Clase 14

August 15, 2022

Subespacio generado

Comenzaremos dando una definición que nos permitirá describir subespacios mediante algunos pocos vectores. También nos permitirá caracterizar en algún sentido dichos subespacios.

Definition 1 *Un vector w es* combinación lineal *de los vectores $v_1, ..., v_n$ si existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tales que*

$$w = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n.$$

Remark 2 *Si w es combinación lineal de un único vector v esto quiere decir que existe un escalar α tal que $w = \alpha v$. En otras palabras que w es multiplo escalar de v. O, lo que es lo mismo, que w es paralelo a v.*

Theorem 3 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial. La intersección de cualquier colección de subespacios de V es otro subespacio de V.*

Proof. Tomemos una colección arbitraria de subespacios de V: $\{W_k\}_{k \in I}$ (esta notación indica que tomamos una cantidad cualquiera de subespacios de V). Entonces llamemos

$$W = \cap W_k$$

es decir W es la intersección de todos los subespacios de dicha colección. Veamos que W es subespacio de V. Para eso verifiquemos que W es no vacío: Pero como cada W_k contiene al 0 (vector nulo) esto quiere decir que 0 está en la intersección. O sea $0 \in W$. Luego W es no vacío *(1)*.

Ahora vamos a probar que W es cerrado bajo la suma: Sean $u, v \in W$. Por definición de intersección esto quiere decir que tanto u como v están en cada uno de los W_k. Luego como cada W_k es subespacio se tiene que la suma $u + v \in W_k$ $\forall k \in I$. Pero esto quiere decir que $u + v \in W$ y así la suma de cosas de W cae en W *(2)*.

Finalmente veamos que si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $u \in W$ entonces $\lambda u \in W$: Pero $u \in W$ quiere decir que $u \in W_k$ $\forall k \in I$. Y como cada W_k es subespacio entonces $\lambda u \in W_k$ $\forall k \in I$. Pero esto quiere decir que $\lambda u \in W$ *(3)*, como queríamos probar.

Pero *(1)*, *(2)* y *(3)* prueban que W es un subespacio de V (Teorema 12 de la Clase 13). $\blacksquare$

Ahora estamos en condiciones de estudiar los subespacios generados!

Definition 4 *Sea S un subconjunto no vacío de vectores de un $\mathbb{F}-$espacio vectorial V. El subespacio generado por S se define como la intersección W de todos los subespacios de V que contienen a S. Cuando S consta de finitos vectores, $S = \{v_1, ..., v_n\}$, decimos que W es el subespacio generado por los vectores $v_1, ..., v_n$.*

La definición anterior nos dice que un subespacio W generado por un cierto conjunto de vectores es aquel formado por las intersecciones de todos los subespacios de V que contienen a esos vectores (generadores). Lo malo de dicha definición es que no es práctica en el sentido que no podemos describir de forma simple cómo sería un vector en dicho W. A continuación veremos que en realidad dicho W consta de combinaciones lineales de los vectores dados (generadores).

Theorem 5 *Sea V un $\mathbb{F}-$espacio vectorial y sea S un subconjunto no vacío de vectores de V. Sea W el subespacio generado por S. Entonces W consta de todas las combinaciones lineales de vectores de S.*

Proof. Esta demostración se hará en varios pasos. **PRIMERO** llamaremos $Z = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m : \alpha_i \in \mathbb{F},\ v_i \in S\}$. Z denota el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S. Veamos que Z es un subespacio de V:

Claramente Z es no vacío ya que por ejemplo si elegimos el escalar $\alpha = 0$ y tomo un vector $v \in S$ entonces por definición de Z tenemos que $0 = 0v \in Z$.

Tomemos ahora dos vectores cualesquiera en Z: u, v. Por definición de Z dichos vectores son combinaciones lineales de vectores de S: $u = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$ (con $w_k \in S$) y $v = \beta_1 z_1 + ... + \beta_m z_m$ (con $z_k \in S$). Entonces al sumar podemos escribir

$$u + v = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n + \beta_1 z_1 + ... + \beta_m z_m$$

que nos da una combinación lineal de vectores de S. Entonces por definición de Z, $u + v \in Z$.

Tomemos $u \in Z$ y un escalar cualquiera $\alpha \in \mathbb{F}$. Por definición de Z tenemos que $u = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$ (con $w_k \in S$). Pero entonces

$$\alpha u = \alpha(\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n) = (\alpha\alpha_1)\, w_1 + ... + (\alpha\alpha_n)\, w_n$$

que nuevamente es una combinación lineal de vectores de S. Con lo que $\alpha u \in Z$.

Por el Teorema de siempre (Teorema 12 Clase 13) Z resulta ser un subespacio de V.

SEGUNDO veremos que efectivamente $Z = W$. Como ambos son subespacios de V solo quedaría ver que como conjuntos son iguales. Para probar una igualdad de conjuntos debemos mostrar que $Z \subset W$ y que $W \subset Z$.

$Z \subset W$: Tomamos un vector $u \in Z$, $u = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$ (con $w_k \in S$). Pero por definición de W este contiene a S (pues W es la intersección de todos los subespacios que contienen a S). Entonces $w_k \in W$. Y como W es subespacio claramente $\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n$ (pues no olvidemos que todo subespacio es cerrado bajo la suma y multiplicación por escalar). Luego $u = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n \in W$.

$W \subset Z$: Ya que Z como conjunto contiene a S (como mínimo) y Z es subespacio entonces como por definición W interseca a todos los subespacio que contienen a S esto implica que $W \subset Z$ (es Z intersecado con otros subespacios que también contienen a S). ∎

Notation 6 *Si S es un conjunto de generadores entonces denotaremos al subespacio generado por S por*

$$W = \langle S \rangle$$

Si el conjunto de generadores (vectores de S) es finito, $S = \{v_1, ..., v_n\}$ entonces al subespacio generado por S lo denotaremos por

$$W = \langle v_1, ..., v_n \rangle$$

Lo cual significa que todo elemento de W es combinación lineal de los v_i.

Example 7 *El $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ está generado por*

$$\langle (1,0); (0,1) \rangle$$

Pues claramente cualquier vector de $\mathbb{R}^2$, (a, b), se puede expresar así

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1).$$

Example 8 *Un plano π que pasa por el orígen en $\mathbb{R}^3$ y cuyos vectores directores son u y v entonces a dicho plano se lo puede exprear así*

$$\pi = \langle u, v \rangle .$$

Example 9 *Sea $W = \{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$ el $\mathbb{R}-$espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n. Entonces un conjunto de generadores para W es $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$. O sea*

$$W = \left\langle 1, x, x^2, ..., x^n \right\rangle$$

Example 10 *Determinar si los vectores* $v_1 = (1,1,2)$, $v_2 = (1,0,1)$ *y* $v_3 = (2,1,3)$ *general el* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$.

Lo que hay que ver es que si cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3. En otras palabras hay que ver si para $u = (u_1, u_2, u_3)$ existen escalares $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que

$$u = xv_1 + yv_2 + zv_3$$

es decir, si

$$(u_1, u_2, u_3) = x(1,1,2) + y(1,0,1) + z(2,1,3)$$

lo cual significa que

$$\begin{aligned} u_1 &= x + y + 2z \\ u_2 &= x + z \\ u_3 &= 2x + y + 3z \end{aligned}$$

lo cual sería equivalente a plantear si el sistema lineal siguiente tiene solución para todo u_1, u_2, u_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Para lo cual, podemos escribir la matriz ampliada $A\,|b$ y ver si es compatible o no...

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 1 & 0 & 1 & u_2 \\ 2 & 1 & 3 & u_3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} f_2 - f_1 \\ f_3 + (-2)f_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 0 & -1 & -1 & u_2 - u_1 \\ 0 & -1 & -1 & u_3 - 2u_1 \end{array}\right] \rightarrow (-1)f_2$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & -u_2 + u_1 \\ 0 & -1 & -1 & u_3 - 2u_1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} f_1 - f_2 \\ f_3 + f_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 1 & 1 & -u_2 + u_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 - u_2 - u_1 \end{array}\right]$$

Esto ya nos dice que el sistema es compatible solo si $u_3 - u_2 - u_1 = 0$. Lo cual significa que NO para todo u será posible la combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3. Esto quiere decir que los vectores v_1, v_2, v_3 NO generan todo $\mathbb{R}^3$.

Bien. Pero tenemos que $W = \langle (1,1,2), (1,0,1), (2,1,3) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Cómo lo podemos describir mejor? Justamente cuando reducimos la matriz del sistema anterior hemos llegado a la conclusión de que para que sea compatible se deberá cumplir que

$$u_3 - u_2 - u_1 = 0$$

Lo cual quiere decir que para que un vector $u = (u_1, u_2, u_3)$ pertenezca al subespacio generado W deberá satisfacer dicha condición. En otras palabras, podemos expresar que

$$W = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 : u_3 - u_2 - u_1 = 0\}$$

la cual se denomina una *caracterización de* W (esto nos recuerda a las ecuaciones cartesianas de rectas y planos).

Remark 11 *Entonces una caracterización de un subespacio no es más que dar las ecuaciones homogéneas que definen las condiciones del mismo.*

Remark 12 *Claramente se puede tener varios conjuntos de generadores. Por ejemplo una recta que pasa por el origen con ecuación vectorial* $0 + tv$ *puede ser dada también por otra ecuación vectorial tomando* $w = kv$ *para algún* $k \in \mathbb{R}$ *(es decir cambiamos el vector director* v *por un múltiplo de este,* w*):* $0 + tw$*. En el primer caso la recta es dada por* $\langle v \rangle$ *y en el segundo caso por* $\langle w \rangle$*.*

Suma de Subespacios

Definition 13 *Dado* V *un* $\mathbb{F}-$*espacio vectorial y* $S_1, ..., S_k$ *subconjuntos de* V*. El conjunto de todas las sumas*

$$s_1 + ... + s_k$$

de vectores $s_i \in S_i$ *se llama suma de los subconjuntos* $S_1, ..., S_k$*. La denotamos por*

$$S_1 + ... + S_k.$$

Si $W_1, ..., W_k$ *son subespacios de* V *entonces la suma*

$$W_1 + ... + W_k$$

se define como el subespacio W *generado por cada* W_i*,*

$$W = W_1 + ... + W_k = \langle W_1, ..., W_k \rangle \,.$$

En el caso que $W_1 \cap ... \cap W_k = \{0\}$ *entonces* W *se dice que es suma directa de los* W_i*. Y se lo denota por*

$$W = W_1 \oplus ... \oplus W_k.$$

Remark 14 *De forma sencilla (mirandolos como subconjuntos) la suma de los subespacios* $W = W_1 + ... + W_k$ *consta de todas las sumas de vectores de* W_i*. Es decir*

$$W = \{w_1 + ... + w_k : w_i \in W_i\}.$$

Remark 15 *Si S_i es un conjunto de generadores de W_i entonces el subespacio suma $W = W_1 + ... + W_k$ es aquel que es generado por la unión de los respectivos generadores,*

$$W = \langle S_1 \cup ... \cup S_k \rangle .$$

Problem 16 *Dado $\mathbb{R}^4$ como un $\mathbb{R}-$espacio vectorial consideramos los siguientes subespacios*

$$\begin{aligned} S &= \langle (1,3,0,-1);(0,2,1,2) \rangle \\ T &= \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x+y-z=0 \\ z+3w=0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Hallar generadores para $S+T$ y para $S \cap T$. Además caracterizarlos.

Solution 17 *Para hacer el trabajo más sencillo necesitaremos generadores para T y una caracterización para S.*

Primero buscamos la caracterización para *S proseguimos de la siguiente manera: Nos preguntamos cuando un vector $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ está en S. Esto pasa si (a,b,c,d) es combinación lineal de los generadores de S:*

$$(a,b,c,d) = x(1,0,2,-1) + y(1,2,0,2)$$

Lo cual nos lleva a resolver un sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{c} a = x+y \\ b = 2y \\ c = 2x \\ d = -x+2y \end{array} \right.$$

Pasamos a la matriz ampliada y resolvemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 2 & 0 & c \\ -1 & 2 & d \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{c} f_3 + (-2)f_1 \\ f_4 + f_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & -2 & c-2a \\ 0 & 3 & d+a \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{c} f_1 - f_2 \\ f_3 + 2f_2 \\ f_4 + (-3)f_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-2a+2b \\ 0 & 0 & d+a-3b \end{array} \right]$$

Entonces nos da la caracterización para S. Para que $(a,b,c,d) \in S$ se debe cumplir (Rouché-Frobenius para compatibilidad del sistema lineal)

$$\left\{ \begin{array}{c} c-2a+2b=0 \\ d+a-3b=0 \end{array} \right.$$

O sea que podemos expresar al subespacio S como

$$S = \left\{ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} c - 2a + 2b = 0 \\ d + a - 3b = 0 \end{array} \right\}$$

Ahora buscaremos generadores para T. *Como tenemos T caracterizado,*

$$T = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x - y = 0 \\ z + 3w = 0 \end{array} \right\}$$

debemos describir la solución general de las ecuaciones para T:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 0 \\ z + 3w = 0 \end{array} \right.$$

las reducimos por filas el sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow f_1 + f_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

llegamos a una MERF. Ahora escribamos la solución general como hacíamos en las primeras clases, parametrizando las variables libres!

$$\begin{array}{c} x = -y - 3w \\ z = 3w \end{array}$$

Llamando $y = t$ y $w = s$ tenemos que el conjunto solución es

$$\{(-t - s\ ,\ t\ ,\ 3s\ , s) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

Y reescribiendo el vector $(-t - s\ ,\ t\ ,\ 3s\ , s)$ como "suma de cosas de t más cosas de s" encontramos los generadores:

$$\begin{array}{rcl} (-t - s\ ,\ t\ ,\ 3s\ , s) & = & (-t, t, 0, 0) + (-s, 0, 3s, s) \\ & = & t(-1, 1, 0, 0) + s(-1, 0, 3, 1) \end{array}$$

Así resulta que

$$T = \langle (-1, 1, 0, 0); (-1, 0, 3, 1) \rangle$$

Finalmente *vamos a describir los subespacios $S + T$ y $S \cap T$: Para el caso $S + T$ conviene usar los generadores. Ya que por definición se tiene que $S + T$ es generado por la unión de generadores de S y generadores de T:*

$$S + T = \langle (1, 3, 0, -1); (0, 2, 1, 2); (-1, 1, 0, 0); (-1, 0, 3, 1) \rangle$$

queda como ejercicio caracterizar este subespacio (mismo procedimiento que hicimos para S).

Para el caso de $S \cap T$ conviene usar las caracterizaciones. Ya que un vector u estará en $S \cap T$ si está en ambos. Es decir si satisface ambas caracterizaciones! En otras palabras:

$$S \cap T = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{c} z - 2x + 2y = 0 \\ w + x - 3y = 0 \\ x - y = 0 \\ z + 3w = 0 \end{array} \right. \right\}$$

queda como ejercicio buscar los generadores para este espacio (mismo procedimiento que hicimos para T).