

Clase 11 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

June 19, 2025



Conceptos Previos

► Procesos ARMA

Conceptos Previos

- ▶ Procesos ARMA
- ▶ Estimación de Modelos ARMA

Conceptos Previos

- ▶ Procesos ARMA
- ▶ Estimación de Modelos ARMA
- ▶ Predicción en Modelos ARMA

Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ La función de autocorrelación parcial entrega información relevante sobre la estructura de dependencia de un proceso estacionario. La función de autocorrelación parcial $\alpha(k)$ corresponde a la correlación entre los residuos en los tiempos 1 y $k + 1$ dada intervención de Y_2, \dots, Y_k . Esta idea se precisa en la siguiente definición,

Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ La función de autocorrelación parcial entrega información relevante sobre la estructura de dependencia de un proceso estacionario. La función de autocorrelación parcial $\alpha(k)$ corresponde a la correlación entre los residuos en los tiempos 1 y $k + 1$ dada intervención de Y_2, \dots, Y_k . Esta idea se precisa en la siguiente definición,
- ▶ **Definición:** Sea $\alpha(\cdot)$ definido como,

$$\alpha(1) = \text{Corr}(Y_2, Y_1)$$

$$\alpha(k) = \text{Corr}(Y_{k+1} - P_M Y_{k+1}, Y_1 - P_M Y_1), \quad k \geq 2$$

donde $M = [\{Y_2, \dots, Y_k\}]$

Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ **Ejemplo:** $AR(1)$: $Y_t = \phi Y_{t-1} + \epsilon_t$. Demuestre que la FACP de un proceso $AR(1)$ es igual a 0 para $k \geq 1$. (En general, la FACP de un $AR(p) = 0$ para $k > p$).

Función de Autocorrelación Parcial

- Una definición equivalente de la función de autocorrelación parcial es la siguiente. Sea $\{Y_t\}$ un proceso estacionario con función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ y suponga que los coeficientes ϕ_{kj} , $j = 1, 2, \dots, k$, $k = 1, 2, \dots$ son los coeficientes en la representación

$$P_{[\{Y_1, \dots, Y_k\}]} Y_{k+1} = \phi_{k1} Y_k + \phi_{k2} Y_{k-1} + \dots + \phi_{kk} Y_1$$

Se puede mostrar que $\alpha(k) = \phi_{kk}$, para $k \geq 2$.

Función de Autocorrelación Parcial

- **Método de Determinantes:** Recuerde que ϕ_{kk} se obtienen a partir del sistema de ecuaciones:

$$\Rightarrow \Gamma \underline{\phi} = \underline{\gamma}$$

donde $\underline{\phi} = (\phi_{k1} \phi_{k2} \dots \phi_{kk})$. El sistema se puede resolver usando la Regla de Cramer, de manera que,

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|}$$

donde $k = 1, 2, 3, \dots$, P_k es la matriz de correlaciones y P_k^* es la matriz de correlación corregida, donde la última columna es sustituida por el vector de autocorrelaciones.

Función de Autocorrelación Parcial

- **Método de Determinantes:** Para $k = 1, 2, 3$ tenemos que,

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho(1) \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 \end{vmatrix}} \\ \phi_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(2) \\ \rho(2) & \rho(1) & \rho(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) \\ \rho(2) & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}}\end{aligned}$$

Función de Autocorrelación Parcial

- ▶ **Ejemplo:** Use el método de determinantes para verificar el resultado obtenido para la FACP de un proceso AR(1).

Algoritmo de Durbin Levinson.

- ▶ Los enfoques anteriores requieren encontrar la solución de un sistema de n ecuaciones lineales, que para un n grande puede ser muy costoso en términos de tiempo.

Algoritmo de Durbin Levinson.

- ▶ Los enfoques anteriores requieren encontrar la solución de un sistema de n ecuaciones lineales, que para un n grande puede ser muy costoso en términos de tiempo.
- ▶ Alternativamente, se puede simplificar el calculo del predictor a un paso \hat{Y}_{n+1} basados en las n observaciones previas, usando como base el partir del predictor a un paso \hat{Y}_n basados en las $n - 1$ observaciones previas.

Algoritmo de Durbin Levinson.

- ▶ Los enfoques anteriores requieren encontrar la solución de un sistema de n ecuaciones lineales, que para un n grande puede ser muy costoso en términos de tiempo.
- ▶ Alternativamente, se puede simplificar el calculo del predictor a un paso \hat{Y}_{n+1} basados en las n observaciones previas, usando como base el partir del predictor a un paso \hat{Y}_n basados en las $n - 1$ observaciones previas.
- ▶ Los algoritmos que siguen este enfoque, se llaman recursivos. Existen dos importantes ejemplos, el algoritmo de Durbin-Levinson y el algoritmo de Innovaciones.

Algoritmo de Durbin Levinson.

Algoritmo de Durbin Levinson

Algoritmo de Durbin Levinson.

Algoritmo de Durbin Levinson

- **Inicialización:** $\phi_{11} = \gamma(1)/\gamma(0)$, $v_0 = \gamma(0)$ y $v_1 = v_0 [1 - \phi_{11}^2]$.

Algoritmo de Durbin Levinson.

Algoritmo de Durbin Levinson

- **Inicialización:** $\phi_{11} = \gamma(1)/\gamma(0)$, $v_0 = \gamma(0)$ y $v_1 = v_0 [1 - \phi_{11}^2]$.
- **Algoritmo:**

$$\phi_{nn} = \left[\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} \gamma(n-j) \right] v_{n-1}^{-1}$$
$$\begin{bmatrix} \phi_{n1} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \phi_{nn} \begin{bmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{bmatrix}$$
$$v_n = v_{n-1} [1 - \phi_{nn}^2]$$

Algoritmo de Innovaciones

- ▶ Sea $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} e_{n+1-j}$ el MPL de y_{n+1} , donde e_{n+1-j} es la innovación (o error de predicción) a 1 paso definida por $e_{n+1-j} = y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j}$. Los coeficientes $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$ se pueden obtener a partir del Algoritmo de Innovaciones.

Algoritmo de Innovaciones

- Sea $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} e_{n+1-j}$ el MPL de y_{n+1} , donde e_{n+1-j} es la innovación (o error de predicción) a 1 paso definida por $e_{n+1-j} = y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j}$. Los coeficientes $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$ se pueden obtener a partir del Algoritmo de Innovaciones.

Algoritmo de Innovaciones

Algoritmo de Innovaciones

- ▶ Sea $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} e_{n+1-j}$ el MPL de y_{n+1} , donde e_{n+1-j} es la innovación (o error de predicción) a 1 paso definida por $e_{n+1-j} = y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j}$. Los coeficientes $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$ se pueden obtener a partir del Algoritmo de Innovaciones.

Algoritmo de Innovaciones

- ▶ **Inicialización:** $\theta_{11} = \gamma(1)/\gamma(0)$ y $v_0 = \gamma(0)$.

Algoritmo de Innovaciones

- ▶ Sea $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} e_{n+1-j}$ el MPL de y_{n+1} , donde e_{n+1-j} es la innovación (o error de predicción) a 1 paso definida por $e_{n+1-j} = y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j}$. Los coeficientes $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$ se pueden obtener a partir del Algoritmo de Innovaciones.

Algoritmo de Innovaciones

- ▶ **Inicialización:** $\theta_{11} = \gamma(1)/\gamma(0)$ y $v_0 = \gamma(0)$.
- ▶ **Algoritmo:**

$$\begin{aligned}\theta_{n,n} &= [\gamma(n)] v_0^{-1} \\ \theta_{n,n-k} &= \left[\gamma(n-k) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j \right] v_k^{-1} \quad 1 \leq k < n \\ v_n &= \gamma(0) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j\end{aligned}$$

Algoritmo de Innovaciones

- **Nota:** Mientras que el algoritmo de Durbin-Levinson da los coeficientes $\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn}$ de y_n, \dots, y_1 en la representación $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{nj} y_{n+1-j}$. El algoritmo de innovaciones, en cambio, da los coeficientes $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$ de $(y_n - \hat{y}_n), \dots, (y_1 - \hat{y}_1)$ en la representación $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} (y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j})$.

Algoritmo de Innovaciones

- ▶ **Nota:** Mientras que el algoritmo de Durbin-Levinson da los coeficientes $\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn}$ de y_n, \dots, y_1 en la representación $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{nj} y_{n+1-j}$. El algoritmo de innovaciones, en cambio, da los coeficientes $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$ de $(y_n - \hat{y}_n), \dots, (y_1 - \hat{y}_1)$ en la representación $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} (y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j})$.
- ▶ El algoritmo de innovaciones generalmente es más eficiente, debido a que se basa en las innovaciones que no están correlacionadas.

Algoritmo de Innovaciones

- ▶ **Nota:** Mientras que el algoritmo de Durbin-Levinson da los coeficientes $\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn}$ de y_n, \dots, y_1 en la representación $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{nj} y_{n+1-j}$. El algoritmo de innovaciones, en cambio, da los coeficientes $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nn}$ de $(y_n - \hat{y}_n), \dots, (y_1 - \hat{y}_1)$ en la representación $\hat{y}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{nj} (y_{n+1-j} - \hat{y}_{n+1-j})$.
- ▶ El algoritmo de innovaciones generalmente es más eficiente, debido a que se basa en las innovaciones que no están correlacionadas.
- ▶ Debido a la estructura de correlaciones de los procesos $MA(q)$, el algoritmo de innovaciones es particularmente útil para predecir estos procesos.