Modelos de Larga Memoria

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

10 de septiembre de 2025

Motivación

Motivación

- La dependencia de largo plazo se ha convertido en un aspecto clave para modelar series de tiempo en disciplinas como:
    - Econometría
    - Hidrología
    - Climatología
    - Física
    - entre otros

Definición de Memoria Larga

Sea $\gamma(h)$ la **función de autocovarianza** en el rezago h de un proceso estacionario $\{y_t\}$.

Una definición usual de **memoria larga** es:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| = \infty$$

Otra definición: la autocovarianza decae de forma hiperbólica:

$$\gamma(h) \sim h^{2d-1} \ell_1(h), \quad h \to \infty$$

- d: parámetro de **memoria larga**.
- $\ell_1(\cdot)$: función lentamente variante (ej.: $\log(x)$, constante $b > 0$).

Otras Definiciones de Memoria Larga

- Desde la **expansión de Wold**:

$$\psi_j \sim j^{d-1}\,\ell_2(j), \quad j > 0$$

Funciones lentamente variantes

$\ell_1(\cdot)$ y $\ell_2(\cdot)$ son todas funciones lentamente variantes, pero aplicadas en contextos distintos (autocovarianza y coeficientes de Wold).

Teorema de Equivalencias

Sea $\{y_t\}$ un proceso estacionario con expansión de Wold

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \varepsilon_t \sim \text{ruido blanco}$$

y $0 < d < \frac{1}{2}$.
Entonces:

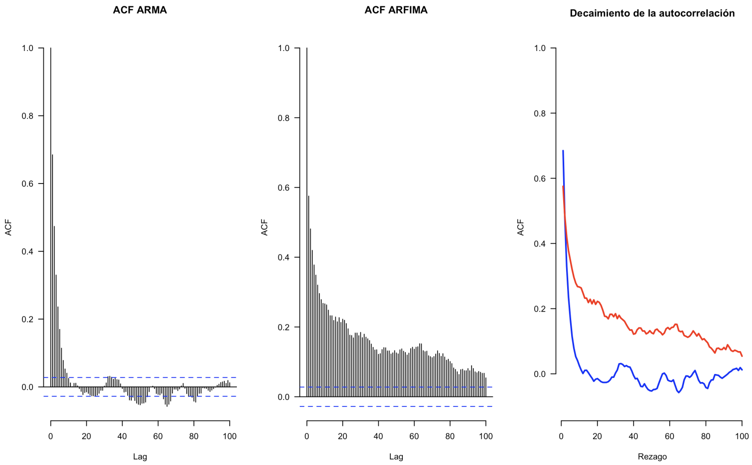
(a) Si $\psi_j \sim j^{d-1}\ell_2(j)$, entonces $\gamma(h) \sim h^{2d-1}\ell_1(h)$.
(b) Si $\gamma(h) \sim h^{2d-1}\ell_1(h)$, entonces $\sum_h |\gamma(h)| = \infty$.

Procesos de Larga memoria

Memoria en series de tiempo

- Modelos ARMA/AR: autocorrelación decae **exponencialmente** a cero $\Rightarrow$ **memoria corta**.
- Se dice que una serie tiene memoria larga cuando la autocorrelación decrece lentamente y permanece significativa incluso en rezagos grandes
- En estos casos, observaciones pasadas *muy antiguas* siguen influyendo en el presente.

Procesos de Larga memoria



Proceso ARFIMA

Definición

Un proceso ARFIMA(p, d, q) $\{y_t\}$ se define como:

$$\phi(B)y_t = \theta(B)(1-B)^{-d}\,\varepsilon_t, \qquad d < 0{,}5$$

donde:

- $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ es el polinomio AR.
- $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ es el polinomio MA.
- $(1-B)^{-d}$ es el operador de diferenciación fraccional.
- $\{\varepsilon_t\}$ es un ruido blanco con varianza finita.

Proceso ARFIMA

Operador Fraccional

$$(1-B)^{-d}=\sum_{j=0}^{\infty}\eta_j B^j, \qquad \eta_j=\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(d)}.$$

- El parámetro $d \in (-0{,}5, 0{,}5)$, $d \neq 0, -1, -2, \ldots$.
- La función de autocorrelación presenta un decaimiento hiperbólico:

$$\rho(k) \sim k^{2d-1}, \quad k \to \infty$$

- Introducidos por Granger y Joyeux (1980) y Hosking (1981).

Ruido fraccionario

- Al proceso ARFIMA$(0, d, 0)$ se le denomina *Ruido Fraccionario*:

$$(1 - B)^d y_t = \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma^2)$$

- En general, este tipo de procesos aparentemente corresponden a series **NO estacionarias**, y suele ser difícil distinguir entre:
    - Series no estacionarias con tendencia más una componente de corta memoria (ARMA),
    - Series de larga memoria.

Ruido fraccionario

Propiedades

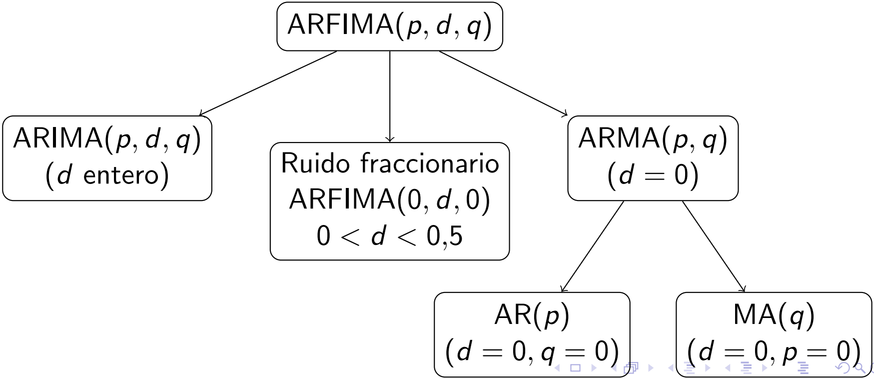
- $\psi(k) = \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d)\,\Gamma(d)} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(1+k-d)}$
- $\rho(k) = \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} \frac{\Gamma(k+d)}{\Gamma(1+k-d)}$
- $\phi_{n,j} = -\binom{n}{j} \frac{\Gamma(j-d)\,\Gamma(n-d-j+1)}{\Gamma(-d)\,\Gamma(n-d+1)}$
- $\phi_{n,n} = \frac{d}{n-d}$

Modelo ARFIMA

ARFIMA como modelo general

El modelo ARFIMA(p, d, q) generaliza varios modelos clásicos:

$$\phi(B)(1 - B)^d y_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t$$



Estacionariedad, Causalidad e Invertibilidad en ARFIMA

Teorema

Considere el proceso ARFIMA definido por:

$$\phi(B)y_t = \theta(B)(1-B)^{-d}\,\varepsilon_t, \qquad d \in (-1, \tfrac{1}{2})$$

asumiendo que los polinomios $\phi(\cdot)$ y $\theta(\cdot)$ no tienen raíces comunes.

(a) Si las raíces de $\phi(\cdot)$ están fuera del círculo unitario $\{z : |z| = 1\}$, entonces existe una solución estacionaria única:

$$y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi(z) = (1-z)^{-d}\frac{\theta(z)}{\phi(z)}.$$

(b) Si las raíces de $\phi(\cdot)$ están fuera del disco unitario cerrado $\{z : |z| \leq 1\}$, entonces el proceso $\{y_t\}$ es **causal**.

(c) Si las raíces de $\theta(\cdot)$ están fuera del disco unitario cerrado $\{z : |z| \leq 1\}$, entonces el proceso $\{y_t\}$ es **invertible**.

Modelo ARFIMA

- La representación de Wold de un proceso ARFIMA

$$y_t = (1-B)^{-d}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(d)}.$$

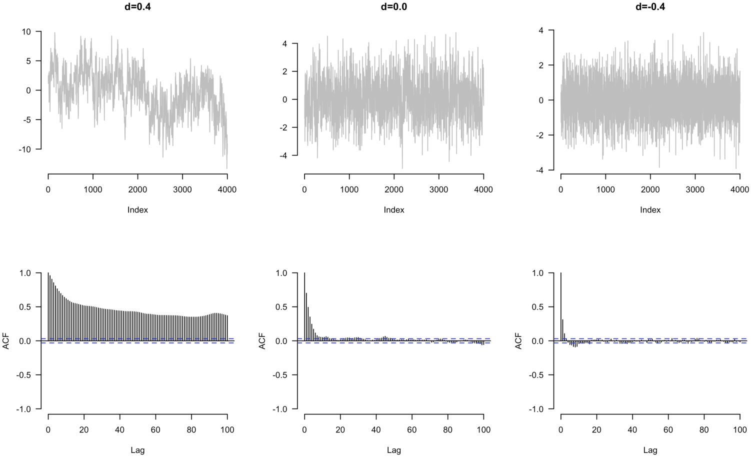
- **Propiedades útiles**
    - Asintótica: $\psi_j \sim \dfrac{1}{\Gamma(d)} j^{\,d-1} \quad (j \to \infty)$.
    - Para $0 < d < \frac{1}{2}$: $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ pero $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| = \infty$ (memoria larga).
    - Para $-\frac{1}{2} < d < 0$: $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ (antipersistencia / memoria corta).

Caracterización del proceso ARFIMA en el dominio del tiempo

Rol del parámetro d (Hosking, 1981)

- $0 < d < \frac{1}{2}$: **memoria larga:** Existe una constante positiva C tal que, para k grande,
$$\rho_k \approx C\, k^{2d-1}.$$
La ACF decae hiperbólicamente hacia cero y no es absolutamente sumable:
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k \quad \text{no converge.}$$
- $-\frac{1}{2} < d < 0$: **memoria intermedia (antipersistencia):** El proceso y_t es estacionario, dominado por autocorrelaciones negativas y absolutamente sumables.
- $d = 0$: **memoria corta** $\Rightarrow$ **proceso ARMA.**

Procesos de Larga memoria



Implementación de un modelo ARFIMA en R

Paquetes utilizados

- `fracdiff`: simulación y estimación de modelos fraccionarios.
- `forecast`: selección automática de ARIMA/ARFIMA.
- `arfima`: funciones adicionales para estimar procesos de larga memoria.

Ejemplo: Ruido Fraccionario

- Simulación de un proceso ARFIMA$(0, d, 0)$ con $d = 0{,}4$:

$$(1 - B)^d X_t = Z_t$$

- Comparación con modelos ARMA ajustados vía `auto.arima`.
- Estimación del parámetro d con `fracdiff()`.
- Evaluación mediante ACF y PACF: decaimiento hiperbólico en la autocorrelación.

Modelos de Larga Memoria

Econometría

Felipe Elorrieta López

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Depto. de Matemática y Computación

10 de septiembre de 2025