$espacio vectorial bajo las operaciones de V.*

A priori cada vez que tengamos un subconjunto de un espacio vectorial, para verificar si este es subespacio deberíamos comprobar que se cumplen todos los axiomas de la definición de espacio vectorial para los elementos de dicho subconjunto. Pero en realidad no será tan necesario como indica el siguiente...

Theorem 12 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial y sea $W \subseteq V$ no vacío. Entonces W es un subespacio de V si y solo si se cumplen los siguientes ítems:*

1. *Si $u, v \in W$ entonces $u + v \in W$.*
2. *Si $k \in \mathbb{F}$ (escalar) y $u \in W$ entonces $ku \in W$.*

Proof. Debemos probar un "si y solo si". Es decir una "$\Leftrightarrow$".

$\Rightarrow$) Supongamos primero que W es un subespacio de V. Claramente por definición se cumplen 1 y 2.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que se cumplen 1 y 2. Eso quiere decir que las operaciones de suma y multiplicación por escalar son cerradas en W. Para ver que se cumplen efectivamente todos los axiomas de la definición de espacio vectorial para W sencillamente razonamos como sigue: Tomamos dos vectores en W. Los miramos como vectores de V. Como V es un $\mathbb{F}-$*espacio vectorial* entonces se cumplen todos los axiomas! Luego como la suma y multiplicación por escalar son operaciones cerradas en W (estamos asumiendo que se cumplen 1 y 2) obviamente eso implica que se cumpen todos los axiomas para W. Luego W es un $\mathbb{F}-$*espacio vectorial*. ■

Example 13 *Sea $V = \mathbb{R}^2$ (un $\mathbb{R}-$espacio vectorial). Sea* $\mathbf{v}$ *un vector libre en $\mathbb{R}^2$. Entonces*

$$W = \{t\mathbf{v} \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

es un subespacio de V.

Claramente W denota una recta que pasa por el orígen, con vector director $\mathbf{v}$. Para ver que es subespacio de V debemos verificar si la suma y multiplicación por escalar definidas en V son cerradas en W. Tomemos dos elementos de W: Esto se puede hacer eligiendo dos valores para el parámetro diferentes: s, r. Entonces $w_1 = s\mathbf{v}$ y $w_2 = r\mathbf{v}$. Ahora vemos que

$$w_1 + w_2 = s\mathbf{v} + r\mathbf{v} = (s + r)\mathbf{v}$$

luego la suma de ambos elementos de W vuelve a ser otro elemento de W (es un múltiplo de $\mathbf{v}$). También si $k \in \mathbb{R}$ entonces

$$kw_1 = k(s\mathbf{v}) = (ks)\mathbf{v}$$

luego la multiplicación por escalar vuelve a ser ul elemento de W (es un múltiplo de $\mathbf{v}$).

Así, ambas operaciones son cerradas en W. Con lo que, por el Teorema anterior, W es un subespacio de V.

Problem 14 *Si la recta no pasa por el orígen, ¿puede ser un subespacio vectorial?.*

Example 15 *Dado cualquier $\mathbb{F}-$espacio vectorial V, los subespacios triviales son $W = V$ (el espacio total) y $W = \{0\}$ (el subespacio que consta solo del vector nulo de V).*

Example 16 *Sea $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, el $\mathbb{R}-$espacio vectorial de las funciones que toman valores en los números reales. Y sea $W = \{p \in V$ tal que p es un polinomio de grado menor igual que $n\} \cup \{0\}$. Entonces W es un subespacio de V.*

Pues en efecto, dados dos polinomios de grado menor o igual que n, $p(x)$ y $q(x)$, sabemos que la suma de ambos dará un polinomio de grado menor igual que n. Y si k es cualquier escalar real entonces $kp(x)$ será un polinomio del mismo grado que p. (Verificar). Luego ambas operaciones son cerradas en W y por el Teorema anterior W es un subespacio de V.