Unidad 2: Programación Lineal

Clase Semana 09-08

Ejemplo: modelo

$$
\begin{aligned}
\text{Máx. (Z)} = \quad & 70\,x_1 + 40\,x_2 \\
\text{S a} \quad & 2\,x_1 + 5\,x_2 <= 2.000 \\
& 1\,x_1 + 1\,x_2 <= 500 \\
& 2\,x_1 + 1\,x_2 <= 800 \\
& x_1 \;;\; x_2 >= 0
\end{aligned}
$$

Forma estándar

$$
\begin{aligned}
\text{Máx. (Z)} = \quad & 70\,x_1 + 40\,x_2 + 0S1 + 0S2 + 0S3 \\
\text{S a} \quad & \left\{ \begin{aligned}
& 2\,x_1 + 5\,x_2 + S1 = 2.000 \\
& 1\,x_1 + 1\,x_2 + S2 = 500 \\
& 2\,x_1 + 1\,x_2 + S3 = 800
\end{aligned} \right\} \\
& x_1 \;;\; x_2 \;,\; S1, S2, S3 >= 0
\end{aligned}
$$

Forma estándar

Forma estándar

$$\text{Máx. }(Z) = 70\,x_1 + 40\,x_2 + 0\,s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$\text{S a}\quad \left.\begin{cases} 2\,x_1 + 5\,x_2 + s_1 = 2.000 \\ 2\,x_1 + 1\,x_2 + s_2 = 800 \\ 1\,x_1 + 1\,x_2 + s_3 = 500 \end{cases}\right\}\ \text{Sistema ecuaciones}$$

$$x_1\ ;\ x_2\ ;\ s_1\ ;\ s_2\ ;\ s_3 >= 0$$

Tenemos un sistema de ecuaciones que es compatible indeterminado, es decir que tiene infinitas soluciones.

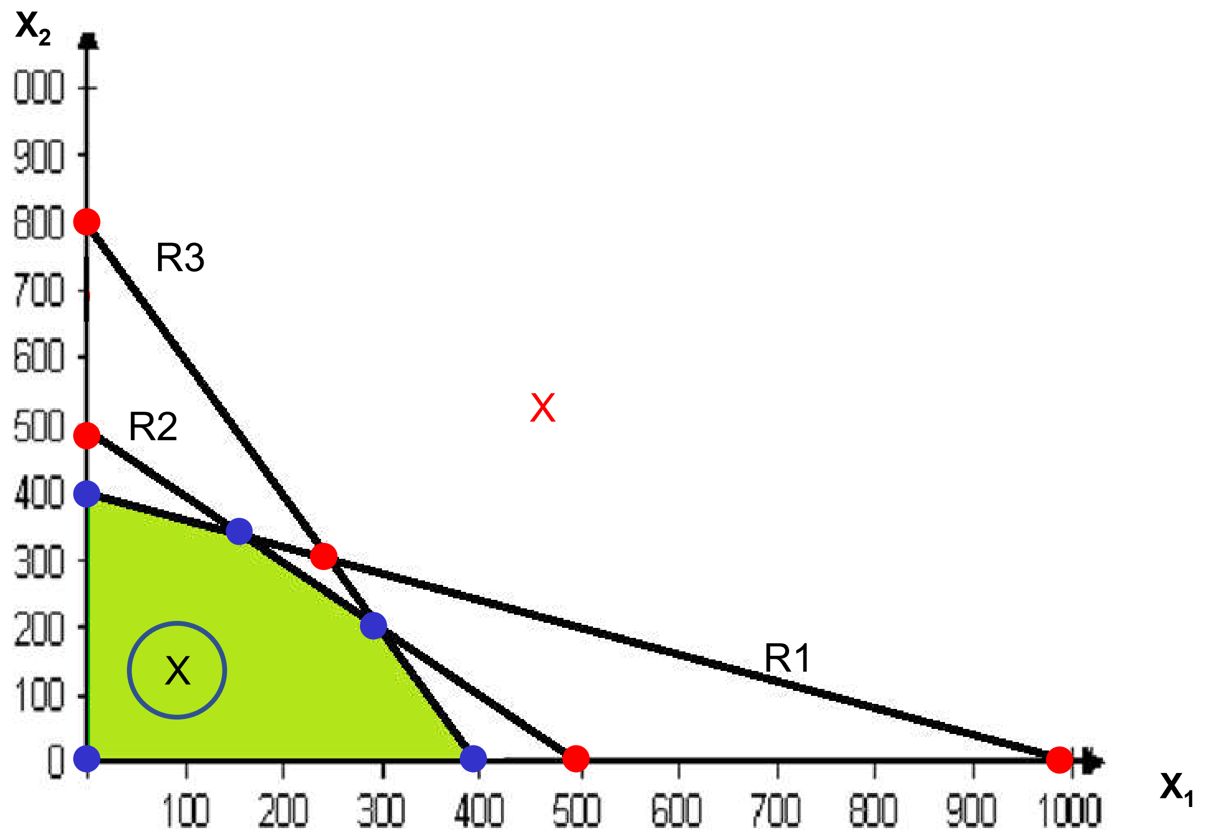
Podemos obtener una solución básica haciendo n-m variables = 0

Cantidad de soluciones básicas

$$C\binom{n}{m} = n!/[(n-m)!m!]$$

$$=5!/[(5-3)!\ *3!] =10$$

¿Dónde están esas soluciones?



Repasando los tipos de soluciones

Todas las $x_j \geq 0$

Solución Factible o Posible

<u>Más</u> de *m* $x_j > 0$

Solución Factible

No Básica

<u>No más</u> de *m* $x_j > 0$

Solución Factible

Básica

<u>Exactamente</u> de *m* $x_j > 0$

No Degenerada

<u>Menos</u> de *m* $x_j > 0$

Degenerada

Modelo Matemático General de PL

- Forma Matricial canónica

$$\textbf{Maximizar } Z = C\,X$$

$$A\,X \leq B$$

$$X \geq \phi$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1, c_2, \dots, c_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Modelo Matemático General de PL

- Forma vectorial estándar

$$\text{Máx} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sa

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = P_0$$

$$x_j \geq 0, \forall j$$

$$P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad P_0 = B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Supuestos del modelo de PL

- Un solo objetivo.
- Un conjunto de restricciones.
- Proporcionalidad.
- Divisibilidad.
- Aditividad.
- Certidumbre.
- No negatividad de las variables.

$$
\begin{array}{llcrcrcr}
\text{Máx. (Z)} = & 70\,x_1 + 40\,x_2 & & & & & & \\
\text{S a} & & 2\,x_1 & + & 5\,x_2 & <= & 2.000 \\
 & & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & <= & 500 \\
 & & 2\,x_1 & + & 1\,x_2 & <= & 800 \\
 & & x_1 & ; & x_2 & >= & 0
\end{array}
$$

Interpretación de los resultados y análisis de sensibilidad

¿Cuál es el objetivo?

Objetivo del análisis de sensibilidad

Responder preguntas del tipo:
¿Qué pasa si se modifican algunos parámetros del modelo?

¿Cuáles parámetros?

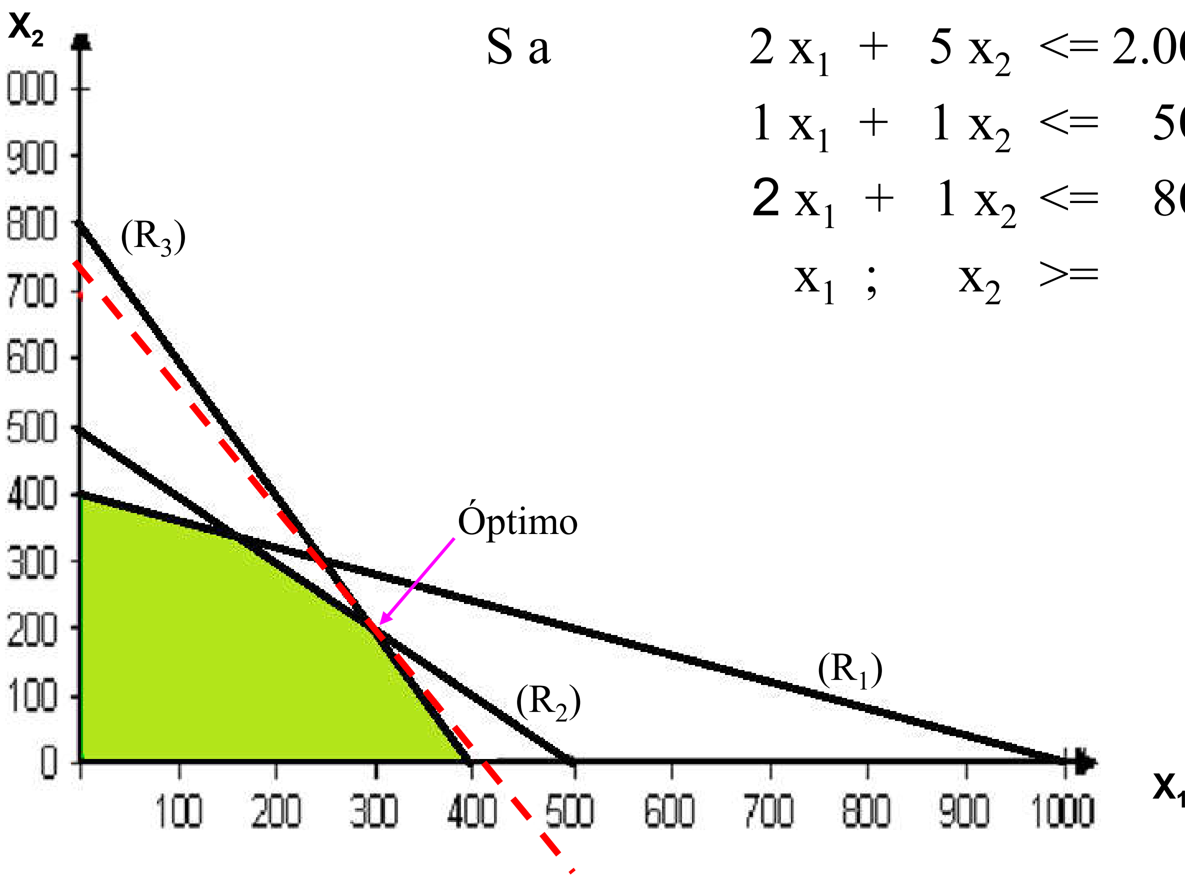
C_j y B_i

Impacto en Z

Impacto que tienen en el valor de las variables

Ejemplo

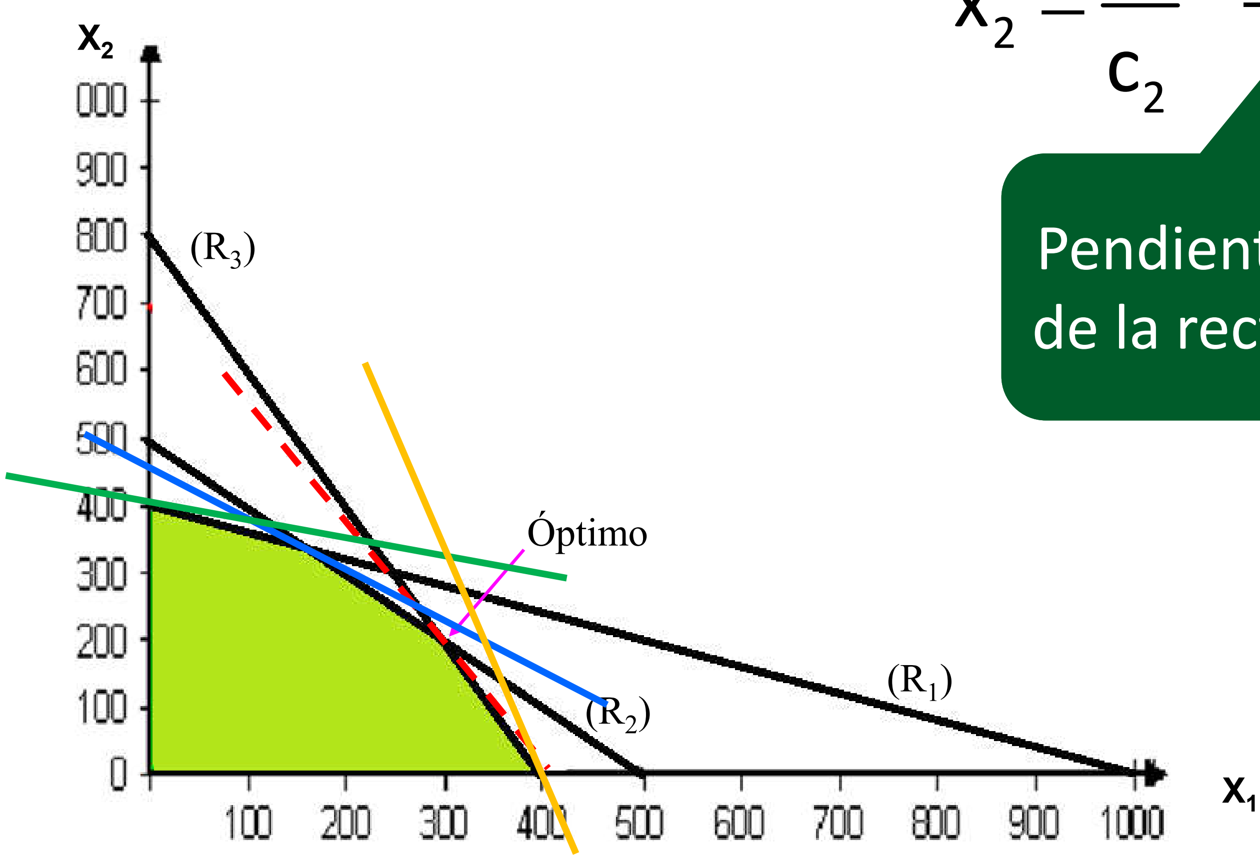
$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{Máx. (Z)} = & 70\,x_1 & + & 40\,x_2 & & \\
\text{S a} & 2\,x_1 & + & 5\,x_2 & <= & 2.000 \\
 & 1\,x_1 & + & 1\,x_2 & <= & 500 \\
 & 2\,x_1 & + & 1\,x_2 & <= & 800 \\
 & x_1 & ; & x_2 & >= & 0
\end{array}
$$



Cambios en el coeficiente de la FO

$$x_2 = \frac{z}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} x_1$$

Pendiente de la recta



Determinación de los intervalos de los coeficiente de la FO

Si c_j Є a una variable No Básica

Máximo ➔ $[\infty, \Delta Cj^+]$ ➔ $Cj = [-\infty, Cj+\Delta Cj^+]$

Mínimo ➔ $[\Delta Cj^-, \infty]$ ➔ $Cj = [Cj-\Delta Cj^-, \infty]$

Si c_j Є a una variable Básica

$[\Delta Cj^-, \Delta Cj^+]$ ➔ $Cj-\Delta Cj^- <= Cj <= Cj+\Delta Cj^+$

Veamos un ejemplo

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max. } (Z) = & 40X1 + 50X2 + 30X3 & & \\
\text{Sa} & 3X1 + 4X2 + 2X3 & <= & 1.200 \text{ (Horas Secc. 1)} \\
 & 1X1 + 2X2 + 1X3 & <= & 800 \text{ (Horas Secc. 2)} \\
 & 1X1 + 1X2 & >= & 300 \text{ (Demanda)} \\
 & X1 ,\ X2 ,\ X3 & >= & 0
\end{array}
$$

Veamos un ejemplo

```
Max. (Z) =  40X1 + 50X2 + 30X3
    Sa            3X1 +   4X2 +  2X3        <=  1.200 (Horas Secc. 1)
                   1X1 +   2X2 +  1X3       <=  800    (Horas Secc. 2)
                     1X1 +  1X2             >=  300    (Demanda)
                      X1 ,    X2 ,    X3    >=   0
```

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
E3		0	16500

$Z^* = 16.500$

$X^* = \begin{array}{l} X_1 = 300 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 150 \end{array}$

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
B2	X1	0	300	Continuar
C2	X2	0	0	Continuar
D2	X3	0	150	Continuar

Resultados del Solver de Excel

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
E3		0	16500

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
B2	X1	0	300	Continuar
C2	X2	0	0	Continuar
D2	X3	0	150	Continuar

Celdas de variables

					ΔCj^{+}	ΔCj^{-}
		Final	Reducido	Objetivo	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Coste	Coeficiente	Aumentar	Reducir
B2	X1	300	0	40	5	5
C2	X2	0	-5	50	5	1E+30
D2	X3	150	0	30	1E+30	3,333333333

Ejemplos sobre las variaciones

Ej.: ¿Qué sucede si se produce un aumento en las ganancias de \$3 en el producto 2?

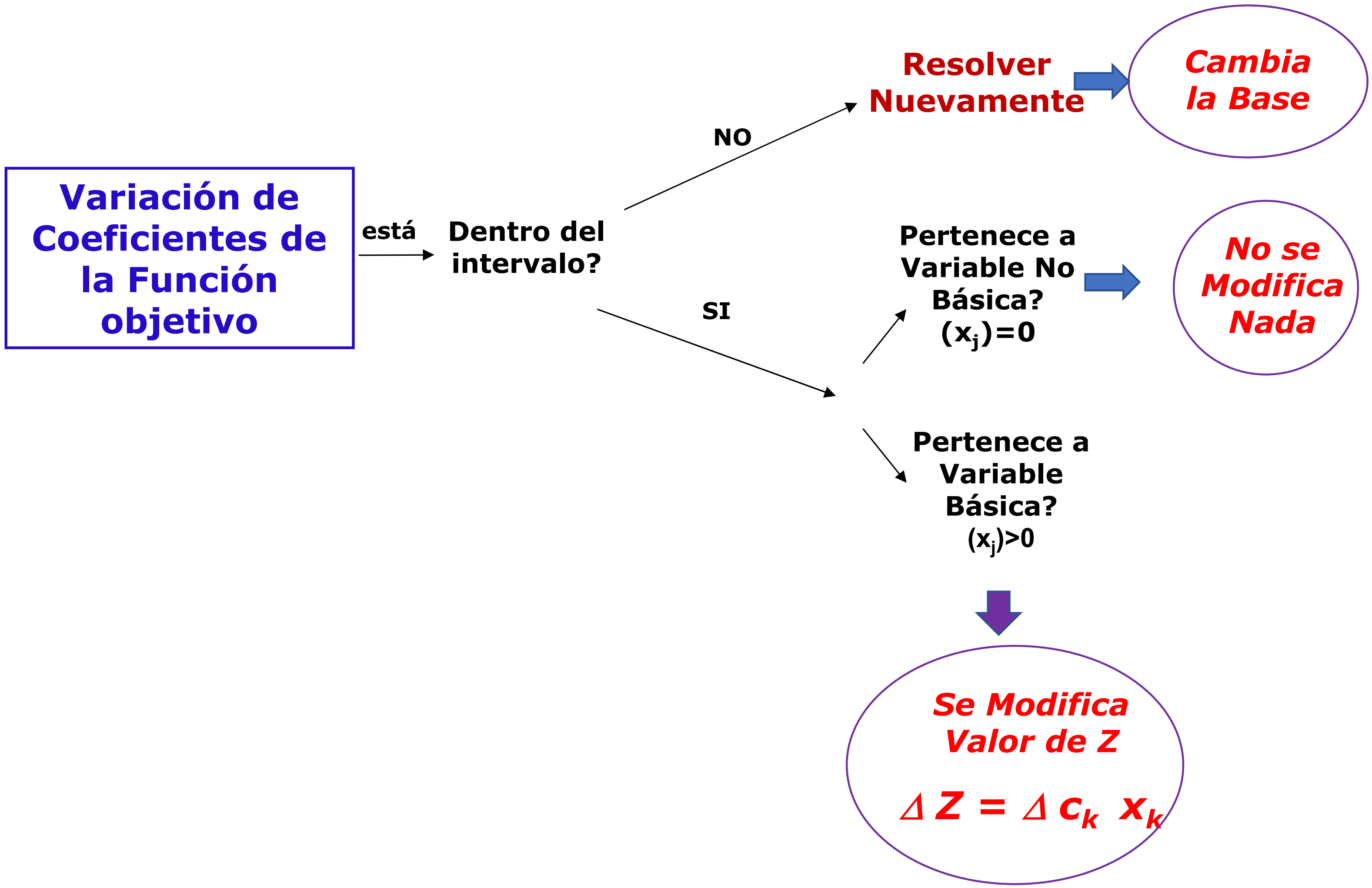
Como la variación esta dentro del intervalo $-\infty \leq \Delta C_2 \leq 5 \rightarrow$ no se produce ningún cambio

Ej.: ¿Qué sucede si se produce una disminución en las ganancias de \$4 en el producto 1?

La variación esta dentro del intervalo será $\rightarrow -5 \leq \Delta C_1 \leq 5$
No se producen cambios en las variables, si cambia el valor de z de la siguiente manera:
El valor actual de $C_1 = 40 \rightarrow C_1 = 36$
$\Delta Z = \Delta C_1 X_1$; en nuestro ejemplo: $\Delta Z = -4\ (300) = -1200$
Lo que lleva al nuevo Z = 16.500 - 1.200 = 15.300

Nota: cualquier cambio fuera del intervalo cambia la base, se debe resolver nuevamente.

Resumen de cambios en los coeficientes

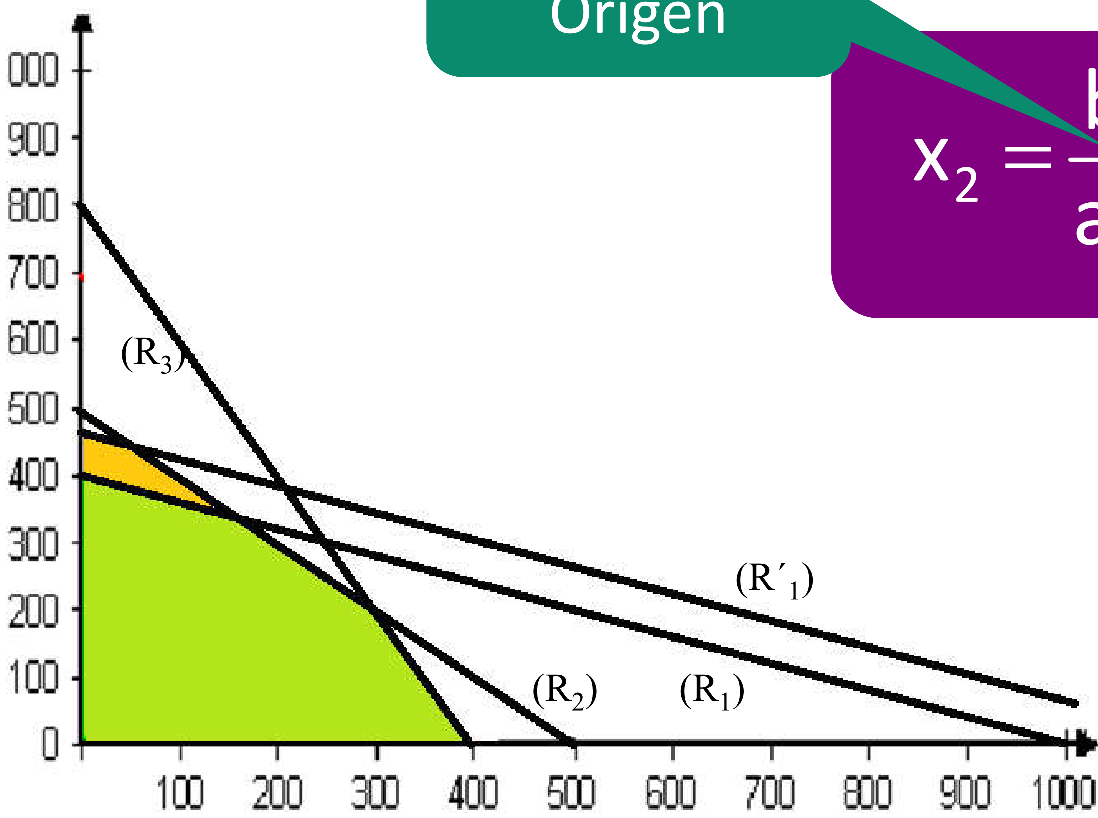


Cambio lado derecho de las restricciones

$$a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 \leq b_1$$

$$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1$$

Cambio lado derecho de las restricciones



Ordenada al Origen

$$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1$$

Determinación de los intervalos

Si la restricción es No Limitante del tipo ≤ ➔ $[\Delta bi^{-}, \infty]$

➔ $bi-\Delta bi^{-} <= bi_N <= \infty$

Si la restricción es No Limitante del tipo ≥ ➔ $[\infty, \Delta bi^{+}]$

➔ $-\infty <= bi_N <= bi+\Delta bi^{+}$

Si la restricción es Limitante ➔ $[\Delta bi^{-}, \Delta bi^{+}]$

➔ $bi-\Delta bi^{-} <= bi_N <= bi+\Delta bi^{+}$

➔ $\Delta Z = \Delta b_i\ y_i$

Resultados del Solver de Excel

Informe de resultados

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
\$E\$5	Horas de sección 1	1100	\$E\$5<=\$F\$5	Vinculante	0
\$E\$6	Horas de sección 2	400	\$E\$6<=\$F\$6	No vinculante	400
\$E\$7	Demanda mínima	300	\$E\$7>=\$F\$7	Vinculante	0

Informe de sensibilidad

			Y_i		Δb_i^+	Δb_i^-
		Final	Sombra	Restricción	Permisible	Permisible
Celda	Nombre	Valor	Precio	Lado derecho	Aumentar	Reducir
\$E\$5	Horas de sección 1	1200	15	1200	700	300
\$E\$6	Horas de sección 2	450	0	800	1E+30	350
\$E\$7	Demanda mínima	300	-5	300	100	300

Ejemplos sobre las variaciones

Ej.: ¿Cómo afecta a la FO un incremento en las horas de sección 2 de 200 hs?

Como la variación esta dentro del intervalo $-350 \leq \Delta b_2 \leq \infty$ → no se produce ningún cambio

Ej.: ¿Qué sucede si hay una disminución de las horas de la sección 1 en 100 unidades?

La variación esta dentro del intervalo será → $-300 \leq \Delta b_1 \leq 300$
Se se producen cambios en las variables, no cambia la base. Cambia el valor de Z de la siguiente manera:
El valor actual de $b_1 = 1.200$ → $b_1 = 1.100$
$\Delta Z = \Delta b_1 \, y_1$; en nuestro ejemplo: $\Delta Z = -100\ (15) = 1.500$
Lo que lleva al nuevo $Z = 16.500 - 1.500 = 15.000$

Ejemplos sobre las variaciones

Ej.: ¿Qué sucede si hay una disminución de las horas de la sección 1 en 100 unidades?

$$X^* = \begin{array}{l} X_1 = 300 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 150 - 100*0{,}5 = 250 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 200 + 100*0{,}5 = 250 \\ S_3 = 0 \end{array}$$

$$Z^* = 16.500 - 100*15 = 15.000$$

Nota: cualquier cambio fuera del intervalo, se debe resolver nuevamente.

Resumen de cambios en el LD

Variación de Valores del Lado Derecho → está → **Dentro del intervalo?**

NO → **Resolver Nuevamente** → ***Cambia la Base***

SI → **Restricción No Limitante? ($S_i>0$)** → ***Se Modifica el Valor de la Holgura***

SI → **Restricción Limitante? ($S_i=0$)** →

Se Modifican valores de variables básicas y valor de Z

$$\Delta Z = \Delta b_i \, Y_i$$

$$x_i = \lambda_i + \Delta b_i \, \lambda_{ij} \; (\leq; =)$$

$$x_i = \lambda_i - \Delta b_i \, \lambda_{ij} \; (\geq)$$

No se modifica la Base

λ_i ➔ valores de las variables en la solución

λ_{ij} ➔ tasas de sustitución de la variable de holgura/excedente correspondiente al b_i

Ejemplo: sombreros

Una compañía elabora dos tipos de sombreros. Cada sombrero del primer tipo requiere dos veces más tiempo de mano de obra que un producto del segundo tipo. Si todos los sombreros son exclusivamente del segundo tipo, la compañía puede producir un total de 500 unidades al día. El mercado limita las ventas diarias del primero en a lo sumo 150 unidades y para el segundo modelo se ha determinado como norma producir una cantidad exactamente igual a el triple del modelo 1. Supóngase que la ganancia que se obtiene por cada producto es de $5 para el tipo 1 y $8 para el tipo 2.

Se pide:

a) Formule un problema de PL que maximice la ganancia de la compañía.
b) Resuelva el modelo utilizando el software Win QSB.

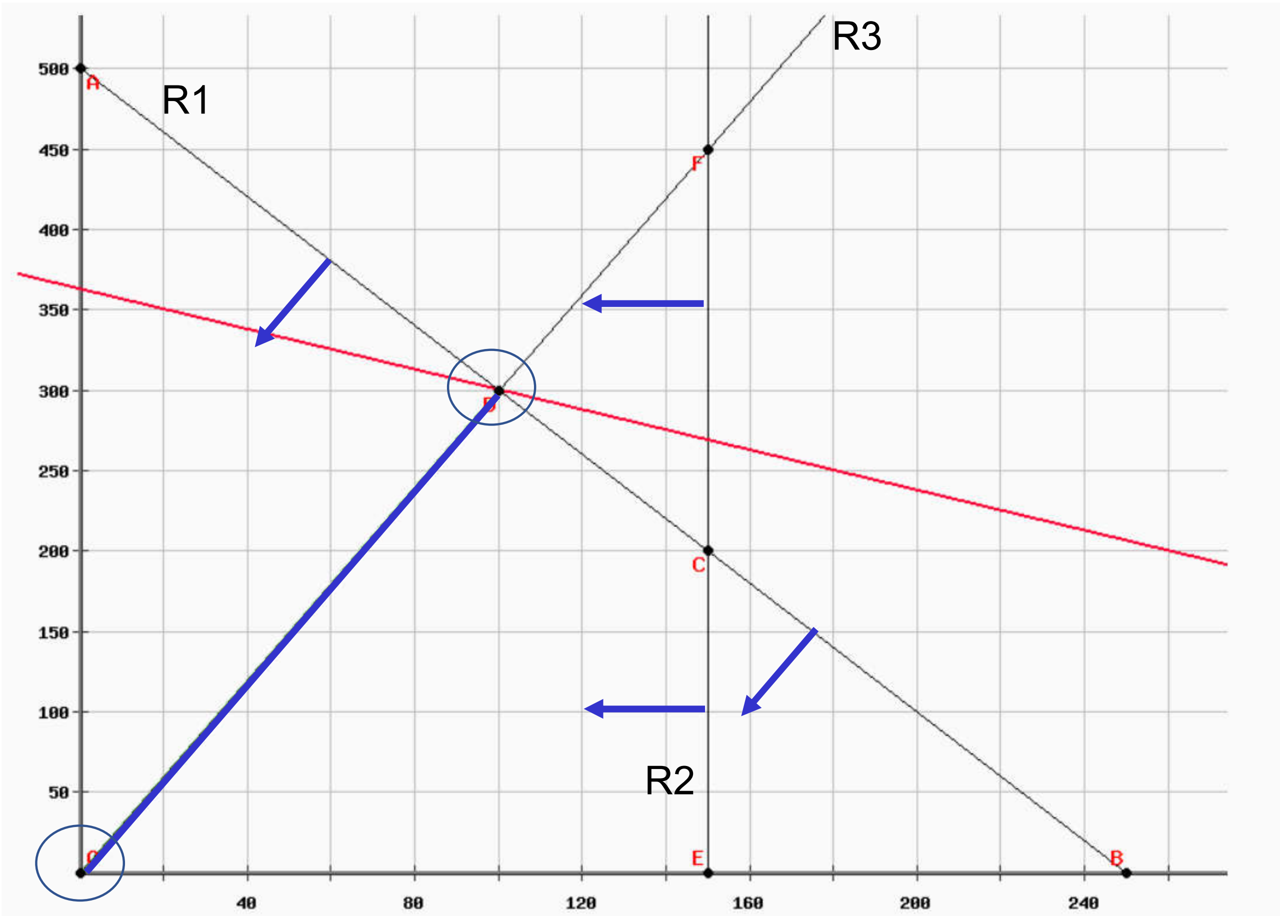
Ejemplo: sombreros - Modelo

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max } (Z) = & 5X1 + 8X2 & & \\
\text{S. A.} & 2X1 + 1X2 & & \le 500 \\
& 1X1 & & \le 150 \\
& & 1X2 & = 3x1 \\
& X1, & X2 & \ge 0
\end{array}
$$

$$
X^* = \begin{cases} X1 = 100 \\ X2 = 300 \end{cases}
$$

$Z^* = 2.900$

Ejemplo: sombreros - Gráfico



Ejemplo: producción de trigo

Para la producción de trigo, un Ing. Agrónomo está buscando los distintos tipos de fertilizante que debería utilizar en la cosecha. Dispone de 500 acres de terreno, los que desea utilizar en su totalidad. En el Mercado existen 4 fertilizantes a utilizar; ellos son: F18, JP1, FER2000 y TSP91. Los costos por utilizarlos en un acre de terreno son de $12, $15, $27 y $18 respectivamente. Además c/u de ellos producen un incremento en la producción de trigo de un 10%, 15%, 22% y 17%.

En la temporada, por cada acre de terreno se producen 10 toneladas de trigo.

Se disponen de $6000 para invertir en fertilizantes y se espera obtener al menos un mínimo de producción de 5200 toneladas de trigo sobre los 500 acres de terreno.

Como contrapartida, luego de la utilización de los fertilizantes, el terreno quedará arruinado en función del tipo de fertilizante que se utilice ya que la cantidad de nitrato se ve reducida en un 50% si se utiliza el F18, en un 62% en caso de usar JP1 y en un 27% y 35% para FER2000 y TSP91 respectivamente y por supuesto, no se desea que este nitrato se vea reducido en mas de un 37% en promedio para los 500 acres. Plantee un modelo de Programación Lineal si se desea conocer la combinación óptima de manera que se maximice la producción de trigo.

Ejemplo: producción de trigo - Modelo

$$\text{Max. }(Z) = 11X_F + 11{,}5X_J + 12{,}2X_2 + 11{,}7X_T$$

S a

$$X_F + X_J + X_2 + X_T = 500$$

$$12X_F + 15X_J + 27X_2 + 18X_T <= 6.000$$

$$11X_F + 11{,}5X_J + 12{,}2X_2 + 11{,}7X_T >= 5.200$$

$$0{,}5X_F + 0{,}62X_J + 0{,}27X_2 + 0{,}35X_T <= 0{,}37(X_F + X_J + X_2 + X_T)$$

$$X_F,\ X_J,\ X_2,\ X_T >= 0$$

Ejemplos sobre las variaciones

Un hospital está realizando estudios de Ingeniería Industrial para optimizar los recursos con que cuenta. Una de las principales preocupaciones del Director del hospital es la del personal. El problema que actualmente enfrenta es con el número de enfermeras en la sección de "Emergencias". Para tal efecto, mandó realizar un estudio estadístico que arrojó los resultados siguientes:

Hora	Número mínimo requerido de enfermeras
0 a 4	40
4 a 8	80
8 a 12	100
12 a 16	70
16 a 20	120
20 a 24	50

Cada enfermera de acuerdo a la Ley Federal del Trabajo, debe trabajar 8 horas consecutivas por día.

Formular el problema de contratar el mínimo de enfermeras que satisfagan los requerimientos arriba citados, como un modelo de PL.

Ejemplos sobre las variaciones

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Min (Z)=} & X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 & & \\
\text{S. A.} & X1 \qquad\qquad\qquad\quad X6 & >= 40 & \text{- Restr 1er Turno} \\
 & X1 + X2 & >= 80 & \text{- Restr 2do Turno} \\
 & X2 + X3 & >= 100 & \text{- Restr 3er Turno} \\
 & X3 + X4 & >= 70 & \text{- Restr 4to Turno} \\
 & X4 + X5 & >= 120 & \text{- Restr 5to Turno} \\
 & X5 + X6 & >= 50 & \text{- Restr 6to Turno} \\
 & Xi >= 0 & &
\end{array}
$$