Ejercicios complementarios al práctico de transformaciones lineales

September 21, 2022

Exercise 1 *Dado* V *un* $\mathbb{F}-$*espacio vectorial de dimensión* n. *Sea* $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ *una base ordenada (fija) para* V. *Definimos una transformación lineal*
$T : V \to \mathbb{R}^n$ *como sigue,*

$$T(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

Es decir a cada $v \in V$ *la transformación* T *nos devuelve las coordenadas de dicho* v *en la base dada* $\mathcal{B}$.

Probar que T *es un isomorfismo.*

Con el ejercicio anterior estamos identificando cualquier $\mathbb{F}-$*espacio vectorial* de dimensión n con $\mathbb{R}^n$. De esta manera podemos trabajar directamente con sus coordenadas como si fueran "cosas de $\mathbb{R}^n$".

Exercise 2 *Sea* $V = P_3$ *el* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial de los polinomios de grado menor igual que* 6. *Consideremos los siguientes subespacios de* V,

$$\begin{aligned} S &= \left\langle 2 - x^2,\ x^3 + 2x - 1 \right\rangle \\ T &= \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d : \left\{ \begin{array}{l} a - 3c + d = 0 \\ -b + c + d = 0 \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Se pide:

1. *Caracterizar* S *y hallar una base para el mismo.*
2. *Hallar una base para* T
3. *Hallar una base para* $S + T$
4. *Calcular la* $\dim(S \cap T)$

Exercise 3 *Sea* $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ *como* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial. Consideremos los siguientes subespacios de* V*,*

$$\begin{aligned} A &= \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \\ B &= \left\{ \begin{matrix} a & 0 \\ b & c \end{matrix} : a + 3b - c = 0 \right\} \end{aligned}$$

Se pide:

1. *Caracterizar* A *y dar una base para el mismo.*
2. *Dar una base para* B*.*
3. *Estudiar* $A + B$ *caracterizandolo y dando una base.*
4. *Dar una base para* $A \cap B$*.*

Exercise 4 *Sea* $V = P_4$ *el* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial de los polinomios de grado menor igual que* 4*. Se consideran los siguientes subespacios de* V*,*

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{x^4 + bx^3 - 2x + d : b - 2d = 0\right\} \\ W_2 &= \{ax^4 + 3x^2 - cx + d : a + 5c - d = 0\} \end{aligned}$$

Se pide:

1. *Dar bases para* W_1 *y* W_2*. Y dar sus dimensiones.*
2. *Dar una base para* $W_1 \cap W_2$*.*
3. *La suma* $W_1 + W_2$ *es directa?*

Exercise 5 *Sea* $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$ *como* $\mathbb{R}-$*espacio vectorial. Consideremos los siguientes subespacios de* V*,*

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \\ S_2 &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Se pide:

1. *Caracterizar* S_1 *y* S_2*.*
2. *Dar una base para* $S_1 + S_2$*.*
3. *Dar una base para* $S_1 \cap S_2$*.*