Terá Buffon realmente lançado agulhas?

Ehrhard Behrends
Mathematisches Institut
Freie Universität Berlin
e-mail: behrends@math.fu-berlin.de

Jorge Buescu
Departamento de Matemática
FCUL & CMAF
e-mail: jbuescu@ptmat.fc.ul.pt

Resumo: O problema da agulha de Buffon permite obter aproximações ao valor de π através da realização de experiências físicas ou computacionais no espírito do Método de Monte Carlo. É muito frequente a atribuição desta ideia ao próprio Buffon. Mostra-se neste artigo que não só não existe qualquer registo histórico neste sentido como é extremamente improvável que Buffon tenha alguma vez considerado uma abordagem experimental ao problema da agulha. Essa concepção errada deriva provavelmente de um mal-entendido histórico que se identifica a partir dos textos originais.

1 A experiência da agulha de Buffon

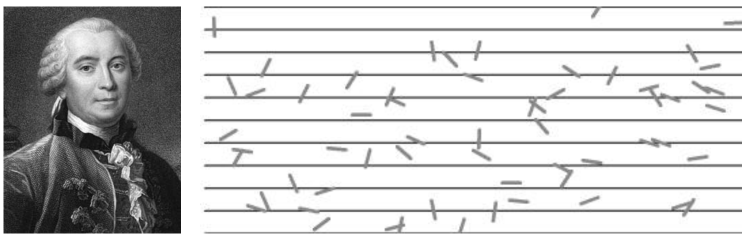
Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon (1707–1788), é famoso pela seguinte “experiência”:

> Suponhamos que estamos numa sala cujo chão é constituído por tábuas paralelas. Designemos a distância entre as tábuas por a. Tomemos uma agulha, ou um objecto semelhante, de comprimento $2r$ menor do que a. Esta condição assegura que, se deixarmos cair a agulha no chão, ela atravessará quando muito uma linha que divide tábuas diferentes.
>
> A probabilidade de que esse acontecimento ocorra (isto é, que a agulha, ao cair no chão, não fique totalmente contida no interior de uma única tábua) é então $P = 4r/\pi a$. Esta fórmula contém a constante π – proporcionando-nos, portanto, a possibilidade de calcular esta constante por via “experimental”. Será necessário, evidentemente, atirar a agulha um “grande número de vezes”,

> que designaremos por n. Se a agulha atravessar a linha divisória entre duas tábuas k vezes ao fim de n tentativas, então a frequência relativa k/n deverá ser uma boa aproximação de P; resolvendo a equação anterior em ordem a π obtemos $\pi = 4r/Pa$, pelo que a aproximação obtida conduzirá a um valor aproximado de π. *Voilà!*

É claro que, em vez de agulhas e de um soalho de tábuas, podemos utilizar simplesmente papel e fósforos ou alfinetes; a única restrição é que a distância entre as linhas seja maior do que o comprimento da agulha (ou do objecto correspondente que esteja a ser utilizado).

É geralmente aceite que a experiência da agulha de Buffon representa a primeira aplicação do Método de Monte Carlo da História da Matemática; ou seja, a primeira vez em que se utiliza um método aleatório para resolver, de forma aproximada, um problema computacional. Estes métodos podem ser utilizados com grande sucesso, por exemplo, para calcular integrais definidos em domínios multidimensionais ou para resolver inúmeros problemas de contagem.



Buffon e a "experiência da agulha".

2 Os factos

A família de Buffon enriqueceu por via de herança e, assim, ainda na sua juventude, Buffon tornou-se financeiramente independente. Como muitos dos seus contemporâneos, deixou-se fascinar pelo acelerado progresso das ciências naturais no século XVIII. Na verdade, os seus interesses eram universais. Os seus estudos conduziram-no a conceber uma enciclopédia em cinquenta volumes, *Histoire naturelle, générale et particulière*, dos quais foram publicados os primeiros trinta e seis. A partir de 1739, foi o administrador dos jardins reais de Paris ("Jardin Royal", hoje "Jardin des Plantes"). Ainda hoje chegam até nós ecos destas suas funções: é no quinto *arrondissement*, na extremidade sul do Jardin des Plantes, próximo do Campus de Jussieu, que se situa a Rue Buffon.

La Rue Buffon.

Havia planos para esta rua desempenhar um papel importante em Novembro de 2013, como parte de uma acção para a divulgação da Matemática. A Comissão RPA ("Raising Public Awareness") da European Mathematical Society (EMS) reuniu-se nesse mês em Paris, e surgiu a ideia de "reconstituir" a experiência de Buffon, simbolicamente, na própria Rue Buffon. As condições não podiam ser mais propícias: a Matemática correspondente pode ser facilmente compreendida por um público leigo – não sendo, por outro lado, completamente trivial – e, com contactos apropriados e alguma preparação profissional, seria razoável esperar uma boa cobertura mediática, realizando assim uma acção significativa para a divulgação da Matemática.

No entanto, este projecto acabou por ser cancelado. Quando alguns membros da Comissão entraram em contacto com o historiador da Matemática parisiense Bernard Bru para esclarecer pormenores sobre a experiência da agulha de Buffon, aperceberam-se de que não existem quaisquer registos históricos no sentido de Buffon ter concebido uma ligação entre as suas deduções teóricas e um cálculo aproximado de π, nem no sentido de alguma vez ter realizado, ou sequer proposto, a sua famosa "experiência". Estamos assim, pois, perante uma interessante manifestação do facto de a verdade histórica e "o conhecimento geralmente aceite" terem por vezes pouca relação entre si. Iremos passar a analisar mais pormenorizadamente as razões desta curiosa discrepância entre factos e idealizações.

Começamos por enumerar os seguintes factos documentalmente comprovados.

1. Em Maio de 1733, Buffon submeteu à Académie Royale des Sciences (da qual se tornaria membro em 1734) um artigo em que, entre outros problemas geométricos, calculava correctamente a probabilidade de um objecto filiforme de comprimento $2r$, atirado de forma aleatória, intersectar uma de várias linhas paralelas separadas por uma distância constante a (com $2r < a$):

> Sur un plancher qui n'est formé que de planches égales & parallèles, on jette une Baguette d'une certaine longueur, & qu'on

> suppose sans largeur. Quand tombera-t-elle franchement sur une seule planche?[1] ([2], pp. 44).

Depois de deduzir a sua fórmula, Buffon sublinha que ela pode ser utilizada para determinar o valor de a para o qual a probabilidade de o pau cair no interior de uma única tábua é 50%: "Il y a donc une certaine largeur de la planche qui rendroit le pari ou le jeu égal, & c'est ce que M. le Clerc a déterminé par une aire de Cycloïde avec beaucoup d' élégance au jugement de l'Académie"[2] ([2], pp. 45).

O resumo da apresentação de Buffon à Academia está publicado em [2] na secção de Geometria; o seu manuscrito original parece, contudo, nunca ter sido publicado [7].

2. Mais de quarenta anos depois, Buffon voltou a este problema de forma mais extensa em 1777, no seu "Éssai d'Arithmétique morale", contido na *Histoire naturelle*. A sua leitura revela claramente que a motivação principal para as suas investigações residia no cálculo de probabilidades para jogadores:

> Je suppose que, dans une chambre dont le parquet est simplement divisé par des points parallèles, on jette en l'air une baguette, et que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, et que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes des ces parallèles; on demande le sort de ces deux joueurs. (On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête).[3] ([3], pp. 411ff.)

3. No intervalo de mais de 40 anos entre estas duas referências escritas, as únicas que se lhe conhecem sobre esta questão, Buffon realizou de facto uma investigação experimental — não relativa ao problema da agulha, mas

[1] Tradução livre: "Sobre um soalho formado por tábuas iguais e paralelas deixa-se cair um pau com um certo comprimento, e que se suporá sem espessura. Quando cairá ele sobre uma única tábua?"

[2] Tradução livre: "Existe, portanto, uma certa largura das tábuas que faz com que esta aposta, ou jogo, seja justo, e foi isso o que M. LeClerc determinou por meio da área de uma ciclóide, de forma muito elegante na opinião desta Academia".

[3] Tradução livre: "Suponho agora que, numa sala cujo soalho se encontra simplesmente dividido por linhas paralelas, se atira um pau ao ar, e um jogador aposta que o pau não cruzará nenhuma das linhas paralelas do soalho, ao passo que o outro, pelo contrário, aposta que o pau cruzará uma dessas linhas paralelas. Pede-se então a probabilidade de sucesso de cada jogador (pode jogar-se este jogo num tabuleiro de damas com uma agulha de coser ou com alfinetes sem cabeça)."

sim àquele que é hoje conhecido como Paradoxo de S. Petersburgo. Sucintamente, este baseia-se num jogo em que se lança repetidamente ao ar uma moeda equilibrada até cair com a face voltada para cima. Se este acontecimento se verificar no k-ésimo lançamento, o jogador ganha 2^k ducados. É fácil verificar que o valor esperado do prémio é infinito, pelo que seria de esperar que o valor justo que um jogador tem de pagar para o jogar fosse, também ele, infinito.

Buffon descreve o jogo em [3], no início da página 394. Na página 399, afirma ter realizado estudos experimentais relacionados com este problema:

> J'ai donc fait deux mille quarante-huit expériences sur cette question, c'est-à-dire j'ai joué deux mille quarante-huit fois ce jeu, en faisant jeter la pièce par un enfant.[4]

4. Laplace considerou, no seu tratado de 1812 sobre Teoria de Probabilidades [9], o problema da agulha — não atribuindo a sua origem a Buffon mas referindo explicitamente, tanto quanto se sabe pela primeira vez, a possibilidade de utilizar os cálculos teóricos para determinar uma aproximação experimental para π. De facto, depois de determinar a probabilidade de uma linha ser cortada pela agulha, escreve Laplace:

> Si l'on projette un grand nombre de fois ce cylindre, le rapport du nombre de fois où le cylindre rencontrera l'une des divisions du plan au nombre total des projections sera, à très peu près, la valeur de $4r/(a\pi)$, ce qui fera connaître la valeur de la circonférence 2π.[5] ([9], pp 366).

5. O problema da agulha de Buffon parece ter despertado interesse por experiências reais a partir de meados do século XIX. O primeiro estudo experimental documentado data de 1850 e foi realizado por Rudolf Wolf (1816–1893) [13], então professor na Universidade de Berna. Curiosamente, Wolf tomou conhecimento do resultado por via indirecta, através da enciclopédia *Un million de faits* de Lallane (1843), que não referia a sua origem. Wolf ignorava pois na altura que o problema era devido a Buffon. Augustus de Morgan refere em 1859 ([11], pp. 283-4) que um certo Mr. Ambrose Smith realizou a experiência em 1855 com 3204 lançamentos e um estudante seu

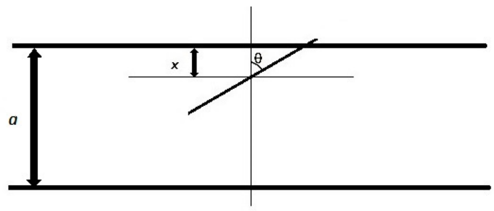
[4]Tradução livre: "Realizei 2048 experiências relativas a esta questão, isto é, joguei este jogo 2048 vezes, utilizando uma criança para atirar a moeda ao ar."

[5]Tradução livre: "Se se lançar ao ar este cilindro um grande número de vezes, o quociente entre o número total de vezes em que o cilindro corta uma das linhas e o número total de lançamentos terá aproximadamente o valor $4r/a\pi$, o que permitirá determinar o valor da circunferência 2π."

com 600 lançamentos. O astrónomo americano Asaph Hall (que, curiosamente, atribui o problema a Laplace) descreve [6] um conjunto de experiências com mais de meio milhar de lançamentos cada uma, realizado em 1864 pelo seu amigo Capitão O. C. Fox, imobilizado por um ferimento de guerra.

3 Dos factos à ficção

A demonstração do resultado teórico de Buffon em linguagem moderna é simples. Suponhamos, como até aqui, que a agulha tem comprimento $2r < a$, em que a é a distância entre tábuas. Designemos por x a distância entre o centro da agulha e a tábua mais próxima e por θ o ângulo entre a agulha e a perpendicular à direcção das tábuas.



Demonstração do resultado de Buffon.

É geometricamente claro que as condições para que a agulha intersecte duas tábuas são $x \leq r$ e $\cos\theta \leq \frac{x}{r}$. Integrando sobre os possíveis valores de x, obtemos o resultado de Buffon:

$$P = \frac{2}{a}\int_0^r \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) dx = \frac{4r}{\pi a}.$$

Como já referido e admirado por Fontenelle, o método de Buffon não parece ter sido este mas o de calcular a área por baixo de um troço de ciclóide [7].

Quanto aos dados obtidos de forma experimental, a análise é mais subtil. A primeira pergunta a fazer é a seguinte: qual a precisão que podemos esperar de experiências deste tipo? A teoria afirma que o melhor que se pode obter são resultados do seguinte tipo. Se lançarmos a agulha n vezes e ela cruzar uma linha k vezes, utilizando a razão k/n para calcular uma aproximação a π, então com uma certa probabilidade p o resultado estará numa certa vizinhança ϵ de π. Podemos então escolher um valor de p próximo de 1 e um valor de ϵ (pequeno), obtendo majorações para o erro cometido utilizando, por exemplo, a desigualdade de Chebyshev. Infelizmente, para valores de p razoavelmente elevados e de ϵ não demasiado grandes, os cálculos revelam que o valor de n é astronomicamente elevado e a convergência extraordinariamente lenta. O método da agulha de Buffon não é, pois, adequado para obter informação sobre os algarismos de π.

Vale a pena salientar, a este propósito, os resultados das experiências relatadas em 1901 por Lazzarini, que afirmou, após ter efectuado uma experiência com 408 lançamentos, obter uma aproximação para o valor de π correcta até à sexta casa decimal ([8], p. 120). Artigos recentes de Gridgeman [5] e Badger [1] contrariam esta afirmação, classificando-a como extraordinariamente improvável e atribuindo-a a uma presumível manipulação dos dados.

Nos dias de hoje, evidentemente, a experiência da agulha de Buffon pode ser muito facilmente simulada por computador, sem necessidade de experiências físicas, existindo até inúmeras aplicações para o efeito disponíveis na Web.

Em notável contraste com o registo histórico, subsiste na comunidade matemática uma impressão generalizada de que Buffon teria não apenas considerado a possibilidade de determinar uma aproximação ao valor de π por meio de uma "experiência" como, de facto, a teria mesmo chegado a realizar. Descrevem-se a seguir alguns exemplos concretos dessa impressão.

1. O problema de Buffon é frequentemente tratado em livros de texto sobre Probabilidades e Métodos Estocásticos. Em livros a este respeito tanto em inglês como em alemão, o primeiro autor não encontrou um único em que transpareça a mais pequena dúvida sobre a afirmação de que "Buffon desejava calcular uma aproximação a π com a sua experiência" (esta observação é, infelizmente, também aplicável ao livro do primeiro autor *Elementare Stochastik*, Springer Spektrum, 2012).

2. Estes autores de livros de texto encontram-se em boa companhia: mesmo em livros sobre História das Probabilidades se afirma, sem citar quaiquer fontes, que Buffon realizou de facto estas experiências. Eis dois exemplos:

- "It was originally performed with a needle" ([8], p. 75).
- "Many investigators (including Buffon) used this result for the experimental determination of π" ([10], p. 120).

Muitos outros livros de História das Probabilidades são omissos sobre a ligação de Buffon à aproximação experimental de π, deixando a questão totalmente em aberto.

De acordo com Bernard Bru, toda esta situação resulta de um mal-entendido histórico. As experiências efectivamente realizadas e descritas por Buffon sobre o Paradoxo de S. Petersburgo terão sido, com o passar do tempo, erradamente extrapoladas como abrangendo *também* experiências relativas à aproximação de π através do problema da agulha. A partir de certa altura estes "factos" foram sendo acriticamente repetidos, sem verificação das fontes originais.

3. A Internet não é grande ajuda nesta questão. Nas páginas do Mac Tutor History of Mathematics (`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/`), que os autores visitam frequentemente e têm em elevada consideração, afirma-se o seguinte sobre Buffon: "His most notable contribution to mathematics was a probability experiment which he carried out calculating π by throwing sticks over his shoulder onto a tiled floor and counting the number of times the sticks fell across the lines between the tiles."

Há alguns anos, a situação descrita pelo Mac Tutor era ainda mais curiosa: afirmava-se que Buffon teria lançado, não paus ("sticks"), mas pães ("white loaves of bread"). Não é necessária muita imaginação para compreender o aparecimento este erro. O termo "baguette" utilizado por Buffon nos seus textos originais foi interpretado, na tradução para o inglês, como sendo relativo ao familiar pão francês de forma alongada (*la baguette de pain*). No entanto, "la baguette" tem vários significados possíveis em francês, incluindo simplesmente "pau", que faz consideravelmente mais sentido (e ainda mais se considerarmos que o próprio Buffon, como acima notado, sugeria substituí-lo por uma agulha ou um alfinete sem cabeça). Na altura, o primeiro autor notificou o administrador do Mac Tutor a este propósito e, pouco depois, o erro foi corrigido.

4. Não deixa de ser interessante verificar que este curioso erro de tradução parece, contudo, ter integrado parte do folclore em torno da hipotética experiência de Buffon. Ed Waymire afirma, por exemplo, a propósito de uma generalização do resultado de Buffon ([15], p. 550):

- (um colega) "(...) was wondering if I knew what would happen if Buffon had tossed a noodle in place of a needle (actually Buffon tossed baguettes)".

Vale a pena observar que a "experiência" de Buffon pode ser generalizada em vários sentidos. Eis alguns exemplos:

- O que acontece se o comprimento da agulha for maior do que a distância entre as tábuas? Esta questão foi analisada e resolvida por Laplace em [9]. Para abordagens mais recentes, veja-se por exemplo Diaconis [4]).
- Podem substituir-se as agulhas por superfícies bidimensionais, como por exemplo bases de copos? É possível, evidentemente, deduzir fórmulas para a probabilidade, mas o facto de π ocorrer ou não na fórmula depende da geometria da superfície. Assim, por exemplo, bases quadradas são adequadas para calcular aproximações para π, ao passo que bases circulares não o são.

- Como se altera a situação se substituirmos a agulha por um segmento curvo no plano? A este propósito, consulte-se por exemplo Ramaley [12] ou Waymire [15].

4 Conclusão

Em conclusão, podemos afirmar que Buffon formulou e resolveu matematicamente o célebre problema da agulha. Por outro lado, não existe qualquer registo histórico de que Buffon alguma vez tenha realizado experiências relativas a este problema; pelo contrário, o contexto e o desenvolvimento posteriores sugerem fortemente que tal nunca tenha ocorrido. Apenas no caso, bastante implausível, de ser descoberta documentação até hoje desconhecida poderia esta hipótese adquirir alguma credibilidade.

Em contrapartida, o problema da agulha de Buffon tem uma extraordinária importância histórica: foi o primeiro problema de um novo território, a Teoria da Probabilidade Geométrica, e nesse sentido rasgou horizontes para novas ideias matemáticas, que ainda hoje frutificam. Klain e Rota afirmam que o resultado de Buffon é "(...) the theorem leading into the heart of Geometric Probability" ([14], p. 3).

Tudo isto confere, assim, uma curiosa dualidade à figura de Buffon. Se, por um lado, parece fora de questão encarar Buffon como um precursor do Método de Monte Carlo *avant la lettre*, o facto de o problema da agulha, que ele formulou e resolveu, marcar de certa forma a fundação da Probabilidade Geométrica é razão suficiente para Buffon merecer a nossa admiração e um lugar na História da Matemática. Recomendamos assim a futuros autores de textos de Probabilidades ou Análise Estocástica que se abstenham de associar Monsieur Buffon ao lançamento físico de paus, agulhas, pedaços de pão ou objectos semelhantes.

Agradecimentos. Os autores estão muito reconhecidos aos seus colegas Bernard Bru (Paris) e Eberhard Knobloch (Berlim) pela sua ajuda em esclarecer as questões mais delicadas do trabalho aqui descrito.

Referências

[1] L. Badger, Lazzarini's Lucky Approximation of π. Math. Mag. **67** (1994), 2, pp. 83–91.

[2] Fontenelle, B., Mairan, J., Fouchy, J. e Condorcet, J. (eds.), resumo da comunicação apresentada por Buffon à Académie Royale des Sciences.

Histoire de l'Académie Royale des Sciences – Année 1733, 43–45. Paris, Imprimerie Royale, 1735.

[3] G. L. Leclerc de Buffon, Essai d'Arithmétique morale. Histoire naturelle, générale er particulière, Supplément 4, 46-123, 1777.

[4] P. Diaconis, Buffon's Problem with a Long Needle. J. of Applied Probability **13**, 1976, pp. 614–618.

[5] N. T. Gridgeman, Geometric probability and the number π. Scripta Math. **25** (1960), 183–95.

[6] A. Hall, On an experimental determination of π.

[7] P. Holgate, Buffon's Cycloid. Biometrika **68**, 1981, pp. 712–716.

[8] A. C. King, C. B. Read, Pathways to Probability. 1963.

[9] P.-S. Laplace, Théorie Analytique des Probabilités. 1812. Oeuvres complètes, tome VII. Paris, Gauthier-Villars, 1886.

[10] L. Maistrov, Probability Theory: A historical sketch. 1974.

[11] Augustus de Morgan, A budget of paradoxes. Cosimo Classics, NY, 2007; 1st edition 1872.

[12] J. F. Ramaley, Buffon's Noodle Problem. American Mathematical Monthly **76**, 1969, pp. 916–918.

[13] H. Riedwyl, Rudolf Wolf's contribution to the Buffon needle problem (an early Monte Carlo experiment) and application of least squares. The American Statistician **44** (1990) 44, 2, 138–139.

[14] D. Klain, G.-C. Rota, Introduction to Geometric Probability. Lezione Lincee, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[15] Ed Waymire, Buffon noodles. Amer. Math. Monthly **101** (1994), 6, 550–559.

O presente artigo é uma versão revista e ampliada de um outro a publicar em *Newsletter of the European Mathematical Society*.