Clase 17

September 21, 2022

Transformaciones Lineales

Ahora estudiaremos ciertas aplicaciones entre dos espacios vectoriales cualesquiera. Tales resultados tienen importantes aplicaciones en física, ingeniería y en matemáticas propiamente.

Definition 1 *Sean V, W dos $\mathbb{F}-$espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una función. Diremos que T es una transformación* lineal *de V en W si cumple:*

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$, $\forall u, v \in V$;
2. $T(cu) = cT(u)$, $\forall u \in V$ *y* $\forall c \in \mathbb{F}$.

En el caso donde $W = V$ la trasnformación lineal T se denomina *operador lineal* sobre V.

Example 2 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *(como $\mathbb{R}-$espacios vectoriales) dada por*

$$T(u, v) = (u + 2v, \ -v, \ 3u)$$

Pues en efecto: si $(x, y), (w, z) \in \mathbb{R}^2$ entonces

$$\begin{aligned}
T[(x,y)+(w,z)] &= T(x+w, y+z) \\
&= (x+w+2(y+z), \ -(y+z), \ 3(x+w)) \\
&= (x+w+2y+2z, \ -y-z, \ 3x+3w) \\
&= (x+2y, \ -y, \ 3x) + (w+2z, \ -z, \ 3w) \\
&= T(x,y) + T(w,z),
\end{aligned}$$

además si $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
T[c(x,y)] &= T[(cx, cy)] \\
&= (cx+2cy, \ -cy, \ 3cx) \\
&= (c(x+2y), \ c(-y), \ c(3x)) \\
&= c(x+2y, \ -y, \ 3x) \\
&= cT[(x,y)].
\end{aligned}$$

Example 3 *Si* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ *es una matriz* $\mathbb{R}^{2\times 3}$ *entonces ésta define una trasnformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *como sigue: si* $u \in \mathbb{R}^3$,

$$Tu = Au$$

es decir la multiplicación, a izquierda, de A *por el vector* u*: (supongamos* $u = (x, y, z)$*)*

$$T(x,y,z) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3y - z \end{bmatrix}.$$

En notación explícita podemos escribir

$$T(x,y,z) = (x - 2y,\ 3y - z).$$

Example 4 *Si* V, W *son dos* $\mathbb{F}-$*espacios vectoriales cualesquiera, entonces sencillamente podemos definir la transformación lineal nula:*

$$T(v) = 0.$$

O sea a todo v *lo mandamos al vector nulo de* W*. Es lineal ya que en efecto, si* $u, v \in V$,

$$T(u+v) = 0$$

por definición. Pero también $T(u) = 0 = T(v)$ *nuevamente por definición. Y luego*

$$T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0 = T(u+v).$$

Además si $c \in \mathbb{F}$,

$$T(cu) = 0$$

por definición. Pero también $T(u) = 0$ *por definición y luego*

$$cT(u) = c.0 = 0 = T(cu).$$

Example 5 *Sea* V *un* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial de dimensión* n*. Sea* $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ *una base ordenada (*fija*) para* V*. Para cualquier* $v \in V$ *consideremos sus coordenadas en la base dada:*

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{bmatrix}$$

(recordemos que esto quería decir que $v = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + ... + k_n\mathbf{v}_n$*.) Esto define una trasnformación lineal*

$$T : V \to \mathbb{R}^n$$

dada por

$$T(v) = [v]_{\mathcal{B}}.$$

Más adelante veremos que ésta última trasnformación es un *isomorfismo* (trasnformación lineal biyectiva) y por ende podemos "identificar" al espacio V con $\mathbb{R}^n$. En otras palabras, podemos calcular todo en coordenadas para obtener información de V.

Example 6 *Sea P_3 es $\mathbb{R}-$espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que* 3. *Y P_4 análogamente de los polinomios de grado menor o igual que* 4. *Entonces definimos una transformación lineal $T : P_3 \to P_4$ como sigue: Para $p \in P_3$*

$$T(p) = xp$$

Por ejemplo si $p = 3x^3 - 2x + 5 \in P_3$ entonces $T(p) = x(3x^3 - 2x + 5) = 3x^4 - 2x^2 + 5x \in P_4$.

Es lineal ya que: si $p(x), q(x) \in P_3$

$$\begin{aligned} T(p(x) + q(x)) &= x(p(x) + q(x)) \\ \text{(*)} &= xp(x) + xq(x) \\ &= T(p(x)) + T(q(x)) \end{aligned}$$

(*) si bien esta operaación no está contemplada en el espacio vectorial P_3, sabemos que podemos multiplicar y distribuir polinomios.

Además si $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(cp(x)) &= x(cp(x)) \\ &= c(xp(x)) \\ &= cT(p(x)). \end{aligned}$$

Algunas propiedades...

Remark 7 *Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entonces conserva las combinaciones lineales. Por ejemplo si $a, b \in \mathbb{F}$ y $u, v \in V$,*

$$\begin{aligned} T(au + bv) &= T(au) + T(bv) \\ &= aT(u) + bT(v). \end{aligned}$$

Es decir que si teníamos una combinación lineal de los vectores $u, v \in V$ ($au + bv$), al aplicar T pasamos a tener una combinación lineal (con los mismos escalares) de los vectores $T(u), T(v) \in W$.

Más aún, esto siempre vale para cualquier combinación lineal finita:

$$T(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \ldots + a_n T(v_n).$$

O en notación compacta:

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k T(v_k).$$

Theorem 8 *Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entre los $\mathbb{F}-$espacios vectoriales V, W, entonces*

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $T(-v) = -T(v)$ $\forall v \in V$.
3. $T(v - w) = T(v) - T(w)$.

Proof. (1) Tomamos cualquier $v \in V$. Por el Teorema 10 (*Clase* 13) sabemos que $0v = \mathbf{0}$. Luego

$$\begin{array}{rcl} T(\mathbf{0}) & = & T(0v) \\ (1) & = & 0T(v) \\ (2) & = & \mathbf{0} \end{array}$$

(1) T es lineal, saca el escalar afuera. (2) nuevamente el Teorema 10 (clase 13) ya que estamos multiplicando el escalar 0 por el vector $T(v) \in W$.

(2) Nuevamente por el Teorema 10 (*clase* 13) se tiene que $-v = (-1)v$. Entonces por la linealidad de T,

$$T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v)$$

no olvidar que $T(v)$ es un vector del $\mathbb{F}-$*espacio vectorial* W.

(3) Sencillamente sale por la linealidad de T y el hecho $-w = (-1)w$:

$$\begin{array}{rcl} T(v - w) & = & T(v + (-1)w) \\ & = & T(v) + T((-1)w) \\ & = & T(v) + (-1)T(w) \\ & = & T(v) - T(w). \end{array}$$

■

Determinación de una transformación lineal a partir de vectores de una base

Sea $T : V \to W$ una trasnformación lineal. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base para V. Entonces sabemos que cualquier vector $v \in V$ se puede expresar como combinación lineal de los elemento de dicha base:

$$v = k_1 v_1 + ... + k_n v_n$$

Luego si aplicamos T y tenemos en cuenta su linealidad:

$$\begin{array}{rcl} T(v) & = & T(k_1 v_1 + ... + k_n v_n) \\ & = & k_1 T(v_1) + ... + k_n T(v_n) \end{array}$$

podemos ver que el vector $T(v) \in W$ es combinación lineal de los vectores $T(v_1), ..., T(v_n)$ con los mismos escalares que v.

Los vectores $T(v_1), ..., T(v_n)$ NO NECESARIAMENTE forman una base para W.

Problem 9 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida como sigue: Si $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$ entonces*

$$\begin{aligned} T(1,1,1) &= (1,0) \\ T(1,1,0) &= (2,-1) \\ T(1,0,0) &= (4,3) \end{aligned}$$

Example 10 *Dar una fórmula explícita para $T(x,y,z)$.*

Solution 11 *Primero sabemos que cualquier vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se expresa como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$:*

$$(*)\ (x,y,z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$$

es decir,

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = a + b \\ z = a \end{cases}$$

Al resolver dicho sistema nos da:

$$a = z,\ b = y - z,\ c = x - y.$$

Luego volviendo a (*) tenemos que

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)$$

Ahora aplicamos T y por su linealidad tenemos que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T[z(1,1,1) + (y-z)(1,1,0) + (x-y)(1,0,0)] \\ &= T[z(1,1,1)] + T[(y-z)(1,1,0)] + T[(x-y)(1,0,0)] \\ &= z\mathbf{T(1,1,1)} + (y-z)\mathbf{T(1,1,0)} + (x-y)\mathbf{T(1,0,0)} \\ &= z\mathbf{(1,0)} + (y-z)\mathbf{(2,-1)} + (x-y)\mathbf{(4,3)} \\ &= (z,0) + (2y-2z,\ -y+z) + (4x-4y,\ 3x-3y) \\ &= (4x-2y-z,\ 3x-4y+z) \end{aligned}$$

Finalmente obtuvimos la fórmula explícita para T en cualquier (x,y,z):

$$T(x,y,z) = (4x-2y-z,\ 3x-4y+z).$$

Así por ejemplo $T(-5,4,-2) = (-26,\ -33)$.

Composición de transformaciones lineales

Definition 12 *Sean U, V, W tres $\mathbb{F}-$espacios vectoriales y sean $T_1 : U \to V$ y $T_2 : V \to W$ dos transformaciones lineales. Se define la composición de T_2 con T_1, denotada por $T_2 \circ T_1$, como*

$$T_2 \circ T_1 : U \to W$$

mediante la fórmula

$$(T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u)).$$

Notemos que $u \in U$ entonces $T_1(u) \in V$. Luego $T_2(T_1(u)) \in W$.

Theorem 13 *Sean U, V, W tres $\mathbb{F}-$espacios vectoriales y sean $T_1 : U \to V$ y $T_2 : V \to W$ dos transformaciones lineales. Entonces la composición $T_2 \circ T_1$ es también una trasnformación lineal.*

Proof. Sean $u, v \in U$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \left[T_2 \circ T_1\right](u+v) & = & T_2(T_1(u+v)) \\ (1) & = & T_2(T_1(u) + T_1(v)) \\ (2) & = & T_2(T_1(u)) + T_2(T_1(v)) \\ & = & \left[T_2 \circ T_1\right](u) + \left[T_2 \circ T_1\right](v) \end{array}$$

(1) Linealidad de T_1. (2) Linealidad de T_2.
Además si $c \in \mathbb{F}$ entonces

$$\begin{array}{rcl} \left[T_2 \circ T_1\right](cu) & = & T_2(T_1(cu)) \\ (3) & = & T_2(cT_1(u)) \\ (4) & = & cT_2(T_1(u)) \\ & = & c\left[T_2 \circ T_1\right](u) \end{array}$$

(3) Linealidad de T_1. (4) Linealidad de T_2. ■

Example 14 *Consideremos las siguientes transformaciones lineales sobre los $\mathbb{R}-$espacios vectoriales P_1, P_2 y P_3:*

$$\begin{array}{rcl} T & : & P_1 \to P_2 \\ S & : & P_2 \to P_3 \end{array}$$

dadas explícitamente por

$$\begin{array}{rcl} T(p) & = & xp \\ S(q) & = & (2x+4)q \end{array}$$

Luego la composición $S \circ T : P_1 \to P_3$ *esta dada por*

$$\begin{aligned} [S \circ T](p) &= S(T(p)) \\ &= S(xp) \\ &= (2x+4)xp \\ &= (2x^2+4x)p \end{aligned}$$

Por ejemplo si $p = 3x - 2$ *entonces*

$$\begin{aligned} [S \circ T](p) &= (2x^2+4x)p \\ &= (2x^2+4x)(3x-2) \\ &= 6x^3+8x^2-8x. \end{aligned}$$

Sin embargo vemos que no está definida la composición $T \circ S$. Ya que tendriamos que tomar $p \in P_2$ y entonces

$$\begin{aligned} [T \circ S](p) &= T(S(p)) \\ &= T((2x+4)p) \end{aligned}$$

pero si p es de grado 2 entonces el polinomio $(2x+4)p$ podría ser de grado 3 y luego no está definido T en un polinomio de grado 3. Esto nos indica que la composición no es una operación conmutativa necesariamente.