ALGEBRA Y GEOMETRIA
TRABAJO PRACTICO 4
TEMA: RECTA Y PLANO

1. Sea l la recta en R^2 determinada por los puntos $P = (1,2)$ y $Q = (3,-1)$. Se pide:

a) Dar una ecuación paramétrica vectorial y un sistema de ecuaciones paramétricas escalares para l.

b) Determinar los puntos de l correspondientes a los valores $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$, $t = \frac{1}{2}$ y $t = -3$ del parámetro.

c) Determinar si pertenecen a l los puntos siguientes: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,1/2)$, $P_3 = (-2,3)$, $P_4 = (5,-4)$, $P_5 = (7,-7)$ y $P_6 = (8,5)$.

d) Caracterizar los valores del parámetro para las partes de l que se indican a continuación:

i) Semirrecta de origen P que incluye a Q. $0 < t < 1$

ii) Semirrecta de origen Q que no incluye a P.

iii) Segmento de extremos P y Q.

iv) Segmento de extremos $A = (5,-4)$ y $B = (2,1/2)$.

2.

a) Dar todas las formas de la ecuación de la recta de R^2 determinada por los puntos $P = (2,1)$ y $Q = (4,3)$.

b) Idem *a)* con $P = (-1,1)$ y $Q = (-1,3)$.

c) Dar una ecuación vectorial de las rectas definidas por cada una de las ecuaciones siguientes:

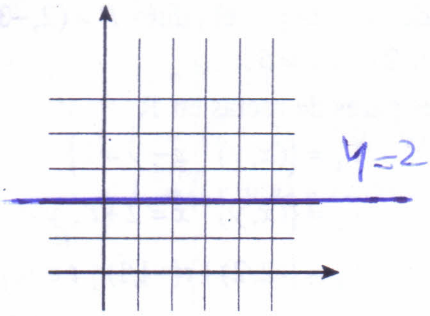
i) $y = 3x + 2$

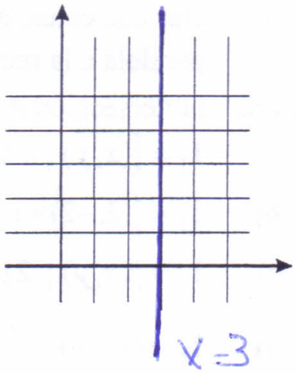
ii) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{-2}$

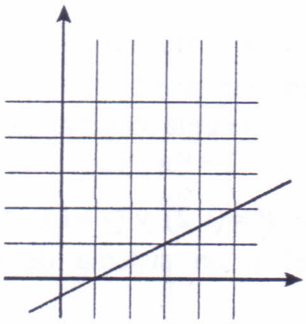
iii) $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{2} = 1$

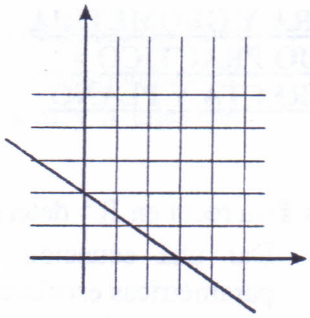
iv) $5x - 8y = 3$

3. Dar una ecuación cartesiana de la recta l representada en cada uno de los siguientes gráficos:









4. Encontrar los puntos de intersección con los ejes de coordenadas de cada una de las siguientes rectas en R^2:

a) $l_1 = \{(x,y) \mid 5x - 3y = 15\}$

b) $l_2 = \left\{(x,y) \mid \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{5}\right\}$

c) $l_3 = \{(2,-5) + t(1,3) \mid t \in R\}$

d) $l_4 = \{(x,y) \mid x = 1 + 2t,\ y = 5 - 3t\}$

5. Determinar si los siguientes pares de rectas de R^2 son paralelas. En tal caso verificar si son coincidentes:

i) $l_1 = \{(3,-2) + t(1,3/2) \mid t \in R\}$ $\quad l_2 = \{(x,y) \mid x = 1 + 2t,\ y = 3 + 3t\}$

ii) $l_1 = \left\{(x,y) \mid \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{-2}\right\}$ $\quad l_2 = \{(3,-2) + t(1,-2/3) \mid t \in R\}$

iii) $l_1 = \{(x,y) \mid y = 3x - 5\}$ $\quad l_2 = \{(x,y) \mid y = 2x + 3\}$

iv) $l_1 = \left\{(x,y) \mid \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1\right\}$ $\quad l_2 = \left\{(x,y) \mid \dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{3} = 1\right\}$

v) $l_1 = \left\{(x_1,x_2) \mid \dfrac{x_1}{2} + \dfrac{x_2}{4} = 1\right\}$ $\quad l_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_2 = -2x_1 + 3\}$

vi) $l_1 = \{(x,y) \mid 2x + 3y = 6\}$ $\quad l_2 = \{(x,y) \mid x = -3 + 3t,\ y = 4 - 2t\}$

6.

a) Dar una ecuación vectorial de la recta que incluye al punto $P = (1,5)$ y es paralela a la recta de ecuación $y = 3x - 8$.

b) Dar una ecuación cartesiana de la recta por el punto $P = (2,-3)$ que es paralela a la recta de ecuación $2x - 3y = 5$.

7. Encontrar la intersección de los siguientes pares de rectas en R^2:

a) $l_1 = \{(x,y) \mid 2x + 3y = 4\}$ $\quad l_2 = \{(x,y) \mid x - y = 2\}$

b) $l_1 = \{(3,-2) + t(1,-1) \mid t \in R\}$ $\quad l_2 = \{(x,y) \mid x = 2 + t',\ y = -1 + 2t'\}$

c) $l_1 = \{(x,y) \mid 2x - 5y = 3\}$ $\quad l_2 = \{(2,2) + t(-1,1) \mid t \in R\}$

d) $l_1 = \left\{(x,y) \mid \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{-1}\right\}$ $\quad l_2 = \{(x,y) \mid y = -2x - 1\}$

8.

a) Dar una ecuación vectorial, un sistema de ecuaciones paramétricas y la forma simétrica de la ecuación cartesiana de la recta en R^3 determinada por los puntos $P=(1,2,1)$ y $Q=(3,-1,5)$.

b) Dar una ecuación vectorial de la recta en R^3 definida por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-2z=1 \\ y+3z=2 \end{cases}$$

c) Dar un sistema de ecuaciones cartesianas para la recta en R^3 de ecuación vectorial $(x,y,z)=(1,3,5)+t(1,2,-3)$.

9. Encontrar los puntos de intersección con los planos coordenados de las siguientes rectas en R^3:

a) $l=\{(x,y,z) \mid x=3+t,\ y=5-t,\ z=-2\}$

b) $l=\{(x,y,z) \mid 2x+y+2z=0,\ 4x-y-2z=2\}$

10. Determinar si los siguientes pares de rectas en R^3 son paralelas. En caso afirmativo, verificar si son coincidentes:

a) $l_1=\{(1,0,3)+t(2,1,-2) \mid t\in\mathrm{R}\}$

$l_2=\left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z-3}{-2}\right\}$

b) $l_1=\{(x,y,z) \mid x-2z=2,\ y+3z=1\}$

$l_2=\{(0,4,-1)+t(2,-3,1) \mid t\in\mathrm{R}\}$

c) $l_1=\{(x,y,z) \mid x=1+t,\ y=-2-t,\ z=3\}$

$l_2=\left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}\right\}$

11. Determinar si los siguientes pares de rectas se intersecan, son paralelas o alabeadas:

a) $l_1=\{(0,-3,3)+t(1,-1,2) \mid t\in\mathrm{R}\}$

$l_2=\left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-1}\right\}$

b) $l_1=\{(1,2,1)+t(2,-3,1) \mid t\in\mathrm{R}\}$

$l_2=\{(2,0,2)+t'(0,1,0) \mid t'\in\mathrm{R}\}$

c) $l_1=\{(x,y,z) \mid x+2y+3z=4,\ y+z=2\}$

$l_2=\left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{-1}=z\right\}$

12. Se pide:

a) Dar las ecuaciones paramétricas y cartesiana del plano determinado por los puntos $P=(1,1,1)$, $Q=(2,2,2)$ y $R=(-1,0,1)$.

b) Idem para el plano por el origen y los puntos $P=(1,-3,1)$ y $Q=(2,4,0)$.

c) Idem para el plano paralelo al del inciso **b)** que pasa por el punto $A=(1,5,-1)$.

d) Ecuación cartesiana del plano paralelo al plano coordenado x_1x_3 por el punto $P=(1,-1,2)$.

13. Determinar si los siguientes pares de planos son paralelos o se intersecan. En este último caso hallar la intersección.

a) $$\mathrm{P}_1=\{(1,1,1)+\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,0)\ \mid\ \alpha,\beta\in\mathrm{R}\}$$ $$\mathrm{P}_2=\{(2,2,1)+\alpha'(2,1,0)+\beta'(4,3,-2)\ \mid\ \alpha',\beta'\in\mathrm{R}\}$$

b) $$\mathrm{P}_1=\{(-1,1,-1)+\alpha(2,2,-1)+\beta(-1,2,0)\ \mid\ \alpha,\beta\in\mathrm{R}\}$$ $$\mathrm{P}_2=\{(2,1,-2)+\alpha'(-4,-4,2)+\beta'(5,2,2)\ \mid\ \alpha',\beta'\in\mathrm{R}\}$$

c) $$\mathrm{P}_1=\{(x,y,z)\ \mid\ 2x-6y+2z=1\}$$ $$\mathrm{P}_2=\{(1,1,0)+\alpha(2,1,1)+\beta(1,0,-1)\ \mid\ \alpha,\beta\in\mathrm{R}\}$$

14. Sea P el plano en R^3 definido por la ecuación vectorial paramétrica $(x,y,z)=(1,-1,1)+s(2,1,0)+t(1,1,1)$. En cada uno de los casos siguientes, determinar si la recta l es paralela al plano. En caso contrario encontrar el punto de intersección.

a) $\mathrm{l}=\{(3,2,1)+\alpha(1,0,-1)\mid \alpha\in\mathrm{R}\}$

b) $\mathrm{l}=\{(-1,0,-1)+\alpha(1,2,-1)\mid \alpha\in\mathrm{R}\}$

c) $\mathrm{l}=\{(x,y,z)\mid x-2z=1,\ y+3z=2\}$

15. Idem ejercicio 14, siendo P el plano de ecuación cartesiana $2x-y+z-2=0$ y las rectas que se dan a continuación:

i) $$\mathrm{l}=\left\{(x,y,z)\mid x+2=\frac{y+1}{3}=z-1\right\}$$

ii) $$\mathrm{l}=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=z\right\}$$

16. Sean l_1 y l_2 las rectas en R^2, dadas, respectivamente, por las ecuaciones $3x-5y+9=0$ y $4x+7y-28=0$. Se pide:

a) Determinar la intersección entre l_1 y l_2.

b) Dar una ecuación de la recta que incluye a $P\in \mathrm{l}_1\cap \mathrm{l}_2$ y es paralela a la recta $\mathrm{l}=\{(1,4)+t(3,7)\mid t\in\mathrm{R}\}$

17. Dar expresiones para las medianas del triángulo cuyos vértices son los puntos $P=(-3,2)$, $Q=(3,-2)$ y $R=(1,0)$. (Mediana: segmento de recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto). Mostrar que las tres medianas tienen un punto común.

18. Dos de los lados de un paralelogramo son parte de las rectas $l_1 = \{(x,y) \mid x+y-6=0\}$ y $l_2 = \{(x,y) \mid 3x-y+10=0\}$. Dar las ecuaciones de los otros dos lados sabiendo que uno de los vértices es el punto $P=(5,5)$.

19. Dibujar una recta arbitraria (sin un sistema de coordenadas). En algún sistema de coordenadas, la recta tiene a $2x+3y=18$ por ecuación. Se pide;

i) Verificar si pertenecen a la misma los puntos cuyas coordenadas en ese sistema son $\begin{bmatrix}-3\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}12\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$.

ii) Ubicar arbitrariamente los puntos de coordenadas $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$ sobre la recta. Determinar la ubicación de los restantes puntos pertenecientes a ella.

iii) Hallar el valor de x para que $\begin{bmatrix}2\\x\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}x\\3\end{bmatrix}$ sean coordenadas de puntos en la recta.

iv) Encontrar la intersección con los ejes coordenados.

v) Dar un sistema de coordenadas ortogonales con respecto al cual la recta tenga la ecuación dada. Idem para ejes oblicuos. Graficar.

20. Dar expresiones cartesianas para las rectas siguientes:

a) $l_1 = \{(x,y,z) \mid x=2-t,\ y=2-2t,\ z=6t\}$.

b) La recta determinada por los puntos $P=(2,-1,4)$ y $Q=(6,2,-3)$.

21.

a) Encontrar la condición necesaria y suficiente para que los planos $\mathsf{P}_1 = \{(x,y,z) \mid ax+by+cz=d\}$ y $\mathsf{P}_1 = \{(x,y,z) \mid a'x+b'y+c'z=d'\}$ sean paralelos. ¿Cuándo son coincidentes?

b) Sea $\mathsf{P} = \{(x,y,z) \mid 3x-2y+z=1\}$. Dar la ecuación de un plano paralelo a P por el punto $P=(1,1,1)$.

22. Se pide:

a) Ecuación vectorial del plano paralelo a $l_1 = \left\{(x,y,z) \mid \frac{x}{2}=y=z\right\}$ y que incluye a la recta $l_2 = \left\{(x,y,z) \mid \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1},\ z=3\right\}$.

b) Ecuación vectorial del plano definido por las rectas $l_1 = \{(1,-1,3)+t(2,1,4) \mid t \in \mathrm{R}\}$ y $l_2 = \{(1,-1,-1)+s(4,2,3) \mid s \in \mathrm{R}\}$..

c) Ecuación vectorial del plano determinado por el punto $P=(4,-1,0)$ y la recta $l = \{(x,y,z) \mid x=t,\ y=2t,\ z=3t\}$

23.

a) ¿Qué puntos (x,y,z) satisfacen la ecuación dada por $(x-y+1)^2+(x+y-z+4)^2=0$?

b) ¿Para que valores de b la siguiente ecuación representa una recta? ¿Qué representa en caso contrario?

$$(2x+3y+4z-1)^2+(bx+3y+4z-1)^2=0$$

24.

a) Dar una ecuación del plano que incluye al punto $P=(7,4,5)$ y es paralelo al plano $\mathrm{P}=\{(x,y,z) \mid 2x-3y-6=0\}$.

b) Idem con $P=(1,1,1)$ y el plano $\mathrm{P}=\{(x,y,z) \mid x-20y+7z=5\}$.

25. Dar una ecuación del plano determinado por el punto $Q=(2,-3,-1)$ y la recta $\mathrm{l}=\left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+4}{3}\right\}$.

26. Determinar una ecuación de la recta que pasa por el punto $P=(4,-2,-3)$ y es paralela a los planos $\mathrm{P}_1=\{(x,y,z) \mid x+y=6\}$ y $\mathrm{P}=\{(x,y,z) \mid 3x-2y-4z=12\}$

27. Mostrar que las siguientes rectas $\mathrm{l}_1=\left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+8}{3}=\dfrac{z-3}{-2}\right\}$ y $\mathrm{l}_2=\left\{(x,y,z) \mid \dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-3}{4}\right\}$ se intersecan y encontrar una ecuación del plano definido por ellas.

28. Sea l la recta intersección de los planos $\mathrm{P}_1=\{(x,y,z) \mid x+2y-3z=8\}$ y $\mathrm{P}_2=\{(x,y,z) \mid 5y-z=1\}$. Dar un vector de dirección de l. Dar una representación paramétrica de la recta paralela a l que incluye al punto $P=(1,4,3)$.

29. Determinar los valores de a y b para que el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales siguiente sea:

i) Un punto.
ii) Una recta.
iii) Un plano.

$$\begin{cases} ax_2+x_3=b \\ ax_1+bx_3=1 \\ ax_1+ax_2+2x_3=2 \end{cases}$$

30. Determinar el plano que incluye a $\mathrm{l}_1=\{(x,y,z) \mid x=1+t,\ y=5-t,\ z=4-2t\}$ y es paralelo a $\mathrm{l}_2=\{(x,y,z) \mid x=2t,\ y=1-t,\ z=4-2t\}$.

31. Dar ecuaciones de dos planos cuya intersección sea la recta $\mathrm{l}=\{(x,y,z) \mid x=0,\ y=t,\ z=t\}$.

32. Demuestre que la recta $\mathrm{l}_1=\{(x,y,z) \mid x=3+2t,\ y=2+t,\ z=-2-3t\}$ se interseca con la recta $\mathrm{l}_2=\{(x,y,z) \mid x=-3+4t,\ y=5-4t,\ z=6-5t\}$ y encuentre dicha intersección.

33. En cada uno de los casos siguientes, encuentre la intersección del plano dado con los planos coordenados

a) $\mathsf{P}=\{(x,y,z) \mid x+2y-z=7\}$.

b) $\mathsf{P}=\{(x,y,z) \mid x+z=5\}$.

c) $\mathsf{P}=\{(x,y,z) \mid 4x+y=6\}$.

d) $\mathsf{P}=\{(x,y,z) \mid 3x+4y+6z=12\}$.

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS METRICOS

1.

a) Calcular la longitud de los siguientes vectores: $V_1=(3,4)$, $V_2=2(3,4)$, $V_3=(-3,-4)$.

b) Sea $V=(1,1,1)$. Calcular $\|V\|$, $U=\dfrac{1}{\|V\|}V$ y $\|U\|$.

c) Encontrar los vectores unitarios paralelos a $U=(1,2)$ y $V=\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. En cada uno de los casos siguientes se pide: $U\cdot V$, $\mathrm{ang}(U,V)$, $\mathrm{Pr}_V(U)$ y $\mathrm{Pr}_{V^\perp}(U)$

a)	$U=\left(1,\sqrt{3}\right)$	$V=\left(\sqrt{3},1\right)$
b)	$U=(1,0,1)$	$V=(-1,1,-2)$
c)	$U=(1,-3,7)$	$V=(8,-2,-2)$

3. Encontrar el ángulo agudo entre las rectas l_1 y l_2:

vector dirección

a) $\mathrm{l}_1=\{(1,2)+t(1,3) \mid t\in\mathrm{R}\}$
$\mathrm{l}_2=\{(3,5)+t(2,1) \mid t\in\mathrm{R}\}$

b) $\mathrm{l}_1=\{(1,1,0)+t(-2,1,-1) \mid t\in\mathrm{R}\}$
$\mathrm{l}_2=\{(2,-1,1)+t(1,1,2) \mid t\in\mathrm{R}\}$

4.

i) Encontrar un vector ortogonal a $V=(3,4)$.

ii) Mostrar que el conjunto de vectores en R^2 ortogonales a V es una recta por el origen y dar una ecuación cartesiana de dicha recta.

iii) Determinar los vectores **unitarios** ortogonales a V.

iv) Encontrar un vector ortogonal a $U=(2,1,2)$.

v) Mostrar que el conjunto de vectores en R^3, ortogonales a U, es un plano por el origen y dar una ecuación cartesiana del mismo.

vi) ¿Qué define, geométricamente, el conjunto de vectores **unitarios** ortogonales a U?

5.

a) Dar una ecuación cartesiana de la recta por punto $P=(-3,1)$, perpendicular al vector $V=(1,2)$.

b) Dar una ecuación cartesiana de la recta por el punto $P=(1,5)$ perpendicular a la recta $l=\{(0,1)+t(3,-2) \mid t\in\mathrm{R}\}$.

c) Dar una ecuación vectorial de la recta que incluye al punto $P=(2,8)$ y es perpendicular a la recta $l=\{(x,y) \mid 2x-y=5\}$.

d) Dar una ecuación cartesiana del plano que incluye al punto $P=(1,-2,3)$ y es perpendicular a $l=\left\{(x,y,z) \mid \frac{x-1}{2}=y-3=\frac{z}{2}\right\}$.

e) Dar una ecuación vectorial de la recta que incluye al punto $P=(3,-1,4)$ y es perpendicular a P$=\{(x,y,z) \mid x+2y-z=5\}$.

6.

a) Calcular la distancia entre los puntos $P_1=(2,3)$ y $P_2=(3,7)$.

b) Encontrar el punto de la recta $l=\{(x,y) \mid 2x+3y=1\}$ más próximo al punto $P=(3,-6)$. Calcular $\text{dist}(P,l)$.

c) Idem punto *b)* con $P=(7,3)$ y $l=\{(3,0)+t(1,2) \mid t\in\mathrm{R}\}$

7.

a) Encontrar el punto del plano P$=\{(x,y,z) \mid x+2y-z=5\}$ más próximo del punto $P=(3,4,0)$ y calcular la distancia de P al plano.

b) Encontrar el punto de la recta $l=\left\{(x,y,z) \mid \frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=z+1\right\}$ más próximo a $P=(2,-1,3)$ y calcular la distancia de P a la recta.

8. Verificar si las rectas $l_1=\{(x,y) \mid 3x+4y=7\}$ y $l_2=\{(2,-1)+t(-4,3) \mid t\in\mathrm{R}\}$ son paralelas. En tal caso calcular $\text{dist}(l_1,l_2)$.

9. Encontrar la distancia entre las rectas alabeadas $l_1=\{(2,1,2)+t(2,1,0) \mid t\in\mathrm{R}\}$ y $l_2=\{(6,-2,1)+t(-4,-1,3) \mid t\in\mathrm{R}\}$.

10. Encontrar el ángulo entre los planos P$_1=\{(x,y,z) \mid x+y+\sqrt{2}z=1\}$ y P$_1=\{(x,y,z) \mid x+y=5\}$.