EXTREMOS LIGADOS

TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es **continua** en un **conjunto compacto** (cerrado y acotado): $D \subset D_f$, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo global en D.

Para obtener los extremos globales de f en este caso se debe seguir el siguiente procedimiento:

(I) Localizar los puntos criticos de f en el interior de D.

(II) Hallar los puntos crítcos de f considerada como una función definida sólo en ∂D: frontera de D.
El método de los multiplicadores de Lagrange (en caso de poder aplicarse) es una opción para obtener estos puntos críticos.

(III) Calcular el valor de f en todos los puntos críticos obtenidos en (I) y (II).
El mayor es el máximo global y el menor es el mínimo global.

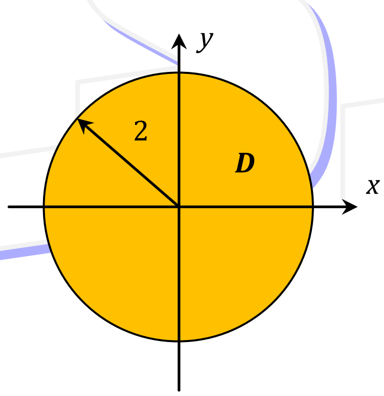
EJEMPLO

Obtenga los valores extremos globales de la función $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 5$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 \leq 4$.

Solución

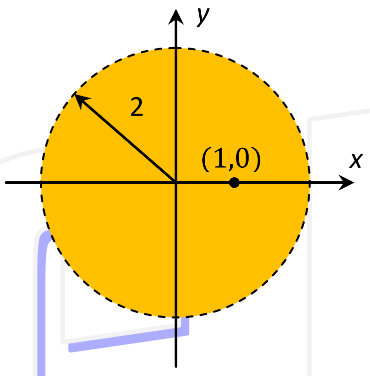
Dado que f es continua en el conjunto compacto:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$



se cumple el teorema del valor extremo, por lo tanto f alcanza máximo y mínimo global en D.

(I) Se buscan los puntos criticos de f en el interior de D:



$$\vec{\nabla} f = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 0 & (1) \\ 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

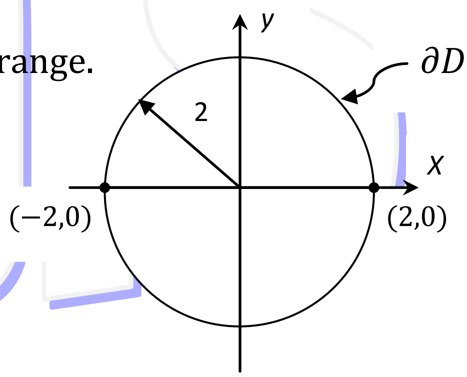
De (1) se obtiene $x = 1$ y de (2) $y = 0$.

Luego <u>(1,0) es el único punto crítico de f en el interior de D.</u>

(II) Para hallar los ptos críticos de f en la forntera de D:

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange.



Se forma la función Lagrangiana:

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda G(x, y)$$

con $G(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ ya que ahora la restricción es:

$G(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. Es decir

$$L(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

y se buscan los ptos críticos de f en ∂D haciendo:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} L = \vec{0} \\ G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ G = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 + 2x\lambda = 0 & (1) \\ 2y + 2y\lambda = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (2): $\qquad 2y(1 + \lambda) = 0 \quad \begin{cases} \nearrow y = 0 \\ \searrow \lambda = -1 \end{cases}$

Si $y = 0$ en (3): $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Se obtienen los ptos críticos: $(2,0)$ y $(-2,0)$.

Si $\lambda = -1$ en (1): $4x - 4 - 2x = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Y con $x = 2$ en (3): $2^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = 0$. O sea que se vuelve a obtener el punto crítico $(2,0)$.

Luego <u>los puntos críticos f en ∂D son: $(2,0)$ y $(-2,0)$.</u>

(III) Evaluando a $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 5$ en los puntos críticos se obtiene:

$f(1,0) = 2 - 4 + 0 + 5 = 3$ **Mínimo global**
$f(2,0) = 8 - 8 + 0 + 5 = 5$
$f(-2,0) = 8 + 8 + 0 + 5 = 21$ **Máximo global**

<u>Ejercicio 1</u>

Encuentre los valores extremos globales de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy$ en la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

Como f es continua en el conjunto compacto D, por el teorema del valor extremo, f alcanza máximo y mínimo global en D. Para obtener estos valores extremos globales se procede de la siguiente manera:

(I) Se buscan los puntos de f en el interior de D:

$$\vec{\nabla} f = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}y = 0 & (1) \\ 2y + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}y$ (3). Sustituyendo en (2)

$$2y + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}y\right) = 0 \Rightarrow y - \frac{2}{9}y = 0 \Rightarrow \frac{7}{9}y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Con $y = 0$ en (3) se obtiene $x = 0$.

Por lo tanto, $(0{,}0)$ es punto crítico de f en el interior de D.

(II) Se buscan los puntos de f en la frontera de D.

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda G(x,y)$$

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} L = \vec{0} \\ G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ G = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{2\sqrt{2}}{3}y + 2x\lambda = 0 & (1) \\ 2y + \frac{2\sqrt{2}}{3}x + 4y\lambda = 0 & (2) \\ x^2 + 2y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1) $x + \frac{\sqrt{2}}{3}y + x\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{3}y = -x(\lambda + 1) \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x(\lambda + 1)$ (4)

Sustituyendo en (2)

$$-\frac{6}{\sqrt{2}}x(\lambda + 1) + \frac{2\sqrt{2}}{3}x - \frac{12}{\sqrt{2}}x(\lambda + 1)\lambda = 0$$

Multiplicando por $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$3\sqrt{2}x(\lambda + 1) - \frac{2\sqrt{2}}{3}x + 6\sqrt{2}x(\lambda + 1)\lambda = 0$$

$$\sqrt{2}x\left(3(\lambda + 1) - \frac{2}{3} + 6(\lambda + 1)\lambda\right) = 0$$

$$\sqrt{2}x\left(3\lambda + 3 - \frac{2}{3} + 6\lambda^2 + 6\lambda\right) = 0$$

$$\sqrt{2}x\left(6\lambda^2 + 9\lambda + \frac{7}{3}\right) = 0 \;\rightarrow\; x = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{7}{6}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

Se descarta $x = 0$ porque si $x = 0$ en (1) $\Rightarrow y = 0$, y $(0{,}0)$ no satisface (3).

Recordando que (4) $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x(\lambda + 1)$

Si $\lambda = -\frac{7}{6}$ en (4)

$$y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x\left(-\frac{7}{6}+1\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}x \quad (5)$$

Sustituyendo en (3)

$$x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Con $x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ en (5) se obtienen los siguientes puntos críticos:

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right) \ y \ \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

Si $\lambda = -\frac{1}{3}$ en (4)

$$y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x\left(-\frac{1}{3}+1\right) = -\sqrt{2}x \quad (6)$$

Sustituyendo en (3)

$$x^2 + 2\left(-\sqrt{2}x\right)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Con $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ en (6) se obtienen los siguientes puntos críticos:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \ y \ \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

(III) Evaluando f en los puntos críticos obtenidos en los pasos (I) y (II)

$f(0,0) = 0$ **Mínimo global**

$f\left(\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}, \pm\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{7}{6}$ **Máximo global**

$f\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5}, \mp\frac{\sqrt{10}}{5}\right) = \frac{1}{3}$

Ejercicio 2

Obtenga los valores extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ sujeta a la restricción: $G(x,y,z) = 2x - 3y + z - 6 = 0$.

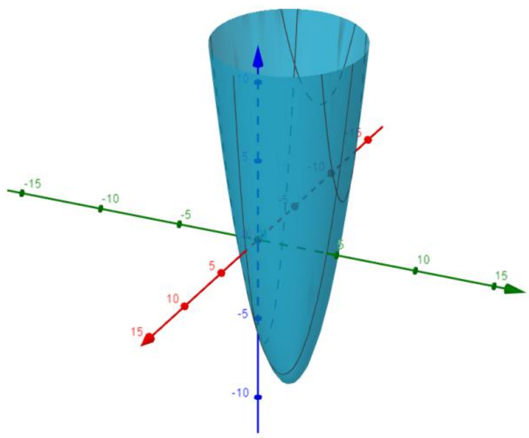
Si se despeja z de la ecuación de la restricción se tiene:

$$z = 6 - 2x + 3y$$

Sustituyendo en la función se obtiene:

$$f^*(x,y) = x^2 + y^2 - 6 + 2x - 3y$$

Y se buscan los puntos críticos de f^*



$$\vec{\nabla} f^* = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x^* = 0 \\ f_y^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Punto crítico: $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

$f_{xx}^* = 2$, $f_{yy}^* = 2$, $f_{xy}^* = f_{yx}^* = 0$

$$\left| Hf^*\left(-1, \frac{3}{2}\right) \right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

f^* tiene un mínimo local en $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Como $z = 6 - 2x + 3y \Rightarrow z = 6 - 2\overbrace{(-1)}^{x} + 3\overbrace{\left(\frac{3}{2}\right)}^{y} = \frac{25}{2}$ entonces:

$$\boxed{f\left(-1, \frac{3}{2}, \frac{25}{2}\right) = \left(\underbrace{-1}_{x}\right)^2 + \left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{y}\right)^2 - \underbrace{\frac{25}{2}}_{z} = 1 + \frac{9}{4} - \frac{25}{2} = -\frac{37}{4} \quad \textbf{\textit{Mínimo}}}$$

REPASO

$$f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Continua} & & & & \\
 & & \Uparrow \; \not\Downarrow & & & & \\
\begin{array}{c}\text{Derivadas}\\ \text{parciales}\\ \text{continuas}\end{array} & \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array} & \text{Diferenciable} & \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array} & \begin{array}{c}\text{Existen todas}\\ \text{las derivadas}\\ \text{direccionales}\end{array} & \begin{array}{c}\Rightarrow\\ \not\Leftarrow\end{array} & \begin{array}{c}\text{Existen todas}\\ \text{las derivadas}\\ \text{parciales}\end{array} \\
 & & \Updownarrow & & & & \\
 & & \exists\, L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \;\; / & & & &
\end{array}$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = 0$$

Ejercicio 1 Dada la función $f(x,y,z) = xz\,sen(xy) - e^{xy} + x\,cos(2xy)$ y los puntos $P = (1,0,1)$ y $Q = (3,2,2)$.

Halle el valor de la derivada direccional de f en P, en la dirección de P a Q.

Solución

$\vec{u} = (3,2,2) - (1,0,1) = (2,2,1) \;\;\Rightarrow\;\; \hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

$f_x = z\,sen(xy) + xyz cos(xy) - ye^{xy} + cos(2xy) - 2xysen(2xy)$

$f_y = x^2 z cos(xy) - xe^{xy} - 2x^2 sen(2xy)$

$f_z = xsen(xy)$

$\vec{\nabla} f(1,0,1) = \big(f_x(1,0,1), f_y(1,0,1), f_z(1,0,1)\big) = (1,0,0)$

Como f_x, f_y y f_z son funciones continuas $\Rightarrow$ f es diferenciable.

Como f es diferenciable en (1,0,1) entonces:

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(1,0,1) = \vec{\nabla} f(1,0,1) \bullet \hat{u} = (1,0,0) \bullet \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}}$$

Ejercicio 2 Dada la función $f(x,y,z) = y\,cos(2xy) + z^2 + e^{2x}$ y los puntos $P = (0,1,1)$ y $Q = (2,3,2)$.

(a) Halle el valor de la derivada direccional de f en P, en la dirección de P a Q.

(b) Obtenga el valor de la máxima razón de cambio de f en P.

Solución

(a) $\vec{u} = (2,3,2) - (0,1,1) = (2,2,1) \;\Rightarrow\; \hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(2,2,1)}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$f(x,y,z) = y\,cos(2xy) + z^2 + e^{2x}$$

$$f_x = -2y^2 sen(2xy) + 2e^{2x}$$

$$f_y = cos(2xy) - 2xysen(2xy)$$

$$f_z = 2z$$

$$\vec{\nabla} f(0,1,1) = \left(f_x(0,1,1), f_y(0,1,1), f_z(0,1,1)\right) = (2,1,2)$$

Como f_x, f_y y f_z son funciones continuas $\Rightarrow$ f es diferenciable.

Como f es diferenciable en (0,1,1) entonces:

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(0,1,1) = \vec{\nabla} f(0,1,1) \bullet \hat{u} = (2,1,2) \bullet \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}}$$

(b) $\boxed{D_{\hat{u}} f_{máx}(0,1,1) = \|\vec{\nabla} f(0,1,1)\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3}$ es la máxima razón de cambio de f en (0,1,1), siendo $\hat{u} = \frac{\vec{\nabla} f(0,1,1)}{\|\vec{\nabla} f(0,1,1)\|} = \frac{(2,1,2)}{3} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

Ejercicio 3 Sean los siguientes campos vectoriales:

$$\vec{g}(x,y) = \left(x^2 - 3xy, y + e^{x^2-2x}, x + y\right) \text{ y } \vec{f}(u,v,w) = \left(u^2 + w, u^3 + e^{2v^2-4v}\right)$$

Utilizando la **regla de la cadena** obtenga la matriz Jacobiana de $\vec{f} o \vec{g}$ evaluada en el punto $(x_0, y_0) = (2,1)$.

Solución

$$\begin{array}{l|l} \vec{g}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & u_0 = g_1(2,1) = 2^2 - 3.2.1 = -2 \\ \vec{f}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & v_0 = g_2(2,1) = 1 + e^{2^2-2.2} = 2 \quad ; (u_0,v_0,w_0) = (-2,2,3) \\ \vec{f}o\vec{g}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & w_0 = g_3(2,1) = 2+1 = 3 \end{array}$$

Las derivadas parciales de las funciones coordenadas tanto de $\vec{f}$ como de $\vec{g}$ son funciones continuas, es decir $\vec{f}$ y $\vec{g}$ son diferenciables, entonces por la regla de la cadena tenemos:

$$(\vec{f}o\vec{g})'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix}_{(u_0,v_0,w_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x} & \dfrac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

$$\vec{f}(u,v,w) = \left(u^2 + w, u^3 + e^{2v^2-4v}\right) \quad ; \quad \vec{g}(x,y) = \left(x^2 - 3xy, y + e^{x^2-2x}, x + y\right)$$

$$(\vec{f}o\vec{g})'(2,1) = \begin{pmatrix} 2u & 0 & 1 \\ 3u^2 & (4v-4)e^{2v^2-4v} & 0 \end{pmatrix}_{(-2,2,3)} \begin{pmatrix} 2x-3y & -3x \\ (2x-2)e^{x^2-2x} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{(2,1)}$$

$$\boxed{(\vec{f}o\vec{g})'(2,1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 12 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 25 \\ 20 & -68 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & -6 \\ & & & 2 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ \hline -4 & 0 & 1 & -3 & 25 \\ 12 & 4 & 0 & 20 & -68 \end{array}$$

Ejercicio 4 Sean:

$\vec{g}(x,y,z) = \left(xze^{x+y^2}, sen(x^2+y), e^x cos(xz)\right)$ y $f(u,v,w) = e^{uvw} + (v-1)^2 + w$.

Utilizando la **regla de la cadena** obtenga $(fo\vec{g})'(0,0,1)$.

Solución

$$\vec{g}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad u_0 = g_1(0,0,1) = 0$$

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad v_0 = g_2(0,0,1) = 0 \quad ; \ (u_0, v_0, w_0) = (0,0,1)$$

$$f o\vec{g}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad w_0 = g_3(0,0,1) = 1$$

$$(f o\vec{g})'(0,0,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix}_{(0,0,1)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x} & \dfrac{\partial g_3}{\partial y} & \dfrac{\partial g_3}{\partial z} \end{pmatrix}_{(0,0,1)}$$

$$f(u,v,w) = e^{uvw} + (v-1)^2 + w \quad , \quad \vec{g}(x,y,z) = \left(xze^{x+y^2}, sen(x^2+y), e^x cos(xz)\right)$$

$(f o\vec{g})'(0,0,1) =$

$$\begin{pmatrix} vwe^{uvw} & uwe^{uvw} + 2(v-1) & uve^{uvw} + 1 \end{pmatrix}_{(0,0,1)} \begin{pmatrix} ze^{x+y^2} + xze^{x+y^2} & 2xyze^{x+y^2} & xe^{x+y^2} \\ 2xcos(x^2+y) & cos(x^2+y) & 0 \\ e^x \cos(xz) - ze^x sen(xz) & 0 & -xe^x sen(xz) \end{pmatrix}_{(0,0,1)}$$

$$\boxed{(f o\vec{g})'(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Ejercicio

Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

sujeta a la restricción:

$$G(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Solución

Se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange.

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda G(x,y)$$

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 2xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\nabla L = \vec{0} \iff \begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2\lambda x = 0 & (1) \\ 2y + 2x + 2\lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 & (3) \end{cases}$$

Restando miembro a miembro

$$(1) - (2): \quad 2\lambda x - 2\lambda y = 0$$

$$2\lambda(x - y) = 0 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \lambda = 0 \\ \searrow y = x \end{array}$$

- Si $\lambda = 0$ en (1): $2x + 2y = 0$ se obtiene

$$y = -x$$

Sustituyendo y por $-x$ en (3)

$$x^2 + (-x)^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Luego, se tienen los siguientes puntos críticos:

$$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ y } (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

- Si $y = x$ en (3)

$$x^2 + x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Por lo tanto se tienen también los siguientes puntos críticos:

$$(\sqrt{2},\sqrt{2})\ y\ (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$$

<u>Los puntos críticos de la función f sujeta a la restricción $G = 0$ son:</u>

1) $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$
2) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$
3) $(\sqrt{2},\sqrt{2})$
4) $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

<u>Clasificación</u>

f (sujeta a la restricción $G = 0$) tiene en los puntos:

$(\sqrt{2},-\sqrt{2})\ y\ (-\sqrt{2},\sqrt{2})$ un **Mínimo Global** de valor $f(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2}) = 0$.

y en los puntos:

$(\sqrt{2},\sqrt{2})\ y\ (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ un **Máximo Global** de valor $f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2}) = 8$.
