Clase 7

April 26, 2022

Sistemas de coordenadas

Por un axioma de continuidad podemos identificar al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la recta, asociando cada punto de ésta con un número real x (Ver $Fig.1$)

donde al x se lo llama coordenada (abscisa) del punto P.

Para construir un sistema de coordenadas en un plano ($\mathbb{R}^2$) basta con tener dos rectas no paralelas en dicho plano. En el punto donde se cortan le definimos el orígen del sistema de coordenadas y en cada recta le hacemos corresponder una coordenada de un punto P como en la $Fig.2$

La coordenada x (sobre la recta $R1$) la obtenemos trazando una recta paralela a la recta $R2$ que pase por P y corte a $R1$ (justamente en x). Y la coordenada y (sobre la recta $R2$) la obtenemos trazando una recta paralela a la recta $R1$ que pase por P y corte a $R2$ (justamente en y). Entonces tenemos que P tiene coordenadas (x, y).

Cuando establecemos un sistema de coordenadas en un plano estamos estableciendo una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano con los pares ordenados (x, y). En otras palabras estamos diciendo que el plano $\mathbb{R}^2$ lo identificamos con $\{(x, y) : x \in R1 \wedge y \in R2\}$.

La misma idea para establecer un sistema de coordenadas en el espacio $\mathbb{R}^3$, determinamos tres rectas que no sean paralelas entre si y se corten en un solo punto O. (Ver $Fig.3$)

Nuevamente al establecer este sistema de coordenadas estamos haciendo una correspondencia biunívoca entre el espacio que llamamos $\mathbb{R}^3$ con las ternas de la forma (x, y, z).

Como antes para obtener la coordenada x del punto P trazamos una recta paralela a $R3$, que pase por P, hasta cortar al plano formado por $R1 - R2$ y

Fig. 1

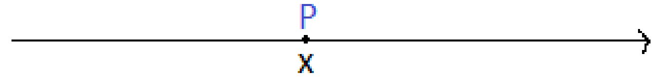


Fig. 2

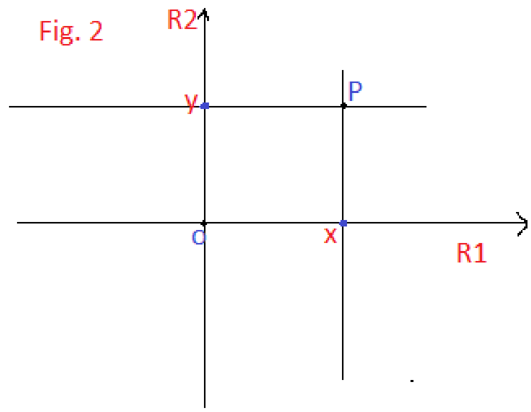
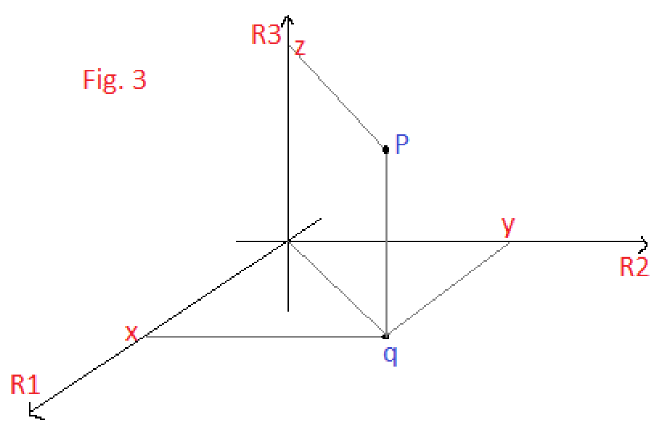
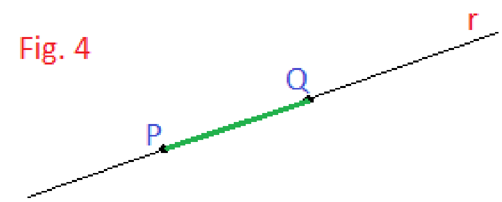
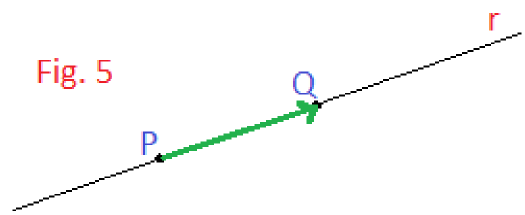


Fig. 3







luego una paralela a $R2$ que pase por q y corte a $R1$ (justamente en x). Para obtener la coordenada y del punto P trazamos una recta paralela a $R3$, que pase por P, hasta cortar al plano formado por $R1 - R2$ y luego una paralela a $R1$ que pase por q y corte a $R2$ (justamente en y). Finalmente trazamos una recta paralela al plano formado por $R1 - R2$, que pase por P y corte a $R3$ (justamente en z).

En principio cada eje (cada una de las rectas que forman al plano, espacio) podría tener una escala diferente (de alguna manera la identificación de los números reales $\mathbb{R}$ puede ser "diferente" con cada recta. Pues podríamos aplicar distintas "biyecciones"). Pero si establecemos las mismas escalas en cada recta de un mismo plano o espacio el sistema de coordenadas se llama "Sistema de Coordenadas Cartesiano" (y será el que de ahora en más vamos a usar siempre!).

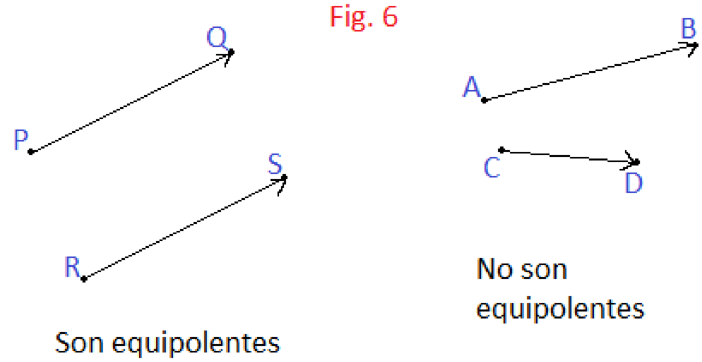
Segmentos dirigidos

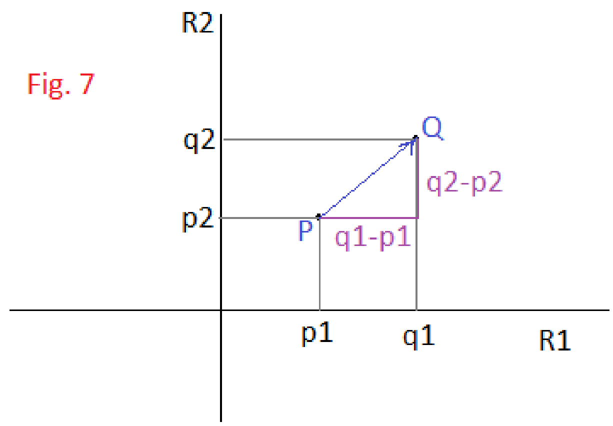
Desde la geometría de Euclides (ca. 325 $a.C.$- ca. 265 $a.C.$) se sabe que por dos puntos P, Q en un plano o espacio pasa una única recta r. Entonces estos puntos determinan un segmento de recta PQ (Ver $Fig.4$):

Definition 1 *Dados dos puntos cualesquiera P, Q en un plano o espacio. Diremos que PQ es un segmento dirigido si es un segmento en el que P es el orígen y Q el extremo. (Ver $Fig.5$)*

Definition 2 *Dados dos segmentos dirigidos PQ y RS. Se dicen equipolentes si tienen igual longitud, dirección y sentido.*

Fig. 6





Veamos por ejemplo en la $Fig.6$:

Si ahora intoducimos un sistema de coordenadas nos va a permitir una caracterización de la equipolencia de vectores:

Sean P, Q dos puntos del plano que definen el segmento dirigido PQ. Entonces cada punto tiene coordenadas en dicho plano, $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$. Entonces podemos ver en la $Fig.7$,

que dicha segmento dirigido queda determinado por el punto inicial P y las coordenadas $(q_1 - p_1, q_2 - p_2)$. Pues si comenzamos en P y nos movemos $q_1 - p_1$ unidades en dirección paralela a R_1 y luego nos movemo $q_2 - p_2$ en dirección de R_2 llegamos al extremo Q. A este par de números los llamaremos *números de dirección* del segmento dirigido.

Remark 3 *Todos los segmentos equipolentes entre si tienen los mismos números de dirección. Esto caracteriza a segmentos que son equipolentes entre si. Veamos algunos ejemplos en la* $Fig.8$

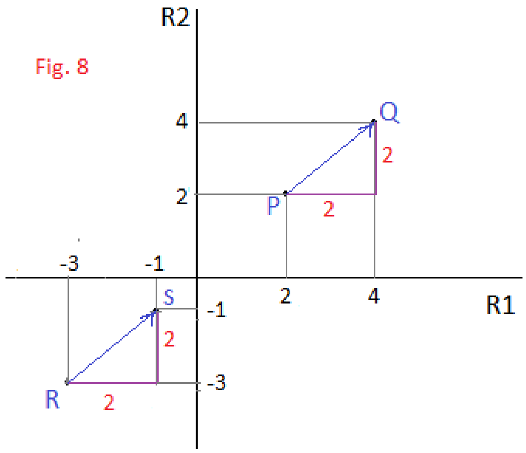
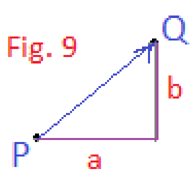


Fig. 9



Vemos que los segmentos dirigidos PQ y RS tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo, por ende son equipolentes y de paso observamos que sus números de dirección son iguales: $(2, 2)$.

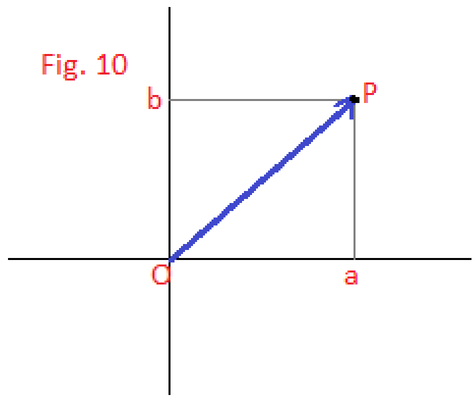
Vectores Libres

Definition 4 *Al conjunto de todos los vectores equipolentes entre si lo vamos a considerar como un solo vector que será el representante de dicho "conjunto". Dicho vector se llama $Vector\ Libre$. Así cada segmento dirigido del conjunto es un representante de dicho vector libre.*

Un par ordenado cualquiera, (a, b) determina un vector libre con número de dirección (a, b). Es decir podemos dibujar un punto P y mediante dichos números de dirección, calcular el extremo Q para entonces representar al vector libre en cuestión mediante el segmento dirigido PQ (Ver $Fig.9$)

Recíprocamente un vector libre determina un par ordenado mediante su número de dirección. Entonces podemos siempre identificar a los vectores libres del plano ($\mathbb{R}^2$) con un par ordenado! Esto también se hace, de forma análoga, para vectores libres del espacio ($\mathbb{R}^3$).

Ahora bien, dado un vector libre lo representamos mediante su número de



dirección (a, b). (Rcordemos que para VER ese vector explícitamente basta con marcar un punto en el plano y encontrar su extremo a traves de su número de dirección). Entonces podemos tomar el punto P cuyas coordenadas sean justamente (a, b). Luego trazar el segmento dirigido con orígen en O (el orígen del sistema de coordenadas mismo) y extremo P (Ver $Fig.10$). Dicho segmento dirigido OP es un representante del vector libre en cuestión!

En otras palabras tenemos una identificación entre puntos del plano y vectores libres!