Clase 5

April 12, 2022

Matriz inversa

Notemos que al multiplicar una matriz identidad I_n por una $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ siempre se obtiene la misma A: Basta ver cómo quedan los elementos del producto AI_n,

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(I_n)_{kj} = A_{ij}.1 = A_{ij},$$

pues los elementos de I_n son 1 cuando están en la diagonal principal (o sea cuando $k = j$) y son 0 en los demás casos.

De forma análoga cuando multiplicamos I_nA,

$$(I_nA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (I_n)_{ik}A_{kj} = 1.A_{ij} = A_{ij}.$$

Definition 1 *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, una matriz cuadrada. A es invertible si existe una matriz $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

A dicha matriz B se le llama matriz inversa de A.

Lemma 2 *Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ es una matriz invertible entonces su inversa es única.*

Proof. Supongamos que A tiene dos inversas, digamos $B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Ambas cumplen que

$$\begin{aligned} AB &= BA = I_n \\ AC &= CA = I_n \end{aligned}$$

Pero entonces

$$B = B.I_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

■

Notation 3 *Ahora que sabemos que solo hay una única matriz invertible en cada caso, la denotaremos por A^{-1}.*

Example 4 *Si* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, *entonces podemos comprobar que* $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. *Pues*

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

y también

$$A^{-1}.A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Example 5 *Si* $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ *entonces podemos comprobar que* $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. *En efecto,*

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

también,

$$A^{-1}.A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Theorem 6 *Si* $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *son matrices invertibles entonces* AB *es invertible y se cumple que*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proof. Sabemos que $(AB)^{-1}$ denota la matriz inversa de AB. Lo que debemos comprobar es que realmente tiene la forma de $B^{-1}A^{-1}$. Para ello basta calcular el producto $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ y ver que nos da la I_n:

Pero por la propiedad asociativa de matrices tenemos que

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

Como $BB^{-1} = I_n$,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(I_n)A^{-1}$$

ahora asociamos de cualquier forma,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (AI_n)A^{-1}$$

y resolvemos finalmente....

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AA^{-1} = I_n.$$

De forma análoga se puede obtener que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$ (verlo!), con lo que probamos efectivamente que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB. O sea

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

■

Definition 7 *Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ definimos las potencias de A como*

$$\begin{aligned} A^0 &= I_n \\ A^n &= A.....A \text{ (n factores).} \end{aligned}$$

Si A es, además, invertible entonces

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}.....A^{-1} \text{ (n factores).}$$

Theorem 8 *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz invertible. Entonces*

1. *A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *A^n es invertible y $(A^n)^{-1} = A^{-n}$.*
3. *Para cualquier $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$, αA es invertible y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.*

Proof. (1) Por la simetría de la definición de matriz inversa, que A^{-1} sea inversa de A quiere decir que cumple

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Si leemos con atención las igualdades anteriores nos dice básicamente que A es una matriz tal que si se la multiplicamos a A^{-1} nos da la I_n. Pero es justamente que A cumple el rol de matriz inversa de A^{-1}. Como la inversa es única no queda otra que $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) Primero $(A^n)^{-1}$ es solo una notación de la matriz inversa de A^n. Lo que debemos comprobar es que A^{-n} es la matriz inversa de A^n. Pero,

$$A^nA^{-n} = (A....A)(A^{-1}....A^{-1}) = A...(AA^{-1})...A^{-1} = A...(I_n)...A^{-1} = ... = AA^{-1} = I_n.$$

(3) Solo hacemos la cuenta...recordemos que en la Proposición 13 de la clase 4 mostramos que un escalar conmutaba con cualquier matriz,

$$(\alpha A).\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right) = \alpha A\frac{1}{\alpha}A^{-1} = A\alpha\frac{1}{\alpha}A^{-1} = A.1.A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Una cuanta análoga muestra que $\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right).(\alpha A) = I_n$. Con lo que claramente $\frac{1}{\alpha}A^{-1}$ es la matriz inversa de αA. ■

Volvemos a los sistemas de ecuaciones...

Theorem 9 *Toda matriz elemental es invertible y la inversa de una elemental también es una matriz elemental.*

Proof. Sea E una matriz elemental de tamaño $n \times n$. Entonces tal matriz, por definición, se obtuvo de aplicar una operación elemental de fila a la matriz identidad I_n,

$$E = e(I_n).$$

Ahora sabemos que para dicha operación elemental existe su operación inversa e^{-1}. Consideremos $E' = e^{-1}(I_n)$, o sea la matriz elemental que se obtiene de aplicar e^{-1} a I_n. Afirmamos entonces que la matriz E' es la matriz inversa de E. Veamos...

$$E.E' = [e(I_n)]\left[e^{-1}(I_n)\right]$$

por el Lema 4 visto en la clase 4 se tenía que aplicar una operación e a una matriz cualquiera era lo mismo que aplicar dicha operación a la identidad y luego premultiplicar por la matriz en cuestión...

$$E.E' = [e(I_n)]\left[e^{-1}(I_n)\right] = e\left[e^{-1}(I_n)\right]$$

y por definición, aplicar una operación y su inversa al mismo tiempo nos queda la misma matriz....

$$E.E' = [e(I_n)]\left[e^{-1}(I_n)\right] = e\left[e^{-1}(I_n)\right] = I_n.$$

Una cuenta análoga muestra que $E'.E = I_n$. Con lo que hemos probado efectivamente que toda matriz elemental es invertible. ■

El siguiente Teorema nos proveerá de un método para calcular la inversa de una matriz invertible.

Theorem 10 *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Los siguientes ítems son equivalentes entre si.*

1. *A es invertible.*
2. *$AX = 0$ tiene únicamente la solución trivial ($X = 0$).*
3. *La MERF de A es $R_A = I_n$.*
4. *A es producto de matrices elementales.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): Supongamos A invertible. Sea X_0 una solución del sistema lineal $AX = 0$. Es decir,

$$AX_0 = 0$$

Premultiplicamos ambos lados de dicha ecuación por A^{-1} obtenemos:

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX_0) &= A^{-1}0 \\ (A^{-1}A)X_0 &= 0 \\ I_nX_0 &= 0 \\ X_0 &= 0 \end{aligned}$$

(es fácil ver que cualquier matriz multiplicada por la matriz nula 0 da la matriz nula 0).

(2) $\Rightarrow$ (3): Supongamos que $AX = 0$ tiene únicamente la solución trivial $X = 0$. Entonces si escribimos este sistema en notación de ecuaciones nos queda que

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots.. + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots.. + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots.. + a_{1n}x_n = 0 \end{cases}$$

Ahora escribimos la matriz ampliada:

$$A|\,0 = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots.. & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots.. & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots.. & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots.. & a_{nn} & 0 \end{array}\right]$$

Entonces aplicamos el método de eliminación de Gauss-Jordan para llegar a la R_A. Pero en vista de que asumimos que solo se tiene la solución trivial $X = 0$, debe pasar que

$$R_A|\,0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots\ldots.. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots.. & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots.. & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots.. & 1 & 0 \end{array}\right]$$

O sea $R_A = I_n$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Supongamos ahora que la MERF de A es $R_A = I_n$. Esto significa que $A \sim_f I_n$. O sea que existe una sucesión de operaciones elementales de filas que llevan de A hasta I_n:

$$A \to e_1(A) \to e_2(e_1(A)) \to \ldots \to e_n(e_{n-1}(\ldots(e_1(A)))) = I_n$$

pero por el Lema 4 de la clase 4 se tenía que $e_k(A) = e_k(I).A = E_k.A$ (ya que $e_k(I_n)$ por definición es una matriz elemental). Luego como

$$e_n(e_{n-1}(\ldots(e_1(A)))) = I_n$$

podemos reescribirla como

$$E_n E_{n-1} ... E_1 A = I_n$$

Pero por el Teorema anterior toda matriz elemental es invertible. Esto es, existe E_k^{-1} tal que $E_k^{-1} E_k = I_n$. Entonces a la igualdad anterior la premultiplicamos por $E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} E_n^{-1}$:

$$\begin{array}{rcl} \left(E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} E_n^{-1}\right)(E_n E_{n-1} ... E_1 A) & = & \left(E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} E_n^{-1}\right) I_n \\ E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1}\left(E_n^{-1} E_n\right) E_{n-1} ... E_1 A & = & E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} \\ E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} (I_n) E_{n-1} ... E_1 A & = & E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} \\ E_1^{-1} ... \left(E_{n-1}^{-1} E_{n-1}\right) ... E_1 A & = & E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} \\ ... & = & ... \\ \left(E_1^{-1} E_1\right) A & = & E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} \\ I_n . A & = & E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} \\ A & = & E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} \end{array}$$

O sea A es un producto de matrices elementales.

(4) $\Rightarrow$ (1): Supongamos ahora que A es producto de matrices elementales. O sea

$$A = E_1 E_2 ... E_n$$

Veamos que A es invertible. Pero por el Teorema anterior toda matriz elemental es invertible. Y por un teorema probado antes, el producto de matrices invertibles es una matriz invertible. Luego A es invertible. ■

Cómo calcular A^{-1} a partir de A?

Notemos que por el Teorema que acabamos de probar tenemos que si $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ es una matriz invertible entonces $A \sim_f I_n$. Luego existen una sucesión de operaciones elementales de filas que transforman A en I_n:

$$A \to e_1(A) \to e_2(e_1(A)) \to ... \to e_n(...(e_2(e_1(A)))...) = I_n \text{ (**)}$$

Si aplicamos las mismas operaciones anteriores a I_n obtenemos una matriz:

$$I_n \to e_1(I_n) \to e_2(e_1(I_n)) \to ... \to e_n(...(e_2(e_1(I_n)))...) = B$$

Si ahora multiplicamos A por B

$$\begin{array}{rcl} BA & = & e_n(...(e_2(e_1(I_n)))...).A \\ (*) & = & E_n ... E_2 E_1 . A \\ & = & e_n(...(e_2(e_1(A)))...) \\ (**) & = & I_n . \end{array}$$

(*) recordar que por definición de matriz elemental $e_k(I_n) = E_k$.

Y como sabemos que A es invertible (así lo supusimos de entrada) entonces por unicidad de A^{-1} no queda otra que $B = A^{-1}$.

Remark 11 *Esto sugiere el siguiente método para hallar A^{-1}: PRIMERO reducir por filas a A hasta llegar a I_n. SEGUNDO apicar las mismas operaciones que se aplicaron a A y en el mismo orden pero a I_n. Entonces llegamos a A^{-1}.*

Gráficamente sería:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix} \to e_1 \to ... \to e_n \to I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix}$$

y luego

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 1 & .... & 0 \\ ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & .... & 1 \end{bmatrix} \to e_1 \to ... \to e_n \to A^{-1}.$$

Example 12 *Sea* $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. *Apliquemos Gauss-Jordan:*

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \to e_1 : f_2+(-2)f_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \to e_2 : f_3+(-1)f_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \to$$

$$\to e_3 : f_3+2f_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to e_4 : (-1)f_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to e_5 : f_2+3f_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to e_6 : f_1+(-3)f_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to e_7 : f_1+(-2)f_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

Ahora comenzamos desde I_3 y aplicamos las mismas operaciones en el mismo orden que le aplicamos a A:

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to e_1 : f_2+(-2)f_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to e_2 : f_3+(-1)f_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to e_3 : f_3+2f_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to e_4 : (-1)f_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to e_5 : f_2+3f_3 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to$$

$$\rightarrow e_6 : f_1{+}(-3)f_3 \rightarrow \begin{bmatrix} -14 & 6 & 3 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow e_7 : f_1{+}(-2)f_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

De hecho:

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

también

$$A^{-1}.A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Theorem 13 *Si $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ es invertible entonces el sistema $AX = b$ tiene solución única $X = A^{-1}b$.*

Proof. Hay que probar dos cosas. Que $X = A^{-1}b$ es una solución y que es la ÚNICA!

Lo primero es obvio ya que

$$A(A^{-1}b) = (A.A^{-1})b = I_n b = b.$$

Para ver la unicidad, supongamos que X_0 es otra solución. Es decir cumple $A.X_0 = b$. Entonces pre-multiplicamos ambos lados de esta igualdad por A^{-1}:

$$\begin{aligned} A.X_0 &= b \\ A^{-1}(A.X_0) &= A^{-1}b \\ (A.A^{-1})X_0 &= A^{-1}b \\ I_n X_0 &= A^{-1}b \\ X_0 &= A^{-1}b \end{aligned}$$

O sea, no hay otra. ■

Una caracterización más...

Theorem 14 *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Son equivalentes:*

1. *A es invertible.*
2. *El sistema $AX = b$ es consistente $\forall b \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ (tiene solución)*
3. *El sistema $AX = b$ tiene una única solución $\forall b \in \mathbb{F}^{n\times 1}$.*

Notation 15 *Al conjunto de todas las matrices invertibles de tamaño $n \times n$ se las denota por $GL(n, \mathbb{F})$. Dicho conjunto se denomina el grupo lineal general.*