Matrizes Reais

(2ª AULA)

7. Multiplicação de Matrizes

Sejam:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times n}(\mathbf{IR}) \ \ \mathbf{e} \ \ \mathbf{B} = (\mathbf{b}_{jk}) \in \mathbf{M}_{n \times p}(\mathbf{IR})$$

Denominamos matriz produto de A por B, nesta ordem, e representamos por A · B , a matriz:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{c}_{ik}) \in \mathbf{M}_{m \times p}(\mathbf{R})$$

Tal que:

$$\mathbf{c}_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{a}_{ij} \cdot \mathbf{b}_{jk}$$

Observação Importante:

Segue da definição, que só é possível multiplicar duas matrizes, quando o número de colunas da primeira matriz (n) é igual ao número de linhas da segunda matriz (n) .

7.1 Exemplo: Considerando as Matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Determine, se possível, A•B e B•A

Solução:

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 + 3.(-1) + 4.3 & 2.0 + 3.2 + 4.(-2) \\ 1.2 + 0.(-1) + (-1).3 & 1.0 + 0.2 + (-1).(-2) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A.B = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}}$$

De forma semelhante, obtemos:

$$B.A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{B.A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & -6 \\ 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}_{3\times 3}}$$

Observação Importante:

Este exemplo nos mostra que a multiplicação de matrizes, de forma geral, NÃO satisfaz a propriedade Comutativa .

Simbolicamente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}_{n \times p} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p}$$

R1

R2

Observação:

Observe que, ao impor que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz, estamos garantindo que o primeiro retângulo (R1) tenha o mesmo número de elementos que o segundo retângulo (R2).

7.4 Propriedades da Multiplicação de Matrizes

P1) $\forall\ A \in M_{m\,x\,n}(IR)\,,\ B \in M_{n\,x\,p}(IR)\,,\ C \in M_{p\,x\,q}(IR):\ \ A.\,(B.C) = (A.B)\,.C$

P2) $\forall\ A \in M_{m\,x\,n}(R)\ \text{ e }\ \forall\ B\,,\ C \in M_{n\,x\,p}(R):\ \ A.\,(B + C) = A.B + A.C$

P3) $\forall\ A\,,\ B \in M_{m\,x\,n}(IR)\ \text{ e }\ \forall\ C \in M_{n\,x\,p}(R):\ \ (A + B)\,.\,C = A.C + B.C$

P4) $\forall\ A \in M_{m\,x\,n}(R):\ \ I_m\,.\,A = A = A\,.\,I_n$

Particularmente, se n = m:

$$I_n\,.\,A = A = A\,.\,I_n$$

Observação Importante:

Tendo em vista que o conjunto dos números reais munido da operação de multiplicação usual satisfaz a propriedade comutativa, observamos que:

Números reais e as Matrizes podem não se comportar da mesma maneira quando se utiliza a operação de multiplicação.

7.2 Exemplo

Classifique a proposição abaixo como verdadeira ou falsa:

$$\text{" Podemos ter } A\,.\,B = 0 \text{ com } A \neq 0 \text{ e } B \neq 0 \text{ "}$$

a) Supondo que sejam A e B são números reais;

Falsa .

b) Supondo que sejam A e B são Matrizes;

Solução: **Considere as Matrizes:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ com } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \left(\therefore A \neq 0 \right)$$

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ com } c \neq 0 \text{ e } d \neq 0 \left(\therefore B \neq 0 \right)$$

Observe que A . B = 0

Portanto,a proposição é Verdadeira

7.3 Exemplo

Classifique a proposição abaixo como verdadeira ou falsa:

$$" \; A^2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; A = 0 \; "$$

a) Supor A um número Real;

Verdadeiro

b) Supor A uma Matriz.

Solução:

Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ com } a \neq 0 \left(\therefore A \neq 0 \right)$$

Observe que $A^2 = A \, . \, A = 0$

Portanto, a proposição é Falsa

8. Matriz Transposta

Seja: $$A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(IR)$$

Denominamos matriz transposta de A, e indicamos por A^t, a matriz:

$$A^t = (\bar{a}_{ji}) \in M_{n \times m}(R)$$

Tal que: $$\bar{a}_{ji} = a_{ij} \,, \forall (i, j) \in N_m \times N_n$$

Observação

Na prática para obter a matriz transposta de uma matriz qualquer, basta permutar suas linhas com suas colunas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad \rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

8.1 Propriedades da Matriz Transposta

$$\forall\ A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ e } \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$$

T1) $\left(A^t\right)^t = A$

T2) $\left(\alpha A\right)^t = \alpha A^t$

T3) $\left(A + B\right)^t = A^t + B^t$

T4) $\left(A . B\right)^t = B^t . A^t$

CUIDADO !

Exercício

Determine a matriz **A**, quadrada de ordem 2, tal que $A \cdot A^t = 0$

Solução :

Seja: $$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Assim sendo:

$$A \cdot A^t = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x.z + y.t \\ x.z + y.t & z^2 + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 & \Rightarrow \quad x = y = 0 \\ x.z + y.t = 0 & \Rightarrow \quad \text{OK} \\ z^2 + t^2 = 0 & \Rightarrow \quad z = t = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2}$$