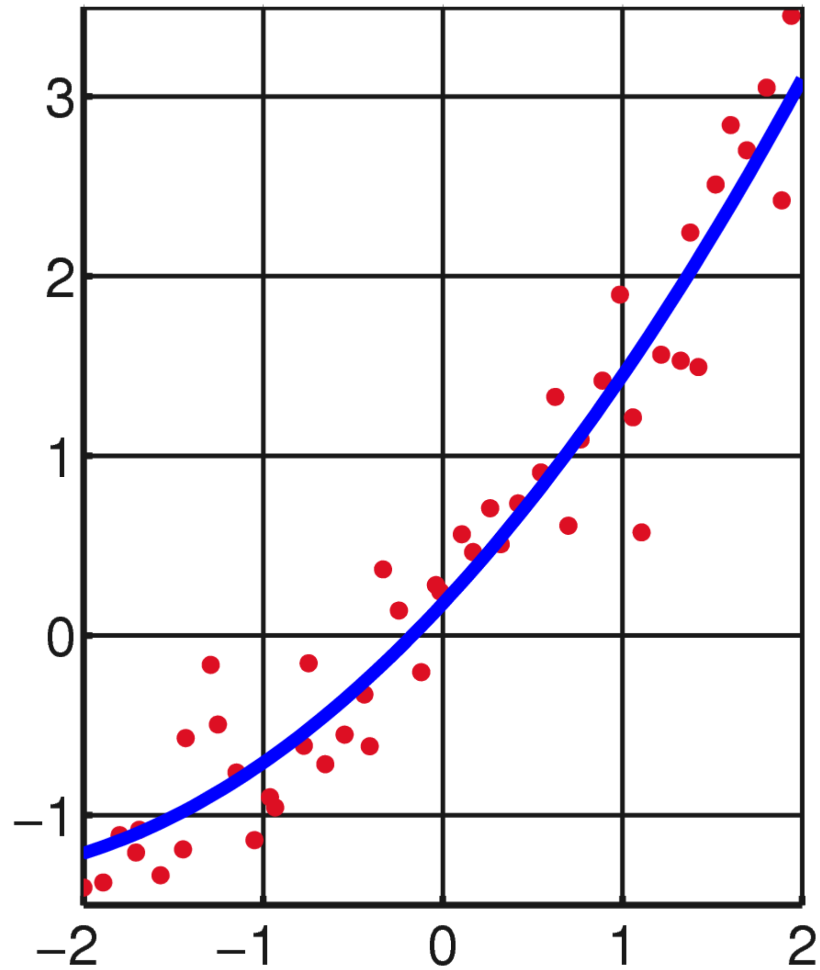
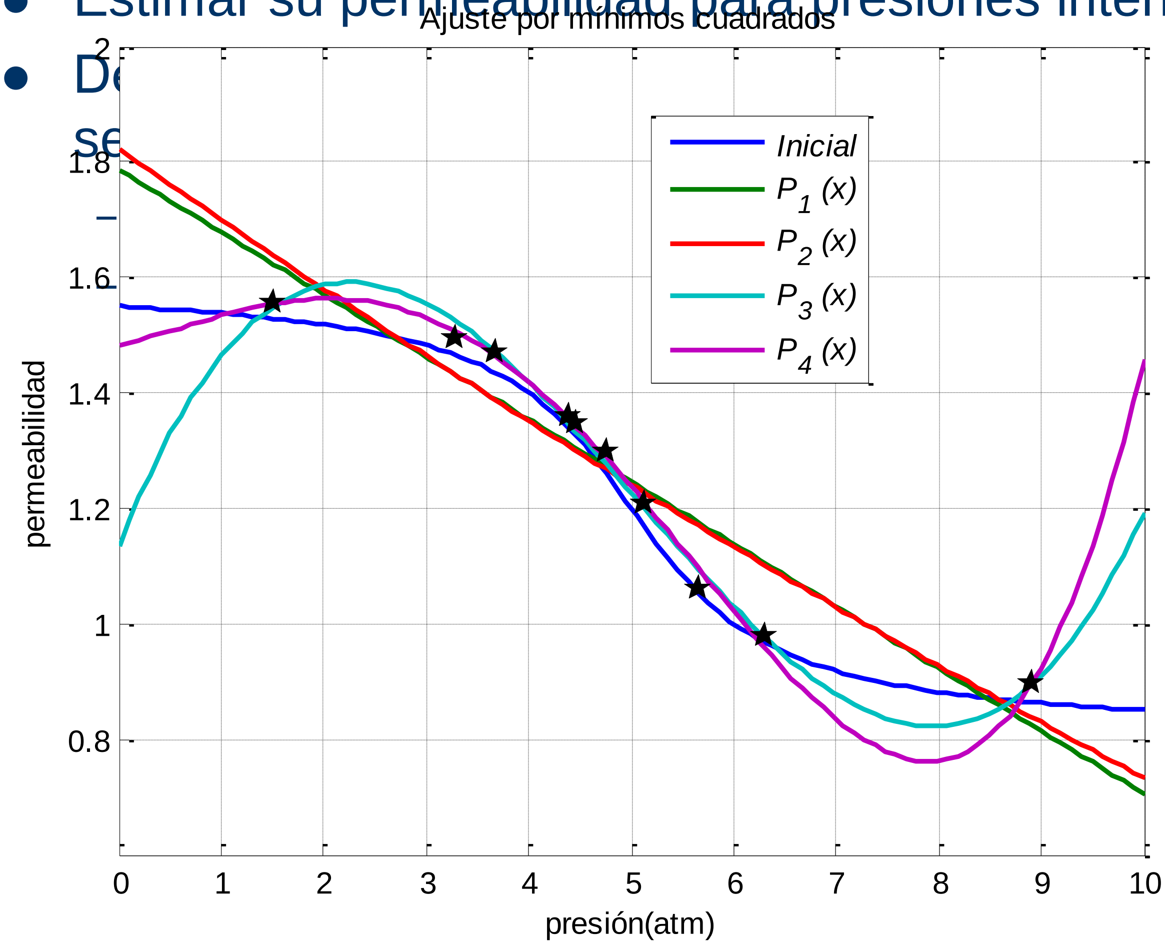
Teoría de Aproximación



Descripción
Objetivos
Temario
Bibliografía

Ejemplo

- Ensayos en laboratorio que miden, con un cierto error, la permeabilidad de un material para diferentes presiones
- Estimar su permeabilidad para presiones intermedias
- De
  se



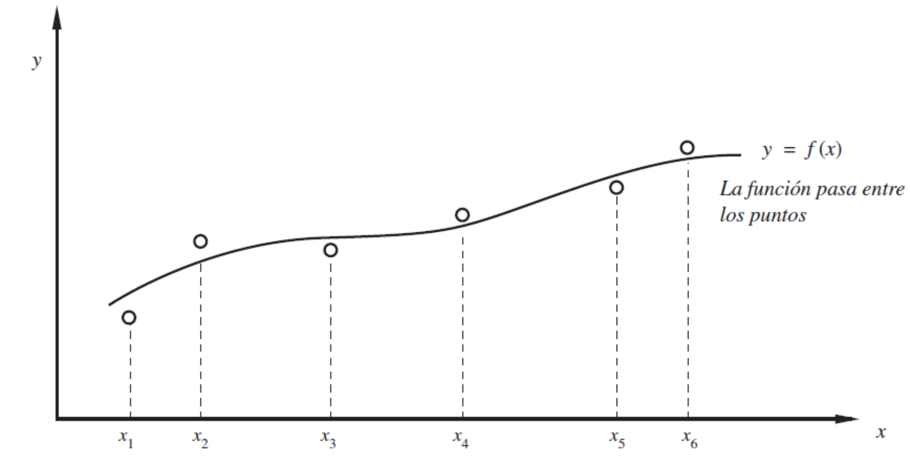
Aproximación

Descripción
Objetivos
Temario
Bibliografía

- Aprender los diferentes tipos de aproximación dependiendo de la “medida” y su interpretación geométrica
- Entender la similitud entre el planteamiento de la minimización del error continua y discreta
- Comprender la generación de la aproximación por mínimos cuadrados y los cambios de variable para linealizar el problema

Aproximación por mínimos cuadrados discretos

Supongamos calcular valores en puntos intermedios no tabulados



Descripción

Objetivos

Temario

Introducción

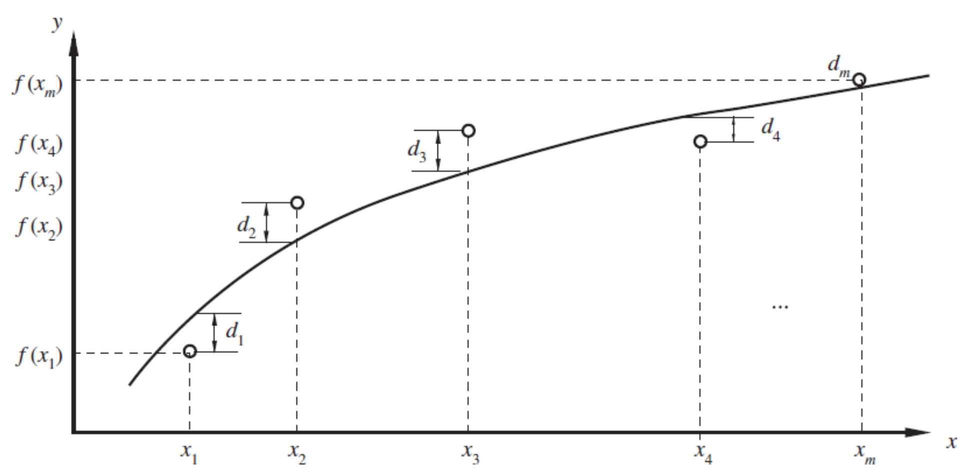
- Distancias

- Mínimos cuadrados

Aprox. Uniforme

Bibliografía

Pero es poco probable una función que pase por todos esos puntos



Aproximación por mínimos cuadrados discretos

El procedimiento consiste en encontrar un polinomio $P(x)$ de grado adecuado que aproxime a los puntos dados con el menor error posible

Para ello realizamos las derivadas respecto a las incógnitas del polinomio y despejamos las mismas con un determinado criterio que maximice o minimice la función buscada

Descripción
Objetivos
Temario
Introducción
- Distancias
- Mínimos cuadrados
Aprox. Uniforme
Bibliografía

Minimax

$$\max_{1\leq i\leq n}\{|f(x_i)-P(x_i)|\} = minimo$$

Desviación absoluta

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-P(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} d_i = mínimo$$

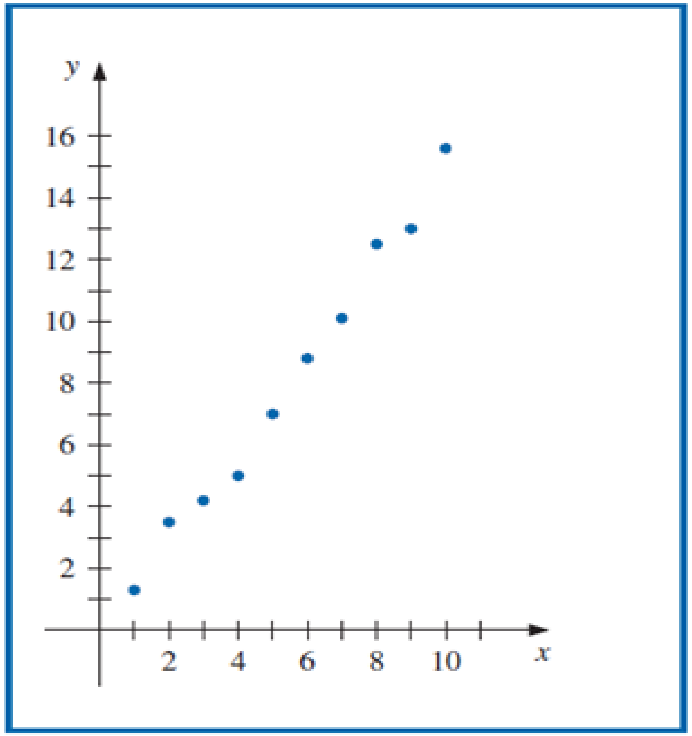
Desviación cuadrática

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-P(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = mínimo$$

Aproximación por mínimos cuadrados discretos

Supongamos calcular valores en puntos intermedios no tabulados

x_i	y_i	x_i	y_i
1	1.3	6	8.8
2	3.5	7	10.1
3	4.2	8	12.5
4	5.0	9	13.0
5	7.0	10	15.6



Aparentemente la relación entre x e y es una línea recta…

Pero es poco probable una función que pase por todos esos puntos

Aproximación por mínimos cuadrados discretos

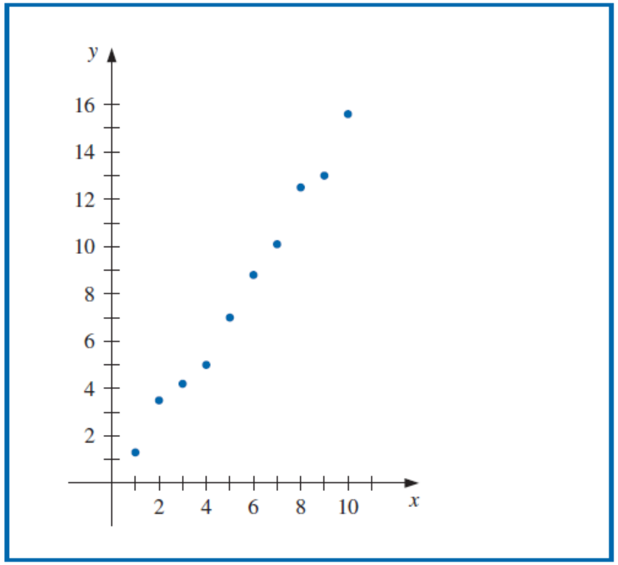
Supongamos calcular valores en puntos intermedios no tabulados

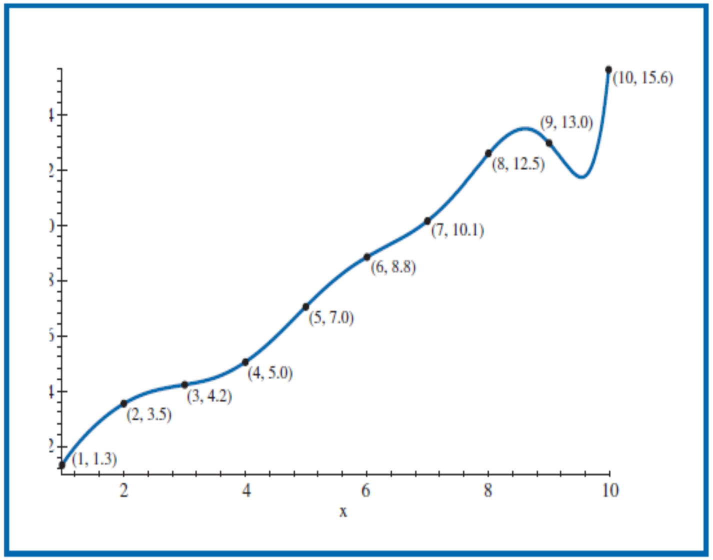
Descripción

Objetivos

Temario
Introducción
- *Distancias*
- Mínimos cuadrados
Aprox. Uniforme

Bibliografía





Aparentemente la relación entre x e y es una linea recta…

Pero es poco probable una función que pase por todos esos puntos sin introducir errores significativos

Sea la ecuacion $\boldsymbol{a_1 x_i + a_0}$ que representa el *i-esimo* valor en la recta de aproximacion e y_i es el *i-esimo* valor dado de y

¿Cuál es la mejor recta que aproxima a esos puntos?

Aproximación por mínimos cuadrados discretos

Minimax: Consiste en hacer que la máxima distancia entre un punto y la recta de aproximación sea mínima:

$$\max_{1\leq i\leq n}\{|y_i - (a_1 x_i + a_0|\}$$

Desviación absoluta

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - (a_1 x_{\ i} - a_0)| = \sum_{i=1}^{n} d_i = \ mínimo$$

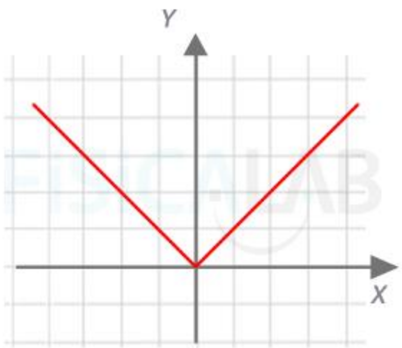
$$o$$

Para minimizar esta expresión debemos igualar sus derivadas a cero y resolver las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial a_0}\sum_{i=1}^{n} |y_i - (a_1 x_i - a_0)| = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\sum_{i=1}^{n} |y_i - (a_1 x_i - a_0)| = 0$$

El problema que la función valor absoluto no es diferenciable en cero



Función $y = |x|$

Aproximación por mínimos cuadrados discretos

Minimos Cuadrados Consiste en hacer que la sumatoria de las distancias al cuadrado entre un punto y la recta de aproximación sea mínima:

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_1 x_i - a_0)]^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \ mínimo$$

Para minimizar esta expresión debemos igualar sus derivadas a cero y resolver las ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_1 x_i - a_0)]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_1 x_i - a_0)]^2 = 0$$

Aproximación por mínimos cuadrados discretos

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^{m} [(y_i - (a_1 x_i - a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_1 x_i - a_0)(-1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^{m} [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i).$$

Esto se simplifica en las ecuaciones sigientes

$$a_0 \cdot m + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \quad \text{y} \quad a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i .$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \sum_{i=1}^{m} x_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2} \qquad a_1 = \frac{m \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}.$$

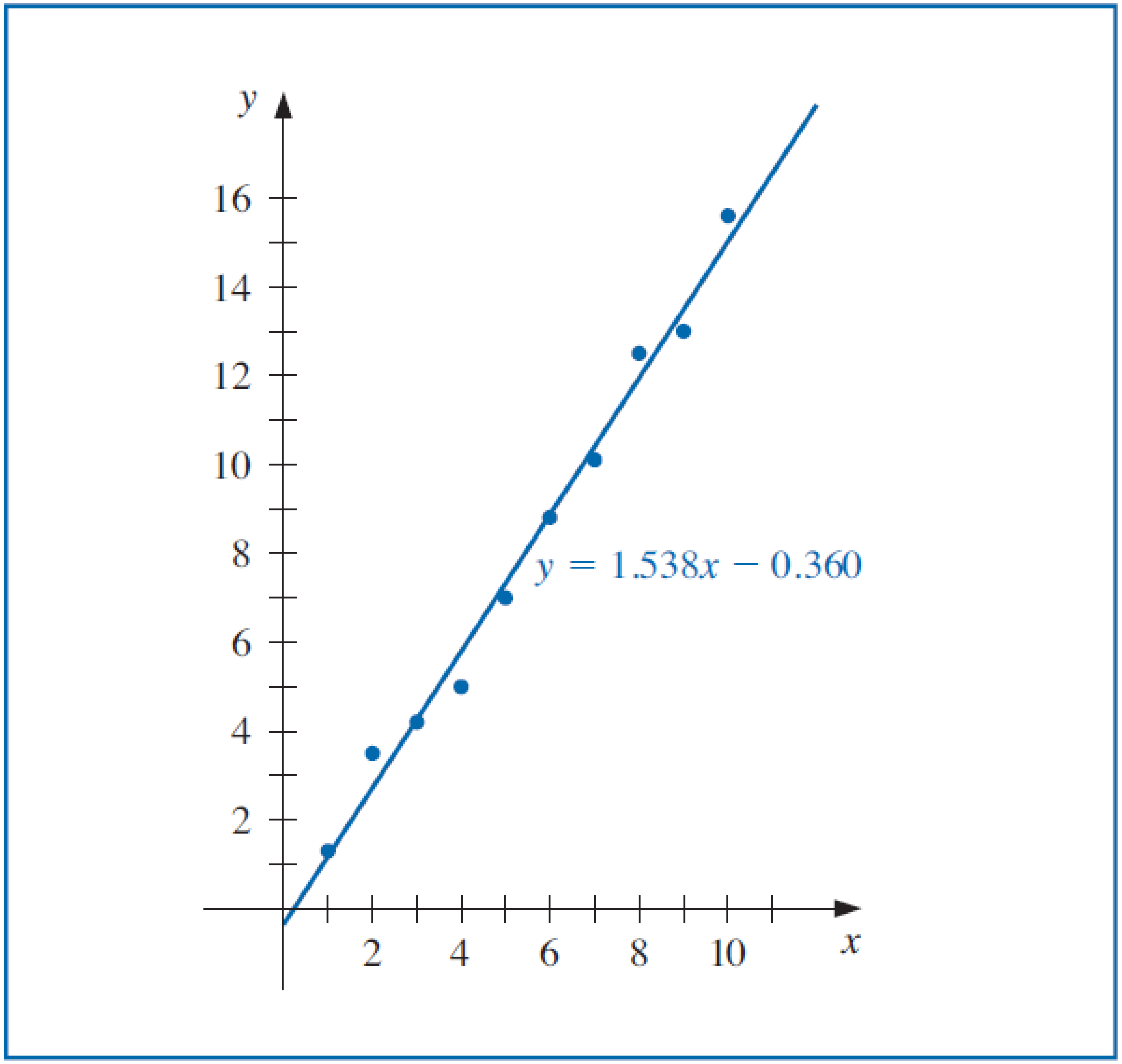
Ejemplo: Aproximación por mínimos cuadrados

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$P(x_i) = 1.538x_i - 0.360$
1	1.3	1	1.3	1.18
2	3.5	4	7.0	2.72
3	4.2	9	12.6	4.25
4	5.0	16	20.0	5.79
5	7.0	25	35.0	7.33
6	8.8	36	52.8	8.87
7	10.1	49	70.7	10.41
8	12.5	64	100.0	11.94
9	13.0	81	117.0	13.48
10	15.6	100	156.0	15.02
55	81.0	385	572.4	$E = \sum_{i=1}^{10} (y_i - P(x_i))^2 \approx 2.34$

$$a_0 = \frac{385(81) - 55(572.4)}{10(385) - (55)^2} = -0.360 \qquad a_1 = \frac{10(572.4) - 55(81)}{10(385) - (55)^2} = 1.538$$

$$P(x) = 1.538x - 0.360$$

Ejemplo: Aproximación por mínimos cuadrados



Aproximación por mínimos cuadrados Polinomiales

El problema consiste en aproximar un conjunto de datos $\{(x_i, y_i) | \; i = 1,2, \ldots \ldots m\}$ con un polinomio algebraico de la forma:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de grado $n < m - 1$ por un procedimiento de mínimos cuadrados de manera similar a lo visto anteriormente. Seleccionamos las constantes $a_0, a_1, \ldots \ldots a_n,$ para minimizar el error medio cuadrático E

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{m} (y_i - P_n(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} P_n(x_i) y_i + \sum_{i=1}^{m} (P_n(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j\right) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}\right) \end{aligned}$$

Aproximación por mínimos cuadrados Polinomiales

Como el caso lineal par minimizar E es necesario realizar $\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0$ para cada $j = 0,1,2, \dots \dots . n$

Por lo tanto para cada j debemos tener

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}$$

Esto nos da $n+1$ ecuaciones para las $n+1$ constantes a_j

$$a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^n = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0$$

$$a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1$$

$$\vdots$$

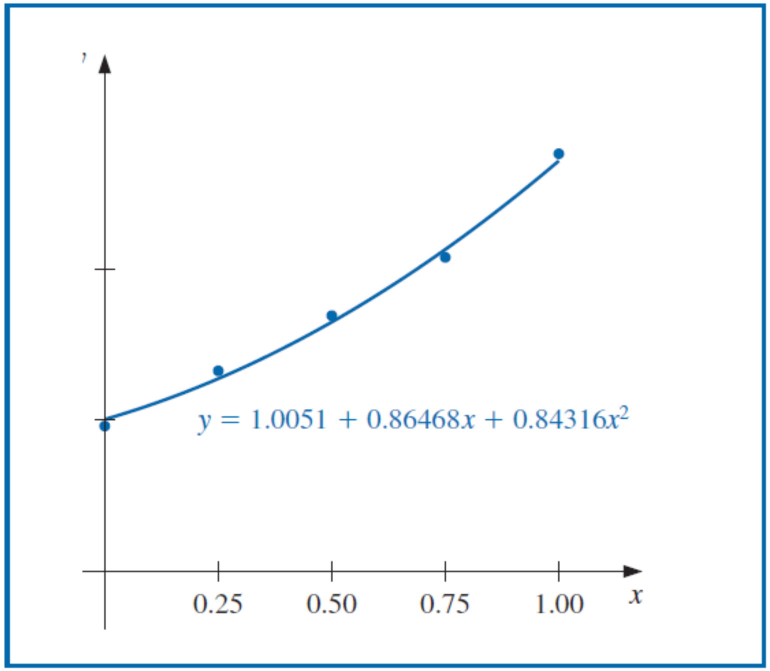
$$a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n$$

Ejemplo: Aproximación por mínimos cuadrados

i	x_i	y_i
1	0	1.0000
2	0.25	1.2840
3	0.50	1.6487
4	0.75	2.1170
5	1.00	2.7183

$n = 2$

$m = 5$



Descripción
Objetivos
Temario
Introducción
- *Distancias*
- Mínimos cuadrados
Aprox. Uniforme
Bibliografía

$$\begin{aligned} 5a_0 + \quad 2.5a_1 + \quad 1.875a_2 &= 8.7680, \\ 2.5a_0 + \quad 1.875a_1 + 1.5625a_2 &= 5.4514, \\ 1.875a_0 + 1.5625a_1 + 1.3828a_2 &= 4.4015. \end{aligned}$$

$$a_0 = 1.005075519, \quad a_1 = 0.8646758482, \quad a_2 = 0.8431641518.$$

$$P_2(x) = 1.0051 + 0.86468x + 0.84316x^2.$$

Algunas veces podemos asumir que los datos presentan una forma siguiente

- Exponencial $y = be^{ax}$
- Potencial $y = bx^{a}$

La dificultad radica cuando queremos minimizar el error medio cuadrático *E*

$$E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - be^{ax_i})^2 \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})(-e^{ax_i}) \\ 0 &= \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - be^{ax_i})(-bx_i e^{ax_i}) \end{aligned} \right.$$

$$E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - bx_i^a)^2 \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)(-x_i^a) \\ 0 &= \frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m}(y_i - bx_i^a)(-b(\ln x_i)x_i^a) \end{aligned} \right.$$

En general es difícil de resolver estas ecuaciones por lo que se recurre a la **linealización** de estas ecuaciones

– Exponencial $y = be^{ax}$ $\ln y = \ln b + ax$

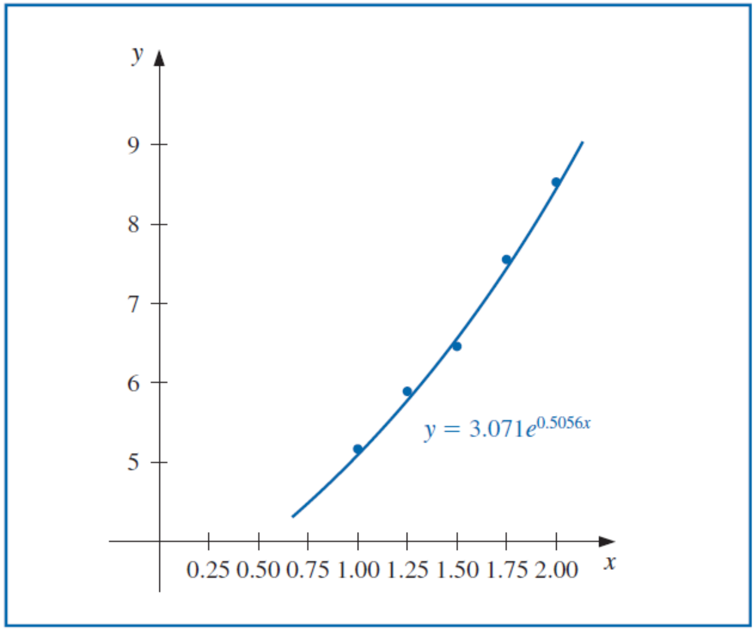
– Potencial $y = bx^{a}$ $\ln y = \ln b + a \ln x$

Descripción
Objetivos
Temario
Introducción
Mínimos cuadrados
- *No lineal*
Bibliografía

Ahora parece un problema lineal y las soluciones para $\ln b$ y a se obtienen modificando adecuadamente las ecuaciones obtenidas anteriormente

Ejemplo: Aproximación por mínimos cuadrados

i	x_i	y_i
1	1.00	5.10
2	1.25	5.79
3	1.50	6.53
4	1.75	7.45
5	2.00	8.46



$$y = be^{ax}$$

$$\ln y = \ln b + ax$$

$$a = \frac{(5)(14.422) - (7.5)(9.404)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 0.5056 \qquad \ln b = \frac{(11.875)(9.404) - (14.422)(7.5)}{(5)(11.875) - (7.5)^2} = 1.122$$

i	x_i	y_i	$3.071e^{0.5056x_i}$	$\lvert y_i - 3.071e^{0.5056x_i}\rvert$
1	1.00	5.10	5.09	0.01
2	1.25	5.79	5.78	0.01
3	1.50	6.53	6.56	0.03
4	1.75	7.45	7.44	0.01
5	2.00	8.46	8.44	0.02

$$y = 3.071e^{0.5056x_i}.$$

En general es difícil de rersolver estas ecuaciones por lo que se recurre a la **linealización** de estas ecuaciones

- Exponencial $y = be^{ax}$ $\quad \ln y = \ln b + ax$
- Potencial $y = bx^{a}$ $\quad \ln y = \ln b + a \ln x$

Ahora parece un problema lineal y las soluciones para $\ln b$ y a se obtienen modificando adecuadamente las ecuaciones obtenidas anteriormente

GeoGebra

- **https://www.geogebra.org/m/cBhW72bE**