Sistemas Lineares

(Aula 3)

Determinante

Determinante

Definição: Matriz **quadrada**

Matriz **quadrada** é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo **n** x **n**).

Definição: Determinante

A **toda matriz quadrada** está associado **um número** ao qual damos o nome de **determinante.**

Observação:

Dentre as várias aplicações dos **determinantes** na Matemática, temos**:** resolução de alguns tipos de **Sistemas de Equações Lineares.**

Cálculo do Determinante

Calcule o **determinante** das matrizes abaixo:

a) n=1 **A=[4]** **D_A= 4**

b) n=2 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ **D_B= (2 · 6) – (1 · 10)** **D_B= 2**

c) n=3 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Regra de Sarrus:

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$

D_C= (2 · 2 · 0 + 3 · 2 · 1 + 0 · 4 · 3) – (0 · 2 · 1 + 2 · 2 · 3 + 3 · 4 · 0)

Dc= (6) – (12)

Dc= – 6

Cálculo do Determinante

Calcule o **determinante** das matrizes abaixo:

d) n=4 $\quad$ **E**= $\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 0 \quad 3} \\ 2 \quad 1 \quad 4 \quad 0 \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 5 \\ 0 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \end{bmatrix}$

Método de Laplace

$$\boldsymbol{D_E = (-1)^2 \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +}$$

$$\boldsymbol{+ (-1)^4 \cdot (0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{D_E = 28 + 40 + 0 - 63}$$

$$\boxed{\boldsymbol{D_E = 5}}$$

Esforço Computacional: Método de Laplace

O esforço computacional ,envolvido no **Método de Laplace** no cálculo do **determinantes,** é muito grande.

Exemplificando:

Cálculo do Determinante	Exige que calculemos o Determinante de:	Portanto:
Matriz de Ordem 4	4 Matrizes De Ordem 3	4 Matrizes De Ordem 3
Matriz de Ordem 5	5 Matrizes De Ordem 4	20 Matrizes De Ordem 3
Matriz de Ordem 6	6 Matrizes De Ordem 5	120 Matrizes De Ordem 3
Matriz de Ordem 7	7 Matrizes De Ordem 6	720 Matrizes De Ordem 3

Esforço Computacional: Método de Laplace

Sendo M_n **e** A_n respectivamente o número de **multiplicações** e **adições** necessárias para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada **de** ordem **n** pelo **Método de Laplace**, temos **:**

$$M_1 = 0 \quad e \quad M_n = n + n \cdot M_{n-1}$$

$$A_1 = 0 \quad e \quad A_n = n - 1 + n \cdot A_{n-1}$$

e o número **Total de Operações** é dado por :

$$\Delta_n = M_n + A_n$$

Para calcular **Manualmente** o determinante de uma matriz supondo que o tempo médio para cada operação seja de **5 segundos** temos:

n = 6 : $\Delta_6 = 1955 \rightarrow T \cong 3$ **horas**

n = 8 : $\Delta_8 = 109.599 \rightarrow T \cong 152$ **horas (6 dias)**

n = 10 : $\Delta_{10} = 9.234.099 \rightarrow T \cong 534$ **dias**

Vamos agora calcular o **esforço computacional** envolvido no cálculo do **Determinante** pelo **Método de Laplace** de uma matriz quadrada de ordem **$n = 20$** com o auxílio de um **Computador** :

► **1984:** Utilizando um computador **IBM370** (Modelo 158)

O **Tempo** para realizar uma:

Adição é de : **$0{,}9 \, . \, 10^{-6}$ s**

Multiplicação é de : **$1{,}9 \, . \, 10^{-6}$ s**

Considerando um **Tempo Médio** por operação de: **$1{,}4 \, . \, 10^{-6}$ s**

$$n = 20 : \quad \Delta_{20} = 6{,}191 \cdot 10^{18} \quad \rightarrow \quad T \cong 275.000 \text{ anos}$$

► **2007:** A **INTEL** vence a barreira dos 2 TeraFlops

(2 trilhões de operações de ponto flutuante por segundo)

$$n = 20 : \quad \Delta_{20} = 6{,}191 \cdot 10^{18} \quad \rightarrow \quad T \cong 36 \text{ dias}$$

► **2008:** O **ROADRUNNER** encabeça a lista **TOP500 (12,8 GigaFlops)**

(Um cluster com 122.400 processadores trabalhando com 3200 Mhz)

$$n = 20 : \quad \Delta_{20} = 6{,}191 \cdot 10^{18} \quad \rightarrow \quad T \cong 1 \text{ hora (66 minutos)}$$

Solução

de

Sistemas Lineares

Resolução de Sistemas: Regra de Cramer

Resolva o sistema abaixo, utilizando a Regra de Cramer:

$$S_1: \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 4 & 3 \\ \mathbf{4} & 5 & 4 \\ \mathbf{5} & -3 & -2 \end{vmatrix} \quad x = \frac{D_x}{D} \quad x = \frac{3}{1} \quad \boldsymbol{x = 3}$$

D = 1

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 3 \\ 2 & \mathbf{4} & 4 \\ 1 & \mathbf{5} & -2 \end{vmatrix} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad y = \frac{-2}{1} \quad \boldsymbol{y = -2}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \mathbf{1} \\ 2 & 5 & \mathbf{4} \\ 1 & -3 & \mathbf{5} \end{vmatrix} \quad z = \frac{D_z}{D} \quad z = \frac{2}{1} \quad \mathbf{z = 2}$$

O número de operações envolvidas na **Resolução de um Sistema Linear** quadrado de ordem n, pela **Regra de Cramer** (que utiliza matrizes) é dado por:

$$S_n = (n+1).\Delta_n + n$$

Assim, para um sistema de ordem 20, temos:

$$n = 20 \rightarrow S_n = 1,3.10^{20}$$

Em **1984** um **IBM370** **(Modelo 158)** demoraria **15 milhões de anos** para calcular este sistema.

Já o número de **operações** envolvidas na **Resolução de um Sistema Linear** quadrado de ordem n, pela **Método de Gauss** é dado por:

$$G_n = \frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$$

Assim, para um sistema de ordem 20, temos:

$$n = 20 \rightarrow G_n = 5.910$$

Em **1984** um **IBM370** (Modelo 158) demoraria **0,02 segundos** para calcular este sistema.

Inversão de Matrizes

Inversão de Matrizes

Exemplo **Determine a Inversa da matriz:** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Solução : **Devemos determinar uma Matriz:**

$B \in M_2(R)$ tal que: $A \cdot B = I_2 = B \cdot A$

Seja:

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad A \cdot B = I_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3x + z & 3y + t \\ 5x + 2z & 5y + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x + z = 1 \\ 3y + t = 0 \\ 5x + 2z = 0 \\ 5y + 2t = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } z = -5$$

$$\begin{cases} 3y + t = 0 \\ 5y + 2t = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \text{ e } t = 3$$

$$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Inversão de Matrizes por Gauss - Jordan

O processo apresentado anteriormente para **inverter** uma matriz quadrada de ordem n, **não** é viável sob o ponto de **vista computacional**, tendo em conta que seria necessário resolver :

n sistemas lineares cada um deles com n equações a n incógnitas.

Assim sendo, vamos apresentar um outro método que reduz sensivelmente o esforço computacional envolvido.

O Método

Consideremos a Matriz: $\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$

Se a matriz $\mathbf{A}$ é **inversível** então existe uma matriz:

$$\mathbf{X} = \left(x_{ij}\right) \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$$

Tal que: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I}_n = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$

A matriz $\mathbf{X}$ se denomina **Matriz Inversa** de $\mathbf{A}$ e é representada por **:** $\mathbf{A}^{-1}$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{nn} \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}}_{I_n}
$$

Notemos agora que ao multiplicar a matriz **A** pela **j-ésima** $(1 \leqslant j \leqslant n)$ **coluna** da matriz **X** obtemos a **j-ésima** coluna da matriz I_n, ou seja:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{ij} \\ x_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow S_j = \begin{cases} a_{11}x_{1j} + \ldots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{j1}x_{1j} + \ldots + a_{jn}x_{nj} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_{ij} + \ldots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases}
$$

Assim para determinar os elementos da j-ésima coluna da matriz A devemos resolver o sistema S_j , ou seja devemos resolver um sistema com n equações a n incógnitas.

Gauss-Jordan : $\left(A \;\vdots\; I_{cj}\right) \rightarrow \left(I_n \;\vdots\; X_{cj}\right)$

Coluna j de I $_n$ — **Operações elementares** — **Coluna j de X**

Ora, como: $1 \leqslant j \leqslant n$

Concluímos que para obter **todos os elementos** da matriz X devemos resolver n sistemas cada um deles com n equações a n incógnitas.

Porém, como todos estes sistemas possuem a mesma matriz de coeficientes (matriz A), podemos utilizar o artifício:

Gauss-Jordan : $\left(A \;\vdots\; I_{cj}\right) \rightarrow \left(I_n \;\vdots\; X_{cj}\right)$

Matriz I $_n$ — **Operações elementares** — **Matriz A $^{-1}$**

Exemplo

Determine se possível a **inversa** da matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Solução:

Inicialmente construímos a matriz: $(A \vdots I_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A idéia agora é aplicar sobre esta matriz uma **Sequência de Operações Elementares** com o objetivo de transformar a Matriz **A** em uma matriz **Identidade** de ordem 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{1 \quad -3 \quad -2}_{A} & & & \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{I_3} & & \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Elementares}]{\text{Operações}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{I_3} & & & \underbrace{-11 \quad 7 \quad -3}_{A^{-1}} & & \end{array}\right)$$

Recomendação:

Convém agora **verificar** que de fato $A \cdot A^{-1} = I_3$ a fim de **evitar** erros de cálculo.

Cálculo do Determinante pelo Método de Gauss

Cálculo de Determinantes por Gauss

O processo se baseia em **dois Teoremas:**

Teorema I :

Determinante de uma matriz quadrada:

► **Troca de sinal** quando aplicado sobre a matriz uma operação do tipo $\mathbf{E}_{i\,j}$

► **Resulta multiplicado por α** quando se aplica sobre a matriz uma operação do tipo $\mathbf{E}_{i\,(\alpha)}$

► **Não se altera** quando se aplica sobre a matriz uma operação do tipo $\mathbf{E}_{i\,j\,(\alpha)}$

Teorema II :

O **determinante** de uma **matriz triangular** é igual ao produto dos elementos da diagonal principal

Exemplo:

Calcule o **Determinante** da matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Roteiro da solução :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Elementares}]{\text{Operações}} \begin{pmatrix} K_1 & * & * & * \\ 0 & K_2 & * & * \\ 0 & 0 & K_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & K_4 \end{pmatrix}$$

Assim o **Determinante** da matriz **A** é dado por: $D_A = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4$

Cuidado:

Não se esqueça de:

► **Trocar o sinal do produto** $K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4$ toda vez que for utilizada uma operação do **tipo** E_{ij}

► **Dividir o produto** $K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4$ por α toda vez que for utilizada uma operação do **tipo** $E_{i(\alpha)}$

Resposta: $D_A = -18$

Resumo:

Para o cálculo do **Determinante** de uma matriz utilizar :

Método de Gauss

Resolução de Sistemas Lineares utilizar :

Método de Gauss

Para determinar a **Inversa** de uma matriz utilizar:

Método de Gauss - Jordan