Sistemas Lineares

(Aula 1)

1. Equação Linear (EL)

Dados **(n + 1)** números reais:

$$a_1 , a_2 , a_3 \dots a_n , b$$

A equação:

$$a_1.x_1 + a_2.x_2 + a_3.x_3 + \dots + a_n.x_n = b \qquad (1)$$

(onde os $x_i \ (1 \leqslant i \leqslant n)$ são variáveis reais)

denomina-se:

Equação Linear no campo Real nas incógnitas x_i

2. Solução de uma Equação Linear

A n-UPLA $(c_1 , c_2 , c_3 , \dots , c_n)$

Se diz **Solução** de **(1),** se**:**

$$a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 , + a_3 \cdot c_3 +, \dots , a_n \cdot c_n = b$$

For verdadeira

3. Sistema de Equações Lineares (SEL)

Um sistema de equações lineares de ordem **m x n** é um conjunto de **m equações lineares,** cada uma delas com **n incógnitas** que devem satisfeitas simultaneamente.

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

4. Solução de um SEL

A n-UPLA

$(c_1, c_2, \ldots, c_n)$

$$S \begin{cases} a_{11} \cdot \boldsymbol{c_1} + a_{12} \cdot \boldsymbol{c_2} + \ldots + a_{1n} \cdot \boldsymbol{c_n} = b_1 \\ a_{21} \cdot \boldsymbol{c_1} + a_{22} \cdot \boldsymbol{c_2} + \ldots + a_{2n} \cdot \boldsymbol{c_n} = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1} \cdot \boldsymbol{c_1} + a_{m2} \cdot \boldsymbol{c_2} + \ldots + a_{mn} \cdot \boldsymbol{c_n} = b_m \end{cases}$$

Se diz **solução** de **(2)** se for solução de cada uma das equações de **(2).**

5. Classificação dos SEL

Seja **S** um Sistema de Equações Lineares :

SPD: Sistema Possível e Determinado

S se diz **(compatível ou possível) determinado** quando possui uma **única solução**

SPI : Sistema Possível e Indeterminado

S se diz **(compatível ou possível) indeterminado** quando possui mais do que uma solução.

Pode-se mostrar que neste caso **S** possui **uma infinidade de soluções.**

SI : Sistema Impossível

S se diz incompatível ou impossível quando não possui solução.

6. Sistema Homogêneo

Se em **S** tivermos:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_m = 0$$

O sistema se diz **Homogêneo**

Observação:

Todo sistema homogêneo admite a **solução trivial:**

$$(0, 0, 0, \ldots, 0)$$

Assim um Sistema Homogêneo jamais será impossível

7. Operações Elementares sobre um SEL

Seja **S** um SEL.
Consideremos as seguintes operações sobre **S** que iremos denominar **elementares:**

E_{ij} : Permutar a i-ésima com a j-ésima equação de **S**

$E_{i(\alpha)}$: **Multiplicar** a í-ésima equação de **S** por α. **(**$\alpha \in$ **IR e** $\alpha \neq$ **0)**

$E_{ij(\alpha)}$: **Multiplicar** a j-ésima equação de **S** por α **(**$\alpha \in$ **IR e** $\alpha \neq$ **0)** e **Somar** com a i-ésima equação.

O resultado desta operação será a **nova i-ésima equação** de **S**

8. Sistemas Equivalentes

Dois sistemas S_1 e S_2 dizem-se equivalentes quando admitem o mesmo conjunto-solução

Notação:

$$S_2 \sim S_1$$

9. Teorema Fundamental

Se um sistema **S_2** foi obtido a partir de um sistema S_1 por meio da aplicação de uma **sequência finita de operações elementares** então :

$$S_2 \sim S_1$$

10. Notação Matricial

Seja **S** um SEL**:**

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Vamos considerar as seguintes **matrizes**:

Matriz dos Coeficientes de S

Matriz Das Constantes de S

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz das Incógnitas de S

Agora, tendo em vista que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \rightarrow S$$

Segue que todo **Sistema Linear** pode ser escrito na forma matricial**:**

$$A \cdot X = B$$

11. Existência e Unicidade da Solução de um SEL

Seja:

$$S : A \cdot X = B$$

Existência da Solução

Se **A** é uma **matriz quadrada** de ordem **n**, **inversível**, podemos escrever:

$$A^{-1}(A.X) = A^{-1}.B$$

$$\underbrace{(A^{-1}.A)}_{I_n}.X = A^{-1}.B$$

$$X = A^{-1}.B$$

Unicidade da Solução

Fica garantida tendo em vista a **unicidade da matriz inversa**