A Transformada de Fourier

Disciplina: Tópicos em Computação
(Processamento Digital de Imagens)

A Função Impulso

- Fundamental no estudo dos sistemas lineares e da transformada de Fourier;
- Um *impulso unitário* de uma variável contínua t localizada em $t = 0$, é definido como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

e restrito para satisfazer a identidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

A Função Impulso

- Um impulso pode ser visto como um pico de amplitude infinita e duração zero, tendo área unitária;
- Pela *propriedade de peneiramento*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

considerando que $f(t)$ é contínua em $t = 0$, o peneiramento nos informa o valor da função $f(t)$ na posição do impulso.

A Função Impulso Discreta

- Seja x uma variável discreta, o *impulso unitário discreto*, $\delta(x)$, atende a todos os propósitos ao trabalhar com sistemas discretos:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

e restrito também para satisfazer

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1.$$

Além disso:

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) = f(0)$$

A Transformada de Fourier

- A contribuição de Fourier:
  - qualquer função periódica pode ser expressa como a soma de senos e/ou cossenos de diferentes frequências, cada uma multiplicada por um coeficiente diferente.

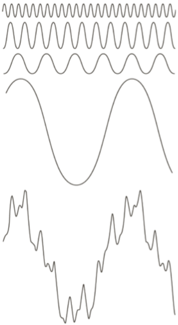


FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

A Transformada de Fourier

Dada uma função contínua $f(t)$, a transformada de Fourier de $f(x)$ é dada por:

$$\Im\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t}dt.$$

Podemos obter novamente $f(t)$ utilizando a *transformada inversa de Fourier*, $f(t) = \Im^{-1}\{F(\mu)\}$ é dada por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t}d\mu.$$

A Transforma de Fourier: exemplo

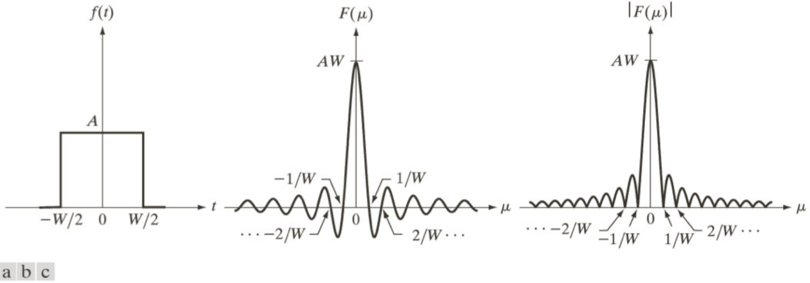


FIGURE 4.4 (a) A simple function; (b) its Fourier transform; and (c) the spectrum. All functions extend to infinity in both directions.

Convolução

A convolução de duas funções de variável contínua é definida como:

$$f(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- O sinal de "-" representa a rotação de 180^o;
- t é o deslocamento necessário para reposicionar uma função passando pela outra;
- τ é uma variável local eliminada pela integração.
- Importante propriedade:

$$\Im\{f(t) \star h(t)\} = H(\mu)F(\mu)$$

  - O mesmo resultado seria obtido se a ordem de $f(t)$ e $h(t)$ fosse invertida: a convolução é comutativa.

Teorema da Convolução

A transforma de Fourier da convolução de duas funções de variável contínua é igual à multiplicação de suas transformadas:

$$f(t) \star h(t) \Leftrightarrow H(\mu)F(\mu)$$

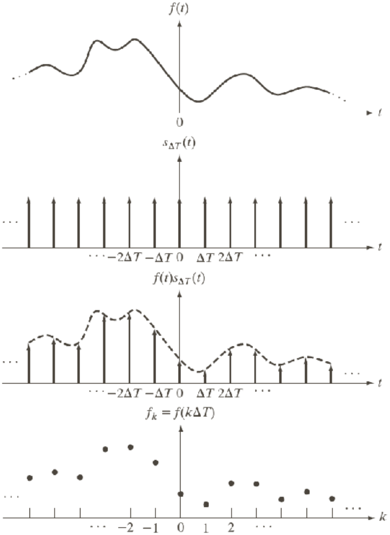
A transforma de Fourier da multiplicação de duas funções de variável contínua é igual à convolução de suas transformadas:

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$$

Amostragem

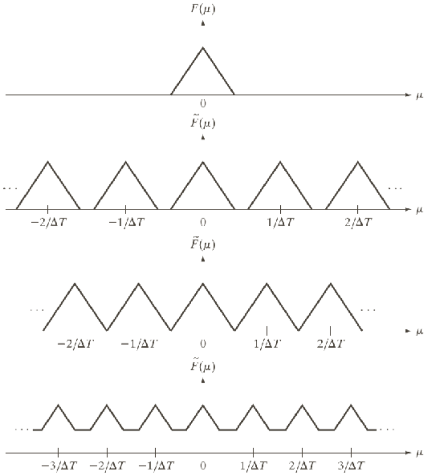
- Funções contínuas devem ser convertidas em uma sequência de valores discretos antes de poderem ser processadas em um computador;
- Esta tarefa é realizada utilizando a amostragem e a quantização;
- Suponha uma função $f(t)$ que desejamos obter amostras em intervalos uniformes de Δt da variável independente t;
  - A função se estende de $-\infty$ a ∞ em relação a t

Amostragem: exemplo



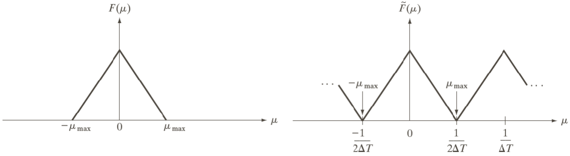
Transformada de Fourier de Funções Amostradas

- Sobreamostragem
- Amostragem crítica
- Subamostragem



O Teorema da Amostragem

- Como definir se uma função contínua pode ser *unicamente recuperada* a partir do conjunto de suas amostras??
- Função de Banda Limitada: igual a zero fora de uma faixa;



  - Valores baixos do período de amostragem faz com que os períodos em $\tilde{F}(\mu)$ (Transf. Fourier da função amostrada) se mesclem;
  - Valores altos proporcionam uma separação mais clara entre os períodos;

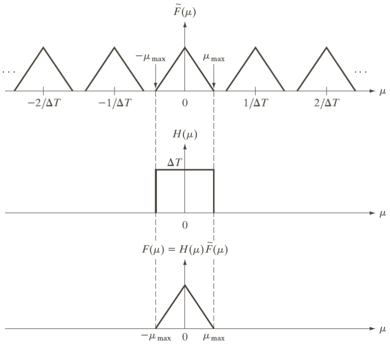
- A função $f(t)$ pode ser recuperada se pudermos isolar uma cópia de $F(\mu)$ a partir da sequência periódica em $\tilde{F}(\mu)$.

O Teorema da Amostragem

"Uma função de banda limitada, contínua, pode ser totalmente recuperada a partir de um conjunto de suas amostras se estas forem adquiridas em uma taxa maior que o dobro da frequência mais alta contida na função."

- Uma taxa de amostragem equivalente a **exatamente** o dobro da frequência mais alta é chamada de *taxa de Nyquist*.

O Teorema da Amostragem

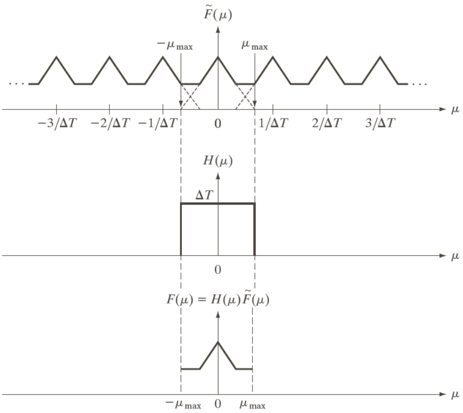


- A função $H(\mu)$ é chamada de *filtro passa-baixa*
  - passa frequências na extremidade inferior do intervalo de frequência, mas elimina todas as mais altas

Aliasing

- O que acontece se uma função de banda limitada for amostrada em uma taxa menor que o dobro de sua frequência mais alta??
  - Subamostragem
- A transformada inversa geraria uma função corrompida de t;
- Tal efeito é chamado de *aliasing*.

Aliasing



$\tilde{F}(\mu)$
$-\mu_{max}$
μ_{max}
μ
$-3/\Delta T$ $-2/\Delta T$ $-1/\Delta T$ 0 $1/\Delta T$ $2/\Delta T$ $3/\Delta T$
$H(\mu)$
ΔT
μ
0
$F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu)$
μ
$-\mu_{max}$ 0 μ_{max}

Aliasing

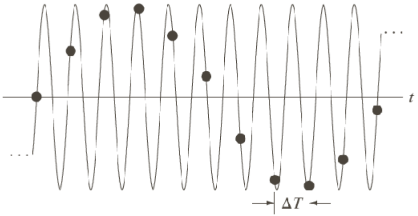


FIGURE 4.10 Illustration of aliasing. The under-sampled function (black dots) looks like a sine wave having a frequency much lower than the frequency of the continuous signal. The period of the sine wave is 2 s, so the zero crossings of the horizontal axis occur every second. ΔT is the separation between samples.

O Impulso 2D

- O impulso, $\delta(t, z)$ de duas variáveis contínuas, t e z, é definido como

$$\delta(t, z) = \begin{cases} \infty & \text{se } t = z = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

- Propriedade do peneiramento (como no caso 1D)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty} f(t, z)\delta(t, z)dtdz = f(0, 0).$$

O Impulso Discreto 2D

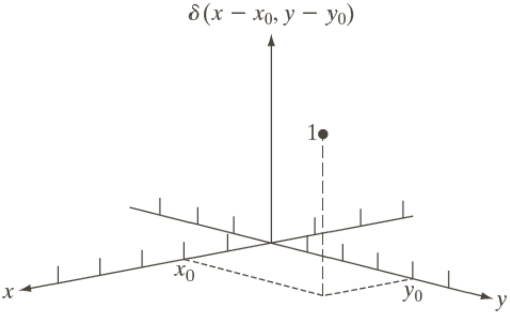
- O impulso, $\delta(x, y)$ de duas variáveis discretas, x e y, é definido como

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

- Propriedade do peneiramento (como no caso 1D)

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty} f(x, y)\delta(x, y)dxdy = f(0, 0).$$

O Impulso Discreto 2D: exemplo



O Par Contínuo de Transformadas de Fourier 2D

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz$$

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu$$

Transformada de Fourier 2D: exemplo

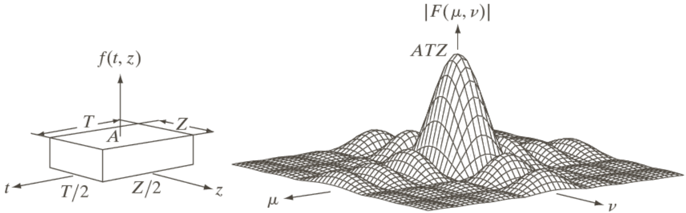
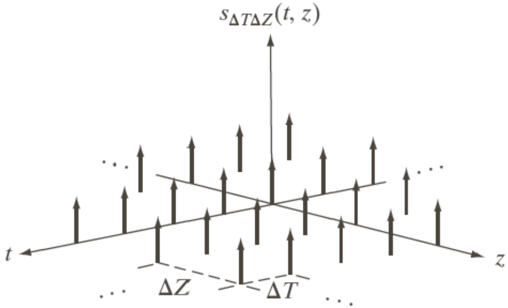
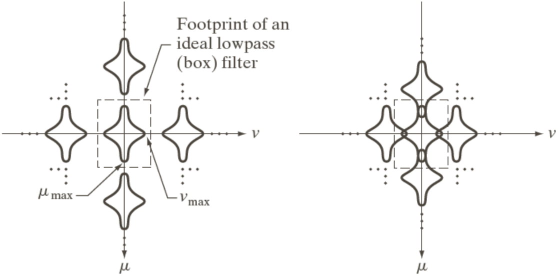


FIGURE 4.13 (a) A 2-D function, and (b) a section of its spectrum (not to scale). The block is longer along the t-axis, so the spectrum is more "contracted" along the μ-axis. Compare with Fig. 4.4.

O Trem de Impulsos Discretos 2D



Sobreamostragem e Subamostragem em 2D

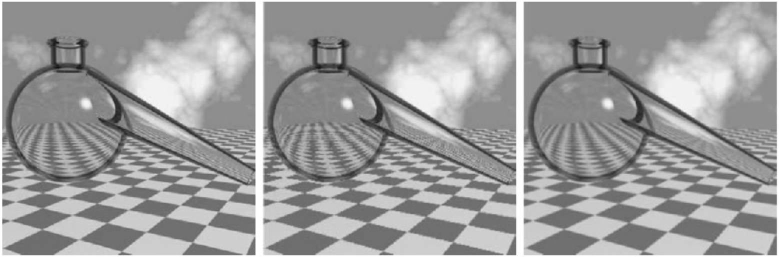


Aliasing em Imagens Reamostradas

a b c

FIGURE 4.17 Illustration of aliasing on resampled images. (a) A digital image with negligible visual aliasing. (b) Result of resizing the image to 50% of its original size by pixel deletion. Aliasing is clearly visible. (c) Result of blurring the image in (a) with a 3×3 averaging filter prior to resizing. The image is slightly more blurred than (b), but aliasing is not longer objectionable. (Original image courtesy of the Signal Compression Laboratory, University of California, Santa Barbara.)

Aliasing em Imagens Reamostradas



a b c

FIGURE 4.18 Illustration of jaggies. (a) A 1024 × 1024 digital image of a computer-generated scene with negligible visible aliasing. (b) Result of reducing (a) to 25% of its original size using bilinear interpolation. (c) Result of blurring the image in (a) with a 5 × 5 averaging filter prior to resizing it to 25% using bilinear interpolation. (Original image courtesy of D. P. Mitchell, Mental Landscape, LLC.)

O Par Discreto de Transf. de Fourier 2D

$$F(\mu,\nu) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\mu x/M+\nu y/N)}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{\mu=0}^{M-1}\sum_{\nu=0}^{N-1} F(\mu,\nu)e^{j2\pi(\mu x/M+\nu y/N)}$$

Propriedades da Transf. Discreta de Fourier 2D

- **Separabilidade**: 2DFT = 1DFT(linhas) + 1DFT(colunas);
- **Translação e Rotação**: transladar e rotacionar a função significa transladar e rotacionar a transformada (e vice-versa);
- **Periodicidade**: a transformada e sua inversa são ifinitamente periódicas;
- **Simetria**: em relação a um dos eixos;
- **Teorema da Convolução 2D**

$$f(x,y) \star h(x,y) \Leftrightarrow F(\mu,\nu)H(\mu,\nu)$$
$$f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(\mu,\nu) \star H(\mu,\nu)$$

Convolução de Sinais: exemplo