ALGEBRA Y GEOMETRIA
TRABAJO PRACTICO 6
TEMA: ESPACIOS VECTORIALES
PRIMERA PARTE: ESPACIOS VECTORIALES – SUBESPACIOS

1. El conjunto $R^2$ es un espacio vectorial sobre R con las operaciones de adición y multiplicación por escalar definidas "componente a componente", esto es,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$c(x_1, x_2) = (cx_1, cx_2)$$

Muestre que, definiendo las operaciones en la forma que se indica a continuación, $R^2$ no es un espacio vectorial. Especifique cuales axiomas no se verifican.

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$
$$c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$$

2. En cada uno de los casos siguientes analizar si los subconjuntos dados son subespacios del espacio vectorial $V$:

*i)* $V = R^2$

*a)* $\{(x, y) \mid y = 2x\}$

*b)* $\{(x, x+1) \mid x \in R\}$

*c)* $\{(x, y) \mid xy = 0\}$

*d)* $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$

*e)* $\{(t+1, t+1) \mid t \in R\}$

*f)* $\{(0,0)\}$

*g)* Conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

*ii)* $V = R^3$

*a)* $\{(x, y, z) \mid z = 0\}$

*b)* $\{(x, y, z) \mid z = 3\}$

*c)* $\{(2a, a, a) \mid a \in R\}$

*d)* $\{(t+1, 2t+2, t+1) \mid t \in R\}$

*e)* Conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$

*f)* $\{(x, y, z) \mid x = y - z\}$

*g)* $\{(t, t^2, 0) \mid t \in R\}$

*h)* $\{(x, y, z) \mid 2x - y + z = 0\}$

*iii)* $V = \mathbb{R}^4$

*a)* $\{(x_1, 0, x_3, x_4) \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

*b)* $\{(a, 0, a+1, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

*c)* $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 0\}$

*d)* $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_3 + x_4 = 1\}$

*iv)* $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

*a)* $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

*b)* $\left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$

*c)* $\{A \in V \mid A \text{ es inversible}\}$

*v)* $V = \mathbb{R}[X]$

*a)* $\{p \in V \mid p(0) = 0\}$.

*b)* Polinomio nulo y polinomios de grado $n$.

*c)* Polinomio nulo y polinomios de grado menor o igual a $n$.

*d)* $\{p \in V \mid p(1) = 0\}$

*vi)* $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

*a)* $\{f \in V \mid f(2) = 0\}$

*b)* $\{f \in V \mid f(2) = 1\}$

*c)* $\{f \in V \mid f \text{ es constante}\}$

*d)* $\{f \in V \mid f \text{ es continua}\}$

**3.** Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,3)$. Se pide:

*a)* Verificar si $\mathbf{u}_1 = (0,1,-1)$, $\mathbf{u}_2 = (3,2,0)$, $\mathbf{u}_3 = (0,0,0)$, $\mathbf{u}_4 = (2,1,3)$ son combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

*b)* Caracterizar los vectores de $W = <\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2>$

**4.** Caracterizar los vectores de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

*a)* $W_1 = <(1,-1,0,0),\ (1,2,0,-1),\ (3,0,0,-1)>$

*b)* $W_2 = <(1,1,3,-1),\ (1,0,-2,0),\ (3,2,2,-2)>$

*c)* $W_3 = <(1,0,0,0),\ (0,0,0,1)>$

En cada caso observar que $W$ es el subespacio de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

**5.** Describir geométricamente los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$:

*a)* $W = <(2,1)>$

*b)* $W = <(1,2),(2,-1)>$

Idem con los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

*a)* $W = <(0,0,1)>$

*b)* $W = <(1,0,0),(0,0,1)>$

*c)* $W = <(1,1,1),(2,2,2)>$

*d)* $W = <(0,1,2),(0,0,1)>$

*e)* $W = <(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)>$

6.

*a)* Realizar la suma de los conjuntos $S_1 = \{(1,-1,2),(0,1,3)\}$ y $S_2 = \{(0,0,1),(1,1,3),(5,4,-7)\}$.

*b)* Sean $S_1 = \{(x,0) \mid 2 \le x \le 3\}$ y $S_2 = \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\}$ Describir y graficar el conjunto $S_1 + S_2$.

7. Sean $V = \mathrm{R}^4$, $W_1 = <(1,2,3,6),(4,-1,3,6)>$ y $W_2 = <(1,-1,1,1),(2,-1,4,5)>$. Se pide:

*a)* Definir estos subespacios por medio de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas.

*b)* Dar un conjunto generador y un sistema de ecuaciones lineales homogéneas que definan el subespacio $W_1 + W_2$.

*c)* Idem para el subespacio $W_1 \cap W_2$.

## SEGUNDA PARTE: DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL - BASES Y DIMENSIÓN - SUMA DIRECTA

8. En cada uno de los casos siguientes, determinar si los vectores dados son linealmente dependientes o linealmente independientes. Cuando sean linealmente dependientes, dar una relación de dependencia no trivial y expresar alguno de ellos como combinación lineal de los restantes.

*a)* $V = \mathrm{R}^2$ $\quad \mathbf{v}_1 = (1,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-5)$.

*b)* $V = \mathrm{R}^3$ $\quad \mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,-2)$.

*c)* $V = \mathrm{R}^{2\times 2}$ $\quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

*d)* $V = \mathrm{R}[X]$ $\quad p_1 = 2 + 3X - 5X^2$, $p_2 = X + X^2 - 2X^3$

*e)* $V = \mathrm{R}^{\mathrm{R}}$ $\quad f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sin(x)$, $f_3(x) = \cos(x)$

9. En cada uno de los casos siguientes, demostrar que el conjunto dado es un base del espacio vectorial $V$

*a)* $V = \mathrm{R}^2$ $\quad$ B= $\{(2,1),(1,0)\}$

*b)* $V = \mathrm{R}^3$ $\quad$ B= $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$

*c)* $V = \mathrm{P}_2(\mathrm{R},X)$ $\quad$ B= $\{1, X, X^2\}$

10. En las siguientes situaciones, dar una base y la dimensión del subespacio $W$:

*a)* $V = \mathrm{R}^4$ y $W$ es el subespacio de soluciones del sistema $AX = 0$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

*b)* $V = \mathrm{R}^3$ y $W = <(1,1,0),(2,1,1),(8,5,3),(5,3,2)>$.

*c)* $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & a+b \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

**11.** Sean $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ y $W_2 = \{(x_1, 0, 0, x_4) \mid x_1, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

*a)* Caracterizar los vectores de $W_1 \cap W_2$ y dar una base del mismo.

*b)* Mostrar que $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$ pero que la suma no es directa.

**12.** Sean $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & b \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$ y $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & -a \end{bmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$.

*a)* Mostrar que la suma $W_1 + W_2$ es directa.

*b)* Dar bases de los subespacios $W_1$, $W_2$ y $W_1 + W_2$.

**13.** Sean $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = <(2,2,-1),(-1,2,2)>$ y $W_2 = <(2,-1,2),(1,0,1)>$.

*a)* Por consideraciones de carácter geométrico, muestre que la suma de $W_1$ y $W_2$ no es directa.

*b)* Tomando en cuenta las dimensiones de $W_1$, $W_2$ y $W_1 \cap W_2$, muestre que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

**14.** En cada caso, dar dos subespacios complementarios de $W$.

*a)* $V = \mathbb{R}^2$, $W = <(1,1)>$.

*b)* $V = \mathbb{R}^3$, $W = <(1,1,0),(0,1,1)>$.

**15.** Sea $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 > 0\}$ con las operaciones siguientes:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

$$c(x_1, x_2) = (x_1^c, x_2^c)$$

Demostrar que, con estas operaciones, $\mathbb{R}_+^2$ es un espacio vectorial. Demostrar también que, si se define la adición de igual forma, pero la multiplicación por escalar está dada por $c(x_1, x_2) = (cx_1, cx_2)$, $\mathbb{R}_+^2$ no es un espacio vectorial.

**16.** Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. En cada uno de los casos siguientes, verificar si $W$ es un subespacio:

*i)* $W = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$.

*ii)* $W = \{f \in V \mid f(x^2) = f(x)^2\}$.

*iii)* $W = \{f \in V \mid f(3) = 1 + f(-5)\}$.

**17.** Sea $V = \mathbb{R}^4$. En cada uno de los casos siguientes verifique si se cumple alguna de las tres siguientes posibilidades: $W_1 \subset W_2$, $W_2 \subset W_1$, $W_1 = W_2$.

*i)* $W_1 = <(2,-1,3,3),(0,1,-1,-1),(1,1,0,0)>$, $W_2 = <(1,1,0,0),(1,0,1,1)>$

*ii)* $W_1 = <(2,3,-1,-1)>$, $W_2$ es el subespacio de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

*iii)* $W_1$ y $W_2$ están dados, respectivamente, por los sistemas de ecuaciones lineales $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

18. En $V=\mathrm{R}^3$ se dan los siguientes subespacios: $W_1=<(1,-1,2),(2,1,1)>$, $W_2=<(0,1,-1),(1,2,1)>$, $W_3$ definido por el sistema $\begin{cases}4x_1-x_3=0\\ x_1+x_2=0\end{cases}$ y $W_4$ dado por el sistema $\begin{cases}3x_1-x_2-x_3=0\\ x_3=0\end{cases}$. Encontrar bases para los subespacios $W_1+W_2$, $W_1\cap W_2$, $W_3\cap W_4$, $W_3+W_4$, $W_1\cap W_3$ y $W_1+W_3$.

19. xx

*a)* Sean $W_1=\{(0,x_2,x_3)\mid x_2,x_3\in\mathrm{R}\}$ y $W_2=<(1,-1,2),(2,1,1)>$. Mostrar que $\mathrm{R}^3=W_1+W_2$ pero la suma no es directa.

*b)* Si $W_1=<(1,-1,2),(2,1,1)>$ y $W_2$ está definido por el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$, mostrar que $\mathrm{R}^3=W_1\oplus W_2$.

## TERCERA PARTE: COORDENADAS – VARIEDADES LINEALES

1. Sea $V$ un espacio vectorial y $\mathsf{B}=(v_1,v_2,v_3)$ una base ordenada de $V$.

*a)* Dar los vectores de coordenadas, respecto de la base $\mathsf{B}$, de los vectores $u_1=2v_1+5v_2-3v_3$, $u_2=v_1+4v_3$, $v_2$, $0$.

*b)* Si $[w_1]_{\mathsf{B}}=\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix}$ y $[w_2]_{\mathsf{B}}=\begin{bmatrix}-2\\1\\8\end{bmatrix}$, determinar $w_1$, $w_2$, $[w_1+w_2]_{\mathsf{B}}$, $[2w_2]_{\mathsf{B}}$ y $[2w_1+3w_2]_{\mathsf{B}}$.

2. Sea $V=\mathrm{P}_2(\mathrm{R},X)$ y $\mathsf{B}=(1,1+X,1+X^2)$ una base ordenada de $V$.

*a)* Dar los vectores de coordenadas, respecto de $\mathsf{B}$, de los siguientes polinomios:

*i)* $p_1=2-3X+5X^2$

*ii)* $p_2=3+X+X^2$

*iii)* $p_3=1+X$

*iv)* $p_4=2p_1-p_2$

*v)* $p_5=0+0X+0X^2$

*b)* Idem con respecto a la base ordenada $\mathsf{B}'=(1,X,X^2)$.

*c)* Sean $[p_1]_{\mathsf{B}}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$ y $[p_2]_{\mathsf{B}'}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$. Determinar $p_1$ y $p_2$.

3. Sean $V=\mathrm{R}^2$ y $\mathsf{B}_1=((1,2),(3,-1))$.

*a)* Encontrar los vectores de coordenadas respecto de la base $\mathsf{B}_1$ de los vectores siguientes; $(3,-1)$, $(1,0)$, $(0,0)$, $(3,-8)$.

*b)* Idem con respecto a las bases $\mathsf{B}_2=((1,0),(0,1))$ y $\mathsf{B}_3=((0,1),(1,0))$.

*c)* Encontrar los vectores $(x,y)$ de forma tal que $[(x,y)]_{\mathsf{B}_1}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$, $[(x,y)]_{\mathsf{B}_2}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$ y $[(x,y)]_{\mathsf{B}_3}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$.

**4.** Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión $2$. Si $\mathsf{B}$ y $\mathsf{B}'$ son bases ordenadas de $V$, $v\in V$ y $P=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$ la matriz de cambio de base de la base $\mathsf{B}$ a la base $\mathsf{B}'$, se pide:

*a)* Determinar $[v]_{\mathsf{B}}$ si $[v]_{\mathsf{B}'}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

*b)* Determinar $[v]_{\mathsf{B}'}$ si $[v]_{\mathsf{B}}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$.

**5.** Sean $V=\mathsf{P}_2(\mathrm{R},X)$, $\mathsf{B}=(1,X,X^2)$ y $\mathsf{B}'=(1+X+X^2,-2-X+X^2,-1+X+X^2)$. Encontrar la matriz de cambio de base de $\mathsf{B}$ a $\mathsf{B}'$.

**6.** Sea $V=\mathrm{R}^2$ y $\mathsf{B}=((1,1),(0,1))$. Determinar la base $\mathsf{B}'$, de manera que $P=\begin{bmatrix}1&3\\2&-5\end{bmatrix}$ es la matriz de cambio de base de $\mathsf{B}$ a $\mathsf{B}'$.

**7.** En $\mathrm{R}^3$ se dan los sistemas de coordenadas $\mathsf{S}_1=\{\mathrm{O}\ ;(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3)\}$ y $\mathsf{S}_2=\{\mathrm{Q}\ ;(\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2,\mathrm{f}_3)\}$, donde $\mathrm{O}=(0,0,0)$, $\mathrm{e}_1=(1,0,0)$, $\mathrm{e}_2=(0,1,0)$, $\mathrm{e}_3=(0,0,1)$, $\mathrm{Q}=(1,1,1)$, $\mathrm{f}_1=(1,0,1)$, $\mathrm{f}_2=(2,1,0)$ y $\mathrm{f}_3=(0,1,1)$. Se pide:

*a)* Dar la expresión matricial de la fórmula de transformación y la expresión de cada coordenada $x_1$, $x_2$ y $x_3$ de un punto genérico del sistema $\mathsf{S}_1$.

*b)* Las coordenadas en el sistema $\mathsf{S}_2$ del punto $p=(4,7,-2)$.

*c)* Ecuaciones en el sistema $\mathsf{S}_2$ de los planos de ecuaciones $x_1=0$ y $15x_1+8x_2+x_3+9=0$.

*d)* Ecuación en el sistema $\mathsf{S}_2$ de la recta definida por los puntos $p=(1,1,1)$ y $q=(2,-1,-1)$.

**8.** Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son variedades lineales. En tal caso dar su dimensión y expresarla en la forma $A=p+W$.

*i)* $V=\mathrm{R}^2$ $\quad A=\{(3,1)+(t,3t)\mid t\in\mathrm{R}\}$

*ii)* $V=\mathrm{R}^2$ $\quad A=\{(t,t^2)\mid t\in\mathrm{R}\}$

*iii)* $V=\mathrm{R}^2$ $\quad A=\{(1,0)+(t,t-1)\mid t\in\mathrm{R}\}$

*iv)* $V=\mathrm{R}^3$ $\quad A=\{(1,0,0)+(t,t,t^2)\mid t\in\mathrm{R}\}$

*v)* $V=\mathrm{R}[X]$ $\quad A=\{a_0+a_1X+X^2\mid a_0,a_1\in\mathrm{R}\}$

*vi)* $V=\mathrm{R}^{2\times2}$ $\quad A=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&1\end{bmatrix}\,\middle|\, a,b,c\in\mathrm{R}\right\}$

*vii)* $V = \mathrm{R}^4$ $\quad A = \{(2+t, 2t, 3+t', -1+2t+3t') \mid t, t' \in \mathrm{R}\}$

9. En cada uno de los casos siguientes determinar si el sistema dado define una variedad lineal. En tal caso expresarla en la forma $A = p + W$ y dar su dimensión.

*a)* $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$

*b)* $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

*c)* $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$

*d)* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = -1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

*e)* $\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1 \end{cases}$

10. Definir cada una de las variedades lineales siguientes por medio de un sistema de ecuaciones lineales:

*a)* $A = (3,1) + < (1,3) >$

*b)* $A = (2,0,3,-1) + < (1,2,0,2), (0,0,1,3) >$

*c)* $A = (1,5,1) + < (1,3,0), (0,1,1) >$

11. xx

*a)* Dar una ecuación vectorial de la recta en $\mathrm{R}^4$ determinada por los puntos $p = (-1,0,2,3)$ y $q = (0,0,1,2)$.

*b)* Dar una ecuación vectorial del plano determinado por los puntos $p_1 = (1,0,0,0)$, $p_2 = (0,1,0,0)$ y $p_3 = (0,0,0,1)$.

*c)* Definir las variedades lineales anteriores por medio de sistemas de ecuaciones lineales. Verificar si las mismas son paralelas, se intersecan o son alabeadas.

12. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

*a)* Encuentre la matriz $R$ reducida por filas de $A$.

*b)* Sea $W_f(A)$ el subespacio generado por las filas de $A$ y $W_f(R)$ el subespacio generado por las filas de $R$. Muestre que $W_f(A) = W_f(R)$.

*c)* El resultado anterior sugiere que una matriz y su reducida por filas tienen el mismo subespacio de filas. Demostrar este hecho.

*d)* Utilice la conclusión anterior para determinar si son iguales los siguientes subespacios:

*i)* $W_1 = < (1,-1,1), (4,-3,1), (3,-2,0) >$

*ii)* $W_2 = < (1,-1,1), (-2,1,1), (5,-4,2) >$

13. En cada uno de los casos siguientes determinar si los vectores dados son linealmente dependientes o linealmente independientes. En el primer caso dar una relación de dependencia no trivial.

*a)* $V = \mathrm{R}^3$; $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (2,3,1)$, $v_3 = (-1,1,3)$.

*b)* $V = \mathrm{P}_2(\mathrm{R}, X)$; $p_1 = 1 + X + X^2$, $p_2 = X$, $p_3 = -2 - X + X^2$, $p_4 = -1 + X$.

*c)* $V = \mathrm{R}^4$; $v_1 = (1,1,2,4)$, $v_2 = (2,1,1,6)$, $v_3 = (1,-1,4,0)$, $v_4 = (2,-1,-5,2)$

14. En cada uno de los casos siguientes, verificar que los vectores dados forman una base de $V$.

*a)* $V = \mathrm{R}^{2\times 2}$; $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$.

*b)* $V = \mathrm{P}_2(\mathrm{R}, X)$; $p_1 = 1$, $p_2 = -1 + X$, $P_3 = (-1 + X)^2$.

15. Encontrar la condición (o condiciones) del escalar $a$ para que los vectores $(1,a,1)$, $(0,1,a)$ y $(a,1,0)$ formen una base de $\mathrm{R}^3$. Idem para $\mathrm{Q}^3$.

16. Sea $V = \mathrm{R}^{\mathrm{R}}$ y $W$ el subespacio de $V$ generado por $f_1$ y $f_2$, donde $f_1(x) = \sin(x)$ y $f_2(x) = \cos(x)$.

*a)* Verificar que $\mathrm{B} = \{f_1, f_2\}$ es una base de $W$ y dar las matrices de coordenadas respecto de B de $h_1$, $h_2$ y $h_3$, donde $h_1(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $h_2(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$ y $h_3(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

*b)* Sea $W'$ el subespacio de $V$ generado por las funciones $g_1$ y $g_2$ dadas por $g_1(x) = \sin^2(x)$ y $g_2(x) = \cos^2(x)$. Verificar que $\mathrm{B}' = \{g_1, g_2\}$ es una base de $W'$ y dar la matriz de coordenadas respecto de B′ de la función $f$ dada por $f(x) = \cos(2x)$. Si $[h]_{\mathrm{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ¿Quién es $h$?

17. Sean $a$, $b$ y $c$ números reales distintos. Demostrar que las funciones $f$, $g$ y $h$ dadas por $f(x) = \sin(x+a)$, $g(x) = \sin(x+b)$ y $h(x) = \sin(x+c)$ son linealmente dependientes.

18. Se dice que dos planos son paralelos si coinciden o su intersección es vacía. Encontrar la condición que deben cumplir los coeficientes para que los planos $\mathrm{P}_1 = \{(x,y,z) \mid ax + by + cz + d = 0\}$ y $\mathrm{P}_2 = \{(x,y,z) \mid a'x + b'y + c'z + d' = 0\}$ sean paralelos.

19. Sea H el hiperplano en $\mathrm{R}^5$ definido por la ecuación $2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1$. Dar una ecuación vectorial de H. Verificar si el mismo es paralelo al plano $\mathrm{P} = \{(1,-2,1,1,2) + a(0,1,2,2,-3) + b(1,1,1,-1,-2) \mid a, b \in \mathrm{R}\}$.

20. En $\mathrm{R}^5$ se tienen las variedades lineales $A_1$, $A_2$ y $A_3$ definidas por los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

$$A_1 \to \begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}, \quad A_2 \to \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_5 = 0 \end{cases}, \quad A_3 \to \begin{cases} x_1 - 1 = 0 \\ 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

*a)* Determinar cuales son paralelas.

*b)* Hallar todas las intersecciones posibles.

**21.** En $R^2$ se dan los sistemas de coordenadas $S_1 = \{(0,0) ; (1,0),(0,1)\}$ y $S_2 = \left\{(0,0) ; \left(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\right), \left(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right)\right\}$. La ecuación $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$ determina un conjunto de puntos del plano cuando $x$ e $y$ son coordenadas en el sistema $S_1$. Hallar la ecuación del mismo conjunto en el sistema $S_2$.

**22.** En $R^3$ se tienen los sistemas coordenadas $S_1 = \{O ; (e_1, e_2, e_3)\}$ y $S_2 = \{Q ; (e_1, e_2, e_3)\}$ con $Q = (-1, 1, 5/6)$. Determinar en el sistema $S_2$ la ecuación de la superficie dada por $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 4x - 2y + 5z = 6$.