Instituto de Física – Universidade de São Paulo
Professor Zwinglio de Oliveira Guimarães
Métodos Estatísticos em Física Experimental
São Paulo, junho de 2015.

O problema das Agulhas de Buffon.

Artur Z. Paes
arturzp_@hotmail.com

Natália Fiorini
na.fiorini@gmail.com

Paloma Suzane Cabrera
palomascabrera@gmail.com

Saulo Nascimento
saulo.nascimento@usp.br

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de estudar o Problema das Agulhas de Buffon, também conhecido como problema de Buffon-Laplace. A dedução do problema é apresentada a fim de estabelecer um método aleatório para determinação de um valor aproximado para a constante numérica π. Por fim, o experimento é simulado computacionalmente com base na geração de números aleatórios (Método de Monte Carlo) e os resultados são analisados numérica e graficamente para determinar a validade e as limitações do método.

Palavras Chave: experimento aleatório; agulhas de Buffon; probabilidade geométrica.

1 – INTRODUÇÃO

No século XVIII o matemático e naturalista francês George-Louis Leclerc, o Conde de Buffon, realizava estudos sobre probabilidade, os quais chamavam a atenção devido à sua abordagem geométrica dos problemas. Em maio de 1733 submeteu à Acedémie Royale des Sciences um artigo em que, dentre outros problemas geométricos, estabelecia o seguinte problema:

"Sobre um plano formado apenas por placas paralelas e iguais, joga-se uma haste de comprimento determinado e que suponhamos de largura desprezível. Quando este objeto cairá sobre uma única placa?".[1]

Buffon então determinou a probabilidade de um objeto, como uma agulha, de comprimento L intersectar uma das linhas paralelas separadas por uma distância d e dispostas sobre o plano quando a agulha é jogada de forma aleatória sobre o plano. Tal proposição é por muitos considerada a primeira aplicação do Método de Monte Carlo.

O problema é também conhecido como "Problema de Buffon-Laplace", pois no ano de 1812 Laplace o considerou em seu tratado Teoria de Probabilidades, em que não atribui a origem do problema ao conde de Buffon, mas refere-se explicitamente, ao que se sabe de forma inédita, à possibilidade de utilizar os cálculos teóricos envolvidos neste problema como um método para determinar uma aproximação experimental para o número π:

"Se lançarmos muitas vezes o objeto, a razão entre o número de vezes que o objeto cai sobre uma das linhas paralelas do plano pelo número total de lançamentos será, aproximadamente, igual a $2L/d\pi$, o que permite

[1] "Sur un plancher qui n'est formé que de planches égales e parallèles, on jette une baguette d'une certaine longuers e qu'on suppose sans larguer. Quando tombera-t-elle franchement sur une seule planche?" (1, pág. 44).

conhecer o valor de π"[2]*, onde L refere-se ao comprimento da haste lançada e d à distância entre as retas paralelas.*

2 – DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Seja uma superfície com várias retas paralelas espaçadas por uma distância d e um objeto cuja largura é muito menor que o comprimento L (agulha, por exemplo). Determina-se que a distância entre as retas paralelas é maior ou igual ao comprimento do objeto ($d \geq L$), de modo que este não consiga cruzar simultaneamente duas retas paralelas. Dessa forma, ao lançar o objeto sobre a superfície, dois eventos são possíveis e mutuamente exclusivos (veja Figura 1).

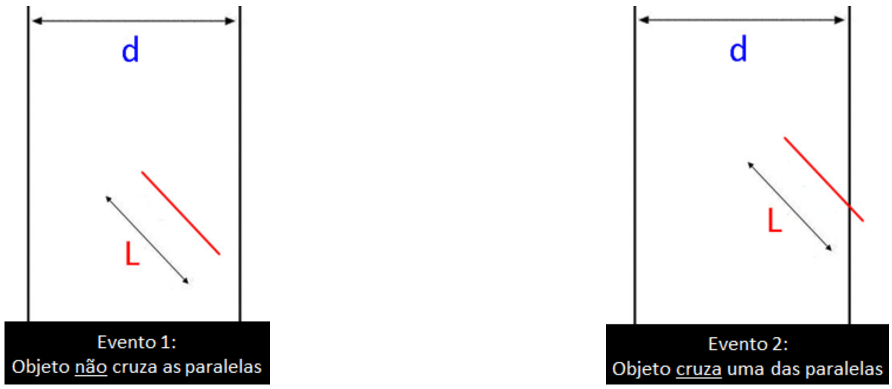

Figura 1: detalhe do plano mostrando duas das retas paralelas no caso de cada um dos dois eventos que podem ocorrer ao lançar o objeto sobre o plano.

Sendo assim, a ocorrência de ambos os eventos depende de três variáveis. Conforme apresentado na Figura 2:

- x é a distância entre o ponto central do objeto à paralela mais próxima, tal que x=0 quando o ponto central do objeto cai sobre uma das paralelas e x=d/2 quando o ponto central do objeto cai sobre a metade da distância entre as paralelas;
- h é a distância entre a extremidade do objeto lançado mais próxima de uma paralela até ao segmento de reta que atravessa o ponto central e também é paralelo às paralelas traçadas na superfície, tal que:
-

$$\sin\theta = \frac{h}{\left(\frac{L}{2}\right)} \rightarrow h = \frac{L\sin\theta}{2}$$ **Equação 1**

- e θ é o ângulo formado entre o objeto e a reta fictícia que passa pelo seu centro e é paralela às demais retas, tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Logo, para que ocorra o Evento 2, isto é, para que a agulha **cruze** uma reta paralela:

$$x \leq h \rightarrow x \leq \frac{L\sin\theta}{2}$$ **Equação 2**

[2] "Si l'on projette un grand nombre de foi ce cylindre, le rapport du nombre de foi où le cylindre rencontrera l'une des divisions du plan au nombre total des projections sera, à très peu près, la valeur de 4r/aπ, ce qui fera connaître la valeur de la circonférence 2π ." (2, pág. 366). Obs. : neste trabalho optou-se por utilizar L=2r e a=d.

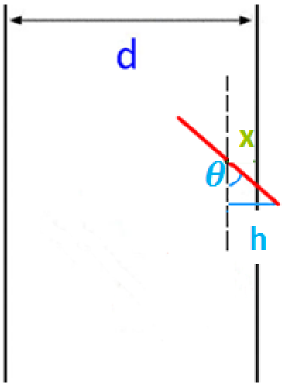

Figura 2: apresentação de x, θ e h quando ocorre o Evento 2.

Em um gráfico que apresenta os valores de x no eixo vertical e os valores de θ no eixo horizontal, como apresentado na Figura 3, a área G corresponde a todos os pares (x, θ) e está relacionada ao número total de lançamentos. Já a área g corresponde somente aos pares sob a curva identificada pela Equação 2 e está relacionada ao número de ocorrências do Evento 2.

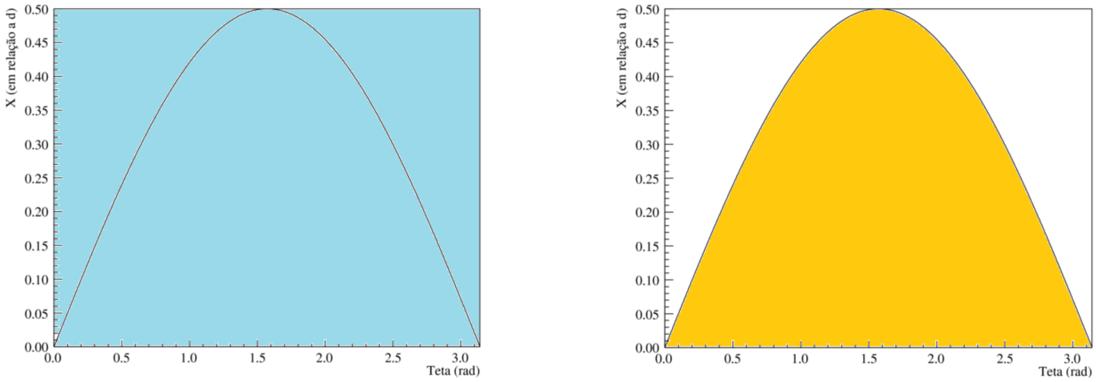

Figura 3: gráfico apresentando os pares (x, θ). No primeiro caso, a área em azul corresponde à área G; já no segundo, a área em laranja corresponde à área g.

Dessa forma, a probabilidade geométrica de que o objeto lançado sobre a superfície venha a cruzar uma das retas paralelas é dada por:

$$P_g = \frac{g}{G} = \frac{\int_0^{\pi}\left(\frac{L\sin\theta}{2}\right)d\theta}{\left(\frac{d}{2}-0\right)(\pi-0)} = \frac{L}{\frac{d\pi}{2}} = \frac{2L}{d\pi} \qquad \textbf{Equação 3}$$

Já a frequência relativa de ocorrência do Evento 2 (Figura 1) é dada por:

$$P_f = \frac{\text{Número de ocorrências do Evento 2}}{\text{Número de lançamentos}} = \frac{n}{N} \qquad \textbf{Equação 4}$$

Igualando as Equações 3 e 4, obtemos a equação que nos permitirá conhecer valores estimados para π:

$$P_g = P_f \rightarrow \frac{2L}{d\pi} = \frac{n}{N} \rightarrow \hat{\pi} = \frac{2NL}{dn} \qquad \textbf{Equação 5}$$

Ressaltemos que a probabilidade de obter n ocorrências do Evento 2 é dada pela distribuição Binomial, onde p = Pg é a probabilidade de ocorrer o Evento 2, de forma que a probabilidade de obter n ocorrências do Evento 2, cuja probabilidade individual é p=Pg, quando N lançamentos forem realizados é dada por:

$$P_{N,p}(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!}p^n(1-p)^{N-1} \qquad \textbf{Equação 6}$$

E a incerteza da distribuição binomial também fica determinada:

$$\sigma_n = \sqrt{Np(1-p)}$$ **Equação 7**

Já a incerteza de π̂ é determinada por propagação de incertezas, de forma que:

$$\left(\frac{\sigma_{\hat{\pi}}}{\hat{\pi}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_N}{N}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2 = (0)^2 + \left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2 \rightarrow \sigma_{\hat{\pi}} = \hat{\pi}\left(\frac{\sqrt{\frac{2N}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)}}{\frac{2N}{\pi}}\right)$$ **Equação 8**

E o erro é dado por:

$$e = \hat{\pi} - \pi_0$$ **Equação 9**

3 – SIMULANDO O EXPERIMENTO

Inicialmente pretendia-se realizar o experimento utilizando palitos de madeira previamente selecionados de forma a terem o mesmo comprimento e uma cartolina de tamanho duplo na qual as retas paralelas foram traçadas de forma que a distância entre tais retas era igual ao comprimento dos palitos. A cada jogada 10 palitos eram lançados e o número de palitos que caíam sobre retas eram contados.

No entanto algumas dificuldades complicavam a execução do experimento. Para começar, traçar as retas paralelas mostrou-se uma tarefa difícil já que a cartolina não era perfeitamente retangular e havia discordância nas medidas realizadas por diferentes membros do grupo com diferentes réguas, além disso, muitas jogadas seriam necessárias, de forma que o experimento seria muito longo e cansativo, portanto, sujeito a muitos erros.

Sendo assim, optou-se por realizar uma simulação do experimento, o que permitiria um grande número de lançamentos com objetos de comprimentos diferentes, isto é, com o uso da simulação o problema poderia ser melhor visualizado, já que outros parâmetros envolvidos no experimento poderiam ser variados com praticidade.

Sendo assim, dois programas em linguagem C foram desenvolvidos de forma tratando-se, basicamente, do Método de Monte Carlo.

No Programa Computacional 1, os valores do comprimento do objeto e da distância entre as paralelas eram mantidos fixos ($L = d = 1$), já o número de lançamentos variava de 1 a 15000 ($1 \leq N \leq 15000$), de forma que, para cada valor de N, determinado número de ocorrências do Evento 2 era estabelecido (n vezes em que o objeto cruza uma paralela) e um valor estimado para π era calculado, bem como a incerteza de $\hat{\pi}$ (Equação 5), probabilidade geométrica (Equação 3) e o erro (Equação 9). O código de tal programa é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Código do Programa 1 em linguagem C utilizado na simulação do experimento em que $1 \leq N \leq 15000$ e $L = d = 1$.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
/* Define uma função que calcula potências */
float pot (float base, float expoente)
{
   int i=1, p=1;
   while(i<=expoente)
   {
      p=p*base;
      i++;
   }
   return p;
}
```

```
int main()
{
  /* Cria um arquivo .txt em que os dados serão salvos */
   FILE *arq;
   arq1 = fopen("DadosSimulaBuffon_Lfixo.txt", "wt");
   arq2 = fopen("DadosSimulaBuffon_XeTeta.txt", " wt");

   float a1, a2, Xmax,  N, d, x, teta, L, n, PI, PIest, erro, Pg, incPIest, k;
   int i;

  /* atribui valor às variáveis */
   N=150000;
   d=1.0;  /* Definiu-se L=d=1 para facilitar */
   L=1.0;
   n=0;
   PI=3.14159265359;  /* Valor verdadeiro de PI */
   i=1;

  /* Utiliza a contagem de tempo do computador como semente para srand gerar um aleatório */
   srand((unsigned) time(NULL));

  /* Calcula os valores de x e teta; determina se cada agulha cruzou a paralela e calcula o valor estimado para PI*/
   while(i<=N){

      fprintf(arq, "%.0f    ", N);

      a1=rand()%51; /* gera um aleatório inteiro entre 0 e 50*/
      a2=rand()%101; /* gera um aleatório inteiro entre 0 e 100*/

      /* usa a1 e a2 para definir, respectivamente, x (entre 0 e (d/2)=0.5) e teta (entre 0 e PI) */
      x = (a1/100);
      teta= (a2/100)*PI;
      fprintf(arq2, "%.0f      %3.6f      %3.6f\n", N, teta, x);

      Xmax=(L*(sin(teta)))/2; /* calcula o valor de Xmax */

      if(x<=Xmax)
          {n=n+1;} /* Se x é menor ou igual a Xmax, então a agulha cruzou a reta */

     PIest=(2*N)/n; /* A cada lançamento, calcula um valor estimado para PI */
     erro=PIest-PI;
     Pg=(2*L)/(d*PI);
     k=((2*n)/PI)*(1-(2/PI)); /* Variável auxiliar para calcular incPIest */
     incPIest=PIest*((pot(k, 0.5) )/((2*n)/PI));

     fprintf(arq1, "%.0f      %3.6f      %3.6f      %3.6f      %3.6f\n ", n, PIest, erro, Pg, incPIest);

      i=i+1;

   } /* fim do while */

   /* Fecha o arquivo em que os dados são salvos */
   fclose(arq);

   return 0;
}
```

Já no Programa 2, o valor do número de lançamentos foi mantido fixo ($N = 15000$) assim como o valor da distância entre as retas paralelas ($d = 1$), no entanto, o valor do comprimento do objeto foi variado entre 0 e 1 ($0 \leq L \leq 1$) e um valor foi estimado para π a cada valor de L. O código de tal programa é apresentado na Tabela 2.

Tabela 2: Código do Programa 2 em linguagem C utilizado na simulação do experimento em que $N = 15000, d = 1$ e $0 \leq L \leq 1$.

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
/* Define uma função que calcula potências */
float pot (float base, float expoente)
{
   int i=1, p=1;
   while(i<=expoente)
   {
      p=p*base;
      i++;
   }
   return p;
}
int main()
{
  /* Cria um arquivo .txt em que os dados serão salvos */
   FILE *arq;
   arq = fopen("DadosSimulaBuffon_Lvaria.txt", "wt");
   float a1, a2, Xmax,  N, d, x, teta, L, n, PI, PIest, erro, Pg, incPIest, k;
   int i;
  /* atribui valor às variáveis */
   N=150000;
   d=1.0;
   L=0.0;
   n=0;
   PI=3.14159265359;  /* Valor verdadeiro de PI */
   i=1;
  /* Utiliza a contagem de tempo do computador como semente para srand gerar um aleatório */
   srand((unsigned) time(NULL));
  /* Calcula os valores de x e teta; determina se cada agulha cruzou a paralela e calcula o valor estimado para PI*/
while(L<=1){
      while(i<=N){
              fprintf(arq, "%.0f    ", N);
              a1=rand()%51; /* gera um aleatório inteiro entre 0 e 50*/
              a2=rand()%101; /* gera um aleatório inteiro entre 0 e 100*/
              /* usa a1 e a2 para definir, respectivamente, x (entre 0 e (d/2)=0.5) e teta (entre 0 e PI) */
              x = (a1/100);
              teta= (a2/100)*PI;
              Xmax=(L*(sin(teta)))/2; /* calcula o valor de Xmax */
              if(x<=Xmax)
              {n=n+1;} /* Se x é menor ou igual a Xmax, então a agulha cruzou a reta */
              PIest=(2*N)/n; /* A cada lançamento, calcula um valor estimado para PI */
              erro=PIest-PI;
              Pg=(2*L)/(d*PI);
              k=((2*n)/PI)*(1-(2/PI)); /* Variável auxiliar para calcular incPIest */
              incPIest=PIest*((pot(k, 0.5) )/((2*n)/PI));
              fprintf(arq, "%.0f      %3.6f      %3.6f      %3.6f      %3.6f    %2.2 ", n, PIest, erro, Pg, incPIest, L);

              i=i+1;
              } /* Fim do while para N */
      L=L+0.05;
```

```
    } /* fim do while para L*/

  /* Fecha o arquivo em que os dados são salvos */
  fclose(arq);

  return 0;
}
```

Para analisar os resultados obtidos pelas simulações e compará-los às previsões teóricas, diversos gráficos foram elaborados, como discutiremos na seção seguinte.

4 – RESULTADOS

A partir de dados gerados pelo Programa 1, construiu-se um gráfico dos valores do par (θ, x) gerados aleatoriamente. Conforme é possível conferir na Figura 4, a simulação condiz com a condição de aleatoriedade do experimento, além disso, é possível verificar a condição estabelecida na Equação 2, representada no gráfico pela linha vermelha. Também é possível localizar os pares (θ, x) correspondentes ao Evento 1 (quando o objeto não cruza nenhuma reta) e que correspondem aos pares (θ, x) acima da curva vermelha, e ao Evento 2 (quando o objeto cruza uma reta) e que correspondem aos pares (θ, x) em cima e abaixo da curva vermelha.

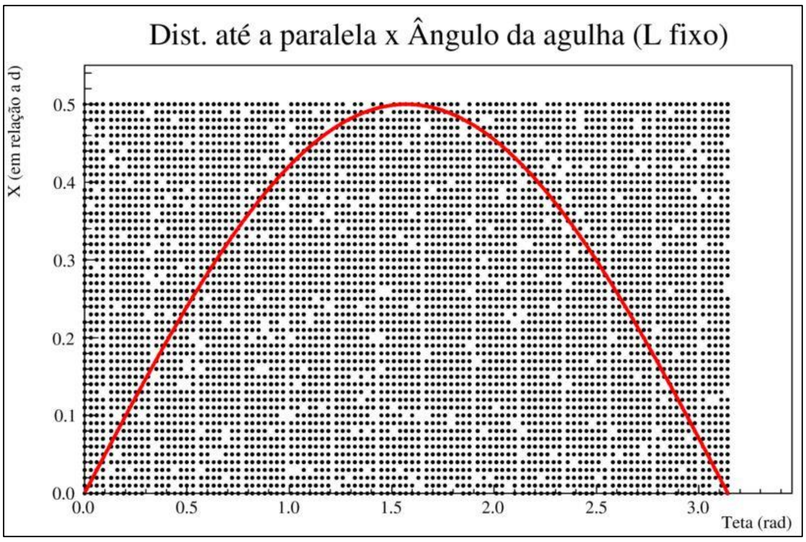

Figura 4: gráfico dos pares (θ, x) gerados aleatoriamente a partir do Programa 1, a curva vermelha corresponde à Equação 2.

A partir do gráfico dos valores estimados para π em função do número de lançamentos (N), apresentado na Figura 5, também construído com dados gerados pelo Programa 1 e no qual a linha vermelha apenas indica o valor verdadeiro de π no eixo vertical, pôde-se verificar que, de fato, quanto maior for N melhor será a aproximação de π, pois as variações diminuem conforme N aumenta. No entanto, quando N é grande o valor estimado para π tende bastante vagarosamente ao valor verdadeiro de π, de forma que um número de lançamentos realmente muito grande é necessário para obter um valor estimado muito próximo do valor verdadeiro.

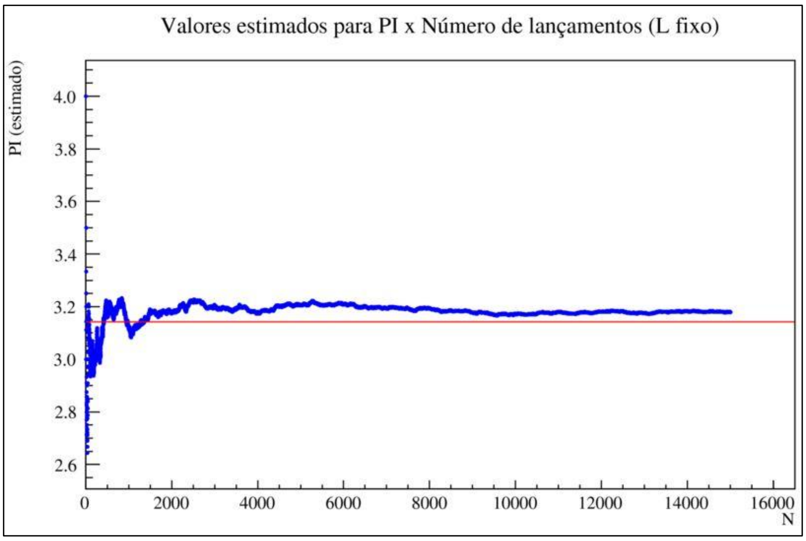

Figura 5: gráfico dos valores estimados para π em função do número de lançamentos (N) gerado a partir de dados do Programa 1 e em que a linha vermelha indica o valor verdadeiro de π no eixo vertical. Os valores das incertezas no eixo vertical, definidos conforme a Equação 8, não são apresentados para não poluir visualmente.

Em seguida, a partir de dados do Programa 1, avaliou-se dos erros dos valores estimados para π em função do número de lançamentos (N). Como é possível verificar na Figura 6, não é possível afirmar que o valor do erro é menor quanto maior o valor de N, pois em alguns casos em que N é pequeno, valores bastante baixos foram obtidos para o erro.

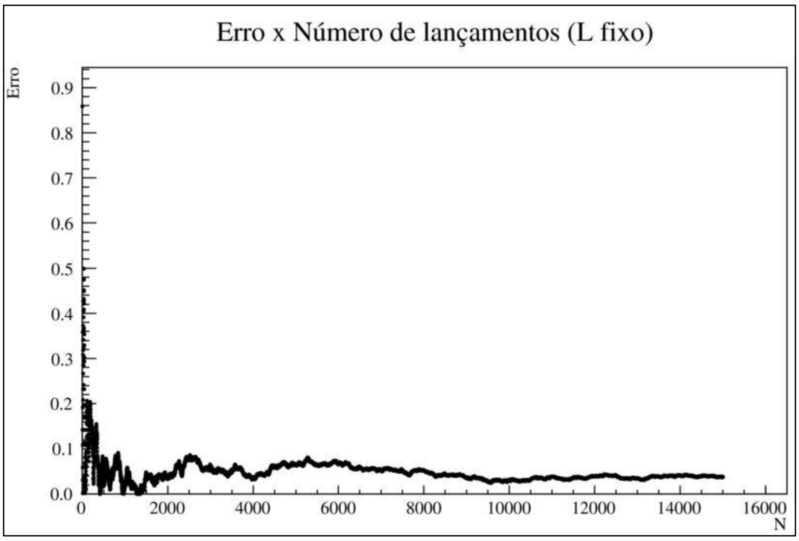

Figura 6: gráfico dos valores do erro (Equação 9) em função do número de lançamentos (N) gerado a partir de dados do Programa 1.

Então, avaliou-se também o valor da incerteza dos valores estimados para π em função do número de lançamentos (N), apresentado na Figura 7, e pôde-se verificar que, ao contrário do que acontece com o erro, é possível afirmar que as incertezas dos valores estimados para π será tanto menor quanto maior for o valor de N.

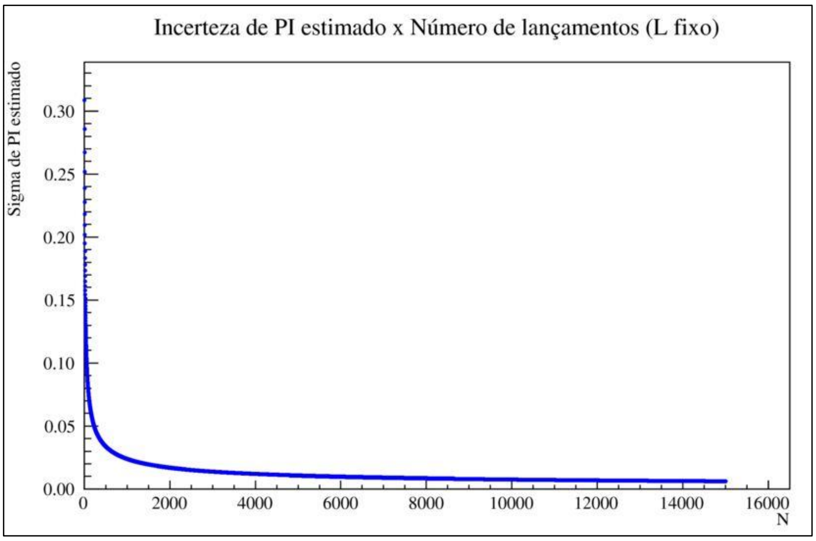

Figura 7: gráfico das incertezas dos valores estimados para π em função do número de lançamentos (N), gerado a partir de dados do Programa 1.

A partir dos dados gerados pelo Programa 2, avaliou-se o gráfico da probabilidade geométrica em função do comprimento do objeto, apresentado na Figura 8, e pôde-se estabelecer uma relação linear entre tais grandezas, como já era esperado pela Equação 3. Assim, tal gráfico acorda que a probabilidade de um objeto cujo comprimento é muito menor que a distância entre as retas paralelas cruzar uma destas retas será menor que se tal objeto tiver um comprimento próximo ao valor da distância entre as retas.

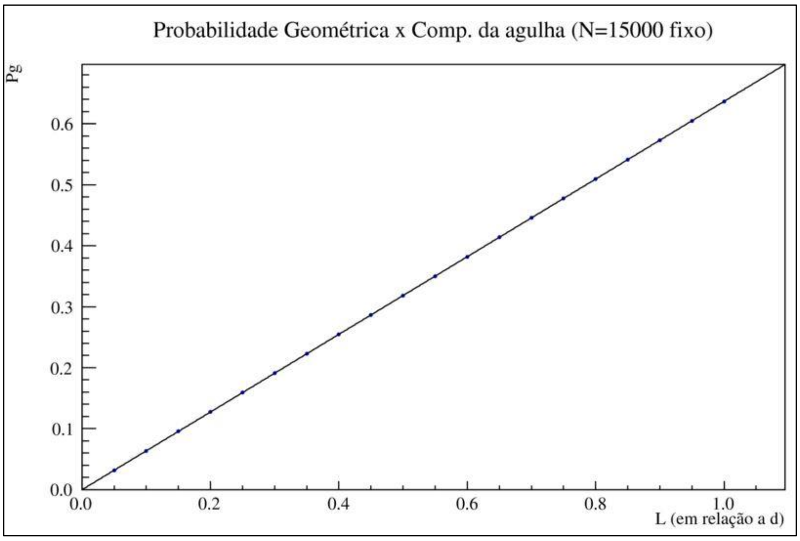

Figura 8 gráfico dos valores da probabilidade geométrica (Equação 3) em função do comprimento do objeto, gerado a partir de dados do Programa 2.

Avaliou-se também o comportamento dos valores estimados para π em função do comprimento do objeto (L), como mostram as Figuras 9 e 10. Pôde-se, então, confirmar a Equação 5 e verificar a relação linear entre os valores estimados para π e L.

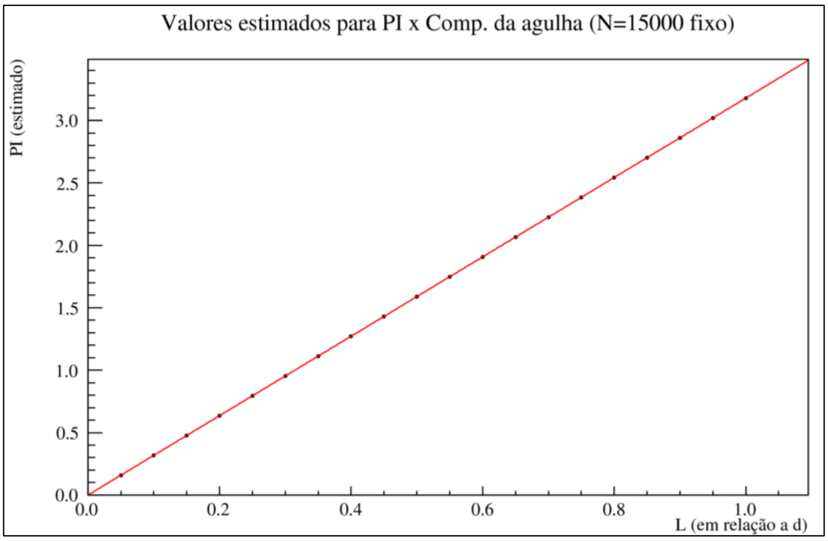

Figura 9: gráfico dos valores estimados para π em função do comprimento do objeto, gerado a partir de dados do Programa 2.

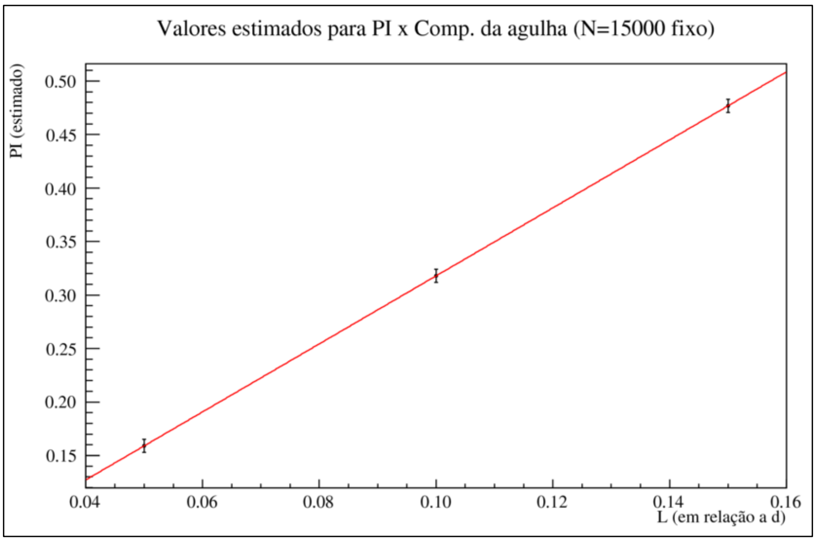

Figura 10: detalhe mostrando os três primeiros pontos do gráfico da Figura 9 para evidenciar a incerteza dos valores estimados para π no eixo vertical.

5 – CONCLUSÕES

A partir dos estudos realizados neste trabalho, verificou-se que o método das Agulhas de Buffon é válido como um método aleatório para estimar valores para a constante matemática π e todas as previsões teóricas foram corretamente verificadas a partir de dados gerados computacionalmente com base no método de Monte Carlo.

No entanto, o método se mostrou pouco eficiente, já que um número muito grande de lançamentos (N) é necessário para obter um valor estimado para π próximo ao seu valor verdadeiro, como indica os dados da Tabela 3 com dados gerados a partir do Programa 1 para diferentes valores de N.

Tabela 3: Valores estimados para π e sua incerteza para diferentes valores de N, obtidos com o Programa 1.

N	$\hat{\pi} + \sigma_{\hat{\pi}}$
15.000	$3,199 \pm 0,019$
30.000	$3,186 \pm 0,013$
100.000	$3,184 + 0,006$
200.000	$3,183 \pm 0,006$
500.000	$3,181 + 0,003$

Apesar da validade do método aleatório, através de análise dos valores estimados para π e suas incertezas correspondentes, concluímos a existência de algum erro no experimento computacional que, apesar dos esforços, não mostrou-se detectável. Acreditamos, no entanto, que este erro esteja associado de alguma maneira à geração randômica das variáveis aleatórias do experimento computacional.

REFERÊNCIAS

1. Fontenelle, B. Mairan, J. Fouchy, J. Condorcet (eds), resumo da comunicação apresentada por Buffon à Académie Royale des Sciences. Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1733, 43-45. Paris, Imprimimerie Royale, 1735.
2. P.S. Laplace. Théorie Analythique des Probabilités, 1812. Oeuvres completes, tome VII. Paris, Gauthier-Villars, 1886.
3. E. Behrends; J. Buescu. Terá Buffon realmente lançado agulhas? – Boletim da SPM 71, 2014, p. 123-132. Versão revista e ampliada de artigo a ser publicado em Newsletter of the European Mathematical Society.
4. L. D. Lins. Agulha de Buffon. Artigo de 2014.
5. V. Y. Kataoka; A. Rodrigues; M. S. Oliveira. Utilização do conceito de Probabilidade Geométrica como recurso didático no Ensino de Estatística. In: Encontro Nacional de Matemática, IX, 2007, Belo Horizonte, Anais, 2007. http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC57002509500T.doc