Matrizes Reais

(3ª aula)

9.Matriz Inversível (Invertível ou Não Singular)

9.1 Definição I (Provisória)

Seja: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

A matriz A se diz Inversível se existir uma matriz B tal que:

$$\mathbf{A \cdot B = I = B \cdot A}$$

9.2 Proposição

Se A é uma matriz inversível então A é quadrada

De Fato

$$\mathbf{A \cdot B = I} \Rightarrow \mathbf{B} \in \mathbf{M_{n \times m}(\mathbb{R})} \text{ pois } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathbf{I} \in \mathbf{M_m(\mathbb{R})}$$

$$\mathbf{B \cdot A = I} \Rightarrow \mathbf{B} \in \mathbf{M_{n \times m}(\mathbb{R})} \text{ pois } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathbf{I} \in \mathbf{M_n(\mathbb{R})}$$

COMO: $A.B = B.A \Rightarrow n = m$

9.3 Definição II (Final)

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.

A matriz **A** se diz **inversível** se existir uma matriz **B** quadrada de ordem **n**, tal que:

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

A matriz **B** se denomina Matriz Inversa de **A** e é representada por A^{-1}.

Assim, podemos escrever:

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$

9.4 Exemplo I

Determine a Inversa da matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Solução :

Devemos determinar uma Matriz:

$$B \in M_2(R) \text{ tal que: } A.B = I_2 = B.A$$

Seja: $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x+z & 3y+t \\ 5x+2z & 5y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + z = 1 \\ 3y + t = 0 \\ 5x + 2z = 0 \\ 5y + 2t = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x + z = 1 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } z = -5 \\ \begin{cases} 3y + t = 0 \\ 5y + 2t = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \text{ e } t = 3 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

9.5 Pergunta:

Podemos neste momento garantir que: $B = A^{-1}$?

Resposta:

A rigor: Não!

Tendo obtido a matriz B tal que $A \cdot B = I_2$ devemos agora verificar se: $B \cdot A = I_2$, lembrando que a multiplicação de matrizes não satisfaz a propriedade comutativa.

Entretanto o seguinte resultado:

"Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $A \cdot B = I$ se e somente se $B \cdot A = I$"

Torna desnecessário verificar que $B \cdot A = I$ e podemos afirmar que:

$$B = A^{-1}$$

9.6 Exemplo II

Determine a inversa da matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Solução:

Procedendo de forma semelhante ao que foi feito no Exemplo I, obtemos os sistemas:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists x, z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \nexists B \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \text{ tal que } A.B = I_2$$

$$\begin{cases} y + 2t = 0 \\ 2y + 4t = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists y, t \in \mathbb{R}$$

Neste caso a matriz A se diz não inversível (não invertível ou singular).

Muito embora toda matriz <u>inversível</u> seja <u>quadrada</u>, a recíproca não é verdadeira, ou seja, nem toda matriz <u>quadrada</u> é <u>inversível .</u>

9.7 Observações Importantes

► **Se A é uma matriz <u>inversível</u> então A^{-1} é <u>única</u> .**

► **A é uma matriz <u>inversível</u> se e somente se o <u>determinante</u> de A é diferente de zero .**

► **O processo apresentado para a obtenção da <u>inversa</u> de uma matriz, <u>não</u> é conveniente sob o ponto de vista computacional, pois para inverter uma matriz quadrada de ordem n, é preciso resolver n sistemas lineares, cada um deles com n equações a n incógnitas.**

9.8 Propriedades

Se A e B são matrizes <u>inversíveis</u>:

I1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

I2) $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

CUIDADO !