Clase 2 Series de Tiempo

Felipe Elorrieta Lopez

Universidad de Santiago de Chile

2 de septiembre de 2025

Conceptos Previos

- Componentes de una Serie de Tiempo

Conceptos Previos

- Componentes de una Serie de Tiempo
- Estacionaridad Estricta

Conceptos Previos

- Componentes de una Serie de Tiempo
- Estacionaridad Estricta
- Estacionaridad Débil

Conceptos Previos

- Componentes de una Serie de Tiempo
- Estacionaridad Estricta
- Estacionaridad Débil
- Ruido Blanco

Conceptos Previos

- Componentes de una Serie de Tiempo
- Estacionaridad Estricta
- Estacionaridad Débil
- Ruido Blanco
- Función de Autocovarianza

Descomposición clásica de una serie de Tiempo.

Sean las observaciones $\{Y_t, t = 1, \ldots, N\}$ de una serie temporal. Vimos anteriormente que un modelo descompuesto consiste en escribir Y_t como la siguiente suma,

$$Y_t = N_t + T_t + S_t + \epsilon_t$$

Donde N_t corresponde al componete de nivel, T_t el de tendencia, S_t el de estacionalidad y ϵ_t es el término aleatorio.

Descomposición clásica de una serie de Tiempo.

- El modelo anterior se denomina modelo aditivo, que es adecuado, cuando S_t no depende de otras componentes, como T_t. Ahora, si las amplitudes estacionales varian con la tendencia, un modelo más adecuado es uno multiplicativo del tipo,

$$Y_t = N_t \times T_t \times S_t \times \epsilon_t$$

Descomposición clásica de una serie de Tiempo.

- El modelo multiplicativo puede ser transformado en uno aditivo tomando logaritmos,

$$Y_t^* = N_t^* + T_t^* + S_t^* + \epsilon_t^*$$

donde, $Y_t^* = \log(Y_t)$, $T_t^* = \log(T_t)$, $S_t^* = \log(S_t)$ y $\epsilon_t^* = \log(\epsilon_t)$.

Descomposición clásica de una serie de Tiempo.

- Los modelos de suavizado se caracterizan por estimar cada componente individualmente y asi descomponer la serie de tiempo (de manera aditiva o multiplicativa). (Decompose in R)

Nivel y Ruido.

- Supongamos que la serie de tiempo $\{Y_t, t = 1, \ldots, N\}$ puede ser descompuesta en un modelo aditivo del tipo,

$$Y_t = M_t + \epsilon_t$$

  donde ϵ_t es la componente aleatoria o el ruido y M_t es lo que queda de la serie Y_t al extraer el ruido, esto se conoce como la señal o el patron de comportamiento de la serie.

Nivel y Ruido.

- Supongamos que la serie de tiempo $\{Y_t, t = 1, \ldots, N\}$ puede ser descompuesta en un modelo aditivo del tipo,

$$Y_t = M_t + \epsilon_t$$

  donde ϵ_t es la componente aleatoria o el ruido y M_t es lo que queda de la serie Y_t al extraer el ruido, esto se conoce como la señal o el patron de comportamiento de la serie.
- La idea basica de estos modelos es usar el patron de comportamiento para predecir valores futuros de la serie.

Medias Móviles Simples

- La técnica de medias moviles consiste en calcular la media aritmetica de las r observaciones más recientes, esto es,

$$M_t = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-r+1}}{r}$$

o

$$M_t = M_{t-1} + \frac{Y_t - Y_{t-r}}{r}$$

Medias Móviles Simples

- La técnica de medias moviles consiste en calcular la media aritmetica de las r observaciones más recientes, esto es,

$$M_t = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-r+1}}{r}$$

o

$$M_t = M_{t-1} + \frac{Y_t - Y_{t-r}}{r}$$

- El nombre de media móvil es utilizado por que para cada t, una observación más antigua se sustituye por una más reciente, calculandose una nueva media.

Medias Móviles Simples

- Una predicción de todos los valores futuros es dada por la última media móvil calculada, esto es,

$$\hat{Y}_t(h) = M_t \quad \forall h > 0$$

o bien,

$$\hat{Y}_t(h) = \hat{Y}_{t-1}(h+1) + \frac{Y_t - Y_{t-r}}{r}$$

Medias Móviles Simples

- Una predicción de todos los valores futuros es dada por la última media móvil calculada, esto es,

$$\hat{Y}_t(h) = M_t \quad \forall h > 0$$

o bien,

$$\hat{Y}_t(h) = \hat{Y}_{t-1}(h+1) + \frac{Y_t - Y_{t-r}}{r}$$

- Las propiedades del metodo dependen del número de observaciones utilizadas en el promedio (r). Un valor grande de r implica una trayectoria lenta, un valor pequeño de r implica una reacción más rápida.

Alisado Exponencial simple o de 1er orden

- El alisado exponencial simple (AES) puede ser escrito matematica como,

$$\hat{Y}_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-1} \tag{1}$$

donde, $\hat{Y}_t$ es denominado el valor exponencialmente alisado y α es una constante de suavizado, tal que $\alpha \in (0, 1)$. Además, $\hat{Y}_1 = Y_1$

Alisado Exponencial simple o de 1er orden

- La ecuación 1 se puede expandir a,

$$\hat{Y}_t = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)\hat{Y}_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\hat{Y}_{t-2} + \dots$$

  Lo que significa que el AES es una media ponderada que da pesos mayores a observaciones más recientes, lo cual es una ventaja respecto al método de medias móviles.

Alisado Exponencial simple o de 1er orden

- La ecuación 1 se puede expandir a,

$$\hat{Y}_t = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)\hat{Y}_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\hat{Y}_{t-2} + \dots$$

  Lo que significa que el AES es una media ponderada que da pesos mayores a observaciones más recientes, lo cual es una ventaja respecto al método de medias móviles.
- Finalmente, la formula general es,

$$\hat{Y}_t = \alpha\sum_{k=0}^{t-2}(1-\alpha)^k Y_{t-k} + (1-\alpha)^{t-1}\hat{Y}_1$$

Alisado Exponencial simple o de 1er orden

Propiedades

Alisado Exponencial simple o de 1er orden

Propiedades

1. El AES sirve cuando los datos no presentan tendencia, es decir un caso de media constante.

Alisado Exponencial simple o de 1er orden

Propiedades

1. El AES sirve cuando los datos no presentan tendencia, es decir un caso de media constante.
2. Una Predicción de los valores futuros esta dada por el último valor del alisado exponencial, esto es,

$$\hat{Y}_t(h) = \hat{Y}_t \quad \forall h > 0$$

o bien,

$$\hat{Y}_t(h) = \alpha Y_t + (1 - \alpha)\hat{Y}_{t-1}(h + 1)$$

Alisado Exponencial simple o de 1er orden

Propiedades

1. El AES sirve cuando los datos no presentan tendencia, es decir un caso de media constante.
2. Una Predicción de los valores futuros esta dada por el último valor del alisado exponencial, esto es,

$$\hat{Y}_t(h) = \hat{Y}_t \quad \forall h > 0$$

   o bien,

$$\hat{Y}_t(h) = \alpha Y_t + (1-\alpha)\hat{Y}_{t-1}(h+1)$$

3. El valor de α es aquel que minimiza los MSE donde,

$$MSE = \frac{\sum(\hat{Y}_t - Y_t)^2}{n-1}$$

Alisado Exponencial simple o de 1er orden

- **Ejemplo: (Venta de Automoviles)**

Mes	Real	Previstos	Error
E	105		
F	110		
M	107		
A	112		
M	118		

Complete los valores de la tabla usando el método de AES con $\alpha = 0{,}3$ y el método de MMS con $m = 2$.

Alisado Exponencial Lineal Biparametrico de Holt

- Supongamos ahora que en el modelo aditivo la componente estacional no esta presente, entonces el modelo a considerar será:

$$Y_t = N_t + T_t + \epsilon_t$$

donde, ϵ_t es una componente estacionaria de media cero y varianza σ^2.

Alisado Exponencial Lineal Biparametrico de Holt

- Supongamos ahora que en el modelo aditivo la componente estacional no esta presente, entonces el modelo a considerar será:

$$Y_t = N_t + T_t + \epsilon_t$$

  donde, ϵ_t es una componente estacionaria de media cero y varianza σ^2.

- Los valores de nivel y de tendencia de la serie en un instante t, serán estimados por,

$$\begin{aligned} \hat{N}_t &= \alpha Y_t + (1-\alpha)(\hat{N}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \\ \hat{T}_t &= \beta(\hat{N}_t - \hat{N}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1} \end{aligned}$$

  con α y β constantes de alisamiento, donde $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ y $t = 2, \ldots, N$.

Alisado Exponencial Lineal Biparametrico de Holt

- De esta manera, una predicción para el valor Y_{t+h}, con origen en t, es dada por,

$$\hat{Y}_t(h) = \hat{N}_t + h\hat{T}_t \qquad h > 0$$

Alisado Exponencial Lineal Biparametrico de Holt

Ejemplo (Ventas de cierto producto)

Año	Y_t	Año	Y_t	Año	Y_t
1976	174	1982	230	1988	299
1977	154	1983	244	1989	327
1978	175	1984	262	1990	317
1979	221	1985	293	1991	337
1980	200	1986	270	1992	336
1981	234	1987	291		

$\alpha = 0{,}2$ y $\beta = 0{,}8$.

Método de Holt-Winters Multiplicativo

- Considere una serie de tiempo estacional de periodo S. La variante mas usual del método de Holt-Winters considera un factor estacional S_t multiplicativo, mientras la tendencia permanece aditiva, esto es,

$$Y_t = (N_t + T_t)S_t + \epsilon_t$$

Método de Holt-Winters Multiplicativo

- Las tres ecuaciones de suavizado están dadas por

$$\begin{aligned}
\hat{N}_t &= \alpha\left(\frac{Y_t}{\hat{S}_{t-s}}\right) + (1-\alpha)(\hat{N}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \\
\hat{T}_t &= \beta(\hat{N}_t - \hat{N}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1} \\
\hat{S}_t &= \gamma\left(\frac{Y_t}{\hat{N}_t}\right) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-s}
\end{aligned}$$

donde $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$ y $\gamma \in (0,1)$ son constantes de alisamiento y t=s+1,...,N.

Método de Holt-Winters Aditivo

- El procedimiento anterior puede ser modificado para tratar los casos donde el factor estacional es aditivo. Ahora, las ecuaciones de alisamiento están dadas por,

$$
\begin{aligned}
\hat{N}_t &= \alpha(Y_t - \hat{S}_{t-s}) + (1-\alpha)(\hat{N}_{t-1} + \hat{T}_{t-1}) \\
\hat{T}_t &= \beta(\hat{N}_t - \hat{N}_{t-1}) + (1-\beta)\hat{T}_{t-1} \\
\hat{S}_t &= \gamma(Y_t - \hat{N}_t) + (1-\gamma)\hat{S}_{t-s}
\end{aligned}
$$

donde $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$ y $\gamma \in (0,1)$ son constantes de alisamiento y t=s+1,...,N.

Método de Holt-Winters

- Inicialización del método de Holt-Winters $(t = 1, \ldots, s)$

Inicialización	Multiplicativo	Aditivo
Estacionalidad	$S_t = \frac{Y_t}{\overline{Y_{1:s}}}$	$S_t = Y_t - \overline{Y_{1:s}}$
Tendencia	$T_s = 0$	$T_s = 0$
Nivel	$N_s = \overline{Y_{1:s}}$	$N_s = \overline{Y_{1:s}}$

Método de Holt-Winters

- Una predicción a h pasos para el método de Holt-Winters está dada por

Método de Holt-Winters

- Una predicción a h pasos para el método de Holt-Winters está dada por
  1. **Caso Multiplicativo:**

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_n(h) &= (N_n + hT_n)\hat{S}_{n+h-s} \quad h = 1, 2, \ldots, s \\
\hat{Y}_n(h) &= (N_n + hT_n)\hat{S}_{n+h-2s} \quad h = s+1, \ldots, 2s \\
\vdots &= \vdots \\
\hat{Y}_n(h) &= (N_n + hT_n)\hat{S}_{n+h-ks} \quad h = (k-1)s+1, \ldots, ks
\end{aligned}
$$

Método de Holt-Winters

- Una predicción a h pasos para el método de Holt-Winters está dada por

Método de Holt-Winters

- Una predicción a h pasos para el método de Holt-Winters está dada por

  2. **Caso Aditivo:**

$$
\begin{aligned}
\hat{Y}_n(h) &= N_n + hT_n + \hat{S}_{n+h-s} \quad h = 1, 2, \ldots, s \\
\hat{Y}_n(h) &= N_n + hT_n + \hat{S}_{n+h-2s} \quad h = s+1, \ldots, 2s \\
\vdots &= \vdots \\
\hat{Y}_n(h) &= N_n + hT_n + \hat{S}_{n+h-ks} \quad h = (k-1)s+1, \ldots, ks
\end{aligned}
$$

Método de Holt-Winters

- Ejemplo (Ventas Trimestrales)

Datos	T1	T2	T3	T4
Año 1	1248	1392	1057	3159
Año 2	891	1065	1118	2934
Año 3	1138	1456	1224	3090

Usamos $\alpha = 0{,}4$, $\beta = 0{,}1$ y $\gamma = 0{,}3$

Método de Holt-Winters

- Ejemplo (Ventas Trimestrales)

t	N_t	T_t	S_t	$\hat{Y}_t$	ϵ_t
1					
2					
3					
4					
5					
6					
$\vdots$					