Uma abordagem evolutiva para o problema do passeio do cavalo

Felipe Duarte dos Reis

[1]Departamento de Computação
Centro Federal de Educação de Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG)

Abstract. *This paper describes the knight's tour problem, which is to find a hamiltonian path in a undirected graph, and propose a solution based on genetic algorithms.*

Resumo. *Este artigo descreve o problema do passeio do cavalo, que consiste em encontrar um caminho hamiltoniano em um grafo não-direcionado, e apresenta uma solução baseada em algoritmos genéticos.*

Introdução

Apresentação do problema

O problema do passeio do cavalo consiste em, dado um tabuleiro de xadrez *NxN*, achar uma sequencia de movimentos para um cavalo que visite todas as posições do tabuleiro somente uma vez (Wikipedia 2016). Um caminho que terminar com $N^2 - 1$ movimentos a um movimento da posição de partida é chamado fechado, caso contrário ele é chamado aberto.
Uma possiblidade de modelagem para este problema é encontrar um caminho hamiltoniano no grafo formado pelos possíveis movimentos de um cavalo no tabuleiro de xadrez, como na Figura 1.

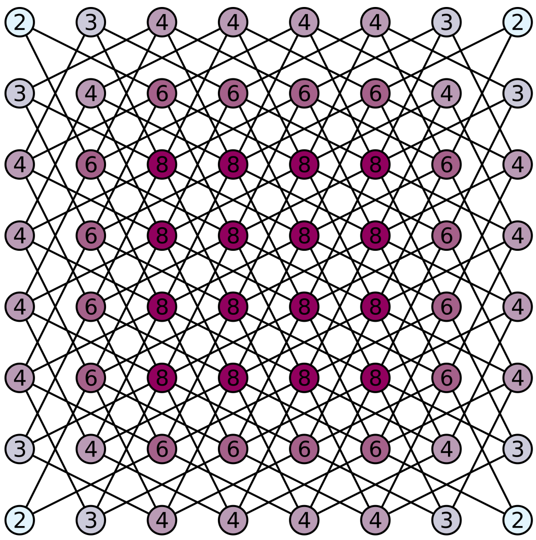

Figura 1. Grafo formado pelas movimentações validas do cavalo em um tabuleiro de xadrez, retirado de Wikipedia 2016

Diferente do modelo geral, o problema do cavalo possui solução polinomial graças a propriedades do grafo gerado. Existem heurísticas que tornam o problema tratável ate

instâncias de no máximo *76x76* (MathWorld 2016). Parberry 1997 apresenta uma solução para o problema por divisão e conquista que constrói um passeio válido para a maioria dos casos em $O(n^2)$.
O presente trabalho traz uma solução para o problema utilizando algoritmos genéticos. A seção Seção 2 apresenta as principais escolhas da implementação. Os resultados de simulações computacionais são apresentados na seção seguinte e por fim a análise critica e conclusão.

Desenvolvimento

Algoritmo Genético

Um algoritmo genético é um método populacional e evolutivo para solução de problemas de otimização restrita e irrestrita. É composto basicamente por uma população, pela função objetivo (ou função de fitness) e o conjunto de operadores. A função objetivo é a variável de otimização do problema. Cada indivíduo, também chamados cromossomos, da população é uma solução (factível ou não) que possúi um valor-objetivo associado, calculado pela função-objetivo. Os indivíduos podem ser dividos em partes menores chamados genes. Um indivíduo possui uma codificação que define o tipo de dado do gene. As codificações mais comuns são binária, inteira ou real.
Os operadores básicos do algoritmo genético são seleção, cruzamento e mutação. O operador de seleção é responsável por, baseado na aptidão dos indivíduos, selecioná-los para serem cruzados. O operador de cruzamento é responsável por, recebendo dois indivíduos pais, gerar indíviduos filhos que sejam, no mínimo factíveis. O A mutação é responsável por alterar genes aleatórios dos cromossomos a fim de proporcionar a variabilidade da população. A implementação dos operadores está fortemente atrelada à modelagem do problema e da codificação dos indivíduos.

Modelo do problema e implementação

O problema do passeio do cavalo pode ser proposto da seguinte maneira: dado um grafo $G = (V, E)$ onde $u, v \in V$ estão no conjunto de vertices e são casas em um tabuleiro NxN, numeradas da esquerda para a direita, de de cima para baixo no intervalo $[1, N^2]$. Alem disso, a aresta $(u, v) \in E$ se é possível movimentar um cavalo da casa u até a casa v de forma válida. Uma sequencia de arestas P de u até v é uma permutação de inteiros sem repetição

$$u, ..., a_i, a_{i+1}, ..., v$$

e é um passeio válido se e somente se $\forall (a_i, a_{i+1}) \in P, (a_i, a_{i+1}) \in E$ e $|P| = N^2 - 1$.
No presente trabalho os indivíduos foram codificados como uma permutação de inteiros como descrita acima. O valor de fitness de cada um deles é calculado contando o número de arestas (a_i, a_{i+1}) que pertencem ao grafo G. A operação de seleção foi implementada utilizando roleta. Para cada indivíduo é o fitness normalizado e acumulado (FNA). Um número é sorteado, e o primeiro indivíduo que tiver FNA maior que o número é escolhido para ser pareado com o próximo indivíduo. São formados $S/2$ pares onde S é o tamanho da população. Cada par tem uma probabilidade Cr de cruzar ou não.
O algoritmo de cruzamento utilizado foi OX. Para cada dois indivíduos pareados ele sorteia dois indices i e j, tal que $0 \leq i \leq j \leq N^2 - 1$ Copia para o primeiro filho a seção

$[i, j]$ do primeiro pai, e para cada valor não copiado do segundo pai de $[0, N^2 - 1]$, ele os copia em ordem. Faz a mesma coisa para o segundo filho, só que copiando a seção $[i, j]$ do segundo pai, e então os valores ainda não copíados do primeiro pai. Esse método cruzamento garante que os filhos são sempre permutações válidas.
Uma nova população é gerada juntamente com os indivíduos da geração anterior. Todos os indivíduos tem uma probabilidade Mt de sofrerem mutação em cada gene. Para cada gene i, um número no intervalo $[0, 1]$ é sorteado, se esse número for menor ou igual a Mt, um índice j é sorteado e os genes i e j são trocados.
Por fim a população é reduzida para um tamanho S novamente, selecionando os S melhores indivíduos depois do cruzamento e mutação.
As operações de seleção, cruzamento e mutação são repetidas até que se encontre uma solução ótima ou o número máximo de iterações é atingido.
Apresentamos a seguir os resultados obtidos em simulações computacionais do algoritmo descrito.

Resultados

Foram executadas trinta simulações para tabuleiros de tamanho 5 ate 64, como dispostos na Tabela 1. Os parametros utilizados foram: $Cr = 0.8$, $Mr = 0.1$, $S = 100$. Foi definido um limite máximo de iterações para cinquenta mil (50000). O que pudemos observar foi que para nenhuma das instâncias do problema o algoritmo conseguiu convergir para um ótimo global. O algorimo ficou preso na grande maioria em mínimos locais, e parou em todas as execuções pelo critério de iteração máxima e não por encontrar o ótimo global.
As execuções para tabuleiros de tamanho 64 duraram cerca de três horas cada,convergência do algoritmo foi o elitismo aplicado na redução o que impossibilitou a execução de simulações para tabuleiros maiores.

Tamanho	Valor mínimo		Valor médio		Valor máximo	
	mean	std	mean	std	mean	std
5	11.43333	0.620623	13.18567	0.659151	21.16667	0.833907
8	18.10000	1.241523	22.12233	1.390353	44.40000	1.566899
16	20.43333	1.165106	24.61667	1.473285	50.46667	2.096521
32	21.53333	1.306043	25.51167	1.371823	52.50000	1.408105
64	21.96667	0.999425	26.01333	1.289708	53.30000	1.417866

Tabela 1. Média e desvio padrão dos valores mínimo, médio e máximo da função objetivo para diferentes tamanhos de tabuleiros

Um dos motivos possíveis para a não convergência do algoritmo foi o elitismo aplicado na redução do tamanho da população, o que faz o algoritmo ficar preso em um minimo local. É possível ver que os valores mínimos e médios também ficam muito distantes do valor máximo encontrado pelo algoritmo.

Conclusão

Neste trabalho problema do passeio do cavalo foi apresentado juntamente com uma breve revisão bibliográfica das soluções já propostas para o problema. Foi exibido um modelo matemático do problema em termos de um problema de otimização combinatória e proposto um algorimo genético canônico para resolver o problema. Os resultados das simulações computacionais comprovam que um um genético canônico não é suficiente para se aproximar do máximo global, ainda que para instâncias pequenas com um limite de iterações razoável.

Referências

aaaa aaaa.

MathWorld 2016 MathWorld, W. (2016). Knight graph.

Parberry 1997 Parberry, I. (1997). An efficient algorithm for the knight's tour problem. In *Discrete Applied Mathematics*. Elsvier.

Wikipedia 2016 Wikipedia (2016). Knight's tour.