Clase 9

June 4, 2022

Planos en R^3

Definition 1 *Dado vectores $v_1, ..., v_n$ (en el plano o en el espacio) y sea v otro vector (del plano o del espacio). Se dice que v es combinación lineal de los vectores v_i, $i : 1...n$ si existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \\ &= \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n. \end{aligned}$$

Dados tres puntos no alineados, P, Q, R podemos describir un plano dentro del espacio $\mathbb{R}^3$ de la siguiente manera. Consideramos los vectores directores $Q - P$ y $R - P$. Estos tendrán distintas direcciones debido a que los puntos dados no están alineados entre si (Ver $Fig.1$). Y luego un punto X estará en el plano π si el vector $X - P$ es combinación lineal de los vectores $Q - P$ y $R - P$, es decir si existen $t, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$(1) \quad X - P = t(Q - P) + s(R - P)$$

Llamando $\mathbf{u} = Q - P$ y $\mathbf{v} = R - P$ son los vectores directores del plano. Y la ecuación (1) se puede reescribir como

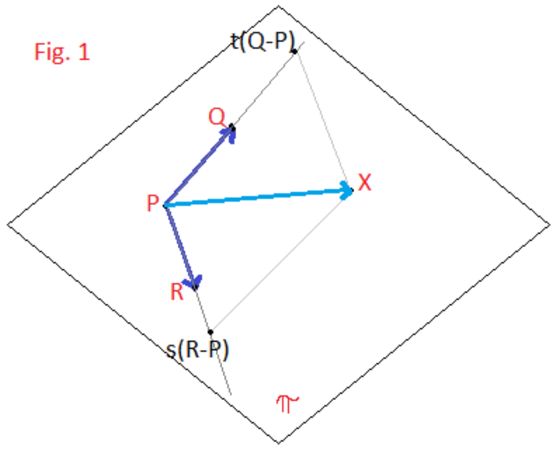
$$X = P + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$$

y se denomina la *ecuación vectorial* del plano π.

También podemos escribir dicha ecuación componente a componente. Si $X = (x, y, z)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ entonces

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases}$$

que serán las *ecuaciones paramétricas escalares* del plano π.



Definition 2 *Dos planos se dicen paralelos entre si los vectores directores de cada uno son combinación lineal de lo vectores directores del otro.*

Example 3 *Los planos π_1 y π_2 dados por las siguientes ecuaciones son paralelos entre si?*

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1: \ X = (-2,3,1) + t(2,3,1) + s(3,-1,0) \\ \pi_2: \ X = (2,0,-1) + a(5,2,1) + b(0,-1,0) \end{array} \right.$$

Los vectores directores de π_1 son $u = (2,3,1)$ y $v = (3,-1,0)$. Y los vectores directores de π_2 son $f = (5,2,1)$ y $g = (0,-1,0)$. Veamos entonces si el vector u es combinación lineal de los vectores f y g. Esto lleva a plantear si existen escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} u &= \alpha f + \beta g \\ (1)\ (2,3,1) &= \alpha(5,2,1) + \beta(0,-1,0). \end{aligned}$$

De forma análoga si el vector v es combinación lineal de los vectores f y g. O sea si existen escalares $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} v &= \lambda f + \omega g \\ (2)\ (3,-1,0) &= \lambda(5,2,1) + \omega(0,-1,0) \end{aligned}$$

(1) y (2) llevan a plantear los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} 5\alpha = 2 \\ 2\alpha - \beta = 3 \\ \alpha = 1 \end{array} \right.$$

$$(2)\begin{cases} 5\lambda = 3 \\ 2\lambda - \omega = -1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

los cuales son claramente incompatibles! (con que uno de ellos lo sea será suficiente para decir que los planos π_1 y π_2 NO son paralelos).

Si a las ecuaciones paramétricas escalares le intentamos quitar los parámetros t, s podemos obtener un sistema lineal como sigue: Consideramos dichos parámetros, t, s, como incógnitas e intentamos resolver el sistema lineal resultante,

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = p_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tu_1 + sv_1 = x - p_1 \\ tu_2 + sv_2 = y - p_2 \\ tu_3 + sv_3 = z - p_3 \end{cases}$$

Al resolver este sistema (con más ecuaciones que incógnitas) se obtiene una condición de compatibilidad de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Dicha ecuación es la *ecuación cartesiana del plano* π.

Example 4 *Supongamos tener un plano* π *dado por las siguientes ecuaciones paramétricas escalares*

$$\begin{cases} x = -1 + t + 2s \\ y = 2 - 4t - 2s \\ z = 3 - 2t - 2s \end{cases}$$

Escribimos un sistema lineal donde consideramos a t, s como incógnitas:

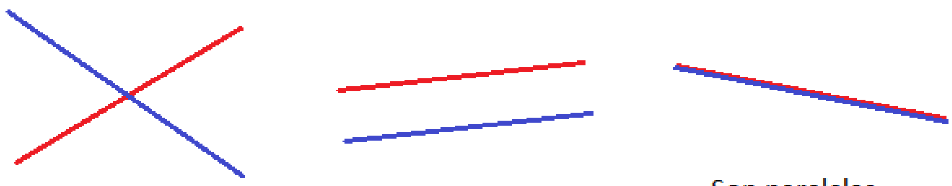
$$\begin{cases} t + 2s = x + 1 \\ -4t - 2s = y - 2 \\ -2t - 2s = z - 3 \end{cases}$$

escribimos la matriz ampliada y aplicamos Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x+1 \\ -4 & -2 & y-2 \\ -2 & -2 & z-3 \end{array}\right] \to f_2{+}4f_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x+1 \\ 0 & 6 & 4x+y+2 \\ -2 & -2 & z-3 \end{array}\right] \to f_3{+}2f_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x+1 \\ 0 & 6 & 4x+y+2 \\ 0 & 2 & 2x+z-1 \end{array}\right]$$

$$\to \left(\frac{1}{6}\right) f_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x+1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 2x+z-1 \end{array}\right] \to f_3{+}(-2)f_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x+1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y + z - \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Fig. 2



Entonces para que el sistema sea compatible debe pasar que

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y + z - \frac{2}{3} = 0$$

que es la ecuación cartesiana del plano dado.

Intersección y paralelismo de rectas

En el caso de estudiar la posición relativa de dos rectas en $\mathbb{R}^2$ pueden pasar tres casos (Ver $Fig.2$). Esto se debe a que al resolver un sistema de ecuaciones las posibilidades sean: solución única, infinitas soluciones o no hay solución!

Cómo saber la posición relativas entre dos rectas del plano? Veamos ejemplos:

Example 5 *Dadas las siguientes rectas en* $\mathbb{R}^2$ *se pide ver su posición relativa.*

$$r_1: \ (x,y) = (1,1) + t(1,-1)$$
$$r_2: \ x + 3y - 2 = 0$$

Solución 1: Notemos que la recta r_1 está dada por su ecuación vectorial y la recta r_2 está dada por su ecuación cartesiana implícita. Queremos encontrar los puntos de intersección entre ambas. O sea los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que satisfagan ambas ecuaciones!

Para eso debemos trabajar con la misma forma de ecuación. Podemos por ejemplo pasar la vectorial a la forma cartesiana para r_1:

$$x = 1 + t$$
$$y = 1 - t$$

despejamos el t e igualamos:

$$x - 1 = 1 - y$$

o, lo que es lo mismo

$$x + y = 2$$

entonces tenemos la cartesiana implícita para $r_1 : x + y = 2$.

También para $r_2 :\ x + 3y = 2$. Entonces para ver la intersección de ambas rectas debemos estudiar calcular los puntos (x, y) que estén en ambas rectas. O sea aquellos (x, y) que satisfagan el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

Esto conlleva a la matriz ampliada y luego aplicar Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \to f_2 + (-1)f_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left(\frac{1}{2}\right) f_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to f_1 + (-1)f_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Entonces el sistema tiene solución única $(x, y) = (2, 0)$. Esto significa que las rectas r_1 y r_2 se cortan en un único punto y es en $(2, 0)$.

Solución 2: Otra forma es trabajar con las ecuaciones vectoriales. Para eso tenemos que encontrar una ecuación vectorial para r_2. Elegimos dos puntos que estén sobre dicha recta:

$$x + 3y - 2 = 0$$

por ejemplo $P = (-1, 1)$ y $Q = (2, 0)$. Construimos el vector director $Q - P = (3, -1)$. Entonces una ecuación

vectorial para r_2 es

$$(x, y) = (-1, 1) + s(3, -1)$$

Ahora tenemos ambas ecuaciones en su forma vectorial:

$$\begin{array}{r} r_1 :\ (x, y) = (1, 1) + t(1, -1) \\ r_2 :\ (x, y) = (-1, 1) + s(3, -1) \end{array}$$

entonces buscamos los puntos que estén en la intersección de ambas. Es decir los (x, y) que satisfagan

simultáneamente ambas ecuaciones. Esto quiere decir que

$$\begin{array}{rcl} (x, y) & = & (x, y) \\ (1, 1) + t(1, -1) & = & (-1, 1) + s(3, -1) \\ (1 + t,\ 1 - t) & = & (-1 + 3s,\ 1 - s) \end{array}$$

lo cual significa que

$$\begin{array}{rcl} 1 + t & = & -1 + 3s \\ 1 - t & = & 1 - s \end{array}$$

es decir, debemos resolver el siguiente sistema lineal donde las incógnitas son los parámetros t, s:

$$\begin{cases} t - 3s = -2 \\ -t + s = 0 \end{cases}$$

y de nuevo pasamos a la matriz ampliada y aplicamos Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow f_2{+}(1)f_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) f_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow f_1 + 3f_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Es decir obtuvimos la solución $t = 1$ y $s = 1$. Reemplazamos estos parámetros en ambas ecuaciones (o el parámetro correspondiente en una de ellas) y obtenemos el (x, y) buscado:

$$\text{En } r_1 : \ (x, y) = (1, 1) + \mathbf{1}(1, -1) = (2, 0)$$

$$\text{En } r_2 : \ (x, y) = (-1, 1) + \mathbf{1}(3, -1) = (2, 0)$$

O sea ambas rectas se intersecan en $(2, 0)$ como habíamos calculado antes!

Remark 6 *En la práctica veremos varios ejemplos donde se darán las distintas situaciones de la $Fig.2$.*

En caso de estudiar la intersección de rectas en $\mathbb{R}^3$ pueden pasar situaciones parecidas a $\mathbb{R}^2$ con la diferencia que en este caso se puede dar una situación de no intersección, no coincidencia y no paralelismo. Es el caso de rectas alabealas! (Ver $Fig.3$)

Como antes, hay que estudiar el sistema lineal correspondiente para ver la posición relativas de las rectas. Veamos el siguiente ejemplo:

Example 7 *Sean L y R las rectas en $\mathbb{R}^3$ dadas por sus ecuaciones cartesianas*

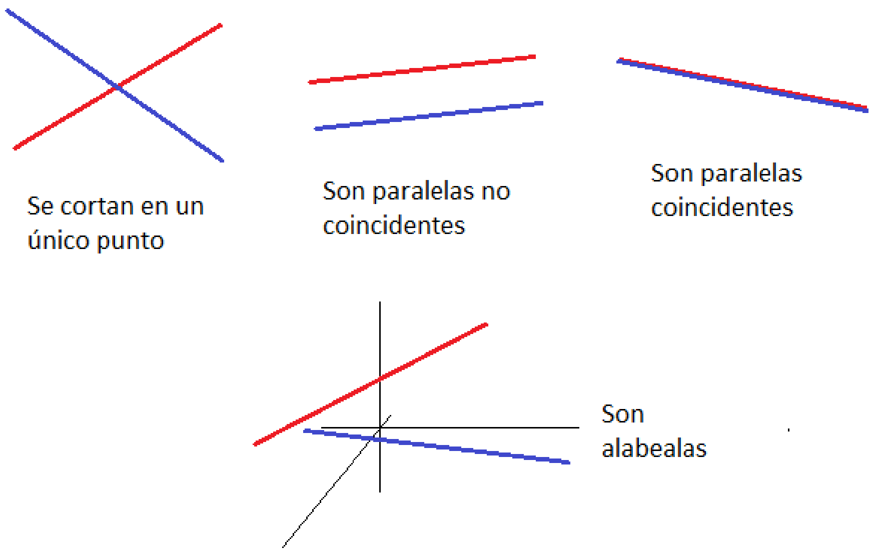
$$L \ : \ \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$R \ : \ \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Buscamos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfagan las ecuaciones de L y de R simultáneamente! Es decir que satisfaga el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Fig. 3



Entonces pasamos a la matriz ampliada y resolvemos aplicando Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to f_3+(-1)f_1 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to f_3+(-1)f_2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to f_4+(-1)f_2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

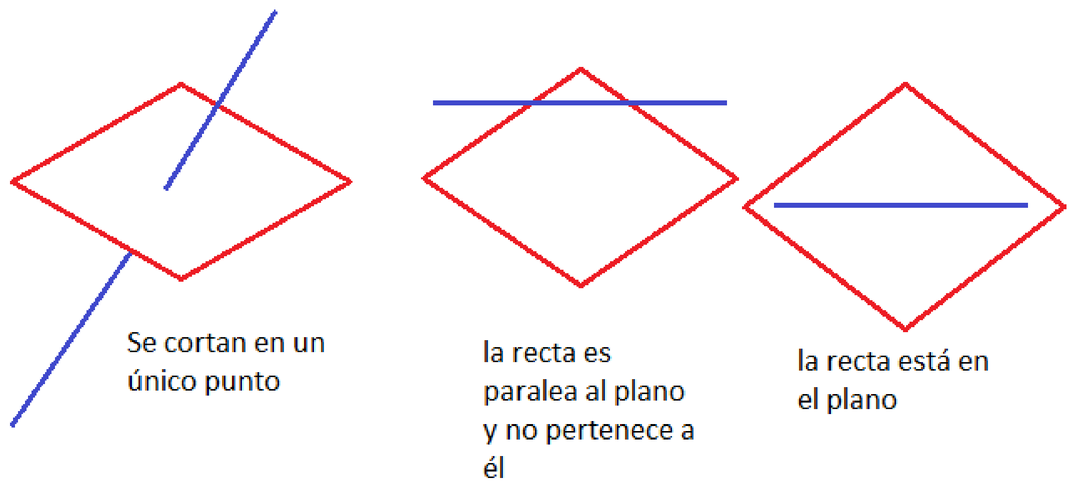
ya podemos ver que si seguimos con el algoritmo de Gauss-Jordan no cambiará la última fila que indica una incompatibilidad (Rouché-Frobenius). Entonces hay dos posibilidades: o son paralelas no coincidentes o son alabealas. Para detrminar esto hay que ver la posición relativa de sus vectores directores!

Encontremos vectores directores de cada una. Para eso basta tomar dos puntos de ellas y hacer la diferencia!

$$L \quad : \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$R \quad : \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Fig. 4



Para la recta L tomemos $P = (1, 0, 0)$ y $Q = (0, -1, 1)$. Entonces su vector director será $v_L = Q - P = (-1, -1, 1)$.

Para la recta R tomemos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (0, 1, 0)$. Entonces su vector director será $v_R = B - A = (-1, 1, -1)$.

Nos preguntamos si los vectores v_L y v_R son paralelos. Esto es, si existe un escalar k tal que

$$v_R = k.v_L$$

O sea

$$\begin{aligned} (-1, 1, -1) &= k.(-1, -1, 1) \\ (-1, 1, -1) &= (-k, -k, k) \end{aligned}$$

pero esto implica que $k = 1$ y $k = -1$ lo cual es absurdo. O sea que no existe tal k con lo que los vectores directores NO son paralelos. Luego las rectas L y R no son paralelas. Queda la única posibilidad que sean *alabealas.*

Por último estudiemos la intersección entre una recta en $\mathbb{R}^3$ y un plano (claramente en $\mathbb{R}^3$). Se pueden dar varios casos (Ver $Fig.4$)

Example 8 *Tomemos la recta L y el plano π dados por las siguientes ecuaciones.*

$$\begin{aligned} L &: \quad (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-1, 0, 1) \\ \pi &: \quad 2x - z = 1 \end{aligned}$$

Debemos ver la intersección de ambos. Es decir los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que satisfagan ambas ecuaciones, la de L y la de π. Hay varios caminos posibles: 1) Pasar la vectorial de L a la cartesiana (general) y resolver el sistema lineal adecuado. 2) Pasar a la vectorial del plano y resolver el sistema lineal para los parámetros. Luego encontrar los x, y, z correspondientes.

3) simplemente agarramos la ecuación vectorial de la recta y la reemplazamos, componete a componente, en la cartesiana del plano:

$$L : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Luego L en π y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 2x - z &= 1 \\ 2(1-t) - (2+t) &= 1 \\ -3t &= 1 \\ t &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

reemplazando este t en la ecuación vectorial de L obtenemos

$$(x, y, z) = (1, 0, 2) + \left(-\frac{1}{3}\right)(-1, 0, 1) = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$$

O sea la recta L y el plano π se cortan en el único punto $\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{5}{3}\right)$.

De paso podemos verificar que ese punto está en el plano π reemplazando x y z en su ecuación $2x - z = 1$ y comprobando que la satisface:

$$2\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} = 1.$$