MICROECONOMIA 1

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Notas de Aula 4 – Graduação

Prof. José Guilherme de Lara Resende

1 O Problema do Consumidor

As preferências $\succeq$ e a reta orçamentária contêm informações distintas sobre o consumidor:

- As preferências ou as utilidades refletem o gosto do consumidor, sem considerar o que de fato pode ser adquirido.
- A reta orçamentária reflete as possibilidades de compra do consumidor, sem considerar suas preferências.

O *problema de maximização de utilidade* combina esses dois conceitos, ao modelar o problema do consumidor como a maximização da utilidade sujeita à restrição orçamentária. Esse problema também é também chamado *problema primal do consumidor*.

Considere um consumidor que deseja escolher entre n bens, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que podem ser comprados aos preços de mercado $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente. Vamos continuar denotando uma cesta de bens por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e um vetor de preços por $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Vamos supor que o consumidor possa comprar tantos bens quanto for possível, *sem negociar ou afetar os preços desses bens* (o consumidor é "pequeno" com relação ao tamanho do mercado). Dizemos então que o consumidor é *tomador de preços*. Observe que medimos tanto a renda quanto o consumo dos bens como fluxos em um determinado período de tempo (por exemplo, um mês).

O problema do consumidor pode ser escrito como encontrar a cesta $\mathbf{x}^*$ que seja factível (isto é, que satisfaça a restrição orçamentária, $p_1x_1^* + p_2x_2^* + \cdots + p_nx_n^* \leq m$) e tal que $\mathbf{x}^* \succeq \mathbf{x}$, para toda cesta $\mathbf{x}$ factível, isto é, que também esteja dentro das possibilidades de consumo do indivíduo (ou seja, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}, m) = \big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ \mid p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq m\big\}$ ou, de modo análogo, tal que $\mathbf{x}$ satisfaça a restrição orçamentária, $p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq m$).

Vimos que, sob determinadas condições, uma preferência pode ser representada por uma função de utilidade. Isso significa que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ se, e somente se, $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$. Logo, o problema acima pode ser reescrito em termos de funções de utilidade: encontrar a cesta $\mathbf{x}^*$ que seja factível para o consumidor e tal que $u(\mathbf{x}^*) \geq u(\mathbf{x})$, para toda cesta $\mathbf{x}$ factível. Podemos então escrever o problema do consumidor como um problema de maximização:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{tal que} \qquad p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leq m \tag{1}$$

Então o consumidor escolhe os bens que maximizam a sua utilidade e que estão dentro da sua possibilidade de consumo (satisfazem a sua restrição orçamentária). Se a preferência atende a algum axioma de monotonicidade, então a cesta ótima estará sobre a reta orçamentária. Isso implica que a restrição do problema será satisfeita com igualdade e o problema (1) pode ser simplificado para:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{tal que} \qquad p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = m \tag{2}$$

Logo, se $u(\mathbf{x})$ for crescente, então a restrição orçamentária é satisfeita com igualdade. E se $u(\mathbf{x})$ for estritamente quasecôncava, então a solução do problema (2) é única. Neste caso, como a solução para o problema do consumidor existe e é única, podemos denotar essa solução em função da renda m e de *todos* os preços $\mathbf{p}$ da economia:

$$x_i^* = x_i^M(\mathbf{p}, m), \qquad \text{para } i = 1, 2\, dots, n\,.$$

Já vimos que a função $x_i^* = x_i^M(\mathbf{p}, m)$ é chamada *demanda Marshalliana do bem i*. A *função de utilidade indireta* é definida como:

$$v(\mathbf{p}, m) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n} u\,(\mathbf{x}) \qquad \text{sujeito a} \qquad p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \leq m\,.$$

A função de utilidade indireta está bem definida sempre que a utilidade for uma função contínua (esse resultado é consequência do *teorema de Weierstrass*, um resultado fundamental em otimização). A função de utilidade indireta diz qual o *máximo* de utilidade alcançável aos preços $\mathbf{p}$ e renda m.

Se a solução do problema do consumidor for única para cada conjunto de preços e renda, então podemos encontrar a função de utilidade indireta substitutindo as funções de demanda na utilidade do consumidor:

$$v(\mathbf{p}, m) = u\left(x_1^M(\mathbf{p}, m), x_2^M(\mathbf{p}, m), \ldots, x_n^M(\mathbf{p}, m)\right)$$

A utilidade indireta, vista de modo isolado, não tem conteúdo econômico para a teoria do consumidor, pois a função de utilidade utilizada para representar as preferências de um indivíduo não é única. Porém, a utilidade indireta pode ser usada para inferir o que ocorreu com o bem-estar do indivíduo após uma mudança no ambiente econômico (mudança nos preços e ou na renda).

Por exemplo, suponha que os preços dos bens mudaram de $\mathbf{p}^0$ para $\mathbf{p}^1$, sendo que a renda permaneceu inalterada. Se $v(\mathbf{p}^0, m) > v(\mathbf{p}^1, m)$, então o indivíduo estava melhor quando os preços eram $\mathbf{p}^0$. Mais à frente, usaremos a função de utilidade indireta para derivarmos duas medidas importantes do bem-estar do consumidor, a *variação compensadora* e a *variação equivalente*.

Se as preferências forem bem-comportadas (por exemplo, utilidade Cobb-Douglas e utilidade CES), então a utilidade que a representa será estritamente crescente e estritamente quase-côncava. Neste caso, podemos resolver o problema do consumidor usando o *método de Langrage*. Para facilitar a notação e a análise gráfica, vamos supor apenas dois bens a partir de agora. O Lagrangeano do problema (2) no caso de dois bens é:

$$\mathcal{L} = u(x_1, x_2) + \lambda\,(m - p_1 x_1 - p_2 x_2)\,,$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. Mais rigorosamente, deveríamos usar o *método de Kuhn-Tucker*, que impõe restrições para que as demandas sejam sempre maiores ou iguais a zero. Preferências bem-comportadas garantem que as demandas dos bens serão positivas (*solução interior*, isto é, $x_i^* > 0$ para todo bem i) e que o método de Lagrange é adequado para resolver o problema do consumidor. As $n+1$ condições de primeira ordem (CPO) desse problema são:

$$\begin{array}{ll} (x_1): & \lambda^* p_1 = \partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1 \\ (x_2): & \lambda^* p_2 = \partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2 \\ (\lambda): & m = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* \end{array} \tag{3}$$

As CPOs são necessárias, mas não suficientes para garantir a otimalidade da solução. Para confirmar que as cestas encontradas usando as CPO são de fato ótimas, precisamos verificar as

condições de segunda ordem (CSO) do problema. Por enquanto, vamos assumir que as CSO para o problema do consumidor são satisfeitas (o que de fato ocorre no caso de preferências bem-comportadas). Se dividirmos as duas das primeiras CPOs, obtemos:

$$\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial u(x_1^*, x_2^*0)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2} = -\frac{p_1}{p_2} \tag{4}$$

O lado esquerdo da equação (4) é a $TMS_{12}(x_1^*, x_2^*)$, que mede o valor marginal do bem 1 em termos do bem 2 na cesta ótima (a inclinação da curva de indiferença em (x_1^*, x_2^*)). O lado direito dessa equação mede o custo de mercado do bem 1 em termos do bem 2 (a inclinação da reta orçamentária).

A equação (4) diz que para a escolha ótima $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ do consumidor, o valor relativo dos bens 1 e 2 em termos das preferências do consumidor deve ser igual ao valor de mercado desses bens. O valor marginal do bem 1 em termos do bem 2 deve portanto ser igual ao custo marginal de mercado do bem 1 em termos do bem 2.

A equação (4) tem a seguinte interpretação gráfica: no ponto ótimo de consumo, a inclinação da curva de indiferença nesse ponto (a TMS) é igual à inclinação da reta orçamentária (a taxa de troca de mercado dos dois bens). A Figura 1 abaixo ilustra essa situação, onde o ponto de equilíbrio (ponto ótimo) de consumo é representado por E, o ponto de tangência da curva de indiferença com a reta orçamentária (o ponto onde essas duas curvas têm a mesma inclinação).

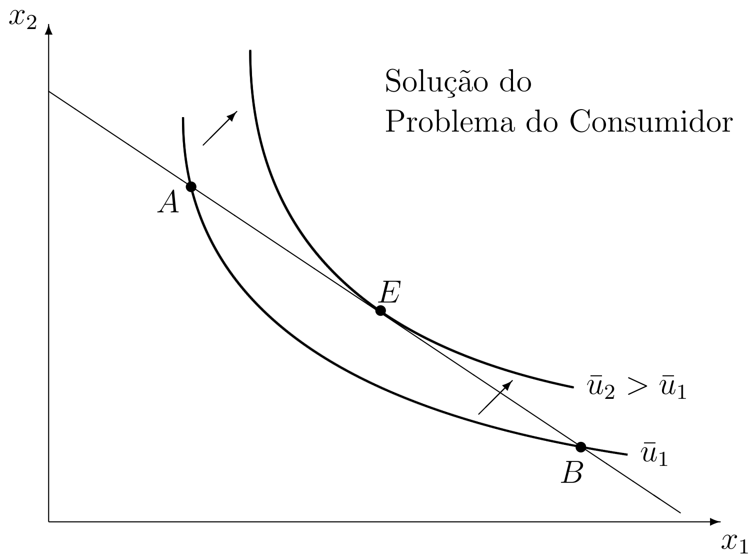

Figura 1: Escolha Ótima do Consumidor

No ponto A da Figura 1 acima, o valor marginal do bem x_1 (medido em termos do outro bem – a TMS nessa cesta) excede o custo de x_1 (novamente, medido em termos do outro bem – a razão de preços) e, portanto, o consumidor valoriza x_1 mais que o mercado. Ele troca no mercado x_2 por x_1 até que essas duas razões se igualem (raciocínio semelhante vale para o ponto B, onde o bem x_2 é mais valorizado pelo consumidor do que o custo de mercado desse bem, relativo ao bem 1).

Resumidamente, o consumidor tenta alcançar a curva de indiferença mais alta possível, isto é, que possua alguma cesta de bens factível (que o consumidor possa comprar). Essa curva é a que tangencia a reta orçamentária. Qualquer curva de indiferença que dê um nível de satisfação mais alto já não inclui nenhuma cesta de bens que possa ser adquirida por este consumidor.

Logo, se as preferências são bem-comportadas, a escolha ótima do consumidor satisfaz a condição de tangência em que o valor absoluto da taxa marginal de substituição é igual à razão de preços. Além disso, a solução do problema do consumidor é *interior*: os dois bens são consumidos em quantidades positivas. Isso não vale sempre, como veremos no exemplo abaixo, de uma função de utilidade por bens substitutos perfeitos.

2 Funções de Demanda

As CPO representam $n+1$ equações em $n+1$ variáveis, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e λ. A solução dessas equações do problema do consumidor são as demandas dos bens (e o multiplicador de Lagrange) como funções dos preços e do nível de renda:

$$x_i^M = x_i^M(p_1, p_2, \ldots, p_n, m), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

As funções de demanda acima são chamadas *demandas marshallianas* (por isso o superescrito M, para diferenciar da demanda hicksiana, que veremos mais à frente). Essas funções dizem qual a escolha ótima de consumo quando os preços são $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e a renda m.

Observe que as CPOs constituem um sistema de equações *não lineares*. Em alguns casos pode ser complicado resolver esse sistema. O modo usualmente mais simples de resolver o sistema para o caso de dois bens constitui em primeiro dividir a CPO do bem 1 pela CPO do bem 2. Isso resulta na TMS dos bens 1 e 2 em valor absoluto igual à razão dos preços, ou seja, em uma relação entre os dois bens sem a presença do multiplicador de Lagrange. Escrevemos então um bem em função do outro e usamos a reta orçamentária para encontrar a demanda desse bem. Daí substituímos essa demanda na relação entre os dois bens que foi obtida ao dividir as duas primeiras CPOs (ver exemplo abaixo com utilidade Cobb-Douglas).

A dependência de x_i em $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e m e não diretamente nas quantidades dos outros bens não implica que a escolha de consumo do bem 1 não dependa da escolha de consumo dos outros bens, mas apenas que as escolhas de $x_2, \ldots, x_n$ estão implicitamente incorporadas na solução e foram substituídas pelos seus preços e pela renda. Por exemplo, a ligação entre a escolha das quantidades ótimas de café e de açucar não é capturada expressando a demanda de açucar como função da demanda de café, mas por meio do efeito que o preço do café tem na demanda por café e indiretamente na demanda por açucar. Portanto, ao medir o efeito de uma mudança de preço do café na demanda por café implicitamente se incorpora o ajustamento que ocorre com a demanda de açucar (por exemplo, um aumento no preço do café pode causar uma diminuição no consumo de açucar).

Exemplo: Função Cobb-Douglas. O problema do consumidor para essa função de utilidade no caso de dois bens é:

$$\max_{x_1, x_2} x_1^\alpha x_2^\beta \qquad \text{s.a} \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \,,$$

com $\alpha, \beta > 0$. Para resolver esse problema, montamos o Langrageano:

$$\mathcal{L} = x_1^\alpha x_2^\beta + \lambda \left(m - p_1 x_1 - p_2 x_2 \right)$$

As condições de primeira ordem (CPO) desse problema são:

$$\begin{aligned}(x_1): &\quad \lambda^* p_1 = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}\\ (x_2): &\quad \lambda^* p_2 = \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}\\ (\lambda): &\quad m = p_1 x_1 + p_2 x_2\end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda CPO, obtemos:

$$\frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{p_1 x_1}{p_2}\right)$$

Observe que na primeira equação acima, temos que o valor absoluto da TMS entre os bens 1 e 2 é igual à relação de preços entre esses bens (condição de tangência entre curva de indiferença e reta orçamentária). Substituimos a expressão para x_2 acima na reta orçamentária (terceira CPO):

$$m = p_1 x_1 + p_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{p_1 x_1}{p_2}\right)\right) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{m}{p_1}$$

Substituindo o valor encontrado acima para x_1 de volta na expressão para x_2, temos que as funções de demanda para os dois bens são:

$$x_1(p_1,p_2,m) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{m}{p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1,p_2,m) = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{m}{p_2}$$

Já a função de utilidade indireta é:

$$\begin{aligned}v(p_1,p_2,m) &= u\left(x_1^M(p_1,p_2,m), x_2^M(p_1,p_2,m)\right) = \left(x_1^M(p_1,p_2,m)\right)^{\alpha}\left(x_2^M(p_1,p_2,m)\right)^{\beta}\\ &= \left(\frac{\alpha\, m}{(\alpha+\beta)p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta\, m}{(\alpha+\beta)p_2}\right)^{\beta} = \alpha^{\alpha}\beta^{\beta}(\alpha+\beta)^{-(\alpha+\beta)}p_1^{-\alpha}p_2^{-\beta}m^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

Note que o preço do outro bem não afeta a demanda de nenhum dos bens. Observe também que:

$$s_1^* = \frac{p_1 x_1^*}{m} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{e} \qquad s_2^* = \frac{p_2 x_2^*}{m} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Logo, *a proporção (ou fração ou porcentagem) da renda consumida com cada um dos bens, s_i^*, é constante*, *quaisquer que sejam os preços dos bens e a renda do consumidor*. O consumidor sempre gasta a mesma fração fixa da sua renda com cada bem, e essa fração é determinada pelos coeficientes α e β da função utilidade. Por exemplo, se $\alpha = \beta$, esse consumidor irá gastar sempre 50% de sua renda em cada um dos dois bens, independentemente do valor da sua renda ou dos preços dos bens.

Um truque que facilita encontrar as demandas geradas pela utilidade Cobb-Douglas é linearizar a utilidade usando a função logaritmo. Lembre-se que qualquer transformação crescente de uma função utilidade ainda representa as mesmas preferências. Portanto, a transformação $f(t) = \ln(t)$ da função Cobb-Douglas representa as mesmas preferências, onde a nova função de utilidade é $U(x_1,x_2) = f(u(x_1,x_2) = \alpha\ln(x_1) + \beta\ln(x_2)$. Outra transformação que podemos utilizar é $f(t) = t^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$. Como $\alpha+\beta > 0$, então essa função é crescente. A função de utilidade $\hat{U}(x_1,x_2) = f(u(x_1,x_2) = x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = x_1^{\gamma}x_2^{1-\gamma}$, onde $\gamma = \alpha/(\alpha+\beta)$ e $1-\gamma = \beta/(\alpha+\beta)$ (como $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, temos que $0 < \gamma < 1$), representa as mesmas preferências que u. Logo, as três funções de utilidade acima, u, U e $\bar{U}$ são equivalentes: elas representam a mesma preferência e geram as mesmas funções de demanda para os bens 1 e 2 (veja o Exercício 5 no final desta nota de aula).

3 Dois Casos Especiais

Os casos de bens substitutos e de bens complementares são exemplos onde não é possível usar o método de Lagrange. No primeiro caso, a solução é quase sempre *de canto* (isto é, apenas um bem é consumido). No segundo caso, a função de utilidade não é diferenciável. Nos dois casos, as utilidades não representam preferências bem-comportadas (mais especificamente, essas duas preferências são apenas convexas, mas não estritamente convexas. Além disso, a preferência de Leontief é monótona, mas não estritamente monótona).

Como encontrar as demandas quando não podemos usar o Lagrangeano? A análise deve ser feita caso a caso. Para os dois exemplos abaixo (e na maioria dos casos de apenas dois bens), a solução gráfica pode auxiliar a resolução do problema. Vamos analisar esses exemplos agora. Observe que para o Exemplo 1, bens substitutos perfeitos, podemos usar o método de Kuhn-Tucker. Obviamente, ele resultará na mesma solução que iremos determinar na análise abaixo. Para o exemplo 2, bens complementares perfeitos, nenhum dos dois métodos, Lagrange ou Kuhn-Tucker, pode ser usado, já que a função de utilidade não é diferenciável.

Exemplo 1: Bens Substitutos Perfeitos. Dois bens são substitutos perfeitos se o consumidor aceita substituir um pelo outro a uma TMS constante. Por exemplo, gasolina e álcool são substitutos perfeitos para quem possui carro flex. Se x_1 e x_2 são bens substitutos perfeitos, a função de utilidade que representa essa relação é definida por:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2, \qquad a > 0,\ b > 0$$

Os números a e b não têm significado isolado, porém em conjunto determinam a taxa de substituição entre os bens, $TMS_{1,2} = -a/b$. No exemplo de gasolina e álcool, se $a = b$, então podemos fazê-los iguais a 1. A curva de indiferença de bens substitutos, com $a = b$, são retas com inclinação $-a/b$, onde quanto mais afastada da origem, maior o nível de utilidade associado à curva de indiferença (ver Figura 2 abaixo).

O gráfico das curvas de indiferença dessa utilidade e da reta orçamentária, para o caso em que $p_2 = 2p_1$, é ilustrado na Figura 2 abaixo, que ilustra também a cesta ótima do consumidor, denotada pelo ponto E, e onde a reta orçamentária é dada pela reta mais fina.

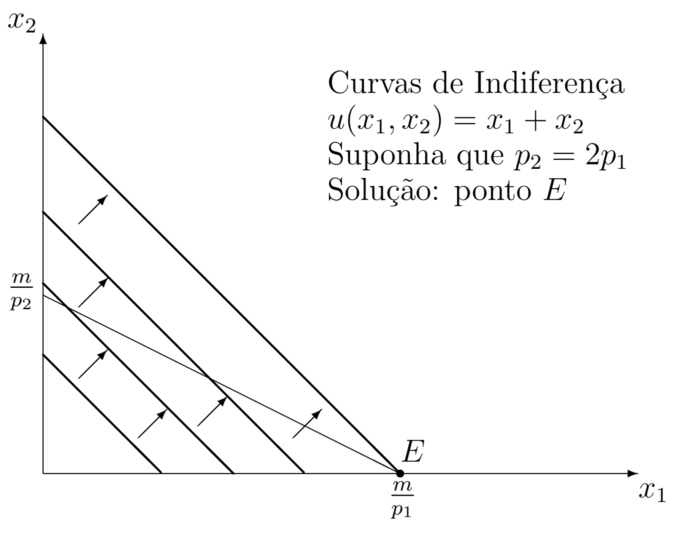

Figura 2: Solução para o caso de Bens Substitutos Perfeitos

O problema do consumidor é atingir o nível mais alto de satisfação, dada a restrição orçamentária. Ele tenta então se situar na curva de indiferença que representa o maior nível de satisfação. Para o caso ilustrado no gráfico, esse nível mais alto é dado pela curva de indiferença que toca a reta orçamentária no eixo horizontal. A cesta de bens ótima é então consumir nada do bem 2 ($x_2^* = 0$) e comprar somente o bem 1 ($x_1^* = m/p_1$).

Por que isso ocorre? Exatamente porque os bens são perfeitamente substitutos: o consumidor comprará apenas o bem que for *relativamente* mais barato. Se $a = b = 1$, então $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, e o consumidor compra o bem que tiver o menor preço (se os dois bens tiverem o mesmo preço, ele comprará qualquer combinação dos dois bens). Se $a \neq b$, então o consumidor compra o bem que for relativamente mais barato: o bem que tiver menor preço dividido pelo coeficiente da utilidade.

Então as funções de demanda geradas por esta utilidade são:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} m/p_1, & \text{se} \quad p_1/a < p_2/b \\ 0, & \text{se} \quad p_1/a > p_2/b \end{cases}$$

$$x_2^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad p_1/a < p_2/b \\ m/p_2, & \text{se} \quad p_1/a > p_2/b \end{cases}$$

No caso em que $p_1/a = p_2/b$, o consumidor é indiferente entre qual dos bens comprar, pois a TMS é igual à relação de preços dos bens. Nesse caso, o consumidor comprará qualquer quantidade x_1^* e x_2^* tal que satisfaça a sua reta orçamentária, $p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m$.

Portanto, para esta função de utilidade, *não vale, em geral, que a TMS dos bens seja igual à relação de preços* (e é exatamente isto que faz com que a solução seja de canto). Mais ainda, não podemos falar de *funções* de demanda, pois para o caso em que $p_1/a = p_2/b$, existem várias cestas de bens que maximizam o bem-estar do consumidor (nesse caso, podemos determinar *correspondências* de demanda).

Já a função de utilidade indireta é:

$$\begin{aligned} v(p_1, p_2, m) &= u\left(x_1^M(p_1, p_2, m), x_2^M(p_1, p_2, m)\right) = a x_1^M(p_1, p_2, m) + b x_2^M(p_1, p_2, m) \\ &= \begin{cases} a \times (m/p_1) + b \times 0, & \text{se} \quad p_1/a < p_2/b \\ a \times 0 + b \times (m/p_2), & \text{se} \quad p_1/a > p_2/b \\ a \times m/p_1 = b \times m/p_2, & \text{se} \quad p_1/a = p_2/b \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos reescrever essa função de modo mais simples como:

$$v(p_1, p_2, m) = \frac{m}{\min\{p_1/a, p_2/b\}}\,.$$

Exemplo 2: Bens Complementares Perfeitos. Dois bens são complementares perfeitos se são consumidos conjuntamente, *em proporções fixas*. O exemplo clássico de bens complementares perfeitos é sapato do pé esquerdo e sapato do pé direito (eles são tão perfeitamente complementares que sapatos são sempre vendidos aos pares...). Outros possíveis exemplos são carro e gasolina, café e açucar, etc. Se x_1 e x_2 são bens complementares perfeitos, a função de utilidade que representa essa relação é:

$$u(x_1, x_2) = \min\{a x_1, b x_2\}, \qquad a > 0,\ b > 0$$

Os números a e b definem o grau de complementaridade dos bens. No caso de sapatos, $a = b = 1$. No caso de café e açucar, se você usa três colheres de açucar (bem x_1) para uma xícara de café (bem

x_2), então $a = 3b$. O gráfico das curvas de indiferença dessa utilidade e da restrição orçamentária é ilustrado na Figura 3 abaixo.

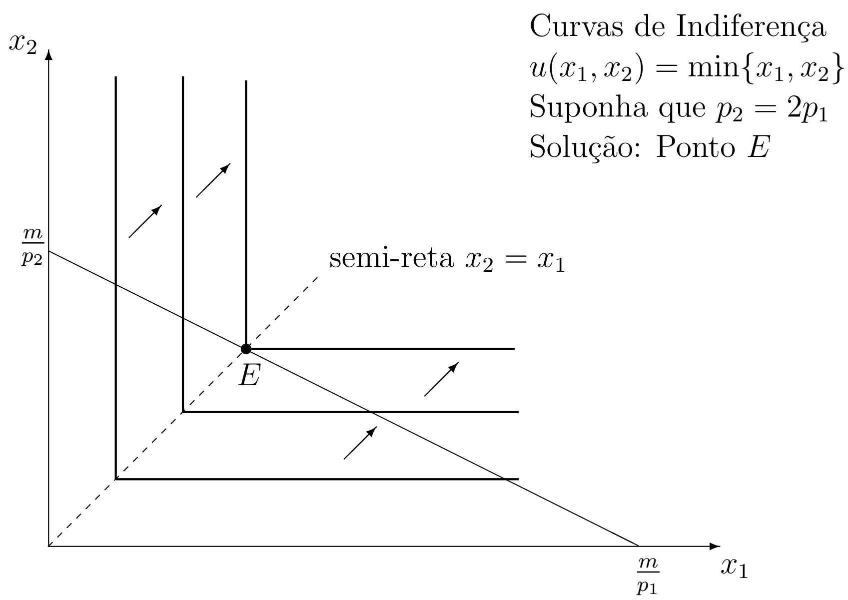

Figura 3: Solução para o caso de Bens Complementares Perfeitos

Como já vimos anteriormente, o consumidor escolhe a cesta de bens na curva de indiferença que representa o maior nível de satisfação possível. Na Figura 3 acima, essa curva toca a reta orçamentária no ponto E. A cesta de bens ótima significa consumir quantidades iguais do bem (quando $a = b$).

Por que essa é a solução? Exatamente porque os bens são complementares perfeitos: não há como substituí-los: se $a = b = 1$, então $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$, e o consumidor compra os dois bens em quantidades iguais, *independente da relação de preços*. Portanto $x_1^M = x_2^M = x^*$ e, substituindo na reta orçamentária, encontramos:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = x_2^M(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

Se $a \neq b$, o consumidor iguala os *argumentos* da função de mínimo: $ax_1 = bx_2$ e, portanto, $x_2 = (a/b)x_1$. O consumidor compra mais do bem que tiver o coeficiente a ou b menor: para esse bem, ele precisa de uma quantidade maior para cada unidade do outro bem. Então as funções de demanda são:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + \left(\frac{a}{b}\right) p_2} \qquad \text{e} \qquad x_2^M(p_1, p_2, m) = \left(\frac{a}{b}\right) \frac{m}{p_1 + \left(\frac{a}{b}\right) p_2}$$

Já a função de utilidade indireta é:

$$\begin{aligned} v(p_1, p_2, m) &= u\left(x_1^M(p_1, p_2, m), x_2^M(p_1, p_2, m)\right) = \min\left\{x_1^M(p_1, p_2, m), x_2^M(p_1, p_2, m)\right\} \\ &= \min\left\{a \times \frac{m}{p_1 + \left(\frac{a}{b}\right) p_2}, b \times \left(\frac{a}{b}\right) \frac{m}{p_1 + \left(\frac{a}{b}\right) p_2}\right\} = \frac{a\, m}{p_1 + \left(\frac{a}{b}\right) p_2} \\ &= \frac{m}{p_1/a + p_2/b} \end{aligned}$$

4 Função de Utilidade Quaselinear

Uma classe de utilidades muito usadas em economia são as utilidades quaselineares. Elas são não-lineares em um dos bens e linear nos outros. Para o caso de dois bens, ela é dada por:

$$u(x_1, x_2) = g(x_1) + x_2\,,$$

onde a função g deve ser *estritamente côncava*. Na maioria dos casos considerados em livros-texto, as duas formas funcionais consideradas são $g(x_1) = \sqrt{x}$ e $g(x_1) = \ln(x_1)$. Vamos resolver o problema do consumidor para o segundo caso: suponha que $g(x_1) = \ln(x_1)$. Logo, o problema do consumidor é:

$$\max_{x_1, x_2} \ \ln(x_1) + x_2 \qquad \text{s.a} \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Podemos resolver esse problema sem montar o Lagrangeano, usando um truque. Substituindo o valor de x_2 dado pela reta orçamentária ($x_2 = m/p_2 - (p_1/p_2)x_1$) na função de utilidade, obtemos:

$$\max_{x_1} \ \ln(x_1) + m/p_2 - (p_1/p_2)x_1\,,$$

um problema sem restrição explícita. Vamos assumir que *a renda é grande o suficiente para que o consumo de x_2 seja positivo*. Nesse caso a solução é interior e a CPO do probelam resulta em:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1^M(p_1, p_2, m) = \frac{p_2}{p_1}$$

Note que a demanda do bem 1 depende *apenas da relação de preços*. A CSO é satisfeita se a função g for estritamente côncava ($g''(x_1^*) < 0$). A demanda do bem x_2 é obtida substituindo a demanda do bem 1 na restrição orçamentária:

$$x_2(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_2} - \left(\frac{p_1}{p_2}\right) x_1^M = \frac{m}{p_2} - 1\,.$$

Portanto, a demanda Marshalliana do bem 1 não depende da renda, depende apenas dos preços. Essa é uma propriedade geral das funções quaselineares: o bem que entra de modo não linear na utilidade possui uma demanda que não depende da renda (*caso a renda seja grande o suficiente*, discutiremos esse ponto abaixo). As funções de utilidade quaselineares, devido ao fato de que geram demandas com uma estrutura relativamente simples, são muito usadas em economia, especialmente na análise de bem-estar.

Observação: Porém, temos que ser cuidadosos aqui – na verdade, a demanda não será independente da renda *para todos os valores da renda*: se a renda for nula, o consumidor não conseguirá comprar nada do bem 1, por exemplo.

De modo um pouco mais rigoroso, deveríamos ter resolvido o problema acima usando o método de Kuhn-Tucker. Mas vamos fazer o seguinte exercício mental: vamos calcular a renda necessária para comprar a quantidade ótima $x_1(p_1, p_2, m)$ que encontramos acima. Como o custo desta cesta é $p_1 \times x_1(p_1, p_2, m)$, obtemos para a demanda calculada para o exemplo acima:

$$p_1 \times x_1(p_1, p_2, m) = p_1 \times \frac{p_2}{p_1} = p_2$$

Logo, se a renda do indivíduo for menor do que p_2 ($m < p_2$), ele não possui renda suficiente para comprar a quantidade ótima $x_1(p_1, p_2, m) = p_2/p_1$. Neste caso, é possível mostrar que ele gasta toda a sua renda apenas com o bem 1 e, portanto, as demandas ótimas são completamente caracterizadas por:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} p_2/p_1 & \text{se} \quad p_2 \leq m \\ m/p_1 & \text{se} \quad p_2 > m \end{cases}$$

$$x_2^M(p_1, p_2, m) = \begin{cases} m/p_2 - 1 & \text{se} \quad p_2 \leq m \\ 0 & \text{se} \quad p_2 > m \end{cases}$$

As demandas geradas por utilidades quaselineares têm essa propriedade da demanda de um dos bens não depender da renda *quando os bens são consumidos em quantidades positivas, ou seja, quando a solução é interior.*

Nesse caso, *o efeito de uma alteração da renda na demanda do bem 1 é nulo*: uma variação na renda não altera a quantidade consumida do bem 1. Qualquer alteração na renda afeta apenas a demanda do bem 2. Por exemplo, se a renda do consumidor aumentar, todo esse aumento será gasto apenas no bem 2.

Graficamente, as curvas de indiferença de uma função de utilidade quaselinear são "*verticalmente paralelas*": para qualquer quantidade do bem, as inclinações de duas curvas de indiferença distintas serão iguais. Isto é consequência de o efeito renda ser nulo, pois o valor marginal da quantidade consumida do bem não depende da renda.

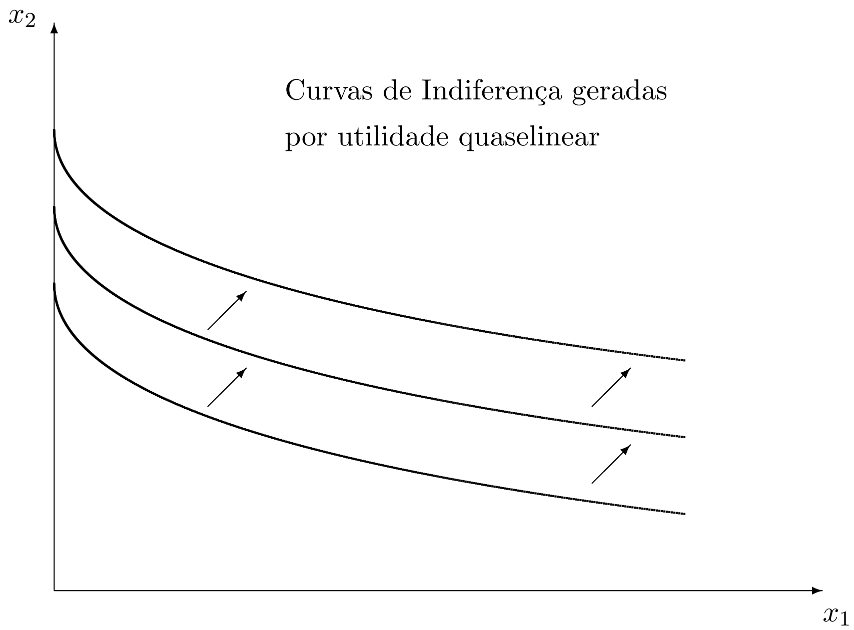

Figura 4: Curvas de Indiferença – Utilidade Quaselinear

5 Condições de Segunda Ordem

Se as preferências forem estritamente monótonas (ou apenas monótonas), a solução do problema do consumidor estará sobre a reta orçamentária. Isto significa que a cesta ótima escolhida exaure toda a renda do consumidor. Se as preferências também forem estritamente convexas, vimos que a função de utilidade é estritamente quasecôncava.

A propriedade de preferências estritamente convexas garante que as condições de segunda ordem (CSO) sejam satisfeitas. Se as preferências são bem-comportadas, é fácil ver graficamente, para o caso de dois bens, que a solução do problema do consumidor encontrada resolvendo-se as CPO será única e de fato um máximo. Além disso, temos que a solução satisfaz a condição de tangência, em que a TMS calculada na cesta ótima é igual à inclinação da reta orçamentária (ver Figura 1 acima).

Algebricamente, as CSO são obtidas do *Hessiano orlado* (ou *Hessiano com borda*) da função de Lagrange, formado pelas derivadas de segunda-ordem do Lagrangeano. O Lagrangeano do problema de maximização de utilidade sujeita à restrição orçamentária é:

$$\mathcal{L} = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\,(m - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n)$$

O Hessiano orlado é:

$$H_O = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\lambda\partial x_1} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\lambda\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\lambda\partial x_n} \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\partial\lambda} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_n\partial\lambda} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_n \\ -p_1 & -u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ -p_2 & -u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ -p_n & -u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

onde usamos a seguinte notação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u_{ii} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}\,, \qquad \text{para } i, j = 1, \ldots, n\,.$$

Para que a solução encontrada das CPOS seja de fato um máximo, H_O, calculada no candidato a ótimo, deve ser uma matriz *negativa definida* (isto é, $\mathbf{z}^T \cdot H_0 \cdot \mathbf{z} < 0$, para todo vetor $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$). Essa condição é verificada se os determinantes dos menores principais do Hessiano orlado, calculado no candidato a ótimo, alternarem sinais, a partir do menor principal de ordem 2, começando com o sinal negativo. Logo, devemos ter que:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -p_1 \\ -p_1 & \mathcal{L}_{11} \end{pmatrix} < 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ -p_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix} > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ -p_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ -p_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ -p_3 & \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{pmatrix} < 0$$

e assim por diante (onde $\mathcal{L}_{ij} = \partial \mathcal{L}/\partial x_i \partial x_j$). Observe que o determinante do menor principal de ordem 2, igual a $-p_1^2$, é sempre negativo, já que assumimos que $p_1 > 0$.

Logo, para o caso de dois bens, para verificar se CSO são satisfeitas, basta verificar se o determinante do Hessiano orlado, calculado na cesta candidata a ótimo, é positivo. Nesse caso, pode-se garantir que as demandas encontradas usando as CPO são de fato um máximo para o problema do consumidor (na verdade, garante-se apenas que é um máximo local. Se a função de utilidade for quasecôncava, pode-se mostrar que (x_1^*, x_2^*) será um máximo global).

Vamos calcular o determinante do Hessiano orlado acima. Primeiro observe que as CPO podem ser escritas como $p_1 = u_1/\lambda$ e $p_2 = u_2/\lambda$, onde $u_i = \partial u/\partial x_i$, $i = 1, 2$. Substituindo essas expressões no Hessiano orlado, obtemos:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -u_1/\lambda & -u_2/\lambda \\ -u_1/\lambda & u_{11} & u_{12} \\ -u_2/\lambda & u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2}\left(2u_1u_2u_{21} - u_2^2u_{11} - u_1^2u_{22}\right) > 0\,,$$

onde as funções acima são calculadas na cesta candidata a ótimo, (x_1^*, x_2^*), e em $\lambda = \lambda^*$. A CSO é satisfeita se o determinante do Hessiano orlado for maior do que zero. Como λ^2 é sempre maior do que zero, podemos simplificar essa condição para:

$$2u_1u_2u_{21} - u_2^2u_{11} - u_1^2u_{22} > 0$$

Essa última desigualdade garante que as CSO do problema para o caso de dois bens são satisfeitas e, consequentemente, que as demandas encontradas resolvendo as CPOs dão o máximo de utilidade ao consumidor em questão.

Exemplo: Utilidade Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$. É fácil verificar que, no caso da utilidade Cobb-Douglas, o termo $2u_1u_2u_{21} - u_2^2u_{11} - u_1^2u_{22}$ é igual a:

$$2\alpha^2\beta^2 x_1^{3\alpha-2}x_2^{3\beta-2} - \beta^2\alpha(\alpha-1)x_1^{3\alpha-2}x_2^{3\beta-2} - \alpha^2\beta(\beta-1)x_1^{3\alpha-2}x_2^{3\beta-2},$$

onde x_1 e x_2 são as demandas ótimas dos bens. Como $x_1^{3\alpha-2}x_2^{3\beta-2} > 0$, podemos dividir a expressão acima por $x_1^{3\alpha-2}x_2^{3\beta-2}$, que o seu sinal não irá se alterar. Nesse caso, obtemos:

$$2\alpha^2\beta^2 - \beta^2\alpha(\alpha-1) - \alpha^2\beta(\beta-1), \tag{6}$$

uma expressão que depende apenas dos parâmetros α e β da utilidade Cobb-Douglas. Se α e β são positivos, então a expressão (6) acima será positiva. Portanto, se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, as CSO para a maximização da função de utilidade Cobb-Douglas são satisfeitas e as demandas encontradas usando as CPO são de fato a solução do problema do consumidor (maximizam a sua utilidade sujeita à restrição orçamentária). Observe que $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ implicam que os bens 1 e 2 são de fato bens para o consumidor, no sentido de que o seu consumo traz utilidade para o indivíduo.

Leitura Recomendada

- Varian, cap. 5 - "Escolha".
- Pindick e Rubinfeld, cap. 3 - "Comportamento do Consumidor", seção 3, "A Escolha por Parte do Consumidor".
- Hall e Lieberman, cap. 5 - "A Escolha do Consumidor", seção 3 - "Tomada de Decisão do Consumidor" e apêndice - "Teoria do Consumidor com Curvas de Indiferença".
- Nicholson e Snyder, cap. 4 - "Utility Maximization and Choice".

Exercícios

1) Suponha que existam apenas 2 bens e que a utilidade de um certo indivíduo é $u(x_1, x_2) = x_1^{0{,}25} + x_2^{0{,}25}$.

   a) Monte o problema do consumidor e derive as demandas ótimas usando o método de Lagrange.
   b) Verifique as condições de segunda ordem.
   c) Mostre que as funções de demanda satisfazem a propriedade de "adding-up", ou seja, que $p_1x_1(p_1, p_2, m) + p_2x_2(p_1, p_2, m)$ é de fato igual a m.
   d) Mostre que as funções de demanda satisfazem a propriedade de homogeneidade.

2) Suponha uma função de utilidade definida por:

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_2 + 2x_1, x_1 + 2x_2\}$$

   a) Desenhe a curva de indiferença para $u(x_1, x_2) = 20$.
   b) Para que valores de p_1/p_2 a solução ótima consistirá em $x_1 = 0$ e $x_2 = m/p_2$?
   c) Para que valores de p_1/p_2 a solução ótima consistirá em $x_1 = m/p_1$ e $x_2 = 0$?
   d) Para que valores de p_1/p_2 a solução ótima será interior (ou seja, $x_1^* > 0$ e $x_2^* > 0$)?

3) Considere a utilidade $u(x_1, x_2) = \sqrt{ax_1 + bx_2}$.

   a) Calcule a TMS entre os dois bens. Desenhe o mapa de indiferença desta utilidade.
   b) Encontre as funções de demandas ótimas do consumidor. Justifique sua resposta.
   c) Agora suponha que $a = b = 1$ e $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $m = 100$. Ilustre graficamente a solução neste caso. Qual a taxa marginal de substituição na cesta ótima? Para este caso, vale a condição de igualdade de TMS e relação de preços? Discuta intuitivamente sua resposta.

4) Considere a utilidade $u(x_1, x_2) = (\min\{ax_1, bx_2\})^2$.

   a) Desenhe o mapa de indiferença desta utilidade. Calcule a TMS entre os dois bens.
   b) Encontre as funções de demandas ótimas do consumidor. Justifique sua resposta.
   c) Agora suponha que $a = b = 1$ e $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $m = 100$. Calcule e ilustre graficamente a solução neste caso. Suponha agora que os preços mudaram para $p_1 = 2$ e $p_2 = 1$, e que a renda não se modificou. Calcule e ilustre graficamente a solução neste caso. Compare as duas soluções encontradas neste item. Discuta intuitivamente sua resposta.

5) Encontre as demandas ótimas para os seguintes casos, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$:

   a) $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$;
   b) $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} x_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$;
   c) $u(x_1, x_2) = \alpha \ln(x_1) + \beta \ln(x_2)$;

   Qual a relação entre as demandas encontradas acima? Justifique a sua resposta. Com base na sua resposta, se a utilidade é do tipo $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, é possível tranformá-la em uma utilidade do tipo $u(x_1, x_2) = x_1^\gamma x_2^{1-\gamma}$, com $0 < \gamma < 1$? Se sim, qual a relação entre α, β e γ?

6) Calcule as demandas de um consumidor representado por uma utilidade CES (elasticidade de substituição constante) dada por:

$$u(x_1, x_2) = [a x_1^\rho + b x_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \ , \qquad 0 \neq \rho < 1 \, .$$