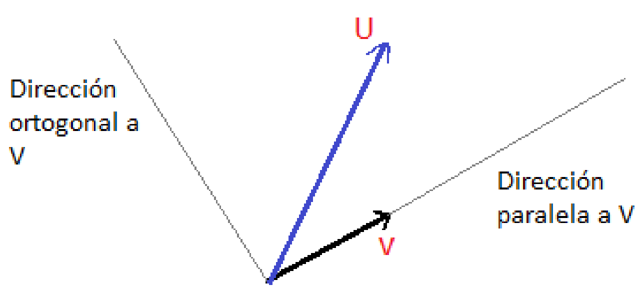
Clase 12

August 2, 2022

Proyecciones Ortogonales

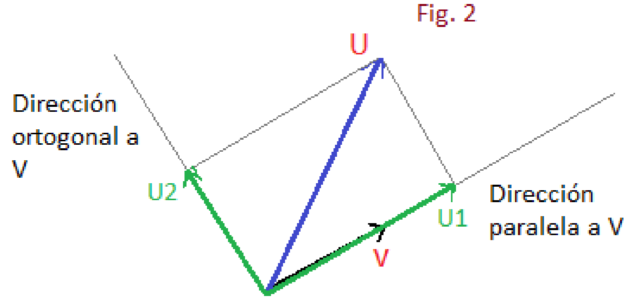
La idea básica será descomponer un vector en una suma de dos vectores, uno paralelo a uno dado y otro ortogonal a ese dado. Veamos por ejemplo la $Fig.1$:

Fig. 1



Tenemos un vector fijo V y otro dado U. Queremos descomponer a U en dos vectores, uno que estará en la dirección de V y otro en dirección ortogonal a V (Ver $Fig.2$).

Fig. 2



Donde $U_1 \| V$ y $U_2 \perp V$ (U_1 paralelo a V y U_2 ortogonal a V).

Definition 1 *Dados los vectores U, V, U_1, U_2 como en la Fig.2. Diremos que U_1 es la proyección ortogonal de U sobre V. La denotaremos por*

$$U_1 = proy_v \ U.$$

En el mismo dibujo se observa que

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ U &= proy_v U + U_2 \end{aligned}$$

de donde podemos despejar:

$$U_2 = U - proy_v U.$$

Pero cómo calcular la proyección ortogonal?

Sabemos que el vector $proy_v U$ es un vector paralelo a V. Luego por definición existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$proy_v U = k.V \ (1).$$

Además sabemos que la otra componente, U_2, es ortogonal a V. O sea $U_2.V = 0$ (Teorema 7 de la clase 10). Esto dice que

$$(U - proy_v U).V = 0 \ (2).$$

Entonces como tenemos

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ U &= proy_v U + (U - proy_v U) \end{aligned}$$

aplicamos el producto interno por V a ambos lados de esta última igualdad y usando (1) y (2):

$$\begin{aligned} U.V &= [proy_v U + (U - proy_v U)] .V \\ U.V &= (proy_v U) .V + (U - proy_v U) .V \\ U.V &= kV.V + 0 \\ U.V &= k \|V\|^2 \end{aligned}$$

de donde se desprende que (si $V \neq 0$)

$$k = \frac{U.V}{\|V\|^2}.$$

entonces ahora reemplazamos en (1) se tiene que

$$proy_v U = \left(\frac{U.V}{\|V\|^2} \right) V.$$

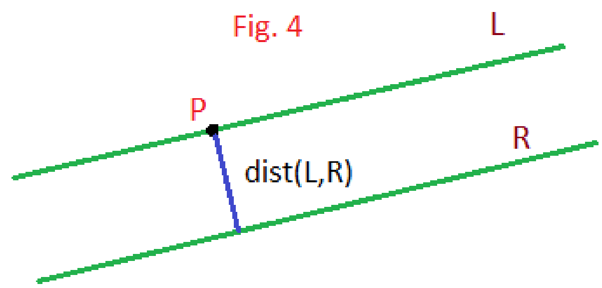
Distancia entre dos rectas y entre dos planos

Ya sabemos calcular la distancia entre un punto cualquiera P y una recta L o entre dicho punto y un plano π. Esto es siempre que $P \notin L$ o $P \notin \pi$.

La distancia entre dos objetos en general (digamos entre dos rectas, recta y plano o dos planos) se define como la menor de las distancias entre sus puntos. Y, en la geometría euclideana, una distancia entre dos puntos se da calculando la longitud del segmento dirigido que se forma entre ellos. Pues para calcular la distancia se recorre el "camino más corto" que es la línea recta.

Ahora bien si tenemos dados dos rectas, digamos L y R (**paralelas entre si**) podemos simplemente elegir un punto cualquiera de L y calcular la distancia a R como ya sabemos ($Fig.4$)

Fig. 4



Entonces $dist(L, R) = dist(P, R)$ con $P \in L$.

Un razonamiento análogo podemos hacer para calcular la distancia entre una recta L y un plano π (paralelos entre si): Se elije un punto cualquiera de L, digamos $Q \in L$, y entonces $dist(L, \pi) = dist(Q, \pi)$.

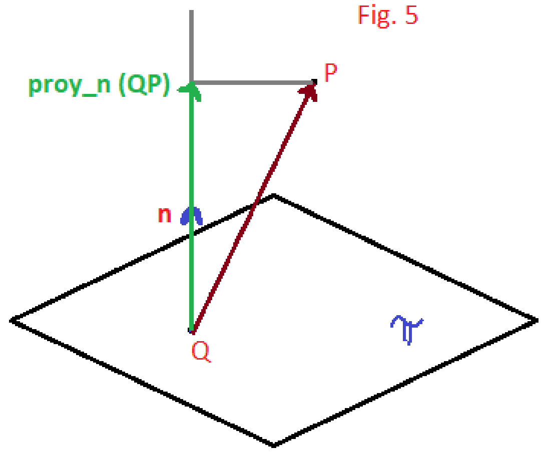
También si queremos calcular la distancia entre dos planos, π_1 y π_2 (paralelos entre si): Se elije un punto $Q \in \pi_1$ y entonces $dist(\pi_1, \pi_2) = dist(Q, \pi_2)$ como sabemos calcular.

También para calcular una distancia entre un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y un plano π (de $\mathbb{R}^3$) tal que $P \notin \pi$ podemos usar la proyección ortogonal como en el siguiente...

Theorem 2 *Dados un plano π en $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación cartesiana: $ax + by + cz + d = 0$ y un punto $P = (x_0, y_0, z_0) \notin \pi$, su distancia $D = dist(P, \pi)$ está dada por*

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Proof. Tomamos un punto cualquiera en el plano π, digamos $Q = (x_1, y_1, z_1) \in \pi$. Consideramos el vector normal a π dado por $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (ya que tenemos el plano dado por ecuación cartesiana). Vemos en la $Fig.5$,



que la distancia $D = dist(P, \pi)$ es en realidad la longitud de la proyección ortogonal de PQ sobre $\mathbf{n}$. O sea

$$(1)\ D = \|proy_{\mathbf{n}}\ PQ\|\,.$$

Pero por lo que vimos antes:

$$proy_{\mathbf{n}}\ PQ = \frac{PQ.\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\ \mathbf{n} =$$

entonces como $PQ = (x_0 - x_1\ , y_0 - y_1\ , z_0 - z_1)$ y $\mathbf{n} = (a, b, c)$ tenemos que

$$PQ.\mathbf{n} = (x_0 - x_1\ )a + (y_0 - y_1)b + (z_0 - z_1)c$$

y

$$\|n\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Con lo que

$$proy_{\mathbf{n}}\ PQ = \frac{(x_0 - x_1\ )a + (y_0 - y_1)b + (z_0 - z_1)c}{a^2 + b^2 + c^2}\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

Y así, tomando norma:

$$
\begin{aligned}
\|proy_{\mathbf{n}}\ PQ\| &= \left\| \frac{(x_0 - x_1\ )a + (y_0 - y_1)b + (z_0 - z_1)c}{a^2 + b^2 + c^2}\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \right\| \\
&= \left| \frac{(x_0 - x_1\ )a + (y_0 - y_1)b + (z_0 - z_1)c}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\| \\
&= \frac{|(x_0 - x_1\ )a + (y_0 - y_1)b + (z_0 - z_1)c|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\
&= \frac{|(x_0 - x_1\ )a + (y_0 - y_1)b + (z_0 - z_1)c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
&= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
(*) &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
\end{aligned}
$$

(*) es simplemente porque como $Q = (x_1, y_1, z_1) \in \pi$ entonces satisface su ecuación:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

luego despejamos:

$$d = -(ax_1 + by_1 + cz_1).$$

Finalmente reemplazando en lo obtenido en (1) tenemos entonces que

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

■

Example 3 *Calcular la distancias entre los planos π_1 y π_2 dados por sus ecuaciones cartesianas:*

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &: \quad x + 2y - 2z = 3 \\
\pi_2 &: \quad 2x + 4y - 4z = 7
\end{aligned}
$$

Solution 4 *Primero observamos que ambos planos son paralelos ya que sus vectores normales lo son:*

$$
\begin{aligned}
n_1 &= (1, 2, -2) \\
n_2 &= (2, 4, -4)
\end{aligned}
$$

entonces se cumple que $n_2 = 2\ n_1$. Ahora para calcular la distancia entre ambos planos elegimos un punto de π_1 , por ejemplo $P = (3, 0, 0) \in \pi_1$ y calculamos la distancia $D = dist(P, \pi_2)$. Dicha distancia está dada, usando el

Teorema anterior, por

$$\begin{aligned} D &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ &= \frac{|2.3 + 4.0 + (-4).0 + (-7)|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Remark 5 *Otra forma era elegir un punto de uno de los planos y calcular la distancia de dicho punto al otro plano como lo hacíamos antes (sin usar proyecciones).*