Sistemas Lineares

(Aula 2)

Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

1. Método de Gauss

Seja **S: A · X = B**

O **Método de Gauss** consiste em aplicar sobre a matriz **(A ⋮ B)** uma **seqüência de operações elementares** de modo a transformá-la em uma **matriz triangular.**

1.1 Exemplo

Resolva o Sistema abaixo utilizando o **Método de Gauss :**

$$S_1 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

1.1 Exemplo: Resolva o sistema $\mathbf{S_1}$ utilizando o **Método de Gauss**

$$S_1 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

Solução:

$$S_1 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

PIVÔ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_{21(-2)} \\ E_{31(-1)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) E_{32(-7/3)}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\rightarrow S_2 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ \quad -3y - 2z = 2 \\ \quad\quad -1/3z = -2/3 \end{cases}}$$

Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \end{array}$$

$$S_1 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \qquad \boxed{\rightarrow S_2 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ \quad -3y - 2z = 2 \\ \qquad -1/3z = -2/3 \end{cases}}$$

Observação Importante:

Como S_2 foi obtido a partir de S_1 por meio da aplicação de uma seqüência de operações elementares, segue que:

$$S_2 \sim S_1$$

Resolução de S_2:

$$S_2 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 & (1) \\ -3y - 2z = 2 & (2) \\ -1/3z = -2/3 & (3) \end{cases}$$

$$(3)\ -1/3\,z = -2/3 \rightarrow \boxed{z = 2}$$

$$(2)\ -3y - 2z = 2 \rightarrow -3y - 2\cdot(2) = 2$$

$$-3y - 4 = 2$$

$$-3y = 6 \rightarrow \boxed{y = -2}$$

$$(1)\ x + 4y + 3z = 1 \rightarrow x + 4(-2) + 3(2) = 1$$

$$x - 8 + 6 = 1 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

Como S_2 foi obtido a partir de S_1 por meio da aplicação de uma sequência de operações elementares, segue que: $S_2 \sim S_1$

Assim a solução de S_1 é: $\boxed{(x, y, z) = (3, -2, 2)}$

2. Método de Gauss - Jordan

Seja **S: A . X = B**

O **Método de Gauss - Jordan** consiste em aplicar sobre a matriz **(A ⋮ B)** uma **sequência de operações elementares** de modo a transformá-la em uma **matriz identidade.**

2.1 Exemplo

Resolva o sistema abaixo utilizando o **Método de Gauss - Jordan**

$$S_1 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

Solução:

$$S_1 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

Solução:

$$S_1 \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_{21(-2)} \\ E_{31(-1)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) E_{2(-1/3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_{12(-4)} \\ E_{32(7)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right) E_{3(-3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_{13(-1/3)} \\ E_{23(-2/3)} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{I_n}{\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}} & \begin{array}{c} 3 \\ -2 \\ 2 \end{array} \end{array}\right)$$

Método de Gauss - Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow S_2 \begin{cases} x \qquad\qquad = 3 \\ \qquad y \qquad = -2 \\ \qquad\qquad z = 2 \end{cases}$$

Como S_2 foi obtido a partir de S_1 por meio da aplicação de uma sequência de operações elementares, segue que:

$$S_2 \sim S_1$$

Assim a solução de S_1 é:

$$\boxed{(x, y, z) = (3, -2, 2)}$$

2.2 Esforço Computacional

Esforço Computacional

Pode-se mostrar que para Sistemas Quadrados de **porte grande**:

$$n \geq 50$$

O **Esforço Computacional** envolvido no método de **Gauss** é igual a aproximadamente **2/3** do esforço computacional envolvido no método de **Gauss-Jordan** .