MEC 2403 - LISTA 04 - OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES

Aluno: Felipe da Costa Pereira MAT: 2212376

$$\begin{cases} \text{Min} & f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.:} & \alpha x_1^2 - x_2 + 2 \leq 0 \end{cases}$$

(a) menor valor de α que torna $x^* = \{0, 2\}$ um mínimo

(b) obter o multiplicador de Lagrange μ^* associado a x^*

(c) justificar graficamente a solução obtida

- $\mathcal{L}(\underset{\sim}{x}, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \mu c_1 = x_1^2 + x_2^2 + \alpha \mu x_1^2 - \mu x_2 + 2\mu$

- Se $x^* = (0, 2)$ é um mínimo, então: $\underset{\sim}{\nabla} \mathcal{L}(x^*, \mu^*) = \underset{\sim}{0}$:

$$\underset{\sim}{\nabla} \mathcal{L}(\underset{\sim}{x}, \mu) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2\alpha\mu x_1 \\ 2x_2 - \mu \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1^*(1 + \alpha\mu^*) = 0 & (1) \\ x_2^* = \mu^*/2 & (2) \end{matrix}$$

logo (EQ 2): $2x_2^* = \mu^* \rightarrow \boxed{\mu^* = 4}$ (3)

- Para que $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, 2)$ seja um mínimo, a

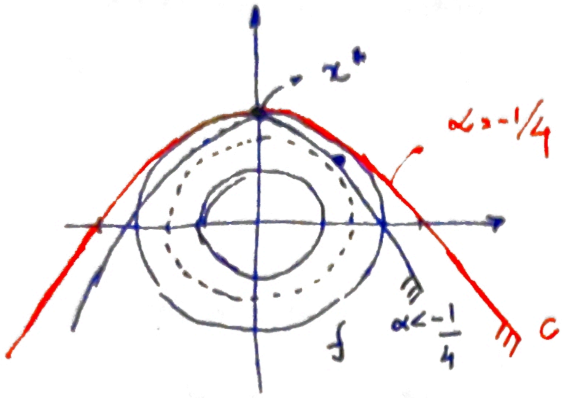
Matriz "Hessiana" W^* deve ser definida positiva.

$$\underset{\sim}{W}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2\alpha\mu^* & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ Assim:}$$

$$2 + 2\alpha\mu^* > 0 \longrightarrow \alpha > -1/\mu^* \rightarrow \boxed{\alpha > -1/4} \text{ (da EQ 3)} \quad (4)$$

- condicionante: $\mu^* c = \alpha\mu^* x_1^{*2} - \mu^* x_2 + 2\mu^*$, usando (3) e (4):

$\mu^* c = 0 - 8 + 8 = \emptyset \rightarrow$ OK!



$C: \; x_2 = -\dfrac{x_1^2}{4} + 2$

$(0,2) \in C$ e $(\pm 2\sqrt{2}, 0) \in C$

$$\underset{\sim}{\nabla} f(x^*) = \begin{bmatrix} 2x_1^* \\ 2x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\nabla} c(x^*) = \begin{bmatrix} 2\alpha x_1^* \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

No ponto $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, 2)$

$\mu^* = 4$

x^*

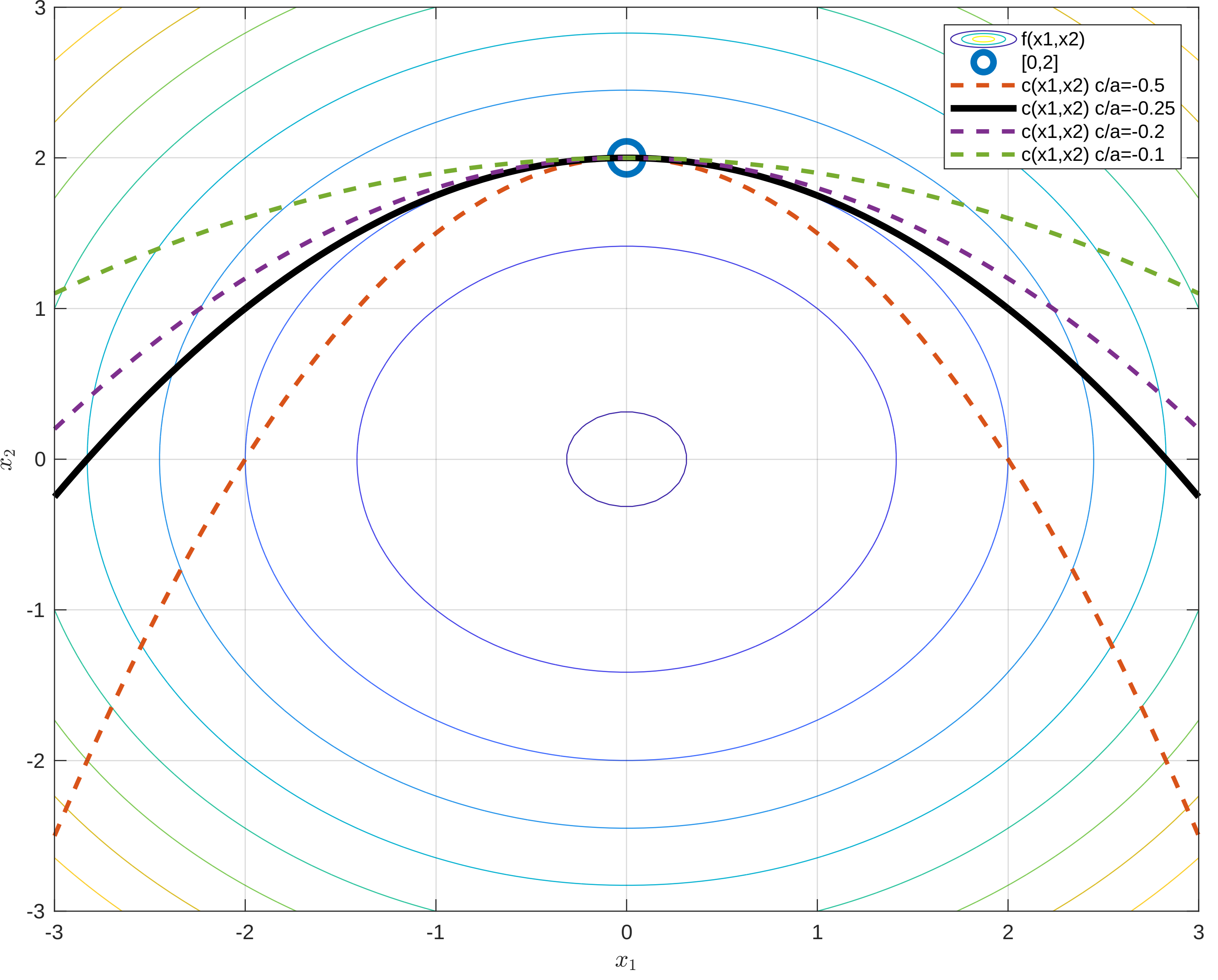
$\underset{\sim}{\nabla} f(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\underset{\sim}{\nabla} c(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, logo, $\underset{\sim}{\nabla} f(x^*) = -\mu^* \underset{\sim}{\nabla} c(x^*)$

$\rightsquigarrow \mu^* \underset{\sim}{\nabla} c(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

- logo, todas as condições KKT são atingidas p/ x^* e $\alpha = -1/4$.
- As condições KKT permanecem satisfeitas para $\alpha > -1/4$.
- Caso $\alpha < -1/4$, o ponto x^* não representa mais o mínimo de f com a restrição c.

plot matlab


f(x1,x2)
[0,2]
c(x1,x2) c/a=-0.5
c(x1,x2) c/a=-0.25
c(x1,x2) c/a=-0.2
c(x1,x2) c/a=-0.1
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3
x_1
x_2