Clase 1 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

17 de agosto de 2025

Conceptos Básicos

- En muchos fenómenos naturales o sociales podemos medir ciertas variables y asignar un valor numérico a cada observación. Cuando hacemos esto, podemos hablar de una serie de observaciones $\{y_t\}$ medidas secuencialmente en el tiempo.

Conceptos Básicos

- En muchos fenómenos naturales o sociales podemos medir ciertas variables y asignar un valor numérico a cada observación. Cuando hacemos esto, podemos hablar de una serie de observaciones $\{y_t\}$ medidas secuencialmente en el tiempo.
- Por simplicidad, llamaremos serie de tiempo o serie cronologica a cualquier conjunto de observaciones numéricas $\{y_t, t \in T\}$ordenadas en el tiempo, es decir la variable tiempo t es estrictamente creciente.

Conceptos Básicos

En general, una vez obtenida la serie de tiempo (ST) uno se puede plantear varios objetivos,

- **Modelación:** Describir y modelar el comportamiento de la serie de tiempo. (Suavizado)

Conceptos Básicos

En general, una vez obtenida la serie de tiempo (ST) uno se puede plantear varios objetivos,

- **Modelación:** Describir y modelar el comportamiento de la serie de tiempo. (Suavizado)
- **Predicción:** Inferir el comportamiento futuro del fenómeno, proporcionando intervalos de confianza para las predicciones.

Conceptos Básicos

En general, una vez obtenida la serie de tiempo (ST) uno se puede plantear varios objetivos,

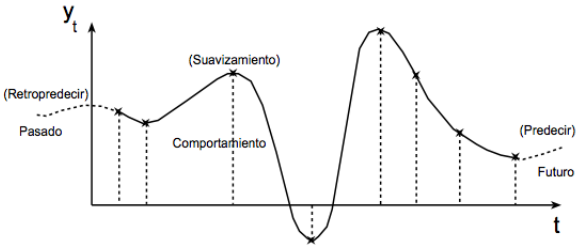
- **Modelación:** Describir y modelar el comportamiento de la serie de tiempo. (Suavizado)
- **Predicción:** Inferir el comportamiento futuro del fenómeno, proporcionando intervalos de confianza para las predicciones.
- **Retropredicción:**Inferir el comportamiento pasado del fenómeno,

Conceptos Básicos

En general, una vez obtenida la serie de tiempo (ST) uno se puede plantear varios objetivos,

- **Modelación:** Describir y modelar el comportamiento de la serie de tiempo. (Suavizado)
- **Predicción:** Inferir el comportamiento futuro del fenómeno, proporcionando intervalos de confianza para las predicciones.
- **Retropredicción:** Inferir el comportamiento pasado del fenómeno,
- **Imputación:** Imputar datos no observados en la serie de tiempo.

Conceptos Básicos



Conceptos Básicos

Suavizamiento
Sea $N_t = \{\underbrace{\ldots, y_{t-1}}_{\text{Pasado}}, y_t, \underbrace{y_{t+1}, \ldots}_{\text{Futuro}}\}$ el espacio compuesto por el pasado más el futuro de la serie, entonces $\tilde{y}_t = P_{N_t} y_t$ es el valor suavizado de y_t.

Conceptos Básicos

Predicción

Sea $M_t = \{y_t, y_{t-1}, \ldots\}$ el pasado del proceso $\{y_t\}$. Se define predicción como $\hat{y}_{t+1} = P_{M_t} y_{t+1}$.

Conceptos Básicos

Retropredicción

Sea $\mathcal{F}_t = \{y_{t+1}, y_{t+2}, \ldots\}$ el futuro de la serie en el instante t. Llamaremos retropredicción de y_t al valor $\check{y}_t = P_{\mathcal{F}_t} y_t$.

Conceptos Básicos

Imputación

Sea $N_t = \{\underbrace{\ldots, y_{t-1}}_{\text{Pasado}}, \underbrace{y_{t+1}, \ldots}_{\text{Futuro}}\}$ el espacio compuesto por el pasado más el futuro de la serie, entonces $\tilde{y}_t = P_{N_t} y_t$ es el valor suavizado de y_t.

Ejemplos de series de tiempo

1. Manchas Solares

Ejemplos de series de tiempo

1. **Manchas Solares**
    - Se estima que las erupciones de manchas solares ocurren aproximadamente cada 20 años. Su comportamiento temporal puedes ser representado por,

Ejemplos de series de tiempo

1. **Manchas Solares**
   - Se estima que las erupciones de manchas solares ocurren aproximadamente cada 20 años. Su comportamiento temporal puedes ser representado por,

   - Este fenómeno presenta un carácter estacional. Se puede modelar a partir de

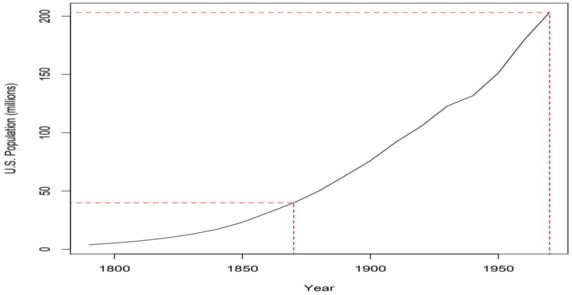
$$Y_t = Asen(\omega t + \psi)$$

Ejemplos de series de tiempo

2. Población anual de un país

Ejemplos de series de tiempo

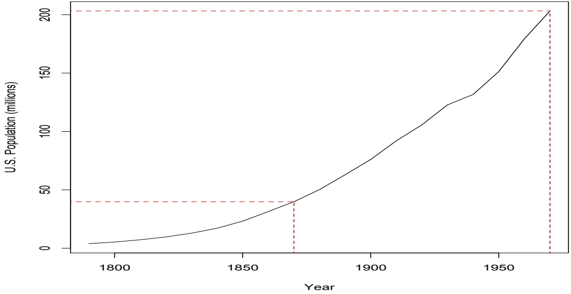
2. **Población anual de un país**
   - Supongamos la serie de tiempo de la población de estados unidos (en millones de personas) medida por los censos de cada decada entre 1790-1970



Ejemplos de series de tiempo

2. Población anual de un país

- Supongamos la serie de tiempo de la población de estados unidos (en millones de personas) medida por los censos de cada decada entre 1790-1970



- Notamos que la población en USA tiene un creciemiento exponencial. Se puede modelar a partir de,

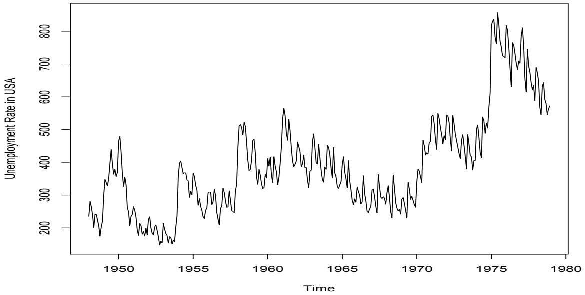
$$Y_t = \alpha e^{\beta t}$$

Ejemplos de series de tiempo

3. Tasa de Desemplo en USA (Mensual)

Ejemplos de series de tiempo

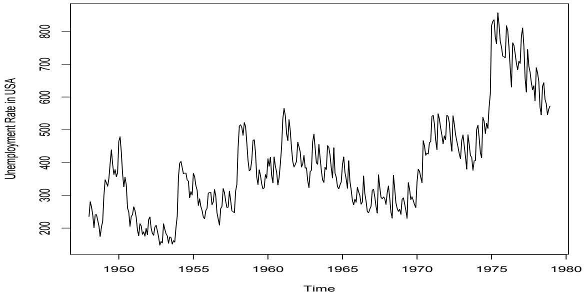
3. **Tasa de Desemplo en USA (Mensual)**
   - Supongamos la serie de tiempo de la tasa de desempleados mensual en USA medida entre 1948 y 1978. Observamos una señal pero con mucho ruido.



Ejemplos de series de tiempo

3. Tasa de Desemplo en USA (Mensual)

- Supongamos la serie de tiempo de la tasa de desempleados mensual en USA medida entre 1948 y 1978. Observamos una señal pero con mucho ruido.



- Una forma de extraer el ruido es a partir de promedios moviles, por ejemplo

$$Z_t = \frac{Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1}}{3}$$

Componentes de series de tiempo

- Nivel

Componentes de series de tiempo

- Nivel
- Tendencia

Componentes de series de tiempo

- Nivel
- Tendencia
- Estacionalidad

Componentes de series de tiempo

- Nivel
- Tendencia
- Estacionalidad
- Componente Aleatoria

Componentes de series de tiempo

- Nivel
- Tendencia
- Estacionalidad
- Componente Aleatoria
- Lo cual puede ser expresado por la siguiente ecuación,

$$Y_t = N_t + T_t + S_t + \epsilon_t$$

Componentes de series de tiempo

- Nivel
- Tendencia
- Estacionalidad
- Componente Aleatoria
- Lo cual puede ser expresado por la siguiente ecuación,

$$Y_t = N_t + T_t + S_t + \epsilon_t$$

- Este modelo lleva el nombre de modelo aditivo, ya que la serie de tiempo se puede descomponer en la suma de cada uno de estos componentes.

Series de Tiempo Deterministicas

- Si los futuros valores de una serie de tiempo son exactamente determinados por una funcion matematica como

$$Y_t = Asen(\omega t + \psi)$$

la serie de tiempo se dice deterministica.

Series de Tiempo Deterministicas

- Si los futuros valores de una serie de tiempo son exactamente determinados por una funcion matematica como

$$Y_t = Asen(\omega t + \psi)$$

  la serie de tiempo se dice deterministica.
- Una serie de tiempo se dice no deterministica o simplemente estadística, si los futuros valores de una serie solo pueden ser descrito en términos de una distribución de probabilidad y por lo tanto, es imposible pronosticar el valor exacto para los siguientes tiempos.

Proceso Estocástico

- **Definición:** Sea T un conjunto arbitrario. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $Y = \{Y(t), t \in \mathcal{T}\}$, tal que, para todo $t \in \mathcal{T}$, $Y(t)$ es una variable aleatoria.

Proceso Estocástico

- **Definición:** Sea T un conjunto arbitrario. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $Y = \{Y(t), t \in \mathcal{T}\}$, tal que, para todo $t \in \mathcal{T}$, $Y(t)$ es una variable aleatoria.
- Es decir, un proceso estocastico es un fenomeno estadístico que se desarrolla en el tiempo según leyes probabilísticas.

Proceso Estocástico

- **Definición:** Sea T un conjunto arbitrario. Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $Y = \{Y(t), t \in \mathcal{T}\}$, tal que, para todo $t \in \mathcal{T}$, $Y(t)$ es una variable aleatoria.
- Es decir, un proceso estocastico es un fenomeno estadístico que se desarrolla en el tiempo según leyes probabilísticas.
- Note que en el caso de las series de tiempo, $\mathcal{T} = \{1, 2, \ldots, n\}$ luego el proceso estocástico será definido como $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$

Proceso Estacionario

- **Definición:** Un proceso estocástico $Y(t)$ se dice estrictamente estacionario (o estacionario en el sentido fuerte) si todas las distribuciones de dimensión finita permanecen iguales en el tiempo, es decir,

$$F(Y_{k+1}, Y_{k+2}, \ldots, Y_{k+n}) = F(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

Proceso Gaussiano

- **Definición:** Si la distribución de probabilidad de las observaciones asociadas con cualquier conjunto de tiempo es una distribución normal multivariada, el proceso es llamado Gaussiano o Normal.

Proceso Gaussiano

- **Definición:** Si la distribución de probabilidad de las observaciones asociadas con cualquier conjunto de tiempo es una distribución normal multivariada, el proceso es llamado Gaussiano o Normal.
- Como la distribución normal multivariada está completamente caracterizada por sus dos primeros momentos, la existencia de una media y varianza fija para todo t es suficiente para garantizar la estacionaridad estricta del proceso Gaussiano.

Estacionaridad Débil

- **Definición:** Un proceso estocástico $Y(t)$ se dice debilemente estacionario (o estacionario de segundo orden) si,

Estacionaridad Débil

- **Definición:** Un proceso estocástico $Y(t)$ se dice debilemente estacionario (o estacionario de segundo orden) si,
  1. $\mathbb{E}[Y_t] = \mu = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$

Estacionaridad Débil

- **Definición:** Un proceso estocástico $Y(t)$ se dice debilemente estacionario (o estacionario de segundo orden) si,
  1. $\mathbb{E}[Y_t] = \mu = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$
  2. $\mathbb{V}[Y_t] = \sigma^2 = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$

Estacionaridad Débil

- **Definición:** Un proceso estocástico $Y(t)$ se dice debilemente estacionario (o estacionario de segundo orden) si,
  1. $\mathbb{E}[Y_t] = \mu = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$
  2. $\mathbb{V}[Y_t] = \sigma^2 = cte < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}$
  3. Existe una función $\gamma(.)$ tal que $Cov(Y_t, Y_s) = \gamma(t - s) \quad \forall t, s \in \mathcal{T}$

Pregunta

- Si un proceso es estrictamente estacionario, entonces también es débilmente estacionario?.

Pregunta

- Si un proceso es estrictamente estacionario, entonces también es débilmente estacionario?.
- Si, bajo $\mathbb{E}(Y_t^2) < \infty \ \forall t$.

Pregunta

- Si un proceso es estrictamente estacionario, entonces también es débilmente estacionario?.
- Si, bajo $\mathbb{E}(Y_t^2) < \infty \; \forall t$.
- Si un proceso es débilmente estacionario, es también estrictamente estacionario?.

Pregunta

- Si un proceso es estrictamente estacionario, entonces también es débilmente estacionario?.
- Si, bajo $\mathbb{E}(Y_t^2) < \infty \ \forall t$.
- Si un proceso es débilmente estacionario, es también estrictamente estacionario?.
- No.

Ruido Blanco

- **Definición:** Un proceso estocástico debilmente estacionario se dice ruido blanco si,

Ruido Blanco

- **Definición:** Un proceso estocástico debilmente estacionario se dice ruido blanco si,
  i) $\mathbb{E}[Y_t] = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$

Ruido Blanco

- **Definición:** Un proceso estocástico debilmente estacionario se dice ruido blanco si,
  i) $\mathbb{E}[Y_t] = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$
  ii) $\mathbb{V}[Y_t] = \sigma^2 \quad \forall t \in \mathcal{T}$

Ruido Blanco

- **Definición:** Un proceso estocástico debilmente estacionario se dice ruido blanco si,
  i) $\mathbb{E}[Y_t] = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$
  ii) $\mathbb{V}[Y_t] = \sigma^2 \quad \forall t \in \mathcal{T}$
  iii) $Cov(Y_t, Y_s) = 0 \quad \forall t, s \in \mathcal{T}$

Función de Autocovarianza

- **Definición:** Para un proceso débilmente estacionario definimos la función de autocovarianza (ACVF) como,

$$
\begin{aligned}
\gamma(k) &= \mathbb{E}[Y_t - \mu][Y_{t+k} - \mu] \\
&= Cov(Y_t, Y_{t+k}) \\
&= Cov(Y_{t+k}, Y_t) \\
&= Cov(Y_t, Y_{t-k}) \\
&= Cov(Y_{t-k}, Y_t)
\end{aligned}
$$

Función de Autocovarianza

Propiedades

Función de Autocovarianza

Propiedades

1. $\gamma(0) > 0$

Función de Autocovarianza

Propiedades

1. $\gamma(0) > 0$
2. $\gamma(k) = \gamma(-k)$

Función de Autocovarianza

Propiedades

1. $\gamma(0) > 0$
2. $\gamma(k) = \gamma(-k)$
3. $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$

Función de Autocovarianza

Propiedades

1. $\gamma(0) > 0$
2. $\gamma(k) = \gamma(-k)$
3. $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$
4. $\gamma(k)$ es definida no negativa, en sentido que,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \gamma(k_i - k_j) \geq 0$$

Para cualquier número real $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$

Función de Autocorrelación

- **Definición:** Para un proceso débilmente estacionario definimos la función de autocorrelación (ACF) como,

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

Ejemplo

- Sea $\{\epsilon_t\}$ una secuencia de ruido blanco con $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$ y $\mathbb{V}(\epsilon_t) = \sigma^2$. Cuál es su función de autocorrelación?

Ejemplo

- Sea $\{\epsilon_t\}$ una secuencia de ruido blanco con $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$ y $\mathbb{V}(\epsilon_t) = \sigma^2$. Cuál es su función de autocorrelación?

Ejemplo

- Sea $\{\epsilon_t\}$ una secuencia de ruido blanco con $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$ y $\mathbb{V}(\epsilon_t) = \sigma^2$. Cuál es su función de autocorrelación?

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \frac{\sigma^2 \delta(k)}{\sigma^2} = \delta(k)$$

Estimación de ACVF y ACF

- Sea la serie de tiempo observada o muestreada $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, un estimador para la función de autocorrelación $\rho(k)$ está dado por

$$r_k = \hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}$$

donde

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}) \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, K$$

y $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} y_t$ es la media muestral de la serie de tiempo.

Consideraciones

- Para obtener una estimación util de la función de autocorrelación, necesitamos tipicamente al menos $N = 50$ observaciones. Además, las autocorrelaciones estimadas r_k deben ser calculadas para $k = 0, 1, \ldots, K$, donde K no sea mayor que $N/4$.

Consideraciones

- Para obtener una estimación util de la función de autocorrelación, necesitamos tipicamente al menos $N = 50$ observaciones. Además, las autocorrelaciones estimadas r_k deben ser calculadas para $k = 0, 1, \ldots, K$, donde K no sea mayor que $N/4$.
- Si $\rho(k)$ es 0 para todo k entonces el proceso estócastico es completamente aleatorio, también llamado ruido blanco. En este caso el error estándar para las autocorrelaciones estimadas r_k se define como:

$$se[r_k] \simeq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Consideraciones

- Para obtener una estimación util de la función de autocorrelación, necesitamos tipicamente al menos $N = 50$ observaciones. Además, las autocorrelaciones estimadas r_k deben ser calculadas para $k = 0, 1, \ldots, K$, donde K no sea mayor que $N/4$.
- Si $\rho(k)$ es 0 para todo k entonces el proceso estócastico es completamente aleatorio, también llamado ruido blanco. En este caso el error estándar para las autocorrelaciones estimadas r_k se define como:

$$se[r_k] \simeq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

- En los gráficos de R de la ACF muestral se asume esta desviación estándar para calcular los límites de significancia de r_k

Ejemplo

- Sean las mediciones de la temperatura en un reactor quimico por mínuto:

$$200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,$$
$$202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.$$

Ejemplo

- Sean las mediciones de la temperatura en un reactor quimico por mínuto:

$$200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,$$
$$202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.$$

1. Grafique y_{t+1} vs y_t

Ejemplo

- Sean las mediciones de la temperatura en un reactor quimico por mínuto:

$$200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,$$
$$202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.$$

1. Grafique y_{t+1} vs y_t
2. Grafique y_{t+2} vs y_t

Ejemplo

- Sean las mediciones de la temperatura en un reactor quimico por mínuto:

$$200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,$$
$$202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.$$

1. Grafique y_{t+1} vs y_t
2. Grafique y_{t+2} vs y_t
3. Viendo los gráficos considera que la serie está autocorrelacionada?

Ejemplo

- Sean las mediciones de la temperatura en un reactor quimico por mínuto:

$$200, 202, 208, 204, 204, 207, 207, 204, 202, 199, 201, 198, 200,$$
$$202, 203, 205, 207, 211, 204, 206, 203, 203, 201, 198, 200, 206.$$

1. Grafique y_{t+1} vs y_t
2. Grafique y_{t+2} vs y_t
3. Viendo los gráficos considera que la serie está autocorrelacionada?
4. Obtenga r_1 y r_2