MICROECONOMIA 1

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Notas de Aula 8 – Graduação

Prof. José Guilherme de Lara Resende

1 Dualidade

Considere os dois problemas do consumidor:

$$\max_{x_1,x_2,\ldots,x_n} u(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad \text{s.a.} \qquad p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=m \tag{1}$$

$$\min_{x_1,x_2,\ldots,x_n} p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n \qquad \text{s.a.} \qquad u(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bar{u} \tag{2}$$

Se a função utilidade for estritamente crescente, contínua e soluções para ambos os problemas existirem (isso é garantido se a função de utilidade for bem-comportada), então valem as seguintes relações entre os dois tipos de problemas:

1) Maximização da utilidade implica minimização do dispêndio. Suponha que $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ seja solução de (1) e considere o nível de utilidade u^* definido como $u^*=u(x_1^*,\ldots,x_n^*)$. Então $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ é solução do problema (2), com o nível de utilidade $\bar{u}=u^*$.

2) Minimização do dispêndio implica maximização da utilidade. Suponha que (x_1^*,x_2^*) seja solução de (2) e considere o nível de renda m^* definido por $m^*=p_1x_1^*+p_2x_2^*$, $m^*>0$. Então (x_1^*,x_2^*) é solução do problema (1), com o nível de renda $m=m^*$.

A relação 1) acima tem como consequência que $x_i^M(\mathbf{p},m)=x_i^h(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))$, para todo bem i, $i=1,2,\ldots,n$, e que $e(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))=m$. A relação 2) acima tem como consequência que $x_i^h(\mathbf{p},\bar{u})=x_i^M(\mathbf{p},e(\mathbf{p},\bar{u}))$, para todo bem i, $i=1,2,\ldots,n$, e que $v(\mathbf{p},e(\mathbf{p},\bar{u}))=\bar{u}$.

Resumindo, para todo $\mathbf{p}>0$, $m>0$, e $\bar{u}>0$, temos que:

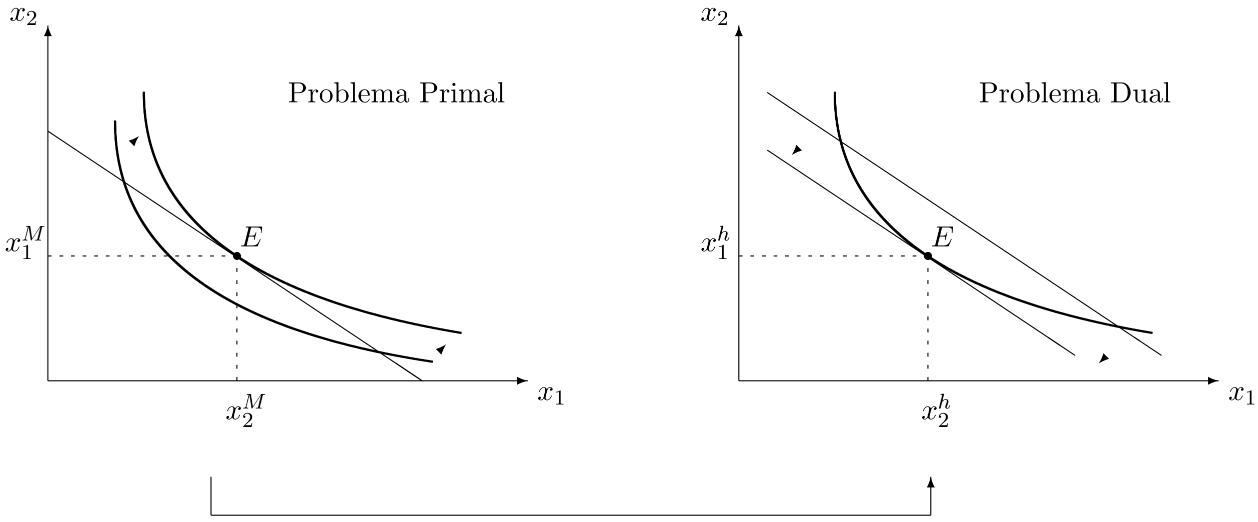
$$e(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m))=m \qquad \text{e} \qquad v(\mathbf{p},e(\mathbf{p},\bar{u}))=\bar{u} \tag{3}$$

A primeira equação acima diz que o dispêndio mínimo necessário para se alcançar o nível de utilidade $v(\mathbf{p},m)$ é igual a m. A segunda equação acima diz que a utilidade máxima alcançável com o nível de renda $e(\mathbf{p},\bar{u})$ é $\bar{u}$.

Para as funções de demanda, valem as seguintes relações:

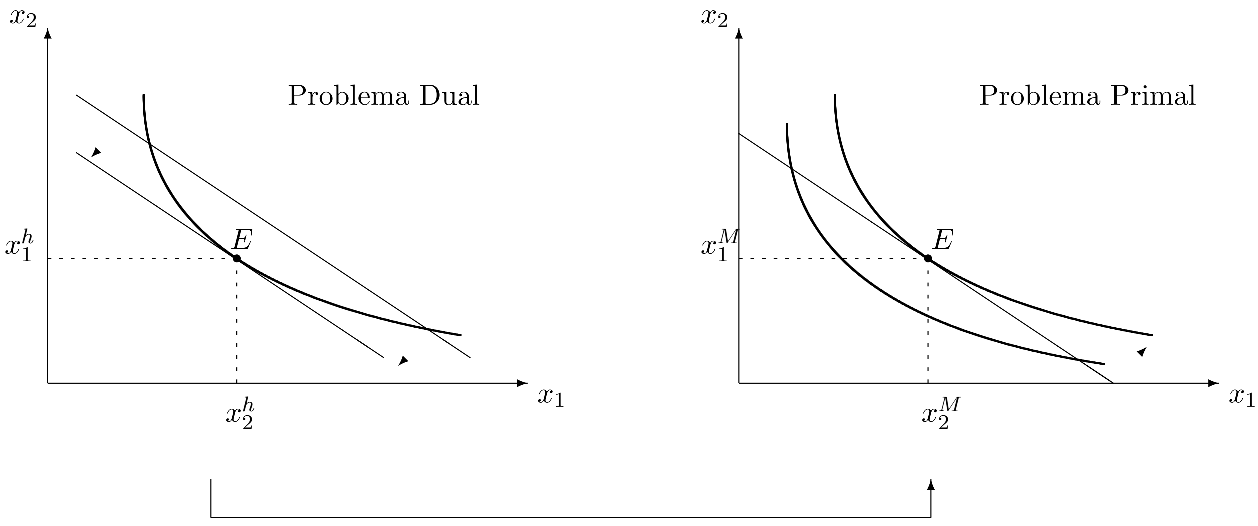
$$x_i^M(\mathbf{p},m)=x_i^h(\mathbf{p},v(\mathbf{p},m)) \qquad \text{e} \qquad x_i^h(\mathbf{p},\bar{u})=x_i^M(\mathbf{p},e(\mathbf{p},\bar{u})) \tag{4}$$

As relações descritas por 1) e 2) acima podem ser melhor compreendidas com o auxílio de gráficos. A Figura 1 abaixo ilustra as relações entre os dois problemas do consumidor.



(x_1^M, x_2^M) será solução de min $p_1x_1 + p_2x_2$ s.a $u(x_1, x_2) = \bar{u}$, se $\bar{u} = u(x_1^M, x_2^M)$

(Relação 1)



(x_1^h, x_2^h) será solução de max $u(x_1, x_2)$ s.a $p_1x_1 + p_2x_2 = \bar{m}$, se $\bar{m} = p_1x_1^h + p_2x_2^h$

(Relação 2)

Figura 1: Dualidade entre os Dois Problemas do Consumidor

No primeiro painel da Figura 1 (Relação 1), o gráfico à esquerda ilustra o problema de maximização da utilidade. O gráfico à direita ilustra o problema de minimização do dispêndio. Se no problema de maximização da utilidade a solução é a cesta $E = (x_1^M, x_2^M)$ (ver gráfico à esquerda) então a cesta E será solução do problema de minimização do dispêndio, *quando a utilidade $\bar{u}$ desse problema for fixada em* $\bar{u} = v(\mathbf{p}, m) = u(x_1^M, x_2^M)$.

Similarmente, no painel abaixo da Figura 1 (Relação 2), o gráfico à esquerda ilustra o problema de minimização de dispêndio. O gráfico à direita ilustra o problema de maximização da utilidade. Se no problema de minimização do dispêndio a solução é a cesta $E = (x_1^h, x_2^h)$ (ver grafico à esquerda), então a cesta E será solução do problema de maximização da utilidade, *quando a renda m desse problema for fixada em* $m = e(\mathbf{p}, \bar{u}) = p_1 x_1^h + p_2 x_2^h$.

Observe também que as CSO dos dois problemas devem coincidir, como foi discutido anteriormente. Se as preferências forem bem-comportadas, então os dois problemas estão bem definidos e valem as relações de dualidade. Podemos provar que elas valem sob condições mais fracas, mas não entraremos nesse nível de detalhe.

Finalmente, observe que apesar de a identidade (4) ser válida, as análises de estática comparativa dos dois problemas do consumidor são diferentes. Por exemplo, os ajustamentos nas duas demandas devido a uma mudança de preços são distintos, já que variáveis diferentes são mantidas constantes em cada problema. Vamos analisar o que ocorre em cada caso, supondo apenas dois bens, o que permite a visualização gráfica do efeito das mudanças nas variáveis.

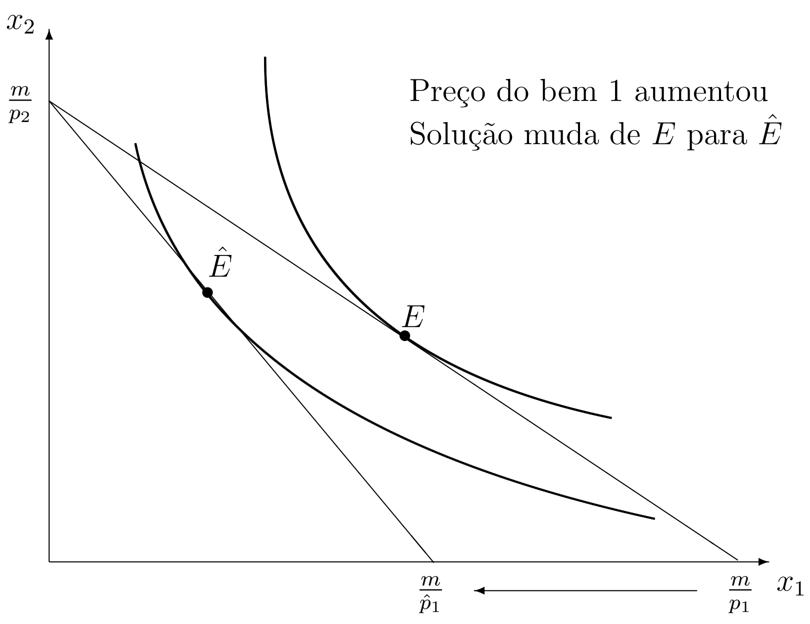


Figura 2: Efeito Total de um Aumento no Preço do Bem 1

A demanda Marshalliana $\mathbf{x}^M(\mathbf{p}, m)$, obtida do problema de maximização da utilidade, mantém *o nível de renda constante*. Se o preço do bem 1 aumentar, por exemplo (de p_1 para $\hat{p}_1$), a reta orçamentária se tornará mais inclinada. O consumidor, com o mesmo nível de renda, alcançará um nível de utilidade mais baixo (a cesta ótima se desloca de E para $\hat{E}$, ver Figura 2 acima). Essa mudança é chamada *efeito total*, pois é o que de fato ocorre com a escolha ótima do consumidor quando o preço do bem 1 aumenta.

A demanda Hicksiana $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, \bar{u})$, obtida do problema de minimização do dispêndio, mantém *o nível de utilidade constante*. Se o preço do bem 1 aumentar, por exemplo, a inclinação da reta de dispêndio aumentará. O consumidor gastará mais para obter uma cesta que lhe dá a mesma utilidade $\bar{u}$ (a cesta ótima se desloca de E para $\hat{E}$, ver Figura 3 abaixo).

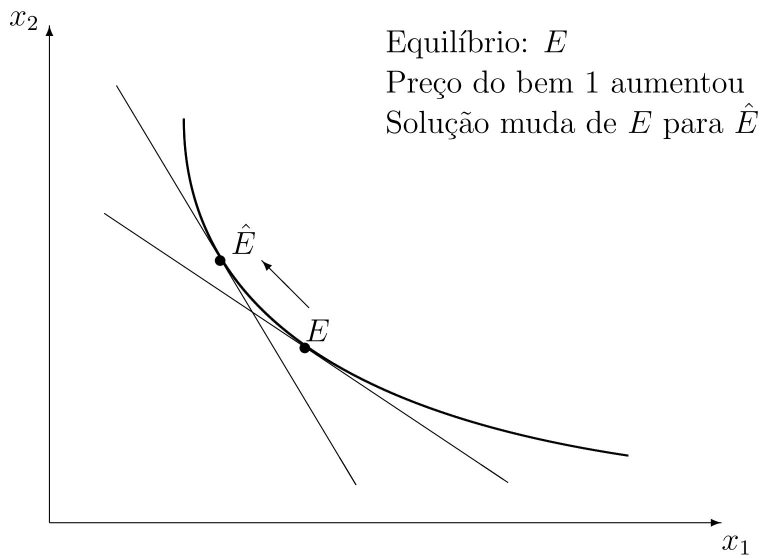


Figura 3: Efeito Substituição de um Aumento no Preço do Bem 1

A mudança ocorrida na *escolha ótima compensada* causada pelo aumento no seu preço do bem 1 e ilustrada na Figura 3 acima é chamada *efeito substituição*. A razão do uso do termo "efeito substituição" é devido ao fato de que como a demanda hicksiana mantém o nível de utilidade constante, a alteração na quantidade consumida refere-se à *substituição entre o consumo dos bens que o indivíduo faz quando o preço relativo dos dois bens muda, mantendo-se o nível de utilidade do indivíduo inalterado*. Esse efeito, ao contrário do efeito total, não é observável a priori (ou seja, se coletarmos dados de consumo e notarmos que ocorreu uma mudança no consumo do bem devido a uma mudança no seu preço, essa mudança é vista como efeito total).

Como esses dois efeitos são diferentes, mas vale a relação de dualidade (4) entre os dois tipos de demanda, a pergunta óbvia é se existe alguma conexão entre os efeitos. A resposta é sim. Essa conexão é descrita pela *equação de Slutsky*, que analisaremos depois do exemplo abaixo, que verifica a validade das relações de dualidade para o caso da utilidade Cobb-Douglas.

Exemplo: Utilidade Cobb-Douglas. Vimos que para a utilidade Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, as demandas Marshallianas e a função de utilidade indireta são:

$$x_1^M = \alpha \frac{m}{p_1}, \quad x_2^M = (1-\alpha)\frac{m}{p_2} \qquad \text{e} \qquad v(p_1, p_2, m) = \alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} p_1^{-\alpha} p_2^{-(1-\alpha)} m$$

A relação $v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = \bar{u}$ permite encontrar $e(p_1, p_2, \bar{u})$:

$$\begin{aligned} &\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} p_1^{-\alpha} p_2^{-(1-\alpha)} e(p_1, p_2, \bar{u}) = \bar{u} \\ &\quad \Rightarrow \; e(p_1, p_2, \bar{u}) = \alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{-(1-\alpha)} p_1^\alpha p_2^{1-\alpha} \bar{u} \end{aligned}$$

Vimos que as demandas Hicksianas geradas pela utilidade Cobb-Douglas são:

$$x_1^h = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha}\bar{u} \qquad \text{e} \qquad x_2^h = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} p_1^{\alpha}p_2^{-\alpha}\bar{u} \tag{5}$$

Logo, a função dispêndio, encontrada usando a sua definição, $e(p_1, p_2, \bar{u}) = p_1 x_1^h + p_2 x_2^h$, é:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)}p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\bar{u}\,,$$

exatamente a expressão que derivamos usando a identidade $v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = \bar{u}$, como esperado. O lema de Shephard permite determinar as duas demandas hicksianas:

$$\begin{aligned} x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) &= \frac{\partial e(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_1} = \alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)}p_1^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha}\bar{u} \\ x_2^h(p_1, p_2, \bar{u}) &= \frac{\partial e(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_2} = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha)}p_1^{\alpha-1}p_2^{-\alpha}\bar{u} \end{aligned}$$

igual às demandas em (5). Podemos também utilizar a relação $x_i^M(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = x_i^h(p_1, p_2, \bar{u})$ para encontrar $x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$, usando as demandas Marshallinas e a função dispêndio:

$$\begin{aligned} x_1^M(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) &= \alpha\left(\frac{\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)}p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\bar{u}}{p_1}\right) \\ \Rightarrow\ x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) &= \alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^{-(1-\alpha)}p_1^{-(1-\alpha)}p_2^{1-\alpha}\bar{u}\,, \end{aligned}$$

exatamente a função de demanda hicksiana para o bem 1 descrita em (5), como esperado. De modo análogo podemos obter $x_2^h(p_1, p_2, \bar{u})$.

2 Equação de Slutsky

Sabemos que as demandas Marshallianas e Hicksianas são iguais quando a demanda Marshalliana é calculada com a renda igual ao dispêndio mínimo necessário para alcançar a utilidade $\bar{u}$:

$$x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = x_i^M(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{u}))$$

Se $\bar{u}$ é o nível de utilidade máximo que o consumidor obtém aos preços $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ e renda m, ao derivarmos a identidade acima com relação a p_j obtemos a *equação de Slutsky*:

$$\frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial m}\, x_j^M(\mathbf{p}, m)\,, \tag{6}$$

onde usamos o Lema de Shepard e o fato de que $x_j^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = x_j^M(\mathbf{p}, m)$, quando $\bar{u} = v(\mathbf{p}, m)$, para chegarmos à expressão acima.

A equação de Slutsky para a demanda de um bem com relação *ao seu próprio preço* mostra que o efeito de uma mudança no preço do bem j sobre a demanda do bem i pode ser decomposto em dois efeitos:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i}}_{\text{efeito total}} = \underbrace{\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i}}_{\text{efeito substituição}} \underbrace{- \frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial m}\, x_i^M(\mathbf{p}, m)}_{\text{efeito renda}}\,,$$

onde $\bar{u}$ é o nível máximo de utilidade que o consumidor alcança aos preços p e renda m.

A equação de Slutsky relaciona a demanda Marshalliana, observável, com a demanda Hicksiana, não observável, usando o efeito renda. O efeito total de uma mudança do preço do bem i sobre o seu consumo é igual à mudança na quantidade demandada do bem i, mantendo a utilidade constante, menos a mudança na renda real, medida pela quantidade consumida do bem no qual o preço muda multiplicado pelo impacto da mudança da renda no consumo do bem i. O primeiro efeito é chamado **efeito substituição**. O segundo efeito é chamado **efeito renda**.

Logo, esses dois efeitos possuem a seguinte intuição econômica:

1) **Efeito Substituição (Hicksiano):** se o preço do bem aumentou, o indivíduo substitui o consumo desse bem pelo consumo de outros bens, dada a nova relação de preços dos bens e mantendo o seu bem-estar constante. O efeito substituição é sempre não positivo (no caso de preferências bem-comportadas, negativo).
2) **Efeito Renda (Hicksiano):** com o aumento do preço, há uma diminuição da *renda disponível* a ser gasta. Esse efeito pode ser negativo ou positivo, dependendo se o bem é normal ou inferior, respectivamente.

O efeito de uma mudança de preços na demanda observável pode ser então dividido em duas partes. Note que o consumidor, quando o preço muda, não calcula o seu efeito substituição e o seu efeito renda. Ele apenas escolhe uma nova cesta de bens. Essa divisão é apenas uma decomposição teórica que auxilia a compreensão do efeito de uma mudança de preços na quantidade demandada do bem. Na primeira parte da divisão, os preços relativos mudam, mas a utilidade é mantida constante. Na segunda parte, com a nova relação de preços valendo, a renda real (que se altera quando ocorre uma mudança de preço) do consumidor varia. A soma dessas duas partes é o efeito total da mudança do preço na demanda do bem.

Por exemplo, suponha que o preço do bem 1 diminuiu. A decomposição gráfica do efeito total na demanda Marshalliana da diminuição do preço p_1 nos dois efeitos acima é representada na Figura 4 abaixo.

O efeito total na demanda devido a uma diminuição do preço do bem 1 é $x_1^{**} - x_1^*$. O efeito substituição é $x_1^{***} - x_1^*$. O efeito renda é $x_1^{**} - x_1^{***}$. O efeito total é a soma desses dois efeitos:

$$\underbrace{x_1^{***} - x_1^*}_{\text{efeito total}} = \underbrace{(x_1^{**} - x_1^*)}_{\text{efeito substituição}} + \underbrace{(x_1^{***} - x_1^{**})}_{\text{efeito renda}}$$

Observe que na Figura 4, tanto o efeito substituição quanto o efeito renda são *negativos*: os dois efeitos, dada a diminuição do preço, levam a um aumento no consumo do bem. O efeito substituição nunca será positivo, porém o efeito renda pode ser positivo. Neste caso, o efeito renda, dada a diminuição do preço do bem, que resulta em um aumento da renda real do consumidor, diminui a quantidade consumida do bem. Ou seja, o efeito renda será positivo apenas quando o bem for inferior.

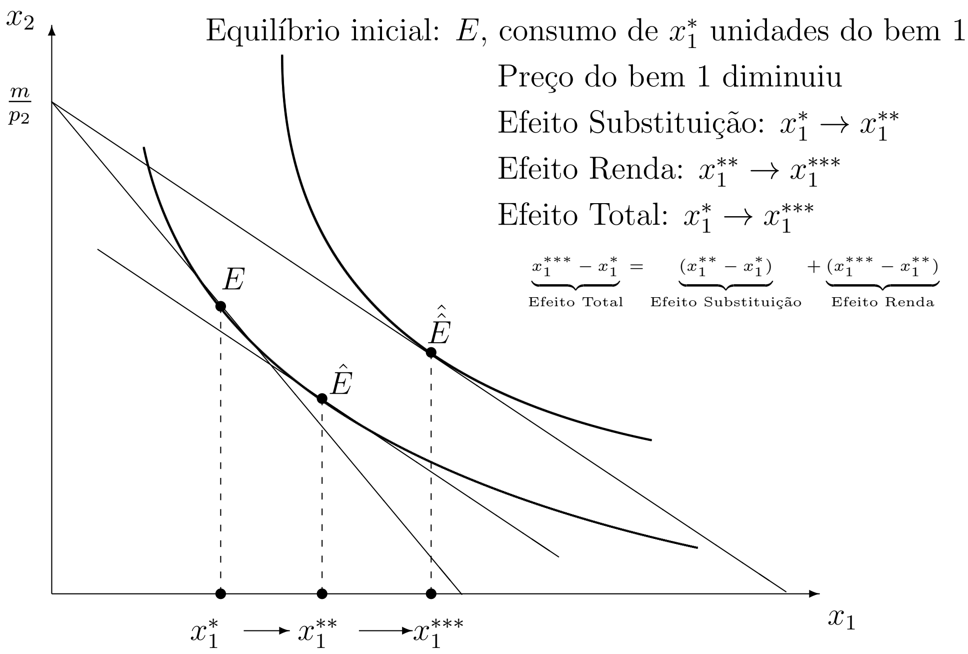


Figura 4: Decomposição do Efeito Total em Efeito Substituição e Efeito Renda

Vimos que a demanda Marshalliana quase sempre responde negativamente a uma mudança de preço, todo o resto mantido constante. Porém existe a possibilidade teórica de a quantidade consumida de um bem aumentar (diminuir) com um aumento (queda) do seu preço (bem de Giffen). Por que isso pode ocorrer na teoria?

Vamos usar a equação de Slutsky para estudar essa questão. O efeito substituição é sempre não-positivo. O efeito renda será positivo se o bem for inferior ou negativo se o bem for normal. Para que o bem seja um bem de Giffen, o efeito renda tem que ser não somente positivo, mas positivo o suficiente para suplantar o efeito substituição. Portanto todo bem de Giffen é um bem bastante inferior (a elasticidade-renda dele tem que ser muito negativa).

Para qualificar melhor essa última afirmação, podemos utilizar a representação da equação de Slutsky em termos de elasticidades, dada por:

$$\varepsilon_{ij}^M = \varepsilon_{ij}^h - s_j \, \eta_i \,,$$

onde ε_{ij}^M é a elasticidade Marshalliana cruzada do bem i com respeito ao preço p_j, ε_{ij}^h é a elasticidade Hicksiana (ou compensada) cruzada do bem i com respeito ao preço p_j, s_j é a fração da renda gasta no bem j, e η_i é a elasticidade-renda do bem i. Para o caso de $i = j$, temos que:

$$\varepsilon_{ii}^M = \varepsilon_{ii}^h - s_i \, \eta_i$$

Portanto, um bem de Giffen tem elasticidade-renda negativa e fração da renda gasta no seu consumo altos o suficiente para suplantar o termo ε_{ii}^h, sempre não positivo. Por que é improvável a existência de um bem de Giffen na prática? Primeiro, bens inferiores estão, normalmente, em categorias estreitas de bens. Categorias amplas têm usualmente elasticidade-renda positiva.

Por exemplo, transporte quase sempre é um bem normal para qualquer faixa de renda, mas passagem de ônibus pode ser um bem inferior para certas faixas de renda. Consequentemente, bens inferiores são bens nos quais a fração da renda gasta com eles é pequena. Segundo, um bem é inferior porque consumidores substituem o consumo dele por outros bens. Portanto ε_{ij}^h será alto para vários bens j e, consequentemente, esse bem terá uma elasticidade ε_{ii}^h alta (recorde-se da relação 2 entre elasticidades que estudamos anteriormente).

Exemplo: Equação de Slutsky para utilidade Cobb-Douglas. As demandas Marshalliana e Hicksiana do bem 1 e a função de dispêndio para um consumidor com utilidade Cobb-Douglas com dois bens são:

$$\begin{aligned}
x_1^M(\mathbf{p}, m) &= \alpha \frac{m}{p_1} \\
x_1^h(\mathbf{p}, \bar{u}) &= \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha} \bar{u} \\
v(\mathbf{p}, m) &= (1-\alpha)^{1-\alpha} \alpha^\alpha p_1^{-\alpha} p_2^{\alpha-1} m
\end{aligned}$$

As derivadas das demandas Marshalliana e Hicksiana, relevantes nesse caso, são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^M(\mathbf{p}, m)}{\partial p_1} &= -\alpha \frac{m}{p_1^2} \\
\frac{\partial x_1^h(\mathbf{p}, u_o)}{\partial p_1} &= -\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} (1-\alpha) p_1^{\alpha-2} p_2^{1-\alpha} \bar{u} \\
\frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial m} &= \alpha \frac{1}{p_1}
\end{aligned}$$

Juntando tudo, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m))}{\partial p_i} - x_i^M(\mathbf{p}, m) \frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial m} &= -\alpha(1-\alpha) p_1^{-2} m - \alpha \frac{1}{p_1} \alpha \frac{m}{p_1} \\
&= -\frac{\alpha m}{p_1^2} = \frac{\partial x_1^M(p, m)}{\partial p_1},
\end{aligned}$$

ou seja, a equação de Slutsky é válida, como esperado.

Se as preferências forem bem-comportadas, então será possível substituir o consumo de um bem pelo outro de modo a manter a utilidade constante. Isso implica que o efeito substituição será negativo. Um efeito substituição nulo está associado à impossibilidade de substituir o consumo de um bem pelo consumo do outro. Essa situação ocorre no caso de uma utilidade de Leontief, em que o efeito total de uma mudança no preço do bem é gerado apenas pelo efeito renda, já que o efeito substituição é nulo. Observe que nesse caso a função dispêndio é uma reta, indicando também a impossibilidade de substituir o consumo de um bem pelo consumo do outro.

Definição: Matriz de Slutsky. A *matriz de Slutsky* associada ao sistema de demandas $\mathbf{x}^M(\mathbf{p}, m)$ é definida por:

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial x_1}{\partial m} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial p_n} + x_n \frac{\partial x_1}{\partial m} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial x_n}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial x_n}{\partial m} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_n} + x_n \frac{\partial x_n}{\partial m}
\end{pmatrix}$$

A equação de Slutsky implica que a matriz de Slutsky é igual à matriz de substituição, definida na nota de aula anterior, que descreve os efeitos substituição hicksianos para as demandas de todos os bens. Como a matriz de substituição é negativa semidefinida e simétrica, então a matriz de Slutsky é negativa semidefinida e simétrica. Mais ainda, enquanto a matriz de substituição não é diretamente observável, a matriz de Slutsky é, a princípio, observável. Verificar se a matriz de Slutsky é negativa semidefinida e simétrica constitui um importante teste da teoria do consumidor.

3 Efeito Substituição de Slutsky

Suponha agora que compensamos *a renda do consumidor de modo a manter o seu poder de compra original* (isto é, de modo que ele possa comprar a cesta escolhida originalmente). Essa compensação, chamada *compensação de Slutsky*, gera um tipo diferente de efeito substituição, em que mantemos o *poder aquisitivo* (e não a utilidade) do consumidor constante. Logo, o *efeito substituição de Slutsky* compensa a renda do consumidor de modo que a cesta ótima original ainda é "comprável'.

Suponha então que compensamos *a renda do consumidor de modo a manter o seu poder de compra original* (isto é, de modo que ele possa comprar a cesta escolhida originalmente). Essa compensação gera um tipo diferente de efeito substituição, pois o consumidor mantém o seu poder aquisitivo, mas como os preços relativos mudaram, ele provavelmente escolherá uma outra cesta para consumir, de modo a aumentar a sua utilidade (ou seja, o princípio Lump Sum vale aqui).

A Figura 5 abaixo ilustra essa situação. Suponha que o preço do bem 1 diminuiu de p_1 para p_1', de tal modo que a cesta consumida mudou de (x_1^*, x_2^*) para (x_1^{**}, x_2^{**}). O efeito total da queda no preço do bem 1 é um aumento no consumo do bem 1 de $x_1^{***} - x_1^*$. Note que a reta paralela à nova relação de preços passa pelo ponto (x_1^*, x_2^*), a cesta consumida antes de o preço do bem 1 diminuir. Ou seja, o consumidor é compensado *de modo que a cesta original continua possível de ser adquirida* (neste caso, como a diminuição do preço do bem 1 favorece o consumidor, a compensação de Slutsky será negativa, indicando que devemos diminuir a sua renda para manter o poder de compra original). Como a relação de preços mudou, se mantivermos o poder de compra original do indivíduo inalterado, ele muda sua escolha ótima de (x_1^*, x_2^*) para (x_1^{**}, x_2^{**}). Essa mudança é o *efeito substituição de Slutsky*. Observe que a utilidade obtida pelo consumidor é maior do que a original, pois ao provermos renda que permite o consumidor comprar a cesta original, mas sendo que os preços relativos mudaram (e assumindo preferências bem-comportadas), o indivíduo consegue alcançar um nível de bem-estar mais alto do que o original.

O valor CS, dado por:

$$CS = \bar{m} - m = (p_1' x_1^* + p_2 x_2^*) - (p_1 x_1^* + p_2 x_2^*) = \Delta p_1 x_1^* \,,$$

onde $\Delta p_1 = p_1' - p_1$ é a variação ocorrida no preço do bem, denota a *compensação de Slutsky*: o valor monetário que temos que transferir (no caso em que $CS > 0$; se $CS < 0$, retirar) para o indivíduo de modo que ele mantenha o poder de compra original (ou seja, consiga adquirir a cesta (x_1^*, x_2^*)).

A diferença entre o efeito substituição de Slutsky e o efeito substituição Hicksiano é que, no primeiro, a renda do consumidor é compensada de modo que a cesta ótima original ainda é "comprável" e, no segundo, a utilidade do consumidor obtida com o consumo da cesta original é mantida constante.

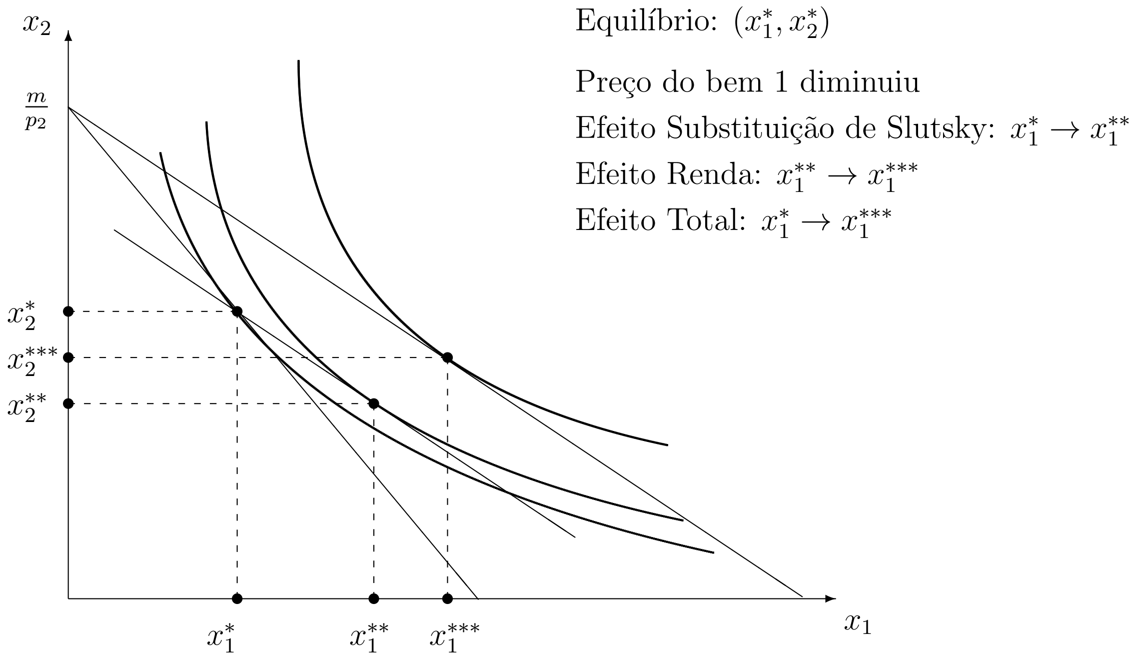


Figura 5: Efeito Substituição de Slutsky

Vamos derivar a versão da equação de Slutsky com esse novo efeito substituição, para o caso de dois bens. Represente por $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ a escolha ótima do consumidor quando os preços são $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ e a renda $\bar{m}$. A *demanda de Slutsky* aos preços (p_1, p_2) é a quantidade dos bens que o consumidor escolherá se a sua renda for modificada de modo que a cesta ótima $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ continue dentro da sua possibilidade de compra. Isso significa que essa demanda é função dos preços e *da cesta de bens ótima que fixarmos* e pode ser definida a partir da demanda Marshalliana do seguinte modo:

$$x_i^S(p_1, p_2; \bar{x}_1, \bar{x}_2) = x_i^M(p_1, p_2, p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2), \qquad i = 1, 2\,.$$

Se diferenciarmos a demanda de Slutsky do bem i com relação ao seu preço, obtemos:

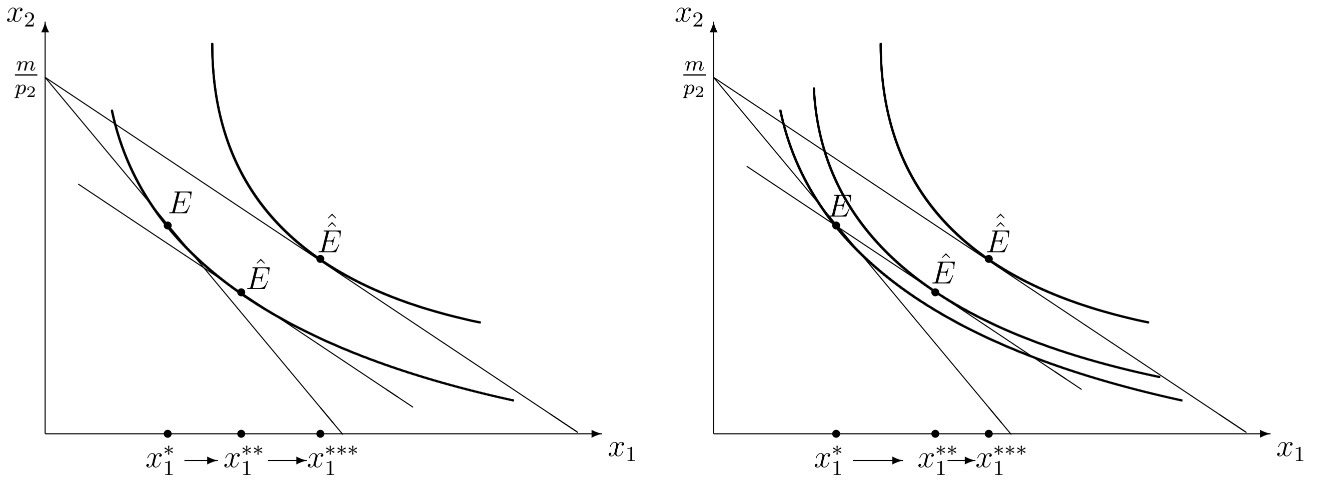
$$\frac{\partial x_i^S(p_1, p_2; \bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^M(p_1, p_2, \bar{m})}{\partial p_i} + \frac{\partial x_i^M(p_1, p_2, \bar{m})}{\partial m}\,\bar{x}_i$$

Ou seja,

$$\underbrace{\frac{\partial x_i^M(p_1, p_2, \bar{m})}{\partial p_i}}_{\text{efeito total}} = \underbrace{\frac{\partial x_i^S(p_1, p_2; \bar{x}_1, \bar{x}_2)}{\partial p_i}}_{\text{efeito substituição de Slutsky}} \underbrace{- \frac{\partial x_i^M(p_1, p_2, \bar{m})}{\partial m}\,\bar{x}_i}_{\text{efeito renda de Slutsky}}$$

Essa última expressão é a equação de Slutsky quando o efeito substituição considerado é o de Slutsky. A intuição é similar à da equação de Slutsky discutida na seção anterior. O efeito total de uma variação no preço do bem pode ser decomposto em dois efeitos. O primeiro, o efeito substituição (de Slutsky), mede a mudança na escolha da cesta ótima que ocorre quando os preços relativos mudam, mas a renda do consumidor é compensada de modo que ele possa comprar a cesta ótima original (note que se houver uma diminuição no preço, essa compensação é negativa). Podemos mostrar que o efeito substituição de Slutsky será também sempre não-positivo. Já o segundo efeito, o efeito renda, mede a mudança na escolha que ocorre quando a renda do consumidor varia, mantida a nova relação de preços.

Os dois efeitos substituição de Slustky e de Hicks podem ser iguais? Sim, se considerarmos variações muito pequenas no preço (mais precisamente, variações infinitesimais no preço). Nesse caso, os dois efeitos são idênticos. Porém, para variações discretas, os dois efeitos não necessariamente são iguais, como os dois gráficos ilustrados na Figura 6 abaixo ilustram.



Efeito Substituição de Hicks

Efeito Substituição de Slutsky

Figura 6: Comparação das Duas Decomposições: Hicks e Slutsky

Leitura Recomendada

- Varian, cap. 8 - "A equação de Slutsky".
- Nicholson e Snyder, cap. 5 "Income and Substitution Effects".

Exercícios

1. Suponha que os únicos bens que Renata consome são guaraná e pão e que as preferências de Renata são estritamente convexas.

   a) Entre janeiro e fevereiro, o preço do guaraná sobe (e nada mais muda). Ilustre em um mesmo gráfico as escolhas ótimas de Renata nos dois meses (denote por J a escolha ótima em Janeiro e por F a escolha ótima em fevereiro), representando o consumo de pão no eixo vertical e o consumo do guaraná no eixo horizontal (mantenha essa convenção para o resto do exercício).
   b) Em março, o preço do guaraná volta ao mesmo nível de janeiro, porém a renda de Renata diminui em um montante tal que agora ela alcança o mesmo bem-estar de fevereiro. Ilustre a escolha ótima de Renata em março (denote essa escolha ótima por M) juntamente com as outras duas escolhas ótimas de Renata.
   c) Analise os seguintes itens, dizendo sob quais condições serão verdadeiros.

      c.1) J está à esquerda de F.
      c.2) F está à esquerda de M.
      c.3) J está à esquerda de M.

   d) Justifique a afirmação *"Todo o bem de Giffen é um bem inferior"* em termos do que você fez nesse exercício, não recorra à teoria vista em sala.

2. A utilidade de Carlos é $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. A renda de Carlos é R$20, e os preços dos bens 1 e 2 são R$1 e R$1. Suponha que o preço do bem 1 aumentou para R$2.

   a) Encontre o efeito total desse aumento na demanda de Carlos pelo bem 1.
   b) Decomponha o efeito total em efeito substituição Hicksiano e efeito renda. Interprete intuitivamente o seu resultado.
   c) Decomponha o efeito total em efeito substituição de Slutsky e efeito renda. Interprete intuitivamente o seu resultado.

3. Assuma que a utilidade de Maria é $u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2$. Suponha que a renda de Maria é R$40, e os preços dos bens 1 e 2 são R$ 1 e R$ 1. Suponha que o preço do bem 1 aumentou para R$ 2. Encontre o efeito total desse aumento na demanda de Maria pelo bem 1 e pelo bem 2. Decomponha esses dois efeitos em efeito substituição Hicksiano e efeito renda. Interprete intuitivamente o seu resultado.
4. Suponha que a função utilidade indireta de um consumidor é:

$$v(p_1, p_2, m) = 50 \left[\frac{1}{p_1^{1/2} p_2} \right]^{2/3} m.$$

   a) Encontre as funções de demanda Marshallianas dos dois bens e as frações da renda gastas com cada bem.
   b) Encontre a função dispêndio desse consumidor. Use o lema de Shephard para encontrar as demandas Hicksianas dos dois bens.
   c) Usando os resultados de a) e b), verifique a equação de Slutsky para o bem x_1.