DERIVADA DIRECCIONAL

Definición

Sea

- $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (campo escalar)
- $\vec{x}_0$ punto interior del D_f

La derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ según la dirección del versor $\hat{u}$ es

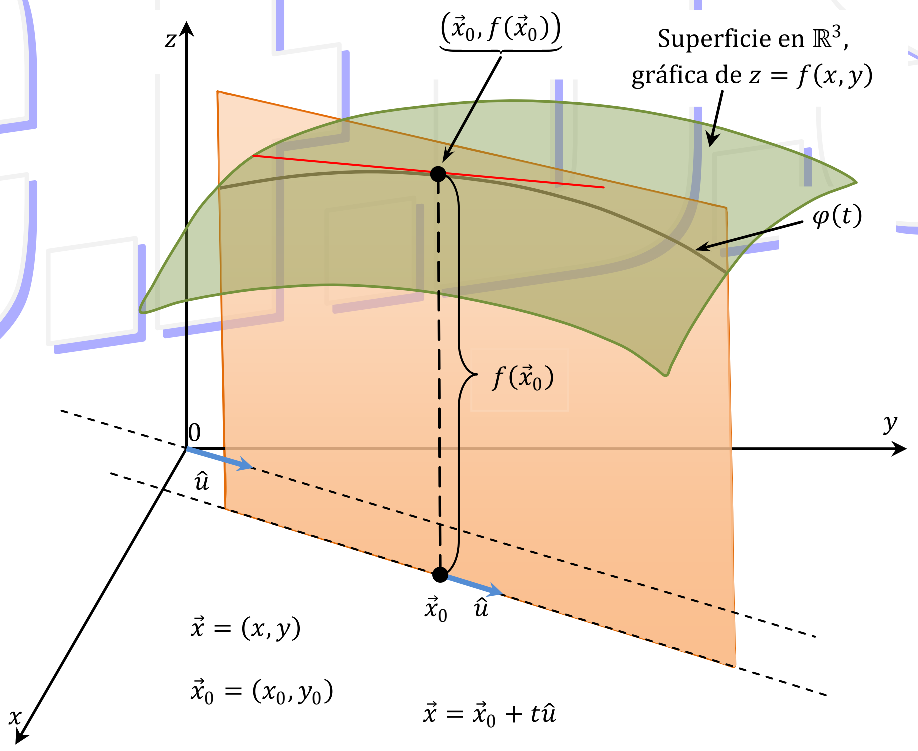
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(\vec{x}_0) = D_{\hat{u}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{u}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

Notaciones

siempre que este límite exista.

Interpretación geométrica

Llamando $\varphi(t) = f(\vec{x}_0 + t\hat{u})$ tenemos que $\varphi(0) = f(\vec{x}_0)$. Suponiendo que $n = 2$ o sea que $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.



Como $\varphi(t)$ es la curva de intersección de la gráfica de f con el plano vertical pasante por $\vec{x}_0$ en la dirección de $\hat{u}$, el límite de la definición:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+t\hat{u})-f(\vec{x}_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0)$$

da la pendiente de la recta tangente en $(0,\varphi(0))=\left(\vec{x}_0,f(\vec{x}_0)\right)$ a la curva $\varphi(t)$.

La derivada direccional también puede interpretarse como la razón de cambio de f en la dirección de $\hat{u}$ en $\vec{x}_0$.

Si en la definición cambiamos $\vec{x}_0$ por $\vec{x}$ obtenemos

$$D_{\hat{u}}f(\vec{x})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}+t\hat{u})-f(\vec{x})}{t}$$

Ejemplo

Obtenga la derivada direccional de la función $f(x,y)=x\cos(y)$ en el punto $\vec{x}_0=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ según la dirección $\hat{u}=(1,0)$.

Aplicando la definición

$$D_{\hat{u}}f\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)}_{\vec{x}_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)}^{\vec{x}_0}+t\,\overbrace{(1,0)}^{\hat{u}}\right)-f\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)}^{\vec{x}_0}}{t}$$

$$D_{\hat{u}}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)+(t,0)\right)-f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)}{t}$$

$$D_{\hat{u}}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+t,\frac{\pi}{4}+0\right)-f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)}{t}$$

$$D_{\hat{u}}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+t\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+t,\frac{\pi}{4}\right)}-\overbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)}}{t}$$

$$D_{\hat{u}}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+t\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{t}$$

$$D_{\hat{u}}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t}{t}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicios resueltos

1. Usando la definición, determine $D_{\hat{u}}f$ en el punto $\vec{x}=(x,y,z)$ cuando $f(x,y,z)=xz+y$; $\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{42}}(-5,4,1)$.

Solución

Primero verificamos que $\hat{u}$ sea un versor

$$\|\hat{u}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{42}}\right)^2((-5)^2+4^2+1^2)}=\sqrt{\frac{1}{42}(25+16+1)}=1$$

Aplicando la definición

$$D_{\hat{u}}f(x,y,z)=\lim_{t\to 0}\frac{f\big((x,y,z)+t\hat{u}\big)-f(x,y,z)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\left((x,y,z)+t\frac{1}{\sqrt{42}}(-5{,}4{,}1)\right)-f(x,y,z)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x-t\frac{5}{\sqrt{42}},y+t\frac{4}{\sqrt{42}},z+t\frac{1}{\sqrt{42}}\right)-f(x,y,z)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(x-t\frac{5}{\sqrt{42}}\right)\left(z+t\frac{1}{\sqrt{42}}\right)+y+t\frac{4}{\sqrt{42}}-(xz+y)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{xz+t\frac{x}{\sqrt{42}}-t\frac{5z}{\sqrt{42}}-t^2\frac{5}{42}+y+t\frac{4}{\sqrt{42}}-xz-y}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\frac{x}{\sqrt{42}} - t\frac{5z}{\sqrt{42}} - t^2\frac{5}{42} + t\frac{4}{\sqrt{42}}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\left(\frac{x}{\sqrt{42}} - \frac{5z}{\sqrt{42}} - t\frac{5}{42} + \frac{4}{\sqrt{42}}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{42}} - \frac{5z}{\sqrt{42}} - t\frac{5}{42} + \frac{4}{\sqrt{42}}\right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{42}} - \frac{5z}{\sqrt{42}} + \frac{4}{\sqrt{42}}$$

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{42}}(x - 5z + 4)}$$

---

2. Halle $D_{\hat{u}} f$ mediante el cálculo de $\varphi'(0)$, donde $\varphi(t) = f(\vec{x} + t\hat{u})$, cuando $f(x,y,z) = e^{xy} + \ln z$; $\quad \vec{u} = (2,0,3)$.

__Solución__

Primero buscamos un versor con la dirección del vector $\vec{u}$.

Esto es:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(2,0,3)}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,0,3)$$

y recordando que:

$$D_{\hat{u}} f(\vec{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x} + t\hat{u}) - f(\vec{x})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

tenemos que

$$\varphi(t) = f(\vec{x} + t\hat{u}) = f\left((x,y,z) + t\frac{1}{\sqrt{13}}(2,0,3)\right)$$

$$\varphi(t) = f\left(x + \frac{2t}{\sqrt{13}}, y, z + \frac{3t}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\varphi(t) = e^{\left(x + \frac{2t}{\sqrt{13}}\right)y} + \ln\left(z + \frac{3t}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\varphi'(t) = \frac{2y}{\sqrt{13}} e^{\left(x+\frac{2t}{\sqrt{13}}\right)y} + \frac{3}{\sqrt{13}} \left(\frac{1}{z + \frac{3t}{\sqrt{13}}} \right)$$

$$\varphi'(0) = \frac{2y}{\sqrt{13}} e^{xy} + \frac{3}{\sqrt{13}} \frac{1}{z}$$

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(x,y,z) = \varphi'(0) = \tfrac{1}{\sqrt{13}} \left(2ye^{xy} + \tfrac{3}{z} \right)}$$

DERIVADAS PARCIALES

Definición

Sea

* $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (campo escalar)
* $\vec{x}_0$ punto interior del D_f

La derivada parcial de f respecto de la variable x_i en $\vec{x}_0$ es la derivada direccional de f en $\vec{x}_0$ según la dirección $\hat{e}_i$ (i-ésimo versor de la base canónica de $\mathbb{R}^n$):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Cambiando $\vec{x}_0$ por $\vec{x}$ tenemos la **función derivada parcial** de f respecto de x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\hat{e}_i) - f(\vec{x})}{t}$$

Podemos decir que:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es la derivada de f respecto de la variable x_i manteniendo fijas al resto de las variables.

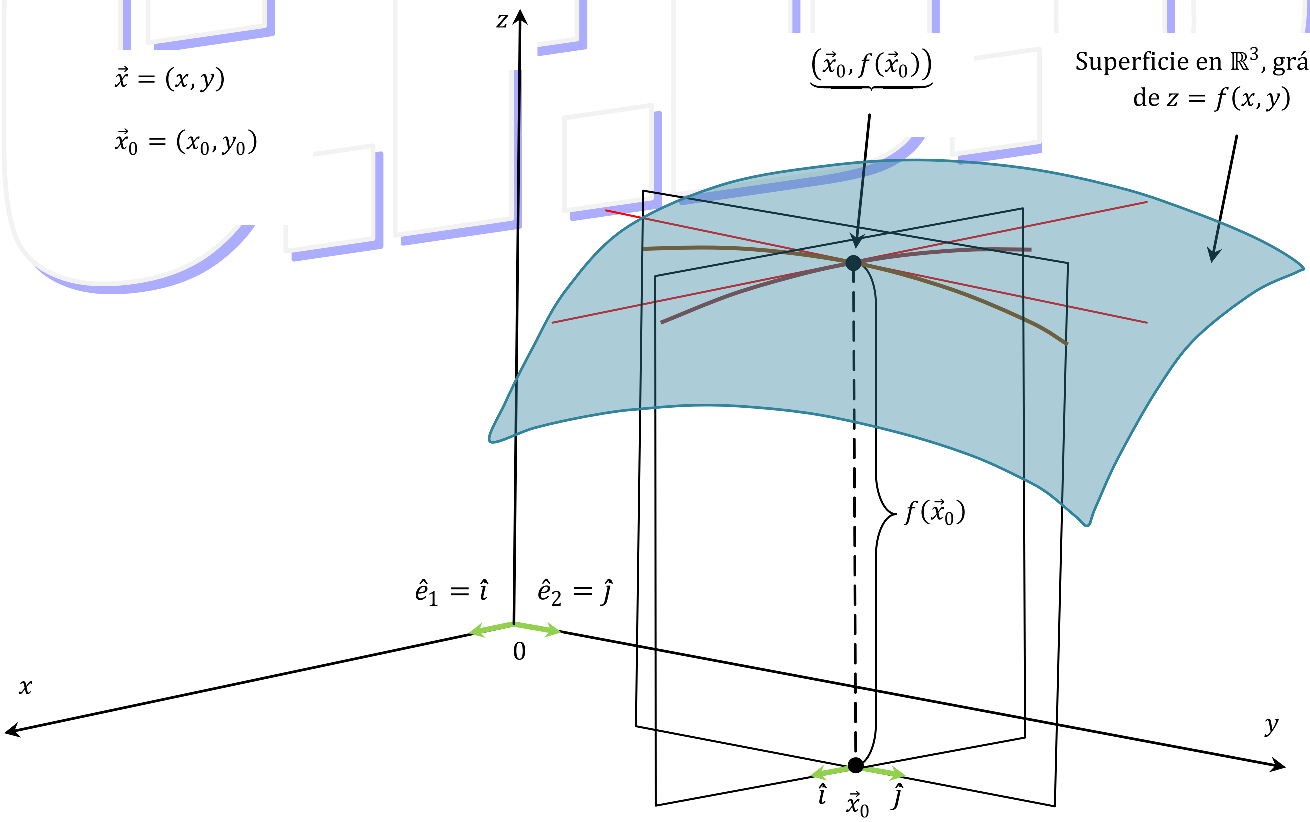
Por lo tanto las reglas de derivación de AMI se mantienen.

Notaciones equivalentes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad , \quad f_{x_i}$$

Interpretación geométrica

Suponiendo que $n = 2$ o sea que $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tenemos x_i con $i = 1{,}2$; es decir $x_1 = x$ y $x_2 = y$.



Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$ dan las pendientes de las rectas tangentes en el punto $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ de las curvas de intersección entre la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ y los planos verticales pasantes por el punto $\vec{x}_0$ en las direcciones $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ respectivamente.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ se interpreta también como la razón (o rapidez) de cambio de f en la dirección de $\hat{\imath}$, o sea del eje x.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ se interpreta también como la razón (o rapidez) de cambio de f en la dirección de $\hat{\jmath}$, o sea del eje y.

Ejercicios resueltos

Determine las derivadas parciales de f cuando

a) $f(x,y) = x^2y^2 + y$

Las derivadas parciales son:

Derivo respecto de la variable x (mantengo fija a la variable y)

Derivo respecto de la variable y (mantengo fija a la variable x)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2xy^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2x^2y + 1}$$

---

b) $f(x,y,z) = \frac{x^2z+y+2}{1+x^2}$

Recordando la regla de derivada de un cociente de AMI

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$u = x^2z + y + 2$

$v = 1 + x^2$

Manteniendo fijas las variables y y z, derivo respecto de x utilizando la regla de la derivada de un cociente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\overbrace{2xz}^{u'}\,\overbrace{(1+x^2)}^{v} - \overbrace{(x^2z+y+2)}^{u}\,\overbrace{2x}^{v'}}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{v^2}}$$

$$f_x = \frac{2xz + 2x^3z - 2x^3z - 2xy - 4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f_x = \frac{2xz - 2xy - 4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{2x(z-y-2)}{(1+x^2)^2}}$$

Como f puede expresarse

$$f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2}(x^2 z + y + 2)$$

tenemos que al derivar respecto de las variables y y z, $\frac{1}{1+x^2}$ es una constante por lo tanto obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = \frac{x^2}{1+x^2}}$$

---

c) $\boldsymbol{f(x,y) = x^{y^2}}$

Para derivar respecto de x aplicamos la regla de derivación de AMI:

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ con $u = x, n = y^2$.

$$\boxed{f_x = y^2 x^{y^2-1}(1) = y^2 x^{y^2-1}}$$

Para derivar respecto de y aplicamos la regla de derivación de AMI:

$(a^u)' = a^u \ln(a)\, u'$ con $a = x, u = y^2$

$$\boxed{f_y = 2yx^{y^2} ln(x)}$$

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

El proceso de tomar derivada parcial puede ser repetido.

La derivada parcial de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ respecto de la j ésima variable se denota

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} = \left(f_{x_i}\right)_{x_j} = f_{x_i x_j}$$

y la derivada parcial de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ respecto de x_i se denota

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2} = \left(f_{x_i}\right)_{x_i} = f_{x_i x_i}$$

Este proceso puede repetirse indefinidamente mientras las derivadas parciales existan. Son las llamadas derivadas parciales de orden superior.

Si

n: número de variables de f

N: orden de la derivada de f

Entonces

Cantidad de derivadas de orden N de $f = n^N$

Las derivadas parciales de segundo orden para una función de 2 variables $f(x,y)$ son:

$$f_{xx},\, f_{xy}$$

$$f_{yy},\, f_{yx}$$

Hay $2^2 = 4$ combinaciones

Las derivadas parciales de segundo orden para una función de 3 variables $f(x,y,z)$ son:

$$f_{xx},\, f_{xy},\, f_{xz}$$

$$f_{yy},\, f_{yx},\, f_{yz}$$

$$f_{zz},\, f_{zx},\, f_{zy}$$

Hay $3^2 = 9$ combinaciones

Las derivadas parciales de tercer orden para una función de 2 variables $f(x,y)$ son:

$$f_{xxx},\, f_{xxy},\, f_{xyx},\, f_{yxx}$$

$$f_{yyy},\, f_{yyx},\, f_{yxy},\, f_{xyy}$$

Hay $2^3 = 8$ combinaciones

Las derivadas parciales de tercer orden para una función de 3 variables $f(x,y,z)$ son:

$$f_{xxx},\, f_{xxy},\, f_{xyx},\, f_{yxx},\, f_{xxz},\, f_{xzx},\, f_{zxx},\, f_{xyz},\, f_{xzy}$$

$$f_{yyy},\, f_{yyx},\, f_{yxy},\, f_{xyy},\, f_{yyz},\, f_{yzy},\, f_{zyy},\, f_{yxz},\, f_{yzx}$$

$$f_{zzz},\, f_{zzx},\, f_{zxz},\, f_{xzz},\, f_{zzy},\, f_{zyz},\, f_{yzz},\, f_{zxy},\, f_{zyx}$$

Hay $3^3 = 27$ combinaciones

TEOREMA

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si $f_{x_i x_j}$ y $f_{x_j x_i}$ (llamadas derivadas parciales mixtas) son continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, entonces:

$$f_{x_i x_j}(\vec{x}_0) = f_{x_j x_i}(\vec{x}_0)$$

Ejercicios resueltos

Determine todas las derivadas parciales de segundo orden de f cuando

a) $f(x,y) = xy^2 + e^{xy}$

$$f_x = y^2 + ye^{xy} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = y^2 e^{xy} \\ f_{xy} = 2y + e^{xy} + xye^{xy} \end{cases}$$

Derivadas parciales mixtas iguales

$$f_y = 2xy + xe^{xy} \Rightarrow \begin{cases} f_{yy} = 2x + x^2 e^{xy} \\ f_{yx} = 2y + e^{xy} + xye^{xy} \end{cases}$$

---

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\longrightarrow$ $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$f_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$f_x = \underbrace{x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}} = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

Derivo respecto de x

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = x$$

$$v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Derivo respecto de y

Derivo respecto de z

$$f_{xy} = -\frac{1}{2}x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(2y)$$

$$\boxed{f_{xy} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

$$\boxed{f_{xz} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

$$f_{xx} = \frac{1\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{f_{xx} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \forall (x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2y) = \underbrace{y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}} = \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

Derivo respecto de x

Derivo respecto de y

Derivo respecto de z

$$f_{yx} = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\forall(x,y,z) \neq (0,0,0)$$

$$f_{yz} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\forall(x,y,z) \neq (0,0,0)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$u = y$$

$$v = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f_{yy} = \frac{1\sqrt{x^2+y^2+z^2}-y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\frac{x^2+y^2+z^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f_{yy} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\forall(x,y,z) \neq (0,0,0)$$

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_z = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2z) = \underbrace{z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}} = \underbrace{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

Derivo respecto de x

Derivo respecto de z

Derivo respecto de y

$$f_{zx} = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\forall(x,y,z) \neq (0,0,0)$$

$$f_{zy} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\forall(x,y,z) \neq (0,0,0)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$u = z$$

$$v = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f_{zz} = \frac{1\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\frac{x^2+y^2+z^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$f_{zz} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\forall(x,y,z) \neq (0,0,0)$$

Para una función de AMI $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\boldsymbol{f} \textbf{ derivable } \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} \boldsymbol{f} \textbf{ continua}$$

Ahora, para una función de varias variables $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $n = 2,3,\cdots$) se tiene que:

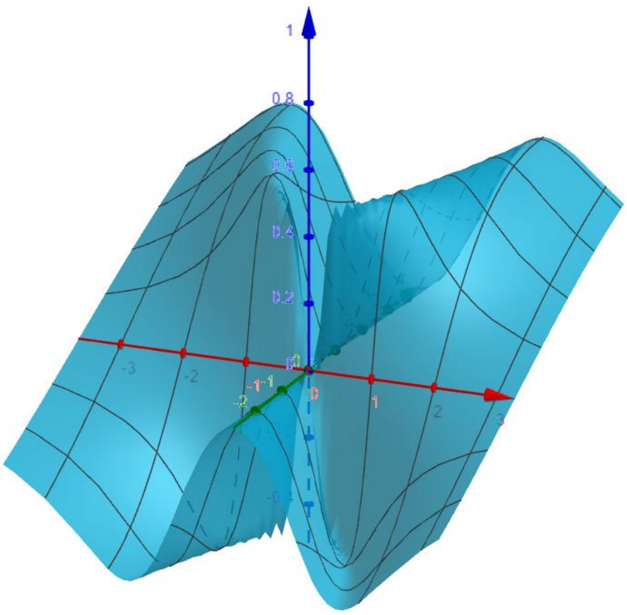
$$\textbf{Existen todas las derivadas direccionales de } \boldsymbol{f} \quad \nRightarrow \quad \boldsymbol{f} \textbf{ continua}$$

<u>Ejemplo</u>

Para la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

cuya gráfica es:



Demuestre que en el origen existe la derivada direccional en cualquier dirección pero f no es continua allí.

<u>Solución</u>

Sea $\hat{u} = (u_1, u_2)$ un versor

Este es un ejemplo en donde se puede ver que la mera existencia de todas las derivadas direccionales no implica si quiera que la función sea continua.

$$D_{\hat{u}} f\,\overbrace{(0,0)}^{\vec{x}_0} \stackrel{?}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\overbrace{(0,0)}^{\vec{x}_0} + t\,\overbrace{(u_1,u_2)}^{\hat{u}}\right) - f\,\overbrace{(0,0)}^{\vec{x}_0}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1,tu_2) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tu_1)^2 tu_2}{(tu_1)^4 + (tu_2)^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3u_1^2u_2}{t^2(t^2u_1^4 + u_2^2)}}{t}$$

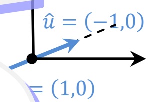
$$= \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2u_2}{t^2u_1^4 + u_2^2}$$

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{u_1^2}{u_2}, si\ u_2 \neq 0 \\ 0\,, si\ u_2 = 0\ (\Rightarrow u_1 = \pm 1) \end{cases}}$$

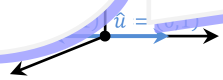
Esto demuestra que el límite existe en $(0,0)$ cualquiera sea $\hat{u}$, es decir, existe la derivada direccional de f en $(0,0)$ en cualquier dirección.

En particular, el valor de la derivada direccional de f en $(0,0)$ es 0 cuando

$u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = \pm 1$ (es decir, en ambos sentidos de la dirección del eje x)



Cuando $u_2 \neq 0$ el valor de la derivada direccional de f en $(0,0)$ es $\frac{u_1^2}{u_2}$, en particular si $u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = \pm 1$, la derivada direccional de f en $(0,0)$ en ambos sentidos de la dirección del eje y es también cero.



Para el resto de las direcciones, con $u_1 \neq 0 \wedge u_2 \neq 0 / u_1^2 + u_2^2 = 1$, el valor de la derivada direccional de f en $(0,0)$ es $\frac{u_1^2}{u_2} \neq 0$.

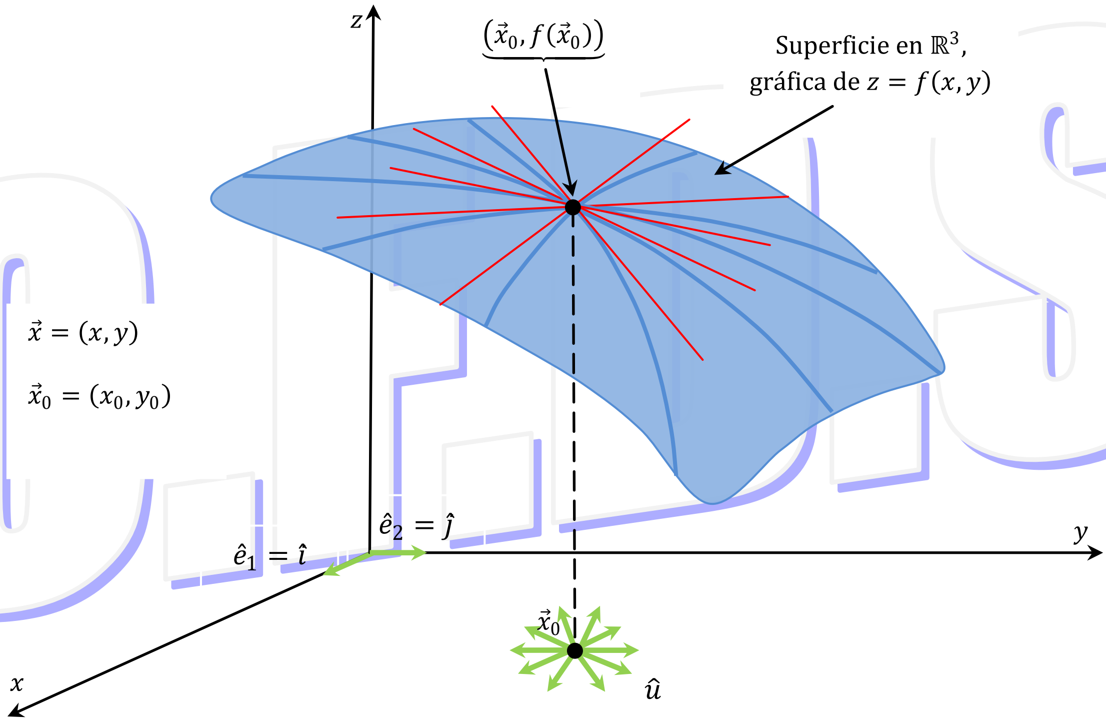
Para demostrar que f no es continua en el origen, consideremos el siguiente conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$ y hagamos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \vec{x}\in S}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq \overbrace{0}^{f(0,0)} \Rightarrow f\ NO\ es\ continua\ en\ (0,0)$$

Para una función de varias variables $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $n = 2,3,\cdots$) se tiene que:

Existen todas las derivadas direccionales de f $\Rightarrow$ Existen las derivadas parciales de f

Por ejemplo, para una función de ecuación $z = f(x,y)$ cuya gráfica sea:



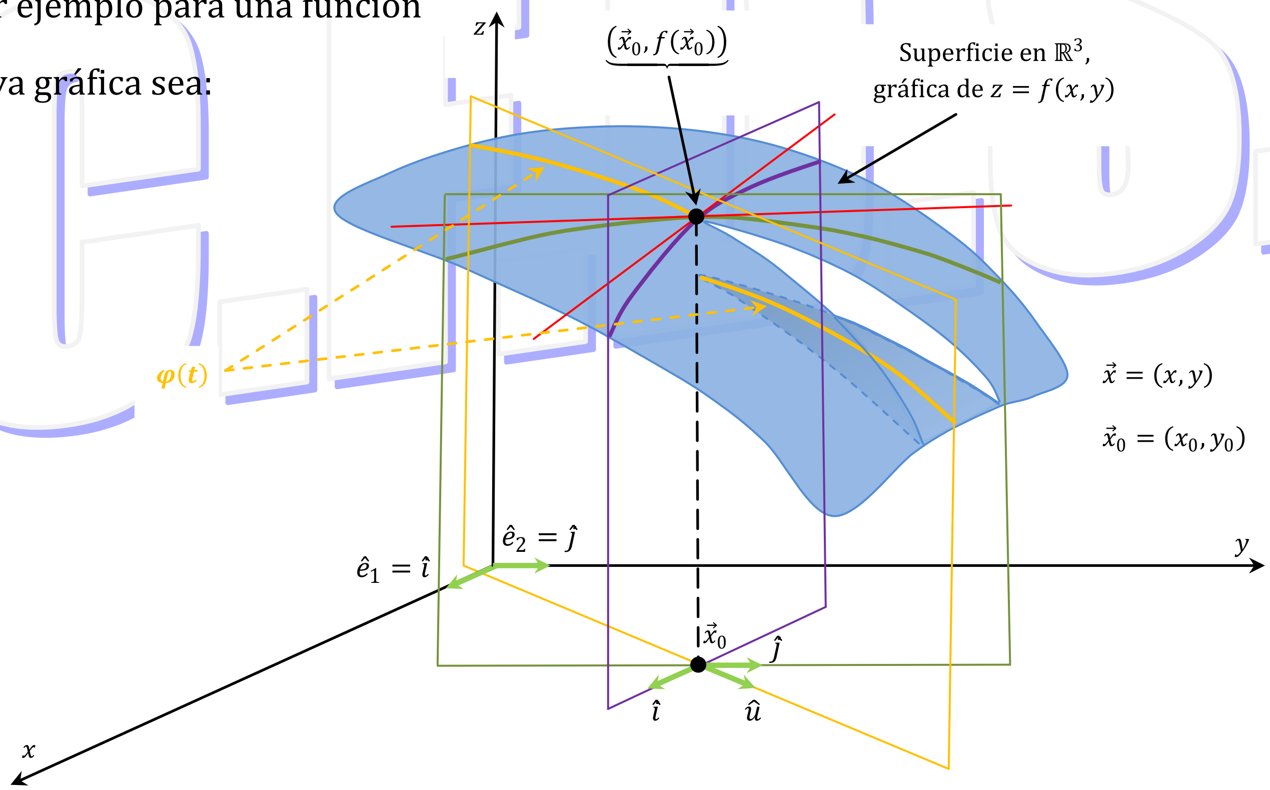
Puede verse que en el punto $\vec{x}_0$, f tiene derivada en cualquier dirección.

Ahora:

Existen las derivadas parciales de f $\not\Rightarrow$ Existen todas las derivadas direccionales de f

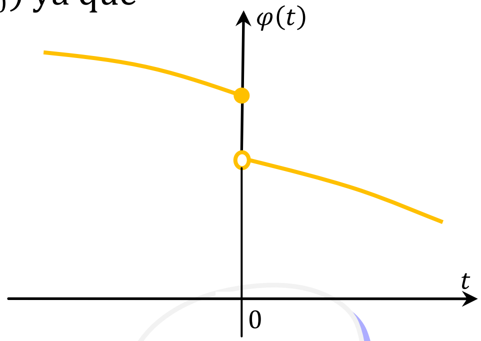
Por ejemplo para una función

cuya gráfica sea:



Se tiene que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$, pero no existe $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(\vec{x}_0)$ ya que

$$\nexists \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{\varphi(t)}^{f(\vec{x}_0+t\hat{u})} \overbrace{-\varphi(0)}^{f(\vec{x}_0)}}{t} \quad \text{porque} \quad \lim_{t\to 0^-}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \neq \lim_{t\to 0^+}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$$



O sea que no existe la recta tangente a la curva $\varphi(t)$ en el punto $(0,\varphi(0)) = (\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$.

Luego, podemos afirmar que:

Existen todas las derivadas direccionales de f $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ **Existen las derivadas parciales de f**

DIFERENCIABILIDAD

DEFINICIÓN

Sea

- $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
- $\vec{x}_0$ punto interior del $D_{\vec{f}}$

Decimos que $\vec{f}$ es **diferenciable** en $\vec{x}_0$ si y sólo si existe una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = \vec{0}$$

Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ entonces la matriz de L (en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$) es la **matriz Jacobiana de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$**:

$$J\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{f}\,'(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Representa a la **derivada** del **campo vectorial** $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$.

Cuando $m = 1$

$$f'(\vec{x}_0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \quad \cdots \quad , \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)$$

es el **"gradiente de f en $\vec{x}_0$"** y representa a la **derivada** del **campo escalar** f en $\vec{x}_0$.

TEOREMA

Si $\vec{f}$ es **diferenciable** en $\vec{x}_0$, entonces $\vec{f}$ es **continua** en $\vec{x}_0$.

Ahora, que $\vec{f}$ sea continua en $\vec{x}_0$ no garantiza que $\vec{f}$ sea diferenciable en $\vec{x}_0$. Esto es: la continuidad es una condición necesaria pero no suficiente para la diferenciabilidad.

Es decir, si $\vec{f}$ no es continua en $\vec{x}_0$ entonces $\vec{f}$ no es diferenciable en $\vec{x}_0$; pero si $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$, $\vec{f}$ puede ser o no diferenciable en $\vec{x}_0$.

Podemos afirmar que:

$$\text{Diferenciabilidad} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{Continuidad}$$

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD

TEOREMA

Sea

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Si todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ son continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, entonces $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$.

Las condiciones que fija este teorema son suficientes pero no necesarias, es decir que si las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ no son continuas en un entorno de $\vec{x}_0$ entonces $\vec{f}$ puede ser o no diferenciable en $\vec{x}_0$.

Por ejemplo, si existen las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ pero no son todas continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, $\vec{f}$ puede ser aún diferenciable en $\vec{x}_0$ si es que existe una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}$$

En caso de existir esa lineal, ésta vendrá representada (en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$) por la matriz jacobiana de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$, cuyos elementos son las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$.

Podemos afirmar que:

$$\text{Derivadas parciales continuas} \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \ \text{Diferenciable}$$

FUNCIONES CONTINUAMENTE DIFERENCIABLES

$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es **continuamente diferenciable** en $\vec{x}_0$ si y sólo si todos los elementos de la matriz jacobiana de $\vec{f}$ son funciones continuas en un entorno de $\vec{x}_0$.

FUNCIONES CLASE C^N

$* \ \vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m; \quad D_{\vec{f}}$ abierto

$* \ D \subset D_{\vec{f}}$

Si todas las derivadas parciales de N-ésimo orden de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ son continuas en D, entonces se dice que $\vec{f}$ es una función clase C^N en D y se denota $\vec{f} \in C^N(D)$.

Si $\vec{f}$ es continua en D se dice que $\vec{f} \in C^0(D)$.

Si $\vec{f} \in C^N(D)$ con $N \geq 1 \ \Rightarrow \ \vec{f} \in C^{N-1}(D)$.

RESUMEN

Para un **campo escalar** $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene que:

		Continua				
		$\Uparrow \not\Downarrow$				
Derivadas parciales continuas	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	Diferenciable	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	Existen todas las derivadas direccionales	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	Existen todas las derivadas parciales
		$\Updownarrow$				

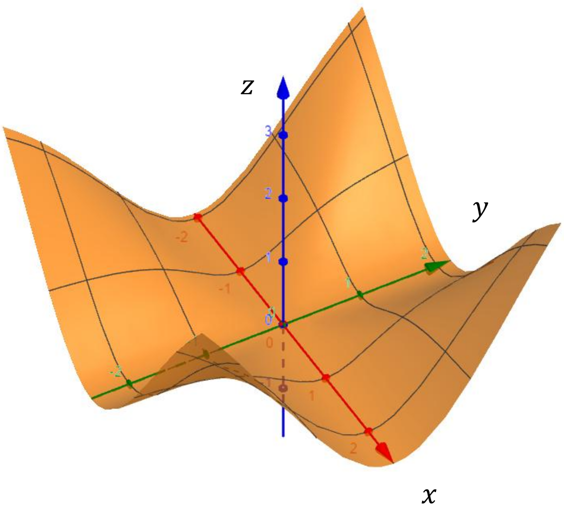
$$\exists\ L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad /$$

$$\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Ejemplo

Para la siguiente función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ;\ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Demuestre si es o no continua en $(x,y) = (0,0)$.
b) Obtenga si existen las derivadas parciales en $(x,y) = (0,0)$.
c) Demuestre si es o no diferenciable en $(x,y) = (0,0)$.



Solución

a) Se puede demostrar que f es continua en (0,0) del siguiente modo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \mid \ 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \ 0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \underbrace{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2}}_{\substack{\text{Se utilizan} \\ x^2+y^2 = \|\vec{x}\|^2 \\ x^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \\ y^2 \leq \|\vec{x}\|^2}} = \|\vec{x}\|^2 < \delta^2 < \varepsilon$$

$\delta < \sqrt{\varepsilon}$, f es continua en (0,0)

b) Recordando que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(1,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + (t,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\big(f(t,0) - f(0,0)\big)\right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\left(\frac{t^2 0^2}{t^2+0^2} - 0\right)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{0}{t^3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\big(f(0,t) - f(0,0)\big)\right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\left(\frac{0^2 t^2}{0^2+t^2} - 0\right)\right]$$

C.F.D.S.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{0}{t^3}\right) = 0$$

c) Recordando que si f es diferenciable en $\vec{x}_0$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \vec{\nabla} f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Como $\vec{x} = (x, y)$ y $\vec{x}_0 = (0,0)$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \vec{\nabla} f(0,0) \binom{x-0}{y-0}}{\|(x,y)\|} = 0$$

En este caso para que f sea diferenciable en (0,0) se tiene que cumplir que:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 - \overbrace{(0 \quad 0)}^{=0} \binom{x-0}{y-0}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Lo cual se puede demostrar que si se cumple del siguiente modo: (aplicando la definición de límite)

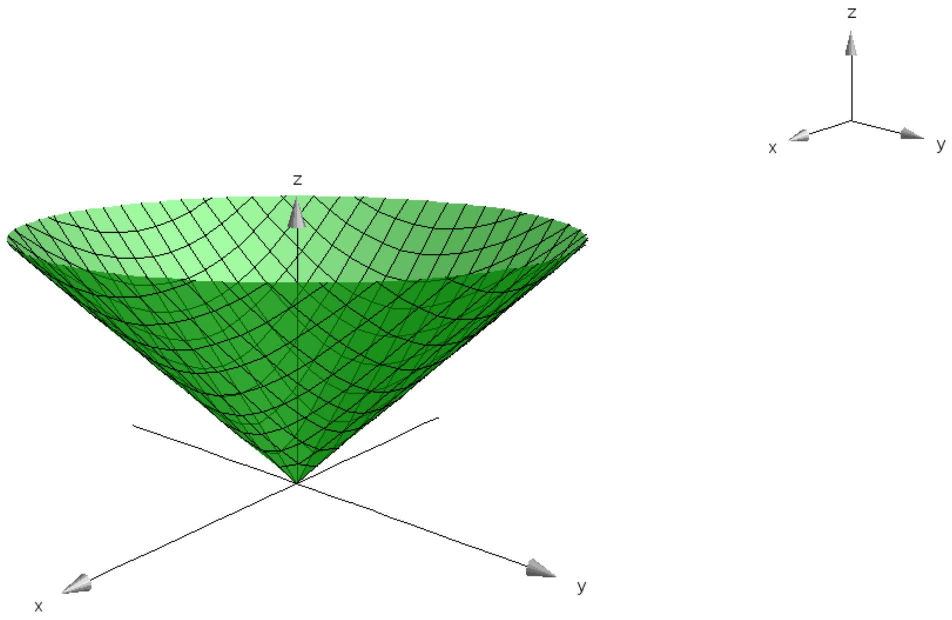
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < \|\vec{x}\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2 \|\vec{x}\|} = \|\vec{x}\| < \delta < \varepsilon$$

f es diferenciable en (0,0)

Ejercicios

1. Demuestre que la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es continua en el origen pero no es diferenciable allí.

La gráfica de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es:



CONO CIRCULAR

Solución

Se puede demostrar que esta función es continua en (0,0) del siguiente modo:

Como $f(0,0) = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$, lo que hay que demostrar es que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = \underbrace{0}_{f(0,0)}$$

O sea

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \mid \ 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left|\sqrt{x^2 + y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \mid \ 0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \|\vec{x}\| < \delta < \varepsilon$$

$$\delta < \varepsilon, \quad f \text{ es continua en } (0,0)$$

Se puede comprobar que f no es diferenciable en (0,0) (punto interior del dominio de f) si hacemos

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} \nexists \Rightarrow \nexists f_x(0,0)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} \nexists \Rightarrow \nexists f_y(0,0)$$

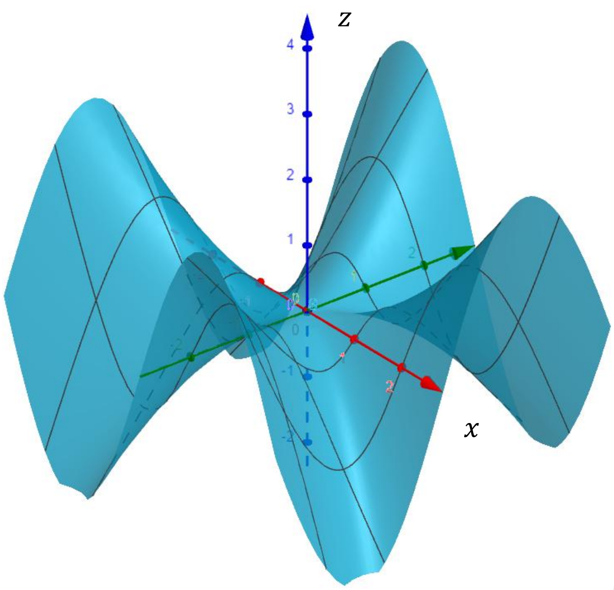
O sea que $\nexists \ \vec{\nabla} f(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

---

2. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & ; \ si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Analizar la continuidad en el punto $(0,0)$.
b) ¿Existen las derivadas parciales en $(0,0)$?
c) ¿Es diferenciable en $(0,0)$?



a) Se puede demostrar que la función es continua en $(0,0)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \mid \ 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left| \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

C.F.D.S.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{|x^3y - xy^3|}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{|x^3y + (-xy^3)|}{x^2+y^2} \le \frac{x^2|xy| + y^2|xy|}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)|x||y|}{x^2+y^2}} < \varepsilon$$

Desigualdad triangular

$$|a+b| \le |a| + |b|; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\left|\overbrace{x^3y}^{a} + \overbrace{(-xy^3)}^{b}\right| \le \left|\overbrace{x^3y}^{a}\right| + \left|\overbrace{-xy^3}^{b}\right| = x^2|x||y| + y^2|x||y| = (x^2+y^2)|x||y|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \mid \ 0 < \delta \ \Rightarrow \ \frac{|x^3y - xy^3|}{x^2+y^2} \le |x||y| \le \|\vec{x}\|\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|^2 < \delta^2 < \varepsilon$$

$\delta < \sqrt{\varepsilon}$, f es continua en (0,0)

b) $f_x(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \left[\frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right)\right]$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t}\left(\frac{t^3 0 - t 0^3}{t^2 + 0^2}\right)\right]$$

$$= 0$$

$f_y(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \left[\frac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right)\right]$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t}\left(\frac{0^3 t - 0 t^3}{0^2 + t^2}\right)\right]$$

$$= 0$$

Sí, existen las derivadas parciales en (0,0) y valen 0.

c) Es diferenciable en (0,0) ya que se puede demostrar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Aplicando la definición de límite

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \mid 0<\|\vec{x}\|<\delta \Rightarrow \frac{|x^3y-xy^3|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2|xy|+y^2|xy|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^2+y^2)|x||y|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \mid 0<\|\vec{x}\|<\delta \Rightarrow \frac{|x^3y-xy^3|}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \|\vec{x}\| < \delta < \varepsilon$$

f es diferenciable en $(0,0)$

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1

Para la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{4x^2+4y^2}} & ;\ si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Demuestre si es o no continua en $(x,y)=(0,0)$.
(b) Obtenga, si existen, las derivadas parciales en $(x,y)=(0,0)$.
(c) Demuestre si es o no diferenciable en $(x,y)=(0,0)$.

Solución

(a) A continuación se demuestra que f es continua en $(0,0)$.

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \mid 0<\|\vec{x}-\vec{x}_o\|<\delta \wedge \vec{x}\in D_f \Rightarrow |f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)|<\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ | 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left| \frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \left| \frac{2xy}{\sqrt{4(x^2 + y^2)}} \right| = \frac{2|x||y|}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \|\vec{x}\| < \delta \ < \varepsilon$$

(b) $f_x(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \left(f(t,0) - f(0,0) \right) \right] = \lim\limits_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \left(\frac{2t(0)}{\sqrt{4t^2 + 4(0^2)}} - 0 \right) \right]$

$= 0$

$f_y(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \left(f(0,t) - f(0,0) \right) \right] = \lim\limits_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \left(\frac{2(0)t}{\sqrt{4(0^2) + 4t^2}} - 0 \right) \right]$

$= 0$

(c) Se demuestra que f no es diferenciable en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left(f_x(0,0) \ \ f_y(0,0) \right) \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} - 0 - (0 \ \ 0) \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \overset{?}{=} 0$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}\sqrt{x^2 + y^2}} \overset{?}{=} 0$$

Si elijo $S = \{(x,y) | y = x\}$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2xy}{2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (x,y) \in S}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$

Ejercicio 2

Para la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\dfrac{1}{y} & ;\ si \quad y\neq 0\\ 0 & ;\ si \quad y=0\end{cases}$$

(a) Demuestre si es o no continua en $(x,y)=(0,0)$.

(b) Obtenga, si existen, las derivadas parciales en $(x,y)=(0,0)$.

(c) Diga si es o no diferenciable en $(x,y)=(0,0)$. Justifique su respuesta.

Solución

(a) Como $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{y}\right]=\lim\limits_{y\to 0}\left[-\frac{1}{y}\right]\nexists \Rightarrow f$ no es continua en $(0,0)$

(b) $$f_x(0,0)=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left(\underbrace{f(t,0)}_{=0}-f(0,0)\right)\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}(0-0)\right]=0$$

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\big(f(0,t)-f(0,0)\big)\right]=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left(\left(\frac{0^2-t^2}{0^2+t^2}\right)\frac{1}{t}-0\right)\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[-\frac{1}{t^2}\right]\nexists\Rightarrow\nexists f_y(0,0)$$

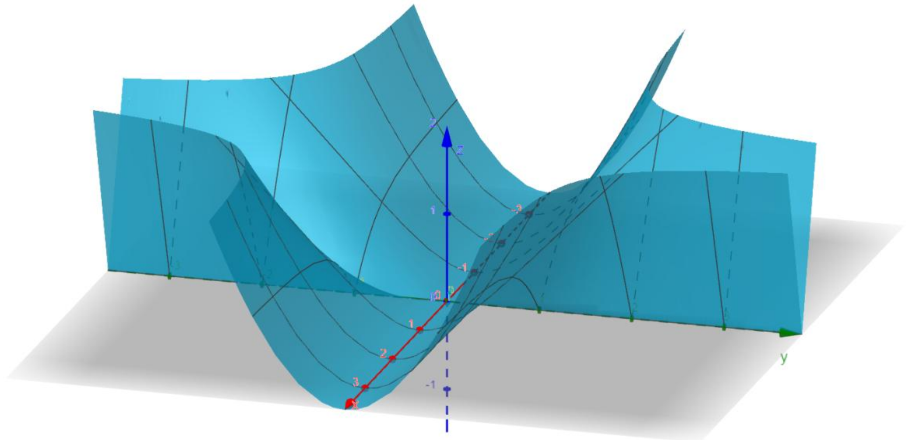
(c) Como f no es continua en $(0,0)\Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo

La siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|y^2}{\sqrt{|x|^2+y^2}} & ;\quad si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\quad si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

cuya gráfica es:



es diferenciable en (0,0).

Demostración

Primero se calculan las derivadas parciales en (0,0):

$$f_x(0,0) = \lim_{t \to 0}\left[\frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right)\right] = \lim_{t \to 0}\left[\frac{1}{t}\left(\frac{|t|0^2}{\sqrt{|t|^2 + 0^2}}\right)\right] = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t \to 0}\left[\frac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right)\right] = \lim_{t \to 0}\left[\frac{1}{t}\left(\frac{|0|t^2}{\sqrt{|0|^2 + t^2}}\right)\right] = 0$$

Luego se hace:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \begin{pmatrix} f_x(0,0) & f_y(0,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix}}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{|x|y^2}{\sqrt{|x|^2 + y^2}} - 0 - 0x - 0y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{\sqrt{|x|^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2}$$

Y se demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} = 0$ del siguiente modo:

$$0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} - 0\right| = \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

$$0 < \|\vec{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2} = \|\vec{x}\| < \delta \; < \varepsilon$$