MEC 2403 - Otimização e Algoritmos para Engenharia Mecanica

Aluno: Felipe da Costa Pereira (Mestrado)

Lista 2:

1 – Implementar, usando o MATLAB, os seguintes métodos para cálculo do ponto de mínimo de funções de uma única variável:

- Passo Constante (com Δα = 0.01)
- Bisseção
- Seção Áurea

2 – Utilizando os métodos implementados na questão anterior, testar a sua implementação encontrando o ponto de mínimo das seguintes funções:

- (a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - x_2$

  Ponto Inicial: $x^0 = \{2, 2\}^t$
  Direção: $d = \{-1, -1\}^t$

- (b) Função de McCormick:

  $f(x_1, x_2) = sin(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)^2 - 1.5x_1 + 2.5x_2$

  Ponto Inicial: $x^0 = \{-2, 3\}^t$
  Direção: $d = \{1.453, -4.547\}^t$

- (c) Função de Himmelblau:

  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$

  Ponto Inicial: $x^0 = \{0, 5\}^t$
  Direção: $d = \{3, 1.5\}^t$

Para cada função acima, utilize o MATLAB para desenhar (na mesma figura): as curvas de nível e o segmento de reta conectando o ponto inicial ao ponto de mínimo.
Adotar uma tolerância de 10^{-5} para verificação da convergência numérica.

Solução:

Setando parâmetros globais

In [ ]:
```
TOL = 10^-5
epsilon = 10^-8
```

```
TOL = 1.0000e-05
epsilon = 1.0000e-08
```

Função que avalia f no ponto x

Item a: $f_a(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - x_2$

In [ ]:
```
function f = fa(x)
    f = x(1)^2 - 3*x(1)*x(2) + 4*x(2)^2 +x(1)-x(2);
end
```

Item b: $f_b(x_1, x_2) = sin(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)^2 - 1.5x_1 + 2.5x_2$

In [ ]:
```
function f = fb(x)
    f = sin(x(1) + x(2)) + (x(1) - x(2))^2 - 1.5*x(1) + 2.5*x(2);
end
```

Item c: $f_c(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$

In [ ]:
```
function f = fc(x)
    f = (x(1)^2 + x(2) - 11)^2 + (x(1) + x(2)^2 - 7)^2;
end
```

Implementando o algoritmo do passo constante

Parâmetros de entrada:

- f: Função $f(x)$ a ser avaliada a cada ponto
- x_0: Ponto de partida da busca linear
- d: vetor de direção para busca linear $\vec{d}$
- a: $\Delta\alpha$, parâmetro da busca linear

Valores retornados:

- alpha_L: α^L, valor de α correspondente ao mínimo de f
- alpha_H: α^U, valor de α correspondente ao step seguinte ao mínimo de f
- f_L: $f(\alpha^L)$
- f_H: $f(\alpha^U)$
- ciclos: numero de ciclos até encontrar $[\alpha^L, \alpha^U]$
- f_eval: número de vezes em que a função f foi avaliada

In [ ]:
```
function [alpha_L, alpha_H, f_L, f_H, ciclos, f_eval] = passo_constante(f, x0, d, a)
    % inicialização
    alpha = 0;
    f_min = Inf;
    f_val = f(x0);
    alphas = [];
    fs = [];
    ciclos=0; % contador
    f_eval=0; % numero de avaliações da função f

    % andar para +d ou -d (sentido)
    if f(x0 + a*d) < f(x0 - a*d)
        a=a; % desce a dir (d+)
    else
        a=-a; % desce a esq (d-)
    end
    f_eval += 2;

    % looping
    while f_val <= f_min
        x = x0 + alpha * d;
        f_val = f(x);
        f_eval++;
        fs = [fs;f_val];
        if f_val < f_min
            f_min = f_val;
        end
        % salva alpha
        alphas = [alphas; alpha];
        % atualiza alpha
        alpha += a;

        ciclos++;
    end

    % plot (alphas(end-1:end), fs(end-1:end), 'o-'), xlabel('\alpha'), ylabel('f')
    f_L = fs(end-1);
    f_H = fs(end);
    alpha_L = alphas(end-1);
    alpha_H = alphas(end);
end

% testando
[alpha_L, alpha_H, ~, ~, ciclos, f_eval] = passo_constante(@fa, [2 2], [-1 -1], 0.0099);
fprintf('Alpha = %.4f\n', alpha_L)
fprintf('Mínimo encontrado em %d ciclos\n', ciclos)
fprintf('A função f foi avaliada %d vezes', f_eval)
```

```
Alpha = 1.9998
Mínimo encontrado em 204 ciclos
A função f foi avaliada 206 vezes
```

Implementando o algoritmo da bisseção

Parâmetros de entrada:

- f: Função $f(x)$ a ser avaliada a cada ponto
- x_0: Ponto de partida da busca linear
- d: vetor de direção para busca linear $\vec{d}$
- a: $\Delta\alpha$, parâmetro da busca linear
- TOL: Tolerância (critério de parada), quando $[\alpha^L, \alpha^U]$ são muito próximos
- epsilon: ϵ, parâmetro do algortimo da bisseção para avaliação de $f_1 = f(\alpha^M - \epsilon)$ e $f_2 = f(\alpha^M + \epsilon)$
- alpha_L: α^L, calculado pelo passo constante
- alpha_H: α^H, calculado pelo passo constante

Valores retornados:

- alpha_k: α^K, valor de α correspondente ao mínimo de f
- ciclos: numero de ciclos até encontrar α^K
- f_eval: número de vezes em que a função f foi avaliada

In [ ]:
```
function [alpha_k, ciclos, f_eval] = bissecao(f, x0, d, a, TOL, epsilon, alpha_L, alpha_H)

    % [alpha_L, alpha_H, f_L, f_H] = passo_constante(f, x0, d, a);
    b = norm(alpha_L-alpha_H); %tamanho do intervalo
    ciclos=0; %contador
    f_eval=0; %quantas x f foi avaliada

    while b > TOL
        alpha_M = (alpha_L+alpha_H)/2;

        f1 = f(x0 + (alpha_M - epsilon) * d);
        f2 = f(x0 + (alpha_M + epsilon) * d);
        f_eval += 2;

        %  Se f1 > f2 ⟹ descartar a metade da esquerda, ou seja, fazer: αL = αM ; caso contrário, fazer: αU = αM ;
        if f1 > f2
            % fprintf('f1 > f2, descarta esq, desce pra dir\n')
            alpha_L = alpha_M;
        else
            % fprintf('f1 < f2, descarta dir, desce pra esq\n')
            alpha_H = alpha_M;
        end
        b = norm(alpha_L-alpha_H);

        ciclos++;
    end
    alpha_k = (alpha_L+alpha_H)/2;
end

[alpha_L, alpha_H, ~, ~, ~, ~] = passo_constante(@fa, [2 2], [-1 -1], 0.0099);
[alpha_k, ciclos, f_eval] = bissecao(@fa, [2 2], [-1 -1], 0.0099, TOL, epsilon, alpha_L, alpha_H);
fprintf('Alpha = %.4f\n', alpha_k)
fprintf('Mínimo encontrado em %d ciclos\n', ciclos)
fprintf('A função f foi avaliada %d vezes', f_eval)
```

```
Alpha = 2.0000
Mínimo encontrado em 10 ciclos
A função f foi avaliada 20 vezes
```

Implementando o algoritmo da Seção Áurea

Parâmetros de entrada:

- f: Função $f(x)$ a ser avaliada a cada ponto
- x_0: Ponto de partida da busca linear
- d: vetor de direção para busca linear $\vec{d}$
- a: $\Delta\alpha$, parâmetro da busca linear
- TOL: Tolerância (critério de parada), quando $[\alpha^L, \alpha^U]$ são muito próximos
- alpha_L: α^L, calculado pelo passo constante
- alpha_H: α^H, calculado pelo passo constante

Valores retornados:

- alpha_k: α^K, valor de α correspondente ao mínimo de f
- ciclos: numero de ciclos até encontrar α^K
- f_eval: número de vezes em que a função f foi avaliada

In [ ]:
```
function [alpha_k, ciclos, f_eval] = secao_aurea (f, x0, d, a, TOL, alpha_L, alpha_H)
    ra = (sqrt(5)-1)/2;
    ciclos=0;
    f_eval=0; %quantas x f foi avaliada

    % [alpha_L, alpha_H, ~, ~] = passo_constante(f, x0, d, a);
    b = norm(alpha_L-alpha_H); %tamanho do intervalo
    alpha_E = alpha_L + (1-ra)*b;
    alpha_D = alpha_L + ra*b;
    f1 = f(x0 + alpha_E * d);
    f2 = f(x0 + alpha_D * d);
    f_eval += 2;

    while b > TOL
        %  Se f1 > f2, descarta o intervalo: [αL,αE] Se f2 > f1, descarta o intervalo: [αD, αU]
        if f1 > f2
            % fprintf('f1 > f2, descarta [L-E], desce pra dir\n')
            alpha_L = alpha_E;
            alpha_E = alpha_D;
            b = norm(alpha_L-alpha_H);
            alpha_D = alpha_L + ra*b;

            % avaliar menos vezes a funcao f
            f1 = f2;
            f2 = f(x0 + alpha_D * d);
            f_eval++;
        else
            % fprintf('f1 < f2, descarta [D-U], desce pra esq\n')
            alpha_H = alpha_D;
            alpha_D = alpha_E;
            b = norm(alpha_L-alpha_H);
            alpha_E = alpha_L + (1-ra)*b;

            % avaliar menos vezes a funcao f
            f2 = f1;
            f1 = f(x0 + alpha_E * d);
            f_eval++;
        end

        ciclos++;
    end

    alpha_k = (alpha_L+alpha_H)/2;
end

[alpha_L, alpha_H, ~, ~, ~, ~] = passo_constante(@fa, [2 2], [-1 -1], 0.0099);
[alpha_k, ciclos, f_eval] = secao_aurea(@fa, [2 2], [-1 -1], 0.0099, TOL, alpha_L, alpha_H);
fprintf('Alpha = %.4f\n', alpha_k)
fprintf('Mínimo encontrado em %d ciclos\n', ciclos)
fprintf('A função f foi avaliada %d vezes', f_eval)
```

```
Alpha = 2.0000
Mínimo encontrado em 15 ciclos
A função f foi avaliada 17 vezes
```

2 – Utilizando os métodos implementados na questão anterior, testar a sua implementação encontrando o ponto de mínimo das seguintes funções:

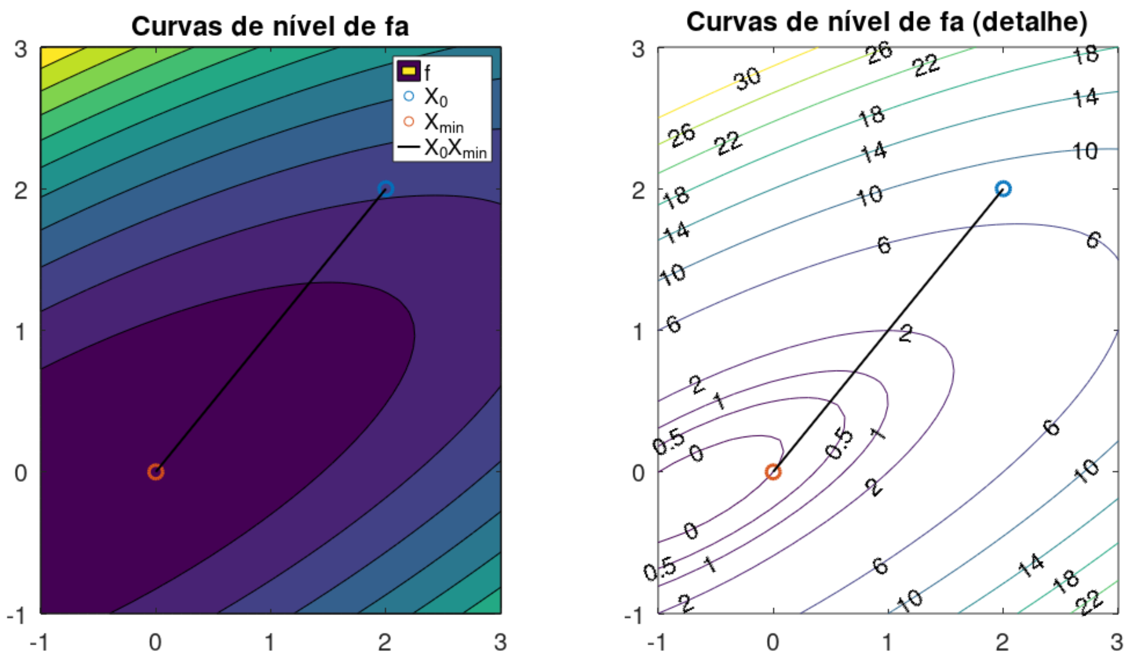
(a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - x_2$

Ponto Inicial: $x^0 = \{2, 2\}^t$
Direção: $d = \{-1, -1\}^t$

In [ ]:

```
x0 = [2 2];
d= [-1 -1];
d_alpha = 0.0099;

[alpha_L, ~, ~, ~, ~, ~] = passo_constante(@fa, x0, d, d_alpha);
[alpha_k_biss, ~, ~] = bissecao(@fa, x0, d, d_alpha, TOL, epsilon);
[alpha_k_sa, ~, ~] = secao_aurea(@fa, x0, d, d_alpha, TOL);

x1 = linspace(-1,3,50);
x2 = linspace(-1,3,50);
[x1,x2] = meshgrid(x1,x2);

fa_plot = x1.^2 - 3*x1.*x2 + 4*x2.^2 + x1 - x2;

fprintf ('alpha (passo constante) = %.4f\n', alpha_L)
fprintf ('alpha (bisseção) = %.4f\n', alpha_k_biss)
fprintf ('alpha (seção áurea) = %.4f\n', alpha_k_sa)

P1 = x0;
P2 = x0 + alpha_k_biss * d;

fprintf ('f(P1=x0) = %.4f\n', fa(P1))
fprintf ('f(P2) = fmin = %.4f\n', fa(P2))

set(gcf,'Position',[0 0 1200 600])
subplot (121)
contourf(x1, x2, fa_plot), title('Curvas de nível de fa')
hold on
plot(P1(1),P1(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot(P2(1),P2(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot ([P1(1);P2(1)], [P1(2);P2(2)], 'k-', 'LineWidth', 2)
legend('f', 'X_0', 'X_{min}', 'X_0X_{min}');

subplot (122)
contour(x1, x2, fa_plot, 'ShowText','on', [0:0.5:1 2:4:30]), title('Curvas de nível de fa (detalhe)')
hold on
plot(P1(1),P1(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot(P2(1),P2(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot ([P1(1);P2(1)], [P1(2);P2(2)], 'k-', 'LineWidth', 2)
```

```
alpha (passo constante) = 1.9998
alpha (bisseção) = 2.0000
alpha (seção áurea) = 2.0000
f(P1=x0) = 8.0000
f(P2) = fmin = 0.0000
```



(b) Função de McCormick:

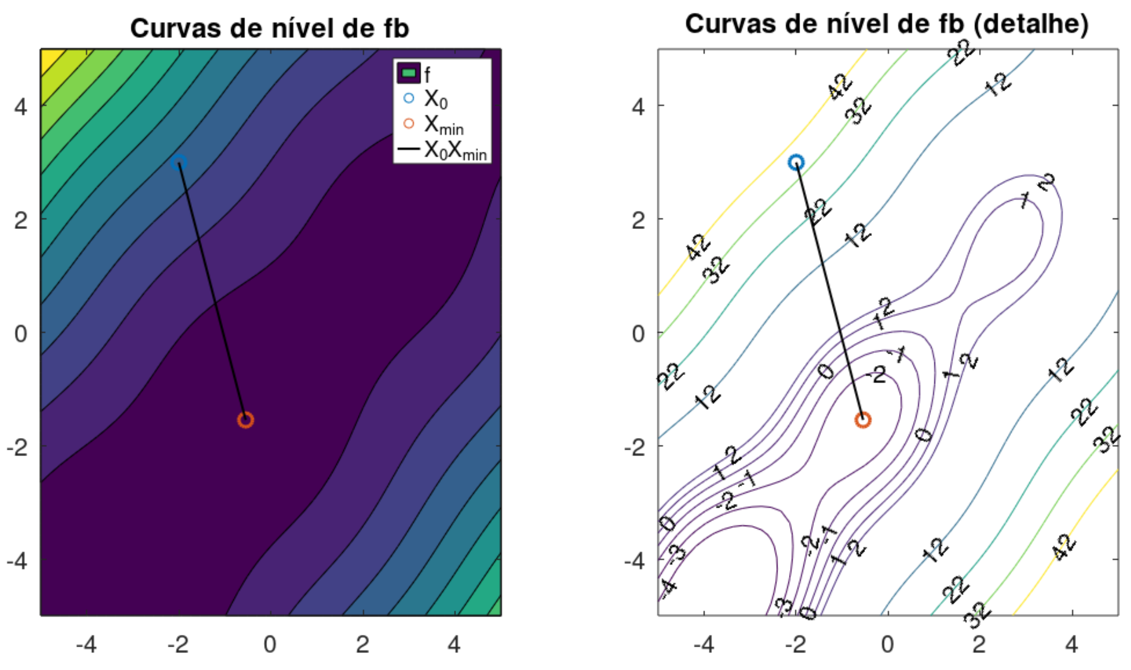
$f(x_1, x_2) = sin(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)^2 - 1.5x_1 + 2.5x_2$

Ponto Inicial: $x^0 = \{-2, 3\}^t$
Direção: $d = \{1.453, -4.547\}^t$

In [ ]:

```
x0 = [-2 3];
d= [1.453 -4.547];
d_alpha = 0.0099;

[alpha_L, ~, ~, ~, ciclos, f_eval] = passo_constante(@fb, x0, d, d_alpha);
[alpha_k_biss, ciclos, f_eval] = bissecao(@fb, x0, d, d_alpha, TOL, epsilon);
[alpha_k_sa, ciclos, f_eval] = secao_aurea(@fb, x0, d, d_alpha, TOL);

fprintf ('alpha (passo constante) = %.4f\n', alpha_L)
fprintf ('alpha (bisseção) = %.4f\n', alpha_k_biss)
fprintf ('alpha (seção áurea) = %.4f\n', alpha_k_sa)

x1 = linspace(-5, 5, 50);
x2 = linspace(-5, 5, 50);
[x1,x2] = meshgrid(x1,x2);
fb_plot = sin (x1+x2) + (x1-x2).^2 -1.5*x1 + 2.5*x2;

P1 = x0;
P2 = x0 + alpha_k_biss * d;

fprintf ('f(P1=x0) = %.4f\n', fb(P1))
fprintf ('f(P2) = fmin = %.4f\n', fb(P2))

set(gcf,'Position',[0 0 1200 600])
subplot (121)
contourf(x1, x2, fb_plot), title('Curvas de nível de fb')
hold on
plot(P1(1),P1(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot(P2(1),P2(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot ([P1(1);P2(1)], [P1(2);P2(2)], 'k-', 'LineWidth', 2)
legend('f', 'X_0', 'X_{min}', 'X_0X_{min}');

subplot (122)
contour(x1, x2, fb_plot, 'ShowText','on', [-4:1:1 2:10:48]), title('Curvas de nível de fb (detalhe)')
hold on
plot(P1(1),P1(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot(P2(1),P2(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot ([P1(1);P2(1)], [P1(2);P2(2)], 'k-', 'LineWidth', 2)
```

```
alpha (passo constante) = 0.9999
alpha (bisseção) = 1.0000
alpha (seção áurea) = 1.0000
f(P1=x0) = 36.3415
f(P2) = fmin = -2.9132
```



(c) Função de Himmelblau:

$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$

Ponto Inicial: $x^0 = \{0, 5\}^t$
Direção: $d = \{3, 1.5\}^t$

In [ ]:

```
x0 = [0 5];
d= [3 1.5];
d_alpha = 0.0099;

[alpha_L, ~, ~, ~, ciclos, f_eval] = passo_constante(@fc, x0, d, d_alpha);
[alpha_k_biss, ciclos, f_eval] = bissecao(@fc, x0, d, d_alpha, TOL, epsilon);
[alpha_k_sa, ciclos, f_eval] = secao_aurea(@fc, x0, d, d_alpha, TOL);

fprintf ('alpha (passo constante) = %.4f\n', alpha_L)
fprintf ('alpha (bisseção) = %.4f\n', alpha_k_biss)
fprintf ('alpha (seção áurea) = %.4f\n', alpha_k_sa)

x1 = linspace(-5, 5,50);
x2 = linspace(0, 10,50);
[x1,x2] = meshgrid(x1,x2);

fc_plot = (x1.^2 + x2 - 11).^2 + (x1 + x2.^2 - 7).^2;

P1 = x0;
P2 = x0 + alpha_k_biss * d;

fprintf ('f(P1=x0) = %.4f\n', fc(P1))
fprintf ('f(P2) = fmin = %.4f\n', fc(P2))

set(gcf,'Position',[0 0 1200 600])
subplot (121)
contourf(x1, x2, fc_plot, 20), title('Curvas de nível de fc')
hold on
plot(P1(1),P1(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot(P2(1),P2(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot ([P1(1);P2(1)], [P1(2);P2(2)], 'y-', 'LineWidth', 2)
legend('f', 'X_0', 'X_{min}', 'X_0X_{min}');

subplot (122)
contour(x1, x2, fc_plot, 'ShowText','on', [1 10 50 100 250 1E3 5e3]), title('Curvas de nível de fc (detalhe)')
hold on
plot(P1(1),P1(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot(P2(1),P2(2),'o', 'LineWidth', 3, 'MarkerSize', 12)
plot ([P1(1);P2(1)], [P1(2);P2(2)], 'k-', 'LineWidth', 2)
```

```
alpha (passo constante) = -1.0098
alpha (bisseção) = -1.0197
alpha (seção áurea) = -1.0098
f(P1=x0) = 360.0000
f(P2) = fmin = 7.2834
```