ANÁLISIS MATEMÁTICO II

PARCIAL PRÁCTICO 2

CICLO LECTIVO 2020

PROFESOR:

- Guibert, Roberto

ALUMNO:

- Bulacio, Baltazar

Segundo Parcial de Regularización - 24/06/2020

Problema 1: Resuelva la ecuación lineal de primer orden:

$$y'(x) + 3y(x) = x.e^{-3x}$$

Con dato inicial $y(0) = \frac{1}{2}$

Resolución:

$$P(x) = 3$$

$$Q(x) = x.e^{-3x}$$

Se realiza la integral de P(x):

$$\int P(x)dx \rightarrow \int 3\ dx = 3x$$

Se plantea la fórmula general para la resolución de una ecuación diferencial lineal:

$$y.e^{\int P(x)dx} = \left[\int Q(x).e^{\int P(x)dx}\right]$$

$$y.e^{3x} = \left[\int x.e^{-3x}.e^{3x}\ dx\right] \rightarrow y.e^{3x} = \int x\ dx$$

$$y.e^{3x} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y_g = \frac{\frac{x^2}{2} + C}{e^{3x}}$$

$$\boldsymbol{y_g = \frac{x^2.e^{-3x}}{2} + C.e^{-3x} \rightarrow y_g = \frac{x^2 + C}{2.e^{3x}}}$$

Aclaración: la expresión calculada anteriormente es la solución general de la ecuación lineal

Al tener como condición inicial $y(0) = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$y_g = \frac{x^2.e^{-3x}}{2} + C.e^{-3x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{0^2.e^{-3.0}}{2} + C.e^{-3.0} \rightarrow \boldsymbol{C = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{y_p = \frac{x^2.e^{-3x}}{2} + \frac{e^{-3x}}{2}}$$

Simplificando a la mínima expresión se obtiene:

$$\boldsymbol{y_p = \frac{x^2 + 1}{2.e^{3x}}}$$

Respuesta

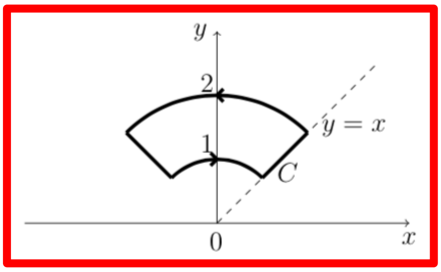
La solución particular de la ecuación diferencial es:

$$\boldsymbol{y_p = \frac{x^2 + 1}{2.e^{3x}}}$$

Problema 2: Calcule la circulación del campo:

$$\vec{F} = (e^y - y)\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2}x^2 + (x+y).e^y\right)\hat{\jmath}$$

A lo largo de la curva C que se muestra en la siguiente figura:



Resolución:

Para la resolución del problema se debe realizar el problema en coordenadas polares, por ende se plantea lo siguiente:

$$x = r.\cos\theta \qquad y = r.sen\,\theta$$

Para obtener los límites de integración, primero se deben observar los radios de las distintas circunferencias. En este caso se visualizan dos radios, r = 1 y r = 2.

Por lo tanto los límites de integración de r se definen de la siguiente manera:

$$1 \leq r \leq 2$$

Para obtener los límites de integración de θ, se puede observar en el gráfico que las dos circunferencias están limitadas por las rectas a 45 grados $(y = x)$ y a 135 grados $(y = -x)$

$$45° \to \frac{\pi}{4} \qquad 135° \to \frac{3\pi}{4}$$

Por lo tanto los límites de integración de θ se definen de la siguiente manera:

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

Se puede realizar el ejercicio utilizando el teorema de Green debido a que se cumplen las siguientes condiciones:

- La superficie contenida dentro de la curva cerrada es simplemente conexa.
- El sentido de la curva es antihorario

Resolviendo con el teorema de Green, se plantea lo siguiente:

$$I = \oint_D \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

$$I = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$I = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left((x + e^y) - (e^y - 1\right) r.d\theta.dr$$

$$I = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (x + 1)\, r.d\theta.dr$$

Aquí se debe reemplazar a “x” por “$r.\cos\theta$ ". Por lo tanto queda lo siguiente:

$$I = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (r.\cos\theta + 1)\, r.d\theta.dr$$

$$I = \int_1^2 (r^2.\operatorname{sen}\theta + r.\theta)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\, dr$$

$$I = \int_1^2 \left(r^2.\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + r.\frac{3\pi}{4}\right) - \left(r^2.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + r.\frac{\pi}{4}\right) dr$$

$$I = \int_1^2 \left(r^2.\frac{\sqrt{2}}{2} + r.\frac{3\pi}{4} - r^2.\frac{\sqrt{2}}{2} - r.\frac{\pi}{4}\right) dr$$

$$I = \int_1^2 \left(r.\frac{3\pi}{4} - r.\frac{\pi}{4}\right) dr$$

$$I = \int_1^2 \left(\frac{\pi.r}{2}\right) dr$$

$$I = \left(\frac{\pi . r^2}{4}\right)\Big|_1^2$$

$$I = \left(\frac{\pi . 2^2}{4}\right) - \left(\frac{\pi . 1^2}{4}\right)$$

$$I = \left(\frac{4 . \pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \boldsymbol{I = \frac{3\pi}{4}}$$

Respuesta

La circulación de campo a lo largo de la curva C tiene un valor de $\frac{3\pi}{4}$

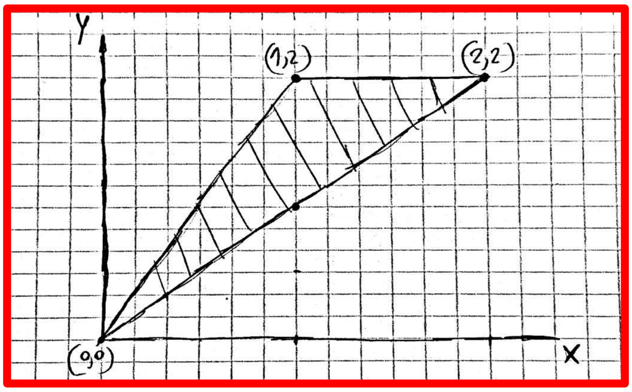
Problema 3: Calcular el volúmen subtendido por la función:

$$f(x,y) = x . y^2$$

Sobre el triángulo con vértices en los puntos (0,0), (1,2) y (2,2)

Resolución:

Para poder resolver este ejercicio se debe realizar el gráfico, el cuál es el siguiente:



Visualizando el gráfico, se puede concluir que la región de integración es una región del tipo 2.

Por lo tanto, los límites de integración para "y" serán los siguientes:

$$0 \le y \le 2$$

Los límites de integración para "x", serán funciones en "y", por lo tanto se deben obtener las rectas ubicadas en el gráfico:

$$Recta\ 1 \rightarrow (0,0)\ a\ (1,2)$$

$$(1,2) - (0,0) = (1,2)$$

$$(x, y) = (0,0) + t.(1,2)$$

$$x = t \qquad y = 2t \rightarrow t = \frac{y}{2}$$

Se igualan los "t" y se obtiene la ecuación de la recta;

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}y}$$

$$Recta\ 2 \rightarrow (0,0)\ a\ (2,2)$$

$$(2,2) - (0,0) = (2,2)$$

$$(x, y) = (0,0) + t.(2,2)$$

$$x = 2t \rightarrow t = \frac{x}{2} \qquad y = 2t \rightarrow t = \frac{y}{2}$$

Se igualan los "t" y se obtiene la ecuación de la recta;

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y \rightarrow \boldsymbol{x = y}$$

Definiendo los límites de integración para "x";

$$\frac{y}{2} \leq x \leq y$$

Planteando la integral doble queda:

$$V = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{y} x.y^2 dxdy$$

$$V = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}.y^2\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{y} dy$$

$$V = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2}.y^2\right) - \left(\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2}.y^2\right) dy$$

$$V = \int_0^2 \left(\frac{y^4}{2} - \frac{y^4}{8}\right) dy$$

$$V = \int_0^2 \frac{3}{8} y^4 dy$$

$$V = \int_0^2 \frac{3.y^5}{40} dy$$

$$V = \left(\frac{3.y^5}{40}\right)\Bigg|_0^2$$

$$V = \left(\frac{3.2^5}{40}\right) - \left(\frac{3.0^5}{40}\right)$$

$$V = \left(\frac{96}{40}\right) \rightarrow \boldsymbol{V = \frac{12}{5}}$$

Respuesta

El volúmen subtendido por la función tiene un valor de $\frac{12}{5}$.