Universidad Católica de Córdoba

Análisis Matemático II

Primer Parcial de Regularización - 13/5/2020

Importante: cada problema vale 25 puntos. Para aprobar el parcial se requieren 50 puntos como mínimo.

Problema 1: considere la función

$$f(x,y) = \frac{2y^2x}{3y^4 + 2x^2} \,.$$

(a) En relación con el dominio de f diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), justificando sus respuestas.

1. El dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$ *excepto* los puntos en donde $y^4 = \frac{2}{3}x^2$.
2. El dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$.
3. El dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$ *excepto* el $(0,0)$.

(b) En relación con el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

1. Los límites iterados existen y son iguales a cero, por cuanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
2. Los límites iterados existen y son iguales a cero, el límite a lo largo de las rectas $y = cx$ existe y vale cero, por cuanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe *sólo* a lo largo de las parábolas del tipo $x = ky^2$.

Problema 2: considere la función

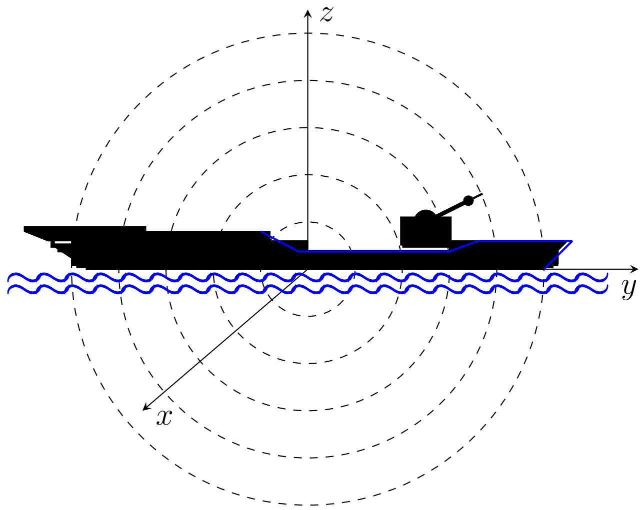
$$f(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{x + y + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1. Calcule las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Encuentre la ecuación del plano tangente a f en el punto $(3, 4, f(3,4))$.

Problema 3: La temperatura $T(x,y,z)$ generada en el motor de un portaaviones está dada por la función

$$T(x,y,z) = \frac{T_0}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}, \quad T_0 > 0$$

en donde (x, y, z) es la posición de un punto medido *desde* el portaaviones, como se indica en la figura.



1. Muestre que las *isotermas* $T = k$ son esferas centradas en $(0,0,0)$ de radio $R = \dfrac{1}{|k|}\sqrt{(T_0+k)(T_0-k)}$. ¿Qué valores pude tomar la constante k?

2. Calcule el gradiente de temperatura ∇T en el punto $(1,1,1)$.

3. Un misil aire-tierra posee un mecanismo de orientación con el gradiente (es decir, se mueve en la dirección del vector unitario $\hat{u} = \dfrac{\nabla T}{|\nabla T|}$. Calcule la derivada direccional $D_{\hat{u}}T$ en el punto $(1,1,1)$.

Problema 4: Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2.$$