Matrizes Reais

(1ª Aula)

1. Matriz Real de Ordem (dimensão) m x n

Definição:

Consideremos os conjuntos:

$$N_m = \{1, 2, 3, ..., n\} \quad e \quad N_n = \{1, 2, 3, ..., m\}$$

denominamos **matriz real de ordem** **m x n** a toda aplicação do tipo**:**

$$\begin{array}{ccc} N_m \times N_n & \rightarrow & R \\ (i, j) & \rightarrow & a_{ij} \end{array}$$

1.1 Notação

As matrizes serão representadas por letras **MAIÚSCULAS** e apresentadas na forma de tabelas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.2 Notação Simplificada

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

ou simplesmente:

$$A = (a_{ij})$$

quando não houver dúvida sobre a variação dos índices

1.3 Nota

O conjunto das Matrizes reais de ordem $m \times n$ será representado por:

$$M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

2. Classificação das Matrizes quanto a Ordem

$$\text{Seja} \quad A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

2.1 Matriz Quadrada

Se m = n a matriz A se diz matriz quadrada de ordem n.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal Principal

2.2 Nota

O conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n será representado por:

$$M_n(\mathbb{R})$$

2.3 Matriz Linha

Se $m = 1$ a matriz A se denomina matriz linha de ordem m

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \end{pmatrix}$$

2.4 Matriz Coluna

Se $n = 1$ a matriz A se denomina matriz coluna de ordem n

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

3. Classificação das Matrizes quanto aos Elementos

$$\text{Seja } A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

3.1 Matriz Nula

Se: $a_{ij} = 0, \ \forall \ (i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$

A matriz A se denomina matriz nula de ordem m x n

Notação

$$O_{m \times n}$$

ou simplesmente

$$O$$

se não houver dúvida quanto a variação dos índices

Exemplo

$$0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Matriz Identidade

Se:

$$m = n \qquad e \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}$$

A matriz **A** se denomina **matriz identidade de ordem n**

Notação :

$$I_n$$

ou simplesmente

$$I$$

se não houver dúvida quanto a variação dos índices

Exemplo

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 Matriz Triangular Superior

Se: $\quad m = n \quad e \quad a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$

A Matriz A se denomina Matriz Triangular Superior

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

3.4 Matriz Triangular Inferior

De forma semelhante, se:

$$m = n \quad e \quad a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$$

A Matriz A se denomina Matriz Triangular Inferior

3.5 Matriz Simétrica

Se: $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\ (i, j) \in N_m \times N_n$

A Matriz **A** se denomina **Matriz Simétrica**

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha & \beta \\ \alpha & a_{22} & \delta \\ \beta & \delta & a_{33} \end{pmatrix}$$

3.5 Matriz Anti-simétrica

Se: $m = n$ e $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall\ (i, j) \in N_m \times N_n$

A Matriz **A** se denomina **Matriz Anti-simétrica**

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & -\delta \\ -\beta & \delta & 0 \end{pmatrix}$$

4. Igualdade de Matrizes

Sejam

$$\mathbf{A} \; , \; \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m \times n}(\; \mathrm{IR} \;) \;\; : \;\; \mathbf{A} = (a_{ij}) \;\; \mathrm{e} \;\; \mathbf{B} = (b_{ij})$$

As Matrizes A e B dizem-se iguais se e somente se:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall \; (i\;,\;j) \in \mathbf{N}_m \; \mathrm{x} \; \mathbf{N}_n$$

5. Adição de Matrizes

Sejam

$$\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m\,x\,n}\ (\ \mathrm{IR}\ )\ \ :\ \ \mathbf{A} = (\mathbf{a}_{i\,j})\ \ \mathbf{e}\ \ \mathbf{B} = (\mathbf{b}_{i\,j})$$

Denominamos matriz Soma da matriz A com a matriz B, e indicamos por A + B, a matriz:

$$\mathbf{C} = (\ \mathbf{c}_{\ i\,j}) \in \mathbf{M}_{\ m\,x\,n}\ (\mathbb{R})$$

Tal que:

$$\mathbf{c}_{i\,j} = \mathbf{a}_{i\,j} + \mathbf{b}_{i\,j}\quad \forall\ \ (\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{j}) \in \mathbf{N}_m\ \ \mathbf{x}\ \mathbf{N}_n$$

5.1 Propriedades da Adição de Matrizes

$$\forall\ A, B, C \in M_{m \times n}(IR)$$

A1) Comutativa : $A + B = B + A$

A2) Associativa : $A + (B + C) = (A + B) + C$

A3) Elemento Neutro (Matriz Nula) : $A + O_{m \times n} = A$

A4) Elemento Oposto

$$\forall\ A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(IR),\ \exists\ (-A) = (-a_{ij}) \in M_{m \times n}(IR):$$

$$A + (-A) = O_{m \times n}$$

Observação:

A matriz (- A) é denominada Matriz Oposta a matriz A

5.4 Exemplo

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

5.3 Subtração De Matrizes

A existência do elemento oposto permite definir a operação de Subtração de Matrizes como sendo um caso particular da adição de matrizes, ou seja:

$$\mathbf{A - B = A + (-B)}$$

6. Multiplicação de uma Matriz por um Número Real

Sejam: $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Denominamos matriz produto de **α** por **A** e indicamos por **α.A**, a matriz:

$$\mathbf{B = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})}$$

Tal que:

$$\mathbf{b_{ij} = \alpha \, . \, a_{ij}}, \ \forall (i, j) \in N_m \times N_n$$

6.1 Exemplo

$$\alpha . A = \alpha . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.a_{11} & \alpha.a_{12} \\ \alpha.a_{21} & \alpha.a_{22} \\ \alpha.a_{31} & \alpha.a_{32} \end{pmatrix}$$

6.2 Propriedades da Multiplicação por um Número Real

$$\forall\ A\ ,B \in M_{m\,x\,n}(IR)\ \text{ e }\ \forall\ \alpha\ ,\beta \in R$$

M1) $\alpha.(\beta.A) = (\alpha.\beta).A$

M2) $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$

M3) $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$

M4) $1.A = A$

6.3 Observação

O Conjunto Das Matrizes Reais de Ordem m x n munido das operações de Adição e Multiplicação por um Nº Real formam uma estrutura Algébrica denominada Espaço Vetorial .

7. Exercício

Dadas as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Determine as matrizes X e Y tais que: $\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + 3Y = B \end{cases}$

Solução :

$$\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + 3Y = B \ (-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2X - Y = A \\ -2X - 6Y = -2B \end{cases}$$

$$-7Y = A - 2B \Rightarrow Y = -\frac{1}{7}(A - 2B)$$

Substituindo o valor de Y na Primeira Equação resulta:

$$2X - \left(-\frac{1}{7}.(A - 2B)\right) = A \Rightarrow X = \frac{1}{7}(3A + B)$$

$$X = \frac{1}{7}.\left(3A + B\right)$$

$$X = \frac{1}{7}\left(3.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$X = \frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 9 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{10}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

$$Y = -\frac{1}{7}.\left(A - 2B\right)$$

$$Y = -\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$Y = -\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 12 & 8 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

$$Y = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -11 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$