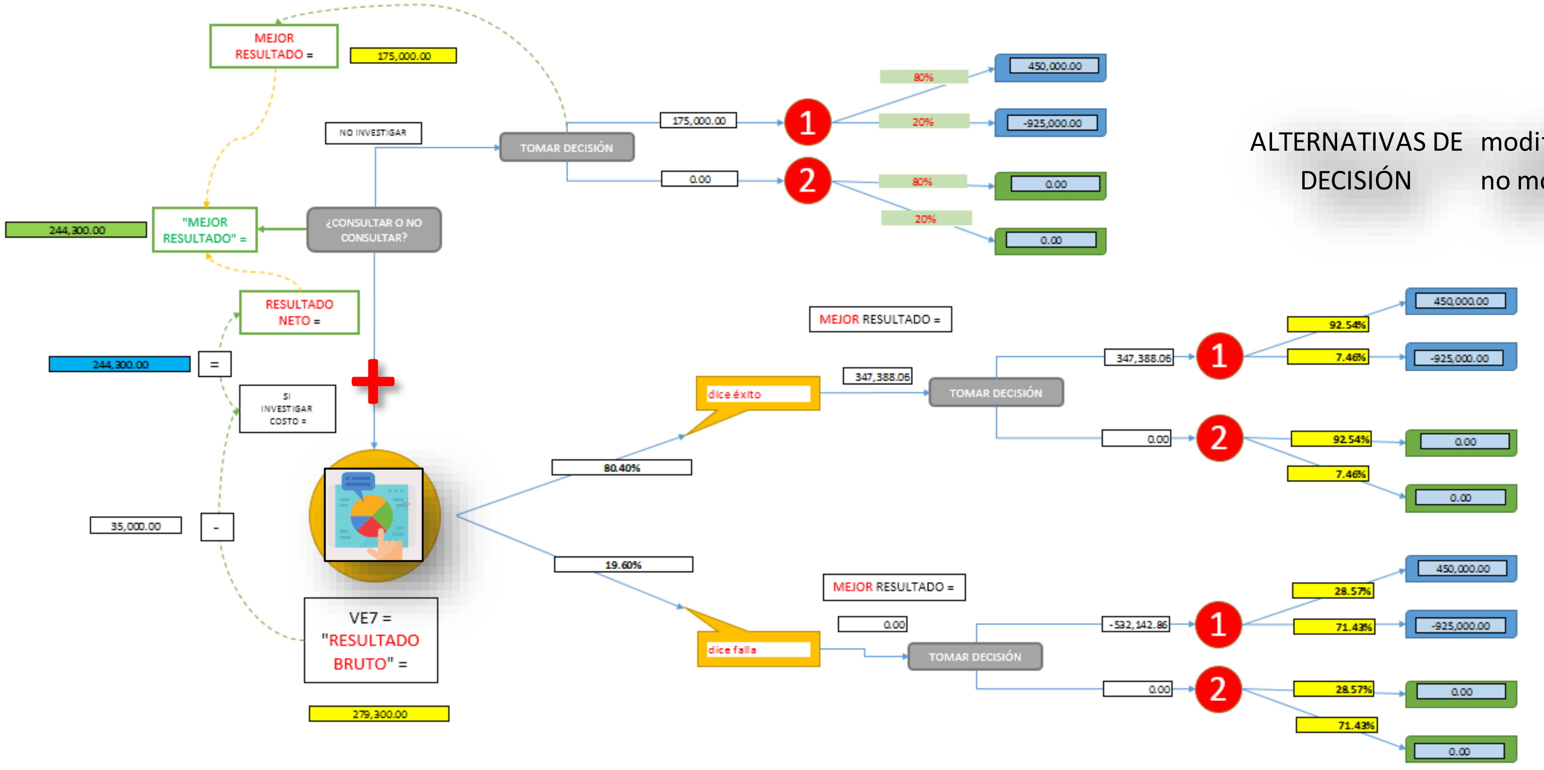
Teorema de Bayes

ÁRBOLES DE DECISIÓN + PROB. CONDICIONALES Y PROB.POSTERIORES



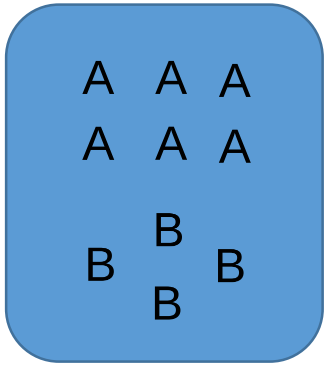
		PROBABILIDADES A "PRIORI"			
		80%	20%		
		éxito	falla		VE
ALTERNATIVAS DE DECISIÓN	modificar	450,000.00	-925,000.00		175,000.00
	no modificar	0.00	0.00		0.00

$$p(A_i / B) = \frac{p(A_i) \cdot p(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i) \cdot p(B / A_i)}$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL Y CONJUNTA

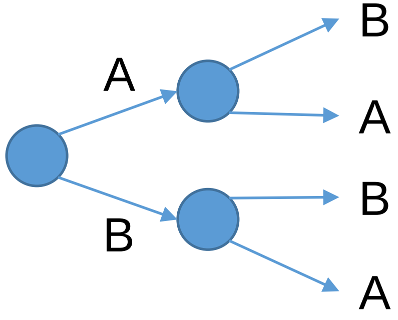
En muchas situaciones es importante determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento, cuando se sabe, que otro evento relacionado ha ocurrido… es decir eventos que no son independientes entre si.

BOLSA DE MUETRAS



EVENTOS DEPENDIENTES

EVENTO 1 EVENTO 2



P. De Intersección o P. Conjuntas (que se dé A y B)	P. Condicionales (de que se dé un resultado dado, siendo que previamente se dio otro)
P(A n B) = PA * P(B/A)	P(B/A) = P(A n B) / PA
P(A n A) = PA * P(A/A)	P(A/A) = P(A n A) / PA
P(B n B) = PB * P(B/B)	P(B/B) = P(B n B) / PB
P(B n A) = PB * P(A/B)	P(A/B) = P(B n A) / PB

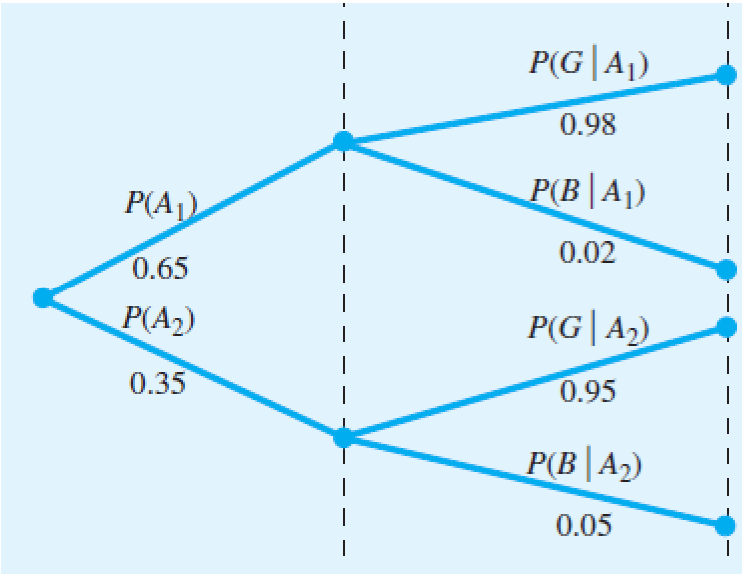
Pregunta difícil:
Si la ultima pieza sacada fue B ¿cuál es la probabilidad de que la pieza anterior haya sido A?..

PROBABILIDAD CONDICIONAL Y CONJUNTA

Otro ejemplo: Los proveedores A y B, brindan el 65% y 35% de un insumo. A y B brindan una calidad BUENA(G) del 98% y 95%. Por consiguiente brindan una calidad MALA (D) del 2% y 5%.

EVENTOS DEPENDIENTES

EVENTO 1 **EVENTO 1**



P. INTERSDECCIÓN O CONJUNTAS

$P(A_1 \text{ n } G) = P(A_1)P(G \mid A_1) = 0.6370$

$P(A_1 \text{ n } B) = P(A_1)P(B \mid A_1) = 0.0130$

$P(A_2 \text{ n } G) = P(A_2)P(G \mid A_2) = 0.3325$

$P(A_2 \text{ n } B) = P(A_2)P(B \mid A_2) = 0.0175$

P. CONDICIONALES

P(G/A1) = P(A1 n G) / PA1

P(B/A1) = P(A1 n B) / PA1

P(G/A2) = P(A2 n G) / PA2

P(B/A2) = P(A2 n B) / PA2

Pregunta difícil:
Si encuentro una pieza MALA(B) ¿cuál es la probabilidad de que la pieza sea del proveedor A1?..

DEMOSTRACIÓN TEOREMA DE BAYES

(1)

A partir de la definición de probabilidad condicional, sabemos que: (a)

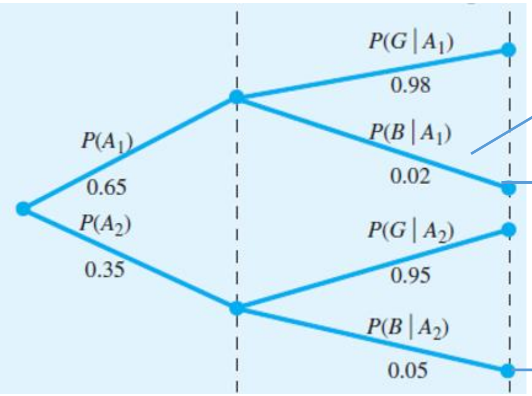
$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

(2)

Luego observando el árbol de probabilidad vemos que: (b)

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1)P(B \mid A_1)$$

(3) (4)



(2)

Para obtener $P(B)$, observamos que el evento B puede ocurrir sólo de dos maneras: $P(A_1 \cap B)$ y $P(A_2 \cap B)$. Por tanto, tenemos: (c)

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) \\ &= P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) \end{aligned}$$

(5) (1=>3)

Al sustituir las ecuaciones se obtiene el teorema de Bayes para el caso de dos eventos: (a)

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

(1=>3)

(2=>4)

DEMOSTRACIÓN TEOREMA DE BAYES

Finalmente el teorema de Bayes se puede simplificar en:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)} \Rightarrow P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)}$$

Generalizando para problemas de más de 2 opciones:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

Se trata de una probabilidad condicional que se puede leer como:
"Habiendo ocurrido el evento B, cual es la probabilidad de que el evento anterior haya sido A".

PROBABILIDAD CONDICIONAL POSTERIOR

El teorema de Bayes nos ayuda para calcular las probabilidades condicionales “posteriores”, que ocurren al agregar una información extra (información muestral) al problema original, por ello se llaman posteriores, posteriores a la información extra.

Por ejemplo:

-Habiendo habido un pronóstico de lluvia ¿qué probabilidad hay de que llueva?

-Habiendo recibido un email “X” y habiendo aplicado un filtro de detección de spam ¿si el filtro determinó que es spam, qué probabilidad hay de que sea spam? (machine learning)

-En la industria podría aplicarse a un método de control de calidad ¿si el control de calidad DICE que es una pieza defectuosa, qué probabilidad hay de que sea una pieza defectuosa?

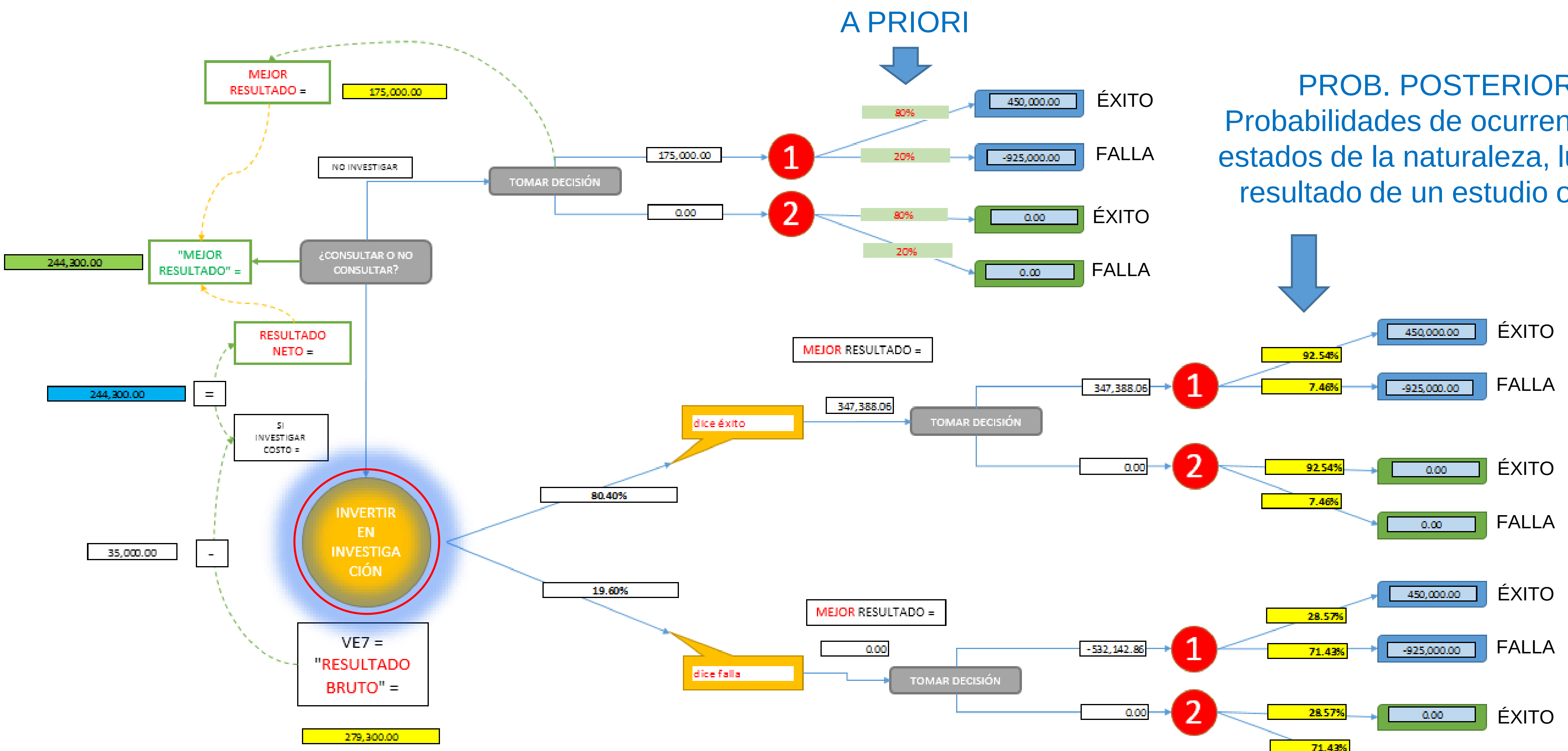
- Si un estudio de mercado estima un cierto nivel de ventas ¿qué probabilidad hay de que se cumpla ese nivel de ventas?

PROBABILIDADES POSTERIORES

El **Teorema de Bayes** se utiliza en el siguiente proceso:

Probabilidades a priori (subjetivas o no) → Consideración de información extra (Prueba / Estudio) → Aplicación del teorema. → Calculo de probabilidades posteriores → Cálculo de respuestas al problema

PROBABILIDADES POSTERIORES



PROB. POSTERIORES: Probabilidades de ocurrencia de los estados de la naturaleza, luego de el resultado de un estudio o prueba.

PROBABILIDADES POSTERIORES
Método Tabular

Estados de la naturaleza s_j	Probabilidades previas $P(s_j)$	Probabilidades condicionales $P(F \mid s_j)$	Probabilidades conjuntas $P(F \cap s_j)$	Probabilidades posteriores $P(s_j \mid F)$
s_1	0.8	0.90	0.72	0.94
s_2	0.2	0.25	0.05	0.06
	1.0		$P(F) = 0.77$	1.00