

# Modelos Heterocedasticos: ARCH

## Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile  
Facultad de Ciencia  
Depto. de Matemática y Computación



26 de septiembre de 2025

# Contenidos

- 1 Motivación**  
Motivación
- 2 Modelo ARCH**  
Formulación  
Representación de Volterra
- 3 Identificación**  
Identificación
- 4 Aplicación**  
R  
Ejemplo IPSA

# Motivación

## Motivación

- En este curso daremos privilegio a las series financieras, las cuales son modeladas mediante procesos ARCH (1982) debido a Engle, y GARCH (1986) debido a Bollerslev. También encontraremos los modelos SV (Volatilidad estocástica), debido a Harvey. A partir de estos se generan otros modelos tales como el GARCH-M, I-GARCH, etc. El ajuste de modelos a serie de tiempo se aplica diariamente.

# Motivación

## Motivación

- Los procesos ARIMA estudiados en el curso anterior, son modelos sencillos de implementar, pero tienen la limitación de que, aunque asumen que la esperanza condicionada varía en el tiempo, tanto la varianza marginal como la condicionada son constantes. Por ejemplo, consideremos el proceso AR.

$$x_t = \phi x_{t-1} + \epsilon_t \quad \epsilon_t \sim RB(0, \sigma^2), \quad |\phi| < 1$$

- Note que la media no condicionada de  $x_t$  es cero,  $\mathbb{E}(x_t) = 0$ , mientras que la media condicionada es  $\phi x_{t-1}$ . Además, la varianza marginal es  $\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$ , mientras que la varianza condicionada es  $\sigma^2$ .

# Motivación

## Motivación

- En el estudio de series temporales financieras, se han observado ciertas características comunes en las cuales el segundo momento condicionado varía en el tiempo y que, por tanto, no pueden ser explicadas por los modelos ARIMA. En los mercados financieros grandes cambios tienden a ser seguidos por grandes cambios, y pequeños cambios tienden ser seguidos por pequeños cambios. En otras palabras, los mercados financieros a veces son más volátil, y otras veces menos activos. Los modelos de Heterocedasticidad Condicionada tratan de modelizar la volatilidad de una serie temporal.

# Formulación

- Robert F. Engle (1982) Econometrista estadounidense. Profesor del Departamento de Economía de la Universidad de California, San Diego. Desarrolló junto a Granger el concepto de cointegración e inventó los procesos ARCH. Es uno de los creadores del área de estudio de la economía financiera, su trabajo influye en muchas áreas del análisis de series temporales y la econometría. En 2003 recibió el Premio Nobel de Economía.

# Formulación

- Los modelos ARCH, o modelos autorregresivos con heterocedasticidad condicional fueron introducidos con el objetivo de estimar la varianza de la inflación. La idea básica es que el retorno no está correlacionado serialmente, pero la volatilidad depende de los retornos pasados por medio de una función cuadrática.
- Definición:** Un modelo ARCH(p) se define como:

$$\begin{aligned}r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p r_{t-p}^2\end{aligned}$$

- donde  $\epsilon_t \text{ iid } N(0, 1)$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i > 0$ :
- Además, se requiere que  $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$  para que el proceso  $y_t$  sea estacionario.

# Formulación

## Propiedades

- Para estudiar algunas de las propiedades de este modelo consideraremos el caso especial  $ARCH(1)$ :

$$\begin{aligned}r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2\end{aligned}$$

- El cual cumple con las siguientes propiedades
  - $\mathbb{E}(r_t) = 0 \quad \forall t$
  - $\mathbb{V}(r_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \quad \text{con } 0 \leq \alpha_1 < 1$



# Formulación

## Propiedades

- $\text{Cov}(r_t, r_{t+k}) = \gamma_r(k) = 0, \quad k > 1$
- La curtosis de  $r_t$  es  $K = \frac{\mu_4}{[\mathbb{V}(r_t)]^2} > 3$ , donde  $\mu_4 = \mathbb{E}(r_t)^4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)}$
- La función de autocorrelación de los cuadrados está dada por  $\gamma_{r^2}(k) = \alpha_1^k, \quad k > 0$

# Formulación

## Propiedades

- **Observacion 1:** Se puede demostrar que para un modelo ARCH(p) la varianza es, (Tarea)

$$\mathbb{V}[r_t] = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i}$$

- **Observacion 2:** Se puede demostrar que para un modelo ARCH(p) (Tarea)

$$r_t^2 = \eta_t + \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j r_{t-j}^2$$

# Representación de Volterra

- La forma general de un proceso estacionario no lineal en la media se obtiene mediante la llamada representación de Volterra. La cual es una generalización de la representación  $MA(\infty)$  de Wold para procesos lineales estables para procesos lineales y se escribe:

$$x_t = \mu + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \eta_i \epsilon_{t-i} + \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \eta_{ij} \epsilon_{t-i} \epsilon_{t-j} + \sum_{i,j,k=-\infty}^{\infty} \eta_{ijk} \epsilon_{t-i} \epsilon_{t-j} \epsilon_{t-k} + \dots$$

# Representación de Volterra

## Representación causal de un proceso ARCH(1)

- **Ejemplo:** Muestre que el proceso ARCH(1) sigue la siguiente representación

$$r_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=0}^n \alpha_1^j \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 \dots \epsilon_{t-j}^2 + \alpha_1^{n+1} \epsilon_t^2 \dots \epsilon_{t-n}^2 r_{t-n-1}^2$$

- Esta representación es conocida como la expansión de Volterra para el proceso  $\{r_t^2\}$

# Identificación

- La idea es verificar si la serie tiene características estilizadas, para ello se recomienda:
  - 1 **Graficar la serie:** Para ello la serie debe ser estacionaria. Es recomendable tomar logaritmo en series financieras, es usual tomar esta transformación.
  - 2 **Graficar el cuadrado de la serie original:** Desde el punto de vista financiero, los cuadrados de la serie indica la volatilidad de la serie (esperamos ver en  $r_t^2$  períodos de baja y alta volatilidad).
  - 3 **Autocorrelación Serial:** Graficar las ACF de la serie original y la de sus cuadrados. Deberá verificarse que ninguna correlación es significativa para la serie original, pero si están correlacionados sus cuadrados.

# Identificación

- 1 **Autocorrelación Parcial:** A modo de ejemplo si el modelo que se tiene fuese un ARCH(1) se esperaría que la PACF de los cuadrados de la serie presente un pick fuera de la banda de confianza con valor no superior a  $0,57 \approx 1/3$ . Generalizando a un modelo ARCH(p), se esperarían p valores fuera de la banda de confianza.
- 2 **Histograma:** Para la serie de los retornos, recordar que esta tiene colas pesadas y si  $\alpha_1 \approx 0$  las colas son más livianas que en el caso cuando  $\alpha_1 \approx 0,57$ , respecto a una normal estándar.
- 3 **Gráfica de normalidad:** Se esperaría en el gráfico de cuantil-cuantil un alejamiento de las observaciones de la bisectriz, ello indicaría que las colas son distintas a una normal.

# Identificación

- 1 **Test de blancura:** Debemos tener presente que los residuos de nuestro modelo deben cumplir con ser R.B., esto es posible de observar mediante la FAC, donde se testea  $H_0 : \rho(k) = 0 \forall k \leq 1$  bajo la hipótesis nula es  $y_t$  es R.B. de segundo orden. Se aconseja utilizar el test de Box-Ljung (1978)  $Q_y = T(T+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{\rho}^2(j)}{n-j}$ , donde  $Q_y \sim \chi^2_{h-p-q}$ . La extensión de este test es dada por McLeod-Li(1983) para los cuadrados de la serie..

# Estimacion de los parametros ARCH(1)

- La estimacion de  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  esta dada por la estimacion maximo verosimil. La distribucion condicional de los retornos  $r_1, r_2, \dots, r_T$  es,

$$L(\alpha_0, \alpha_1 | r_1) = \prod_{t=2}^T f_{\alpha_0, \alpha_1}(r_t | r_{t-1}),$$

- donde  $f_{\alpha_0, \alpha_1}$  es la funcion de densidad normal condicional. Escribios la funcion de log verosimilitud  $l(\alpha_0, \alpha_1 | r_1)$  y tomando las derivadas parciales respecto a  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial l(\alpha_0, \alpha_1)}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial l(\alpha_0, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} \end{pmatrix} = \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} 1 \\ r_{t-1}^2 \end{pmatrix} \frac{\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 - r_t^2}{2(\alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2)}$$



## Estimacion de los parametros ARCH(1)

- Igualando la ecuación anterior a cero y evaluando en los estimadores de máxima verosimilitud obtenemos:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_0 + \left( \sum_{t=2}^T r_{t-1}^2 \right) \hat{\alpha}_1 &= \sum_{t=2}^T r_t^2 \\ \left( \sum_{t=2}^T r_{t-1}^2 \right) \hat{\alpha}_0 + \left( \sum_{t=2}^T r_{t-1}^4 \right) \hat{\alpha}_1 &= 0\end{aligned}$$

- obtenemos los estimadores para  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  a extensión del resultado de obtiene al considerar que la volatilidad  $\sigma_t^2$  depende de un mayor numero de observaciones pasadas  $r_{t-1}^2, r_{t-2}^2, \dots, r_{t-p}^2$ , para  $p < t$ . La variabilidad del modelo de la ecuacion puede ser estimada como,

$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 r_{t-1}^2 + \dots + \hat{\alpha}_p r_{t-p}^2$$

- Similarmente, en el modelo  $ARCH(1)$  necesitaremos resolver un sistema de  $p \times p$  ecuaciones.

# Predicción en modelos ARCH(p)

- Las predicciones de la volatilidad  $\sigma_t^2$ , en un modelo ARCH(p) se pueden obtener de manera recursiva dados los datos hasta hoy  $\{r_t, r_{t-1}, \dots\}$

$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^P \hat{\alpha}_j r_{t-j}^2$$

$$\hat{\sigma}_{n+h}^2 = \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^P \hat{\alpha}_j r_{n+h-j}^2$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{n+h}^2 &= \mathbb{E} \left( \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^P \hat{\alpha}_j r_{n+h-j}^2 \middle| F_n \right) \\ &= \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^P \hat{\alpha}_j \mathbb{E} \left( r_{n+h-j}^2 \middle| F_n \right)\end{aligned}$$

# Predicción en modelos ARCH(p)

- Por lo tanto,

$$\hat{\sigma}_{n+1}^2 = \sigma_{n+1}^2$$

$$\hat{\sigma}_{n+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1[\alpha_0 + \alpha_1 r_n^2] \sum_{j=2}^p \alpha_j r_{n+2-j}^2$$

- Y así sucesivamente,

# Estimacion de los parametros ARCH(1)

## Debilidades de los Modelos ARCH

- El modelo asume que los shocks positivos y los negativos tienen el mismo efecto sobre la volatilidad ya que esta depende del cuadrado de los shocks pasados.
- Los modelos ARCH son bastante restrictivos y debe imponer condiciones sobre los parametros, por lo cual el proceso de estimacion es mas costoso.
- Generalmente, los modelos ARCH requieren un numero elevado de retardos para describir el proceso de volatilidad.
- Los modelos ARCH consiguen describir el comportamiento de la varianza condicionada, pero no explican las causas de dicho comportamiento.

# Aplicacion en R

- Para poder implementar el modelo ARCH en R se debe utilizar el paquete fGarch de R.
- Dentro del paquete estan las funciones garchSpec y garchSim las cuales nos permiten simular una serie de retornos a partir de los parametros,
  - **alpha** = vector de coeficientes.
  - **omega** = el coeficiente constante de la ecuacion de la varianza (ie,  $\alpha_0$ ).
- Bajo el modelo definido anteriormente,

$$\begin{aligned}r_t &= \sigma_t \epsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p r_{t-p}^2\end{aligned}$$

- $\text{omega} = \alpha_0$  y  $\text{alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$

# Aplicación en R

- Como ejemplo simulemos un proceso ARCH(1) de tamaño 2000 con  $\alpha_1 = 0,7$  y  $\alpha_0 = 0,3$ .

```
library(fGarch)
```

```
set.seed(2000)
```

```
spec = garchSpec(model = list(omega= 0.3,alpha = c(0.7), beta = 0))
```

```
x=garchSim(spec, n = 2000)
```

# Aplicacion en R

- Como ejemplo simulamos un proceso ARCH(1) de tamaño 2000 con  $\alpha_1 = 0,7$  y  $\alpha_0 = 0,3$ .

```
library(fGarch)
```

```
set.seed(2000)
```

```
spec = garchSpec(model = list(omega= 0.3,alpha = c(0.7), beta = 0))
```

```
x=garchSim(spec, n = 2000)
```

```
GMT
```

```
garch
```

```
2010-01-28 0.51989802
```

```
2010-01-29 -0.26160693
```

```
2010-01-30 -0.08262140
```

```
2010-01-31 0.20900386
```

```
2010-02-01 0.93882301
```

```
2010-02-02 0.07066962
```

# Aplicacion en R

- Para ver la serie simulada hacemos.

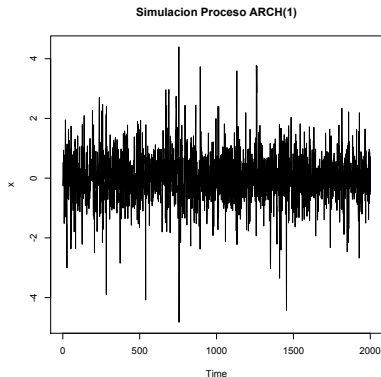
```
ts.plot(x,main='Simulacion Proceso ARCH(1)')
```



# Aplicacion en R

- Para ver la serie simulada hacemos.

```
ts.plot(x,main='Simulacion Proceso ARCH(1)')
```



# Aplicacion en R

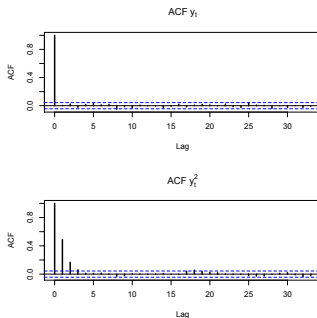
- Graficamos los ACF de la serie de retornos y retornos al cuadrado.

```
par(mfrow=c(2,1))  
acf(x, lwd=3, main = "")  
title(expression(paste("ACF ", y[t])))  
acf(x^2, main="", lwd=3)  
title(expression(paste("ACF ", y[t]^2)))
```

# Aplicacion en R

- Graficamos los ACF de la serie de retornos y retornos al cuadrado.

```
par(mfrow=c(2,1))
acf(x, lwd=3, main = "")
title(expression(paste("ACF ", y[t])))
acf(x^2, main="", lwd=3)
title(expression(paste("ACF ", y[t]^2)))
```

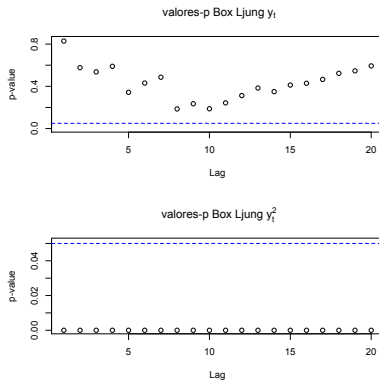


## Aplicacion en R

- Podemos ver la autocorrelacion muestral a partir del test de Box-Ljung a partir de la siguiente funcion,

```
Box.Test = function(x, lag = 1, main = "p values for Ljung-Box statistic")
{
  B<-vector("numeric")
  for(i in 1:lag){
    B[i]<-Box.test(x, lag = i, type = "Ljung-Box")$p.value
  }
  A<-matrix(cbind(c(1:lag),B), nrow = lag, ncol = 2, byrow=F,
    dimnames = list(NULL, c("lag", "p.value")))
  plot(A[,1], A[,2], ylim = c(0, max(0.051,(max(A[,2])+.01))),
    ylab = "p-value", xlab = "Lag", main = main)
  abline(0.05, 0, col = 4, lty = 2)
  return(A)
}
par(mfrow=c(1,2))
Box.Test(x,20, main= expression(paste(" valores-p Box Ljung ", y[t])))
Box.Test(x^2,20, main= expression(paste(" valores-p Box Ljung ", y[t]^2)))
```

# Aplicación en R



# Aplicacion en R

- Ajustamos un modelo ARCH a nuestros datos a partir de la funcion garchFit

```
library(fGarch)
```

```
fit1 = garchFit(formula = ~ garch(1, 0), data = x, include.mean = FALSE, trace=F)  
summary(fit1)
```

- Los parametros estimados y su significancia son los siguientes,

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
omega	0.31557	0.01628	19.39	<2e-16 ***
alpha1	0.60275	0.04754	12.68	<2e-16 ***

- La funcion muestra los indices de bondad de ajuste como,

```
Information Criterion Statistics:  
      AIC      BIC      SIC      HQIC  
2.284151 2.289752 2.284149 2.286207
```

# Aplicacion en R

- Ademas, muestra algunos indicadores respecto a la presencia de correlacion en los residuos

lStandardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi <sup>2</sup>	0.5616111	0.7551752
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9992355	0.598382
Ljung-Box Test	R	Q(10)	21.47118	0.01803733
Ljung-Box Test	R	Q(15)	25.19204	0.04742305
Ljung-Box Test	R	Q(20)	27.61337	0.1188723
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(10)	9.848418	0.4538914
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(15)	12.45304	0.6444645
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(20)	15.24347	0.7623105
LM Arch Test	R	TR <sup>2</sup>	10.31521	0.5883289

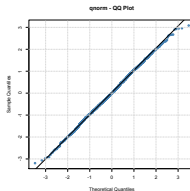
# Aplicacion en R

- Podemos mostrar graficamente la calidad de nuestro modelo utilizando el comando `plot(fit)` a partir del cual se entrega el siguiente menu de opciones

Make a plot selection (or 0 to exit):

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| 1: Time Series                        | 2: Conditional SD                         |
| 4: ACF of Observations                | 5: ACF of Squared Observations            |
| 7: Residuals                          | 8: Conditional SDs                        |
| 10: ACF of Standardized Residuals     | 11: ACF of Squared Standardized Residuals |
| 13: QQ-Plot of Standardized Residuals |   |

- Por ejemplo, si seleccionamos la opcion 13, verificamos que los residuos de este modelo son normales,





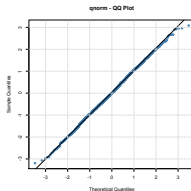
# Aplicacion en R

- Podemos mostrar graficamente la calidad de nuestro modelo utilizando el comando `plot(fit)` a partir del cual se entrega el siguiente menu de opciones

Make a plot selection (or 0 to exit):

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| 1: Time Series                        | 2: Conditional SD                         |
| 4: ACF of Observations                | 5: ACF of Squared Observations            |
| 7: Residuals                          | 8: Conditional SDs                        |
| 10: ACF of Standardized Residuals     | 11: ACF of Squared Standardized Residuals |
| 13: QQ-Plot of Standardized Residuals |   |

- Por ejemplo, si seleccionamos la opcion 13, verificamos que los residuos de este modelo son normales,



## Aplicacion en R

- Posteriormente, ajustamos un segundo modelo ARCH definiendo que la distribucion condicional ya no sea normal si no T-Student.

```
library(fGarch)
```

```
fit2 = garchFit(formula = ~ garch(1, 0), data = x, cond.dist="std",  
include.mean = FALSE, trace=F)  
summary(fit2)
```

- Los parametros estimados y su significancia son los siguientes,

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
omega	0.33392	0.01994	16.750	< 2e-16 ***
alpha1	0.63494	0.05716	11.109	< 2e-16 ***
shape	10.00000	1.35768	7.366	1.77e-13 ***

- La funcion muestra los indices de bondad de ajuste como,

```
Information Criterion Statistics:  
      AIC      BIC      SIC      HQIC  
2.298499 2.306901 2.298495 2.301584
```

# Aplicacion en R

- Los estadísticos para este modelo son los siguientes,

Standardised Residuals Tests:

			Statistic	p-Value
Jarque-Bera Test	R	Chi <sup>2</sup>	0.5617404	0.7551263
Shapiro-Wilk Test	R	W	0.9992345	0.5970684
Ljung-Box Test	R	Q(10)	21.4637	0.01808239
Ljung-Box Test	R	Q(15)	25.17481	0.04764448
Ljung-Box Test	R	Q(20)	27.59764	0.1192714
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(10)	9.913048	0.4481548
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(15)	12.52246	0.6391301
Ljung-Box Test	R <sup>2</sup>	Q(20)	15.30643	0.7586135
LM Arch Test	R	TR <sup>2</sup>	10.38861	0.5819081

# Aplicacion en R

- Para obtener la volatilidad estimada por el modelo se utiliza el comando

```
vol.est = fit1@h.t
```

```
vol.est[1000]
```

```
ts.plot(vol.est,main='Volatilidad Estimada')
```

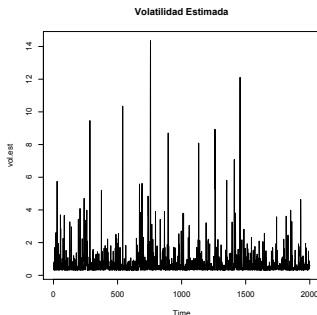
# Aplicacion en R

- Para obtener la volatilidad estimada por el modelo se utiliza el comando

```
vol.est = fit1@h.t
```

```
vol.est[1000]
```

```
ts.plot(vol.est,main='Volatilidad Estimada')
```



# Aplicacion en R

- Para realizar predicciones a  $h$  pasos para nuestro modelo utilizamos el comando `predict`,

```
pred = predict(fit1,12)
sigma.hat = fit1@h.t
pred.sigma = pred[,3]
pred.sigma
```

# Aplicacion en R

- Para realizar predicciones a  $h$  pasos para nuestro modelo utilizamos el comando `predict`,

```
pred = predict(fit1,12)
sigma.hat = fit1@h.t
pred.sigma = pred[,3]
pred.sigma
```

	meanForecast	meanError	standardDeviation
1	0	0.8625309	0.8625309
2	0	0.9109252	0.9109252
3	0	0.9305176	0.9305176
4	0	0.9386316	0.9386316
5	0	0.9420216	0.9420216

# Aplicacion en R

- Graficamos la volatilidad predicha,

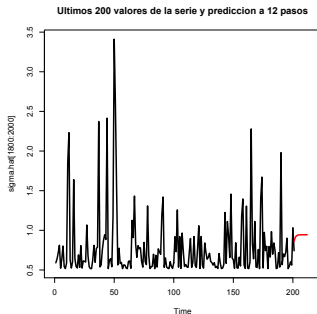
```
ts.plot(sigma.hat[1800:2000],lwd=3, xlim=c(0,215))  
lines(201:212,pred.sigma, col="red", lwd=3)  
title( "Ultimos 200 valores de la serie y prediccion a 12 pasos")
```



# Aplicacion en R

- Graficamos la volatilidad predicha,

```
ts.plot(sigma.hat[1800:2000],lwd=3, xlim=c(0,215))  
lines(201:212,pred.sigma, col="red", lwd=3)  
title( "Ultimos 200 valores de la serie y prediccion a 12 pasos")
```



# Ejemplo IPSA

- Cargamos la base de datos IPSA

```
datos = read.table(file.choose(),header=T)
attach(datos)
ipsa = na.omit(datos[,1])
n = length(ipsa)
y = log(ipsa)
## Retornos:
x = diff(y)
## Retornos^2
xx = x^2
```

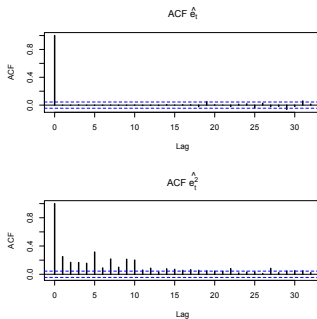
- En primer lugar, probemos con el modelo MA,

```
fit1 = arima(x, order=c(0,0,1),include.mean=FALSE)
fit1
fit2 = arima(x, order=c(1,0,1),include.mean=FALSE)
fit2
fit3 = arima(x, order=c(16,0,1),include.mean=FALSE)
fit3
AIC(fit1,fit2,fit3)
```

# Ejemplo IPSA

- El mejor modelo es el 3. Veamos como se comportan los residuos.

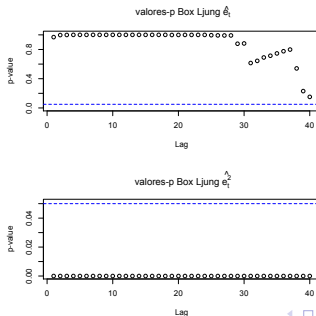
```
res = fit3$residuals
par(mfrow=c(2,1))
acf(res, lwd=3, main = "")
title(expression(paste("ACF ", hat(e[t] ))))
acf(res^2, main="", lwd=3)
title(expression(paste("ACF ", hat(e[t]^2 ))))
```



# Ejemplo IPSA

- Notamos que en los residuos al cuadrado queda estructura de correlacion, lo cual podemos verificar utilizando la funcion Box.Test creada anteriormente,

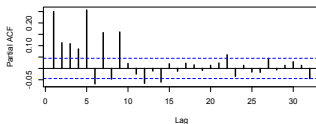
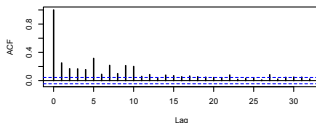
```
par(mfrow=c(2,1))  
Box.Test(res,40, main= expression(paste(" valores-p Box Ljung ",  
hat(e[t] ))))  
Box.Test(res^2,40, main= expression(paste(" valores-p Box Ljung ",  
hat(e[t]^2 ))))
```



# Ejemplo IPSA

- Veamos que pasa con los ACF y PACF de los residuos al cuadrado,

```
par(mfrow=c(1,2))  
acf(res^2, lwd=3, main = "")  
pacf(res^2, main="", lwd=3)
```



# Conclusiones

- Los residuos no son normales ya que si lo fueran los residuos al cuadrado no deberían tener correlación.
- Esto ya que normalidad + correlación nula = independencia.
- Luego, ajustar un modelo de la familia ARIMA no es adecuado ya que utiliza el supuesto de que los errores son normales.

# Modelos Heterocedasticos: ARCH

## Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile  
Facultad de Ciencia  
Depto. de Matemática y Computación



26 de septiembre de 2025