

Sistemas Lineares

(Aula 3)

Determinante

Determinante

Definição: Matriz **quadrada**

Matriz **quadrada** é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo $n \times n$).

Definição: Determinante

A **toda matriz quadrada** está associado **um número** ao qual damos o nome de **determinante**.

Observação:

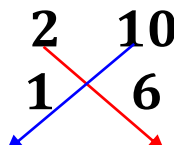
Dentre as várias aplicações dos **determinantes** na Matemática, temos: resolução de alguns tipos de **Sistemas de Equações Lineares**.

Cálculo do Determinante

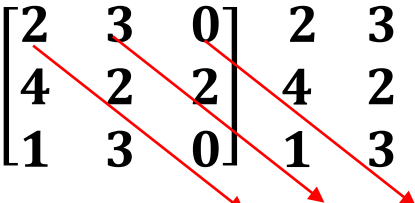
Calcule o **determinante** das matrizes abaixo:

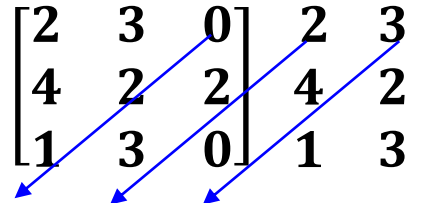
a) $n=1$ $A = [4]$ $D_A = 4$

b) $n=2$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ $D_B = (2 \cdot 6) - (1 \cdot 10)$ $D_B = 2$



c) $n=3$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ Regra de Sarrus:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$


$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$


$$D_C = (2 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 3) - (0 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 0)$$

$$D_C = (6) - (12)$$

$$D_C = -6$$

Cálculo do Determinante

Calcule o **determinante** das matrizes abaixo:

$$\text{d) } n=4 \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de Laplace

$$D_E = (-1)^2 \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^4 \cdot (0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_E = 28 + 40 + 0 - 63$$

$$D_E = 5$$

Esforço Computacional: Método de Laplace

O esforço computacional ,envolvido no **Método de Laplace** no cálculo do **determinantes**, é muito grande.

Exemplificando:

Cálculo do Determinante	Exige que calculemos o Determinante de:	Portanto:
Matriz de Ordem 4	4 Matrizes De Ordem 3	4 Matrizes De Ordem 3
Matriz de Ordem 5	5 Matrizes De Ordem 4	20 Matrizes De Ordem 3
Matriz de Ordem 6	6 Matrizes De Ordem 5	120 Matrizes De Ordem 3
Matriz de Ordem 7	7 Matrizes De Ordem 6	720 Matrizes De Ordem 3

Esforço Computacional: Método de Laplace

Sendo M_n e A_n respectivamente o número de **multiplicações** e **adições** necessárias para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem n pelo **Método de Laplace**, temos :

$$M_1 = 0 \quad \text{e} \quad M_n = n + n \cdot M_{n-1}$$

$$A_1 = 0 \quad \text{e} \quad A_n = n - 1 + n \cdot A_{n-1}$$

e o número **Total de Operações** é dado por :

$$\Delta_n = M_n + A_n$$

Para calcular **Manualmente** o determinante de uma matriz supondo que o tempo médio para cada operação seja de **5 segundos** temos:

$$n = 6 : \Delta_6 = 1955 \rightarrow T \cong 3 \text{ horas}$$

$$n = 8 : \Delta_8 = 109.599 \rightarrow T \cong 152 \text{ horas (6 dias)}$$

$$n = 10 : \Delta_{10} = 9.234.099 \rightarrow T \cong 534 \text{ dias}$$

Vamos agora calcular o **esforço computacional** envolvido no cálculo do **Determinante** pelo **Método de Laplace** de uma matriz quadrada de ordem **$n = 20$** com o auxílio de um **Computador** :

► **1984:** Utilizando um computador **IBM370** (Modelo 158)

O **Tempo** para realizar uma:

Adição é de : **$0,9 \cdot 10^{-6} \text{ s}$**

Multiplicação é de : **$1,9 \cdot 10^{-6} \text{ s}$**

Considerando um **Tempo Médio** por operação de: **$1,4 \cdot 10^{-6} \text{ s}$**

$n = 20$: $\Delta_{20} = 6,191 \cdot 10^{18} \rightarrow T \cong 275.000 \text{ anos}$

► **2007:** A **INTEL** vence a barreira dos 2 TeraFlops

(2 trilhões de operações de ponto flutuante por segundo)

$n = 20$: $\Delta_{20} = 6,191 \cdot 10^{18} \rightarrow T \cong 36 \text{ dias}$

► **2008:** O **ROADRUNNER** encabeça a lista **TOP500** (**12,8 GigaFlops**)

(Um cluster com 122.400 processadores trabalhando com 3200 Mhz)

$n = 20$: $\Delta_{20} = 6,191 \cdot 10^{18} \rightarrow T \cong 1 \text{ hora (66 minutos)}$

Solução de Sistemas Lineares

Resolução de Sistemas: Regra de Cramer

Resolva o sistema abaixo, utilizando a Regra de Cramer:

$$S_1: \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} \quad x = \frac{D_x}{D} \quad x = \frac{3}{1} \quad \mathbf{x = 3}$$

$$\mathbf{D = 1}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad y = \frac{-2}{1} \quad \mathbf{y = -2}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} \quad z = \frac{D_z}{D} \quad z = \frac{2}{1} \quad \mathbf{z = 2}$$

O número de **operações** envolvidas na **Resolução de um Sistema Linear** quadrado de ordem n , pela **Regra de Cramer** (que utiliza matrizes) é dado por:

$$S_n = (n+1) \cdot \Delta_n + n$$

Assim, para um sistema de ordem 20, temos:

$$n = 20 \rightarrow S_n = 1,3 \cdot 10^{20}$$

Em **1984** um **IBM370 (Modelo 158)** demoraria **15 milhões de anos** para calcular este sistema.

Já o número de **operações** envolvidas na **Resolução de um Sistema Linear** quadrado de ordem n , pela **Método de Gauss** é dado por:

$$G_n = \frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$$

Assim, para um sistema de ordem 20, temos:

$$n = 20 \rightarrow G_n = 5.910$$

Em **1984** um **IBM370 (Modelo 158)** demoraria **0,02 segundos** para calcular este sistema.

Inversão de Matrizes

Inversão de Matrizes

Exemplo Determine a Inversa da matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Solução : Devemos determinar uma Matriz:

$$B \in M_2(R) \text{ tal que : } A \cdot B = I_2 = B \cdot A$$

Seja:

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad A \cdot B = I_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3x + z & 3y + t \\ 5x + 2z & 5y + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x + z = 1 \\ 3y + t = 0 \\ 5x + 2z = 0 \\ 5y + 2t = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ 5x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ e } z = -5$$

$$\begin{cases} 3y + t = 0 \\ 5y + 2t = 1 \end{cases} \Rightarrow y = -1 \text{ e } t = 3$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Inversão de Matrizes por Gauss - Jordan

O processo apresentado anteriormente para **inverter** uma matriz quadrada de ordem n , **não** é viável sob o ponto de **vista computacional**, tendo em conta que seria necessário resolver :

n sistemas lineares cada um deles com n equações a n incógnitas.

Assim sendo, vamos apresentar um outro método que **reduz** sensivelmente o **esforço computacional** envolvido.

O Método

Consideremos a Matriz: $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$

Se a matriz A é **inversível** então existe uma matriz:

$$X = (x_{ij}) \in M_n(R)$$

$$\text{Tal que: } A \cdot X = I_n = X \cdot A$$

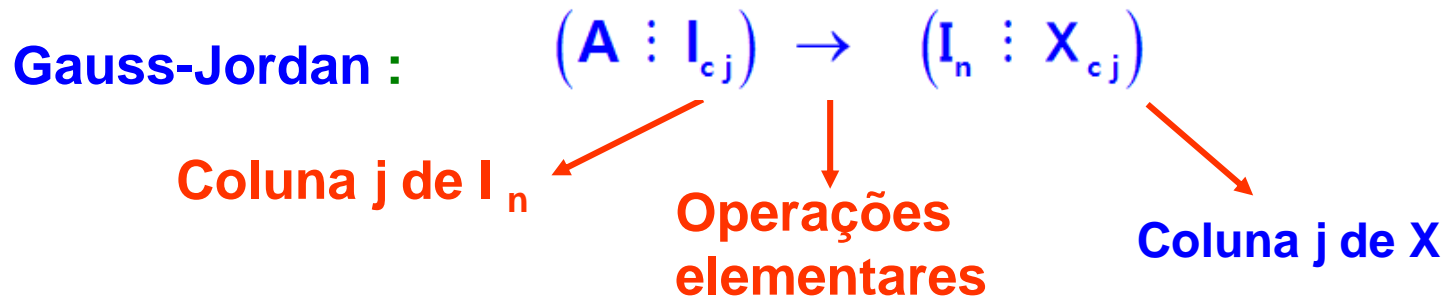
A matriz X se denomina **Matriz Inversa** de A e é representada por : A^{-1}

A

coluna

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & . & . & . & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & . & . & . & \mathbf{a}_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & . & . & . & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{x}_{2j} \\ . \\ . \\ \mathbf{x}_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ . \\ \mathbf{1} \\ . \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow S_j = \left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_{1j} + ... + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_{nj} = 0 \\ \\ \mathbf{a}_{j1}\mathbf{x}_{1j} + ... + \mathbf{a}_{jn}\mathbf{x}_{nj} = 0 \\ \\ \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_{ij} + ... + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_{nj} = 0 \end{array}\right.$$

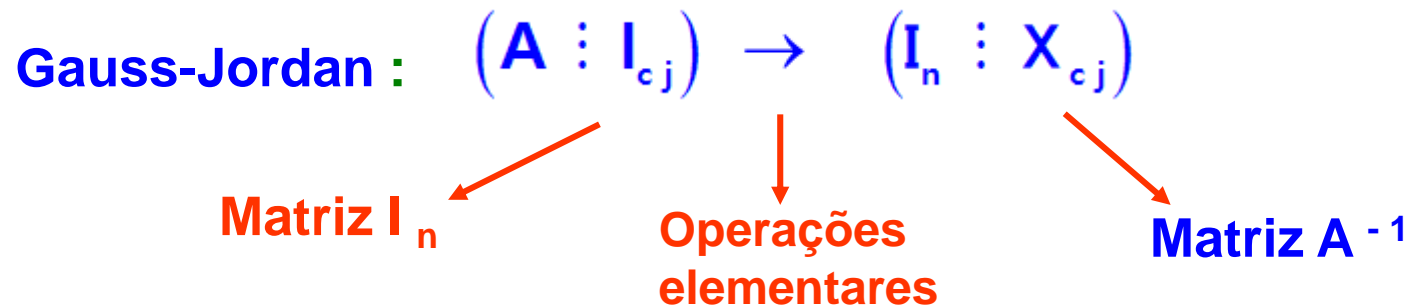
Assim para determinar os elementos da j -ésima coluna da matriz A devemos resolver o sistema S_j , ou seja devemos resolver um sistema com n equações a n incógnitas.



Ora, como: $1 \leq j \leq n$

Concluimos que para obter **todos os elementos** da matriz X devemos resolver n sistemas cada um deles com n equações a n incógnitas.

Porém, como todos estes sistemas possuem a mesma matriz de coeficientes (matriz A), podemos utilizar o artifício:



Exemplo

Determine se possível a **inversa** da matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Solução:

Inicialmente construímos a matriz: $(A : I_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

A idéia agora é aplicar sobre esta matriz uma **Sequência de Operações Elementares** com o objetivo de transformar a Matriz **A** em uma matriz **Identidade** de ordem 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\underline{\hspace{2cm}}$ $\underline{\hspace{2cm}}$
A **I₃**

Operações
→
Elementares

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array} \right)$$

$\underline{\hspace{2cm}}$ $\underline{\hspace{2cm}}$
I₃ **A⁻¹**

Recomendação:

Convém agora **verificar** que de fato $A \cdot A^{-1} = I_3$ a fim de **evitar** erros de cálculo.

Cálculo do Determinante pelo Método de Gauss

Cálculo de Determinantes por Gauss

O processo se baseia em **dois Teoremas**:

Teorema I :

Determinante de uma matriz quadrada:

- ▶ **Troca de sinal** quando aplicado sobre a matriz uma operação do tipo E_{ij}
- ▶ **Resulta multiplicado por α** quando se aplica sobre a matriz uma operação do tipo $E_{i(\alpha)}$
- ▶ **Não se altera** quando se aplica sobre a matriz uma operação do tipo $E_{ij(\alpha)}$

Teorema II :

O **determinante** de uma **matriz triangular** é igual ao produto dos elementos da diagonal principal

Exemplo:

Calcule o **Determinante** da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Roteiro da solução :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operações



Elementares

$$\begin{pmatrix} K_1 & * & * & * \\ 0 & K_2 & * & * \\ 0 & 0 & K_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & K_4 \end{pmatrix}$$

Assim o **Determinante** da matriz **A** é dado por: $D_A = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4$

Cuidado:

Não se esqueça de:

- ▶ Trocar o sinal do produto $K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4$ toda vez que for utilizada uma operação do tipo E_{ij}
- ▶ Dividir o produto $K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4$ por α toda vez que for utilizada uma operação do tipo $E_{i(\alpha)}$

Resposta: $D_A = -18$

Resumo:

Para o cálculo do **Determinante** de uma matriz utilizar :

Método de Gauss

Resolução de Sistemas Lineares utilizar :

Método de Gauss

Para determinar a **Inversa** de uma matriz utilizar:

Método de Gauss - Jordan