



**UFAM**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA**

RELATÓRIO DE CÁLCULO NUMÉRICO

MANAUS/AM

2017

## **1. INTRODUÇÃO**

Atualmente métodos numéricos são empregados para a solução de inúmeros problemas físicos, como o que é descrito neste trabalho, onde uma haste é submetida a uma tensão de compressão longitudinal, podendo ser calculada a carga crítica de flambagem de acordo com a geometria da mesma. A aproximação utilizada foi a da energia proposta por Timoshenko e Gere, onde computamos o desenvolvimento do passo-a-passo em um código feito em Scilab. Os detalhes da implementação do problema serão descritos no decorrer deste trabalho.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Quando a haste descrita no problema é encurvada, a energia armazenada é dada por:

$$E_A = \frac{E}{2} \int_0^L I(y''(x))^2 dx,$$

Onde E é o módulo da elasticidade do material, L é o comprimento e I é o momento de inércia da seção em torno de seu eixo neutro a uma distância x da extremidade engastada. O trabalho realizado pela força F é dado por:

$$W = \frac{F}{2} \int_0^L (y'(x))^2 dx.$$

Assim em função das duas expressões apresentadas acima podemos encontrar a carga crítica:

$$F = \frac{E \int_0^L I(y''(x))^2 dx}{\int_0^L (y'(x))^2 dx}.$$

Uma forma computacional de se obter uma aproximação para a integral de um f(x) num intervalo [a,b] é a substituição da função f(x) por um polinômio que a aproxime razoavelmente neste intervalo dado. Assim o problema é resolvido pela integração de polinômios, o que fica mais simples de se resolver. Utilizando esse raciocínio podemos deduzir fórmulas para aproximar a integral de f(x), que são conhecidas como fórmulas de Newton-Cotes, aqui iremos comparar duas dessas fórmulas fechadas, a saber: a regra dos trapézios e a regra de 1/3 de Simpson.

### 3. DESCRIÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA

No nosso algoritmo primeiramente foram declarados os valores especificados para cada parâmetro descrito no problema, os valores de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $L$  e  $E$ . Há um espaço no código para que  $D_2$  seja variado de acordo com o problema, influenciando inversamente nos valores das cargas críticas que serão calculadas, mas sem maiores influências na análise de erros dos métodos.

Foi criada uma função dependente da variável  $x$ , que corresponde a uma distância ao longo da haste, onde é calculado o diâmetro  $D$ , em função de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $L$ :

$$D = D_1 + \frac{x(D_2 - D_1)}{L}.$$

```
1 function Diametro = D(x)
2 ... Diametro = D1 + x*(D2 - D1)/L;
3 endfunction
```

O mesmo foi feito com a fórmula da inércia, onde ela também dependia da distância  $x$ :

$$I = \frac{\pi D^4}{64}.$$

```
function Inercia = I(x)
... Inercia = (%pi*(D(x))^4)/64;
endfunction
```

O problema nos especifica qual a forma da deflexão da haste e suas derivadas que foram úteis para a computação das fórmulas da Energia, Trabalho e Carga crítica que serão comentadas mais tarde:

$$y(x) = \delta(1 - \cos(\pi x/2L)),$$

$$y'(x) = \frac{\delta\pi}{2L} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$y''(x) = \frac{\delta\pi^2}{4L^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right),$$

```

23 //Declarando as funções do problema
1 function deflexao = y(x)
2     deflexao = (1 - cos((%pi*x)/2*L));
3 endfunction
27
1 function der_deflexao = dy(x)
2     der_deflexao = (%pi/2*L)*sin((%pi*x)/2*L);
3 endfunction
31
1 function der2_deflexao = d2y(x)
2     der2_deflexao = ((%pi^2)/(4*L^2))*cos((%pi*x)/2*L);
3 endfunction

```

Um detalhe é que como no cálculo da carga crítica o valor da deflexão “sigma” no extremo livre é cancelada, consideramos ela com valor 1, na declaração das funções.

Tendo as funções que serão integradas, passo-a-passo foram organizadas as funções que auxiliam no cálculo da carga crítica, ou seja as funções que teriam suas integrais numéricas calculadas antes de ser feito o quociente da fórmula da carga crítica:

```

3/
1 function energia_armazenada = Ea(x)
2     energia_armazenada = (I(d2y(x)))^2;
3 endfunction
41
1 function trabalho = W(x)
2     trabalho = (dy(x))^2;
3 endfunction

```

Então fizemos uso dos códigos auxiliares para integrar essas funções acima declaradas pelos dois métodos que foram propostos, o dos trapézios compostos e o 1/3 Simpson, abaixo segue modelos de como foram aplicados:

```

1 function Int = integral_trapezios_ea(a, b, n) //a-é-o-limite-inferior, b-o-superior-e-n-é
  //o-número-de-iterações
2   h = (b - a)/n;
3   xi = a + h;
4   soma = 0;
5   for i=1:n-1
6     soma = soma + Ea(xi);
7     xi = xi + h;
8   end
9   Int = (h/2)*(Ea(a)+Ea(b)) + h*soma;
10 endfunction

```

```

function Int = integral_simpson_w(a, b, n)
  h = (b - a)/n;
  soma1 = 0;
  soma2 = 0;
  xi = a + h;
  for i = 1:n-1
    if (modulo(i,2) ~= 0) then
      soma1 = soma1 + W(xi);
      xi = xi + h;
    else
      soma2 = soma2 + W(xi);
      xi = xi + h;
    end
  end
  Int = (h/3) * (W(a) + 4*soma1 + 2*soma2 + W(b));
endfunction

```

A partir disso pudemos fazer o cálculo das cargas críticas pelos dois métodos e obter gráficos que comparam a precisão dos dois em função da quantidade de áreas aproximadas.

```

75
76 //Cálculo da carga crítica pelo método dos trapézios
1 function f = F_trap(n) //Parâmetro-é-o-número-de-iterações-para-traçar-o-
2   f = (E*integral_trapezios_ea(0, L, n))/integral_trapezios_w(0, L, n)
3 endfunction

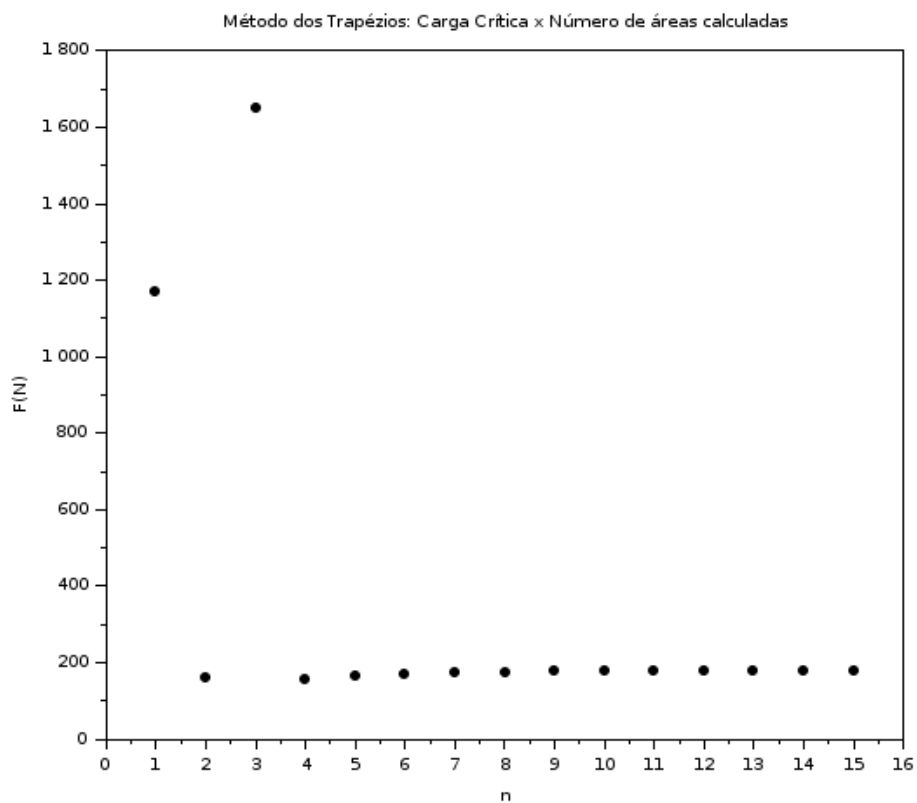
function f = F_simpson(n) //Parâmetro-é-o-número-de-iterações-para-traçar
ros
2   f = (E*integral_simpson_ea(0, L, n))/integral_simpson_w(0, L, n)
3 endfunction

```

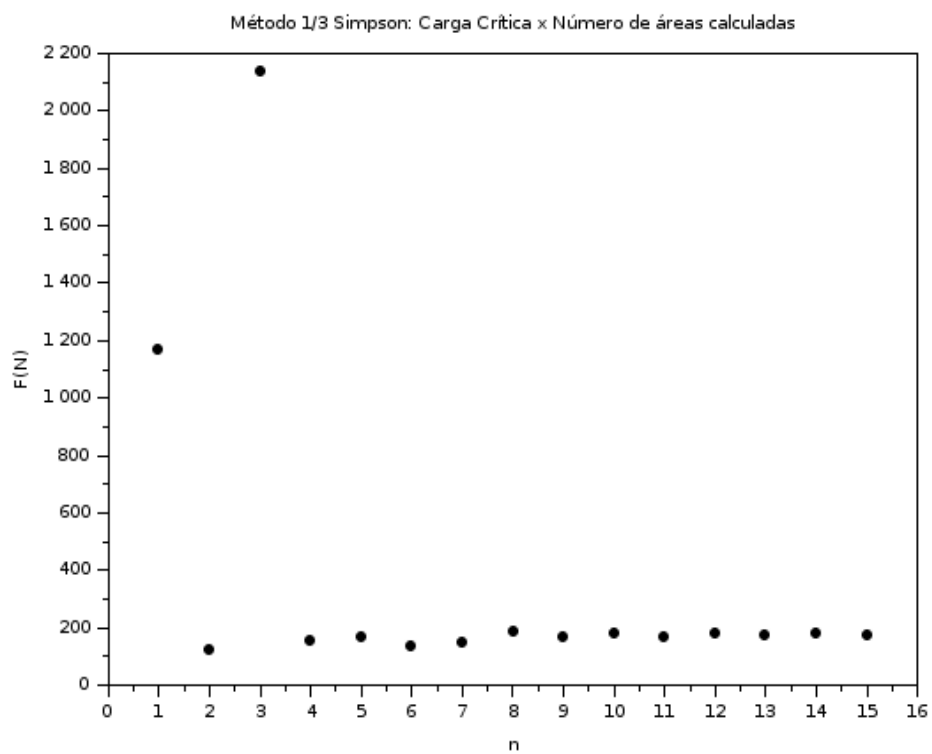
$$F = \frac{E \int_0^L I(y''(x))^2 dx}{\int_0^L (y'(x))^2 dx}.$$

Abaixo segue o gráfico de pontos obtido e uma tabela com a função plot para os dois métodos utilizando N de 1 até 15 e com D2 = 0,15m, código podemos alterar o valor da variável D2 e verificar visualmente, com os gráficos que são plotados automaticamente com o Scilab, o aumento ou decremento dos valores de carga crítica

inversamente a alteração da variável. Neste relatório vamos nos ater a análise de erros do cálculo.



Método dos Trapézios



Método  $\frac{1}{3}$  de Simpson.

N	Carga(Método dos Trapézios)	Carga(Método de Simpson)
1	1168,29 N	1168,29 N
2	158,19 N	121,15 N
3	1651,03 N	2138,65 N
4	153,99 N	152,71 N
5	166,35 N	163,34 N
6	170,93 N	131,26 N
7	173,26 N	149,05 N
8	174,65 N	182,74 N



9	175,56 N	164,49 N
10	176,18 N	179,70 N
11	176,63 N	168,76 N
12	176,97 N	179,07 N
13	177,23 N	171,06 N
14	177,43 N	178,87 N
15	177,60 N	172,50 N

Tabela com valores das cargas críticas

Neste momento percebemos que para uma estabilidade no cálculo da carga crítica em ambos os métodos é necessário no mínimo 5 áreas da integral em ambos os métodos computados.

A partir deste ponto faremos uma análise dos erros apresentados por cada um dos métodos, as fórmulas dos erros estão apresentadas abaixo.

$$E = \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(x), \quad x \in [a, b]$$

Erro no método dos trapézios

$$E = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f(x)^4, \quad x \in [a, b]$$

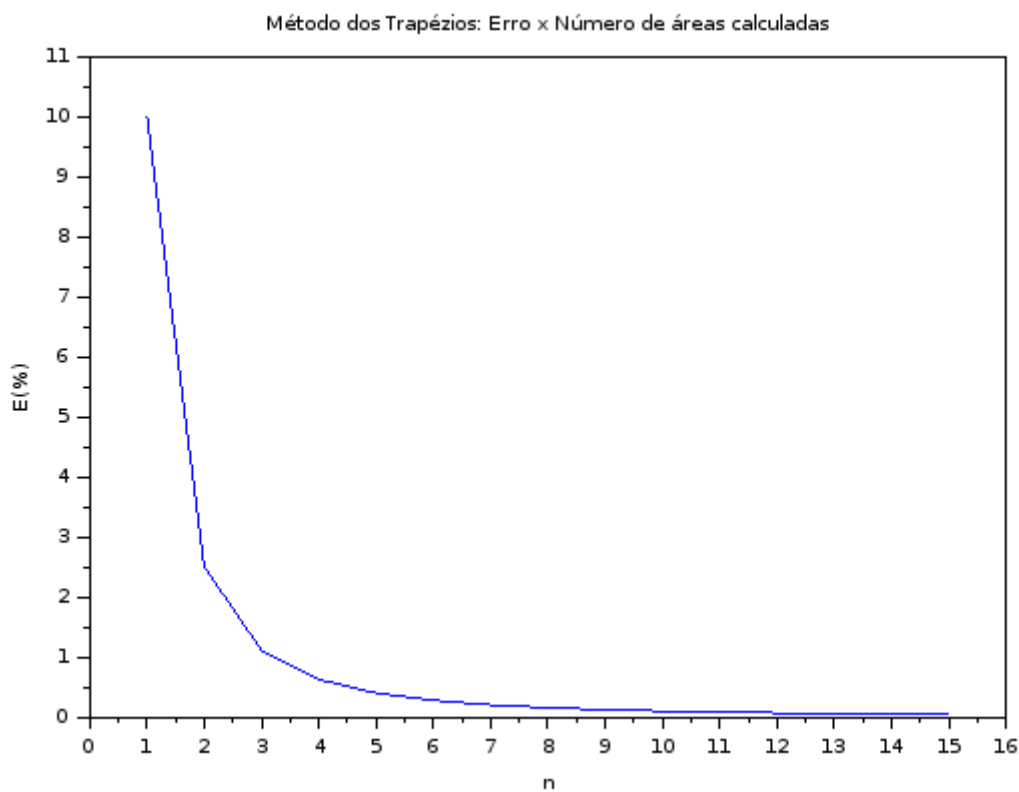
Erro no método 1/3 Simpson

Declaramos no Scilab as funções para efetuar os cálculos dos erros em percentual para facilitar a visualização nos gráficos que foram traçados:

```
function E = erro_trap(a, b, n)
... E = (((b-a)^3)/(12*n^2))*d2y((b-a)/2)*100;
endfunction

function E = erro_simp(a, b, n)
... E = (((b-a)^5)/(2880*n^4))*(y((b-a)/2))^4*100;
endfunction
```

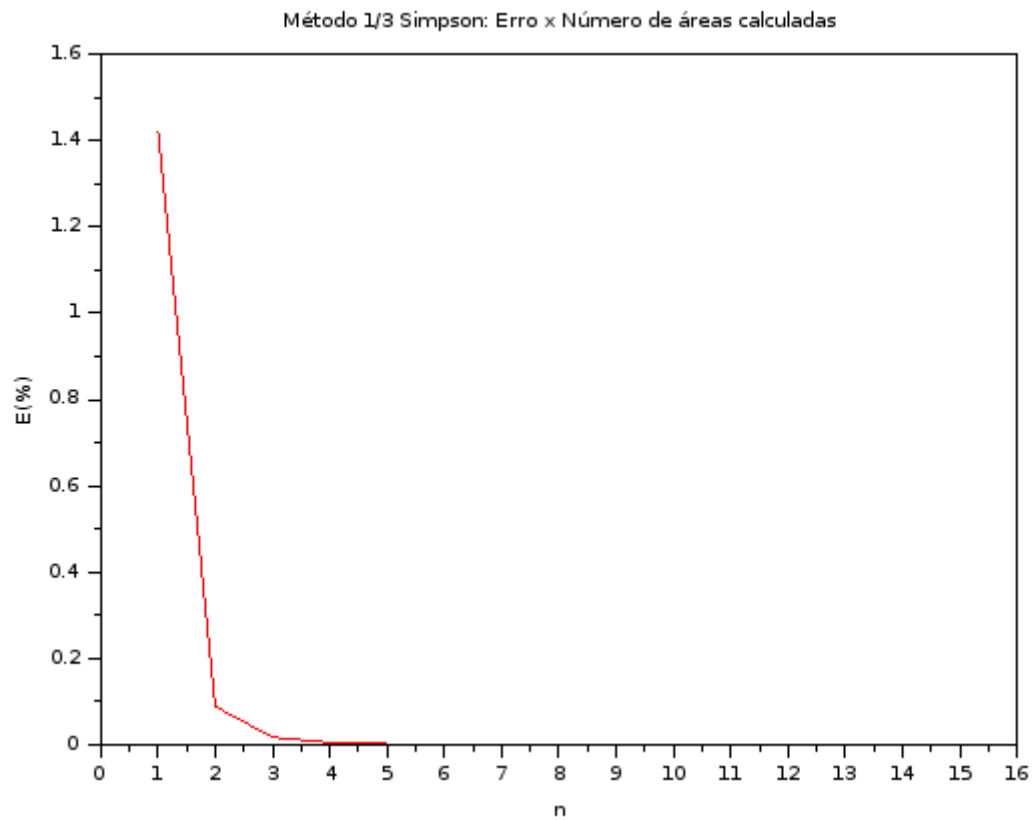
Aqui apresentamos os erros em função das áreas calculadas da função para o método dos trapézios.



Erros % pelo método dos trapézios c/ n de 1:15

column 1 to 9								
10.02846	2.507115	1.1142733	0.6267787	0.4011384	0.2785683	0.2046624	0.1566947	0.1238081
column 10 to 15								
0.1002846	0.0828798	0.0696421	0.0593400	0.0511656	0.0445709			

Aqui fazemos o mesmo para o método 1/3 de Simpson:



Erros % pelo método 1/3 Simpson c/ n de 1:15

column 1 to 9								
1.423299	0.0889562	0.0175716	0.0055598	0.0022773	0.0010982	0.0005928	0.0003475	0.0002169
column 10 to 15								
0.0001423	0.0000972	0.0000686	0.0000498	0.0000370	0.0000281			

#### 4. CONCLUSÕES

Após os testes executados com os algoritmos implementados verificamos que existem vários fatores que podem influenciar na eficiência de um algoritmo, tais como: número de operações por função, número de funções, tempo de execução, qualidade do compilador, especificações da máquina entre outros.

Os métodos numéricos surgem como aproximações para modelos reais estando desta forma suscetíveis a erro, particularmente quando comparamos os métodos de integração dos Trapézios Compostos e 1/3 Simpson, percebemos que o número de iterações e os erros para cada ponto influenciaram diretamente no resultado final da carga crítica. Quando plotamos o gráfico dos erros vimos que o método 1/3 de Simpson possui uma precisão maior, pois em cada subintervalo a ideia é utilizar um polinômio interpolador do segundo grau ao invés de retas como no método dos Trapézios, em ambos os gráficos também percebemos que a à medida em que aumentávamos o número de áreas o erro de cálculo diminuía.

Desse modo, concluímos que para que problemas reais sejam resolvidos na forma mais precisa possível é sempre necessária uma análise quantitativa nos métodos que vão ser empregados em sua resolução.