

Lista 0: Fórmula da Dama Penetra

$$\textcircled{1} \quad f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^3 x_2^2 x_3 - 6x_1 \log(x_2) x_3^4 + x_1^{-1} x_2^3 - x_1^3 \sqrt{x_2}$$

$$\textcircled{2} \text{ gradiente: } \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 9x_1^2 x_2^2 x_3 - 6 \log(x_2) x_3^4 - x_1^{-2} x_2^3 - 2x_1 \sqrt{x_2}$$

 ∂x_1

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1^3 x_2 x_3 - 6 \frac{x_1 x_3^4}{x_2} - \frac{x_1^2}{2\sqrt{x_2}} + 3x_1^{-1} x_2^2$$

 $\frac{\partial f}{\partial x_3}$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(9x_1^2 x_2^2 x_3 - 6 \log(x_2) x_3^4 - x_1^{-2} x_2^3 - 2x_1 \sqrt{x_2}, \right. \\ \left. 6x_1^3 x_2 x_3 - 6 \frac{x_1 x_2^3}{x_3} + 3x_1^{-1} x_2^2 - \frac{x_1^2}{2\sqrt{x_2}}, \right. \\ \left. 3x_1^3 x_2^2 - 24x_1 \log(x_2) x_3^3 \right)$$

$$\textcircled{3} \text{ Matriz Hessiana: } H =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 18x_1 x_2^2 x_3 + 2 \frac{x_2^3}{x_1^3} - 2\sqrt{x_2}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right] = 18x_1^2 x_2 x_3 - \frac{6x_3^4}{x_2} - 3 \frac{x_2^2}{x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{x_1}{\sqrt{x_2}}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 9x_1^2 x_2^2 - 24 \log(x_2) x_3^3$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 6x_1^3 x_2 - 24 \frac{x_1 \cdot x_3^3}{x_2}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_1^3x_3 + \frac{6x_1x_3^4 - x_1^2}{x_2^2} \left[x_2^{-\frac{1}{2}} \right] + \frac{6x_2}{x_1}$$

$$= 6x_1^3x_3 + \frac{6x_1x_3^4 - x_1^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{x_2^2} x_2^{-\frac{3}{2}} + \frac{6x_2}{x_1}$$

$$= 6x_1^3x_3 + \frac{6x_1x_3^4}{x_2^2} + \frac{x_1^2}{4} x_2^{-\frac{3}{2}} + \frac{6x_2}{x_1}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -72x_1 \log(x_2) x_3^2$$

... $\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$, logo H:

$H = \begin{bmatrix} 18x_1x_2^2x_3 + 2x_2^3/x_1^3 - 2\sqrt{x_2} & H_{21} & H_{31} \\ 18x_1^2x_2x_3 - 6x_3^4/x_2 - 3x_2^2/x_1^2 & H_{22} & H_{32} \\ -x_1\sqrt{x_2} & +6x_2/x_1 & x_2^2 + \frac{x_1^2x_2^{-\frac{3}{2}}}{4} \end{bmatrix}$

$g = \begin{bmatrix} 9x_1^2x_2^2 - 24\log(x_2)x_3^3 & H_{31} \\ 6x_1^3x_2 - 24x_1x_3^3 & H_{32} \\ -72x_1 \log(x_2)x_3^2 & \end{bmatrix}$

② Classificar quanto à sua positividade

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando os sub-determinantes de A

$$A_1 = [2] \rightarrow \det(A_1) = 2 > 0$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_2) = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$A_3 = A \quad \det(A) = 2 + 4 + 6 - 4 - 1 - 8 \\ = -3 < 0$$

$$\det(A_3) < 0$$

Logo, A não é definida positiva nem negativa
→ A é indefinida.

③ $f(x) = e^x \quad x_0 = 1$ expansão em série de Taylor.
em torno de $x = 1$

$$S(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x-x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \dots \\ + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x-x_0)^n$$

$$f(x) = e^x :$$

$$S(x) = e^{x_0} + e^{x_0} \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2} e^{x_0} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{1}{6} e^{x_0} (x-x_0)^3 \\ + \dots + \frac{1}{n!} e^{x_0} (x-x_0)^n$$

Polinômios de Taylor: $x_0=1$

$$p_0(x) = e^{x_0} = e \quad p_1(x) = e + e(x-1)$$

$$p_2(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2}$$

$$p_3(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + \frac{e(x-1)^3}{6}$$

Continua na próxima página

MEC 2403 - Otimização e Algoritmos para Engenharia Mecanica

Aluno: Felipe da Costa Pereira (Mestrado)

List 0: Gradientes, matriz Hessiana e séries de Taylor

Exercício 3: Determinar a expansão em série de Taylor, em torno do ponto $x = 1$, da função $f(x) = e^x$. Em seguida, usando o MATLAB, plotar os gráficos da função f e de suas respectivas aproximações (polinômios) de ordens 0, 1, 2 e 3.

R. Os termos calculados foram:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= e \\ p_1(x) &= e + e(x - 1) \\ p_2(x) &= e + e(x - 1) + \frac{e(x-1)^2}{2} \\ p_3(x) &= e + e(x - 1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + \frac{e(x-1)^3}{6} \end{aligned}$$

In []:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from cmath import e
```

In []:

```
# Criação do vetor x
x = np.linspace(-2,4,100)

# criação dos termos da série de Taylor
p0 = e * np.ones(x.shape[0])
p1 = p0 + e*(x-1)
p2 = p1 + e/2 * np.power(x-1,2)
p3 = p2 + e/6 * np.power(x-1,3)

# função f(x) para comparação
f = np.exp(x)
```

In []:

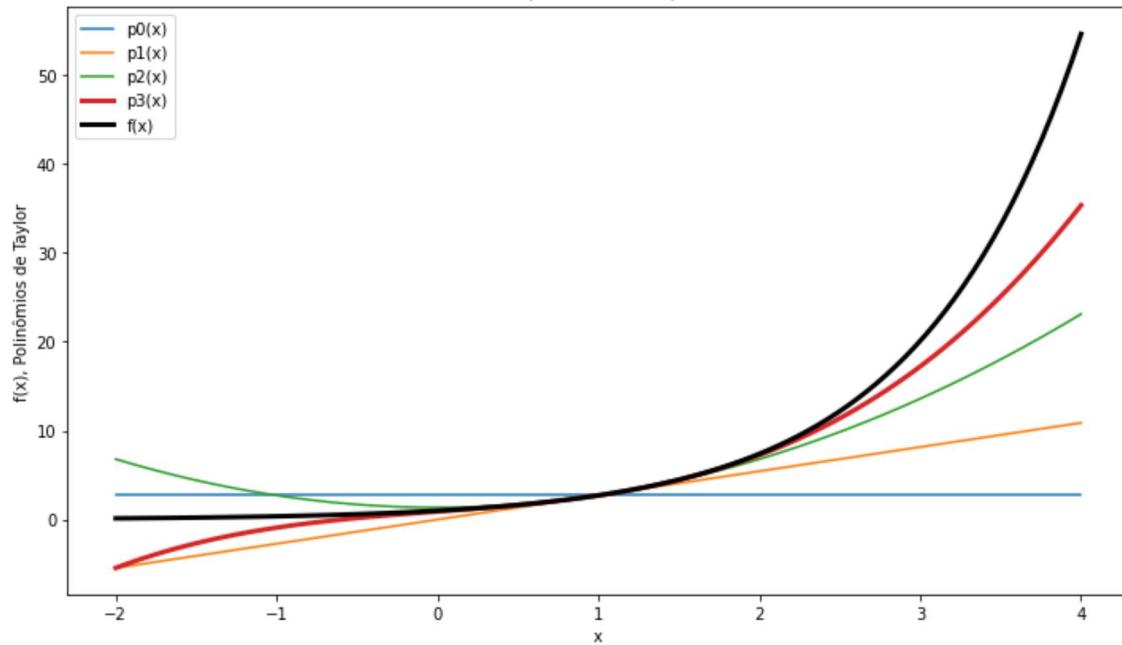
```
fig, ax = plt.subplots(2,1,figsize=(12,15))

# zoom grande
plt.subplot(211)
plt.plot(x, p0, label='p0(x)')
plt.plot(x, p1, label='p1(x)')
plt.plot(x, p2, label='p2(x)')
plt.plot(x, p3, label='p3(x)', lw=3)
plt.plot(x, f, label='f(x)', color='k', lw=3)
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x), Polinômios de Taylor')
plt.title('f(x) e suas aproximações por polinômios de Taylor \n (zoom distante)')

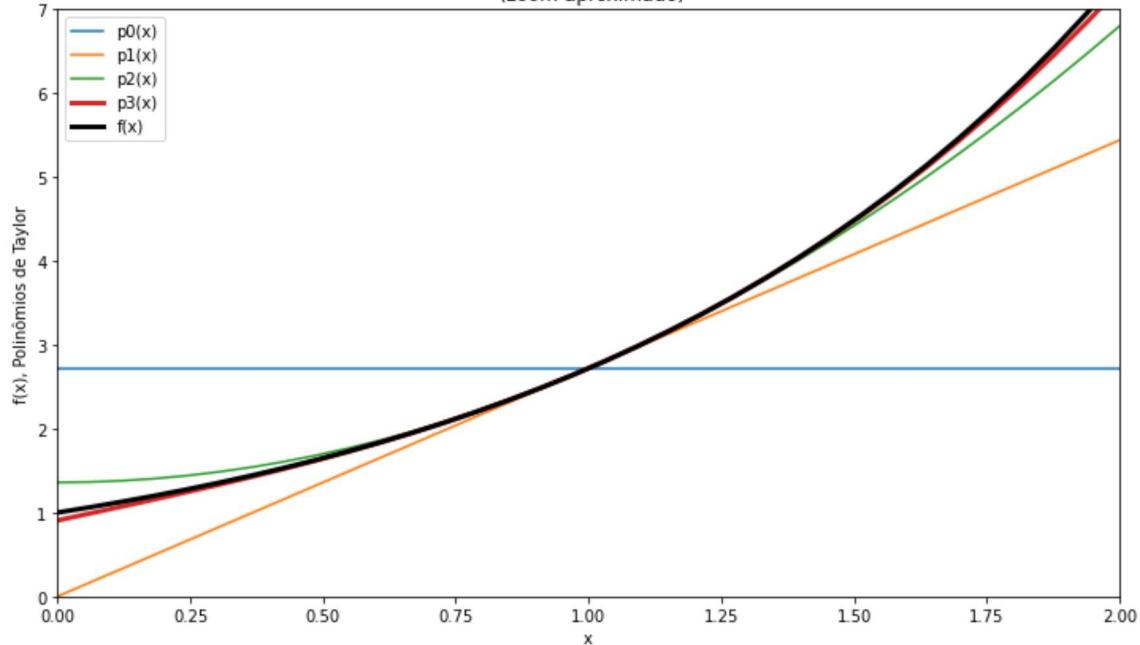
# zoom aproximado
plt.subplot(212)
plt.plot(x, p0, label='p0(x)')
plt.plot(x, p1, label='p1(x)')
plt.plot(x, p2, label='p2(x)')
plt.plot(x, p3, label='p3(x)', lw=3)
plt.plot(x, f, label='f(x)', color='k', lw=3)
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.xlim((0,2))
plt.ylim((0,7))
plt.ylabel('f(x), Polinômios de Taylor')
plt.title('f(x) e suas aproximações por polinômios de Taylor \n (zoom aproximado)')

pass;
```

$f(x)$ e suas aproximações por polinômios de Taylor
(zoom distante)



$f(x)$ e suas aproximações por polinômios de Taylor
(zoom aproximado)



Nota: Notamos que nas proximidades do ponto $x = x_0 = 1$ a expansão de ordem 3 de Taylor ($p_3(x)$) já se aproxima bem da função $f(x)$.

Vamos plotar o valor absoluto do erro entre $p_3(x)$ e a função $f(x)$.

In []:

```
plt.plot(x, np.abs(f-p3));  
  
plt.xlabel('x')  
# plt.xlim((0,2))  
plt.ylabel('Erro')  
plt.title('Erro absoluto entre f(x) e p3(x)')
```

Out[]:

Text(0.5, 1.0, 'Erro absoluto entre f(x) e p3(x)')

