MEC 2403 · OTIMIZAÇÃO

Lista 0: Felipe da Costa Pereira

① $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^3 x_2^2 x_3 - 6x_1 \log(x_2) x_3^4 + x_1^{-1} x_2^3 - x_1^2 \sqrt{x_2}$

ⓐ gradiante: $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 9x_1^2 x_2^2 x_3 - 6\log(x_2) x_3^4 - x_1^{-2} x_2^3 - 2x_1\sqrt{x_2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1^3 x_2 x_3 - 6\frac{x_1 x_3^4}{x_2} - x_1^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2}} + 3x_1^{-1} x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 3x_1^3 x_2^2 - 24 x_1 \ln(x_2) x_3^3$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \Big(9x_1^2 x_2^2 x^3 - 6\log(x_2) x_3^4 - x_1^{-2} x_2^3 - 2x_1\sqrt{x_2},$$
$$6x_1^3 x_2 x_3 - 6x_1 x_2^{-1} x_3^4 + 3x_1^{-1} x_2^2 - x_1^2/2\sqrt{x_2},$$
$$3x_1^3 x_2^2 - 24 x_1 \log(x_2) x_3^3 \Big)$$

ⓑ Matriz Herniana: $H = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x_1^2 & \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2 & \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_3 \\ \partial^2 f/\partial x_2 \partial x_1 & \partial^2 f/\partial x_2^2 & \partial^2 f/\partial x_2 \partial x_3 \\ \partial^2 f/\partial x_3 \partial x_1 & \partial^2 f/\partial x_3 \partial x_2 & \partial^2 f/\partial x_3^2 \end{bmatrix}$

④ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 18x_1 x_2^2 x_3 + 2\frac{x_2^3}{x_1^3} - 2\sqrt{x_2}$$

④ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] = 18x_1^2 x_2 x_3 - \frac{6x_3^4}{x_2} - 3\frac{x_2^2}{x_1^2} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}$$

④ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 9x_1^2 x_2^2 - 24\log(x_2) x_3^3$$

④ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 6x_1^3 x_2 - 24\frac{x_1}{x_2} \cdot x_3^3$$

tilibra

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_1^3x_3 + \frac{6x_1x_3^4}{x_2^2} - \frac{x_1^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_2^{-1/2}\right] + \frac{6x_2}{x_1}$$

$$= 6x_1^3x_3 + \frac{6x_1x_3^4}{x_2^2} - \frac{x_1^2}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x_2^{-3/2} + \frac{6x_2}{x_1}$$

$$= 6x_1^3x_3 + \frac{6x_1x_3^4}{x_2^2} + \frac{x_1^2}{4}x_2^{-3/2} + \frac{6x_2}{x_1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -72\, x_1 \log(x_2)\, x_3^2$$

... e ... $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$

e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$, logo H:

$$H = \begin{bmatrix} 18x_1x_2^2x_3 + 2x_2^3/x_1^3 - 2\sqrt{x_2} & H_{21} & H_{31} \\ \underbrace{18x_1^2x_2x_3 - 6x_3^4/x_2 - 3x_2^2/x_1^2 - x_1/\sqrt{x_2}}_{H_{21}} & 6x_1^3x_3 + \frac{6x_1x_3^4}{x_2^2} + \frac{x_1^2}{4}x_2^{-3/2} + 6x_2/x_1 & H_{32} \\ \underbrace{9x_1^2x_2^2 - 24\log(x_2)x_3^3}_{H_{31}} & \underbrace{6x_1^3x_2 - \frac{24x_1x_3^3}{x_2}}_{H_{32}} & -72x_1\log x_2 x_3^2 \end{bmatrix}$$

② Classificar quanto à sua positividade:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando os sub-determinantes de A

$A_1 = [2] \rightarrow \det(A_1) = 2 > 0$

$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A_2) = 2 - 1 = 1 > 0$

$A_3 = A \qquad \det(A) = 2 + 4 + \cancel{4} - \cancel{4} - 1 - 8$

$= -3 < 0$

$\det(A_3) < 0$

Logo, A não é definida positiva nem negativa
→ A é indefinida.

③ $f(x) = e^x \qquad x_0 = 1 \qquad$ expansão em série de Taylor em torno de $x = 1$

$$S(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\Big|_{x=x_0} (x - x_0)^n.$$

$f(x) = e^x$:

$S(x) =$

$$e^{x_0} + e^{x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} e^{x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} e^{x_0} (x - x_0)^3$$

$$+ \dots + 1/n! \cdot e^{x_0} (x - x_0)^n$$

Polinômios de Taylor: $x_0 = 1$

$$p_0(x) = e^{x_0} = e \qquad p_1(x) = e + e(x-1)$$

$$p_2(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2$$

$$p_3(x) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3$$

MEC 2403 - Otimização e Algoritmos para Engenharia Mecanica

Aluno: Felipe da Costa Pereira (Mestrado)

Lista 0: Gradientes, matriz Hessiana e séries de Taylor

Exercício 3: Determinar a expansão em série de Taylor, em torno do ponto $x = 1$, da função $f(x) = e^x$. Em seguida, usando o MATLAB, plotar os gráficos da função f e de suas respectivas aproximações (polinômios) de ordens 0, 1, 2 e 3.

R. Os termos calculados foram:

$$p_0(x) = e$$
$$p_1(x) = e + e(x-1)$$
$$p_2(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2}$$
$$p_3(x) = e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + \frac{e(x-1)^3}{6}$$

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from cmath import e
```

In [ ]:

```
# Criação do vetor x
x = np.linspace(-2,4,100)

# criação dos termos da série de Taylor
p0 = e * np.ones(x.shape[0])
p1 = p0 + e*(x-1)
p2 = p1 + e/2 * np.power(x-1,2)
p3 = p2 + e/6 * np.power(x-1,3)

# função f(x) para comparação
f = np.exp(x)
```

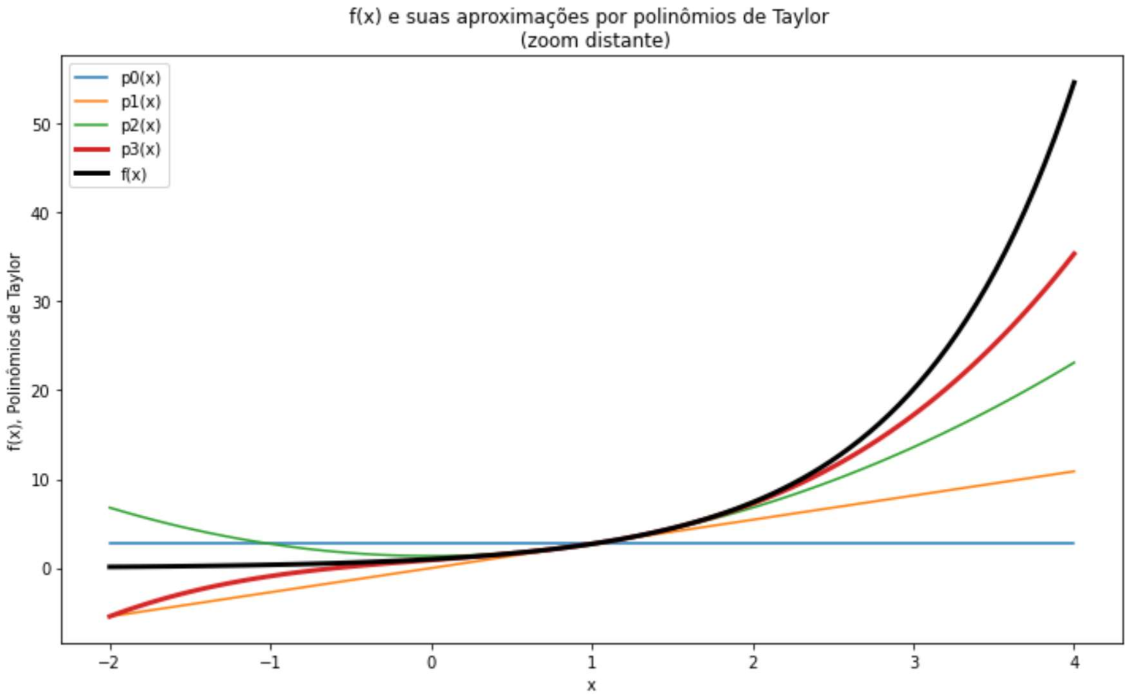
In [ ]:

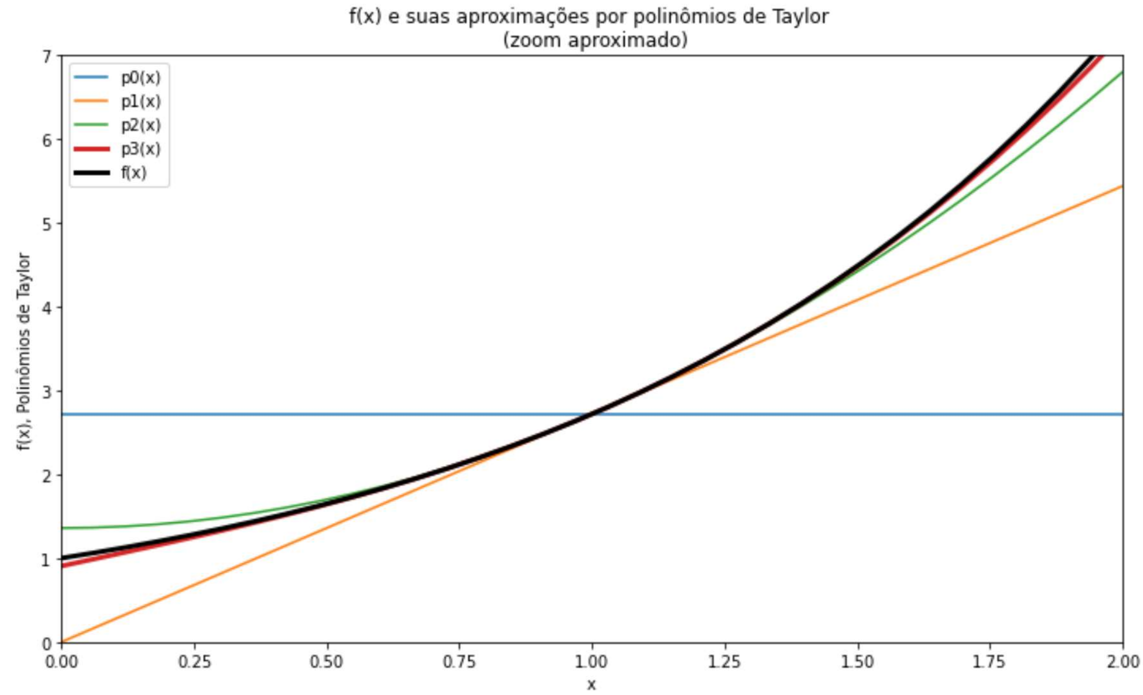
```
fig, ax = plt.subplots(2,1,figsize=(12,15))

# zoom grande
plt.subplot(211)
plt.plot(x, p0, label='p0(x)')
plt.plot(x, p1, label='p1(x)')
plt.plot(x, p2, label='p2(x)')
plt.plot(x, p3, label='p3(x)', lw=3)
plt.plot(x, f, label='f(x)', color='k', lw=3)
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x), Polinômios de Taylor')
plt.title('f(x) e suas aproximações por polinômios de Taylor \n (zoom distante)')

# zoom aproximado
plt.subplot(212)
plt.plot(x, p0, label='p0(x)')
plt.plot(x, p1, label='p1(x)')
plt.plot(x, p2, label='p2(x)')
plt.plot(x, p3, label='p3(x)', lw=3)
plt.plot(x, f, label='f(x)', color='k', lw=3)
plt.legend()
plt.xlabel('x')
plt.xlim((0,2))
plt.ylim((0,7))
plt.ylabel('f(x), Polinômios de Taylor')
plt.title('f(x) e suas aproximações por polinômios de Taylor \n (zoom aproximado)')

pass;
```





Nota: Notamos que nas proximidades do ponto $x = x_0 = 1$ a expansão de ordem 3 de Taylor ($p_3(x)$) já se aproxima bem da funcão $f(x)$.

Vamos plotar o valor absoluto do erro entre $p_3(x)$ e a funcão $f(x)$.

In [ ]:

```
plt.plot(x, np.abs(f-p3));

plt.xlabel('x')
# plt.xlim((0,2))
plt.ylabel('Erro')
plt.title('Erro absoluto entre f(x) e p3(x)')
```

Out[ ]:

```
Text(0.5, 1.0, 'Erro absoluto entre f(x) e p3(x)')
```