DERIVADA DIRECCIONAL

TEOREMA

Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, entonces

$$D_{\hat{u}} f(\vec{x}_0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \bullet \hat{u}$$

MAXIMIZACIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

TEOREMA

Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ -con D_f abierto- es diferenciable, entonces $\forall \vec{x} \in D_f \mid \vec{\nabla} f(\vec{x}) \neq \vec{0}$:

$* \; D_{\hat{u}} f_{máx}(\vec{x}) = \left\| \vec{\nabla} f(\vec{x}) \right\|$

$* \; \vec{\nabla} f(\vec{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f

---

Ejercicio

Dada la función $f(x,y,z) = xye^{yz} + xsen(z)$, y los puntos $\vec{x}_0 = (1,1,0)$ y $\vec{x}_1 = (2,3,1)$:

a) Halle la derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$, en la dirección que va de $\vec{x}_0$ a $\vec{x}_1$.

b) Obtenga la máxima y la mínima razón de cambio de f en $\vec{x}_0$.

Solución

a)

$\vec{u} = (2,3,1) - (1,1,0) = (1,2,1)$; vector en la dirección $\vec{x}_0$ a $\vec{x}_1$

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$$

Como f es diferenciable:

$$D_{\hat{u}} f(\vec{x}_0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \bullet \hat{u}$$

Obtenemos primero el vector gradiente:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$f(x,y,z) = xye^{yz} + xsen(z)$$

Las derivadas parciales de f son funciones continuas

$\Downarrow$

f es diferenciable

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{yz} + sen(z)\,; \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) = 1 + 0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{yz} + xyze^{yz}\,; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = 1 + 0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy^2e^{yz} + xcos(z)\,; \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = 1 + 1 = 2$$

$$\vec{\nabla} f(1,1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0)\right)$$

$$\vec{\nabla} f(1,1,0) = (1,1,2)$$

Luego:

$$D_{\hat{u}} f(1,1,0) = \vec{\nabla} f(1,1,0) \bullet \hat{u}$$

$$= (1,1,2) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$D_{\hat{u}} f(1,1,0) = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

---

b)

$$D_{\hat{u}} f_{máx}(1,1,0) = \|\vec{\nabla} f(1,1,0)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \quad \text{donde } \hat{u} = \frac{\vec{\nabla} f(1,1,0)}{\|\vec{\nabla} f(1,1,0)\|}$$

$$D_{\hat{u}} f_{mín}(1,1,0) = -\|\vec{\nabla} f(1,1,0)\| = -\sqrt{6}, \quad \text{donde } \hat{u} = -\frac{\vec{\nabla} f(1,1,0)}{\|\vec{\nabla} f(1,1,0)\|}$$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean

$$\vec{g}: D_{\vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$y\ si\ \ R_{\vec{g}} \cap D_{\vec{f}} \neq \emptyset$$

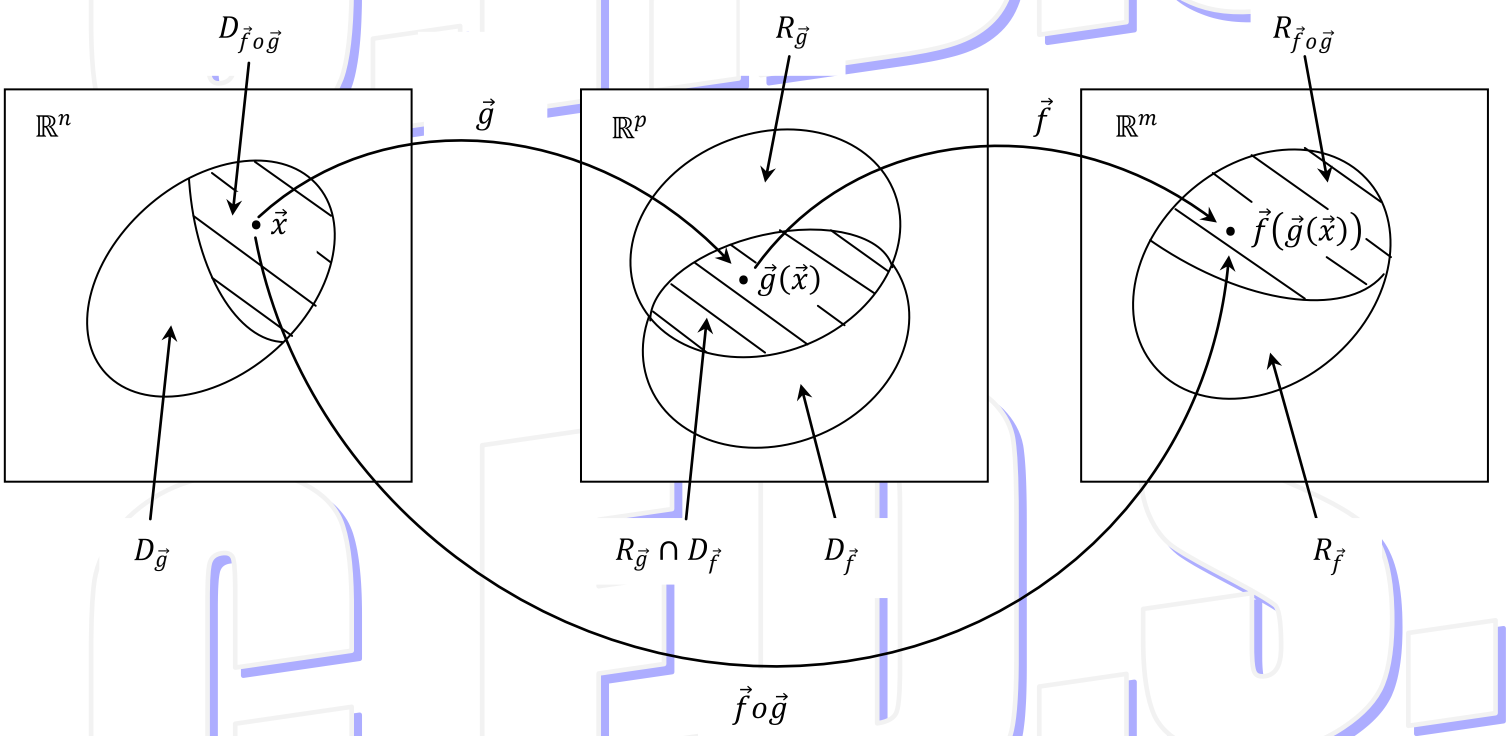
Entonces definimos a $\vec{f} o \vec{g}$: $\vec{f}$ compuesto con $\vec{g}$ como la función:

$$\vec{f} o \vec{g}: D_{\vec{f} o \vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

que se obtiene de aplicar la siguiente regla:

$$(\vec{f} o \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))$$

Es decir, se aplican sucesivamente 2 funciones: primero se aplica la función $\vec{g}$ y luego la función $\vec{f}$ tal como se muestra en el siguiente diagrama.



O sea que como $\vec{g}$ es la función con p funciones coordenadas:

$$\vec{g}(\vec{x}) = \left(g_1(\vec{x}), \dots, g_p(\vec{x})\right) \quad , \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

que dependen de las n-variables $x_1, \dots, x_n$ que llamamos variables últimas, y $\vec{f}$ es la función con m funciones coordenadas:

$$\vec{f}(\vec{u}) = \left(f_1(\vec{u}), \dots, f_m(\vec{u})\right) \quad , \quad \vec{u} = (u_1, \dots, u_p)$$

que dependen de las p-variables $u_1, \dots, u_p$ que llamamos variables intermedias, tenemos que:

<u>1ero</u> cuando se aplica $\vec{g}$ se pasa de $\vec{x}$ a $\vec{u}$, es decir:

$$\vec{u} = \vec{g}(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ u_p = g_p(\vec{x}) \end{cases}$$

<u>Observación:</u>

Para poder componer $\vec{f}$ con $\vec{g}$ se tiene que cumplir que la dimensión del espacio de rango de $\vec{g}$ sea igual a la dimensión del espacio de dominio de $\vec{f}$.

<u>2do</u> se aplica $\vec{f}$:

$$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{f}\left(\vec{g}(\vec{x})\right)$$

para obtener

$$\begin{aligned}(\vec{f} o \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}\left(\vec{g}(\vec{x})\right) &= \left((f_1 o \vec{g})(\vec{x}), \dots, (f_m o \vec{g})(\vec{x})\right) \\ &= \left(\left(\vec{f} o \vec{g}\right)_1(\vec{x}), \dots, \left(\vec{f} o \vec{g}\right)_m(\vec{x})\right)\end{aligned}$$

$$\text{donde } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

TEOREMA: REGLA DE LA CADENA

Si

$$* \ \vec{g}: D_{\vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ es diferenciable en } \vec{x}_0.$$

$$* \ \vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ es diferenciable en } \vec{g}(\vec{x}_0).$$

Entonces $\vec{f} \circ \vec{g}: D_{\vec{f}\circ\vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y

$$\left(\vec{f} \circ \vec{g}\right)'(\vec{x}_0) = \vec{f}'\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right)\, \vec{g}'(\vec{x}_0)$$

O sea que, como

$$\vec{g}(\vec{x}) = \left(g_1(\vec{x}), \cdots, g_p(\vec{x})\right) \quad ; \qquad \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \quad \text{variable vectorial última}$$

$$\vec{f}(\vec{u}) = \left(f_1(\vec{u}), \cdots, f_m(\vec{u})\right) \quad ; \qquad \vec{u} = (u_1, \cdots, u_p) \quad \text{variable vectorial intermedia}$$

y si se llama $\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g}$ de modo que:

$$\vec{h}(\vec{x}) = \left(h_1(\vec{x}), \cdots, h_m(\vec{x})\right); \qquad \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

Entonces

$$\underbrace{\overbrace{\vec{h}'(\vec{x}_0)}^{(\vec{f}\circ\vec{g})'(\vec{x}_0)}}_{\text{Matriz Jacobiana de } \vec{h} = \vec{f}\circ\vec{g} \text{ en } \vec{x}_0} = \underbrace{\vec{f}'\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right)}_{\text{Matriz Jacobiana de } \vec{f} \text{ en } \vec{g}(\vec{x}_0)} \ \underbrace{\vec{g}'(\vec{x}_0)}_{\text{Matriz Jacobiana de } \vec{g} \text{ en } \vec{x}_0}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}}_{matriz \;\; m\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial u_p} \end{pmatrix}_{\vec{g}(\vec{x}_0)}}_{matriz \;\; m\times p} \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}}_{matriz \;\; p\times n}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\nabla} h_1 \\ \vdots \\ \vec{\nabla} h_m \end{pmatrix}_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} f_1 \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m \end{pmatrix}_{\vec{g}(\vec{x}_0)} \begin{pmatrix} \vec{\nabla} g_1 \\ \vdots \\ \vec{\nabla} g_p \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$$

Ejemplos

Obtenga la matriz jacobiana de $\vec{f} o \vec{g}$ en el punto indicado para:

a) $\vec{g}(x,y,z) = (x + y^2, xy^2z)$
$\vec{f}(u,v) = (u^2 + v, uv, e^v)$
$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,1,1)$

b) $\vec{g}(t) = (t + 1, e^t)$
$\vec{f}(u,v) = (u^2 + v^3, e^{uv})$
$t_0 = 0$

---

a) **Solución**

Como las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ y de $\vec{g}$ son continuas $\Rightarrow \vec{f}$ y $\vec{g}$ son funciones diferenciables.

Como

$$\vec{g}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$y \quad \vec{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

se tiene que $\vec{h}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \vec{h} = \vec{f} o \vec{g}$

Con $\vec{g}$ se pasa de $\vec{x}$ a $\vec{u}$, es decir:

$$\vec{u} = \vec{g}(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} u = g_1(x,y,z) = x + y^2 \\ v = g_2(x,y,z) = xy^2z \end{cases}$$

O sea que

$$u_0 = g_1(x_0, y_0, z_0) = x_0 + {y_0}^2 = 0 + 1^2 = 1$$

$$v_0 = g_2(x_0, y_0, z_0) = x_0{y_0}^2z_0 = (0)(1^2)(1) = 0$$

Por lo tanto

$$\vec{u}_0 = (u_0, v_0) = (1,0)$$

Luego por regla de la cadena:

$$\overbrace{\vec h'(\vec x_0)}^{(\vec f o \vec g)'(\vec x_0)} = \vec f'\big(\vec g(\vec x_0)\big)\,\vec g'(\vec x_0)$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y} & \dfrac{\partial h_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y} & \dfrac{\partial h_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h_3}{\partial x} & \dfrac{\partial h_3}{\partial y} & \dfrac{\partial h_3}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec x_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}_{\vec u_0} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec x_0}$$

Recordando que

$$\vec f(u,v) = \big(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)\big) = (u^2+v, uv, e^v)$$

$$\vec g(x,y,z) = \big(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)\big) = (x+y^2, xy^2z)$$

se tiene

$$(\vec f o \vec g)'(0,1,1) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}_{(1,0)} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix}_{(0,1,1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$(\vec f o \vec g)'(0,1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

b) **Solución**

Como las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec f$ y de $\vec g$ son continuas $\Rightarrow \vec f$ y $\vec g$ son funciones diferenciables.

Como

$$\vec g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$y \quad \vec f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

se tiene que $\vec h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec h = \vec f o \vec g$

Con $\vec{g}$ se pasa de t a $\vec{u}$, es decir:

$$\vec{u} = \vec{g}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u = g_1(t) = t + 1 \\ v = g_2(t) = e^t \end{cases}$$

O sea que

$$u_0 = g_1(t_0) = g_1(0) = 0 + 1 = 1$$

$$v_0 = g_2(t_0) = g_2(0) = e^0 = 1$$

Por lo tanto

$$\vec{u}_0 = (u_0, v_0) = (1,1)$$

Luego por regla de la cadena

$$\vec{h}'(t_0) = \vec{f}'(\vec{g}(t_0)) \; \vec{g}'(t_0)$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{\vec{u}_0} \begin{pmatrix} \dfrac{dg_1}{dt} \\ \dfrac{dg_2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0}$$

Recordando que

$$\vec{f}(u,v) = \big(f_1(u,v), f_2(u,v)\big) = (u^2 + v^3, e^{uv})$$

$$\vec{g}(t) = \big(g_1(t), g_2(t)\big) = (t + 1, e^t)$$

se tiene

$$\vec{h}'(0) = \begin{pmatrix} 2u & 3v^2 \\ ve^{uv} & ue^{uv} \end{pmatrix}_{(1,1)} \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}_0$$

$$\vec{h}'(0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ e & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2e \end{pmatrix}$$

		1
		1
2	3	5
e	e	$2e$

PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE

Sea S la superficie en $\mathbb{R}^3$ determinada por el conjunto de todas las ternas ordenadas (x,y,z) que satisfacen la ecuación $F(x,y,z)=0$. El plano tangente a S en el punto $(x_0,y_0,z_0)\in S$ se define por medio de la ecuación:

$$\boxed{\vec{\nabla}F(x_0,y_0,z_0)\bullet(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0} \quad \text{si } \vec{\nabla}F(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{0}$$

Ejercicio:

Obtenga la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto indicado:

(I) Esfera: $x^2+y^2+z^2=16$, $(x_0,y_0,z_0)=(2,3,\sqrt{3})$

(II) Hemisferio: $z=-\sqrt{9-x^2-y^2}$, $(x_0,y_0,z_0)=(2,1,-2)$

(I) Llevando la ecuación de la esfera a la forma implícita:

$$\overbrace{x^2+y^2+z^2-16}^{F(x,y,z)}=0$$

Tenemos que:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-16$$

$$\vec{\nabla}F=\left(F_x,F_y,F_z\right)=(2x,2y,2z)\Rightarrow\vec{\nabla}F(2,3,\sqrt{3})=\left(2(2),2(3),2\sqrt{3}\right)=(4,6,2\sqrt{3})$$

Luego la ecuación del plano tangente se obtiene haciendo:

$$\vec{\nabla}F(x_0,y_0,z_0)\bullet(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

$$\vec{\nabla}F\left(2,3,\sqrt{3}\right)\bullet\left(x-2,y-3,z-\sqrt{3}\right)=0$$

$$\left(4,6,2\sqrt{3}\right)\bullet\left(x-2,y-3,z-\sqrt{3}\right)=0$$

$$4(x-2)+6(y-3)+2\sqrt{3}(z-\sqrt{3})=0$$

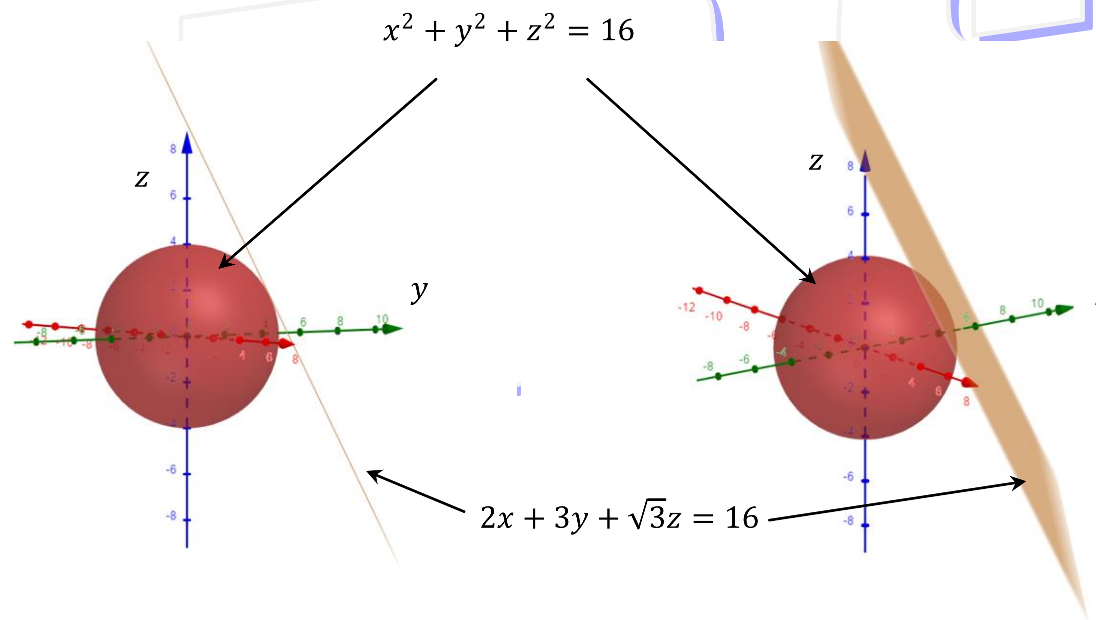
$$4x-8+6y-18+2\sqrt{3}z-2\sqrt{3}\sqrt{3}=0$$

$$4x-8+6y-18+2\sqrt{3}z-6=0$$

$$4x+6y+2\sqrt{3}z=8+18+6$$

$$4x+6y+2\sqrt{3}z=32$$

$$\boxed{2x + 3y + \sqrt{3}z = 16}$$



(II) Podemos escribir:

$$z = f(x,y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Llevando la ecuación del hemisferio a la forma implícita tenemos:

$$\underbrace{\overbrace{-\sqrt{9 - x^2 - y^2}}^{f(x,y)} - z}_{F(x,y,z)} = 0$$

O sea que:

$$F(x,y,z) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2} - z = -(9 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} - z \quad y$$

$$\vec{\nabla} F = (F_x, F_y, F_z) = (f_x, f_y, -1)$$

donde

$$F_x = f_x = -\frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \Rightarrow F_x(2,1,-2) = \frac{2}{\sqrt{9 - 4 - 1}} = 1$$

$$F_y = f_y = -\frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y) = \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \Rightarrow F_y(2,1,-2) = \frac{1}{\sqrt{9 - 4 - 1}} = \frac{1}{2}$$

Luego $\vec{\nabla}F(2,1,-2)=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$ y la ecuación del plano tangente se obtiene haciendo:

$$\vec{\nabla}F(x_0,y_0,z_0)\bullet(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

$$\vec{\nabla}F(2,1,-2)\bullet(x-2,y-1,z-(-2))=0$$

$$\left(1,\frac{1}{2},-1\right)\bullet(x-2,y-1,z+2)=0$$

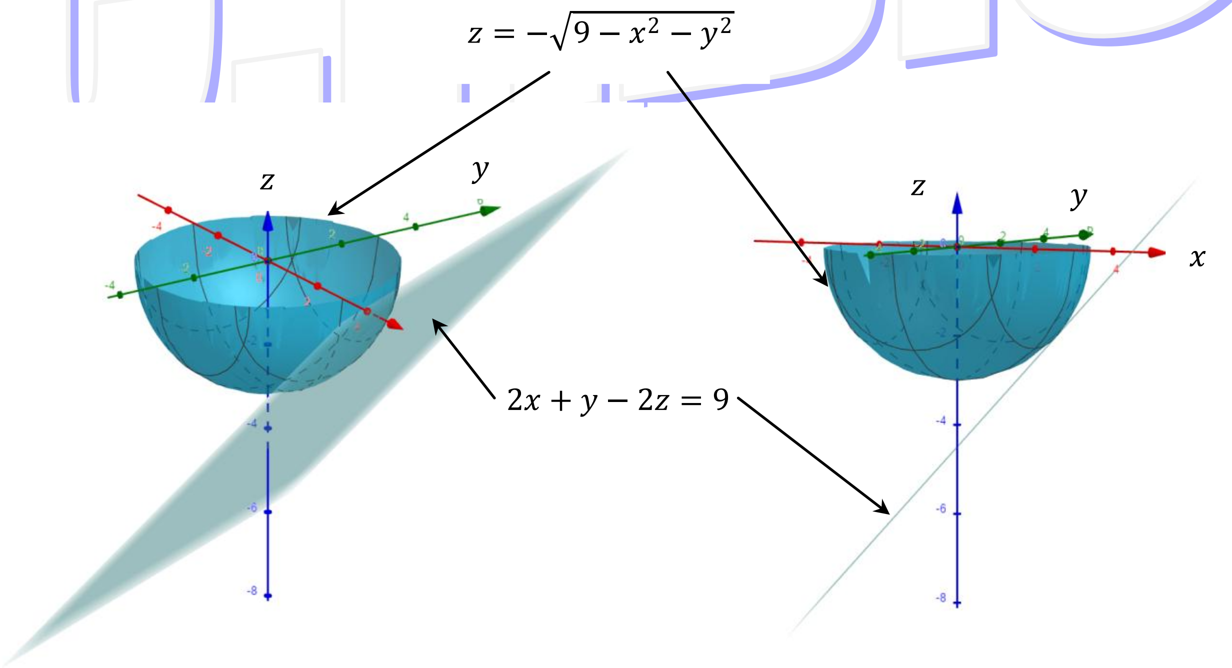
$$x-2+\frac{1}{2}(y-1)-z-2=0$$

$$x-2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}-z-2=0$$

$$x+\frac{1}{2}y-z=2+\frac{1}{2}+2$$

$$x+\frac{1}{2}y-z=\frac{9}{2}$$

$$\boxed{2x+y-2z=9}$$



POLINOMIO DE TAYLOR

Sea

$$* \quad f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{con } f \in C^N[B_r(\vec{x}_0)]$$

$$* \quad \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0)$$

$$* \quad \vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$$

$$* \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Entonces

$$T_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(\vec{\nabla} \bullet \vec{h}\right)^{(k)} f(\vec{x}_0)}{k!}$$

es el **polinomio de Taylor de grado N de f en $\vec{x}_0$** en forma simbólica.

Supongamos que queremos obtener el polinomio de Taylor segundo de grado (N=2) en $\vec{x}_0$ para una función de dos variables: $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Para ello, usamos la fórmula simbólica

$$T_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{\left(\vec{\nabla} \bullet \vec{h}\right)^{(k)} f(\vec{x}_0)}{k!}$$

con

$$\vec{x} = (x, y)$$

$$\vec{x}_0 = (a_1, a_2)$$

$$\vec{h} = (h_1, h_2) = \vec{x} - \vec{x}_0 = (x - a_1, y - a_2)$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

del siguiente modo:

Si $k = 0$, $\quad \dfrac{\left(\vec{\nabla} \bullet \vec{h}\right)^{(0)} f(\vec{x}_0)}{0!} = f(\vec{x}_0)$

Si $k=1$, $\frac{\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{h}\right)^{(1)} f(\vec{x}_0)}{1!}=\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{h}\right) f(\vec{x}_0)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\bullet(h_1,h_2)\right] f(\vec{x}_0)$

$$=\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right] f(\vec{x}_0)=h_1\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$$

Si $k=2$, $\frac{\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{h}\right)^{(2)} f(\vec{x}_0)}{2!}=\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{h}\right)^{(2)} f(\vec{x}_0)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\bullet(h_1,h_2)\right]^{(2)} f(\vec{x}_0)$

$$=\frac{1}{2}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(\vec{x}_0)$$

$$=\frac{1}{2}\left[{h_1}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2h_1h_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+{h_2}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] f(\vec{x}_0)$$

$$=\frac{1}{2}\left[{h_1}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0)+{h_2}^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\right]$$

Y obtenemos:

$T_2=\sum_{k=0}^{2}\frac{\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{h}\right)^{(k)} f(\vec{x}_0)}{k!}=f(\vec{x}_0)+h_1\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)+\frac{1}{2}\left[{h_1}^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0)+{h_2}^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\right]$
$\vec{x}_0=(a_1,a_2)\,,\quad h_1=x-a_1\quad,\quad h_2=y-a_2$

<u>Ejercicio:</u>

Obtenga el polinomio de Taylor de segundo grado de $f(x,y)=ln(x+y)$ en $(1{,}1)$.

Como $\vec{x}_0=(a_1,a_2)=(1{,}1)\ \Rightarrow\ h_1=x-a_1=x-1\quad y\quad h_2=y-a_2=y-1$

$f(x,y)=ln(x+y)\quad\Rightarrow\ f(1{,}1)=ln(2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+y}=(x+y)^{-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x+y}=(x+y)^{-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}1)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-1(x+y)^{-2}=\frac{-1}{(x+y)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1{,}1)=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-1(x+y)^{-2}=\frac{-1}{(x+y)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1{,}1)=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-1}{(x+y)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1{,}1)=-\frac{1}{4}$$

$$T_2 = f(\vec{x}_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\left[h_1{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) + h_2{}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\right]$$

$$T_2 = l\,n(2) + (x-1)\frac{1}{2} + (y-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[(x-1)^2\left(-\frac{1}{4}\right) + 2(x-1)(y-1)\left(-\frac{1}{4}\right) + (y-1)^2\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$\boxed{T_2 = l\,n(2) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)(y-1) - \frac{1}{8}(y-1)^2}$$