ALGEBRA Y GEOMETRIA
TRABAJO PRACTICO 1
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Determinar la matriz B en cada uno de los casos siguientes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{1,3}} B$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2} B$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{5} & -2 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2+2L_1} B$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{1,3}} A_1 \xrightarrow{L_2+4L_3} A_2 \xrightarrow{-2L_1} B$

2. Determinar la matriz A en cada uno de los casos siguientes:

a) $A \xrightarrow{L_{1,2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

b) $A \xrightarrow{L_1-2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{5} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

c) $A \xrightarrow{L_2+\frac{1}{2}L_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ 0 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

d) $A \xrightarrow{-2L_2} A_1 \xrightarrow{L_{2,3}} A_2 \xrightarrow{L_3+\frac{1}{3}L_1} \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

3. Para las matrices que aparecen a continuación se pide:

a) Señalar las matrices reducidas por filas. Para las que no lo sean especificar que condiciones no se verifican.

b) Determinar el rango de cada matriz.

c) En los casos en que la matriz no sea reducida por filas, hallar la matriz reducida por filas equivalente por filas a ella.

A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

F) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

G) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

H) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

I) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Hallar la reducida por filas equivalente por filas de cada una de las matrices siguientes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Cuando la solución no sea única, dar dos soluciones particulares además de la general.

a) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\{x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$

c) $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

h) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

j) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

k) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

6.

a) ¿Qué condiciones deben cumplir los escalares y_1, y_2, y_3 e y_4 para que tengan solución los sistemas siguientes:

i) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = y_2 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = y_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = y_4 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = y_1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = y_4 \end{cases}$

b) ¿Para que matrices $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ tiene solución el sistema $AX = Y$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. Mostrar que son equivalentes por filas las matrices A y B que se dan a continuación. $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $B = (2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$.

8. Mostrar que la operación elemental de filas que corresponde a un intercambio de filas puede obtenerse por medio de un número finito de operaciones elementales de fila de los otros dos tipos.

9. Describir explícitamente todas las matrices 2×2, 2×3 y 3×3 reducidas por filas.

10. Encontrar la reducida por fila de cada una de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

11. Mostrar que dos matrices A y B son equivalentes por filas si, y sólo si tienen la misma reducida por filas R.
Utilizar esto para verificar si son equivalentes por filas las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Probar que las matrices $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ no son equivalentes por filas.

13. Probar que la equivalencia por filas es una relación de equivalencia.

14. Resolver cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

i) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

iii) $$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

iv) $$\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

v) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} X = O$$

$$vi)\quad \begin{cases} 6x+6y+5z+18t+20u=14 \\ 10x+9y+7z+24t+30u=18 \\ 12x+12y+13z+27t+35u=32 \\ 8x+6y+6z+15t+20u=16 \\ 4x+5y+4z+15t+15u=11 \end{cases}$$

15. Dado el polinomio $p=a+bx+cx^2$, se pide:

a) Los coeficientes a, b y c para que $p(1)=0$, $p(-2)=13$ y $p(2)=5$.

b) Las condiciones que deben cumplir los escalares y_1, y_2, y_3 e y_4 para que $p(-1)=y_1$, $p(1)=y_2$, $p(3)=y_3$ y $p(0)=y_4$.

16. Resolver cada una de los problemas que a continuación se detallan:

a) Determinar la condición que debe cumplir el escalar a para que no tenga solución el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} 7x_2-10x_3=4 \\ 2x_1-3x_2-4x_3=4 \\ x_1+2x_2-3x_3=a \end{cases}$$

b) Determinar el valor de a para que admita solución distinta de la trivial el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} X = O$$

c) Determinar el escalar k para que el sistema $AX=H$ tenga solución para toda $H \in \mathbb{R}^{3\times1}$, donde

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & k \end{bmatrix}$$

17. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax+2z=2 \\ 5x+2y=1 \\ x-2y+bz=3 \end{cases}$$

hallar los valores de a y b tales que:

i) El sistema no tiene solución.

ii) El sistema tiene solución única.

iii) El sistema tiene infinitas soluciones.

18. Hallar las condiciones que deben cumplir los escalares y_1, y_2, y_3 e y_4 para que tengan solución los sistemas siguientes:

a) $$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

19. Sean s_1, s_2, s_3 y s_4 substancias de pesos específicos 2, 3, 1 y 11 (en $g \cdot cm^{-3}$) respectivamente. Los precios por gramo son 2, 1, 5 y 3 (en $\$ \cdot g^{-1}$). Se pregunta: ¿bajo que condiciones es posible hacer una mezcla que pese 100 gramos, con un volúmen de 50 cm^3 y a un costo de 200 pesos.

20. Una fuente puede llenarse por dos conductos A y B en 70 minutos; por los conductos A y C en 84 minutos y por los conductos B y C en 140 minutos. ¿En cuánto tiempo se llena por cada uno de los conductos separadamente?

21. Las poblaciones A y B distan 112 Km. El camino entre ellas tiene una parte horizontal, una parte en subida y una parte en bajada. Un ciclista tarda 6 horas 15 minutos para ir de A hacia B y 6 horas 55 minutos para ir de B hacia A. Su velocidad es de $18\,Km/hora$ horizontalmente, $12\,Km/hora$ en subida y de $24\,Km/hora$ en bajada. La subida y la bajada tienen igual pendiente. Se pregunta: ¿Cuántos kilómetros hay en horizontal, cuántos en subida y cuántos en bajada desde A hacia B.

22. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\quad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -7 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b)\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

23. Se tienen tres barras l_1, l_2 y l_3 compuestas como sigue:

l_1: 20 gramos de oro, 30 gramos de plata y 40 gramos de cobre.

l_2: 30 gramos de oro, 40 gramos de plata y 50 gramos de cobre.

l_3: 40 gramos de oro, 50 gramos de plata y 90 gramos de cobre.

¿Qué peso debe tomarse de cada una de las barras para formar una barra que contenga 34 gramos de oro, 46 gramos de plata y 67 gramos de cobre?

24. Hallar los valores de h y k para los cuales tiene solución el sistema siguiente y resolverlo para estos valores:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 9x_4 = h \\ 4x_1 + 3x_2 + 13x_3 + 11x_4 = k \end{cases}$$

25. Hierón de Siracusa mandó hacer una corona de oro con un peso de 7465 gramos. Para saber si el joyero había sustituido oro por plata, Arquímedes sumergió la corona en el agua en donde perdió 467 gramos de peso. Sabiendo que el oro pierde en el agua $52/1000$ de su peso y la plata $95/1000$, se pregunta ¿qué cantidad de oro y de plata contenía la corona?