SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DE TEORIA DO CONSUMIDOR

Microeconomia – Graduação

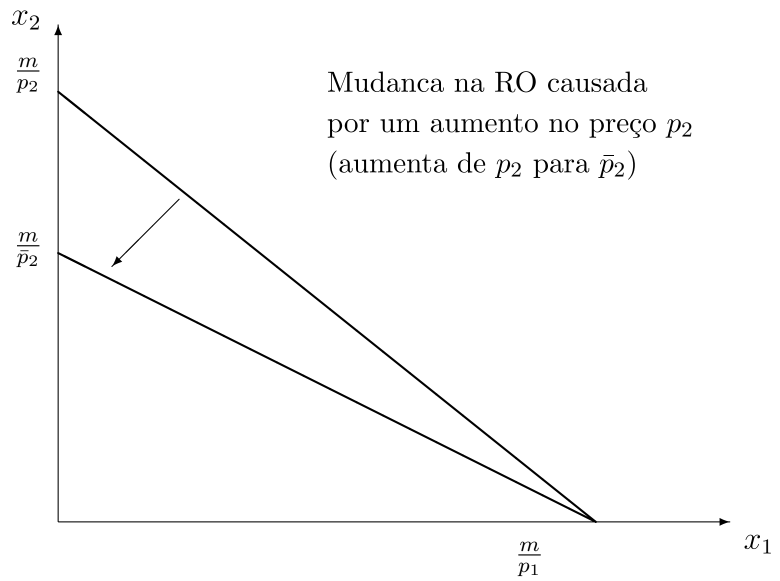
Departamento de Economia – Universidade de Brasília

Prof. José Guilherme de Lara Resende

NOTA DE AULA 2 – RESTRIÇÃO ORÇAMENTÁRIA

2.1) Assuma que existam apenas dois bens e suponha que o preço do bem 2 aumentou. Represente graficamente essa mudança. Se sabemos que o consumidor exaure toda a sua renda e prefere consumir mais a menos, esse aumento do preço do bem 2 irá afetar o seu bem-estar de que forma? Isso ocorrerá sempre?

S: A figura é representada abaixo.



O aumento no preço do bem 2 piora o bem-estar do indivíduo caso ele consuma esse bem 2. Se ele não consome o bem 2, então o aumento do seu preço não terá consequência no seu bem-estar. Ou seja, dado o aumento do preço de um bem, ou o bem-estar do consumidor diminui (caso ele consuma esse bem) ou permanece o mesmo (caso não consuma o bem), sendo que o bem-estar do consumidor nunca aumentará com o aumento do preço de um bem.

2.2) Suponha que os preços de todos os bens aumentem na mesma proporção. Isso é equivalente a uma mudança na renda? Explique.

S: Sim. Se todos os preços se alteram na proporção $t > 0$ (no caso de um aumento de preços, $t > 1$), então a nova restrição orçamentária é:

$$(tp_1)x_1 + (tp_2)x_2 + \cdots + (tp_n)x_n \leq m\,,$$

que é equivalente a seguinte equação:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq \frac{m}{t}\,,$$

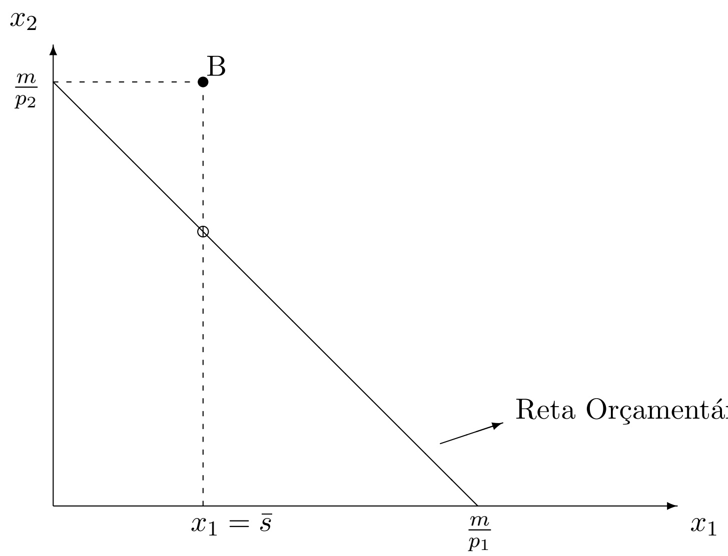
ou seja, a uma mudança na renda na proporção $1/t$. Logo, se t for maior do que 1, temos que esse aumento dos preços dos bem é equivalente a uma diminuição da renda e se t for menor do que 1, temos que ocorre uma queda nos preços, o que equivale a um aumento da renda

2.3) Suponha que o bem 1 teve o seu preço quadruplicado e o bem 2 teve o seu preço duplicado. O que ocorre com a inclinação da reta orçamentária? Faz sentido dizermos que o bem 1 se tornou *relativamente* mais barato do que o bem 2?

S: A inclinação da reta orçamentária, que antes era $-p_1/p_2$, se tornou $-4p_1/2p_2 = -2p_1/p_2$, ou seja, a inclinação da reta orçamentária dobrou. Isso significa que o bem 1 passou a custar o dobro em termos do bem 2, ou seja, faz sentido dizer que o bem 1 se tornou relativamente mais caro do que o bem 2, e não relativamente mais barato.

2.4) Suponha que o indivíduo consome apenas dois bens, em que o bem 1 é saúde, medido em termos qualidade (ou seja, quanto mais afastado da origem no eixo horizontal, melhor o serviço de saúde adquirido). O governo resolve prover gratuitamente o nível de saúde $x_1 = \bar{s}$ (e apenas esse nível é provido de modo gratuito). Represente a reta orçamentária neste caso.

S: A reta orçamentária apresentará uma quebra no nível de saúde $x_1 = \bar{s}$, já que o consumidor não precisará pagar nada se quiser consumir esse nível, e poderá gastar toda a sua renda com os outros bens (logo, a cesta B é uma cesta factível, junto com todas cetas que possuem o mesmo nível $x_1 = \bar{s}$ e $x_2 \leq m/p_2$).



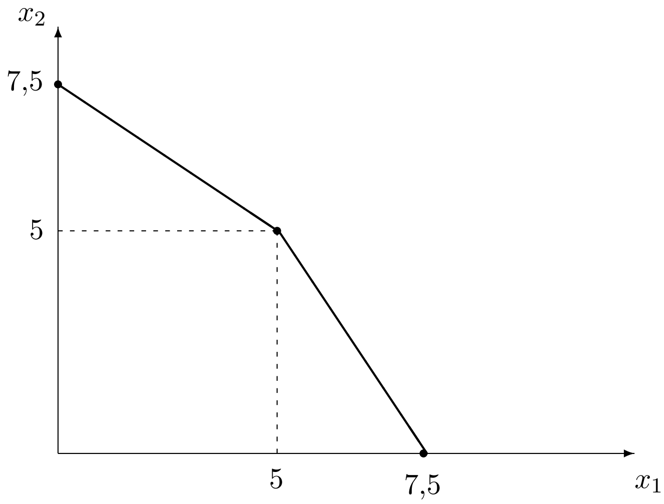
2.5) Ilustre graficamente a restrição orçamentária para o caso de três bens. O que ocorre com essa restrição se a renda aumentar? E se o preço de um bem aumentar?

S: Nesse caso, a restrição é dada por um hiperplano em um gráfico tridimensional. Um aumento de renda leva a um deslocamento paralelo desse hiperplano "para fora", enquanto uma queda na renda leva a um deslocamento paralelo desse hiperplano "para dentro". Já uma mudança de preços implica um giro no hiperplano.

2.6) Suponha que existam apenas dois bens e o governo resolve controlar os preços desses bens do seguinte modo: o preço é R$ 1,00 até 5 unidades adquiridas, e o preço é R$ 2,00 para unidades adicionais (acima das primeiras 5 unidades adquiridas). Suponha que Carlos tem uma renda de R$ 10,00.

a) Ilustre graficamente a reta orçamentária de Carlos.

S: O Governo cobra R$ 2 apenas para as quantidades superiores a cinco unidades compradas de cada bem. Se o indivíduo decidir comprar 6 unidades de um dos bens, ele pagará R$ 1 pelas cinco primeiras unidades e R$ 2 pela sexta unidade adquirida. Portanto, a reta orçamentária é descrita pelo gráfico abaixo.



b) Descreva a reta orçamentária em termos algébricos.

S: Na reta orçamentária abaixo, o número 5 em cada equação é o custo das cinco primeiras unidades compradas por 1 real. Os termos $2(x_2 - 5)$ e $2(x_1 - 5)$ são as quantidades de x_1 e x_2 que excedem 5 unidades, multiplicadas pelo preço que, neste caso, é igual a 2.

$$\begin{cases} x_1 + 2(x_2 - 5) + 5 = 10, & \text{se } x_2 > 5,\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ 2(x_1 - 5) + 5 + x_2 = 10, & \text{se } x_1 > 5,\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{cases}$$

2.7) Suponha uma economia com dois bens, denotados por x e y. A reta orçamentária de Maria é $p_x^M x + p_y^M y = m^M$ e a reta orçamentária de João é $p_x^J x + p_y^J y = m^J$, onde $p_x^M / p_y^M \neq p_x^J / p_y^J$. Ou seja, o custo de mercado entre x e y para Maria é diferente do custo de mercado para João. Maria e João decidem se casar e formar uma família onde a renda dos dois é gasta em conjunto, apesar de que os preços dos bens para cada um deles continuam os mesmos de antes.

a) Defina a restrição orçamentária do casal.

S: A restrição orçamentária do casal é $p_x x + p_y y = m$, onde $p_x = \min\{p_x^M, p_x^J\}$, $p_y = \min\{p_y^M, p_y^J\}$ e $m = m^M + m^J$.

b) Haverá especialização na compra dos bens?

S: Sim. Quem comprará um determinado bem é quem tem acesso ao menor preço deste bem. Por exemplo, se $p_x = p_x^M$ e $p_y = p_y^J$, ou seja, se Maria tem acesso a um preço mais barato para o bem x e João tem acesso a um preço mais barato para o bem y, Maria se especializa na compra do bem x e João se especializa na compra do bem y.

NOTA DE AULA 3 – PREFERÊNCIAS

3.1) Suponha um consumidor que tenha preferências definidas entre cestas compostas por dois bens do seguinte modo: se $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$ (ou seja, $x_1 \geq y_1$ e $x_2 \geq y_2$), então $x \succeq y$.

a) Mostre como são as relações de preferência estrita e de indiferença associadas a $\succeq$.

S: A relação de preferência estrita $\succ$ é definida a partir de $\succeq$ como $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ significa que vale $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ e que não vale $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$ (observe que não valer $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$ significa que ou $y_1 < x_1$ ou $y_2 < x_2$), então $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ significa que $x_1 \geq y_1$ e $x_2 \geq y_2$, *com pelo menos uma das desigualdades valendo de modo estrito.*

A relação de indiferença $\sim$ é definida a partir de $\succeq$ como $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ significa que vale $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$. No primeiro caso, temos que $x_1 \geq y_1$ e $x_2 \geq y_2$ e no segundo caso temos que $x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2$. Portanto, $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ significa que $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, para a preferência definida neste exercício (observe então que a única cesta indiferente à cesta (x_1, x_2) é ela própria.

b) Essas preferências são (justifique sua resposta):

i) Completas?

S: Não. Duas cestas tais como (x_1, x_2) e (y_1, y_2), com $x_1 > y_1$ e $x_2 < y_2$ não são comparáveis, para o sistema de preferências considerado. Por exemplo, $(1, 2)$ e $(2, 1)$ não são comparáveis: não podemos dizer qual cesta é melhor ou se são indiferentes, usando a regra acima.

ii) Transitivas?

S: Sim. Temos que mostrar que se a cesta x é preferível à cesta y e a cesta y é preferível à cesta z, então a cesta x é preferível à cesta z. Note que se $x \succeq y$ então $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$ e se $y \succeq z$ então $(y_1, y_2) \geq (z_1, z_2)$. Portanto, $(x_1, x_2) \geq (z_1, z_2)$ e, pela definição da preferência $\succeq$, $x \succeq z$. Ou seja, essas preferências são transitivas.

iii) Monótonas?

S: Sim, por definição ("*quanto mais, melhor*").

iv) Convexas?

S: Sim, pois se x e y são duas cestas de bens tais que $x \succeq y$, então $x_1 \geq y_1$ e $x_2 \geq y_2$ e, portanto, $\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \geq y_1$ e $\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \geq y_2$, para todo $\lambda \in [0, 1]$, o que por sua vez significa que $\lambda x + (1-\lambda)y \succeq x$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

3.2) O técnico de volei Bernardo acha que os jogadores devem ter três qualidade: altura, agilidade e obediência. Se o jogador A é melhor que o jogador B em duas dessas três características, então Bernardo prefere A a B. Para os outros casos, ele é indiferente entre A e B. Carlos mede 2,08m, é pouco ágil e obediente. Luis mede 1,90m, é muito ágil, e muito desobediente. Paulo mede 1,85m, é ágil, e extremamente obediente.

a) Bernardo prefere Carlos ou Luis? Bernardo prefere Luis ou Paulo? Bernardo prefere Carlos ou Paulo?

b) As preferências do técnico são transitivas?

S: (a e b) Podemos descrever as características dos jogadores na tabela a seguir:

	Carlos	Luis	Paulo
Altura	2,08	1,90	1,85
Agilidade	*Pouco*	*Muito*	*Normal*
Obediência	*Obediente*	*Desobediente*	*Muito Obediente*

É fácil ver que Carlos $\succ$ Luis, Luis $\succ$ Paulo e Paulo $\succ$ Carlos. Portanto, as preferências de Bernardo não são transitivas (Carlos $\succ$ Luis, Luis $\succ$ Paulo mas não ocorre Carlos $\succ$ Paulo).

c) Depois de perder vários campeonatos, Bernardo decide mudar sua forma de comparar os jogadores. Agora ele prefere o jogador A ao jogador B se A é melhor do que B nas três características Ele é indiferente entre A e B se eles têm todas as três características iguais. Para todas as outras possibilidades, Bernardo diz que não é possível comparar os jogadores. As novas preferências de Bernardo são: completas? transitivas? reflexivas? Justifique.

S: Completas? Não. Por exemplo, Bernardo não consegue mais se decidir entre Carlos ou Luis, já que Carlos é mais alto e mais obediente, porém menos ágil do Luis.

Transitivas? Sim. Se Bernardo consegue comparar os jogadores A, B e C, e temos A $\succeq$ B e B $\succeq$ C, então podem ocorrer quatro casos:

i) A $\sim$ B e B $\sim$ C: A e B possuem as três qualidades iguais e B e C possuem as três qualidades iguais. Logo, A e C possuem as três qualidades iguais, ou seja, A $\sim$ C, o que implica também A $\succeq$ C.

ii) A $\succ$ B e B $\sim$ C: A é melhor do que B nas três qualidades e B e C possuem as três qualidades iguais. Logo, A será melhor que C nas três qualidades, ou seja, A $\succ$ C, o que implica também A $\succeq$ C.

iii) A $\sim$ B e B $\succ$ C: A e B possuem as três qualidades iguais e B é melhor do que C nas três qualidades. Logo, A será melhor que C nas três qualidades, ou seja, A $\succ$ C, o que implica também A $\succeq$ C.

iv) A $\succ$ B e B $\succ$ C: A é melhor do que B nas três qualidades e B é melhor do que C nas três qualidades. Consequentemente, A será melhor que C nas três qualidades, ou seja, A $\succ$ C, o que implica também A $\succeq$ C.

Reflexivas? Sim. Para todo jogador, Bernardo é indiferente ao mesmo jogador, ou seja, A $\succeq$ A.

3.3) Mostre que a preferência lexicográfica é completa, reflexiva e transitiva.

S: *Completa*: Considere as cestas $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ quaisquer. Se $x_1 > y_1$, então $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, ou seja, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$. Se Se $y_1 > x_1$, então $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$, ou seja, $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$. No caso em $x_1 = y_1$, olhamos o segundo bem: se $x_2 > y_2$, então $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, ou seja, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$. Se $y_2 > x_2$, então $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$, ou seja, $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$. Finalmente, se $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$, então $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, ou seja, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$. Logo, é sempre possível comparar as cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em termos da preferência lexicográfica, o que significa que ela é completa.

Reflexiva: Para uma cesta $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ qualquer, temos sempre que $x_1 = x_1$ e $x_2 = x_2$, ou seja, $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$, logo $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$, o que mostra que a preferência lexicográfica é reflexiva.

Transitiva: Considere as cestas $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ e $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, com $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$. Vamos dividir a análise nos quatro casos possíveis:

i) $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ implica $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$ implica $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Logo $\mathbf{x} = \mathbf{z}$, ou seja, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$ (mais especificamente, $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$).

ii) $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ implica que ou $x_1 > y_1$ ou que $x_1 = y_1$ e $x_2 > y_2$. Já $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$ implica $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Logo ou $x_1 > z_1$ ou $x_1 = z_1$ e $x_2 > z_2$, o que significa $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$ (mais especificamente, $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$).

iii) $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ implica $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ implica que ou $y_1 > z_1$ ou que $y_1 = z_1$ e $y_2 > z_2$. Logo ou $x_1 > z_1$ ou $x_1 = z_1$ e $x_2 > z_2$, o que significa $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$ (mais especificamente, $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$).

iv) $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ implica que ou $x_1 > y_1$ ou que $x_1 = y_1$ e $x_2 > y_2$. Já $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ implica que ou $y_1 > z_1$ ou que $y_1 = z_1$ e $y_2 > z_2$. Logo ou $x_1 > z_1$ ou $x_1 = z_1$ e $x_2 > z_2$, o que significa $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$ (mais especificamente, $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$).

3.4) Considere a utilidade $u(x_1, x_2) = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$.

a) Calcule as utilidades marginais dos bens 1 e 2. Verifique que são decrescentes. Qual seria a interpretação de utilidades marginais decrescentes?

S: As utilidades marginais são:

$$\begin{aligned} &\text{Bem 1: } UMg_1(x_1, x_2) = \partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 = 0{,}5 x_1^{-0,5} x_2^{0,5} \\ &\text{Bem 2: } UMg_2(x_1, x_2) = \partial u(x_1, x_2)/\partial x_2 = 0{,}5 x_1^{0,5} x_2^{-0,5} \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \partial UMg_1(x_1, x_2)/\partial x_1 &= \partial^2 u(x_1, x_2)/\partial x_1^2 = -0{,}25 x_1^{-1,5} x_2^{0,5} < 0, \quad \text{e} \\ \partial UMg_2(x_1, x_2)/\partial x_2 &= \partial^2 u(x_1, x_2)/\partial x_2^2 = -0{,}25 x_1^{0,5} x_2^{-1,5} < 0, \end{aligned}$$

ou seja, as utilidades marginais são decrescentes. Uma utilidade marginal de um bem ser decrescente era interpretado na teoria cardinal como quanto mais do bem, menor a quantidade de utilidade que ele gera para o indivíduo.

b) Calcule as utilidades marginais dos bens 1 e 2 para a função de utilidade $\bar{u}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$. Verifique que são crescentes.

S: As utilidades marginais são:

$$\begin{aligned} &\text{Bem 1: } UMg_1(x_1, x_2) = \partial u(x_1, x_2)/\partial x_1 = 2x_1 x_2^2 \\ &\text{Bem 2: } UMg_2(x_1, x_2) = \partial u(x_1, x_2)/\partial x_2 = 2x_1^2 x_2 \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \partial UMg_1(x_1, x_2)/\partial x_1 &= \partial^2 u(x_1, x_2)/\partial x_1^2 = 2x_2^2 > 0, \quad \text{e} \\ \partial UMg_2(x_1, x_2)/\partial x_2 &= \partial^2 u(x_1, x_2)/\partial x_2^2 = 2x_1^2 > 0, \end{aligned}$$

ou seja, as utilidades marginais dessa utilidade são crescentes.

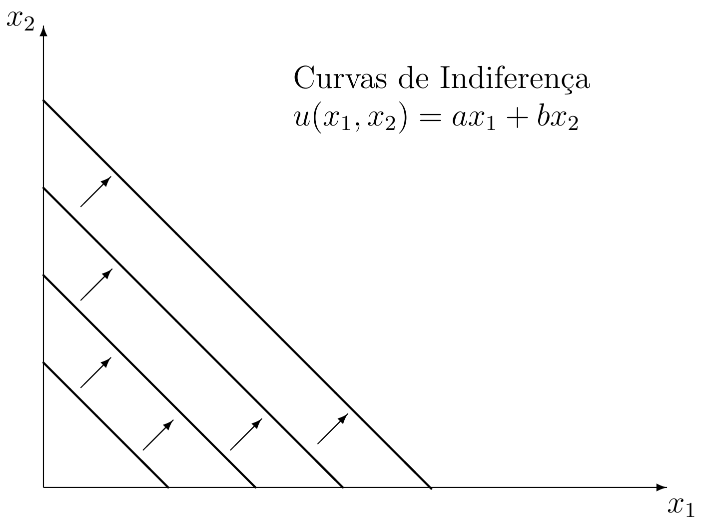
c) Mostre que u e $\bar{u}$ representam a mesma preferência. O que isso implica a respeito de a utilidade marginal ser decrescente ou crescente?

S: Basta notar que $\bar{u} = f \circ u$, onde $f(t) = t^4$ é crescente para todo $t \geq 0$. Pelo Teorema de Representação, isso significa que u e $\bar{u}$ representam a mesma preferência. Podemos concluir então que a utilidade marginal ser decrescente ou crescente não tem conteúdo econômico algum (teoria puramente ordinal).

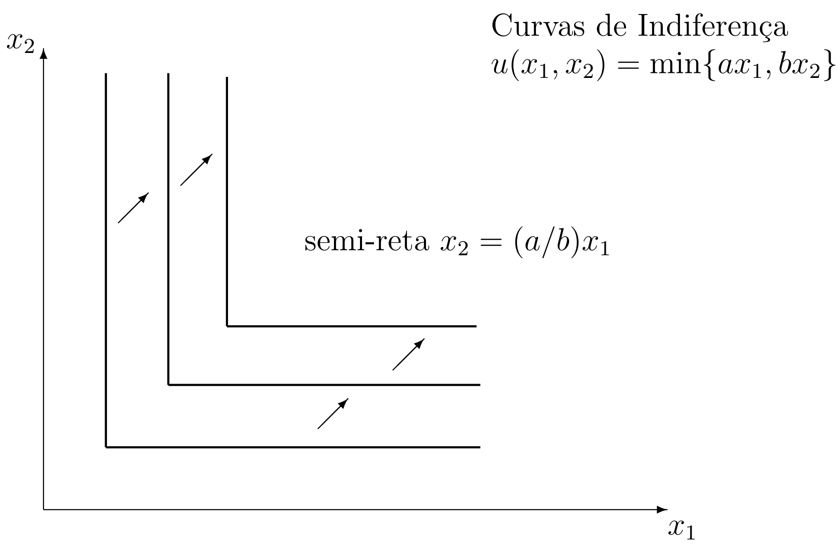
3.5) Desenhe as curvas de indiferença para as seguintes utilidades:

a) **Utilidade Linear:** $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, $a, b > 0$.

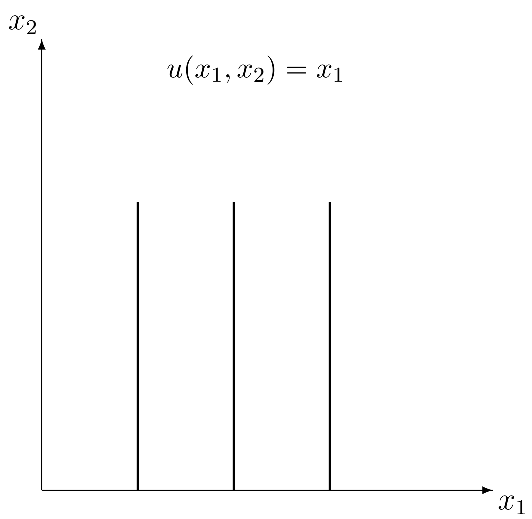
S: A figura é:

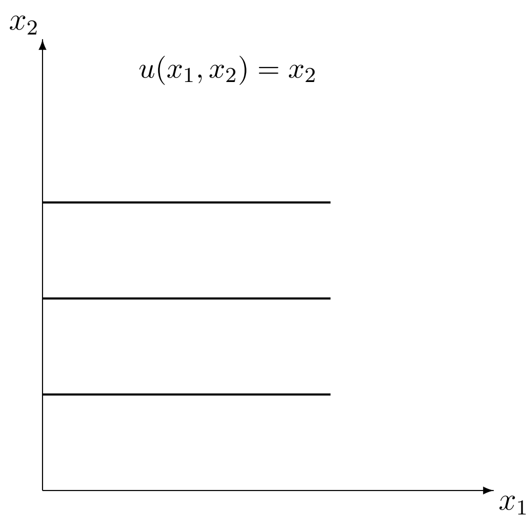


b) **Utilidade de Leontief:** $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, $a, b > 0$.
S: A figura é:



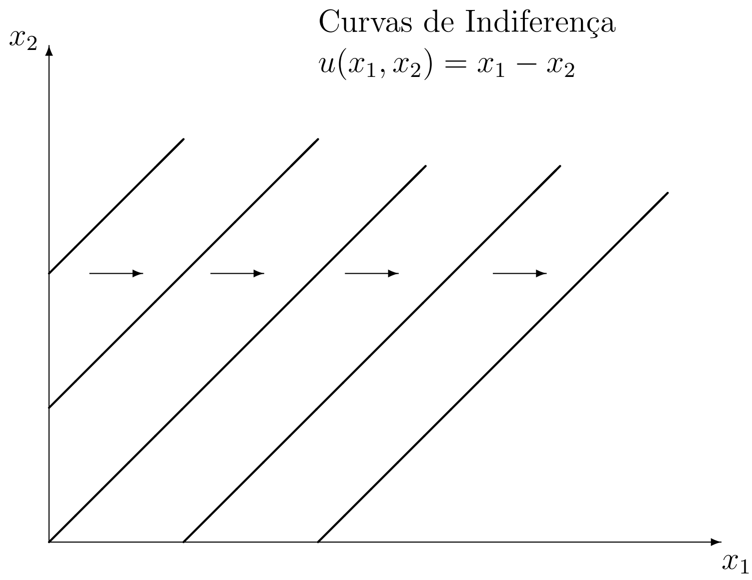
c) **Utilidades com um Bem Neutro:** $u(x_1, x_2) = x_1$ e $u(x_1, x_2) = x_2$.
S: As figuras são:





d) **Utilidade com um Mal:** $u(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

S: A figura é:



3.6) Suponha que uma pessoa esteja consumindo uma cesta de bens tal que a sua utilidade marginal de consumir o bem A é 12 e a sua utilidade marginal de consumir o bem B é 2. Suponha também que os preços dos bens A e B são R\$ 2 e R\$ 1, respectivamente, e que as preferências desse consumidor são estritamente convexas.

a) Essa pessoa está escolhendo quantidades ótimas dos bens A e B? Caso não esteja, qual bem ela deveria consumir relativamente mais (não se preocupe com a restrição orçamentária nesse item)?

S: Denote a cesta de bens que essa pessoa consome por $\mathbf{x}$. Para essas quantidades de bens, temos que:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_A}{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_B} = 6 \neq 2 = \frac{p_A}{p_B}$$

A TMS entre A e B é maior do que a relação de preços entre A e B. Nesse caso, o consumidor pode aumentar sua utilidade se consumir mais do bem A e menos do bem B, pois no mercado ele pode trocar 2 unidades de B por uma unidade de A e tal troca vai aumentar sua utilidade em uma razão de seis vezes.

b) A sua resposta para o item a) depende do valor da utilidade marginal. Explique.

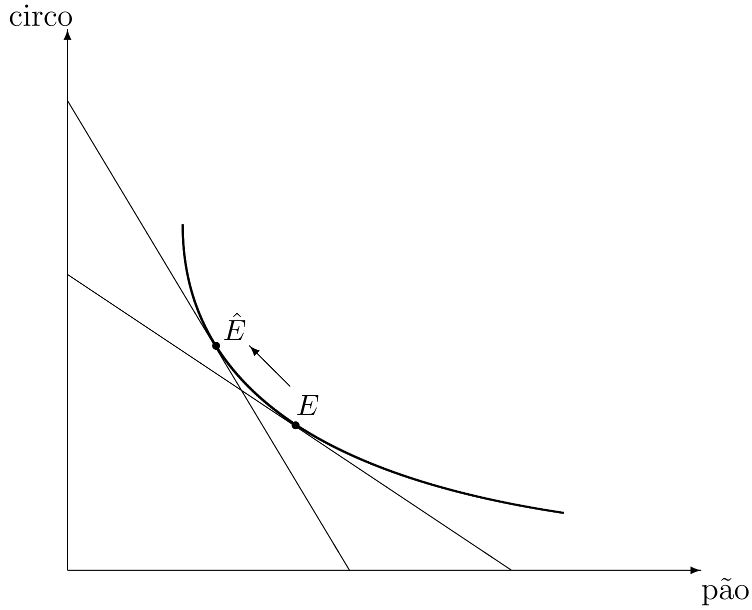
S: Não, depende apenas da relação entre as utilidades marginais, que permanece a mesma qualquer que seja a função de utilidade usada para representar as preferências.

3.7) Suponha que Ana consome apenas pão e circo, e suas preferências são bem comportadas. Um certo dia o preço do pão aumenta e o preço do circo diminui. Ana continua tão feliz quanto antes da mudança de preços (a renda de Ana não mudou).

a) Ana consume mais ou menos pães após a mudança de preços?

b) Ana consegue agora comprar a cesta que comprava antes?

S: (a e b juntos) Nesse caso, pão se torna mais caro relativamente ao circo. A reta orçamentária se torna mais inclinada. Essa mudança na reta orçamentária é tal que Ana alcança o mesmo nível de utilidade de antes (ou seja, a nova reta orçamentária tangenciará a mesma curva de indiferença que a reta orçamentária original tangenciava). O gráfico abaixo mostra que Ana consome menos pães do que antes (equilíbrio muda de E para $\hat{E}$) e que a cesta que ela consumia antes (E) não é mais possível de ser adquirida aos novos preços (pois está fora do conjunto de cestas factíveis para a nova reta orçamentária).



NOTA DE AULA 4 – O PROBLEMA DO CONSUMIDOR

4.1) Suponha que existam apenas 2 bens e que a utilidade de um certo indivíduo é $u(x_1, x_2) = x_1^{0,25} + x_2^{0,25}$.

a) Monte o problema do consumidor e derive as demandas ótimas usando o método de Lagrange.

S: O problema do consumidor é

$$\max_{x_1,x_2} x_1^{0,25} + x_2^{0,25} \qquad \text{s.a} \qquad p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

O Lagrangeano do problema é:

$$\mathcal{L} = x_1^{0,25} + x_2^{0,25} + \lambda \left[m - (p_1x_1 + p_2x_2)\right]$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1): &\quad 0{,}25x_1^{-0,75} = \lambda^* p_1 \\ (x_2): &\quad 0{,}25x_2^{-0,75} = \lambda^* p_2 \\ (\lambda): &\quad m = p_1x_1 + p_2x_2 \end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda CPO, obtemos:

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0,75} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{4/3} x_1$$

Substituimos essa expressão para x_2 na reta orçamentária (terceira CPO):

$$m = p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{4/3} x_1 = p_1 x_1 \left(1 + \frac{p_1^{1/3}}{p_2^{1/3}}\right)$$

Logo,

$$x_1 = \frac{m}{p_1\left(1 + \frac{p_1^{1/3}}{p_2^{1/3}}\right)} = \frac{p_2^{1/3}\, m}{p_1\left(p_1^{1/3} + p_2^{1/3}\right)}$$

Substituindo x_1 de volta em x_2, obtemos as funções de demanda dos dois bens:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{p_2^{1/3}\, m}{p_1\left(p_1^{1/3} + p_2^{1/3}\right)} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{p_1^{1/3}\, m}{p_2\left(p_1^{1/3} + p_2^{1/3}\right)}$$

b) Verifique as condições de segunda ordem.

S: Para a utilidade dada, temos que $u_1 = 0{,}25 x_1^{-0{,}75}$, $u_2 = 0{,}25 x_2^{-0{,}75}$, $u_{12} = u_{21} = 0$, $u_{11} = -0{,}1875 x_1^{-1{,}75}$, e $u_{22} = -0{,}1875 x_2^{-1{,}75}$. Observe que:

$$\begin{aligned} 2u_1u_2u_{21} - u_2^2 u_{11} - u_1^2 u_{22} &= -u_2^2 u_{11} - u_1^2 u_{22} \\ &= 0{,}01171875\, x_1^{-1{,}5} x_2^{-1{,}5}\left(x_1^{-0{,}25} + x_2^{-0{,}25}\right)\ , \end{aligned}$$

é sempre positiva, se $(x_1^*, x_2^*) > 0$, que é o caso encontrado no item anterior. Logo a CSO é satisfeita.

c) Mostre que as funções de demanda satisfazem a propriedade de "adding-up", ou seja, que $p_1 x_1(p_1, p_2, m) + p_2 x_2(p_1, p_2, m)$ é de fato igual a m.

S: Observe que:

$$\begin{aligned} p_1 x_1^* + p_2 x_2^* &= p_1\left(\frac{p_2^{1/3}\, m}{p_1\left(p_1^{1/3} + p_2^{1/3}\right)}\right) + p_2\left(\frac{p_1^{1/3}\, m}{p_2\left(p_1^{1/3} + p_2^{1/3}\right)}\right) \\ &= m\left[\frac{p_2^{1/3}}{p_1^{1/3} + p_2^{1/3}} + \frac{p_1^{1/3}}{p_1^{1/3} + p_2^{1/3}}\right] = m\left[\frac{p_1^{1/3} + p_2^{1/3}}{p_1^{1/3} + p_2^{1/3}}\right] = m \end{aligned}$$

d) Mostre que as funções de demanda satisfazem a propriedade de homogeneidade.

S: Observe que:

$$\begin{aligned} x_1^M(tp_1, tp_2, tm) &= \frac{(tp_2)^{1/3}\,(tm)}{(tp_1)\left((tp_1)^{1/3} + (tp_2)^{1/3}\right)} = x_1^M(p_1, p_2, m) \\ x_2^M(tp_1, tp_2, tm) &= \frac{(tp_1)^{1/3}\,(tm)}{(tp_2)\left((tp_1)^{1/3} + (tp_2)^{1/3}\right)} = x_2^M(p_1, p_2, m) \end{aligned}$$

4.2) Suponha uma função de utilidade definida por:

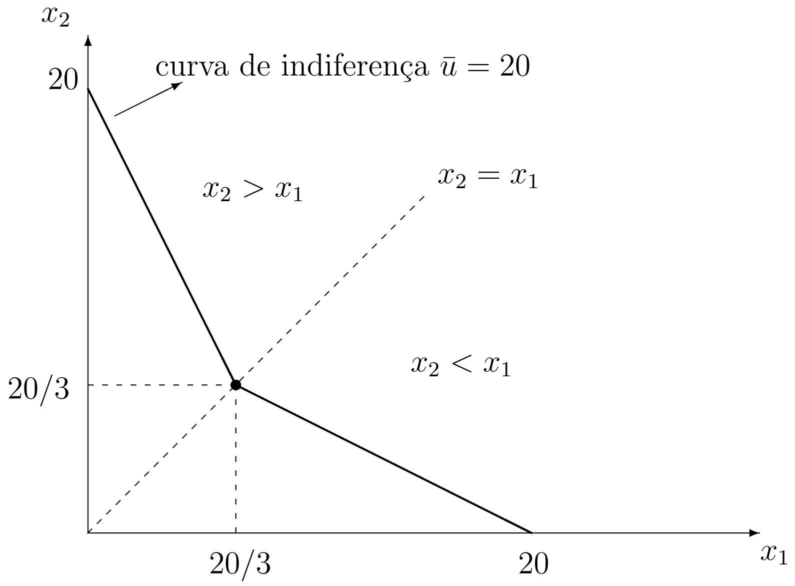
$$u(x_1, x_2) = \min\{x_2 + 2x_1, x_1 + 2x_2\}$$

a) Desenhe a curva de indiferença para $u(x_1, x_2) = 20$.

S: Esta curva de indiferença é dada por $\min\{x_2 + 2x_1, x_1 + 2x_2\} = 20$. O indivíduo escolherá as quantidades de cada bem de modo a igualar os dois argumentos da função de mínimo acima, para evitar desperdícios. Portanto, temos que:

$$2x_1 + x_2 = x_1 + 2x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Nos dois argumento da função mínimo, temos relações lineares entre os dois bens: $2x_1 + x_2$, no primeiro argumento, e $x_1 + 2x_2$, no segundo argumento. A curva de indiferença dessa função, para o caso de $u(x_1, x_2) = 20$, é ilustrada na figura a seguir.



b) Para que valores de p_1/p_2 a solução ótima consistirá em $x_1 = 0$ e $x_2 = m/p_2$?

S: Pela figura podemos observar que, apesar da utilidade ser de Leontief, existe um grau de substituição entre os bens, descrito por uma função linear. Portanto, as demandas serão uma mistura de solução de canto (consome apenas um bem) com solução onde os bens são consumidos em proporções fixas ($x_1 = x_2$). Portanto, as demandas são:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \begin{cases} m/p_1, & \text{se} \quad p_1 < (1/2)p_2, \\ m/(p_1 + p_2), & \text{se} \quad (1/2)p_2 < p_1 < 2p_2 \\ 0, & \text{se} \quad p_1 > 2p_2 \end{cases}$$

$$x_2(p_1, p_2, m) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad p_1 < (1/2)p_2, \\ m/(p_1 + p_2), & \text{se} \quad (1/2)p_1 < p_2 < 2p_1 \\ m/p_2, & \text{se} \quad p_1 > 2p_2 \end{cases}$$

Se $p_1 = 2p_2$, então o consumidor escolhe qualquer cesta (x_1^*, x_2^*) tal que $2x_1 + x_2 = 20$, $0 \leq x_1 \leq 20/3$. Se $p_1 = (1/2)p_2$, então o consumidor escolhe qualquer cesta (x_1^*, x_2^*) tal que $x_1 + 2x_2 = 20$, $20/3 \leq x_1 \leq 20$. Finalmente, para quaisquer preços tais que $p_1 > 2p_2$, as demandas ótimas são não consumir o bem 1 e consumir apenas o bem 2.

c) Para que valores de p_1/p_2 a solução ótima consistirá em $x_1 = m/p_1$ e $x_2 = 0$?

S: Usando a solução descrita no item anterior, se $p_2 > 2p_1$, então as demandas ótimas são não consumir o bem 2 e consumir apenas o bem 1.

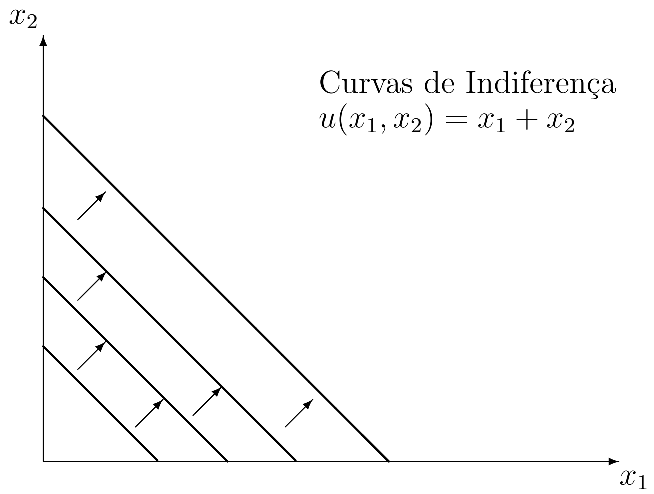
d) Para que valores de p_1/p_2 a solução ótima será interior (ou seja, $x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$)?

S: Novamente usando a solução descrita no item b), se $(1/2)p_1 < p_2 < 2p_1$, então as demandas ótimas são interiores, com $x_1^* = x_2^* = m/(p_1 + p_2)$.

4.3) Considere a utilidade $u(x_1, x_2) = \sqrt{ax_1 + bx_2}$.

a) Calcule a TMS entre os dois bens. Desenhe o mapa de indiferença desta utilidade.

S: Uma curva de indiferença em particular pode ser encontrada fazendo-se $u(x_1, x_2) = \bar{u}$, ou seja, $\sqrt{ax_1 + bx_2} = \bar{u}$, logo $ax_1 + bx_2 = \bar{u}^2$. Isto quer dizer que o mapa de indiferença desta utilidade tem a mesma forma do que o mapa de indiferença para a utilidade $\tilde{u}(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Portanto, esta utilidade também representa bens substitutos perfeitos. A figura abaixo ilustra o mapa de indiferença gerado por esta utilidade:



Este resultado é esperado, já que ambas as utilidades representam o mesmo sistema de preferência (a utilidade $\tilde{u}$ é obtida elevando-se a utilidade u ao quadrado, uma transformação crescente para todo número positivo). Observe que, como esperado, a TMS de u é a igual a TMS de $\tilde{u}$:

$$TMS_{12}^{u}(x_1, x_2) = -\frac{1/2(ax_1 + bx_2)^{-1/2}a}{1/2(ax_1 + bx_2)^{-1/2}b} = -\frac{a}{b} = TMS_{12}^{\tilde{u}}(x_1, x_2)$$

b) Encontre as funções de demandas ótimas do consumidor. Justifique sua resposta.

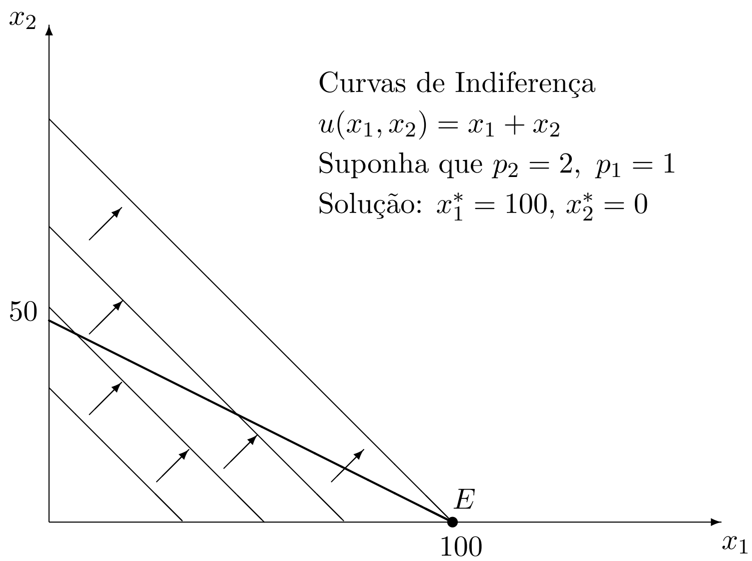
S: O problema do consumidor é atingir o nível mais alto de utilidade, dada a restrição orçamentária. Como os bens são perfeitamente substitutos, o consumidor comprará o bem que for *relativamente* mais barato: o bem que tiver menor preço dividido pelo coeficiente da utilidade. As funções de demanda serão:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} m/p_1, & \text{se } p_1/a < p_2/b \\ 0, & \text{se } p_1/a > p_2/b \end{cases} \quad \text{e} \quad x_2^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} 0, & \text{se } p_1/a < p_2/b \\ m/p_2, & \text{se } p_1/a > p_2/b \end{cases}$$

No caso em que $p_1/a = p_2/b$, o consumidor é indiferente entre qual dos bens comprar, pois a TMS é sempre igual à relação de preços dos bens. Nesse caso, o consumidor comprará qualquer cesta (x_1^*, x_2^*) que satisfaça a sua reta orçamentária, $p_1x_1^* + p_2x_2^* = m$.

c) Agora suponha que $a = b = 1$ e $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $m = 100$. Ilustre graficamente a solução neste caso. Qual a taxa marginal de substituição na cesta ótima? Para este caso, vale a condição de igualdade de TMS e relação de preços? Discuta intuitivamente sua resposta.

S: O gráfico abaixo ilustra a solução neste caso.



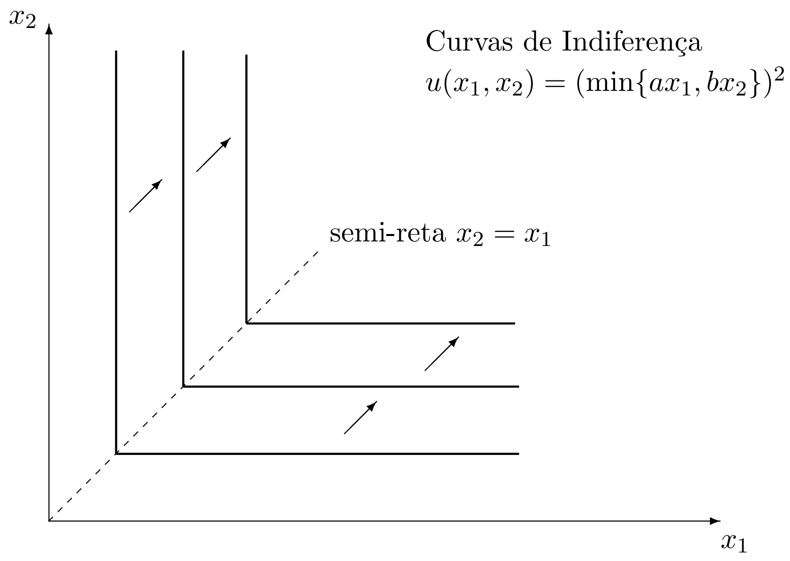
Na cesta ótima, $x_1^* = 100$ e $x_2^* = 0$, não é válida a igualdade entre TMS e relação de preços ($TMS = -1 \neq -1/2 = -p_1/p_2$). Isto ocorre porque estamos em uma *solução de canto*: apenas o bem 1 é consumido. Se fosse possível, o indivíduo continuaria a trocar bem 2 por bem 1, mas ele já está no limite, sem mais nenhuma quantidade de bem 2 para trocar por bem 1. A igualdade entre TMS e relação de preços é usualmente válida para *soluções interiores*, ou seja, cestas tais que as quantidades dos bens são todas positivas.

4.4) Considere a utilidade $u(x_1, x_2) = (\min\{ax_1, bx_2\})^2$.

a) Desenhe o mapa de indiferença desta utilidade. Calcule a TMS entre os dois bens.

S: Procedemos como na questão anterior: uma curva de indiferença em particular pode ser encontrada fazendo-se $u(x_1, x_2) = \bar{u}$, ou seja, $(\min\{ax_1, bx_2\})^2 = \bar{u}$, logo $\min\{ax_1, bx_2\} = \sqrt{\bar{u}}$. Isto quer dizer que o mapa de indiferença desta utilidade tem o mesmo formato do que o mapa de indiferença da utilidade $\tilde{u}(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$. Portanto, esta utilidade também representa bens complementares perfeitos. A curva de indiferença é ilustrada na figura abaixo.

A TMS entre os dois bens não está bem-definida, pois a utilidade não é diferenciável. Porém, podemos dizer que ela será igual a 0 ou a infinito, dependendo da cesta em que for calculada. Se a cesta (x_1, x_2) for tal que $x_1 < x_2$, então $TMS_{12}(x_1, x_2) = +\infty$, pois neste caso o consumidor está disposto a trocar todo o excesso que possui do bem 2 em relação ao bem 1 por um acréscimo no bem 1. Se a cesta (x_1, x_2) for tal que $x_1 > x_2$, então $TMS_{12}(x_1, x_2) = 0$, pois neste caso o consumidor não está disposto a trocar bem 2 pelo bem 1, qualquer que seja a taxa de troca (a TMS é uma medida local, vale apenas para uma vizinhança da cesta em questão). Finalmente, se a cesta (x_1, x_2) for tal que $x_1 = x_2$, então $TMS_{12}(x_1, x_2)$ não está definida.



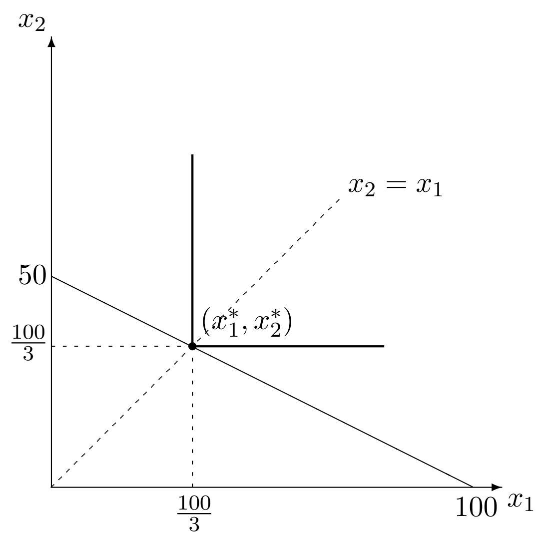
b) Encontre as funções de demandas ótimas do consumidor. Justifique sua resposta.

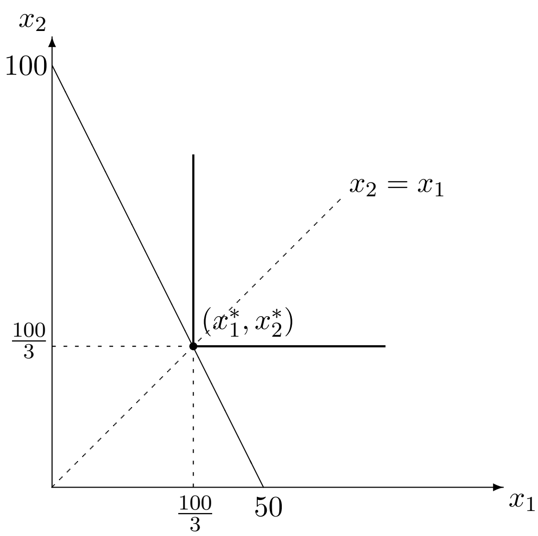
S: Como discutimos na Nota de Aula 4, no caso geral $a \neq b$, o consumidor iguala os *argumentos* da função de mínimo: $ax_1 = bx_2$ e, portanto $x_2 = (a/b)x_1$. Substituindo essa expressão para x_2 na reta orçamentária, encontramos as funções de demanda:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + \left(\frac{a}{b}\right) p_2} \qquad \text{e} \qquad x_2^M(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{b}\right) \frac{m}{p_1 + \left(\frac{a}{b}\right) p_2}$$

c) Agora suponha que $a = b = 1$ e $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $m = 100$. Calcule e ilustre graficamente a solução neste caso. Suponha agora que os preços mudaram para $p_1 = 2$ e $p_2 = 1$, e que a renda não se modificou. Calcule e ilustre graficamente a solução neste caso. Compare as duas soluções encontradas neste item. Discuta intuitivamente sua resposta.

S: Para o primeiro caso, temos que $x_1^* = x_2^* = m/(p_1 + p_2) = 100/3$. Para o segundo caso, temos que $x_1^* = x_2^* = m/(p_1 + p_2) = 100/3$. Logo, a cesta ótima em ambos os casos é a mesma. Isto ocorre porque, no caso de bens complementares perfeitos onde $a = b$, os dois bens devem sempre ser consumidos na proporção de um bem 1 para um bem 2. Podemos dizer que o bem 1 e o bem 2 formam um único bem, cujo preço é $p_1 + p_2$. Os gráficos abaixo ilustram estes dois casos.





4.5) Encontre as demandas ótimas para os seguintes casos, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$:

a) $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$;
S: O Lagrangeano é $\mathcal{L} = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} + \lambda(m - (p_1 x_1 + p_2 x_2))$. As CPO resultam em:

$$\begin{aligned}(x_1):&\quad \lambda^* p_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}\\ (x_2):&\quad \lambda^* p_2 = \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}\\ (\lambda):&\quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2\end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda CPO, obtemos:

$$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}\left[\frac{\beta x_1}{\alpha}\right]$$

Substituimos agora essa expressão para x_2 na reta orçamentária (terceira CPO):

$$m = p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\left[\frac{\beta x_1}{\alpha}\right]\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{p_1}\right)$$

Substituindo x_1 de volta em x_2, obtemos as duas funções de demanda:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{p_1}\right) \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{p_2}\right)$$

b) $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$;
S: O Lagrangeano é $\mathcal{L} = x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \lambda(m - (p_1 x_1 + p_2 x_2))$. As CPO resultam em:

$$\begin{aligned}(x_1):&\quad \lambda^* p_1 = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\\ (x_2):&\quad \lambda^* p_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right) x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1}\\ (\lambda):&\quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2\end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda CPO, obtemos:

$$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}\left[\frac{\beta x_1}{\alpha}\right]$$

Substituimos agora essa expressão para x_2 na reta orçamentária (terceira CPO):

$$m = p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\left[\frac{\beta x_1}{\alpha}\right]\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{p_1}\right)$$

Substituindo x_1 de volta em x_2, obtemos as duas funções de demanda:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{p_1}\right) \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{p_2}\right)$$

c) $u(x_1, x_2) = \alpha \ln(x_1) + \beta \ln(x_2)$.

S: O Lagrangeano é $\mathcal{L} = \alpha \ln(x_1) + \beta \ln(x_2) + \lambda(m - (p_1 x_1 + p_2 x_2))$. As CPO resultam em:

$$\begin{aligned}
(x_1):&\quad \lambda^* p_1 = \frac{\alpha}{x_1}\\
(x_2):&\quad \lambda^* p_2 = \frac{\beta}{x_2}\\
(\lambda):&\quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2
\end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda CPO, obtemos:

$$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2}\left[\frac{\beta x_1}{\alpha}\right]$$

Substituimos agora essa expressão para x_2 na reta orçamentária (terceira CPO):

$$m = p_1 x_1 + p_2\left(\frac{p_1}{p_2}\left[\frac{\beta x_1}{\alpha}\right]\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{p_1}\right)$$

Substituindo x_1 de volta em x_2, obtemos as duas funções de demanda:

$$x_1(p_1,p_2,m) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{p_1}\right) \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1,p_2,m) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{p_2}\right)$$

Qual a relação entre as demandas encontradas acima? Justifique a sua resposta. Com base na sua resposta, se a utilidade é do tipo $u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, é possível tranformá-la em uma utilidade do tipo $u(x_1,x_2) = x_1^{\gamma} x_2^{1-\gamma}$, com $0 < \gamma < 1$? Se sim, qual a relação entre α, β e γ?

S: As funções de demanda são as mesmas para os três casos. Mais ainda, a taxa marginal de substituição é a mesma para as três utilidades. Isto ocorre porque as três utilidade representam as mesmas preferências. Observe que a segunda utilidade é igual à primeira elevada a $1/(\alpha+\beta)$, o que constitui uma transformação crescente, pois $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. A terceira utilidade é igual à primeira utilidade log-linearizada (lembre-se que a função logaritmo é crescente para todo número positivo). Logo, se elevarmos a utilidade $u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ à potência $1/(\alpha+\beta)$, obtemos a utilidade $u(x_1,x_2) = x_1^{\gamma} x_2^{1-\gamma}$, onde $\gamma = \alpha/(\alpha+\beta)$ e, portanto, $1-\gamma = \beta/(\alpha+\beta)$, $0 < \gamma < 1$, já que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

4.6) Calcule as demandas de um consumidor representado por uma utilidade CES (elasticidade de substituição constante) dada por:

$$u(x_1,x_2) = \left[a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}}\ , \qquad 0 \neq \rho < 1\,.$$

S: O problema do consumidor é

$$\max_{x_1,x_2 \geq 0}\ \left[a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} \qquad \text{s.a} \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

O Lagrangeano do problema é:

$$\mathcal{L} = \left[a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}} + \lambda\left[m - (p_1 x_1 + p_2 x_2)\right]$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned}
(x_1):&\quad \frac{1}{\rho}\left[a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}-1} a\rho x_1^{\rho-1} = \lambda^* p_1\\
(x_2):&\quad \frac{1}{\rho}\left[a x_1^{\rho} + b x_2^{\rho}\right]^{\frac{1}{\rho}-1} b\rho x_2^{\rho-1} = \lambda^* p_2\\
(\lambda):&\quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2
\end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda CPO, obtemos:

$$\frac{a}{b}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\rho-1} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \left(\frac{bp_1}{ap_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x_2$$

Substituimos essa expressão para x_2 na reta orçamentária (terceira CPO):

$$m = p_1\left[\left(\frac{bp_1}{ap_2}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} x_2\right] + p_2x_2 = x_2\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right) p_2^{-\frac{1}{\rho-1}}$$

Logo,

$$x_2 = \frac{p_2^{\frac{1}{\rho-1}} m}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

Substituindo x_2 de volta em x_1, obtemos as funções de demanda dos dois bens:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{p_1^{\frac{1}{\rho-1}} m}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{p_2^{\frac{1}{\rho-1}} m}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

No caso em que $a = b$ e, em particular, $a = b = 1$, as demandas são:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \left(\frac{p_1^{\frac{1}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right) m \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \left(\frac{p_2^{\frac{1}{\rho-1}}}{p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}\right) m$$

Se usarmos a notação $r = \frac{1}{\rho-1}$, podemos escrever as demandas como:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \left(\frac{p_1^r}{p_1^{1+r} + p_2^{1+r}}\right) m \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \left(\frac{p_2^r}{p_1^{1+r} + p_2^{1+r}}\right) m$$

NA 5 – UTILIDADE INDIRETA E DEMANDA

5.1) Considere a seguinte função de utilidade:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{0,5} + x_2^{0,5}$$

a) Determine as funções de demanda marshallianas e a função de utilidade indireta.
S: O problema do consumidor é:

$$\max_{x_1, x_2} x_1^{0,5} + x_2^{0,5} \qquad \text{s.a} \qquad p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

O Lagrangeano do problema é:

$$\mathcal{L} = x_1^{0,5} + x_2^{0,5} + \lambda\left[m - (p_1x_1 + p_2x_2)\right]$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1): &\quad 0,5x_1^{-0,5} = \lambda^* p_1 \\ (x_2): &\quad 0,5x_2^{-0,5} = \lambda^* p_2 \\ (\lambda): &\quad m = p_1x_1 + p_2x_2 \end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda CPO, obtemos:

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0,5} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1$$

Substituimos essa expressão para x_2 na reta orçamentária (terceira CPO):

$$m = p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1 = x_1 \left(p_1 + \frac{p_1^2}{p_2}\right) = x_1 \left(\frac{p_1 p_2 + p_1^2}{p_2}\right)$$

Logo,

$$x_1 = \frac{p_2\, m}{p_1 p_2 + p_1^2}$$

Substituindo x_1 de volta em x_2, obtemos as funções de demanda dos dois bens:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{p_2\, m}{p_1 p_2 + p_1^2} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{p_1\, m}{p_1 p_2 + p_2^2}$$

Portanto, a função de utilidade indireta é:

$$v(p_1, p_2, m) = \left[\left(\frac{p_2}{p_1 p_2 + p_1^2}\right)^{0,5} + \left(\frac{p_1}{p_1 p_2 + p_2^2}\right)^{0,5}\right]\sqrt{m}$$

b) Mostre que a função de utilidade indireta satisfaz a propriedades de homogeneidade de grau 0 nos preços e na renda.

S: Observe que:

$$\begin{aligned} v(tp_1, tp_2, tm) &= \left[\left(\frac{tp_2}{(tp_1)(tp_2) + (tp_1)^2}\right)^{0,5} + \left(\frac{tp_1}{(tp_1)(tp_2) + (tp_2)^2}\right)^{0,5}\right]\sqrt{tm} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\left(\frac{p_2}{p_1 p_2 + p_1^2}\right)^{0,5} + \left(\frac{p_1}{p_1 p_2 + p_2^2}\right)^{0,5}\right]\sqrt{t}\sqrt{m} \\ &= \left[\left(\frac{p_2}{p_1 p_2 + p_1^2}\right)^{0,5} + \left(\frac{p_1}{p_1 p_2 + p_2^2}\right)^{0,5}\right]\sqrt{m} = v(p_1, p_2, m) \end{aligned}$$

5.2 Suponha que a utilidade de Bernardo seja $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. Suponha que os preços do bem 1 e do 2 sejam $p_1 =$ R\$ 1 e $p_2 =$ R\$ 1 e que a renda de Bernardo seja R\$ 120.

a) Quais são as quantidades consumidas de cada bem por Bernardo? Qual a utilidade que ele obtém?

S: Vimos que as funções de demanda para esta utilidade são:

$$x_1(p_1, p_2, m) = x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

Para os preços e a renda dados, temos que $x_1^* = x_2^* = 60$. A utilidade obtida é $U^* = 60$.

b) Se o governo instituir um imposto sobre o consumo do bem 1 de modo que o seu preço aumente para $p_1 =$ R\$ 2, quais serão as quantidades consumidas por Bernardo dos dois bens? Qual a utilidade de Bernardo agora?

S: Para o novo preço do bem 1, temos que as funções de demanda descritas no item anterior mostram que $x_1^{**} = x_2^{**} = 40$. A utilidade obtida agora é $U^{**} = 40$.

c) Suponha que o governo abandone a ideia do imposto sobre o consumo do bem 1 e decida taxar a renda do consumidor por um valor que resulte no mesmo montante que obteria com o imposto descrito no item anterior. Quais as novas quantidades consumidas dos dois bens? Qual a utilidade de Bernardo agora?

S: Pelo item anterior, considerando o novo preço, serão vendidas 40 unidades do bem 1. O governo arrecada então R$ 40, já que arrecada R$ 1 por unidade vendida. Instituindo um imposto de renda neste valor, a nova renda do consumidor será R$ 80. As demandas dos dois bens serão portanto $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 40$, as mesmas quantidades obtidas no item anterior com o imposto sobre o consumo do bem 1. Evidentemente, a utilidade obtida agora é a mesma do item anterior, $\bar{U} = 40$.

d) Explique intuitivamente a razão do *princípio Lump Sum* neste exemplo não resulta numa utilidade maior para Bernardo no caso do imposto de renda do que no caso do imposto sobre o consumo.

S: Como a utilidade é do tipo Leontief, em que não há possibilidade de substituição entre os bens e eles devem ser consumidos em proporções fixas, ao substituir o imposto sobre o consumo pelo imposto sobre a renda, o consumidor continua tendo que consumir as mesmas quantidades dos dois bens, já que não há possibilidade de substituição entre eles. Isso implica que os dois tipos de impostos, neste caso, levam ao mesmo nível de bem-estar para o consumidor.

5.3 Suponha que a utilidade de Ana seja $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Suponha que os preços do bem 1 e do 2 sejam $p_1 =$ R$ 2 e $p_2 =$ R$ 2 e que a renda de Ana seja R$ 600.

a) Quais são as quantidades consumidas de cada bem por Ana? Qual a utilidade que ela obtém?

S: Vimos que as funções de demanda para esta utilidade são:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_2}$$

Para os preços e a renda dados, temos que $x_1^* = x_2^* = 150$. A utilidade obtida é $U^* = 150^2 = 22.500$.

b) Se o governo instituir um subsídio sobre o consumo do bem 1 de modo que o seu preço diminua para $p_1 =$ R$ 1, quais serão as quantidades consumidas por Ana dos dois bens? Qual a utilidade de Ana agora?

S: Para o novo preço do bem 1, temos que as funções de demanda descritas no item anterior mostram que $x_1^{**} = 300$ e $x_2^{**} = 150$. A utilidade obtida agora é $U^{**} = 300 \times 150 = 45.000$.

c) Suponha que o governo abandone a ideia do subsídio sobre o consumo do bem 1 e decida repassar um montante fixo para Ana de modo que resulte no mesmo gasto para o governo que o esquema de subsídio anterior gerava. Quais as novas quantidades consumidas dos dois bens? Qual a utilidade de Ana agora?

S: Pelo item anterior, considerando o novo preço, serão consumidas 300 unidades do bem 1. O gasto do governo com o subsídio é R$ 300, já que o governo paga R$ 1 por unidade vendida do bem 1. Instituindo uma tranferência de renda neste valor, a nova renda do consumidor será R$ 900. As demandas dos dois bens serão portanto $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 225$. A utilidade obtida agora é $\bar{U} = 225 \times 225 = 50.625$, maior do que a obtida com o programa de subsídio.

d) Usando a intuição econômica, elabore um argumento a favor de programas de transferência de renda como o Programa Bolsa Família sobre programas do tipo Vale Gás, que subsidiava o preço do gás de cozinha para pessoas carentes. Faça o raciocínio inverso: discuta as vantagens, caso existam, de um programa de subsídios para o consumo de certos bens sobre um programa de transferência de renda.

S: Pelo que foi desenvolvido ao longo da solução da questão, vemos que o programa de transferência de renda, com o mesmo valor gasto do que no programa de subsídio do consumo do bem 1, aumenta o bem-estar do consumidor mais do que o programa de subsídio. Desvantagens do programa de transferência de renda podem estar relacionados a possíveis efeitos de desestimular a oferta de trabalho dos recipientes da transferência. Além disso, pode ser que existam externalidades positivas no consumo de certos bens, onde ao subsidiar o consumo deste bens, o governo internaliza a externalidade e aumenta o bem-estar geral da população. Por exemplo, alguns autores argumentam que programas de vacinação e educação possuem efeitos positivos que vão além dos efeitos privados recebidos pelos indivíduos que participam destes programas, beneficiando a sociedade em geral.

5.4 Suponha que a utilidade de Rafael seja $u(x_1, x_2) = x_1^{0,2} x_2^{0,8}$, onde x_1 é a quantidade de alimentos que Rafael consome e x_2 é a quantidade de todos os outros bens que Rafael consome (um bem composto, portanto). Suponha que o preço do bem 2 é $p_2 =$ R\$ 1 e que a renda de Rafael é R\$ 1000.

a) Se o preço do bem 1 é R\$ 2, qual é o consumo de alimentos de Rafael?

S: Essa é uma utilidade Cobb-Douglas, cuja derivação das demandas para o caso geral está nas notas de aula (veja problema 12 abaixo também). Para os valores dos parâmetros da utilidade, temos que as funções de demanda são:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{5p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{4m}{5p_2}$$

Para os valores de renda e preços descritos, a demanda por alimentos de Rafael é $x_1^* = 100$ (e $x_2^* = 800$).

b) Se o preço do bem 1 duplicar, qual será o novo consumo de alimentos de Rafael?

S: O novo consumo de x_1 de Rafael será 50 nesse caso. O consumo de x_2 será $x_2 = 800$.

c) Suponha agora que o governo resolva subsidiar alimentos, mantendo o preço igual a R\$ 2 – ou seja, concendendo um subsídio de R\$ 2 por unidade consumida de x_1. Se o governo financia esse subsídio por meio da cobrança de um imposto sobre a renda, qual é o novo nível de consumo de x_1 de Rafael?

S: Se a relação de preços volta a ser a antiga, o equilíbrio do consumidor volta a satisfazer no ótimo a relação de taxa marginal de subsitutição entre os bens igual aos preços relativos, $x_2^*/4x_1^* = p_1/p_2 = 2$, ou seja, $x_2^* = 8x_1^*$. A nova restrição orçamentária é:

$$2x_1 + x_2 = \hat{m}\,,$$

onde $\hat{m} = m - 2x_1 = 1000 - 2x_1$. Sabendo que $x_2^* = 8x_1^*$ no ótimo, obtemos que o seguinte sistema:

$$10x_1 = \hat{m} \ \text{ e } \ \hat{m} = m - 2x_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{m} = \frac{5}{6} \times m = \frac{5}{6} \times 1000$$

Então as novas demandas são:

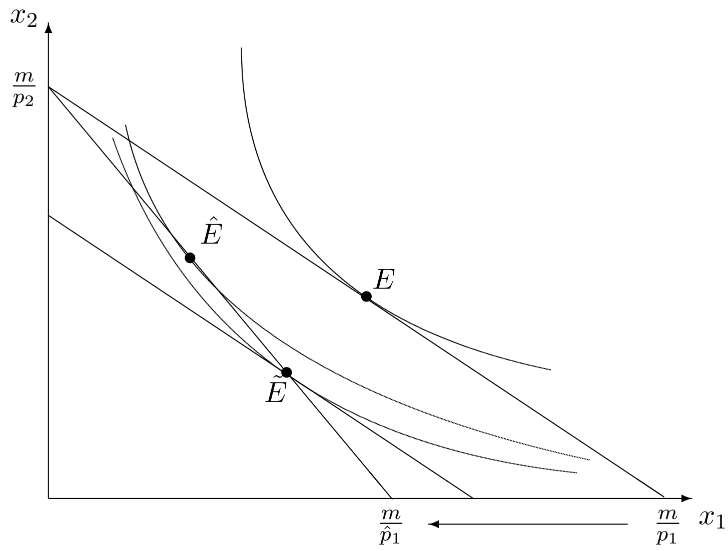
$$x_1^{**} = 500/6 \approx 83{,}33 \qquad \text{e} \qquad x_2^{**} = 2000/3 \approx 666{,}67$$

d) Construa um diagrama comparando as situações em b) e c) e mostre em qual situação o consumidor está melhor.

S: O diagrama está representado na figura abaixo. O ponto E é o equilíbrio inicial. Quando o preço do bem 1 aumenta, o equilíbrio se desloca para o ponto $\hat{E}$. Quando o governo adota o subsídio, a restrição orçamentária volta a ter a mesma inclinação de antes, porém ela se encontra a esquerda da restrição orçamentária original, já que o governo taxa o indivíduo para pagar o subsídio (logo, o novo ponto de ótimo de consumo no caso em que o governo adota o subsídio, $\tilde{E}$, se encontra na interseção das duas restrições orçamentárias). Calculando a utilidade nos dois casos, temos que:

$$\begin{aligned} \text{sem subsídio}: \quad & u(x_1^*, x_2^*) = 50^{0,2} 800^{0,8} = 459{,}48 \\ \text{com subsídio}: \quad & u(x_1^{**}, x_2^{**}) = (500/6)^{0,2} \, (2000/3)^{0,8} = 439{,}84 \end{aligned}$$

Logo, o consumidor está melhor na situação sem o subsídio. Portanto, Rafael estaria melhor se o governo não interferisse no aumento de preço do bem 1.



e) Relacione a sua resposta para esta questão com o princípio Lump Sum.

S: Novamente, a transferência de renda no valor do gasto com o subsídio aumenta a utilidade mais do que o subsídio com o bem aumentaria. Isso o esperado, segundo o princípio Lump Sum.

NA 6 – ELASTICIDADES

6.1) Derive as agregações de Engel e Cournot para o caso de n bens. Reescreva essas agregações em termos de elasticidades. Interprete (por exemplo, é possível que todos os bens que um indivíduo consuma sejam bens inferiores? Por quê? Se um indivíduo consome n bens, no máximo quantos bens podem ser inferiores? Justifique sua resposta).

S: Derivando a Lei de Walras para o caso de n bens, dada por :

$$p_1 x_1(\mathbf{p}, m) + p_2 x_2(\mathbf{p}, m) + \cdots + p_n x_n(\mathbf{p}, m) = m\,,$$

com relação à renda, obtemos a *agregação de Engel*:

$$p_1 \frac{\partial x_1(\mathbf{p}, m)}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2(\mathbf{p}, m)}{\partial m} + \cdots + p_n \frac{\partial x_n(\mathbf{p}, m)}{\partial m} = 1$$

Multiplicando o lado esquerdo da equação acima por $x_1 m / x_1 m$ e rearranjando os termos obtemos:

$$\frac{p_1 x_1}{m} \left(\frac{m}{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial m} \right) + \frac{p_2 x_2}{m} \left(\frac{m}{x_2} \frac{\partial x_2}{\partial m} \right) + \cdots + \frac{p_n x_n}{m} \left(\frac{m}{x_n} \frac{\partial x_n}{\partial m} \right) = 1$$

Logo, a agregação de Engel escrita em termos de elasticidades é:

$$s_1 \eta_1 + s_2 \eta_2 + \cdots + s_n \eta_n = 1 \,,$$

onde $s_i = p_i x_i / m$ é a fração da renda gasta com o bem i e η_i é a elasticidade-renda do bem i. Podemos concluir que:

(a) Todas as elasticidades-renda podem ser iguais a um. Nesse caso, um aumento da renda leva a um aumento na mesma proporção do consumo de todos os bens (se a renda aumentou em 10%, o consumo de cada bem aumenta em 10%).

(b) Se $\eta_i > 1$ para algum bem i, então deve existir algum bem j diferente do bem i tal que $\eta_j < 1$: se a fração da renda consumida do bem i aumentou mais do que proporcionalmente à renda, o consumo de algum outro bem j terá que aumentar menos do que proporcionalmente à renda.

(c) No máximo $n - 1$ bens podem ser inferiores (se todos os bens são inferiores, então a elasticidade-renda η_i será negativa para todo bem $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $s_i \geq 0$ (s_i é a fração da renda gasta com o bem i), então se todas as elasticidades-renda forem negativas, a igualdade acima não será verificada).

Se derivarmos a Lei de Walras com respeito ao preço do bem i, obtemos a *agregação de Cournot* (com relação ao preço do bem i):

$$x_i(\mathbf{p}, m) + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i} = 0$$

Multiplicando a expressão acima por p_i / m, obtemos a agregação de Cournot em termos de elasticidades:

$$\frac{x_i p_i}{m} + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j x_j}{m} \frac{p_i}{x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = s_i + \sum_{j=1}^{n} s_j \varepsilon_{ji}^M$$

Rearranjando os termos da última equção acima, obtemos:

$$s_i (1 + \varepsilon_{ii}^M) = - \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} s_j \varepsilon_{ji}^M \tag{1}$$

Se o bem i é elástico (inelástico), então $\varepsilon_{ii}^M < -1$, e o lado esquerdo de (1) é negativo (positivo). O lado direito de (1) deve ser negativo (positivo) também, ou seja, a soma ponderada das elasticidades-preço cruzadas dos outros bens com relação ao bem i deve ser na média positiva (negativa). Portanto, se a demanda do bem i é elástica (inelástica), então os outros bens devem ser, na média ponderada pela fração gasta em cada bem, substitutos (complementares) do bem i, *independente de como esses bens afetem a função de utilidade.*

Outra implicação que pode ser tirada da equação (1) é a reação dos gastos nos outros bens devido a uma mudança no preço do bem i: essa reação depende da elasticidade-preço de i. Se a demanda do bem i é elástica, então quando o preço do bem i diminui, o gasto com os outros bens diminui também.

6.2) Suponha a existência de n bens. Usando a propriedade de homogeneidade das funções de demanda Marshalliana, mostre que as elasticidades-preço e renda de um dado bem i satisfazem a seguinte igualdade:

$$\eta_i + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{ij} = 0, \tag{2}$$

onde η_i é a elasticidade-renda do bem i e ϵ_{ij} é a elasticidade-preço da demanda do bem i com relação ao preço do bem j. Interprete intuitivamente a relação (2) acima.

S: A função de demanda Marshalliana é homogênea de grau zero nos preços e na renda. Logo, para cada bem $i = 1, \ldots, n$, temos:

$$x_i(t\mathbf{p}, ty) = x_i(\mathbf{p}, y), \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

Derivando essa expressão com respeito a t, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i(t\mathbf{p}, ty)}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial x_i(t\mathbf{p}, ty)}{\partial y} y = 0, \tag{3}$$

para todo $t > 0$. Dividindo a igualdade acima por $x_i(t\mathbf{p}, ty)$, fazendo $t = 1$ e reescrevendo (3) em termos de elasticidades obtemos a expressão desejada:

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} + \eta_i = 0\,, \qquad \text{válida para todo } i = 1, \ldots, n\,.$$

6.3) Suponha que a elasticidade-renda da demanda per capita de cerveja é constante e igual a $3/4$ e a elasticidade-preço é também constante e igual a $-1/2$. Os consumidores gastam, em média, R$ 400,00 por ano com cerveja. A renda média anual destes consumidores é R$ 6.000,00. Cada garrafa de cerveja custa R$ 3,00.

a) Se o governo pretende desestimular o consumo de cerveja pela metade, qual deve ser o aumento no preço da cerveja que alcançaria esta meta?

S: Elasticidade-preço constante e igual a $-1/2$ significa que um aumento em 10% no preço leva a uma redução na quantidade demandada em 5%. Logo, um aumento no preço em 100% levaria à redução almejada pelo governo de 50% na quantidade consumida de cerveja. Cada garrafa de cerveja passaria então a custar R$ 6,00.

b) Suponha que o governo estimou um aumento da renda média anual no próximo ano de R$ 3.000,00. O governo deseja manter o nível de consumo de cerveja constante no próximo ano, usando um imposto sobre o preço da cerveja. Qual deve ser o aumento no preço da cerveja no próximo ano para que o seu consumo não se modifique, dado que a previsão de aumento de renda se realize?

S: Como a elasticidade-renda da demanda cerveja é constante e igual a $3/4$ e um aumento na renda de R$ 3.000,00 sobre uma renda de R$ 6.000,00 corresponde a um aumento de 50% na renda, o aumento no consumo de cerveja será de $3/4 \times 50\% = 37{,}50\%$. Pelo mesmo motivo explicado no item a) acima, o aumento no preço da cerveja necessário para anular o efeito do aumento de renda é de $2 \times 37{,}50\% = 75\%$. Cada garrafa de cerveja passaria então a custar R$ 5,25.

NA 7 – MINIMIZAÇÃO DE DISPÊNDIO

7.1) A utilidade de Maria é $u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2$.

a) Encontre as demandas Marshallianas de Maria. Derive as elasticidades-preço, preço-cruzada e renda para os dois bens, para o caso de solução interior.

S: O problema do consumidor pode ser escrito como:

$$\max_{x_1 \geq 0} \ \ln x_1 + m/p_2 - (p_1/p_2)x_1$$

A CPO resulta em:

$$\frac{1}{x_1^*} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_1^M(p_1, p_2, m) = \frac{p_2}{p_1}$$

A demanda do outro bem é encontrada substituindo a demanda do bem 1 na reta orçamentária:

$$x_2 = m/p_2 - (p_1/p_2)x_1^* = m/p_2 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_2^M(p_1, p_2, m) = m/p_2 - 1$$

Mais rigorosamente, note que se $m < p_2$, o consumidor não consegue comprar a quantidade p_2/p_1 do bem 1 (pois $p_1x_1^* = p_2 > m$). Logo, as demandas dos bens 1 e 2 são completamente definidas por:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} p_2/p_1 & \text{se } p_2 \leq m \\ m/p_1 & \text{se } p_2 > m \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x_2^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} m/p_2 - 1 & \text{se } p_2 \leq m \\ 0 & \text{se } p_2 > m \end{cases}$$

As elasticidades pedidas estão calculadas no item abaixo.

b) Classifique os bens em termos de cada uma dessas elasticidades, como visto em sala, para o caso de solução interior.

S: Vamos calcular as elasticidades dos dois bens para o caso em que a renda é grande o suficiente, de modo de que as demandas sejam positivas. Nesse caso, para o bem x_1 temos que:

$$\varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_{12} = 1, \quad \eta_1 = 0\,.$$

Portanto o bem 1 tem elasticidade-preço unitária, é um bem normal, cuja demanda não é afetada pela renda ($\eta_1 = 0$), e é substituto bruto do bem 2. Para o bem x_2 temos que:

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{1 - p_2/m}, \quad \varepsilon_{21} = 0, \quad \eta_2 = \frac{1}{1 - p_2/m}\,.$$

Logo o bem 2 é um bem comum (pois estamos analisando o caso $m \geq p_2$), é um bem normal de luxo, e não é nem substituto bruto nem complementar bruto do bem 1.

c) Encontre as demandas Hicksianas dos dois bens. Compare a demanda Hicksiana com a demanda Marshalliana do bem 1, quando as demandas são positivas. Interprete.

S: O problema dual do consumidor pode ser escrito como:

$$\min_{x_1 \geq 0} p_1x_1 + p_2(\bar{u} - \ln(x_1))$$

A CPO resulta em:
$$p_1 = \frac{p_2}{x_1^*} \qquad \Rightarrow \qquad x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{p_2}{p_1}$$
A demanda hicksiana do outro bem é encontrada substituindo a demanda do bem 1 na restrição do problema:
$$x_2^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u} - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$
Portanto, para o primeiro bem, no caso de as demandas serem positivas, a demanda marshalliana é igual à demanda hicksiana.

Podemos definir elasticidades similares às que foram definidas na Nota de Aula 6, mas usando as demandas hicksianas. Essas elasticidades são denominadas *compensadas*. Podemos definir um bem i como *substituto líquido* (*complementar líquido*) do bem j caso ϵ_{ij}^h seja positivo (negativo), onde ϵ_{ij}^h denota a elasticidade preço-cruzada da demanda compensada do bem i (com relaçõ ao preço do bem j).

d) Classique os bens 1 e 2 em termos de complementares ou substitutos líquidos. Neste caso, ao contrário do que o item b) acima mostra, seria possível ocorrer que o bem i seja substituto líquido (complementar líquido) do bem j mas o bem j não seja substituto líquido (complementar líquido) do bem i? Explique.

S: Usando as demandas hicksianas derivadas no item anterior, temos que:
$$\epsilon_{12}^h = \frac{\partial x_1^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1^h(\mathbf{p}, \bar{u})} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{p_2}{p_2/p_1}\right) = 1 > 0$$
$$\epsilon_{21}^h = \frac{\partial x_2^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2^h(\mathbf{p}, \bar{u})} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{p_2}{\bar{u} - \ln(p_2/p_1)}\right) = \frac{p_2}{\bar{u}p_1 - p_1\ln(p_1/p_2)} > 0$$
Observe que precisamos mostrar que o denominador da elasticidade ϵ_{21}^h será de fato positivo. Isso ocorre sempre que a solução for interior (ou seja, se $x_2^h > 0$, o que estamos supondo). Temos então que os dois bens são substitutos líquidos um do outro. Para essa classificação dos bens em substitutos ou em complementares, *em termos da demanda hicksiana*, não pode ocorrer que um bem i seja substituto líquido (complementar líquido) do bem j mas o bem j não seja substituto líquido (complementar líquido) do bem i. Isso se deve à propriedade de simetria das demandas hicksianas: como $\partial x_i^h/\partial p_j = \partial x_j^h/\partial p_i$, as elasticidade compensadas ϵ_{ij}^h e ϵ_{ji}^h terão sempre o mesmo sinal.

7.2) Encontre as demandas Hicksianas e a função dispêndio para os seguintes casos:

a) Utilidade Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

S: O Lagrangeano deste caso é:
$$\mathcal{L} = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu(\bar{u} - x_1^\alpha x_2^{1-\alpha})$$
As CPO resultam em:
$$\begin{aligned}(x_1):&\quad p_1 = \mu\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}\\ (x_2):&\quad p_2 = \mu(1-\alpha)x_1^\alpha x_2^{-\alpha}\\ (\mu):&\quad \bar{u} = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}\end{aligned}$$
Dividindo as duas primeiras CPO, achamos uma expressão para x_2 em função de x_1. Substituindo essa expressão na terceira CPO, encontramos a demanda para o bem 1.

Substituindo a demanda do bem 1 para a expressão de x_2 em função de x_1, encontramos a demanda do bem 2. Essas demandas são:

$$\begin{cases} x_1^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha}\bar{u} \\ x_2^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} p_1^{\alpha}p_2^{-\alpha}\bar{u} \end{cases}$$

A função de dispêndio é:

$$e(p_1,p_2,\bar{u}) = p_1x_1^h + p_2x_2^h = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\bar{u}$$

b) Utilidade linear: $u(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2$, $a,b > 0$.

S: Sabemos que neste caso não podemos montar o Lagrangeano para resolver o problema, pois a solução será (quase sempre) de canto. Podemos usar o método de Kuhn-Tucker, mas vamos resolver o problema usando intuição econômica. O problema que queremos resolver é:

$$\min_{x_1,x_2\geq 0} p_1x_1 + p_2x_2 \qquad \text{s.a.} \qquad ax_1 + bx_2 = \bar{u}$$

Intuitivamente, o consumidor irá adquirir apenas o bem relativamente mais barato, na quantidade que lhe assegure o nível de utilidade $\bar{u}$. Por isso, as demandas Hicksianas são:

$$x_1^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}, & \text{se } p_1/a < p_2/b \\ 0, & \text{se } p_1/a > p_2/b \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x_2^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \begin{cases} 0, & \text{se } p_1/a < p_2/b \\ \bar{u}, & \text{se } p_1/a > p_2/b \end{cases}$$

Para o caso $p_1/a = p_2/b$, qualquer cesta (x_1^*, x_2^*) tal que $ax_1 + bx_2 = \bar{u}$ é solução do problema. A função dispêndio é:

$$e(p_1,p_2,\bar{u}) = p_1x_1^h + p_2x_2^h = \min\left\{\frac{p_1}{a}\bar{u}, \frac{p_2}{b}\bar{u}\right\} = \min\left\{\frac{p_1}{a}, \frac{p_2}{b}\right\}\bar{u}.$$

c) Utilidade Leontief: $u(x_1,x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, $a,b > 0$.

S: Este é outro caso onde não podemos usar o método de Lagrange, agora por que a função de utilidade não é diferenciável. Vamos novamente resolver o problema usando intuição econômica. O problema que queremos resolver é:

$$\min_{x_1,x_2\geq 0} p_1x_1 + p_2x_2 \qquad \text{s.a} \qquad \min\{ax_1, bx_2\} = \bar{u}$$

Intuitivamente, o consumidor tem que consumir ambos os bens em quantidades tais que $ax_1 = bx_2$, já que os bens são complementares perfeitos, de modo que alcance a utilidade $\bar{u}$. Por isso, as demandas Hicksianas são:

$$x_1^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \frac{\bar{u}}{a} \qquad \text{e} \qquad x_2^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \frac{\bar{u}}{b}$$

A função dispêndio é:

$$e(p_1,p_2,\bar{u}) = p_1x_1^h + p_2x_2^h = p_1\frac{\bar{u}}{a} + p_2\frac{\bar{u}}{b} = \left(\frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{b}\right)\bar{u}.$$

d) Utilidade CES: $u(x_1,x_2) = [ax_1^{\rho} + bx_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$, $a,b > 0$, $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

S: O Lagrangeano deste caso é:

$$\mathcal{L} = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu(\bar{u} - [ax_1^{\rho} + bx_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}})$$

As CPO resultam em:

$$
\begin{aligned}
(x_1): &\quad p_1 = \mu \left[a x_1^\rho + b x_2^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}-1} a x_1^{\rho-1} \\
(x_2): &\quad p_2 = \mu \left[a x_1^\rho + b x_2^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}-1} b x_2^{\rho-1} \\
(\lambda): &\quad \bar{u} = \left[a x_1^\rho + b x_2^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}}
\end{aligned}
$$

Dividindo as duas primeiras CPO, achamos uma expressão para x_2 em função de x_1,

$$x_2 = \left[\frac{a p_2}{b p_1} \right]^{\frac{1}{\rho-1}} x_1$$

Substituindo essa expressão na terceira CPO, encontramos a demanda Hicksiana para o bem 1. Substituindo a demanda do bem 1 na expressão de x_2 em função de x_1, encontramos a demanda Hicksiana do bem 2. Essas demandas são:

$$
\begin{aligned}
x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) &= \left[a + b \left(\frac{a p_2}{b p_1} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-\frac{1}{\rho}} \bar{u} \\
x_2^h(p_1, p_2, \bar{u}) &= \left[\frac{a p_2}{b p_1} \right]^{\frac{1}{\rho-1}} \left[a + b \left(\frac{a p_2}{b p_1} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-\frac{1}{\rho}} \bar{u}
\end{aligned}
$$

A função de dispêndio é:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = p_1 x_1^h + p_2 x_2^h \, ,$$

onde devemos substituir as demandas pelos dois bens para obter a expressão final do dispêndio, como função dos preços e do nível de utilidade.

7.3) Resolva os seguintes itens para cada uma das funções de utilidade elencadas no exercício anterior.

a) Verifique se as demandas Hicksianas são homogêneas de grau 0 nos preços.

S: Vamos mostrar para o bem 1, para o outro bem é similar:

a.1) (Cobb-Douglas) $x_1^h(tp_1, tp_2, \bar{u}) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} (tp_1)^{\alpha-1}(tp_2)^{1-\alpha}\bar{u} = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$;

a.2) (Linear)

$$x_1^h(tp_1, tp_2, \bar{u}) = \left\{ \begin{array}{ll} \bar{u}/a, & \text{se} \quad (tp_1)/a < (tp_2)/b \\ \text{qq coisa entre 0 e } \bar{u}/a, & \text{se} \quad (tp_1)/a = (tp_2)/b \\ 0, & \text{se} \quad (tp_1)/a > (tp_2)/b \end{array} \right\} = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$$

a.3) (Leontief) $x_1^h(tp_1, tp_2, \bar{u}) = \bar{u}/a = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$.

a.4) (CES) $x_1^h(tp_1, tp_2, \bar{u}) = \left[a + b \left(\frac{a(tp_2)}{b(tp_1)} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-\frac{1}{\rho}} \bar{u} = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$

b) Cheque a validade do lema de Shephard para o bem 1.

S: Temos que:

b.1) (Cobb-Douglas) $\partial e/\partial p_1 = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}\alpha p_1^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha}\bar{u} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha}\bar{u} = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$;

b.2) (Linear) Neste caso, a função dispêndio não é diferenciável;

b.3) (Leontief) $\partial e/\partial p_1 = \bar{u}/a = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$;

b.4) (CES) $\partial e/\partial p_1 = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$. Neste caso, a conta é mais complicada.

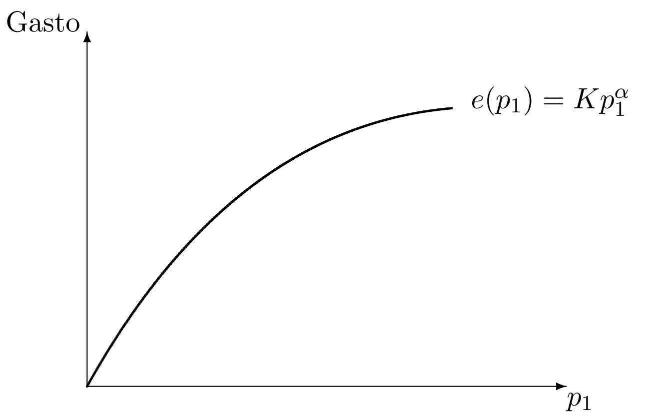
c) Cheque se a propriedade de simetria é satisfeita.

d) Ilustre graficamente a função dispêndio como função do preço do bem 1, todas as outras variáveis constantes. Interprete economicamente o formato de cada gráfico em termos da possibilidade de substituição do consumo dos dois bens.

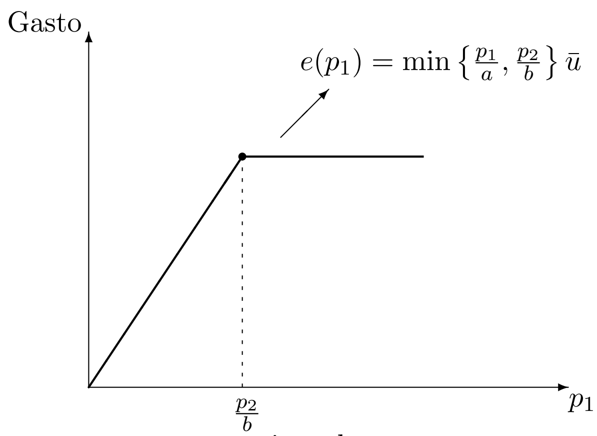
S: Vamos denotar as funções dispêndios apenas como função do preço do bem 1, a fim de ilustrar graficamente o dispêndio como função do preço deste bem.

c.1) (Cobb-Douglas) $e(p_1) = Kp_1^{\alpha}$, onde $K = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha}\bar{u}$. O formato estritamente côncavo da função dispêndio indica que o efeito substituição entre os dois bens não é nulo. Se o preço do bem 1 aumentar, por exemplo, o consumidor substituirá parte do consumo deste bem por consumo do outro bem, aumentando seu gasto em uma proporção menor do que se não alterasse sua escolha de consumo com a mudança do preço.

c.2) (Linear) $e(p_1) = \min\{p_1/a, p_2/b\}\,\bar{u}$. O formato da função dispêndio indica uma quebra. Se o preço do bem 1 se altera dentro da região de preços onde o bem continua relativamente mais barato do que o bem 2 ($p_1/a < p_2/b$), então o aumento do dispêndio é linear e não há nenhuma substituição de consumo – o indivíduo continua consumindo apenas o bem 1. Porém, se p_1/a for maior do que p_2/b, então aumentos subsequentes de preços deste bem não afetarão a função dispêndio, já que se $p_1/a > p_2/b$ então o consumidor está consumindo apenas o bem 2.



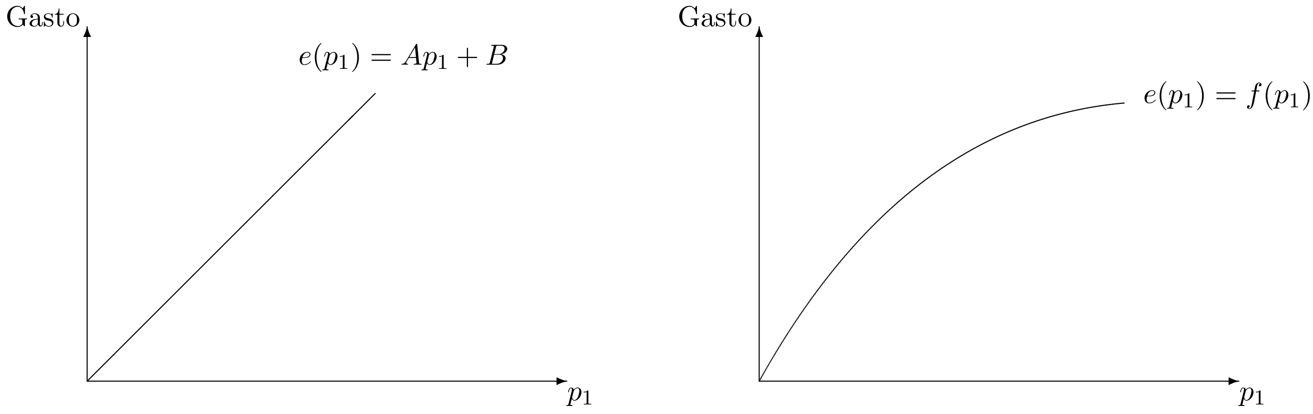
item a



item b

c.3) (Leontief) $e(p_1) = Ap_1 + B$, onde $A = \bar{u}/a$ e $B = (p_2/b)\bar{u}$. O formato linear da função dispêndio indica que não existe possibilidade de substituição entre os dois bens (efeito substituição nulo). Se o preço do bem 1 aumentar, por exemplo, o dispêndio mínimo necessário para se alcançar determinado nível de utilidade aumentará na mesma proporção.

c.4) (CES) Podemos escrever $e(p_1) = f(p_1)$ e mostrar que $f'(p_1) > 0$ e $f''(p_1) < 0$. Logo, a função dispêndio é estritamente côncava, indicando que o efeito substituição entre os dois bens não é nulo (similar ao item a) acima).



item c

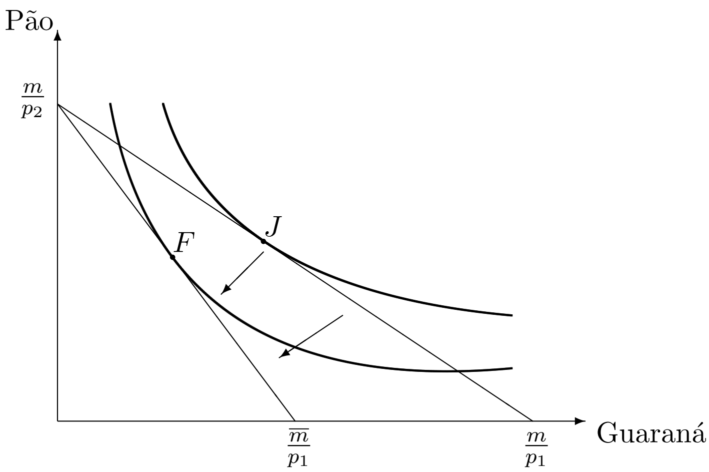
item d

NA 8 – EQUAÇÃO DE SLUTSKY

8.1) Suponha que os únicos bens que Renata consome são guaraná e pão e que as preferências de Renata são estritamente convexas.

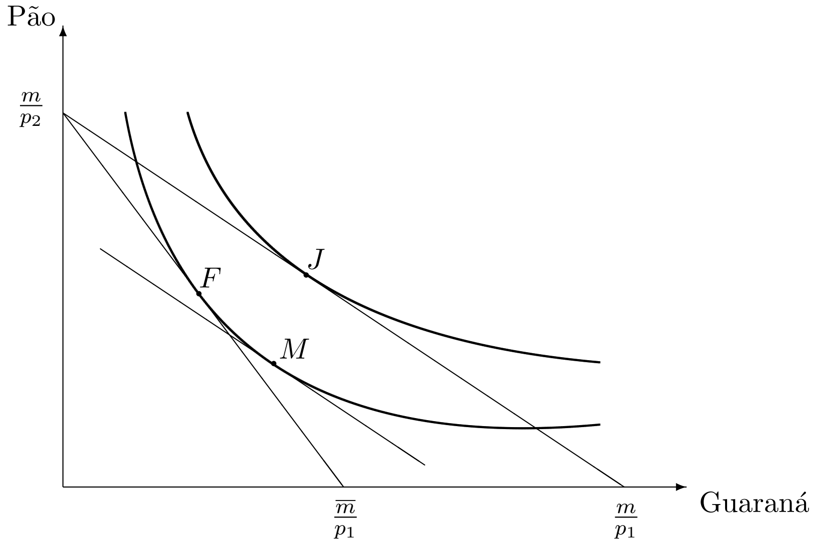
a) Entre janeiro e fevereiro, o preço do guaraná sobe (e nada mais muda). Ilustre em um mesmo gráfico as escolhas ótimas de Renata nos dois meses (denote por J a escolha ótima em Janeiro e por F a escolha ótima em fevereiro), representando o consumo de pão no eixo vertical e o consumo do guaraná no eixo horizontal (mantenha essa convenção para o resto do exercício).

S: Como apenas o preço do guaraná mudou, a reta orçamentária se altera, e a escolha do consumidor se altera, conforme mostra a figura abaixo.



b) Em março, o preço do guaraná volta ao mesmo nível de janeiro, porém a renda de Renata diminui em um montante tal que agora ela alcança o mesmo bem-estar de fevereiro. Ilustre a escolha ótima de Renata em março (denote essa escolha ótima por M) juntamente com as outras duas escolhas ótimas de Renata.

S: O ponto chave é que a diminuição da renda de Renata em março é tal que ela mantém a mesma utilidade que obteve em fevereiro. Portanto, as escolhas ótimas representadas pelos pontos F e M estão sobre a mesma curva de indiferença. A figura abaixo ilustra essa situação.



c) Analise os seguintes itens, dizendo sob quais condições serão verdadeiros.

c.1) J está à esquerda de F.
S: Ocorre se guaraná é um bem de Giffen.

c.2) F está à esquerda de M.
S: Sempre verdadeiro. Essa mudança é um efeito substituição, que sempre é negativo (no caso de utilidade bem-comportadas; ou não-positivo, no caso geral).

c.3) J está à esquerda de M.
S: Ocorre se guaraná é um bem inferior.

d) Justifique a afirmação *"Todo o bem de Giffen é um bem inferior"* em termos do que você fez nesse exercício, não recorra à teoria vista em sala.

S: Pelas figuras e itens acima, se guaraná é um bem de Giffen, então o ponto J está à esquerda de F. Como o ponto F está sempre à esquerda de M, então quando guaraná for um bem de Giffen o ponto J necessariamente estará à esquerda de M, ou seja, guaraná é um bem inferior.

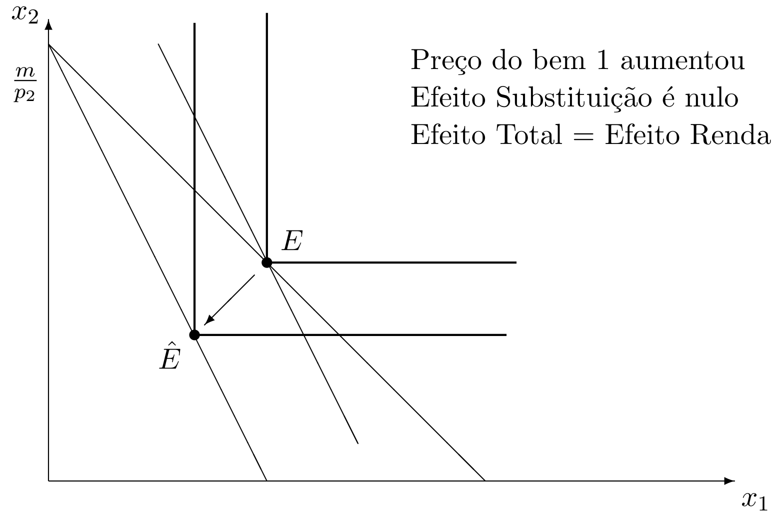
8.2) A utilidade de Carlos é $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. A renda de Carlos é R\$ 20, e os preços dos bens 1 e 2 são R\$ 1 e R\$ 1. Suponha que o preço do bem 1 aumentou para R\$ 2.

a) Encontre o efeito total desse aumento na demanda de Carlos pelo bem 1.

S: Aos preços antigos, a demanda de Carlos era $x_1^M = x_2^M = 10$. Aos novos preços, a demanda de Carlos se modifica para $\hat{x}_1^M = \hat{x}_2^M = 20/3$. O efeito total do aumento do preço do bem na demanda por esse bem é uma redução do consumo do bem 1 igual a $10 - 20/3 \approx 3{,}33$ unidades.

b) Decomponha o efeito total em efeito substituição Hicksiano e efeito renda. Interprete intuitivamente o seu resultado.

S: Na utilidade de Leontief, os bens são complementares perfeitos – não existe possibilidade de substituição entre os dois bens. Portanto, o efeito substituição é zero e todo o efeito é efeito renda. O gráfico abaixo ilustra essa situação.



c) Decomponha o efeito total em efeito substituição de Slutsky e efeito renda. Interprete intuitivamente o seu resultado.

S: Para o caso de um efeito de substituição de Slutsky, a compensação é de modo que o consumidor possa comprar a mesma cesta que adquiria aos preços antigos, mas agora aos preços novos. Portanto, o efeito substituição de Slutsky vai também ser zero e o efeito total é todo efeito renda.

8.3) Assuma que a utilidade de Maria é $u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2$. Suponha que a renda de Maria é R$40, e os preços dos bens 1 e 2 são R$ 1 e R$ 1. Suponha que o preço do bem 1 aumentou para R$ 2. Encontre o efeito total desse aumento na demanda de Maria pelo bem 1 e pelo bem 2. Decomponha esses dois efeitos em efeito substituição Hicksiano e efeito renda. Interprete intuitivamente o seu resultado.

S: Na solução do Exercício 2 da NA 6 obtivemos que:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} p_2/p_1 & \text{se } p_2 \leq m \\ m/p_1 & \text{se } p_2 > m \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x_2^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} m/p_2 - 1 & \text{se } p_2 \leq m \\ 0 & \text{se } p_2 > m \end{cases}$$

Substituindo os valores de p_1, p_2 e m, encontramos $x_1^M(1, 1, 40) = 1$ e $x_2^M(1, 1, 40) = 39$. Aos novos preços, as demandas dos dois bens são $\hat{x}_1^M(2, 1, 40) = 0{,}5$ e $\hat{x}_2^M(1, 1, 40) = 39{,}5$. O efeito total para o bem 1 desta mudança de preços é:

$$\Delta x_1 = \hat{x}_1 - x_1 = -0{,}5$$

Neste caso, o efeito renda para o bem 1 é nulo, todo o efeito da mudança de preços é efeito substituição. Isso é intuitivamente esperado: a demanda do bem 1 não depende da renda, quando a renda é grande o suficiente. Logo, uma mudança de preços altera a demanda do bem 1 apenas pelo efeito substituição, já que não existe efeito renda para este bem.

8.4) Suponha que a função utilidade indireta de um consumidor é:

$$v(p_1, p_2, m) = 50 \left[\frac{1}{p_1^{1/2} p_2} \right]^{2/3} m.$$

a) Encontre as funções de demanda Marshallianas dos dois bens e as frações da renda gastas com cada bem.

S: Pela identidade de Roy, temos que:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = -\frac{\partial v(p_1, p_2, m)/\partial p_1}{\partial v(p_1, p_2, m)/\partial m} = -\frac{50(-2/3)(p_1^{1/2} p_2)^{-2/3-1} m (1/2) p_1^{-1/2} p_2}{50(p_1^{1/2} p_2)^{-2/3}} = \frac{m}{3p_1}\,,$$
$$x_2^M(p_1, p_2, m) = -\frac{\partial v(p_1, p_2, m)/\partial p_2}{\partial v(p_1, p_2, m)/\partial m} = -\frac{50(-2/3)(p_1^{1/2} p_2)^{-2/3-1} m p_1^{1/2}}{50(p_1^{1/2} p_2)^{-2/3}} = \frac{2m}{3p_2}\,.$$

As frações da renda gastas com cada bem são:

$$s_1 = \frac{p_1 x_1^M(p_1, p_2, m)}{m} = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad s_2 = \frac{p_2 x_2^M(p_1, p_2, m)}{m} = \frac{2}{3}$$

b) Encontre a função dispêndio desse consumidor. Use o lema de Shephard para encontrar as demandas Hicksianas dos dois bens.

S: Usando a relação de dualidade $v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = \bar{u}$ obtemos:

$$v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = 50 \left[\frac{1}{p_1^{1/2} p_2} \right]^{2/3} e(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u} \quad \Rightarrow \quad e(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{1}{50} p_1^{1/3} p_2^{2/3} \bar{u}$$

Usando o Lema de Shephard, encontramos as demandas Hicksianas:

$$x_1^h = \frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{1}{150} \times p_1^{-2/3} p_2^{2/3} \bar{u} \qquad \text{e} \qquad x_2^h = \frac{\partial e}{\partial p_2} = \frac{1}{75} \times p_1^{1/3} p_2^{-1/3} \bar{u}$$

c) Usando os resultados de a) e b), verifique a equação de Slutsky para o bem x_1.

S: Derivando a demanda Marshallina e a demanda Hicksiana para o bem 1, em relação ao seu preço, e derivando a demanda Marshalliana desse bem em relação a renda, obtemos:

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} = -\frac{m}{3p_1^2}\,, \quad \frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} = -\frac{1}{225} p_1^{-5/3} p_2^{2/3} \bar{u}\,, \quad \frac{\partial x_1^M}{\partial m} = \frac{1}{3p_1}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^h(p_1, p_2, v(p_1, p_2, m))}{\partial p_1} - x_1^M \frac{\partial x_1^M}{\partial m} &= -\frac{1}{225} p_1^{-5/3} p_2^{2/3} 50 \left[\frac{1}{p_1^{1/2} p_2} \right]^{2/3} m - \frac{m}{3p_1} \left(\frac{1}{3p_1} \right) \\
&= -\frac{2m}{9p_1^2} - \frac{m}{9p_1^2} = -\frac{m}{3p_1^2} = \frac{\partial x_1^M(p_1, p_2, m)}{\partial p_1}\,,
\end{aligned}$$

ou seja, a equação de Slutsky é válida, como esperado.

NA 9 – BEM-ESTAR

9.1) Considere a função de utilidade dada por:

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2,$$

onde x_1 e x_2 são as quantidades consumidas dos bens 1 e 2, respectivamente.

a) Calcule as funções de demandas Marshallianas e a função de utilidade indireta.

S: Essa é uma utilidade do tipo Cobb-Douglas. Vimos que as demandas são:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{2m}{3p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{3p_2}$$

A função de utilidade indireta é:

$$v(p_1, p_2, m) = u(x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m)) = \left(\frac{2m}{3p_1}\right)^2 \left(\frac{m}{3p_2}\right) = \frac{4}{27}\left(\frac{m^3}{p_1^2 p_2}\right)$$

b) Suponha que os preços dos bens 1 e 2 são $p_1 =$ R\$ 4 e $p_2 =$ R\$ 2, respectivamente, e que a renda do consumidor é R\$ 90. Calcule a quantidade consumida de cada bem.

S: Usando as demandas derivadas no item acima, obtemos:

$$x_1^* = \frac{2 \times 90}{3 \times 4} = 15 \qquad \text{e} \qquad x_2^* = \frac{90}{3 \times 2} = 15$$

c) Calcule as elasticidades preço e renda do bem 1. Se a renda aumentar em 10%, você pode dizer o que ocorre com o consumo do bem, sem ter conhecimento do valor original da renda?

S: As elasticidades preço e renda da demanda do bem 1 são:

$$\varepsilon_{11} = \frac{p_1}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -\frac{p_1}{\frac{2}{3}\frac{m}{p_1}}\frac{2}{3}\frac{m}{p_1^2} = -1 \qquad \text{e} \qquad \eta_1 = \frac{m}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial m} = \frac{m}{\frac{2}{3}\frac{m}{p_1}}\frac{2}{3}\frac{1}{p_1} = 1$$

Se a renda aumentar em 10%, então o consumo do bem 1 aumentará em 10%.

d) Suponha que os preços dos bens e a renda são como dados no item b). Calcule a variação no excedente do consumidor no caso em que o preço do bem 2 aumenta para R\$ 4.

S: A variação no EC é:

$$\Delta EC = \int_4^2 x_2(p_1, p_2, m)\, dp_2 = -\int_2^4 \frac{1}{3}\left(\frac{90}{p_2}\right) dp_2 = -30[\ln(4) - \ln(2)] = -20{,}79$$

O valor negativo indica que o aumento de preço diminui o bem-estar do consumidor. O valor monetário dessa perda de bem-estar, medido pela variação do EC, é R\$ 20,79.

9.2) Suponha dois bens com preços positivos ($p_1 > 0$ e $p_2 > 0$). A renda do consumidor é denotada por $m > 0$ e a sua utilidade é:

$$u(x_1, x_2) = x_1$$

a) Determine as demandas Marshallianas desse consumidor (justifique sua resposta).

S: O problema de maximização de utilidade é:

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} x_1 \qquad \text{s.a} \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Apenas o bem 1 traz utilidade a esse consumidor. Portanto, ele comprará apenas esse bem. As demandas Marshallianas são, portanto:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = 0$$

b) Determine as demandas Hicksianas desse consumidor (justifique sua resposta).

S: O problema de minimização de dispêndio desse consumidor é:

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} p_1 x_1 + p_2 x_2 \qquad \text{s.a} \qquad x_1 = \bar{u}$$

Novamente, como apenas o bem 1 traz utilidade, as demandas Hicksianas são:

$$x_1(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, \bar{u}) = 0$$

c) Suponha que m é igual a R\$ 10. Calcule a VC, a VE e a variação no EC quando o preço do bem 1 aumenta de R\$ 1 para R\$ 2. Compare essas medidas. Qual é a maior? Qual é a menor? Com base apenas nessas comparações, o bem 1 deve ser normal ou inferior?

S: Para calcular a variação no excedente do consumidor, usamos a demanda Marshalliana:

$$\Delta EC = \int_{p^1}^{p^0} x^M(p)dp = -\int_1^2 \frac{m}{p}dp = -10\left[\ln(2) - \ln(1)\right] \approx -6{,}9$$

Podemos calcular a VC e a VE de dois modos, ou usando a diretamente a definição ou calculando a integral da demanda hicksiana apropriada. No segundo caso, basta observar que antes do aumento do preço, o consumidor obtinha um nível de utilidade $u^0 = 10$ e depois do aumento do preço ele obtém um nível de utilidade $u^1 = 5$. Portanto,

$$\begin{aligned} VC &= \int_{p^1}^{p^0} x^h(p, u^0)dp = -\int_1^2 u^0 dp = -10\left[2 - 1\right] = -10 \\ VE &= \int_{p^1}^{p^0} x^h(p, u^1)dp = -\int_2^2 u^1 dp = -5\left[2 - 1\right] = -5. \end{aligned}$$

Logo, $VE < \Delta EC < VC$, o que indica um bem normal. Se usarmos diretamente as definições de VC e VE, basta observamos que a utilidade indireta tem a forma abaixo:

$$\begin{aligned} &VC: \quad v(p^0, m^0) = v(p^1, m^0 - VC) \;\Rightarrow\; \frac{m}{p_0} = \frac{m - VC}{p_1} \;\Rightarrow\; \frac{10}{1} = \frac{10 - VC}{2} \;\Rightarrow\; VC = -10 \\ &VE: \quad v(p^0, m^0 + VE) = v(p^1, m^0) \;\Rightarrow\; \frac{m + VE}{p_0} = \frac{m}{p_1} \;\Rightarrow\; \frac{10 + VE}{1} = \frac{10}{2} \;\Rightarrow\; VE = -5 \end{aligned}$$

9.3) Considere a função de utilidade dada por:

$$u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2),$$

onde x_1 e x_2 são as quantidades consumidas dos bens 1 e 2, respectivamente.

a) Calcule as funções de demandas ótimas e a função de utilidade indireta, usando o método de Lagrange.

S: Essa utilidade é uma Cobb-Douglas com coeficientes iguais a 1 e log-linearizada. As demandas são:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{2p_2}$$

A função de utilidade indireta é:

$$v(p_1, p_2, m) = \ln\left(\frac{m^2}{4p_1p_2}\right)$$

b) Suponha que os preços dos bens 1 e 2 são $p_1 =$ R\$ 1 e $p_2 =$ R\$ 1, respectivamente, e que a renda do consumidor é R\$ 1.000. Calcule a quantidade consumida de cada bem.

S: As quantidades consumidas são:

$$x_1(p_1 = 1, p_2 = 1, m = 1000) = \frac{1000}{2 \times 1} = 500\,, \text{ e}$$
$$x_2(p_1 = 1, p_2 = 1, m = 1000) = \frac{1000}{2 \times 1} = 500$$

c) Suponha que o preço do bem 2 aumentou para R\$ 2. Calcule o excedente do consumidor e a variação compensadora.

S: A variação no EC é:

$$\Delta EC = \int_2^1 \frac{1000}{2p_2}\, dp_2 = -500 \int_1^2 \frac{1}{p_2}\, dp_2 = -500\ln(2) \approx -346{,}57$$

Por definição, a variação compensadora VC é:

$$\ln\left(\frac{(m - VC)^2}{4 \times 1 \times 2}\right) = \ln\left(\frac{m^2}{4 \times 1 \times 1}\right) \quad \Rightarrow \quad VC = 1000 \times (1 - \sqrt{2}) = -414{,}21$$

d) Encontre a função dispêndio e as demandas hicksianas.

S: Podemos encontrar a função dispêndio usando a relação $v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = \bar{u}$:

$$\ln\left(\frac{e(p_1, p_2, \bar{u})^2}{4p_1p_2}\right) = \bar{u} \qquad \Rightarrow \qquad e(p_1, p_2, \bar{u}) = 2\sqrt{p_1p_2}\; \mathrm{e}^{\bar{u}/2}$$

As demandas hicksianas podem ser encontradas usando o Lema de Shephard:

$$x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{\partial e}{\partial p_1} = p_1^{-0{,}5} p_2^{0{,}5}\; \mathrm{e}^{\bar{u}/2}$$
$$x_2^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{\partial e}{\partial p_2} = p_1^{0{,}5} p_2^{-0{,}5}\; \mathrm{e}^{\bar{u}/2}$$

9.4) Considere a mesma função de utilidade do exercício anterior, e suponha que a renda do indivíduo é R$ 1.000, o preço do bem 1, $p_1 = 1$ e o preço do bem 2, $p_2 = 1$. Suponha também que o preço do bem 2 aumentou para R$ 2.

a) Decomponha o efeito total da mudança de preço do bem 2 em efeito substituição e efeito renda, usando a decomposição de Slutsky (que mantém o poder de compra original constante).

S: Vimos na questão 3 que a demanda do bem 2 é $x_2(p_1, p_2, m) = m/2p_2$ e que o consumo desse bem é de 500 unidades, quando o seu preço é R$ 1,00 e a renda do indivíduo é R$ 1.000,00. Para o novo preço do bem 2, o consumo cai para $x_2(1, 2, 1000) = 1000/(2\times2) = 250$. Logo, o efeito total é uma queda de 250 unidades do consumo do bem 2. Se mantivermos o poder de compra original, temos que a demanda de Slutsky é:

$$x_2^S(1, 2, (500, 500)) = \frac{1 \times 500 + 2 \times 500}{2 \times 2} = \frac{1500}{4} = 375\,,$$

Logo o efeito substituição de Slutsky consiste numa queda de 125 unidades, e o efeito renda, numa queda de 125 unidades.

b) Decomponha o efeito total da mudança de preço do bem 2 em efeito substituição e efeito renda, usando a decomposição de Hicks (que mantém o nível de utilidade original constante).

S: A utilidade original do consumidor é $v(p_1 = 1, p_2 = 1, m = 1000) = \ln(500^2)$. No item d) da questão 3, vimos que o demanda Hicksiana do bem 2 é $x_2^h(p_1, p_2, \bar{u}) = p_1^{0,5} p_2^{-0,5}\ \mathrm{e}^{\bar{u}/2}$, que para esses valores é igual a:

$$x_2^h(1, 2, \ln(500^2)) = 1^{1/2} \times 2^{-0,5}\ \mathrm{e}^{\ln(500^2)/2} = 500/\sqrt{2} \approx 354$$

Logo o efeito substituição de Hicks consiste numa queda de 146 unidades, e o efeito renda, numa queda de 104 unidades.

c) Calcule o valor de uma compensação de Slutsky. Mostre que essa compensação, que mantém o poder de compra original, aumentará o bem-estar do indivíduo. Seria possível que a utilidade do indivíduo fose menor do que a original com esse tipo de compensação? Justifique sua resposta.

S: O valor da compensação de Slutsky é de R$ 500,00, pois esse valor permite que o indivíduo, aos novos preços $p_1 =$ R$ 1 e $p_2 =$ R$ 2, possa adquirir a cesta original, $x_1 = 500$ e $x_2 = 500$. Com essa compensação, o indivíduo irá consumir $x_1(1, 2, 1500) = 1500/2 = 750$ e $x_2(1, 2, 1500) = 1500/4 = 375$. Sua utilidade agora é $u^1 = \ln(750 \times 375) = \ln(281.250)$, maior do que a utilidade original $u^0 = \ln(500^2) = \ln(250.000)$. Não é possível que, com uma compensação de Slutsky, a utilidade fique menor do que a inicial, já que com essa compensação ele sempre poderá comprar a cesta ótima original. Logo sua utilidade será sempre igual ou maior do que a inicial (se a utilidade for bem-comportada, podemos garantir que será maior).

d) Calcule o valor de uma compensação de Hicks. Mostre que essa compensação mantém o nível de utilidade constante, e é menor do que a compensação de Slutsky.

S: A compensação de Hicks é o valor que mantém a utilidade constante após a mudança de preços. Logo, ela é igual ao valor da variação compensadora calculada na questão 28, item c), R$ 414,21. Para verificarmos que ela mantém o nível de utilidade constante, primeiro observe que com esta compensação, as demandas serão $x_1(1, 2, 1414{,}21) = 1414{,}21/2 \approx 717$ e $x_2(1, 2, 1414{,}21) = 1414{,}21/4 = 354$. Sua utilidade agora é $u^1 =$

$\ln(717 \times 354) = \ln(253.218)$, pouco maior do que a utilidade inicial, $u^0 = \ln(500^2) = \ln(250.000)$, apenas devido a erro de aproximação (se calcularmos com casas decimais maiores, veremos que o valor se aproxima de u^0, como esperado).

e) Imagine que você é chamado pelo ministro da economia para elaborar uma política de compensação na tarifa de energia elétrica para pessoas com um nível de renda de até R$ 1.000 mensais. Discuta os pontos positivos e negativos de cada uma das compensações vistas acima.

S: O ponto positivo da compensação de Slutsky é a sua facilidade de cálculo. O ponto negativo é que ela, em geral, será mais cara do que a compensação de Hicks, que mantém a utilidade do indivíduo inalterada, o objetivo da política de compensação. Porém, a compensação de Hicks é mais difícil de ser calculada.

9.5) A utilidade de Letícia é $u(x, y) = \min\{x, y\}$. Letícia recebe R$ 200 de salário por mês. Os preços dos dois bens que Letícia consome são $p_x = p_y = 1$. O chefe de Letícia quer transferí-la para outra cidade. Letícia gosta das duas cidades igualmente. Porém, na nova cidade, os preços são $p_x = 1$ e $p_y = 2$. Letícia diz que mudar para a outra cidade é tão ruim quanto um corte no salário de A reais. Ela diz também que não se importa de se mudar caso receba um aumento de B reais. Calcule e compare A e B. Qual a relação de A e B com a variação compensadora e a variação equivalente?

S: Essa utilidade representa bens complementares perfeitos. Letícia irá sempre igualar os argumentos da função de mínimo que representa sua utilidade, evitando desperdícios. Portanto, $x^* = y^*$. Substituindo essa igualdade nas duas restrições orçamentárias (cidade original e cidade nova), obtemos:

$$x^* = y^* = 100, \text{ na cidade original}$$
$$x^* = y^* = \frac{200}{3} \approx 66{,}67, \text{ na cidade nova}$$

Ou seja, Letícia originalmente compra 100 unidades de cada bem. Na nova cidade, ela vai comprar 66,67 unidades de cada bem. A utilidade dela diminui:

$$\min\{100, 100\} = 100 > 66{,}67 = \min\{66{,}67\,; 66{,}67\}$$

Observe que a mudança é equivalente a um corte de R$ $200/3 \approx$ R$ 66,67 no salário de Letícia (valor de $A =$ R$ 66,67). Esse valor é o negativo da variação equivalente (a quantidade de dinheiro que temos que dar ao indivíduo antes da variação de preços, para deixá-lo com o mesmo bem-estar que terá depois dessa variação – nesse caso como a mudança piora o bem-estar de Letícia, o valor de VE é negativo – temos que *tirar* dela R$ 66,67 para que ela obtenha na cidade antiga o mesmo bem-estar que ela obterá na nova cidade). Se Letícia receber um aumento de R$ 100, ela não se importa de mudar (valor de $B =$ R$ 100). Esse valor é o negativo da variação compensadora (a quantidade de dinheiro que temos que tirar do indivíduo depois da variação de preços, para deixá-lo com o mesmo bem-estar que tinha antes dessa variação – nesse caso como a mudança piora o bem-estar de Letícia, o valor de VC é negativo – temos que *dar* a ela R$ 100 para que ela obtenha na nova cidade o mesmo bem-estar que ela obtinha na cidade antiga). A variação compensadora é menor do que a variação equivalente ($-100 < -66{,}67$). Portanto, podemos concluir que o bem y, cujo preço mudou, é um bem normal.

9.6) Considere novamente a utilidade Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

a) Calcule a demanda Hicksiana dos dois bens e a função de dispêndio.

S: Já vimos que as demandas Hicksianas para essa utilidade Cobb-Douglas são:

$$x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha} \bar{u} \qquad \text{e} \qquad x_2^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} p_1^{\alpha} p_2^{-\alpha} \bar{u}$$

A função de dispêndio é:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} \bar{u}$$

b) Verifique se o lema de Shepard é válido para o bem 1.

S: Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial p_1} &= \alpha\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha} \bar{u} = \alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha} \bar{u} \\
&= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha} \bar{u} = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})
\end{aligned}$$

c) Verifique se as duas relações entre demanda Marshalliana e demanda Hicksiana são válidas.

S: Queremos mostrar que:

$$x_1^M(\mathbf{p}, m) = x_1^h(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) \qquad \text{e} \qquad x_1^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = x_1^M(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u}))$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
x_1^h(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha} \left(\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} p_1^{-\alpha} p_2^{\alpha-1} m\right) \\
&= \alpha \frac{m}{p_1} = x_1^M(p_1, p_2, m)
\end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned}
x_1^M(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) &= \alpha \frac{\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} \bar{u}}{p_1} = \alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha} \bar{u} \\
&= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} \bar{u} = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})
\end{aligned}$$

d) Verifique se as duas relações entre a função de utilidade indireta e a função de dispêndio são válidas.

S: Queremos mostrar que:

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m \qquad \text{e} \qquad v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) = \bar{u}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) &= \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} p_1^{-\alpha} p_2^{\alpha-1} m = m \\
v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u})) &= \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} p_1^{-\alpha} p_2^{\alpha-1} \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1} p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} \bar{u} = \bar{u}
\end{aligned}$$

e) Verifique a equação de Slutsky para o bem 2, dada uma mudança no seu preço.

S: Derivando a demanda Marshallina e a demanda Hicksiana para o bem 2, em relação ao seu preço, e derivando a demanda Marshalliana em relação à renda, obtemos:

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial p_2} = -(1-\alpha)\frac{m}{p_1^2}\,, \qquad \frac{\partial x_2^h}{\partial p_2} = -\alpha\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} p_1^{\alpha} p_2^{-\alpha-1}\bar{u}\,, \qquad \frac{\partial x_2^M}{\partial m} = (1-\alpha)\frac{1}{p_2}$$

Então:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_2^h(\mathbf{p}, v(\mathbf{p},m))}{\partial p_2} - x_2^M(\mathbf{p},m)\frac{\partial x_2^M(\mathbf{p},m)}{\partial m} &= -\alpha\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} p_1^{\alpha} p_2^{-\alpha-1}(1-\alpha)^{1-\alpha}\alpha^{\alpha}p_1^{-\alpha}p_2^{\alpha-1}m- \\
&\quad - (1-\alpha)\frac{m}{p_2}(1-\alpha)\frac{1}{p_2} \\
&= -\alpha(1-\alpha)\frac{m}{p_2^2} - (1-\alpha)^2\frac{m}{p_2^2} \\
&= (1-\alpha)\frac{m}{p_2^2}\left(-\alpha-(1-\alpha)\right) = -(1-\alpha)\frac{m}{p_2^2} \\
&= \frac{\partial x_2^M(\mathbf{p},m)}{\partial p_2}
\end{aligned}$$

Suponha que os preços são $p_1 = 2$ e $p_2 = 1$, $\alpha = 0,5$, e a renda do consumidor igual a R\$20.

f) Calcule as quantidades ótimas consumidas.

S: Usando as demandas Marshallianas, encontramos:

$$x_1^M(2,1,20) = \frac{20}{2\times 2} = 5 \qquad \text{e} \qquad x_2^M(2,1,20) = \frac{20}{2\times 1} = 10\,.$$

g) O preço de x_2 aumentou para R\$2. Calcule a variação no excedente do consumidor, a variação compensadora e a variação equivalente dessa mudança de preços. Compare os resultados obtidos.

S: Primeiro observe que as utilidades inicial e final desse consumidor são:

$$u_0 = v(2,1,20) = 10\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad u_1 = v(2,2,20) = 10$$

Então temos que:

$$\begin{aligned}
\Delta EC &= \int_2^1 (1-\alpha)\frac{m}{p_2}dp_2 = -10\int_1^2 \frac{1}{p_2}dp_2 = -10(\ln 2 - \ln 1) = 10\ln 2 = -6{,}93 \\
VC &= \int_2^1 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} p_1^{\alpha}p_2^{-\alpha}u_0 dp_2 = -10\sqrt{2}\sqrt{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{p_2}}dp_2 = -20(\sqrt{2}-1) = -8{,}28 \\
VE &= \int_2^1 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} p_1^{\alpha}p_2^{-\alpha}u_1 dp_2 = -10\sqrt{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{p_2}}dp_2 = -10\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = -5{,}85
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$VC < \Delta EC < VE\,,$$

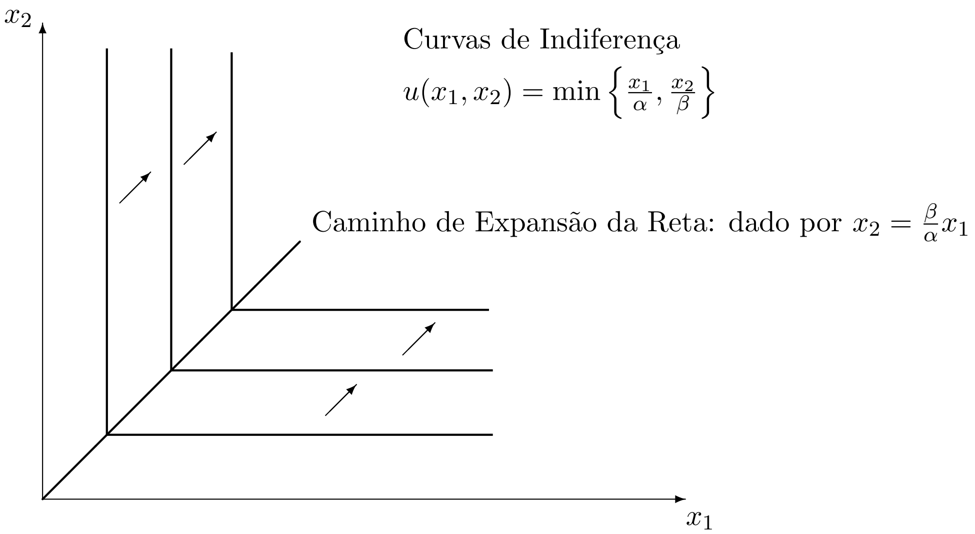
o que deveríamos esperar, já que o bem 2 é normal.

9.7) Suponha que a função de utilidade de um consumidor é:

$$u(x_1, x_2) = \min\left\{\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right\}$$

a) Ilustre graficamente as curvas de indiferença deste consumidor. Determine o caminho da expansão da renda.

S: O gráfico abaixo ilustra as curvas de indiferença e o caminho de expansão da renda, determinado por $x_1/\alpha = x_2/\beta$, ou seja, $x_2 = (\beta/\alpha)x_1$.



b) Determine as demandas Hicksianas e a função dispêndio.

S: Queremos resolver o seguinte problema:

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} p_1x_1 + p_2x_2 \qquad \text{s.a.} \qquad \min\left\{\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right\} = \bar{u}$$

Para essa função de utilidade, na escolha ótima de x_1 e x_2, devemos ter que $\frac{x_1}{\alpha} = \frac{x_2}{\beta}$. Essas escolhas devem satisfazer a restrição do problema. Logo, as demandas Hicksianas são:

$$x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \alpha\bar{u} \qquad \text{e} \qquad x_2^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \beta\bar{u}$$

A função dispêndio é, portanto:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = p_1x_1^h + p_2x_2^h = (\alpha p_1 + \beta p_2)\bar{u}$$

c) Determine a função de utilidade indireta e as demandas Marshallianas.

S: Usando a relação $e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, m)) = m$ entre função dispêndio e função utilidade indireta, obtemos:

$$(\alpha p_1 + \beta p_2)v(p_1, p_2, m) = m \qquad \Rightarrow \qquad v(p_1, p_2, m) = \frac{m}{\alpha p_1 + \beta p_2}$$

Usando a identidade de Roy, $x_i^M = -(\partial v/\partial p_i)/(\partial v/\partial m)$, para $i = 1, 2$, encontramos as demandas Marshallianas:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = \frac{\alpha m}{\alpha p_1 + \beta p_2} \qquad \text{e} \qquad x_2^M(p_1, p_2, m) = \frac{\beta m}{\alpha p_1 + \beta p_2}$$

Para os itens d) e e), suponha que $\alpha = \beta = 1$, a renda do consumidor é R$ 800,00 e os preços dos dois bens são $p_1 = 2$ e $p_2 = 2$.

d) Suponha que o preço do bem 1 aumentou para $\bar{p}_1 = 3$. Usando a equação de Slutsky, decomponha esse aumento de preço em efeito substituição e efeito renda. Qual os valores destes efeitos?

S: Para esses valores, temos que as demandas dos dois bens será $x_1^M = x_2^M = 200$. Para o novo preço do bem 1, as demandas ótimas dos dois bens se reduzem para $x_1^M = x_2^M = 160$. Logo o efeito total sobre a demanda do bem 1 (igual para o bem 2) é de -40 unidades. A equação de Slutsky, dada por:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i}}_{\text{efeito total}} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, u^*)}{\partial p_i}}_{\text{efeito substituição}} \underbrace{-x_i^M(\mathbf{p}, m)\frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial m}}_{\text{efeito renda}},$$

divide o efeito total em efeito substituição e efeito renda. Vamos analisar o caso do bem 1 e usar as demandas Hicksiana e Marshalliana obtidas para o bem 1 acima. Temos então que:

$$\begin{aligned}
\text{Efeito Total:} \quad & \frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} = -\frac{\alpha^2 m}{(\alpha p_1 + \beta p_2)^2} \\
\text{Efeito Substituição:} \quad & \frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} = 0 \\
\text{Efeito Total:} \quad & -x_1^M \frac{\partial x_1^M}{\partial m} = -\frac{\alpha^2 m}{(\alpha p_1 + \beta p_2)^2},
\end{aligned}$$

ou seja, o efeito total, de -40 unidades, é composto apenas por efeito renda.

e) Calcule a variação compensadora, a variação equivalente e a variação no excedente do consumidor para a mudança de preço descrita no item d). Qual a relação entre estas medidas? O que esta relação diz sobre o bem 1?

S: Na situação original, onde o preço do bem 1 é 2, a utilidade do indivíduo é $u^0 = 200$, pois 200 unidades de cada bem são consumidas. Na situação final, onde o preço do bem 1 passa para 3, a utilidade do indivíduo é $u^1 = 160$, pois 160 unidades de cada bem são consumidas. Portanto, a variação no excedente do consumidor (ΔEC), a variação compensadora (VC) e a variação equivalente (VE) são:

$$\begin{aligned}
\Delta EC: \quad & \int_{p^1}^{p^0} x^M(p)\, dp = -\int_2^3 \frac{800}{p+2}\, dp = -800 \times (\ln(5) - \ln(4)) \approx -179 \\
VC: \quad & \int_{p^1}^{p^0} x^h(p, u^0)\, dp = -\int_2^3 200\, dp = -200 \\
VE: \quad & \int_{p^1}^{p^0} x^h(p, u^1)\, dp = -\int_2^3 160\, dp = -160
\end{aligned}$$

Logo, obtemos $VC < \Delta EC < VE$, relação esperada entre as medidas, já que o bem 1 é normal.

NA 10 – PREFERÊNCIA REVELADA

10.1) Suponha que existam apenas 3 bens e que um certo indivíduo escolhe as cestas $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ aos preços $\mathbf{p}^i = (p_1^i, p_2^i, p_3^i)$, $i = 1, 2, 3$ (logo, existem três observações de consumo desse indivíduo), onde:

Observação 1: $\mathbf{p}^1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{x}^1 = (5, 19, 9)$
Observação 2: $\mathbf{p}^2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{x}^2 = (12, 12, 12)$
Observação 3: $\mathbf{p}^3 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{x}^3 = (27, 11, 1)$

a) Mostre que essas observações satisfazem o Axioma Fraco da preferência revelada.

b) Mostre que essas observações não satisfazem o Axioma Forte da preferência revelada.

S: (itens a) e b) juntamente) A tabela abaixo, com os custos de cada cesta para cada situação de preço, mostra que a cesta 1 foi revelada preferida à cesta 3 ($\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$), a cesta 2 foi revelada preferida à cesta 1 ($\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$), e que a cesta 3 foi revelada preferida à cesta 2 ($\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$). Portanto não ocorre violação do AFrPR, já que sempre que temos que a cesta $\mathbf{x}$ é revelada diretamente preferida à cesta $\mathbf{y}$, não ocorre que a cesta $\mathbf{y}$ seja revelada diretamente preferida à cesta $\mathbf{x}$:

- $\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$ mas não ocorre $\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$;
- $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$ mas não ocorre $\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$;
- $\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$ mas não ocorre $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$;

Logo, as observações satisfazem o AFrPR. Porém as observações acima não satisfazem o AFoPR, já que a preferência revelada é intransitiva: $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$. Mais precisamente, segue de $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$ que $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^I} \mathbf{x}_3$ e como ocorre que $\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$, isso caracteriza a violação do AFoPR.

	Cesta Obs 1	Cesta Obs 2	Cesta Obs 3
Preços Obs 1	42	48	40(*)
Preços Obs 2	33(*)	36	39
Preços Obs 3	52	48(*)	50

NA 11 – RENDA ENDÓGENA

11.1) Um consumidor tem uma função utilidade $u(x_1, x_2) = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$ e uma dotação inicial de $e_1 = 2$ e $e_2 = 1$.

a) Resolva o problema do consumidor e encontre as demandas brutas pelos bens.

S: O problema do consumidor é:

$$\max_{x_1,x_2} x_1^{0,5} x_2^{0,5} \qquad \text{s.a.} \qquad p_1x_1 + p_2x_2 = p_1e_1 + p_2e_2$$

O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = x_1^{0,5} x_2^{0,5} + \lambda(p_1e_1 + p_2e_2 - p_1x_1 - p_2x_2)$$

As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1): &\quad 0{,}5x_1^{-0,5}x_2^{0,5} = \lambda p_1 \\ (x_2): &\quad 0{,}5x_1^{0,5}x_2^{-0,5} = \lambda p_2 \\ (\lambda): &\quad p_1x_1 + p_2x_2 = p_1e_1 + p_2e_2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de CPOs para x_1 e x_2 encontramos:

$$x_1(p_1, p_2, p_1e_1 + p_2e_2) = \frac{p_1e_1 + p_2e_2}{2p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, p_1e_1 + p_2e_2) = \frac{p_1e_1 + p_2e_2}{2p_2}$$

b) Suponha que os preços dos dois bens sejam $p_1 = p_2 = 1$. Calcule a demanda ótima nesse caso. O consumidor é vendedor líquido de algum dos bens?

S: Observe primeiro que para esses preços, a renda do consumidor é $p_1e_1 + p_2e_2 = 3$. Usando o item a), temos que:

$$x_1(1, 1, 3) = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \text{e} \qquad x_2(1, 1, 3) = \frac{3}{2} = 1{,}5\,.$$

Logo, o consumidor é vendedor líquido do bem 1 e comprador líquido do bem 2.

c) Suponha que o preço do bem 1 diminui de 1 para $\tilde{p}_1 = 0{,}9$. O que ocorre nesse caso com o bem-estar do consumidor?

S: Quando o preço do bem 1 se altera, a renda do consumidor também se altera. Nesse caso, a nova renda é $\tilde{p}_1e_1 + p_2e_2 = 2{,}8$. Portanto, as novas demandas são:

$$x_1(0{,}9; 1; 2{,}8) = \frac{2{,}8}{2 \times 0{,}9} = 1{,}555 \qquad \text{e} \qquad x_2(0{,}9; 1; 2{,}8) = \frac{2{,}8}{2} = 1{,}4\,.$$

O consumidor era vendedor líquido do bem 1, cujo preço diminuiu e ele continuou a ser vendedor líquido desse bem. Podemos garantir então que o seu bem-estar diminui. Vamos verificar essa afirmação:

$$\begin{aligned} \text{Bem-estar quando } p_1 = 1: &\quad u(x_1, x_2) = 1{,}5^{0,5} \times 1{,}5^{0,5} = 1{,}5 \\ \text{Bem-estar quando } \tilde{p}_1 = 0,9: &\quad u(x_1, x_2) = 1{,}555^{0,5} \times 1{,}4^{0,5} = 1{,}475\,, \end{aligned}$$

ou seja, a utilidade quando $\tilde{p}_1 = 0{,}9$ é menor do que a utilidade quando $p_1 = 1$.

d) Suponha agora que o preço do bem 1 diminui de 1 para $\hat{p}_1 = 0,1$. O que ocorre nesse caso com o bem-estar do consumidor? Compare com o item anterior.

S: Novamente, a alteração no preço do bem 1 altera a renda do consumidor também. Nesse caso, a nova renda é $\hat{p}_1 e_1 + p_2 e_2 = 1{,}2$. Portanto, as novas demandas são:

$$x_1(0{,}1; 1; 1{,}2) = \frac{1{,}2}{2 \times 0{,}1} = 6 \qquad \text{e} \qquad x_2(0{,}1; 1; 1{,}2) = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6\,.$$

O consumidor era vendedor líquido do bem 1, cujo preço diminuiu e ele passou a ser comprador líquido do bem. Nesse caso, não podemos garantir se o seu bem-estar diminui ou aumenta a priori. Vamos calcular o que ocorre com o bem-estar do consumidor:

$$\begin{aligned} \text{Bem-estar quando } p_1 = 1: &\ u(x_1, x_2) = 1{,}5^{0{,}5} \times 1{,}5^{0{,}5} = 1{,}5 \\ \text{Bem-estar quando } \hat{p}_1 = 0,1: &\ u(x_1, x_2) = 6^{0{,}5} \times 0{,}6^{0{,}5} = 1{,}89\,, \end{aligned}$$

ou seja, a utilidade quando $\hat{p}_1 = 0{,}1$ é maior do que a utilidade quando $p_1 = 1$. Nesse caso, a diminuição do preço do bem 1 foi tão grande que ele deixou de ser vendedor e passou a ser comprador líquido do bem, obtendo um nível de utilidade mais alto.

11.2) Responda os seguintes itens, considerando um modelo de renda endógena.

a) Suponha um consumidor vendedor líquido do bem 1. Suponha que o preço deste bem diminuiu de modo que o consumidor decidiu se tornar comprador líquido do bem 1. Ilustre graficamente os três casos possíveis:

a.1) bem-estar diminui,

a.2) bem estar aumenta,

a.3) bem estar se mantém o mesmo.

S: Ver gráficos feitos em sala.

b) Se o consumidor descrito no item a), após a diminuição do preço do bem 1, continuou sendo vendedor líquido do bem, o que ocorre com o seu bem-estar? Ilustre graficamente a sua resposta.

S: Se o preço do bem que o indivíduo vende caiu e ele continuou vendedor líquido desse bem, podemos garantir que o seu bem-estar caiu. Ver gráfico feito em aula.

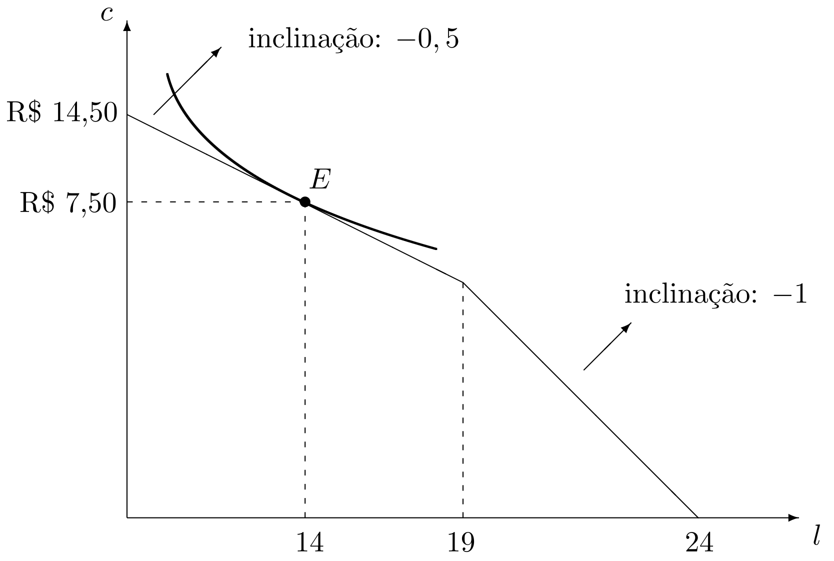
c) Em aula, nas notas e neste exercício, a análise feita assumiu a existência de apenas dois bens. As conclusões dos itens a) e b) acima e as obtidas em sala para os casos 1, 2, 3 e 4 se alteram? Justifique sua resposta.

S: Não. O que ocorre com n bens, é que ele pode ser comprador líquido de $n-1$ bens e vendedor líquido apenas de um bem (por exemplo, lazer). Porém isso não altera as conlusões qualitativas obtidas anteriormente.

11.3) Carlos pode trabalhar de 0 a 24 horas por dia, recebendo um salário de R$ 1 por hora. O imposto sobre a renda superior a R$ 5 por dia é de 50% (ou seja, os primeiros R$ 5 não são taxados). Carlos escolhe trabalhar 10 horas por dia. Além de lazer, Carlos consome um outro bem, com preço igual a R$ 1. Suponha que Carlos possua preferências bem-comportadas (ou seja, as curvas de indiferença associadas a essas preferências são convexas com relação à origem) e que não possua nenhuma outra fonte de renda além da obtida com trabalho.

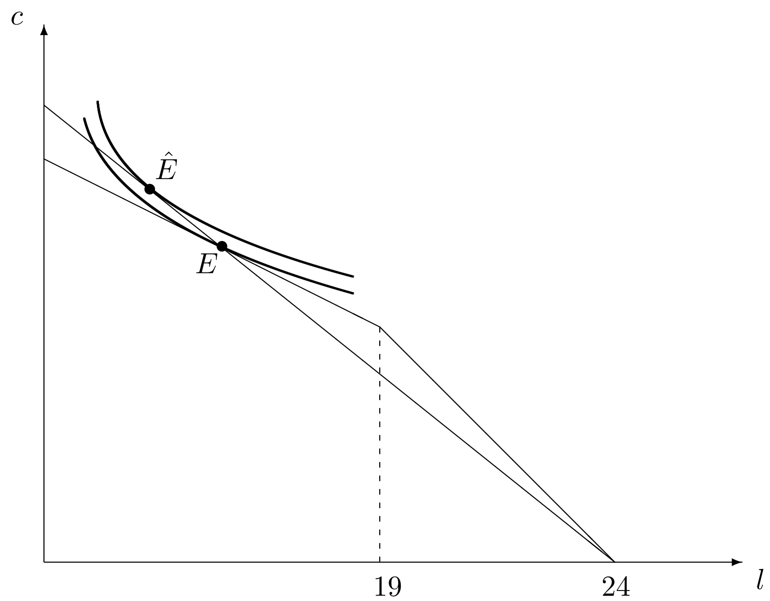
a) Ilustre graficamente a reta orçamentária de Carlos e a sua escolha ótima.

S: A reta orçamentária e a escolha ótima de Carlos, denotada por E, são representadas no gráfico abaixo.



b) O governo muda a forma do imposto: agora toda a renda está sujeita a um imposto de 25%. Carlos trabalha mais ou menos ou a mesma quantidade de horas agora? O governo coleta mais ou menos receita sobre o imposto de Carlos agora?

S: O ponto crucial para obtermos a nova reta orçamentária de Carlos e para solucionarmos o item é observar que o novo imposto coleta o mesmo valor que antes (R$ 2,50), *se Carlos continuasse trabalhando 10 horas*. Portanto, a nova reta orçamentária passa pela antiga escolha ótima de Carlos, representada pela cesta E na figura abaixo. Como as preferências são bem-comportadas, a nova cesta de equilíbrio, representada pela cesta $\hat{E}$ na figura abaixo, deve estar em uma curva de indiferença mais alta do que a original. Graficamente, obtemos que agora Carlos trabalha mais e consome mais, obtendo, como resultado líquido em termos de seu bem-estar, um nível maior de utilidade. Como Carlos trabalha mais do que 10 horas, o novo imposto coleta mais de R$ 0,25, o valor coletado com o imposto na situação original.



c) Qual tipo de imposto Carlos prefere? Justifique sua resposta.

S: Carlos prefere o novo imposto, já que ele alcança uma curva de indiferença mais alta (ver gráfico e discussão no item b) acima).

NA 12 – ESCOLHA INTERTEMPORAL

12.1) Suponha que Paulo tem R\$ 1000 hoje e espera receber R\$ 1000 em um ano. Paulo não tem outra renda, e ele pode poupar ou pegar emprestado a uma taxa de juros de 25% ao ano.

a) Qual o máximo que Paulo pode gastar no ano que vem? Qual o máximo que Paulo pode gastar hoje?

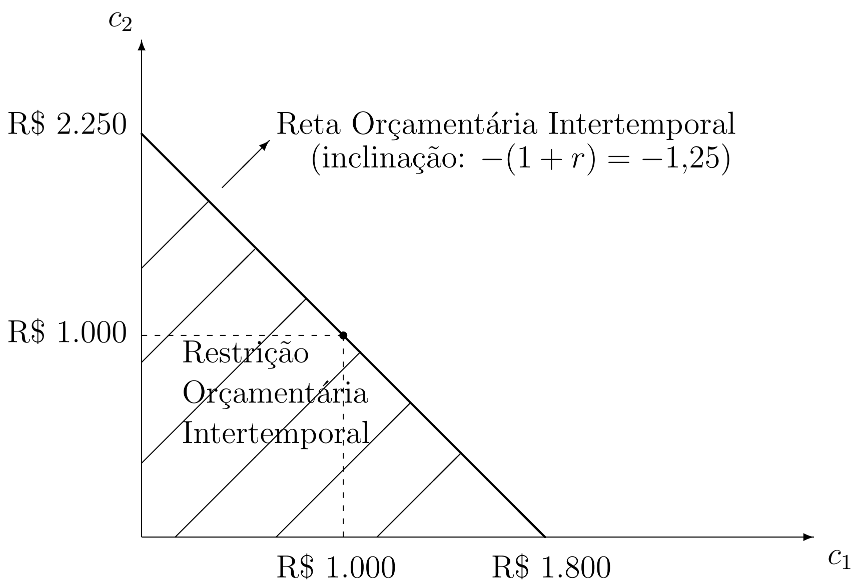
S: Hoje: R\$ 1000+R\$ 1000/1,25 = R\$ 1800. Ano que vem: R\$ 1000(1,25)+R\$ 1000=R\$ 2250.

b) Suponha que Paulo toma emprestado R\$800 e consome R\$1800 hoje. Quanto ele terá para consumir no ano que vem?

S: 0 (se ele tomar R\$ 800 emprestado hoje, dada a taxa de juros de 25% a.a., ele terá que pagar R\$ 1000 no ano que vem).

c) Desenhe a reta orçamentária de Paulo, entre "consumo hoje" (eixo x) e "consumo ano que vem" (eixo y). Qual é a inclinação dessa reta? Qual a interpretação econômica dessa inclinação?

S: Vamos denotar por c_1 o consumo hoje e por c_2 o consumo amanhã. A figura é:



d) Mostre como a reta orçamentária se desloca para os dois casos abaixos:

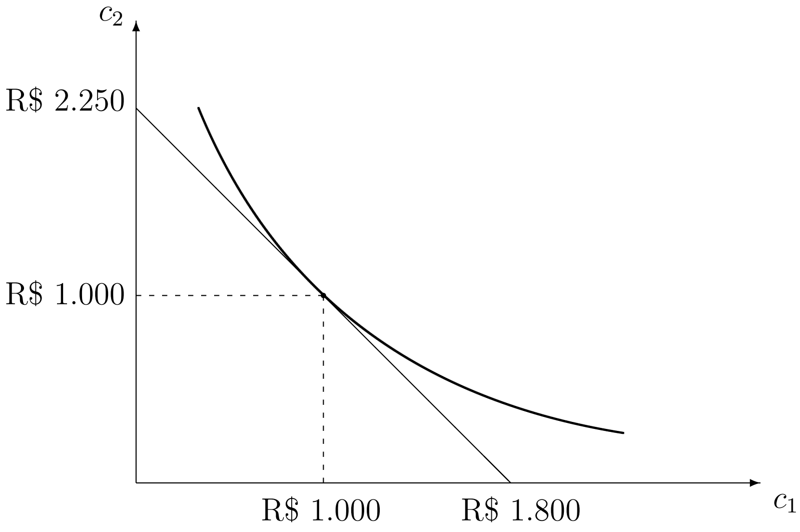
i) Paulo acha R\$ 400 em uma gaveta hoje.

ii) Paulo descobre que vai receber no ano que vem R\$ 500 de uma herança.

S: Nos dois casos a reta orçamentária se desloca para fora, *na mesma medida*, pois R\$ 400 hoje equivalem a R\$ 500 no ano que vem.

e) Volte a supor que Paulo tem R\$ 1000 hoje e terá R\$ 1000 no ano que vem. Paulo escolhe não poupar nem tomar emprestado. Ilustre a tangência do curva de indiferença de Paulo com a sua reta orçamentária.

S: A figura é:



f) Suponha que Paulo usa o seu dinheiro conforme o item e), quando a taxa de juros for 25%. Porém a taxa de juros aumentou hoje para 50%. Paulo altera o seu consumo hoje? Ele está melhor ou pior do que antes?

S: Nesse caso Paulo está melhor. O aumento da taxa de juros faz com que Paulo passe a poupar para consumir no segundo período, pois antes ele estava consumindo exatamente as suas dotações de cada período.

g) Decomponha a mudança no consumo de Paulo ocorrida no item f) em efeito substituição e efeito renda. Determine, se possível, as direções do efeito substituição e do efeito renda.

S: O efeito substituição é sempre negativo: como a taxa de juros subiu, o consumo hoje se tornou mais caro em relação ao consumo amanhã. O efeito renda pode ser negativo, o que significa que o aumento da taxa de juros eleva a renda disponível.

12.2) Suponha um modelo com dois períodos, onde o indivíduo pode escolher o consumo hoje (c_1), o consumo amanhã (c_2), e a quantidade de lazer que consome (l). O indivíduo pode trabalhar no primeiro período, onde recebe um salário igual a w_1 por unidade de tempo trabalhada. Ele possui H unidades de tempo para dividir entre trabalho e lazer. O indivíduo também pode poupar no primeiro período (ou pegar emprestado) a uma taxa de juros igual à r. Finalmente, o individuo não tem nenhuma outra fonte de renda, a não ser a gerada pelo o seu trabalho (ele sótrabalha no primeiro período). A utilidade é dada por:

$$u(c_1, c_2, l) = u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l),$$

onde $0 < \beta < 1$ é o fator de desconto intertemporal.

a) Quais são as restrições orçamentárias para cada período?

S: As restrições orçamentárias de cada período são:

$$\begin{aligned} &\text{Período 1: } c_1 + s = (H - l)w \\ &\text{Período 2: } c_2 = (1 + r)s \end{aligned}$$

b) Qual é a restrição orçamentária intertemporal?

S: A restrição orcamentária intertemporal pode ser obtida substituindo $s = c_2/(1 + r)$ na restrição orçamentária para o primeiro período, o que resulta em:

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = (H - l)w$$

c) Derive as CPO do problema de maximização de utilidade desse indivíduo.

S: O problema de maximização desse consumidor é:

$$\max_{c_1,c_2,l} u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l) \quad \text{s.a.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (H-l)w$$

O Lagrangeano do problema é:

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l) + \lambda \left[(H-l)w - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right],$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned}
(c_1): &\ u'(c_1) = \lambda \\
(c_2): &\ \beta u'(c_2) = \lambda \frac{1}{1+r} \\
(l): &\ v'(l) = \lambda w \\
(\lambda): &\ c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (H-l)w
\end{aligned}$$

d) Suponha que o governo introduz um imposto sobre o consumo do primeiro período, com alíquota τ_1, e um imposto sobre o consumo do segundo período, com alíquota τ_2. Reescreva o problema do consumidor para esse caso e derive as CPO desse problema.

S: Nesse caso, o problema do consumidor se torna:

$$\max_{c_1,c_2,l} u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l) \quad \text{s.a.} \quad (1+\tau_1)c_1 + \frac{(1+\tau_2)c_2}{1+r} = (H-l)w$$

O Lagrangeano é portanto:

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l) + \lambda \left[(H-l)w - (1+\tau_1)c_1 - \frac{(1+\tau_2)c_2}{1+r} \right],$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. As CPO agora resultam em:

$$\begin{aligned}
(c_1): &\ u'(c_1) = \lambda(1+\tau_1) \\
(c_2): &\ \beta u'(c_2) = \lambda \frac{(1+\tau_2)}{1+r} \\
(l): &\ v'(l) = \lambda w \\
(\lambda): &\ (1+\tau_1)c_1 + \frac{(1+\tau_2)c_2}{1+r} = (H-l)w
\end{aligned}$$

e) Mostre que se as duas alíquotas são iguais, o imposto não distorce a escolha intertemporal de consumo, porém distorce a escolha entre consumo e lazer, desestimulando a oferta de trabalho.

S: Dividindo as CPOs para c_1 e c_2 obtidas no item d) acima, obtemos:

$$\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = \frac{(1+\tau_1)}{(1+\tau_2)}(1+r)$$

Se $\tau_1 = \tau_2$, então temos que:

$$\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = 1 + r,$$

exatamente a mesma relação de escolha intertemporal de consumo para o caso onde não existe imposto.

Dividindo as CPO para c_1 e l em (d), obtemos:

$$\frac{u'(c_1)}{v'(l)} = \frac{(1+\tau_1)}{w},$$

diferente da relação de escolha entre consumo e lazer hoje para o caso onde não existe imposto ($u'(c_1)/v'(l) = 1/w$). Como $(1+\tau_1) > 1$, e $u'' < 0$, $v'' < 0$, então o nível de consumo hoje cai em relação ao nível de lazer.

NA 13 – INCERTEZA

13.1) Considere as loterias $g = (0{,}60 \circ 10000; 0{,}40 \circ 1000)$ e $h = (0{,}50 \circ 10000; 0{,}50 \circ 2800)$. Se um consumidor está indiferente entre estas duas loterias, então pode-se afirmar que ele é neutro ao risco. Verdadeiro ou falso? Justifique.

S: Observe que:

$$Eg = 0{,}6 \times 10.000 + 0{,}4 \times 1.000 = 6.400 \qquad \text{e} \qquad Eh = 0{,}5 \times 10.000 + 0{,}5 \times 2.800 = 6.400$$

Como os valores esperados dessas duas loterias são iguais, então se ele é indiferente a elas, o indivíduo é neutro ao risco.

1. Responda os seguintes itens.

   a) Suponha duas loterias $g = (0{,}50 \circ m_1; 0{,}50 \circ m_2)$ e $h = (0{,}50 \circ w_1; 0{,}50 \circ w_2)$, tais que $u(m_1) = 25$, $u(m_2) = 65$, $u(w_1) = 35$, $u(w_2) = 50$ e $v(m_1) = 1$, $v(m_2) = 9$, $v(w_1) = 3$, $v(w_2) = 6$. Verifique se u e v representam a mesma utilidade esperada.

   S: Vamos primeiro calcular as utilidades esperadas das duas loterias, levando em conta as funções u e v:

$$\begin{aligned} UE_u(g) &= 0{,}5u(m_1) + 0{,}5u(m_2) = 45 \\ UE_u(h) &= 0{,}5u(w_1) + 0{,}5u(w_2) = 42{,}5 \\ UE_v(g) &= 0{,}5v(m_1) + 0{,}5v(m_2) = 5 \\ UE_v(g) &= 0{,}5v(w_1) + 0{,}5v(w_2) = 4{,}5 \end{aligned}$$

   As funções UE_u e UE_v representam as mesmas escolhas se existirem a e b, $b > 0$, tais que $UE_u = a + b\,UE_v$. Usando as duas loterias g e h acima, obtemos que:

$$\begin{aligned} UE_u(g) = a + bUE_v(g) \quad &\Rightarrow \quad 45 = a + 5b \\ UE_u(h) = a + bUE_v(h) \quad &\Rightarrow \quad 42{,}5 = a + 4{,}5b \end{aligned}$$

   Resolvendo o sistema, encontramos $a = 20$ e $b = 5 > 0$. Logo, estas duas funções, para os valores dados, representam as mesmas escolhas.

b) Suponha que a função de utilidade da riqueza de um indivíduo seja $u(w) = \log_{10}(w)$ (logaritmo na base 10). O indivíduo possui um carro no valor de R$ 100.000,00. Existe uma probabilidade de 10% de ocorrer um acidente e o carro passar a valer R$ 10.000,00. Calcule a utilidade esperada deste indivíduo.

S: Existem dois estados da natureza relevantes neste caso: 1) carro é roubado e 2) carro não é roubado, com probabilidades de ocorrência de 10% e 90%, respectivamente. A utilidade esperada é:

$$UE = 0{,}10 \log_{10}(10.000) + 0{,}90 \log_{10}(100.000) = 0{,}4 + 4{,}5 = 4{,}9\,.$$

c) Suponha que a função de utilidade da riqueza de um indivíduo seja $u(w) = \sqrt{w}$. Considere a loteria $g = (0{,}10 \circ 100; 0{,}60 \circ 60, 0{,}30 \circ 0)$. Determine o valor esperado, a utilidade esperada e o desvio-padrão da loteria g. Calcule o equivalente de certeza e o prêmio ao risco da loteria g.

S: O valor esperado, denotado por Eg, é:

$$Eg = \sum_{i=1}^{3} p_i w_i = 0{,}10 \times 100 + 0{,}60 \times 60 + 0{,}3 \times 0 = 46$$

A variância, denotada por σ_g^2, é:

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{3} p_i (w_i - Eg)^2 = 0{,}10 \times (100 - 46)^2 + 0{,}60 \times (60 - 46)^2 + 0{,}3 \times (0 - 46)^2 = 1.044$$

Logo, o desvio-padrão é $\sigma_g = \sqrt{\sigma_g^2} \approx 32{,}31$.
A utilidade esperada da loteria g é:

$$UE(g) = 0{,}10\sqrt{100} + 0{,}60\sqrt{60} + 0{,}3\sqrt{0} \approx 5{,}65$$

O equivalente de certeza da loteria g, denotado por EC_g, é o valor tal que o indivíduo seja indiferente entre este valor dado com certeza e a loteria g. Logo:

$$\sqrt{EC_g} = UE(g) = 5{,}65 \qquad \Rightarrow \qquad EC_g \approx 31{,}92\,.$$

O prêmio ao risco de g, Denotado por P_g, é a diferença entre o valor esperado da loteria e o equivalente de certeza desta loteria: $P_g = Eg - EC_g \approx 46 - 31{,}92 = 14{,}08$.

13.2) Considere um investidor com renda w e utilidade $u(w) = \sqrt{w}$. Suponha que ele deseja investir R$ 150,00 na compra de ações de duas empresas, empresa A e empresa B. Os preços das ações das duas empresas são iguais a R$ 15,00. O preço das ações das duas empresas no período seguinte depende dos estados da natureza, que podem ser dois: expansão ou contração. A tabela abaixo descreve os preços de ambas as ações para os dois estados da natureza possíveis, além das probabilidades destes estados.

Estado	**Prob.**	**empresa A**	**empresa B**
expansão	50%	40	5
contração	50%	5	40

a) Calcule o preço esperado destas ações. Calcule o retorno esperado destas ações.

S: Os preços esperados das ações A e B, Ep_A e Ep_B, respectivamente, são:

$$Ep_A = 0{,}5 \times 40 + 0{,}5 \times 5 = 22{,}5$$
$$Ep_B = 0{,}5 \times 5 + 0{,}5 \times 40 = 22{,}5$$

Os retornos esperados das ações A e B, Er_A e Er_B, são:

$$Er_A = \frac{Ep_A - p_A}{p_A} = \frac{22{,}5 - 15}{15} = 0{,}5 \qquad \text{e} \qquad Er_B = \frac{Ep_B - p_B}{p_B} = \frac{22{,}5 - 15}{15} = 0{,}5$$

b) Se o indivíduo investir toda a sua renda na ação A, qual será a sua utilidade esperada? Qual será a utilidade esperada se ele investir toda a renda na ação B?

S: Se o indivíduo investir toda a renda na empresa A, ele compra 10 ações. Se investir toda renda na empresa B, ele compra também 10 ações. As utilidades esperadas são:

$$UE(A) = 0{,}5\sqrt{400} + 0{,}5\sqrt{50} \approx 13{,}54$$
$$UE(B) = 0{,}5\sqrt{400} + 0{,}5\sqrt{50} \approx 13{,}54$$

c) Qual a utilidade esperada se o indivíduo investir metade da renda na ação A e metade na ação B?

S: Neste caso, o indivíduo gasta R$ 75 com cada ação e adquire 5 ações de cada empresa. Logo, a utilidade esperada é:

$$UE(\text{opção c}) = 0{,}5\sqrt{225} + 0{,}5\sqrt{225} = 15\,.$$

d) Comparando as três possibilidades de investimento descritas nos itens b) e c), em qual delas o investidor obterá maior utilidade?

S: O investidor obterá maior utilidade na opção descrita no item c).

e) A opção de investimento encontrada no item d) é a que maximiza a utilidade do investidor?

S: Para resolvermos este item, devemos montar o problema do investidor. Denote por x_A e x_B as quantidades de ações da empresa A e da empresa B, respectivamente, que o investidor adquire. O problema do investidor é:

$$\max_{x_A,x_B} 0{,}5\sqrt{40x_A + 5x_B} + 0{,}5\sqrt{5x_A + 40x_B} \qquad \text{s.a.} \qquad 15x_A + 15x_B = 150$$

Usando a restrição orçamentária do problema, temos que $5x_B = 50 - 5x_A$. Substituindo esta expressão para x_B na função objetivo, o problema do investidor pode ser escrito como:

$$\max_{x_A} 0{,}5\sqrt{35x_A + 50} + 0{,}5\sqrt{400 - 35x_A}$$

A CPO do problema acima é:

$$\frac{0{,}5 \times 35}{2\sqrt{50 + 35x_A^*}} - \frac{0{,}5 \times 35}{2\sqrt{400 - 35x_A^*}} = 0$$

Resolvendo a CPO, encontramos $x_A^* = 5$. Substituindo o valor ótimo de x_A na restrição orçamentária, encontramos $x_B = 5$. Então podemos afirmar que a estratégia de investimento descrita no item c) é a melhor estratégia de investimento possível para o indivíduo.