SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DE TEORIA DA FIRMA E EQUILÍBRIO PARCIAL

Microeconomia – Graduação – Parte 3/3

Departamento de Economia – Universidade de Brasília

Prof. José Guilherme de Lara Resende

NOTA DE AULA 15 – TEORIA DA FIRMA

15.1) Verifique o grau de homogeneidade das seguintes funções de produção:

a) Tecnologia linear: $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^\gamma$, $a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$.

b) Tecnologia Leontief: $f(x_1, x_2) = (\min\{ax_1, bx_2\})^\gamma$, $a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$.

c) Tecnologia CES: $f(x_1, x_2) = A\,[\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho]^{\frac{\gamma}{\rho}}$, $a > 0$, $b > 0$ e $\rho < 1$, $\rho \neq 0$, $\gamma > 0$.

S: Todas as três funções de produção elencadas acima são homogêneas, com grau de homogeneidade γ:

$$f(tx_1, tx_2) = (a(tx_1) + b(tx_2))^\gamma = (t\,[ax_1 + bx_2])^\gamma = t^\gamma (ax_1 + bx_2)^\gamma = t^\gamma f(x_1, x_2)$$
$$f(tx_1, tx_2) = (\min\{a(tx_1), b(tx_2)\})^\gamma = (t\,[\min\{ax_1, bx_2\}])^\gamma = t^\gamma\,(\min\{ax_1, bx_2\})^\gamma = t^\gamma f(x_1, x_2)$$
$$f(tx_1, tx_2) = A\,[\alpha(tx_1)^\rho + \beta(tx_2)^\rho]^{\frac{\gamma}{\rho}} = [t^\rho(\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho)]^{\frac{\gamma}{\rho}} = t^\gamma\,[\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho]^{\frac{\gamma}{\rho}} = t^\gamma f(x_1, x_2)$$

15.2) Defina a *elasticidade-produto com relação ao insumo i* $\mu_i(\mathbf{x})$ da função de produção $f(\mathbf{x})$ com n insumos por:

$$\mu_i(x_1, x_2) = \frac{\partial \ln(f(x_1, x_2))}{\partial \ln x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

a) Interprete intuitivamente o significado dessa elasticidade.

S: $\mu_i(\mathbf{x})$ informa o aumento em termos percentuais no uso do insumo i dado um aumento na produção em termos percentuais. Por exemplo, se $\mu_1(\mathbf{x}) = 0{,}7$, então, dado que a firma está usando a quantidade $\mathbf{x}$ de insumos, um aumento de 1% no uso do insumo 1 leva a um aumento (aproximado) de 0,7% na produção de q.

b) Mostre que $\mu_i(\mathbf{x}) = PMg_i(\mathbf{x})\,x_i/f(\mathbf{x}) = PMg_i(\mathbf{x})/PMe_i(\mathbf{x})$.

S: Observe que:

$$\mu_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \ln(f(\mathbf{x}))}{\partial \ln x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\frac{x_i}{f(\mathbf{x})} = \frac{PMg_i(\mathbf{x})}{PMe_i(\mathbf{x})}$$

15.3) Defina a *elasticidade de escala da produção* no ponto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, denotada por $\mu(\mathbf{x})$, como:

$$\mu(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 1}\frac{\partial \ln(f(t\mathbf{x}))}{\partial \ln t}.$$

a) Interprete intuitivamente o significado dessa elasticidade. Dizemos que os retornos de escala são *localmente* constantes, crescentes ou decrescentes se $\mu(\mathbf{x})$ for igual, menor, ou maior do que 1, respectivamente.

S: Essa elasticidade generaliza o conceito de retornos de escala global para um conceito local: $\mu(\mathbf{x})$ mede, dado o uso de insumos $\mathbf{x}$, o quanto uma variação (em termos percentuais) em todos os insumos modifica a produção (em termos percentuais). Se $\mu(\mathbf{x}) = 1$, então um aumento de 1% em todos insumos aumenta a produção em (aproximadamente) 1%, indicando retornos constantes de escala *locais* (ou seja, considerando o uso de insumos $\mathbf{x}$). Similarmente, se $\mu(\mathbf{x}) > 1$, então um aumento de 1% em todos insumos aumenta a produção em (aproximadamente) mais de 1%, indicando retornos crescentes de escala *locais* e se $\mu(\mathbf{x}) < 1$, então um aumento de 1% em todos insumos aumenta a produção em (aproximadamente) menos de 1%, indicando retornos decrescentes constantes de escala *locais*.

b) Mostre que:

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\mathbf{x}) \,,$$

onde $\mu_i(\mathbf{x})$ foi definido no exercício anterior.

S: Primeiro note que:

$$\frac{\partial \ln(f(t\mathbf{x}))}{\partial \ln t} = \frac{t}{f(t\mathbf{x})}\frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial t} = \frac{t}{f(t\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_i}\frac{\partial t x_i}{\partial t} = \frac{t}{f(t\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_i}\, x_i$$

Logo,

$$\mu(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 1}\frac{\partial \ln(f(t\mathbf{x}))}{\partial \ln t} = \lim_{t\to 1}\frac{t}{f(t\mathbf{x})}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(t\mathbf{x})}{\partial x_i}\, x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}\frac{x_i}{f(\mathbf{x})} = \sum_{i=1}^{n}\mu_i(\mathbf{x})$$

c) Calcule $\mu(\mathbf{x})$ para a função de produção Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$. O valor de $\mu(\mathbf{x})$ depende do ponto $\mathbf{x}$? Interprete.

S: Temos que:

$$\mu_1(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{f(x_1,x_2)} \times \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{\alpha A x_1^{\alpha}x_2^{\beta}}{A x_1^{\alpha}x_2^{\beta}} = \alpha$$

$$\mu_2(\mathbf{x}) = \frac{x_2}{f(x_1,x_2)} \times \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{\beta A x_1^{\alpha}x_2^{\beta}}{A x_1^{\alpha}x_2^{\beta}} = \beta$$

Logo,

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_1(\mathbf{x}) + \mu_2(\mathbf{x}) = \alpha + \beta \,,$$

constante e igual ao grau de homogeneidade de f.

15.4) Considere a seguinte função de produção:

$$f(x_1, x_2) = \frac{K}{1 + x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}} \,,$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e K é um número positivo que serve de limite superior para a produção (ou seja, $0 \le q < K$).

a) Mostre que esta função de produção não é homogênea.

S: Temos que:

$$f(tx_1, tx_2) = \frac{K}{1 + (tx_1)^{-\alpha}(tx_2)^{-\beta}} = \frac{K}{1 + t^{-\alpha-\beta}x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}} \neq t^{\eta} f(x_1, x_2)\,,$$

para qualquer valor η. Logo, essa função de produção não é homogênea.

b) Calcule o retorno de escala *local* dessa função de produção, segundo $\mu(\mathbf{x})$ definido no exercício anterior. Observe que $\mu(\mathbf{x})$ neste caso depende do ponto $\mathbf{x}$.

S: Note que:

$$\mu_1(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{f(x_1, x_2)} \times \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\alpha x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}}{1 + x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}}$$
$$\mu_2(\mathbf{x}) = \frac{x_2}{f(x_1, x_2)} \times \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\beta x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}}{1 + x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}}$$

Logo,

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_1(\mathbf{x}) + \mu_2(\mathbf{x}) = (\alpha + \beta)\left(\frac{x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}}{1 + x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}}\right)\,,$$

que claramente depende de $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

15.5) Sejam f uma função de produção *homotética* (ou seja, $f = g \circ h$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função estritamente crescente e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é função homogênea de grau 1) e $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ duas combinações de insumos que produzem a mesma quantidade de bem final. Mostre que as combinações de insumos $t\mathbf{x}$ e $t\mathbf{x}'$ produzem a mesma quantidade de bem final, para qualquer $t > 0$.

S: Como f é homotética, então existem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogênea de grau 1 tais que $f = g \circ h$. Observe que:

$$f(\mathbf{x}) = g(h(\mathbf{x})) = q \quad \Rightarrow \quad h(\mathbf{x}) = g^{-1}(q)\,, \text{ e}$$
$$f(\mathbf{x}') = g(h(\mathbf{x}')) = q \quad \Rightarrow \quad h(\mathbf{x}') = g^{-1}(q)\,,$$

ou seja, $h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}')$. Multiplicando essa igualdade por $t \geq 0$ resulta em $th(\mathbf{x}) = th(\mathbf{x}')$. Aplicando a função g e usando a homogeneidade de h, obtemos o resultado desejado, $f(t\mathbf{x}) = g(h(t\mathbf{x})) = g(h(t\mathbf{x}')) = f(t\mathbf{x}')$.

NOTA DE AULA 16 – MAXIMIZAÇÃO DE LUCROS

16.1) Considere as seguintes tecnologias:

i) Tecnologia linear: $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, onde $a > 0, b > 0$.

ii) Tecnologia Leontief: $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, onde $a > 0$, $b > 0$.

iii) Tecnologia CES: $f(x_1, x_2) = [\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$, onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

Responda os seguintes itens:

a) É possível encontrar a função lucro e as funções de demanda incondicionais para essas funções de produção? Justifique.

S: Não. Nos três casos, as funções de produção apresentam retornos constantes de escala, logo não é possível determinar nem as demandas ótimas, nem a função lucro.

b) Encontre a Taxa Técnica de Substituição das funções de produção acima.

S: Temos que:

1) $TTS = -\dfrac{a}{b}$;

2) $TTS =$ zero ou -infinito ou não definido;

3) $TTS = -\dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$

c) Encontre a elasticidade de substituição da função de produção 3) acima.

S: A TTS, em valor absoluto, dessa função de produção é:

$$|TTS| = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{1}{1-\rho}\ln\left(\frac{f_1}{f_2}\right) - \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Isso implica que a elasticidade de substituição é:

$$\sigma = \frac{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\ln\left(|TTS|\right)} = \frac{1}{1-\rho}$$

16.2) Considere a função de produção $f(x_1, x_2) = (\min\{x_1, x_2\})^\alpha$. Encontre as demandas ótimas por insumos, a função oferta e a função lucro. Que restrição α deve satisfazer para que a solução encontrada seja de fato uma solução para o problema de maximização de lucros da firma?

S: Na solução ótima, devemos ter $x_1^* = x_2^*$. O problema de maximização de lucro dessa firma é equivalente a encontrar x^* que maximiza $p\,x^\alpha - (w_1 + w_2)x$. A CPO desse problema é:

$$p\,\alpha\,x^{\alpha-1} - (w_1 + w_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = x_2^* = \left(\frac{\alpha p}{w_1 + w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

A função oferta é:

$$q(p, w_1, w_2) = \left(\frac{\alpha p}{w_1 + w_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

e a função lucro é:

$$\pi = p\left(\frac{\alpha p}{w_1+w_2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (w_1+w_2)\left(\frac{\alpha p}{w_1+w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = (\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}})(w_1+w_2)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} p^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Como a CSO do problema é:

$$p\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,,$$

a solução acima constitui um máximo apenas se $\alpha < 1$ (já que neste caso temos $p\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} < 0$). Ou seja, a função de produção deve apresentar retornos decrescentes de escala.

16.3) Suponha que você está fazendo uma consultoria para uma empresa que utiliza dois insumos, com o objetivo de verificar se essa empresa está maximizando lucros. Você coletou duas observações sobre o comportamento dessa empresa, com os seguintes dados:

	w_1	w_2	x_1	x_2	p	q
Observação 1	3	1	40	50	4	60
Observação 2	2	2	55	40	4	60

onde w_1 e w_2 são os preços dos insumos 1 e 2, respectivamente, x_1 e x_2 são as quantidades usadas dos insumos 1 e 2, respectivamente, p é o preço do produto vendido pela firma e q é a quantidade vendida desse produto. Com base nessas duas observações, o que você pode dizer sobre o comportamento maximizador de lucros dessa firma?

S: Como o preço do bem final e a sua quantidade produzida são iguais nas duas observações, vamos analisar o custo de produção da firma. O custo de produção total incorrido em cada observação, conjuntamente com o que seria o custo de produção se a firma tivesse usado o outro plano de produção, é descrito na tabela abaixo:

	Insumos usados na obs. 1	Insumos usados na obs. 2
Preços obs. 1	$3\times 40 + 1\times 50 = 170$	$3\times 55 + 1\times 40 = 205$
Preços Obs 2	$2\times 40 + 2\times 50 = 180$	$2\times 55 + 2\times 40 = 190$

Portanto, na observação 2 a firma não minimizou o seu custo de produção, pois ao nível de preços dessa observação, a firma poderia ter usado o plano de produção da observação 1 e obtido a mesma quantidade de produto, a um custo menor ($180 < 190$).

Nota: se for usada a equação obtida do axioma de maximização de lucros ou da minimização de custos revelada ($\Delta p\Delta q - \Delta w_1\Delta x_1 - \cdots - \Delta w_n\Delta x_n \geq 0$ ou $\Delta w_1\Delta x_1 + \cdots + \Delta w_n\Delta x_n \leq 0$), não observaremos essa inconsistência, pois essas duas equações condensam informação, e por isso são mais fracas do que as equações originais que lhes dão origem e que definem o Axioma da Maximização de Lucros Revelada.

16.4) Considere a função de produção $f(x_1,x_2) = (x_1+x_2)^{0,5}$.

a) Encontre a oferta e as demandas ótimas que maximizam o lucro da firma.

S: Os insumos usados são substitutos perfeitos e a função de produção apresenta retornos decrescentes de escala. A firma irá utilizar o insumo que for mais barato. Então, assumindo $w_i < w_j$, $i = 1,2$, $j \neq i$, temos que a firma resolve o seguinte problema:

$$\max_{x_i}\, p x_i^{0,5} - w_i x_i$$

A CPO desse problema resulta em:

$$0{,}5px_i^{-0{,}5} = w_i \qquad \Rightarrow \qquad x_i(p, w_i, w_j) = \left(\frac{p}{2w_i}\right)^2$$

Logo, as demandas ótimas são:

$$x_1(p, w_1, w_2) = \begin{cases} (p/2w_1)^2, & \text{se } w_1 < w_2 \\ 0, & \text{se } w_1 > w_2 \end{cases}$$

$$x_2(p, w_1, w_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } w_1 < w_2 \\ (p/2w_2)^2, & \text{se } w_1 > w_2 \end{cases}$$

No caso em que os preços dos dois insumos forem iguais, a firma será indiferente entre qual usar, desde que a soma dos dois insumos seja igual a $(p/2w_1)^2 = (p/2w_2)^2$. Já a oferta ótima é:

$$q(p, w_1, w_2) = \begin{cases} p/2w_1, & \text{se } w_1 < w_2 \\ p/2w_2, & \text{se } w_1 > w_2 \\ p/2w_1 = p/2w_2, & \text{se } w_1 = w_2 \end{cases}$$

b) Suponha que o preço do bem que a firma vende é R$ 120,00, que o preço do insumo 1, w_1, é R$ 2,00, e que o o preço do insumo 2, w_2, é R$ 4,00. Quais são as demandas ótimas dos dois insumos, a oferta ótima e o lucro da firma?

S: Como o preço do insumo 1 é mais barato, a firma utilizará apenas esse insumo. Usando as funções determinadas na solução do item a), temos:

$$x_1^* = \left(\frac{120}{2 \times 2}\right)^2 = 900, \qquad x_2^* = 0, \qquad \text{e} \qquad q^* = \frac{120}{2 \times 2} = 30$$

O lucro ótimo da firma será:

$$\pi^* = 120 \times 30 - 2 \times 900 = 3.600 - 1.800 = 1.800$$

c) Suponha agora que o preço do insumo 1 aumente para R$ 3,00, todo o resto ceteris paribus. Quais são as novas demandas ótimas dos dois insumos, a oferta ótima e o lucro da firma agora?

S: O preço do insumo 1 continua mais barato que o preço do insumo 2, logo a firma vai continuar usando o insumo 1. Agora, as quantidades ótimas são:

$$x_1^* = \left(\frac{120}{2 \times 3}\right)^2 = 400, \qquad x_2^* = 0, \qquad \text{e} \qquad q^* = \frac{120}{2 \times 3} = 20$$

O lucro ótimo da firma será:

$$\pi^* = 120 \times 20 - 3 \times 400 = 2.400 - 1.200 = 1.200$$

Observe que esse aumento do preço do insumo 1 ainda o mantém mais barato que o insumo 2, logo a firma continua usando x_1, porém em quantidades menores do que antes, o que leva a uma oferta e a um lucro menores.

d) Suponha agora que o preço do insumo 1 aumente para R$ 5,00, todo o resto ceteris paribus. Quais são as novas demandas ótimas dos dois insumos, a oferta ótima e o lucro da firma agora?

S: Agora o insumo 1 passou a custar mais do que o insumo 2: a firma passa a utilizar apenas o insumo 2. Usando as funções de demanda determinadas na solução do item a), temos:

$$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = \left(\frac{120}{2 \times 4}\right)^2 = 225, \qquad \text{e} \qquad q^* = \frac{120}{2 \times 4} = 15$$

O lucro ótimo da firma será:

$$\pi^* = 120 \times 15 - 4 \times 225 = 1.800 - 900 = 900$$

e) O que ocorre com a decisão de produção da firma se o preço do insumo 1 aumentar de R$ 5,00 para R$ 6,00 (todo o resto constante)? Justifique e dê a intuição da sua resposta.

S: Nada se modifica, já que essa situação constitui um aumento de preço de um insumo que a firma já não usava e, portanto, a firma continua utilizando apenas o insumo 2 (a solução permanece igual à solução do item d)).

16.5) Considere a propriedade de convexidade da função lucro.

a) Assuma que o preço do bem que a firma vende caiu de $\bar{p}$ para $\tilde{p}$. No contexto da Figura 1, a relação Lucro Passivo e Lucro Real é o que você esperaria? Explique a intuição.

S: Sim. Se o preço cai de $\bar{p}$ para $\tilde{p}$, vemos na Figura 1 que o lucro da firma cai, mas menos do que cairia se a firma não modificasse a sua escolha ótima (o lucro neste caso seria determinado pela reta de Lucro Passivo).

b) A Figura 1 ilustra a relação de convexidade assumindo variação apenas para o preço do bem que a firma vende. Assuma agora que este preço e o preço do insumo 2 estão fixos e apenas o preço do insumo 1, w_1, varia. Ilustre graficamente como a função lucro varia de acordo com mudanças em w_1, também usando a ideia de Lucro Passivo e Lucro Real. Sua análise está de acordo com o esperado, no sentido de que a firma ajusta os insumos sempre de modo a alcançar o maior lucro possível, dadas as limitações existentes? Explique a intuição.

S: A Figura será similar à Figura 1, levando em conta que a reta de Lucro Passivo, em função do preço do insumo 1, é negativamente inclinada.

NOTA DE AULA 17 – MINIMIZAÇÃO DE CUSTOS

17.1) Encontre as demandas *condicionais* e a função custo para os três casos abaixo:

a) Tecnologia linear: $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, com $a > 0$, $b > 0$.
S: As demandas condicionais são:

$$x_1(w_1, w_2, q) = \begin{cases} q/a, & \text{se } w_1/a < w_2/b \\ 0, & \text{se } w_1/a > w_2/b \end{cases}$$
$$x_2(w_1, w_2, q) = \begin{cases} 0, & \text{se } w_1/a < w_2/b \\ q/b, & \text{se } w_1/a > w_2/b \end{cases}$$

e se $w_1/a = w_2/b$, então x_1 e x_2 podem ser qualquer valor tal que $ax_1 + bx_2 = q$. A função custo é:

$$c(w_1, w_2, q) = \min\left\{\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}\right\} q$$

b) Tecnologia Leontief: $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, com $a > 0$, $b > 0$.
S: As demandas condicionais são encontradas a partir da igualdade:

$$ax_1(w_1, w_2, q) = bx_2(w_1, w_2, q) = q\,,$$

ou seja,

$$x_1(w_1, w_2, q) = \frac{q}{a} \qquad \text{e} \qquad x_2(w_1, w_2, q) = \frac{q}{b}$$

A função custo é:

$$c(w_1, w_2, q) = \left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b}\right) q$$

c) Tecnologia CES: $f(x_1, x_2) = [ax_1^\rho + bx_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$, com $a > 0$, $b > 0$ e $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.
S: O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda\left(q - [ax_1^\rho + bx_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}\right)$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda a x_1^{\rho-1}\left[ax_1^\rho + bx_2^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}-1} = \lambda a x_1^{\rho-1} q^{1-\rho} \\ w_2 &= \lambda b x_2^{\rho-1}\left[ax_1^\rho + bx_2^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}-1} = \lambda b x_2^{\rho-1} q^{1-\rho} \\ q &= \left[ax_1^\rho + bx_2^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad q^\rho = ax_1^\rho + bx_2^\rho \end{aligned}$$

Vamos resolver esse problema de um modo diferente do que costumamos fazer (dividindo a primeira CPO pela segunda, etc). As duas primeiras CPOs resultam em:

$$x_1 = \left(\frac{w_1}{aq^{1-\rho}\lambda}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} = \left(\frac{w_1}{a\lambda}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} q \quad \Rightarrow \quad x_1^\rho = \left(\frac{w_1}{a\lambda}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} q^\rho$$
$$x_2 = \left(\frac{w_2}{bq^{1-\rho}\lambda}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} = \left(\frac{w_2}{b\lambda}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} q \quad \Rightarrow \quad x_2^\rho = \left(\frac{w_2}{b\lambda}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} q^\rho$$

Substituindo as duas equações do lado direito acima na terceira CPO, obtemos o valor do multiplicador de Lagrange:

$$q^\rho = ax_1^\rho + bx_2^\rho = a\left(\frac{w_1}{a\lambda}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} q^\rho + b\left(\frac{w_2}{b\lambda}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} q^\rho = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \left(\frac{w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{a^{\frac{1}{\rho-1}}} + \frac{w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{b^{\frac{1}{\rho-1}}}\right) q^\rho$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} = \left(\frac{w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{a^{\frac{1}{\rho-1}}} + \frac{w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{b^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

Substituindo essa expressão nas funções de demanda, obtemos:

$$x_1(w_1, w_2, q) = \left(\frac{w_1}{a}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(\frac{w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{a^{\frac{1}{\rho-1}}} + \frac{w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{b^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{-\frac{1}{\rho}} q$$

$$x_2(w_1, w_2, q) = \left(\frac{w_2}{b}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \left(\frac{w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{a^{\frac{1}{\rho-1}}} + \frac{w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{b^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{-\frac{1}{\rho}} q$$

A função custo é:

$$\begin{aligned} c(w_1, w_2, q) &= w_1 x_1(w_1, w_2, q) + w_2 x_2(w_1, w_2, q) \\ &= \left(\frac{w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{a^{\frac{1}{\rho-1}}} + \frac{w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{b^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{-\frac{1}{\rho}} q \left(w_1\left(\frac{w_1}{a}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} + w_2\left(\frac{w_2}{b}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right) \\ &= \left(\frac{w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{a^{\frac{1}{\rho-1}}} + \frac{w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{b^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{-\frac{1}{\rho}} q \left(\frac{w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{a^{\frac{1}{\rho-1}}} + \frac{w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{b^{\frac{1}{\rho-1}}}\right) = \left(\frac{w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{a^{\frac{1}{\rho-1}}} + \frac{w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{b^{\frac{1}{\rho-1}}}\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} q \end{aligned}$$

Denote $\frac{\rho}{\rho-1} = r$, então $\frac{\rho-1}{\rho} = \frac{1}{r}$ e $-\frac{1}{\rho-1} = 1 - r$. Podemos reescrever a equação para a função custo como:

$$c(w_1, w_2, q) = \left(a^{1-r} w_1^r + b^{1-r} w_2^r\right)^{\frac{1}{r}} q\,,$$

ou seja, a função custo de uma função de produção CES tem um formato análogo à própria função de produção (é comum dizer neste caso que *a função custo possui formato CES*).

17.2) Considere uma firma com tecnologia Cobb-Douglas $f(k, l) = k^\alpha l^\beta$, onde k denota unidades de capital usadas pela firma, l denota unidades de trabalho usadas pela firma, w o salário pago aos trabalhadores e r o preço do insumo capital. A firma quer minimizar o custo de produzir q unidades do bem final e possui acesso a mercados de fatores perfeitamente competitivos.

a) Qual é o problema de minimização de custos da firma? Denote o multiplicador de Lagrange desse problema por μ.

S: O problema de minimização de custos da firma é:

$$\min_{k,l}\ rk + wl \qquad \text{sujeito à} \qquad q = f(k, l) = k^\alpha l^\beta$$

O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = wl + rk + \mu(q - k^\alpha l^\beta)$$

b) Quais são os parâmetros do problema?

S: Os parâmetros do problema são os preços dos fatores, r e w, e os parâmetros da função de produção, α e β.

c) Encontre as funções de demanda condicionais. Denote-as por $l^*(w, r, q)$ e $k^*(w, r, q)$.

S: As CPO do problema de minimização de custos da firma resultam em:

$$\begin{aligned} (k): \quad & r = \mu a k^{\alpha-1} l^{\beta} \\ (l): \quad & w = \mu b k^{\alpha} l^{\beta-1} \\ (\mu): \quad & q = k^{\alpha} l^{\beta} \end{aligned} \tag{1}$$

Dividindo as CPO de (l) por (k) obtemos:

$$\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{k}{l}\right) = \frac{w}{r} \quad \Rightarrow \quad k = \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right) l \tag{2}$$

Substituindo essa última expressão na terceira CPO, obtemos:

$$q = \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\alpha} l^{\alpha} l^{\beta} \quad \Rightarrow \quad l = \left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Substituindo essa última expressão na expressão para k como função de l, obtemos a demanda condicional para k. Então as duas demandas condicionais são:

$$l(w, r, q) = \left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \qquad \text{e} \qquad k(w, r, q) = \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \tag{3}$$

d) Encontre a função custo $c(w, r, q)$. Qual a interpretação dessa função?

S: A função custo é:

$$c(w, r, q) = rk(w, r, q) + wl(w, r, q) = r\left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + w\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Podemos simplificar a expressão acima para:

$$c(w, r, q) = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \tag{4}$$

A função custo $c(w, r, q)$ diz o menor gasto necessário para produzir a quantidade q do bem final, dado os preços dos fatores de produção e a tecnologia da firma.

e) Determine μ^*. Qual a interpretação do multiplicador?

S: As duas primeiras CPO resultam em:

$$\begin{aligned} (k): \quad & r = \mu\alpha k^{\alpha-1} l^{\beta} = \frac{\mu\alpha k^{\alpha} l^{\beta}}{k} = \frac{\mu\alpha q}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\alpha q \mu}{r} \\ (l): \quad & w = \mu\beta k^{\alpha} l^{\beta-1} = \frac{\mu\beta k^{\alpha} l^{\beta}}{l} = \frac{\mu\beta q}{l} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\beta q \mu}{w} \end{aligned}$$

Substituindo essas duas equações acima na CPO para o multiplicador de Lagrange, obtemos:

$$q = k^{\alpha} l^{\beta} = \left(\frac{\alpha q \mu}{r}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta q \mu}{w}\right)^{\beta} \quad \Rightarrow \quad \mu = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

Dizemos que o multiplicador de Lagrange μ é o *preço sombra da restrição do problema de minimização de custos*, isto é, μ mede o aumento no custo da firma que ocorre quando a produção se expande um pouco.

f) Calcule dc/dq e mostre que é igual ao multiplicador μ^*.

S: Primeiro note que a seguinte relação é válida:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} &= \alpha^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \beta^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\
&= \alpha \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \beta \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

Ou seja, temos que:

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$$

Derivando a equação (4) com respeito a q resulta em:

$$\frac{dc}{dq} = \left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

Usando a relação que obtivemos acima resulta em:

$$\frac{dc}{dq} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} = \left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{w}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} = \mu$$

g) Como dc/dq varia com relação a $(\alpha+\beta)$?

S: Se aumentarmos $\alpha+\beta$ então dc/dq diminui. Isto é esperado: significa que produzir a mesma quantidade é mais barato quanto maior o retorno de escala que a firma tiver.

h) Mostre que as demandas condicionais são homogêneas de grau 0 em w e r.

S: Se $t > 0$, então usando as equações em (3), temos que:

$$\begin{aligned}
l(tw, tr, q) &= \left(\frac{\beta(tr)}{\alpha(tw)}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = \left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = l(w, r, q) \\
k(tw, tr, q) &= \left(\frac{\alpha(tw)}{\beta(tr)}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = \left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = k(w, r, q)
\end{aligned}$$

i) Mostre que a função custo é homogênea linear em w e r. Qual é a intuição desse resultado?

S: Existem dois modos de mostrar isso. O primeiro usa a homogeneidade de grau zero das funções de demanda condicionais:

$$c(tw, tr, q) = (tr)k(tw, tr, q) + (tw)l(tw, tr, q) = (tr)k(w, r, q) + (tw)l(w, r, q) = tc(w, r, q)$$

O segundo mostra diretamente:

$$\begin{aligned}
c(tw, tr, q) &= \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] (tr)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (tw)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&= t^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = tc(w, r, q)
\end{aligned}$$

A homogeneidade linear da função custo significa que se todos os preços dos insumos mudam na mesma proporção, o custo ótimo de produção também muda na mesma proporção.

j) Mostre que $dc/dw \geq 0$ e que $dc/dr \geq 0$. Qual é a intuição desse resultado?

S: Derivando a equação (4) que define a função custo com respeito a r e a w obtemos:

$$\frac{dc}{dr} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] r^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} > 0\,,$$
$$\frac{dc}{dw} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} > 0\,,$$

que são maiores do que zero, já que todos os parâmetros são positivos. Ou seja, se o preço do insumo aumentar, então o custo de se obter o mesmo nível de produção que antes não pode diminuir (neste caso, aumentará, já que as derivadas são estritamente maiores do que zero).

k) Mostre gráfica e matematicamente que a função custo é côncava em w. Qual é a intuição desse resultado?

S: A segunda derivada da função custo com relação a w é:

$$\frac{d^2c}{dw^2} = -\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\right)\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w^{-\left(\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\right)} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} < 0\,,$$

o que implica que a função custo c é côncava com respeito a w. A função custo ser côncava com relação ao preço do insumo significa que a firma pode se beneficiar da possibilidade de substituir insumos.

17.3) Discuta a relação entre as seguintes definições possíveis de fatores de produção complementares:

(i) $f_{ij} > 0$;

S: Essa derivada quer dizer que um aumento no uso do insumo j torna o insumo i mais produtivo (e vice-versa).

(ii) $(\partial x_i/\partial w_j)_{w_i,p} < 0$;

S: Neste caso, um aumento no preço do insumo j, mantido o preço do insumo i e o preço do produto vendido pela firma constantes, diminui o uso do insumo i.

(iii) $(\partial x_i/\partial w_j)_{w_i,q} < 0$;

S: Nesse caso, um aumento no preço do insumo j, mantido o preço do insumo i e o nível de produção constantes, diminui o uso do insumo i.

onde $f(x_1, x_2)$ é a função de produção de uma firma competitiva e onde os parâmetros fora dos parênteses indicam que esses parâmetros são mantidos constantes.

17.4) Suponha uma função de produção com dois insumos. As demandas condicionais são representadas por $x_i(w_1, w_2, q)$, $i = 1, 2$. Verifique se cada item abaixo é consistente ou não com minimização de custos. Se o item for inconsistente, justifique. Se for consistente, dê um exemplo de uma função de produção que gera as propriedades descritas no item.

a) $\partial x_1/\partial w_1 = 0$ e $\partial x_2/\partial w_2 = 0$.
S: Consistente. A firma não varia o uso de um insumo quando o seu preço varia. Portanto, não existe nenhuma substitubilidade entre os insumos. Se, por exemplo, o preço do insumo 1 aumentar, a firma continuará usando a mesma quantidade desse insumo. Esse é o caso da tecnologia de Leontief.

b) $\partial x_1/\partial w_1 < 0$ e $\partial x_2/\partial w_2 < 0$.
S: Consistente. Esse é o caso mais comum, onde um aumento (redução) do preço do insumo faz com que a firma utilize menos (mais) desse insumo. Portanto, existe algum grau de substitubilidade entre os dois insumos. Um exemplo é a tecnologia Cobb-Douglas.

c) $\partial x_1/\partial w_1 < 0$, $\partial x_2/\partial w_2 > 0$.
S: Inconsistente. Nesse caso o insumo 2 seria um "*insumo de Giffen*", em que a demanda da firma por ele varia na mesma proporção que o seu preço (se o preço aumentar, a firma utiliza mais dele), uma impossibilidade na teoria, assumindo que a firma esteja minimizando custos.

d) $\partial x_1/\partial q = 0$.
S: Consistente. Esse é o caso, por exemplo, da tecnologia linear $q = x_1 + x_2$, quando $w_1 > w_2$. Como o insumo 1 é mais caro do que o insumo 2, a firma utiliza apenas o insumo 2 na produção e o insumo 1 não é utilizado.

e) $\partial x_1/\partial w_2 > 0$ e $\partial x_2/\partial w_1 < 0$.
S: Inconsistente. A teoria diz que o efeito de uma variação no preço do insumo i na demanda do insumo j deve ser igual ao efeito de uma variação no preço do insumo j na demanda do insumo i, ou seja, $\partial x_1/\partial w_2 = \partial x_2/\partial w_1$ (efeitos preço-cruzados iguais).

17.5) Uma firma que utiliza três insumos tem uma função de produção descrita por:

$$q = f(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1 + 2x_2, x_3\}$$

Qual é a função custo dessa firma? Quais são as demandas condicionais dos três insumos (denote o preço dos insumos por w_1, w_2 e w_3)? Justifique a sua resposta.

S: A firma escolherá otimamente os insumos de modo a igualar os dois argumentos da função de mínimo, para evitar desperdícios de insumos. Portanto, temos que:

$$x_1 + 2x_2 = x_3$$

A demanda condicional de x_3 é então $x_3(w_1, w_2, w_3, q) = q$. No primeiro argumento da função mínimo, a tecnologia é linear: $x_1 + 2x_2$. A firma usará entre estes dois insumos, o *proporcionalmente* mais barato (note que x_2 é duas vezes mais produtivo do que x_1). Então as demandas condicionais de x_1 e x_2 são:

$$x_1(w_1, w_2, w_3, q) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2w_1 > w_2 \\ q & \text{se } 2w_1 < w_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad x_2(w_1, w_2, w_3, q) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2w_1 < w_2 \\ q/2 & \text{se } 2w_1 > w_2 \end{cases}$$

Se $2w_1 = w_2$, então x_1 e x_2 podem ser consumidos em qualquer quantidade, desde que $x_1 + 2x_2 = q$. A função custo é:

$$c(w_1, w_2, w_3, q) = (\min\{w_1, w_2/2\} + w_3)\, q$$

17.6) Uma firma usa quatro insumos e sua tecnologia de produção é descrita pela seguinte função:

$$q = \min\{x_1 + x_2, x_3^\alpha x_4^\beta\}, \quad \text{onde } \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1\,.$$

Determine as demandas condicionais por insumos dessa firma. Qual é a função custo?

S: O problema da firma é:

$$\min_{x_1,x_2,x_3,x_4} w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + w_4x_4 \qquad \text{s.a} \qquad q = \min\{x_1 + x_2, x_3^\alpha x_4^{1-\alpha}\}$$

A firma escolherá os insumos de modo a igualar os dois argumentos da função de mínimo acima, para evitar desperdícios de insumos. Como devem ser produzidos q unidades do bem final, temos que:

$$x_1 + x_2 = x_3^\alpha x_4^{1-\alpha} = q$$

No primeiro argumento da função mínimo, a tecnologia é linear: $x_1 + x_2$. A firma usará o insumo relativamente mais barato. Então as demandas condicionais para x_1 e x_2 são:

$$x_1(w_1, w_2, w_3, w_4, q) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad w_1 > w_2 \\ q, & \text{se} \quad w_1 < w_2 \end{cases}$$
$$x_2(w_1, w_2, w_3, w_4, q) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad w_1 < w_2 \\ q, & \text{se} \quad w_1 > w_2 \end{cases}$$

Se $w_1 = w_2$, a firma será indiferente entre as quantidades de x_1 e x_2 que irá usar, desde que $x_1 + x_2 = q$. Para os insumos x_3 e x_4, a firma escolherá a combinação que resulte no menor custo de produzir q, ou seja, tais que sejam solução do seguinte problema:

$$\min_{x_3,x_4} w_3x_3 + w_4x_4 \qquad \text{s.a.} \qquad q = x_3^\alpha x_4^{1-\alpha}\,,$$

igual ao problema de minimização de custos de uma firma com teconologia Cobb-Douglas. O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = w_3x_3 + w_4x_4 + \lambda\left(q - x_3^\alpha x_4^{1-\alpha}\right)$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} (x_3): &\quad w_3 = \lambda\alpha x_3^{\alpha-1}x_4^{1-\alpha} \\ (x_4): &\quad w_4 = \lambda(1-\alpha)x_3^\alpha x_4^{-\alpha} \\ (\lambda): &\quad q = x_3^\alpha x_4^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda, obtemos:

$$\frac{w_3}{w_4} = \frac{\lambda\alpha x_3^{\alpha-1}x_4^{1-\alpha}}{\lambda(1-\alpha)x_3^\alpha x_4^{-\alpha}} = \frac{\alpha x_4}{(1-\alpha)x_3} \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{(1-\alpha)w_3x_3}{\alpha w_4}$$

Substituindo essa expressão para x_4 em termos de x_3 na terceira CPO, obtemos a demanda condicional do insumo x_3:

$$q = x_3^\alpha\left(\frac{(1-\alpha)w_3x_3}{\alpha w_4}\right)^{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad x_3^* = \left(\frac{\alpha w_4}{(1-\alpha)w_3}\right)^{1-\alpha} q$$

Substituindo a demanda condicional do insumo x_3 na expressão para x_4 em termos de x_3, obtemos:

$$x_4 = \frac{(1-\alpha)w_3}{\alpha w_4}\left[\left(\frac{\alpha w_4}{(1-\alpha)w_3}\right)^{1-\alpha} q\right] \quad \Rightarrow \quad x_4 = \left(\frac{(1-\alpha)w_3}{\alpha w_4}\right)^{\alpha} q$$

Logo, as demandas condicionais dos insumos x_3 e x_4 são:

$$x_3(w_1, w_2, w_3, w_4, q) = \left(\frac{\alpha w_4}{(1-\alpha)w_3}\right)^{1-\alpha} q \qquad \text{e} \qquad x_4(w_1, w_2, w_3, w_4, q) = \left(\frac{(1-\alpha)w_3}{\alpha w_4}\right)^{\alpha} q$$

Usando as demandas condicionais obtidas acima para os quatro insumos, temos que a função custo é:

$$\begin{aligned} c(w_1, w_2, w_3, w_4, q) &= w_1 x_1^* + w_2 x_2^* + w_3 x_3^* + w_4 x_4^* \\ &= q \min\{w_1, w_2\} + w_3 \left(\frac{\alpha w_4}{(1-\alpha)w_3}\right)^{1-\alpha} q + w_4 \left(\frac{(1-\alpha)w_3}{\alpha w_4}\right)^{\alpha} q \\ &= \left[\min\{w_1, w_2\} + A w_3^{\alpha} w_4^{1-\alpha}\right] q\,, \end{aligned}$$

onde $A = (\alpha/(1-\alpha))^{1-\alpha} + (\alpha/(1-\alpha))^{\alpha}$.

17.7) Suponha a seguinte função de produção com *três insumos*:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 4\sqrt{2x_2 + x_3}$$

Suponha que os preços dos fatores sejam $w_1 = 10$, $w_2 = w_3 = 4$, respectivamente. Encontre as quantidades dos três insumos que devem ser demandadas para minimizar o custo de produção de $q = 24$.

S: Primeiro observe que os insumos 2 e 3 são substitutos perfeitos, com o mesmo preço, mas o insumo 2 possui produtividade marginal maior. Logo a firma não usará o insumo 3, $x_3^* = 0$. Portanto, o problema da firma simplifica para minimizar o custo $w_1 x_1 + w_2 x_2$, sujeito a $24 = x_1 + 4\sqrt{2x_2}$. Podemos substituir a restrição na função objetivo, o que reduz o problema a:

$$\max_{x_2 \geq 0} w_1(24 - 4\sqrt{2x_2}) + w_2 x_2$$

A CPO resulta em:

$$4w_1(2x_2)^{-1/2} = w_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 50$$

Substituindo esse valor de x_2 em $x_1 = 24 - 4\sqrt{2x_2}$ encontramos $x_1 = -16$. Logo temos que, para os preços dados, o insumo 1 não será utilizado: $x_1^* = 0$. Então a firma utiliza apenas o insumo 2 para produzir 24 unidades do bem final. Para encontrarmos a quantidade de x_2 usada pela firma, basta resolver $4\sqrt{2x_2} = 24$, o que resulta em $x_2^* = 18$. Logo, as demandas dos três insumos que minimizam o custo de produção de 24 unidades, para os preços dos insumos descritos, são $x_1^* = 0$, $x_2^* = 18$ e $x_3^* = 0$.

17.8) A tabela abaixo contém duas observações de escolha de produção e insumos para uma mesma firma (que usa apenas dois insumos):

Observação	q	x_1	x_2	w_1	w_2
A	100	15	12	1	2
B	100	16	12	2	2

Suponha que nenhuma outra variável relevante mudou (por exemplo, a firma continua usando a mesma tecnologia).

a) Usando as observações acima, derive duas desigualdades que uma firma que minimiza lucros satisfaz.

S: As desigualdades são:

$$w_1^A x_1^A + w_2^A x_2^A \overset{?}{\leq} w_1^A x_1^B + w_2^A x_2^B \quad \Leftrightarrow \quad 39 \overset{ok!}{\leq} 40$$
$$w_1^B x_1^B + w_2^B x_2^B \overset{?}{\leq} w_1^B x_1^A + w_2^B x_2^A \quad \Leftrightarrow \quad 56 \overset{não!}{\leq} 54$$

b) O comportamento da firma descrito pela tabela acima é consistente com o comportamento minimizador de custos? Por quê?

S: Não. A segunda desigualdade acima não é válida, o que significa que a firma não está minimizando custos: se a firma resolvesse produzir as mesmas 100 unidades do bem final usando a quantidade de insumos $x_1 = 15$ e $x_2 = 12$ ao invés de usar $x_1 = 16$ e $x_2 = 12$, quando os preços eram $w_1 = 2$ e $w_2 = 2$, a firma teria tido um custo menor ($54 < 56$).

c) Ainda usando as observações contidas na tabela acima, existe algum "insumo de Giffen" para essa firma?

S: Sim, o primeiro insumo é um "*insumo de Giffen*": seu preço aumentou (e nada mais se alterou) e a quantidade demandada desse insumo aumentou também. O preço do segundo insumo não se alterou, ou seja, $\Delta w_2 = w_2^B - w_2^A = 0$. Usando as duas desigualdades acima obtemos a seguinte relação:

$$\Delta w_1 \Delta x_1 = (w_1^B - w_1^A)(x_1^B - x_1^A) = 1 > 0,$$

ou seja, o preço do insumo e a sua quantidade demandada moveram-se na mesma direção (o preço do insumo subiu e a quantidade demandada pela firma desse insumo subiu).

NOTA DE AULA 18 – FUNÇÕES CUSTOS

18.1) Suponha uma firma que usa apenas trabalho como insumo. Suponha que a sua produção, por hora trabalhada, é descrita pela tabela abaixo.

Quantidade de Trabalho	Produção Total
6	1
10	2
13	3
15	4
18	5
23	6
30	7
40	8

Se o insumo trabalho custa R$ 2 por hora trabalhada e a firma tem um custo fixo de R$ 30, construa uma tabela calculando o custo variável, o custo total, o custo médio, o custo váriável médio e o custo marginal dessa firma. Explique, sucintamente, como cada item foi calculado.

S: A tabela pedida é:

Qtde de Trabalho	Prod. Total	CV	CT	CMe	CVMe	CMg
6	1	12	42	42	12	–
10	2	20	50	25	10	8
13	3	26	56	18,7	8,7	6
15	4	30	60	15	7,5	4
18	5	36	66	13,2	7,2	6
23	6	46	76	12,7	7,7	10
30	7	60	90	12,9	8,6	14
40	8	80	110	13,75	10	20

O custo variável (CV) é calculado multiplicando a quantidade de trabalho usada pelo seu preço. O custo total é o CV mais o custo fixo (CF, igual a 30). O CMe e o CVMe são obtidos dividindo o custo total e o custo variável pela quantidade produzida, respectivamente. Já o custo marginal (CMg) é dado pelo acréscimo no custo de produzir aquela nova unidade (logo, CMg($q = 2$) é igual a CT($q = 2$) − CT($q = 1$), que será igual a CV($q = 2$) − CV($q = 1$)).

18.2) Suponha uma firma que use apenas trabalho e capital como insumos. Suponha que a sua produção, por hora trabalhada e por unidade de capital utilizada, é descrita pela tabela abaixo.

Qtde de Trabalho	Qtde de Capital	Produção Total
5	5	1
10	10	2
15	15	3
20	20	4
25	25	5
30	30	6
35	35	7
40	40	8

Suponha que o insumo trabalho custa R$ 2 por hora trabalhada e o insumo capital custa R$ 3 por unidade utilizada e a firma não tem custo fixo.

a) Construa uma tabela calculando o custo total, o custo médio e o custo marginal dessa firma. Explique, sucintamente, como cada item foi calculado.

S: A tabela pedida é:

Qtde de Trabalho	Capital	Produção Total	CT	CMe	CMg
5	5	1	25	25	–
10	10	2	50	25	25
15	15	3	75	25	25
20	20	4	100	25	25
25	25	5	125	25	25
30	30	6	150	25	25
35	35	7	175	25	25
40	40	8	200	25	25

b) A relação entre custo médio e custo marginal obtida na tabela está de acordo com o que a teoria prediz?

S: A tabela obtida na solução do item anterior mostra que o custo médio e o custo marginal são sempre iguais, o que está de acordo com a teoria: os dados acima exibem retornos constantes de escala – se multiplicarmos a escala de produção de uma unidade por t, $t = 1, 2, \ldots, 8$, a produção é multiplicada também por t.

c) Que função de produção e qual a sua forma funcional que é capaz de gerar a relação acima entre os insumos utilizados e a produção obtida?

S: Uma função de produção possível que gera os dados apresentados acima é $f(K, L) = 0{,}2 \times \min\{L, K\}$, onde L denota a quantidade de insumo trabalho usada e K a quantidade de insumo capital usada. Existem outras possibilidades, mas temos que levar em conta o nível do preço dos insumos, $w_L/w_K = 2/3$, que deve ser igual a TTS dos insumos na escolha ótima dos fatores e verificar se os valores escolhidos são de fato ótimos (uma outra possibilidade, por exemplo, é $f(K, L) = (3/25) \times K + (2/25) \times L$.

18.3) Suponha que a função de produção de uma firma competitiva é $q = x_1 x_2$, onde x_1 e x_2 são as quantidades dos insumos 1 e 2 usadas, cujos preços são $w_1 = 4$ e $w_2 = 9$, respectivamente.

a) Determine as demandas ótimas que minimizam o custo de se produzir a quantidade $q = 36$. Qual o custo mínimo de se produzir esta quantidade do bem que a firma vende?

S: O problema de minimização de custos dessa firma é:

$$\min_{x_1, x_2} 4x_1 + 9x_2 \qquad \text{s.a.} \qquad q = x_1 x_2$$

Temos que $x_1 x_2 = 36$, logo $x_1 = 36/x_2$. Podemos transformar o problema acima em um problema de minimização não condicionada:

$$\min_{x_2 \geq 0} 144/x_2 + 9x_2$$

A CPO resulta em:

$$-144\, x_2^{-2} + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4$$

Logo, $x_2 = 4$ e $x_1 = 36/4 = 9$. O custo mínimo de produção de 36 unidades do bem será $c = 4 \times 9 + 9 \times 4 = 72$.

b) Suponha agora que a firma deseja ampliar a produção para $q = 64$, mas não pode variar o insumo x_2, que está fixo no valor encontrado no item a). Encontre a demanda ótima do insumo x_1 neste caso e o custo mínimo de curto prazo associado ao nível de produção $q = 64$.

S: Neste caso, $x_1 \times 4 = 64$, logo $x_1 = 16$. O custo de produção será $\hat{c} = 4 \times 16 + 9 \times 4 = 100$.

c) Suponha agora que a firma pode ajustar o insumo x_2. Quais as novas demandas ótimas dos insumos x_1 e x_2 que minimizam o custo de produção de $q = 64$? Qual o novo custo mínimo de produção? Como estas novas demandas e custo se comparam com as demandas e custo encontrados no item b)?

S: Agora temos que $x_1 x_2 = 64$, logo $x_1 = 64/x_2$. Neste caso, temos que resolver o seguinte problema:

$$\min_{x_2} \, (256/x_2) + 9x_2$$

A CPO resulta em:

$$-256 \, x_2^{-2} + 9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{16}{3}$$

Logo, $x_2 = 16/3$ e $x_1 = 64/x_2 = 12$. O custo mínimo de produção de 36 unidades do bem será $\tilde{c} = 4 \times 12 + 9 \times (16/3) = 96$. No longo prazo a firma ajusta ambos os insumos, com a demanda de x_1 de longo prazo sendo menor do que a de curto prazo e a demanda de x_2 de longo prazo maior do que a de curto prazo, em que x_2 está fixo em 4 unidades (a quantidade ótima de x_2 para se produzir 36 unidades do bem final). Além disso, o custo de curto prazo, $\hat{c} = 100$, é maior do que o custo de longo prazo, $\tilde{c} = 96$, para a produção de $q = 64$.

d) Analise intuitivamente se a comparação feita no item c) acima está de acordo com a teoria de minimização de custos da firma.

S: Sim, a comparação feita no item b) está de acordo com a teoria de minimização de custos da firma. No longo prazo a firma consegue ajustar mais insumos de produção do que no curto prazo. Então, no longo prazo o custo de produção deve ser menor ou igual ao custo de produção no curto prazo (nesta questão, é menor).

18.4) Suponha uma firma competitiva cuja função de produção seja descrita por $q = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$.

a) Determine e represente graficamente o custo médio e o custo marginal de longo prazo.

S: A função de produção $q = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$ apresenta retornos constantes de escala. Vimos que a função custo de uma tecnologia com retornos constantes de escala é linear na quantidade produzida, ou seja,

$$c(w_1, w_2, q) = c(w_1, w_2, 1) \, q \, .$$

Logo, o custo marginal e o custo médio são iguais e constantes, $CMe = CMg = c(w_1, w_2, 1)$, determinados pelo custo de produção de uma unidade do bem final. A figura abaixo ilustra o custo médio e o custo marginal de longo prazo.

Vamos determinar essas funções, resolvendo o problema de minimização de custos dessa firma. O Lagrangeano do problema é:

$$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda \left(q - x_1^{0,5} x_2^{0,5} \right)$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1): &\quad w_1 = \lambda \, 0{,}5 x_1^{-0,5} x_2^{0,5} \\ (x_2): &\quad w_2 = \lambda \, 0{,}5 x_1^{0,5} x_2^{-0,5} \\ (\lambda): &\quad q = x_1^{0,5} x_2^{0,5} \end{aligned}$$

Resolvendo as CPOs para x_1 e x_2, obtemos:

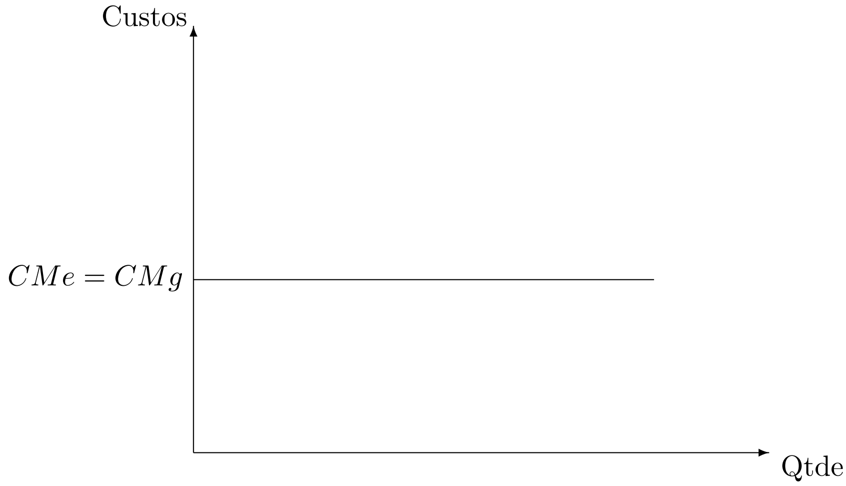
$$x_1(w_1, w_2, q) = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{0,5} q \qquad \text{e} \qquad x_2(w_1, w_2, q) = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{0,5} q$$

A função custo é, portanto:

$$c_{lp}(w_1, w_2, q) = w_1 x_1(w_1, w_2, q) + w_2 x_2(w_1, w_2, q) = 2w_1^{0,5} w_2^{0,5} q$$

Portanto, o custo médio e o custo marginal são iguais e constantes na quantidade produzida, conforme a figura acima ilustra, e dados por:

$$CMe_{lp}(q) = CMg_{lp}(q) = 2w_1^{0,5} w_2^{0,5}$$



b) Determine e represente graficamente o custo médio, o custo variável médio e o custo marginal, para o caso em que o insumo x_2 está fixo no valor $\bar{x}_2$.
S: Se o insumo x_2 está fixo em $\bar{x}_2$, então temos que $q = x_1^{0,5} \bar{x}_2^{0,5}$. Neste caso, a demanda condicional de x_1 pode ser encontrada invertendo a restrição do problema de minimização de custos de curto prazo, $q = x_1^{0,5} \bar{x}_2^{0,5}$, o que resulta em:

$$x_1(w_1, w_2, q; \bar{x}_2) = \frac{q^2}{\bar{x}_2}$$

Portanto, o custo de curto prazo é:

$$c_{cp}(w_1, w_2, q; \bar{x}_2) = w_1 x_1(w_1, w_2, q; \bar{x}_2) + w_2 \bar{x}_2 = \frac{w_1 q^2}{\bar{x}_2} + w_2 \bar{x}_2$$

Finalmente, o custo médio e o custo marginal de curto prazo são:

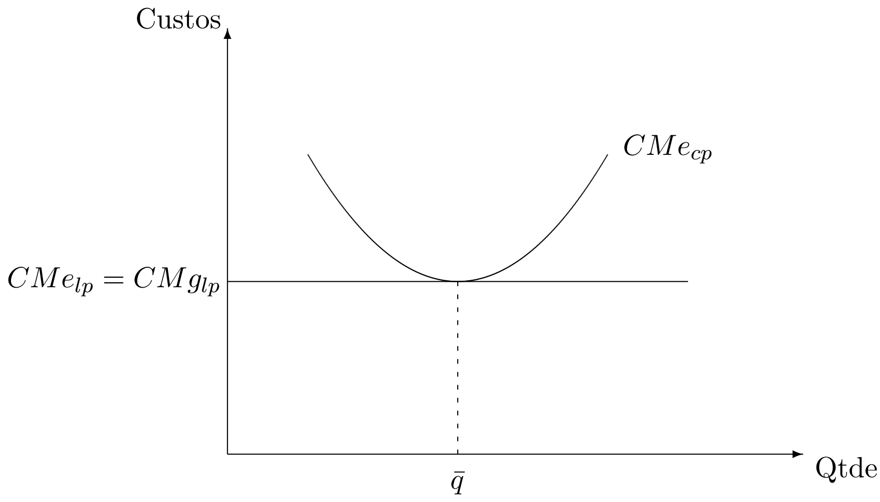
$$CMe_{cp}(q) = \frac{w_1 q}{\bar{x}_2} + \frac{w_2 \bar{x}_2}{q} \qquad \text{e} \qquad CMg_{cp}(q) = \frac{2w_1 q}{\bar{x}_2}$$

c) Explique intuitivamente para qual valor de produção q os custos médios de longo prazo e curto prazo serão iguais. Represente graficamente as duas curvas de custo médio, levando em conta o valor q para o qual as duas curvas serão iguais.

S: O custo médio de longo prazo e o custo médio de curto prazo serão iguais quando o valor de $\bar{x}_2$ for igual ao valor ótimo do insumo x_2 no longo prazo, $x_2(w_1, w_2, q)$, como podemos ver abaixo:

$$\begin{aligned} c_{cp}(w_1, w_2, q; x_2(w_1, w_2, q)) &= \frac{w_1 q^2}{(w_1/w_2)^{0,5} q} + w_2 \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{0,5} q = w_1^{0,5} w_2^{0,5} q + w_1^{0,5} w_2^{0,5} q \\ &= 2 w_1^{0,5} w_2^{0,5} q = c_{lp}(w_1, w_2, q) \end{aligned}$$

Podemos mostrar também que o custo médio de curto prazo será sempre maior ou igual à curva de custo médio de longo prazo. A figura abaixo ilustra a relação entre as curvas de custo médio de longo e de curto prazos.



O valor $\bar{q}$ para o qual as curvas de custo médio de longo e de curto prazo são iguais é o valor para o qual a escolha de x_2 igual a $\bar{x}_2$ minimiza o custo de produção de longo prazo.

d) De modo geral, qual a relação entre as curvas de custo total de curto prazo e custo total de longo prazo? Justifique intuitivamente sua resposta.

S: O custo de curto prazo pode ser escrito de modo geral como:

$$c_{cp}(w_1, w_2, q; \bar{x}_2) = w_1 x_1^{cp}(w_1, w_2, q; \bar{x}_2) + w_2 \bar{x}_2$$

A fim de simplificar a notação, vamos representar as funções de demanda de longo prazo e a função custo apenas como funções do nível de produção: $x_1^{lp}(q)$, $x_2^{lp}(q)$ e $c^{lp}(q)$. A seguinte relação entre demandas de longo prazo e demandas de curto prazo é válida:

$$x_1^{lp}(q) = x_1^{cp}(q, x_2(q))$$

A seguinte relação entre a função custo de longo prazo e a função custo de curto prazo é válida:

$$c_{lp}(q) = c_{cp}(q, x_2(q))$$

A primeira igualdade diz que a quantidade ótima de longo prazo do primeiro insumo é igual à quantidade ótima de curto prazo, *quando a quantidade do segundo insumo estiver fixo no nível ótimo de longo prazo.* A segunda igualdade diz que o custo mínimo de longo prazo é igual ao custo mínimo de curto prazo, *quando a quantidade do segundo insumo estiver fixa no nível ótimo de longo prazo (escolhido quando a firma minimiza os custos no longo prazo).*

18.5) Suponha um mercado competitivo e considere a função de produção:

$$f(x_1, x_2) = (\min\{x_1, x_2\})^2$$

Suponha que $w_1 = w_2 = 10$.

a) Determine o grau de homogeneidade dessa função de produção. Essa tecnologia apresenta que tipo de retornos de escala? Justifique.

S: Essa função é homogênea de grau 2, pois:

$$f(tx_1, tx_2) = (\min\{tx_1, tx_2\})^2 = (t \min\{x_1, x_2\})^2 = t^2(\min\{x_1, x_2\})^2 = t^2 f(x_1, x_2)$$

Logo, essa função apresenta retornos crescentes de escala, já que $f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2)$, para todo $t > 1$, toda combinação positiva de insumos.

b) Encontre as funções de demanda condicionais e a função custo dessa firma. Determine as funções de custo médio e de custo marginal dessa firma.

S: Na solução ótima vale que $x_1^* = x_2^* = x^*$. O problema da firma é equivalente a encontrar x que minimiza o custo de produção sujeito a produzir a quantidade q, onde $q = x^2$. Portanto, as demandas condicionais são:

$$x_1(w_1, w_2, q) = x_2(w_1, w_2, q) = \sqrt{q}$$

A função custo é:

$$c(w_1, w_2, q) = w_1\sqrt{q} + w_2\sqrt{q} = 20\sqrt{q}$$

O custo médio $CMe(q)$ e o custo marginal $CMg(q)$ são:

$$CMe(q) = \frac{20}{\sqrt{q}} \qquad \text{e} \qquad CMg(q) = \frac{20}{2\sqrt{q}} = \frac{10}{\sqrt{q}}$$

c) Suponha que a firma quer produzir $q = 100$, qual a quantidade usada de cada insumo? Qual o custo médio de produção?

S: Usando a solução do item b), temos que a firma irá usar $x_1 = x_2 = \sqrt{100} = 10$ unidades de cada insumo para produzir 100 unidades de q. O custo médio de produção é $CMe(100) = 20/\sqrt{100} = 2$ reais.

d) Suponha agora que a firma quer produzir $q = 400$, qual a quantidade usada de cada insumo? Qual o custo médio de produção?

S: Ainda usando a solução do item b), temos que a firma irá usar $x_1 = x_2 = \sqrt{400} = 20$ unidades de cada insumo para produzir 400 unidades de q. O custo médio de produção é $CMe(400) = 20/\sqrt{400} = 1$ real.

e) A variação observada no custo médio de produção está de acordo com os retornos de escala que essa função apresenta? Argumente sucintamente.

S: Sim. Retornos crescentes de escala implicam que a produção aumenta numa proporção maior do que o aumento no uso dos insumos ($f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2)$, para todo $t > 1$, toda combinação de insumos positiva). Como a despesa com insumos, $w_1x_1 + w_2x_2$, aumenta linearmente com o uso dos insumos (x_1, x_2), então se a tecnologia apresentar retornos crescentes de escala, o custo médio diminuirá com a quantidade produzida.

18.6) Suponha um mercado competitivo e considere a função de produção:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

a) Determine a demanda condicional de cada um desses insumos.

S: Neste caso não podemos usar o método de Lagrange. Podemos usar o método de Kuhn-Tucker ou apenas notar que, para esta função de produção, os três insumos são substitutos perfeitos. Logo as demandas condicionais de cada insumo são:

$$x_1(w_1, w_2, w_3, q) = \begin{cases} q, & \text{se } w_1 < w_2 \text{ e } w_1 < w_3 \\ 0, & \text{se } w_1 > w_2 \text{ ou } w_1 > w_3 \end{cases}$$

$$x_2(w_1, w_2, w_3, q) = \begin{cases} q, & \text{se } w_2 < w_1 \text{ e } w_2 < w_3 \\ 0, & \text{se } w_2 > w_1 \text{ ou } w_2 > w_3 \end{cases}$$

$$x_3(w_1, w_2, w_3, q) = \begin{cases} q, & \text{se } w_3 < w_1 \text{ e } w_3 < w_2 \\ 0, & \text{se } w_3 > w_1 \text{ ou } w_3 > w_1 \end{cases}$$

Nos casos em que tivermos dois preços iguais, menores do que o terceiro preço (por exemplo, $w_1 = w_3 < w_2$), a firma será indiferente entre a quantidade a usar desses dois insumos com menor preço, desde que a soma deles seja igual a q (por exemplo, se $w_1 = w_3 < w_2$, então a firma usará $x_2 = 0$ e quaisquer quantidades de x_1 e x_3 tais que $x_1 + x_2 = q$). Se $w_1 = w_2 = w_3$, então a firma é indiferente entre as quantidades de $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ e $x_3 \geq 0$, desde que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

b) Encontre a função custo dessa firma.

S: Usando a solução do item anterior, obtemos que a função custo desta firma é:

$$c(w_1, w_2, w_3, q) = \min\{w_1, w_2, w_3\}\, q$$

c) Suponha agora que o insumo x_3 está fixo no valor $\bar{x}_3 = 100$, e que a firma não consegue alterar esse valor no curto prazo. Suponha ainda que os preços dos insumos são $w_1 = 3$, $w_2 = 2$ e $w_3 = 1$. Qual a escolha ótima de insumos de curto prazo no caso em que a firma deseja produzir $q = 500$? Qual o custo dessa produção?

S: Como x_3 está fixo no valor $\bar{x}_3 = 100$ e a firma quer produzir $q = 500$, ela terá que ajustar ou o insumo 1 ou o insumo 2. Como $w_1 = 3 > 2 = w_2$, e esses dois insumos são substitutos perfeitos (com TTS igual a 1 em valor absoluto), a firma utilizará $x_2^* = 400$. Logo as demandas ótimas de curto prazo para produzir $q = 500$ são $x_1 = 0$, $x_2 = 400$ e $\bar{x}_3 = 100$. O custo de produção dessas 500 unidades do bem final no curto prazo é $c(500) = 3 \times 0 + 2 \times 400 + 1 \times 100 = 900$.

d) Suponha ainda que a firma quer produzir $q = 500$, mas que agora a firma pode alterar todos os seus insumos (longo prazo). Qual a escolha ótima de insumos da firma agora? Qual o custo total? Compare a solução agora com a do item anterior.

S: Agora a firma pode ajustar todos os insumos de produção. Como x_3 é o insumo mais barato e os três insumos são substitutos perfeitos (com TTS igual a 1 em valor absoluto, para cada combinação de par de insumos), a firma utilizará apenas $x_3^* = 500$. Logo as demandas ótimas de longo prazo para produzir $q = 500$ são $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 500$. O custo de produção dessas 500 unidades do bem final no longo prazo é $c(500) = 3 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 500 = 500$. Como esperado, o custo de longo prazo é menor do que o custo de curto prazo.

18.7) Suponha um mercado competitivo e considere a seguinte função de produção de uma firma que utiliza cinco insumos:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \min\{x_1, x_2\} + \min\{x_3, x_4\} + x_5 \,.$$

Suponha em todos os itens abaixo que a firma minimiza custos.

a) Suponha que $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, $w_4 = 1$ e $w_5 = 10$. Suponha também que os insumos x_1 e x_2 estão fixos em 1.000 unidades (ou seja, $x_1 = 1.000$ e $x_2 = 1.000$) e não podem variar no curto prazo. Qual a demanda condicional ótima de cada um dos cinco insumos para o caso em que a firma deseja produzir $q = 2.000$? Qual o custo de produção neste caso?

S: A tecnologia representada pela função de produção acima é de tal modo que os insumos 1 com 2 e 3 com 4 são complementares perfeitos, e 1 com 2, 3 com 4 e 5 são substitutos perfeitos. Logo, como $w_1 + w_2 = 3 < 4 = w_3 + w_4 < 10 = w_5$, a firma usaria apenas os insumos 1 e 2 para produzir $q = 2.000$. Como esses dois insumos estão fixos, ela usa o próximo grupo mais barato, que são os insumos 3 e 4. Para produzir $q = 2.000$, como a firma já utiliza $x_1 = x_2 = 1.000$, ela precisa comprar $x_3 = x_4 = 1.000$ (e, portanto, $x_5 = 0$). Logo, o custo de produção é $c(2.000) = 7.000$.

b) Suponha que $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, $w_4 = 1$ e $w_5 = 10$. Qual a quantidade ótima de cada um dos cinco insumos para o caso em que a firma deseja produzir $q = 2.000$ ao menor custo possível, sendo que agora ela pode ajustar todos os insumos da forma que quiser? Qual o custo de produção de $q = 2.000$?

S: Como agora a firma pode ajustar todos os insumos livremente, ela irá usar apenas os insumos 1 e 2, na quantidade $x_1 = x_2 = 2.000$ (e, portanto, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$). O custo de produção é $c(2.000) = 6.000$.

c) Calcule o custo médio para os itens a) e b). Qual é menor? Essa relação é esperada?

S: Para o item a), $CMe(2.000) = 7.000/2.000 = 3{,}50$, para o item b), $CMe(2.000) = 6.000/2.000 = 3$. O custo médio do item b) é menor. Isso é esperado, já que no longo prazo a firma consegue ajustar todos os insumos de produção, resultando em um custo por unidade produzida menor.

d) Continue supondo longo prazo (ou seja, que todos os insumos são ajustáveis), mas que agora o preço do insumo 5 baixou para $w_5 = 2$, com os preços dos outros insumos permanecendo inalterados (ou seja, iguais aos valores descritos nos itens a) e b)). Se a firma deseja ainda produzir $q = 2.000$, qual a quantidade usada de cada um dos cinco insumos agora? Qual o custo médio de produção? Ele é maior ou menor do que o custo médio encontrado para o item b)? Interprete intuitivamente.

S: Agora ficou mais barato usar apenas o insumo 5 para produzir $q = 2.000$. O custo de produção será $c(2.000) = 4.000$ e o custo médio será 2,00. O que ocorre é o barateamento de um insumo substituto do grupo de insumos que estava sendo usado anteriormente (ver a solução do item b)). A firma então substitui os insumos de modo a tirar proveito do preço menor do insumo 5 e com isso produzir a mesma quantidade que antes, a um custo menor.

e) Suponha os preços de insumos considerados no item d) (ou seja, $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, $w_4 = 1$ e $w_5 = 2$, mas que ocorreu uma inovação tecnológica de modo que a função de produção agora seja $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2\min\{x_1, x_2\} + \min\{x_3, x_4\} + x_5$. Supondo que a firma ainda deseja produzir $q = 2.000$, qual a quantidade usada de cada um dos cinco insumos? Qual o custo médio de produção? Ele poderia ser maior do que o do item anterior? Explique.

S: A inovação tecnológica descrita tornou o grupo de insumos 1 e 2 mais produtivo. Considerando os preços de insumos dados, agora se tornou novamente melhor para a firma utilizar os insumos 1 e 2 para produzir o bem final, pois só precisará usar $x_1 = x_2 = 1.000$ para produzir $q = 2.000$. O custo de produção agora será $c(2.000) = 3.000$ e o custo médio cairá para 1,50. Note que o custo médio não poderia ser maior do que o encontrado na solução do item d), já que a inovação tecnológica tornou os insumos 1 e 2 mais produtivos. Logo, ela só pode resultar em um custo médio igual ou menor do que era antes.

18.8) Suponha que uma firma competitiva produz eletricidade em duas usinas diferentes, uma hidrelétrica e outra nuclear. O custo de produzir q_h megawatts de eletricidade na hidrelétrica é $C_h(q_h) = 20 + 40q_h + 5q_h^2$. O custo de produzir q_n megawatts de eletricidade na usina nuclear é $C_n(q_n) = 20 + 10q_n + 5q_n^2$. Qual o menor custo possível de se produzir um total 11 megawatts?

S: Observe que já conhecemos a função custo de cada planta. Logo, temos que determinar a melhor distribuição da produção de 11 megawatts entre as duas plantas. O problema que devemos resolver é então:

$$\min_{q_h, q_n} C_h(q_h) + C_n(q_n) \qquad \text{s.a.} \qquad q_h + q_n = 11$$

O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = 20 + 40q_h + 5q_h^2 + 20 + 10q_n + 5q_n^2 + \lambda(11 - q_h - q_n)\,,$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. As CPO do problema resultam em:

$$\begin{aligned} (q_h): &\quad 40 + 10q_h = \lambda \\ (q_n): &\quad 10 + 10q_n = \lambda \\ (\lambda): &\quad q_h + q_n = 11 \end{aligned}$$

Portanto, o custo total é minimizado quando o custo marginal (CMg) nas duas plantas são iguais (desde que a firma queira usar ambas as plantas). Os custos marginais de cada planta são:

$$CMg_h = 40 + 10q_h \qquad \text{e} \qquad CMg_n = 10 + 10q_n$$

A condição para um ótimo é, portanto, obtida igualando as duas CPO:

$$CMg_h = CMg_n \quad \Rightarrow \quad q_n - q_h = 3$$

Sabemos que $q_n + q_h = 11$. Então temos que $q_n = 7$ e $q_h = 4$.

NOTA DE AULA 19 – OFERTA DA FIRMA COMPETITIVA

19.1) Considere a função de produção $f(x_1, x_2) = x_1^{0,25} x_2^{0,25}$. Suponha que o preço do bem que a firma vende é R$ 120,00, que o preço do insumo 1, w_1, é R$ 2,00, e que o preço do insumo 2, w_2, é R$ 4,00.

a) Derive as demandas ótimas, a oferta e o lucro da firma, usando o método de Lagrange.
S: O problema de maximização de lucros dessa firma é:

$$\max_{x_1, x_2} p x_1^{0,25} x_2^{0,25} - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} 0{,}25\, p x_1^{-0,75} x_2^{0,25} &= w_1 \\ 0{,}25\, p x_1^{0,25} x_2^{-0,75} &= w_2 \end{aligned}$$

Vamos multiplicar a primeira CPO por x_1 e a segunda por x_2, lembrando que $q = x_1^{0,25} x_2^{0,25}$:

$$\begin{aligned} 0{,}25\, p x_1^{0,25} x_2^{0,25} &= w_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \frac{0{,}25 p q^*}{w_1} \\ 0{,}25\, p x_1^{0,25} x_2^{0,25} &= w_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2^* = \frac{0{,}25 p q^*}{w_2} \end{aligned}$$

Obtemos então as escolhas ótimas de insumos como funções dos preços e do nível de produção ótimo. Para encontrarmos a oferta ótima, substituímos as escolhas ótimas de insumos na função de produção:

$$q^* = (x_1^*)^{0,25} (x_2^*)^{0,25} = \left(\frac{0{,}25 p q^*}{w_1}\right)^{0,25} \left(\frac{0{,}25 p q^*}{w_2}\right)^{0,25} \quad \Rightarrow \quad q^* = \frac{p}{4\sqrt{w_1 w_2}}$$

Substituindo de volta nas escolhas ótimas dos insumos, encontramos as funções de demandas ótimas dos insumos:

$$x_1^*(p, w_1, w_2) = \left(\frac{1}{16}\right) w_1^{-1,5} w_2^{-0,5}\, p^2 \qquad \text{e} \qquad x_2^*(p, w_1, w_2) = \left(\frac{1}{16}\right) w_1^{-0,5} w_2^{-1,5}\, p^2 \tag{5}$$

Para os preços dados, temos que:

$$\begin{aligned} x_1^*(120, 2, 4) &= (1/16) \times 120^2 \times 2^{-1,5} \times 4^{-0,5} \approx 159 \\ x_2^*(120, 2, 4) &= (1/16) \times 120^2 \times 2^{-0,5} \times 4^{-1,5} \approx 80 \end{aligned}$$

b) Derive as demandas condicionais e a função custo da firma, usando o método de Lagrange.
S: O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda \left(q - x_1^{0,25} x_2^{0,25}\right)$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda\, 0{,}25 x_1^{-0,75} x_2^{0,25} \\ w_2 &= \lambda\, 0{,}25 x_1^{0,25} x_2^{-0,75} \\ q &= x_1^{0,25} x_2^{0,25} \end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda, obtemos:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{x_1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{w_1 x_1}{w_2}$$

Substituindo essa expressão para x_2 em função de x_1 na terceira CPO, obtemos a demanda condicional de x_1:

$$x_1^{0,25}\left(\frac{w_1 x_1}{w_2}\right)^{0,25} = q \quad \Rightarrow \quad x_1 = \left(\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}\right) q^2$$

Substituindo a demanda condicional de x_1 na expressão de x_2 em função de x_1, encontramos a demanda condicional de x_2. Temos então que:

$$x_1(w_1, w_2, q) = \left(\sqrt{\frac{w_2}{w_1}}\right) q^2 \qquad \text{e} \qquad x_2(w_1, w_2, q) = \left(\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}\right) q^2 \tag{6}$$

A função custo é:

$$c(w_1, w_2, q) = w_1 x_1(w_1, w_2, q) + w_2 x_2(w_1, w_2, q) = 2\sqrt{w_1 w_2}\, q^2$$

c) Usando a função custo da firma encontrada no item b), derive a função de oferta ótima.

S: A função de oferta ótima da firma é a solução do problema:

$$\max_{x_1, x_2} pq - 2\sqrt{w_1 w_2}\, q^2$$

A CPO desse problema resulta na condição de preço igual a custo marginal:

$$p = 4\sqrt{w_1 w_2} q$$

Logo, a oferta ótima da firma é:

$$q(p, w_1, w_2) = \frac{p}{4\sqrt{w_1 w_2}} \tag{7}$$

d) Substitua a oferta ótima da firma encontrada no item c) nas demandas condicionais derivadas no item b). Qual a relação dessas demandas com as demandas ótimas encontradas no item a)? Por que essa relação ocorre?

S: Substituindo a oferta ótima (7) nas funções de demanda (6), obtemos:

$$x_1^*(p, w_1, w_2) = \left(\frac{1}{16}\right) w_1^{-1,5} w_2^{-0,5} p^2 \qquad \text{e} \qquad x_2^*(p, w_1, w_2) = \left(\frac{1}{16}\right) w_1^{-0,5} w_2^{-1,5}\, p^2\,,$$

exatamente as mesmas demandas descritas em (5) (item a) acima), como esperado.

19.2) Suponha uma firma competitiva com a seguinte função de produção $q = x_1^{0,25} x_2^{0,25}$, onde x_1 e x_2 são os insumos usados na produção, cujos preços são $w_1 = 1$ e $w_2 = 1$.

a) Encontre as demandas condicionais por insumos e a função custo da firma.

S: O problema de minimização de custos dessa firma é:

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \qquad \text{s.a.} \qquad q = x_1^{0,25} x_2^{0,25}\,,$$

o mesmo problema resolvido na questão anterior. As demandas condicionais são:

$$x_1(w_1, w_2, q) = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{0,5} q^2 \qquad \text{e} \qquad x_2(w_1, w_2, q) = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{0,5} q^2$$

A função custo é:

$$c(w_1, w_2, q) = w_1 x_1(w_1, w_2, q) + w_2 x_2(w_1, w_2, q) = 2\sqrt{w_1 w_2}\, q^2$$

Para os preços dos insumos $w_1 = 1$ e $w_2 = 1$, temos $x_1(w_1, w_2, q) = q^2$, $x_2(w_1, w_2, q) = q^2$ e $c_{lp} = c(w_1, w_2, q) = 2q^2$.

b) Determine a curva de oferta de longo prazo da firma.

S: A curva de oferta de longo prazo é determinada pela curva de custo marginal. Mais precisamente, a curva de oferta de longo prazo da firma é igual à parte crescente da sua curva de custo marginal que está acima da curva de custo médio. A curva de custo marginal é $CMg_{lp}(q) = 4q$, crescente para todo q. A curva de custo médio de longo prazo é dada por $CMe_{lp}(q) = 2q$. Portanto, $CMg_{lp}(q) \geq CMe_{lp}(q)$, para todo $q \geq 0$. A curva de oferta de longo prazo é então dada por $p = 4q$ ou $q = (1/4)p$.

c) Suponha que o insumo x_2 está fixo no valor $x_2 = 1$. Encontre a demanda condicional do insumo variável e a função custo de curto prazo.

S: Se o insumo x_2 está fixo no valor $x_2 = 1$, então $q = x_1^{0,25} 1^{0,25} = x_1^{0,25}$. A demanda condicional do insumo x_1 é, portanto, $x_1 = q^4$. A função de custo de curto prazo é $c_{cp}(q) = q^4 + 1$.

d) Determine a curva de oferta de curto prazo. Qual das duas curvas de oferta, a de curto prazo ou a de longo prazo, é mais elástica?

S: A função de custo marginal de curto prazo é $CMg_{cp}(q) = 4q^3$. Mais precisamente, a curva de oferta de curto prazo da firma é igual à parte crescente da sua curva de custo marginal que está acima da curva de custo variável médio. A curva de custo marginal é $CMg_{cp}(q) = 4q^3$, crescente para todo q. A curva de custo médio de curto prazo é dada por $CMe_{cp}(q) = q^3 + (1/q)$. Portanto, $CMg_{cp}(q) \geq CMe_{cp}(q)$, para todo $q \geq \sqrt[4]{1/3}$. A curva de oferta de curto prazo é então $p = 4q^3$ ou $q = \sqrt[3]{(1/4)p}$. As funções de oferta de longo e curto prazo são, portanto, $q_{lp} = p/4$ e $q_{cp} = \sqrt[3]{p/4}$. As elasticidades da oferta de curto prazo e de longo prazo são:

$$\epsilon_{lp} = \frac{p}{q_{lp}} \times \frac{\partial q_{lp}}{\partial p} = \frac{p}{p/4} \times \left(\frac{1}{4}\right) = 1$$
$$\epsilon_{cp} = \frac{p}{q_{cp}} \times \frac{\partial q_{cp}}{\partial p} = \frac{p}{(p/4)^{1/3}} \times \left(\frac{1}{12(p/4)^{2/3}}\right) = \frac{1}{3}$$

Logo, a curva de oferta de longo prazo é mais elástica, como esperado.

19.3) Uma firma tem uma função de produção dada por:

$$q = f(L, K) = L^\alpha K^{1-\alpha}\,, \qquad \alpha \in (0, 1)\,.$$

Use a seguinte notação ao longo da questão: w denota o preço do insumo trabalho (L), r o preço do insumo capital (K), e p o preço do produto (q). Responda os seguintes itens:

a) Verifique o grau de homogeneidade da tecnologia dessa firma. Qual o retorno de escala que ela apresenta?

S: O grau de homogeneidade é 1, pois:

$$f(tL, tK) = (tL)^{\alpha}(tK)^{1-\alpha} = t\, L^{\alpha}K^{1-\alpha} = tf(L, K)$$

Logo, a tecnologia da firma apresenta retornos constantes de escala.

b) Suponha que o insumo K está fixo no valor $\bar{K}$. Encontre as demandas condicionais de curto prazo dos dois insumos. Encontre a função custo de curto prazo.

S: O problema de minimização de custos de curto prazo dessa firma é:

$$\min_{L\geq 0} wL + r\bar{K} \qquad \text{s.a.} \qquad q = L^{\alpha}\bar{K}^{1-\alpha}$$

Como existe apenas um insumo variável, encontramos a sua quantidade ótima invertendo a restrição do problema:

$$L(w, r, q; \bar{K}) = \frac{q^{\frac{1}{\alpha}}}{\bar{K}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}$$

A demanda ótima do insumo K é $\bar{K}$, pois está fixa e não pode ser alterada. A função custo de curto prazo é:

$$c(w, r, q; \bar{K}) = w\left(\frac{q^{\frac{1}{\alpha}}}{\bar{K}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\right) + r\bar{K}\,.$$

c) Utilizando a função custo de curto prazo derivada no item anterior, obtenha a curva de oferta e a função lucro dessa firma.

S: A função de oferta ótima da firma é a solução do problema:

$$\max_{q\geq 0} pq - \left[w\left(\frac{q^{\frac{1}{\alpha}}}{\bar{K}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\right) + r\bar{K}\right]$$

A CPO desse problema resulta na condição de preço igual a custo marginal, que determina a curva de oferta da firma:

$$p = \left(\frac{w}{\alpha\bar{K}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\right) q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \qquad \Rightarrow \qquad q(p) = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \bar{K}$$

A função lucro de curto prazo é:

$$\pi(p) = pq(p) - c(q(p)) = \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} p^{\frac{1}{1-\alpha}} - \left[w\left(\frac{q(p)^{\frac{1}{\alpha}}}{\bar{K}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\right) + r\bar{K}\right]$$

d) Suponha agora que os dois insumos são variáveis. Encontre as demandas condicionais de longo prazo e a função custo de longo prazo.

S: O problema de minimização de custos de longo prazo é:

$$\min_{L,K} wL + rK \qquad \text{s.a.} \qquad q = L^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = wL + rK + \lambda\left(q - L^{\alpha}K^{1-\alpha}\right),$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange do problema. As CPO são:

$$\begin{aligned}(L): &\quad w = \lambda\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}\\ (K): &\quad r = \lambda(1-\alpha)L^{\alpha}K^{-\alpha}\\ (\lambda): &\quad q = L^{\alpha}K^{1-\alpha}\end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda, obtemos:

$$\frac{w}{r} = \frac{\alpha K}{(1-\alpha)L} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{(1-\alpha)wL}{\alpha r}$$

Substituindo essa expressão para K na terceira CPO, obtemos a demanda condicional por trabalho:

$$L(w,r,q) = \left(\frac{\alpha r}{(1-\alpha)w}\right)^{1-\alpha} q$$

Substituindo a demanda de trabalho na expressão de capital em função de trabalho, obtemos a demanda condicional de capital:

$$K(w,r,q) = \left(\frac{(1-\alpha)w}{\alpha r}\right)^{\alpha} q$$

A função custo é:

$$c(w,r,q) = wL(w,r,q) + rK(w,r,q) = \left[\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha}\right] w^{\alpha}r^{1-\alpha}q\,.$$

e) Assuma que $\alpha = 0{,}5$, $\bar{K} = 10$ e $w = r = 1$. Calcule o custo de se produzir $q = 10$ no curto e no longo prazo. Qual é menor? Essa relação é esperada? Justifique.

S: Usando os itens b) e d) acima, fazendo $\alpha = 0{,}5$ e usando que $w = r = 1$ e o capital está fixo no curto prazo em $\bar{K} = 10$ (exatamente o nível que será escolhido no longo prazo neste caso), temos que os custos de curto e de longo prazo de produzir 10 unidades do bem são iguais (devemos ter sempre que o custo de longo prazo é menor *ou igual* ao de curto prazo):

$$c_{cp}(10) = \frac{w100}{\bar{K}} + r\bar{K} = 20 \qquad \text{e} \qquad c_{lp}(10) = 20\sqrt{w}\sqrt{r} = 20\,.$$

19.4) Suponha uma firma competitiva cuja função de produção seja:

$$q = x_1^{0{,}25}x_2^{1{,}75}$$

a) Suponha que o insumo x_2 esteja fixo no valor 1. Determine as demandas condicionais ótimas e a função custo de curto prazo da firma.

S: Neste caso precisamos resolver o seguinte problema:

$$\min_{x_1}\, w_1x_1 + w_2\bar{x}_2 \qquad \text{s.a.} \qquad q = x_1^{0{,}25}\bar{x}_2^{1{,}75} = x_1^{0{,}25}$$

Invertendo a restrição do problema de minimização de custos de curto prazo, encontramos $x_1^{cp} = q^4$ (e $x_2^{cp} = \bar{x}_2 = 1$). Logo, a função custo de curto prazo é $c_{cp}(w_1,w_2,q;\bar{x}_2) = w_1q^4 + w_2\bar{x}_2 = w_1q^4 + w_2$.

b) Qual a curva de oferta de curto prazo da firma?

S: Usando a solução do item anterior, precisamos resolver o seguinte problema:

$$\max_{q \geq 0} pq - c_{cp}(w_1, w_2, q; \bar{x}_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \max_{q \geq 0} pq - (w_1 q^4 + w_2)$$

Derivando com relação a q e igualando a zero, obtemos:

$$p = 4w_1 q^3 \quad \Rightarrow \quad q = \left(\frac{p}{4w_1} \right)^{1/3}$$

Note que a condição de segunda ordem desse problema é $-12w_1 q^2 < 0$, sempre negativa para $q > 0$, o que garante que a solução encontrada resolvendo a CPO é um máximo (como $CVMe = w_1 q^3 < p = 4w_1 q^3$, a solução de fato caracteriza a curva de oferta da firma).

c) Encontre as demandas condicionais de longo prazo e determine a função custo de longo prazo dessa firma.

S: Neste caso, precisamos resolver o seguinte problema:

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \qquad \text{s.a.} \qquad q = x_1^{0{,}25} x_2^{1{,}75}$$

O Lagrangeano do problema é:

$$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \mu(q - x_1^{0{,}25} x_2^{1{,}75})$$

As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1): & \quad w_1 = \mu 0{,}25 x_1^{-0{,}75} x_2^{1{,}75} \\ (x_2): & \quad w_2 = \mu 1{,}75 x_1^{0{,}25} x_2^{0{,}75} \\ (\mu): & \quad q = x_1^{0{,}25} x_2^{1{,}75} \end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda, obtemos:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{7x_1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{7w_1 x_1}{w_2}$$

Substituindo essa expressão para x_2 na terceira CPO, obtemos a demanda condicional do insumo x_1:

$$x_1^{0{,}25} \left(\frac{7w_1 x_1}{w_2} \right)^{1{,}75} = q \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = \left(\frac{w_2}{7w_1} \right)^{1{,}75} q \quad \Rightarrow \quad x_1 = \left(\frac{w_2}{7w_1} \right)^{0{,}875} \sqrt{q}$$

Substituindo a demanda condicional do insumo 1 na expressão acima de x_2 em função de x_1, obtemos:

$$x_2 = \frac{7w_1}{w_2} \left[\left(\frac{w_2}{7w_1} \right)^{0{,}875} \sqrt{q} \right] \quad \Rightarrow \quad x_2 = \left(\frac{7w_1}{w_2} \right)^{0{,}125} \sqrt{q}$$

Logo, as demandas condicionais dos dois insumos são:

$$x_1(w_1, w_2, q) = \left(\frac{w_2}{7w_1} \right)^{0{,}875} \sqrt{q} \qquad \text{e} \qquad x_2(w_1, w_2, q) = \left(\frac{7w_1}{w_2} \right)^{0{,}125} \sqrt{q}$$

A função custo é:

$$
\begin{aligned}
c(w_1, w_2, q) &= w_1 x_1(w_1, w_2, q) + w_2 x_2(w_1, w_2, q) \\
&= w_1 \left[\left(\frac{w_2}{7w_1} \right)^{0{,}875} \sqrt{q} \right] + w_2 \left[\left(\frac{7w_1}{w_2} \right)^{0{,}125} \sqrt{q} \right] \\
&= \left(7^{-0{,}875} + 7^{0{,}125} \right) w_1^{0{,}125} w_2^{0{,}875} \sqrt{q}
\end{aligned}
$$

Como $c(w_1, w_2, 1) = \left(7^{-0{,}875} + 7^{0{,}125}\right) w_1^{0{,}125} w_2^{0{,}875}$, podemos escrever a função custo de modo simplificado como $c(w_1, w_2, q) = c(w_1, w_2, 1)\sqrt{q}$.

d) Monte o problema para determinar a curva de oferta de longo prazo da firma. Derive a condição de primeira ordem desse problema e determine q em função de p que a CPO gera. Qual é a relação entre q e p (ou seja, maior p, maior a quantidade ofertada?)

S: Neste caso o problema é:

$$
\max_{q \geq 0} pq - c(w_1, w_2, q) \qquad \Leftrightarrow \qquad \max_{q \geq 0} pq - c(w_1, w_2, 1)\sqrt{q}
$$

A CPO desse problema resulta em:

$$
p = 0{,}5\, c(w_1, w_2, 1)\, q^{-0{,}5} \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{c(w_1, w_2, 1)^2}{4p^2}
$$

Se o preço do bem aumentar, então a oferta diminuirá.

e) Verifique a CSO para o item anterior (ou seja, que garante que a solução seja um máximo – equivalente ao custo marginal ser crescente). A relação encontrada de q em função de p determina de fato uma curva de oferta? Explique intuitivamente o que está acontecendo.

S: A CSO do problema do item anterior é:

$$
0{,}25\, c(w_1, w_2, 1)\, q^{-1{,}5}\,,
$$

que é sempre positiva para$q > 0$. Logo, a CSO não é satisfeita (ela na verdade garante que a solução encontrada no problema anterior é um ponto de mínimo e não de máximo). Então a expressão obtida na solução do item d) para a curva de oferta (q em função de p) não é uma curva de oferta. Intuitivamente, a função de produção acima apresenta retornos crescentes de escala no longo prazo. Então não podemos encontrar a oferta ótima da firma desse modo.

19.5) Suponha um mercado competitivo e considere a função de produção de três insumos:

$$
f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\min\{x_1, x_2\} + x_3}\,.
$$

a) Determine o grau de homogeneidade dessa função de produção. Essa tecnologia apresenta que tipo de retornos de escala?

S: A função de produção acima é homogênea de grau 0,5:

$$
f(tx_1, tx_2, tx_3) = \sqrt{\min\{tx_1, tx_2\} + tx_3} = t^{0{,}5}\sqrt{\min\{x_1, x_2\} + x_3} = t^{0{,}5} f(x_1, x_2, x_3)\,.
$$

Logo os retornos de escala são decrescentes, já que a função de produção é homogênea de grau 0,5 (menor do que 1).

b) Suponha que os insumos x_1 e x_2 estão fixos em 1 unidade. Encontre a função custo e a curva de oferta de curto prazo dessa firma.

S: Neste caso precisamos resolver o seguinte problema:

$$\min_{x_3 \geq 0} w_1\bar{x}_1 + w_2\bar{x}_2 + w_3x_3 \qquad \text{s.a.} \qquad q = \sqrt{1 + x_3}$$

Invertendo a restrição do problema de minimização de custos de curto prazo, encontramos $x_3^{cp} = q^2 - 1$, para $q \geq 1$ (se $q < 1$, $x_3^{cp} = 0$). Logo, a função custo de curto prazo é $c_{cp}(w_1, w_2, w_3, q; \bar{x}_1, \bar{x}_2) = (w_1 + w_2) + w_3(q^2 - 1)$, sempre que a firma quiser produzir $q \geq 1$ (e $c_{cp}(q) = w_1 + w_2$, se $q < 1$). Para encontrarmos a curva de oferta de curto prazo, precisamos resolver o seguinte problema:

$$\max_{q \geq 0} pq - (w_1 + w_2) - w_3(q^2 - 1)$$

Derivando com relação a q e igualando a zero, obtemos:

$$p = 2w_3q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{p}{2w_3}\,,$$

desde que resulte em $q \geq 1$. Note que a condição de segunda ordem desse problema é $-2w_3 < 0$, sempre negativa, o que garante que a solução encontrada resolvendo a CPO é um máximo.

c) Encontre as funções de demanda condicionais e a função custo de longo prazo dessa firma.

S: Precisamos resolver o seguinte problema:

$$\min_{x_1, x_2, x_3} w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \qquad \text{s.a.} \qquad q = \sqrt{\min\{x_1, x_2\} + x_3}$$

Note que os insumos 1 e 2 são complementares perfeitos, e esses dois insumos são, em conjunto, substitutos perfeitos do insumo 3. Logo, na solução teremos que $x_1^* = x_2^*$, que serão positivos apenas se a soma dos preços dos dois for menor do que o preço do insumo 3. As demandas condicionais são portanto:

$$x_1(w_1, w_2, w_3, q) = \begin{cases} q^2, & \text{se} \quad w_1 + w_2 < w_3 \\ 0, & \text{se} \quad w_1 + w_2 > w_3 \end{cases}$$

$$x_2(w_1, w_2, w_3, q) = \begin{cases} q^2, & \text{se} \quad w_1 + w_2 < w_3 \\ 0, & \text{se} \quad w_1 + w_2 > w_3 \end{cases}$$

$$x_3(w_1, w_2, w_3, q) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad w_1 + w_2 < w_3 \\ q^2, & \text{se} \quad w_1 + w_2 > w_3 \end{cases}$$

No caso em que $w_1 + w_2 = w_3$, a firma será indiferente entre as quantidades de $x_1 = x_2$ e x_3 que serão usadas, desde que elas produzam q unidades do produto (isto é, satisfaçam a restrição do problema). Logo, a função custo pode ser escrita como:

$$c(w_1, w_2, w_3, q) = \begin{cases} (w_1 + w_2)q^2, & \text{se} \quad w_1 + w_2 < w_3 \\ w_3q^2, & \text{se} \quad w_1 + w_2 > w_3 \\ (w_1 + w_2)q^2 = w_3q^2, & \text{se} \quad w_1 + w_2 = w_3 \end{cases}$$

Podemos escrever a função custo de modo mais compacto como:

$$c(w_1, w_2, w_3, q) = \min\{w_1 + w_2, w_3\}\, q^2$$

d) Suponha que a longo prazo a firma deseje produzir $q = 5$, e que $w_1 = 1$, $w_2 = 1$ e $w_3 = 4$. Qual a quantidade usada de cada insumo? Qual o custo médio de produção dessas 5 unidades?

S: Como $w_1 + w_2 = 2 < 4 = w_3$, então usando a solução do item b), temos que $x_1^* = x_2^* = q^2 = 25$ e $x_3^* = 0$. O custo total de produção é $c(5) = 2 \times 5^2 = 50$. Logo, o custo médio de produção é $CMe(5) = c(5)/5 = 10$.

e) Continue supondo longo prazo e que $w_1 = 1$, $w_2 = 1$ e $w_3 = 4$, mas que agora a firma deseja produzir $q = 10$. Qual a quantidade usada de cada insumo? Qual o custo médio de produção dessas 10 unidades? Qual a relação entre os custos médios de produção para 5 unidades e para 10 unidades? Por que eles são diferentes? Qual é maior? Por que essa relação é esperada, dado o retorno de escala que a função de produção apresenta?

S: Como $w_1 + w_2 = 2 < 4 = w_3$, então usando a solução do item b), temos que $x_1^* = x_2^* = q^2 = 100$ e $x_3^* = 0$. O custo total de produção é $c(10) = 2 \times 10^2 = 200$. Logo, o custo médio de produção é $CMe(10) = c(10)/10 = 20$. O custo médio de produção quando a firma produz 10 unidades do bem é o dobro do custo médio de produção quando a firma produz apenas 5 unidades. Essa relação é esperada porque a tecnologia da firma apresenta retornos decrescentes de escala. Logo, quanto mais ela produzir, maior será o custo médio (mais especificamente, $CMe(q) = c(1)q$, que aumenta linearmente com q, a quantidade produzida).

19.6) Considere a função de produção de três insumos, K, L e T, dada por:

$$f(K, L, T) = \sqrt{\min\{K, L, T\}}$$

Denote o preço do bem que a firma vende por p, o preço do insumo K por w_K, L por w_L e T por w_T.

a) Determine o grau de homogeneidade dessa função de produção. Qual o retorno de escala que essa tecnologia apresenta?

S: A função de produção acima é homogênea de grau 0,5:

$$f(tK, tL, tT) = \sqrt{\min\{tK, tL, tT\}} = t^{0,5}\sqrt{\min\{K, L, T\}} = t^{0,5} f(K, L, T)\,.$$

Logo os retornos de escala são decrescentes, já que a função de produção é homogênea de grau 0,5 (menor do que 1).

b) Derive as demandas ótimas, a oferta e o lucro da firma.

S: Essa uma tecnologia em que os insumos são complementares perfeitos e, portanto, devem ser usados sempre na mesma proporção caso a firma deseje maximizar lucros: $K^* = L^* = T^*$. O problema da firma é então equivalente a encontrar x que maximiza $px^{0,5} - (w_K + w_L + w_T)x$. A CPO desse problema resulta em:

$$0{,}5px^{-0,5} - (w_K + w_L + w_T) = 0 \quad \Rightarrow \quad K^* = L^* = T^* = \frac{p^2}{4(w_K + w_L + w_T)^2}$$

A função oferta é:

$$q(p, w_K, w_L, w_T) = \frac{p}{2(w_K + w_L + w_T)}$$

e a função lucro é:

$$\begin{aligned}\pi(p, w_K, w_L, w_T) &= p\left(\frac{p}{2(w_K + w_L + w_T)}\right) - (w_K + w_L + w_T)\left(\frac{p^2}{4(w_K + w_L + w_T)^2}\right) \\ &= \frac{p^2}{4(w_K + w_L + W_T)}\end{aligned}$$

c) Derive as demandas condicionais e a função custo da firma.

S: Ainda temos que na solução ótima que $K^* = L^* = T^*$. O problema da firma é então equivalente a encontrar x que minimiza o custo de produção sujeito a produzir a quantidade q, onde $q = \sqrt{x}$. Portanto, as demandas condicionais são:

$$K(w_K, w_L, w_T, q) = L(w_K, w_L, w_T, q) = T(w_K, w_L, w_T, q) = q^2$$

A função custo é:

$$c(w_K, w_L, w_T, q) = (w_K + w_L + w_T)\, q^2$$

d) Usando a função custo da firma encontrada no item c), derive a função de oferta ótima da firma.

S: a função de oferta da firma pode ser encontrada pela regra $p = c'(q)$, ou seja:

$$p = 2(w_K + w_L + w_T)q^* \quad \Rightarrow \quad q^* = \frac{p}{2(w_K + w_L + w_T)}\,,$$

que naturalmente é igual a função oferta derivada na solução do item b).

e) Substitua a oferta ótima da firma encontrada no item d) nas demandas condicionais derivadas no item c). Qual a relação dessas demandas com as demandas ótimas encontradas no item b)? Por que essa relação ocorre?

S: Como $K(w_K, w_L, w_T, q) = L(w_K, w_L, w_T, q) = T(w_K, w_L, w_T, q) = q^2$, fazendo a substituição pedida, encontramos:

$$K^* = L^* = T^* = \frac{p^2}{4(w_K + w_L + w_T)^2}\,,$$

as mesmas funções encontradas na solução do item b). Isso é esperado, pois ao substituirmos o valor ótimo de q na demanda condicional, obtemos as demandas ótimas por insumos.

19.7) Suponha uma firma que utiliza apenas trabalho como insumo, e cuja tecnologia é descrita por:

$$f(L) = L^{\alpha}\,,$$

onde L denota a quantidade de trabalho empregado pela firma. Denote por w o preço da unidade de trabalho e por p o preço do bem que a firma vende.

a) Determine a demanda por trabalho incondicional, a oferta ótima e a função lucro dessa firma. Qual condição o parâmetro α deve satisfazer para que a solução encontrada represente de fato um máximo?

S: O problema da firma é:

$$\max_{L \geq 0}\, pL^{\alpha} - wL\,,$$

onde p é o preço do bem de consumo. A CPO desse problema resulta em:

$$\alpha p L^{\alpha-1} - w = 0 \quad \Rightarrow \quad L(p, w) = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

A oferta ótima é:

$$q(p, w) = L(p, w)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad q(p, w) = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

O lucro ótimo é:

$$\pi = p\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} - w\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{1/(1-\alpha)} = \left(\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} + \alpha^{1/(1-\alpha)}\right) w^{-\alpha/(1-\alpha)} p^{1/(1-\alpha)}$$

b) Suponha que $\alpha = 0{,}5$, $w = 10$ e $p = 200$. Qual a demanda incondicional de trabalho? Quantas unidades do bem final serão produzidas? Qual o lucro da firma?

S: Usando as funções encontradas na solução do item anterior, temos que $L^* = ((0{,}5 \times 200)/10)^2 = 10^2 = 100$, $q^* = (L^*)^{0,5} = \sqrt{100} = 10$ e $\pi = 200 \times 10 - 10 \times 100 = 1.000$.

c) Determine a demanda condicional por trabalho e a função custo dessa firma.

S: A firma deseja resolver o seguinte problema:

$$\min_{L \geq 0} wL \qquad \text{s.a.} \qquad q = L^\alpha$$

Como a firma utiliza um único insumo, a demanda condicional de trabalho pode ser encontrada invertendo a restrição do problema: $L(w, q) = q^{1/\alpha}$. A função custo é, portanto, $c(w, q) = w\, q^{1/\alpha}$.

d) Suponha que $\alpha = 0{,}5$ e $w = 10$. *Usando o item anterior*, determine a curva de oferta dessa firma.

S: Temos que resolver o seguinte problema:

$$\max_{q \geq 0} pq - w\, q^{1/\alpha}$$

A CPO desse problema resulta em $p = 20\, q$, ou seja, $q = p/20$.

e) Considere a curva de oferta encontrada no item anterior. Qual será a quantidade produzida se $p = 200$? Como essa quantidade se compara com a que você encontrou na solução do item b)? Interprete intuitivamente.

S: Usando o item anterior, temos que $q = p/20 = 200/20 = 10$, o mesmo valor encontrado na solução do item b). Isso é esperado, já que estamos resolvendo o mesmo problema de maximização de lucros, apenas por caminhos diferentes.

19.8) Suponha que a função de custo de uma firma competitiva é descrita por:

$$c(w_1, w_2, q) = q^2(w_1 + w_2)$$

a) Em um mesmo gráfico, ilustre as curvas de custo total, custo marginal e a curva de oferta dessa firma.

S: As curvas são dadas por: 1) Custo Total: $c(q) = q^2(w_1 + w_2)$, 2) Custo Marginal: $c'(q) = 2q(w_1 + w_2)$, e 3) Oferta: $p = 2q(w_1 + w_2)$. Como $c''(q) = 2(w_1 + w_2)$ e os custos fixos são zero ($c(w_1, w_2, 0) = 0$), a curva de oferta é idêntica à curva de custo marginal. O gráfico dessas curvas é obtido com o custo e o nível de preço do bem final no eixo vertical e a quantidade produzida no eixo horizontal.

b) Em um gráfico separado, ilustre a demanda pelo fator x_1 (em função do seu preço w_1).

S: A demanda pelo fator x_1 pode ser encontrada usando o lema de Shephard:

$$x_1(w_1, w_2, q) = \frac{\partial c(w_1, w_2, q)}{\partial w_1} = q^2$$

Portanto, a demanda pelo insumo 1 não depende do seu preço. Isso indica que a função de produção tem alguma propriedade de proporções fixas. O gráfico é um linha horizontal.

c) Em ambos os diagramas, ilustre o efeito de um aumento no preço do insumo x_2.

S: Um aumento no preço do insumo 2 não afeta a demanda $x_1(w_1, w_2, q)$ pelo bem 1. Esse aumento desloca as curvas de custo total, custo marginal e oferta "*para fora*", indicando um aumento do custo de produção para cada nível de produção.

NOTA DE AULA 20 – EQUILÍBRIO PARCIAL

20.1) Suponha uma indústria perfeitamente competitiva com livre entrada e saída de firmas. Julgue os itens a seguir e justifique sua resposta.

a) No longo prazo, nenhuma firma terá prejuízo.

S: Verdadeiro. Se existe livre entrada e saída de firmas, qualquer firma com prejuízo sairá do mercado no longo prazo.

b) No curto prazo, uma firma pode ter prejuízo, desde que esse prejuízo não seja maior do que o seu custo fixo de produção.

S: Verdadeiro. O que importa para a decisão de curto prazo da firma é se o seu resultado consegue cobrir pelo menos os custos variáveis de produção. Se o prejuízo é maior do que o custo fixo, isso significa que o seu resultado não é capaz de cobrir os custos variáveis, então a firma deveria deixar de operar.

c) Se a livre entrada e saída de firmas nessa indústria for impedida por alguma razão (imagine uma regulação do governo), então no longo prazo pode perdurar uma situação de lucro positivo.

S: Verdadeiro. É a livre entrada e saída de firmas que impede que as firmas tenham lucro no longo prazo. Se as firmas estão tendo lucro no longo prazo, mas novas firmas são impedidas de entrarem nesse mercado, pode ocorrer que esse lucro perdure no longo prazo.

d) Se a demanda pelo produto dessa indústria for muito inelástica, as firmas terão lucro sempre.

S: Falso. Se a indústria é competitiva e existe livre entrada e saída de firmas, no longo prazo a tendência será de lucro econômico zero nessa indústria, independentemente da elasticidade da demanda.

e) A demanda que a indústria enfrenta é sempre horizontal, qualquer que seja a elasticidade da demanda do bem.

S: Falso. A demanda (inversa) só é horizontal se for perfeitamente inelástica. A demanda direta só é horizontal se for perfeitamente elástica.

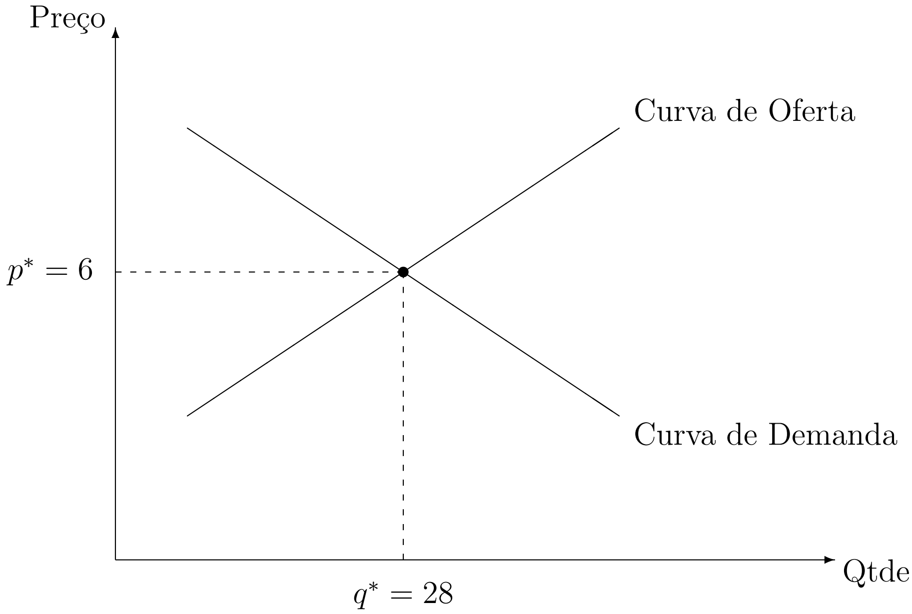
20.2) Suponha que a curva de demanda inversa de mercado de um certo bem é $p_D(q) = 20 - 0{,}5q_D$ e que a curva de oferta de mercado desse bem é $q_O(p_O) = 10 + 3p_O$.

a) Calcule a quantidade e o preço de equilíbrios. Ilustre graficamente esse equilíbrio.

S: Basta igualar demanda e oferta para determinarmos o equilíbrio de mercado. Neste caso, temos uma demanda inversa e uma oferta direta. Portanto precisamos inverter uma das equações. Vamos inverter a demanda inversa: $p_D(q) = 20 - 0{,}5q_D \;\Rightarrow\; q_D = 40 - 2p_D$. Igualando demanda e oferta, obtemos o preço de equilíbrio p^*:

$$q_O(p^*) = q_D(p^*) \quad\Rightarrow\quad 10 + 3p^* = 40 - 2p^* \quad\Rightarrow\quad p^* = 6$$

A quantidade de equilíbrio é $q_D = 40 - 2p^* = 40 - 2 \times 6 = 28$. A figura abaixo ilustra o equilíbrio graficamente.



b) Suponha que o governo resolva cobrar das firmas um imposto t sobre a quantidade deste bem. Ou seja, para cada unidade vendida, as firmas pagam um valor t, que faz com que o preço de oferta (p_O) seja igual ao preço de demanda (p_D) menos o imposto t. Suponha que $t = 1$. Qual o equilíbrio agora?

S: Vamos igualar demanda e oferta, levando em conta que agora vale $p_O = p_D - t$:

$$q_O(p_D - t) = q_D(p_D) \quad \Rightarrow \quad 10 + 3(p_D - t) = 40 - 2p_D \quad \Rightarrow \quad p_D = 6 + \frac{3t}{5}$$

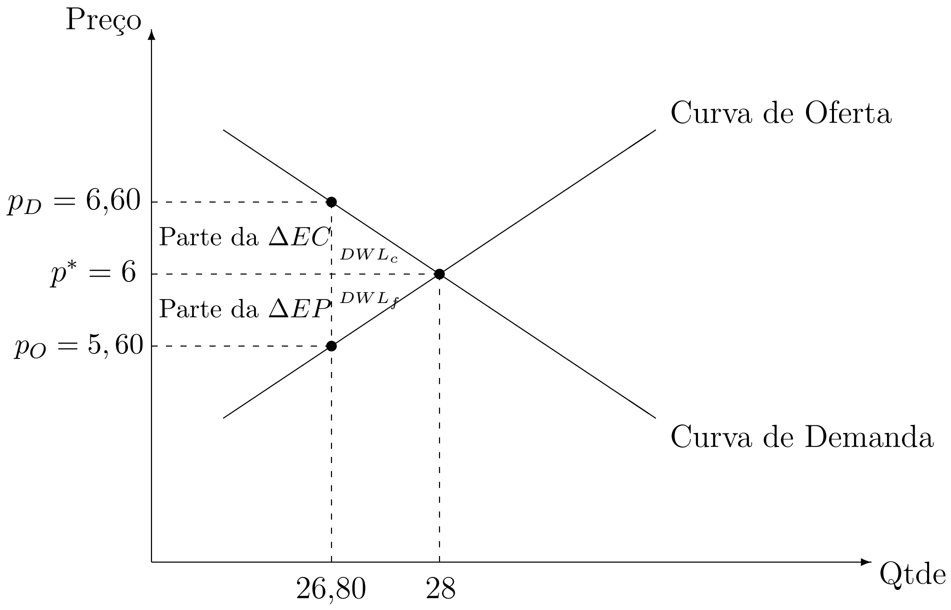
Se $t = 1$, então o novo preço para os consumidores é R\$ 6,60 e o preço recebido pelas firmas é R\$ 5,60.

c) Compare a situação no item a) com a situação no item b). Descreva o que ocorre com o preço pago pelos consumidores, o preço recebido pelos vendedores e a quantidade de equilíbrio.

S: O preço para os consumidores aumenta de R\$ 6,00 para R\$ 6,60 e o preço recebido pelas firmas se reduz para R\$ 5,60. O aumento de preços gerado pelo imposto é dividido entre consumidores e firmas, em que consumidores arcam com 60% do imposto e firmas, com 40%. A quantidade de equilíbrio é $q^* = 26{,}8$ ($q^* = q_D(p_D) = q_O(p_O)$).

d) Graficamente, ilustre qual a perda dos consumidores (medida pelo excedente do consumidor), qual a perda dos vendedores (medida pelo excedente do produtor) e qual o ganho do governo com o imposto. A soma das perdas é maior, igual ou menor do que o ganho do governo?

S: O gráfico abaixo ilustra a situação descrita no exercício. A soma das perdas é visivelmente maior do que a soma dos ganhos. Existe um perda econômica dissipada (DWL), no valor de R\$ 0,60, causada pela existência do imposto, que pode ser dividida em duas. Primeiro, ocorre uma perda de bem-estar para os consumidores, medida pela perda no excedente do consumidor ($\Delta EC = 16{,}44$). Essa perda ΔEC pode ser dividida em duas: a perda de EC que se transforma em receita do governo (no gráfico, Parte da $\Delta EC = 16{,}08$) e perda dissipada devido ao consumo reduzido, que é uma perda econômica (no gráfico, $DWL_c = 0{,}36$). Segundo, ocorre uma perda de bem-estar para as firmas, medida pela perda no excedente do produtor ($\Delta EP = 10{,}96$). Essa perda ΔEP pode ser dividida em duas: a perda do EP que se transforma em receita do governo (no gráfico, parte da $\Delta EP = 10{,}72$) e perda dissipada devido ao consumo reduzido, que é uma perda econômica (no gráfico, $DWL_f = 0{,}24$). Portanto, a perda total é maior do que o ganho de receita do governo: $\Delta EC + \Delta EP =$ Parte da $\Delta EC + DWL_c +$Parte da $\Delta EP + DWL_f = 27{,}40 > 26{,}80 =$ Receita do Governo $=$ Parte da ΔEC + Parte da ΔEP. A figura abaixo ilustra essa relação.



20.3) Suponha um mercado perfeitamente competitivo cuja função de demanda é $Q^D = 250 - 50p$, onde p é o preço do bem. Suponha também que todas as firmas que atuam nesse mercado possuem a mesma função de custo, dada por $c_j(q_j) = 0{,}5q_j^2 + q_j + 2$, onde j é um índice da firma analisada.

a) Se existem 50 firmas operando neste mercado, determine o preço e a quantidade de equilíbrio do mercado.

S: O custo marginal da firma j é $c_j'(q_j) = q_j + 1$. A curva de oferta desta firma é determinada pela curva de custo marginal, na região onde a curva de custo marginal é crescente e maior do que o custo variável médio. O custo variável médio é $CVMe_j(q_j) = 0{,}5q_j + 1$. Então:

$$CMg_j(q_j) > CVMe_j(q_j) \quad \Rightarrow \quad q_j + 1 > 0{,}5q_j + 1 \quad \Rightarrow \quad q_j > 0$$

A curva de oferta da firma j é, portanto, $q_j = p - 1$, para $p \geq 1$. Como existem 50 firmas idênticas no mercado, a curva de oferta agregada é:

$$Q^S = \sum_{j=1}^{50} q_j = \sum_{j=1}^{50} p - 1 = 50p - 50$$

O equilíbrio é encontrado igualando a demanda de mercado à oferta de mercado:

$$Q^D = Q^S \quad \Rightarrow \quad 250 - 50p = 50p - 50 \quad \Rightarrow \quad p = 3$$

e a quantidade de equilíbrio é $Q^* = 100$. A esse preço, cada firma oferta 2 unidades do bem, $q_j = p - 1 = 2$.

b) Suponha que a demanda se expande para $\tilde{Q}^D = 320 - 50p$ e que o custo marginal de todas as firmas aumentou em 25% para qualquer nível de produção. Determine o novo preço e a nova quantidade de equilíbrio.

S: O custo marginal da firma j se torna $CMg_j(q_j) = 1{,}25q_j + 1{,}25$. A nova curva de oferta da firma j é $q_j = (4p/5) - 1$. A oferta agregada é:

$$Q^S = \sum_{j=1}^{50} q_j^s = \sum_{j=1}^{50} \left(\frac{4p}{5} - 1\right) = 40p - 50$$

O novo equilíbrio é encontrado igualando a nova demanda de mercado à nova oferta de mercado:

$$Q^D = Q^S \quad \Rightarrow \quad 320 - 50p = 40p - 50 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{37}{9} \approx 4{,}11$$

e a quantidade de equilíbrio é $Q^* \approx 114$. A esse preço, cada firma oferta pouco mais de 2 unidades do bem, $q_j^S = (4/5)p - 1 \approx 2{,}3$.

c) Suponha que o governo estabeleça um imposto no valor de R\$ 2,25 = R\$ 9/4 por unidade vendida, que deve ser pago pelos vendedores do bem. Logo, $p_S = p_D - 9/4$, onde p_S é o preço recebido pelos vendedores e p_D é o preço pago pelos consumidores. Encontre:

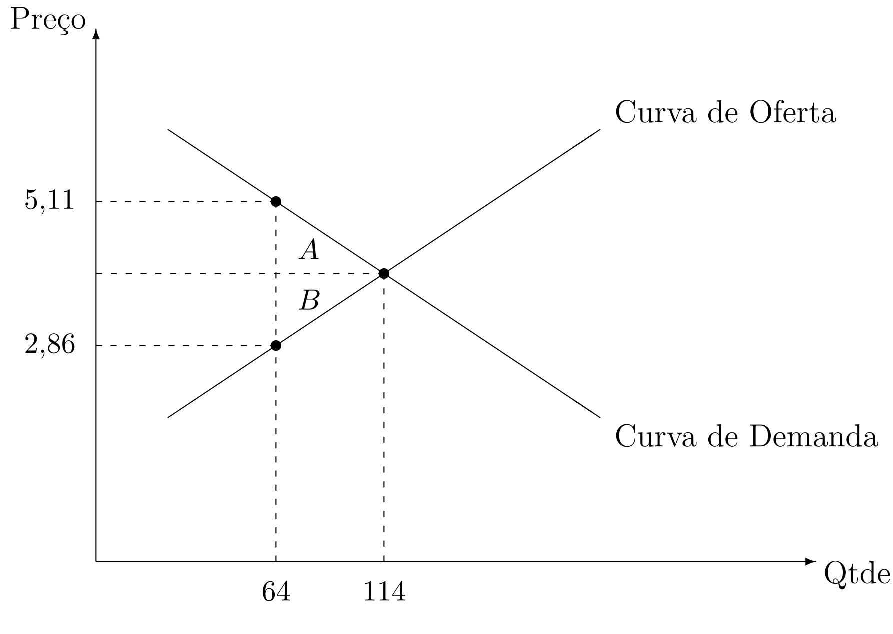
c.1) Os novos preços e quantidade de equilíbrio.
S: A condição de equilíbrio agora resulta em:

$$Q^D(p_D) = Q^S(p_S) \quad \Rightarrow \quad 320 - 50p_D = 40\left(p_D - \frac{9}{4}\right) - 50 \quad \Rightarrow \quad p_D = \frac{46}{9} \approx 5{,}11$$

e $p_S = p_D - 9/4 = 2{,}86$.

c.2) O valor imposto repassado aos consumidores.
S: Um real de dois reais e vinte-cinco centavos é repassado aos consumidores. A nova quantidade de equilíbrio é 64,4.

c.3) A perda de peso morto gerada pelo imposto.
S: A quantidade de equilíbrio diminui de aproximadamente 114 unidades para 64 unidades. A figura abaixo ilustra a perda de peso morto.



Como a demanda e a oferta agregadas são lineares, a perda de peso morto é igual à área do triângulo $A + B$ da figura acima:

$$\text{Perda de Peso Morto } = \frac{(5{,}11 - 2{,}86) \times (114 - 64)}{2} = 56{,}25$$

20.4) Uma indústria competitiva opera com N firmas idênticas, sendo que a curva de custo médio de cada firma é $CMe(q_j) = q_j + 5 + 100/q_j$, em que q_j é a quantidade produzida pela firma j, $j = 1, \ldots, N$. A demanda de mercado é dada por $D(p) = 1000 - 2p$, em que p é o preço do bem.

a) Suponha que estamos no curto prazo e existam 76 firmas no mercado ($N = 76$). Calcule o preço e a quantidade de equilíbrio.

S: Primeiro encontramos o custo total da firma, igual ao seu custo médio multiplicado pela quantidade produzida: $CT(q_j) = q_j^2 + 5q_j + 100$. Segundo, obtemos o custo marginal derivando o custo total da firma: $CMg(q_j) = 2q_j + 5$. Sabemos que a oferta de uma firma competitiva é determinada pela regra preço igual a custo marginal: $p = 2q_j + 5$, logo, $q_j = p/2 - 2{,}5$. Como existem 76 firmas no mercado, a oferta total é:

$$S(p) = \sum_{j=1}^{76} \left(\frac{p}{2} - 2{,}5 \right) = 38p - 190$$

Igualando demanda a oferta $D(p) = S(p)$, obtemos $p^* = 29{,}75$ e $Q^* = 940{,}5$.

b) Calcule quanto cada firma produzirá no equilíbrio obtido no item a) e o lucro ou prejuízo de cada firma.

S: Cada firma irá produzir $q_j = 940{,}5/76 = 12{,}375$, obtendo receita $RT = p \times q_j = 368{,}15625$ a um custo de $CT = q_j^2 + 5q_j + 100 = 315{,}015625$. Portanto, o lucro de cada firma é $\pi^* = 53{,}140625$.

c) Por algum motivo, a curva de custo de longo prazo das firmas que operam neste mercado é igual a de curto prazo. Calcule o preço e a quantidade de equilíbrio de longo prazo.

S: No longo prazo, o número de firmas no mercado será tal que o lucro seja zero, com cada firma produzindo no ponto de mínimo de sua curva de custo médio. O nível de produção que minimiza o custo médio $CMe(q_j) = q_j + 5 + 100/q_j$ é $q_j = 10$. O preço de mercado é, portanto, igual a $p = 2q_j + 5 = 25$. A quantidade de equilíbrio é $Q^* = 1000 - 2p = 950$.

d) Ainda supondo que a curva de custo de longo prazo é igual a de curto prazo, encontre o número de firmas que existem no mercado no longo prazo. Qual o lucro ou prejuízo de cada firma no longo prazo? Compare os resultados obtidos para o curto prazo e para o longo prazo.

S: Como cada firma produz 10 unidades do bem e a quantidade transacionada no mercado é 950, o número de firmas no mercado no longo prazo é 95. O lucro de cada firma no longo prazo é zero, como vimos na solução do item anterior. No longo prazo, o preço é menor do que o de curto prazo e a quantidade transacionada é maior do que a de curto prazo.

20.5) Suponha que o mercado de um bem é descrito pela função de demanda $q_D = 4000 - 10p$ e pela função de oferta $q_S = 40p$.

a) Determine o preço e a quantidade de equilíbrio desse mercado.

S: O preço de equilíbrio é encontrado igualando demanda à oferta:

$$4000 - 10p^* = 40p^* \quad \Rightarrow \quad 50p^* = 4000 \quad \Rightarrow \quad p^* = 80$$

A quantidade de equilíbrio é determinada substituindo o preço de equilíbrio ou na curva de demanda ou na curva de oferta, $q^* = 3.200$.

b) Calcule os excedentes do produtor e do consumidor.

S: O excedente do consumidor é igual à área do triângulo com altura $400 - 80 = 320$ e base 3.200:

$$EC = \frac{320 \times 3.200}{2} = 512.000$$

O excedente do produtor é igual à área do triângulo com altura 80 e base 3.200:

$$EC = \frac{80 \times 3.200}{2} = 128.000$$

c) Suponha que o governo decida subsidiar a oferta de mercado, pagando R$ 20,00 por unidade produzida. Quais os novos preços e quantidade de equilíbrio desse mercado?

S: No caso de um subsídio no valor $s =$ R$ 20, temos que $p_S = p_D + s = p_D + 20$. Os preços de equilíbrio podem ser encontrados fazendo:

$$q_D(p_D) = q_S(p_S) \;\Rightarrow\; 4000 - 10p_D^* = 40(p_D^* + 20) \;\Rightarrow\; p_D^* = 64 \;\Rightarrow\; p_S^* = 84$$

A nova quantidade de equilíbrio será $q^{**} = 3.360$.

d) Qual a alteração nos excedentes do consumidor e do produtor? Qual o gasto do governo com o subsídio? Qual a perda (ou ganho, se for o caso) social do subsídio?

S: O excedente do consumidor aumenta em $16 \times 3.200 + (16 \times 160)/2 = 52.480$. O excedente do produtor aumenta em $4 \times 3.200 + (4 \times 160)/2 = 13.120$. Como o custo do subsídio é $s \times q^{**} = 20 \times 3360 = 67.200$, então o resultado final do subsídio é uma perda de peso morto de R$ 1.600: $52.480 + 13.120 - 67.200 = -1.600$.

20.6) Suponha uma demanda de mercado $q_D = 800 - 20p$ e que todas as firmas que operam nesse mercado possuam uma tecnologia de produção que depende apenas de trabalho, L, descrita por $f(L) = L^{0,5}$. Além disso, suponha que o mercado é competitivo e que o salário por unidade de tempo trabalhada é R$ 2,00.

a) Suponha que existam 80 firmas no mercado. Qual o preço e a quantidade de equilíbrio de curto prazo?

S: O problema de maximização de lucros dessa firma é:

$$\max_{L \geq 0} pL^{0,5} - 2L$$

A CPO desse problema resulta em:

$$0{,}5pL^{-0,5} = 2 \quad \Rightarrow \quad L(p) = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

Já a oferta ótima de cada firma é:

$$q(p) = \frac{p}{4}$$

Portanto, a oferta de mercado é:

$$q_S = \sum_{j=1}^{80} q_j(p) = \sum_{j=1}^{80} \frac{p}{4} = 20p$$

Igualando demanda de mercado à oferta de mercado, encontramos o preço de equilíbrio:

$$q_D(p) = q_S(p) \quad \Rightarrow \quad 800 - 20p = 20p \quad \Rightarrow \quad p = 20$$

A quantidade de equilíbrio é $q^* = 400$.

b) Suponha que cada firma tenha um custo fixo no valor de R$ 8,00. Calcule quanto cada firma produzirá no equilíbrio obtido no item a) e o lucro ou o prejuízo de cada firma. O preço encontrado no item a) é alto o suficiente para que as firmas de fato operem?

S: A decisão ótima encontrada na solução do item anterior continua a mesma na presença do custo fixo. Logo, ao preço $p = 20$ de equilíbrio, cada firma oferta $q = (1/4) \times 20 = 5$ unidades do bem. O lucro de cada firma é:

$$\pi^* = 20 \times 5 - 2 \times 25 - 8 = 42$$

Como cada firma obtém um lucro positivo, todas as 80 firmas operam no mercado.

c) Calcule o preço e a quantidade de equilíbrio de longo prazo, supondo dois casos: 1) o custo fixo descrito no item b) permanece no longo prazo (imagine que é um imposto fixo por período que a firma opera), e 2) o custo fixo descrito no item b) desaparece. Encontre o número de firmas que existem no mercado no longo prazo.

S: 1) custo fixo acima é um custo que permanece no longo prazo. Nesse caso, como o preço de equilíbrio é determinado pela condição de lucro de cada firma igual a zero, obtemos:

$$\pi^*_{lp} = p \times (p/4) - 2 \times (p/4)^2 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{8} = 8$$

Resolvendo para p, encontramos $p^*_{lp} = 8$. Para esse preço, cada firma produz $q = 8/4 = 2$. Usando a demanda de mercado, encontramos que a quantidade de equilíbrio é $q^*_{lp} = 640$. Como cada firma produz 2 unidades e são comercializadas 640 unidades, então existem 320 firmas no mercado.

2) Custo fixo se torna nulo. Então como o custo total desta firma é $c(q) = 2q^2$, o custo marginal é $c'(q) = 4q$ e o custo médio é $CMe(q) = 2q$. Neste caso, cada firma terá o menor tamanho possível. Assumindo que a produção não pode ser menor do que uma unidade do bem, obtemos $c'(1) = 4$. Logo, o preço de equilíbrio é $p^*_{lp} = 4$. Usando a demanda de mercado, encontramos que a quantidade de equilíbrio é $q^*_{lp} = 720$. Como cada firma produz 1 unidade e são comercializadas 720 unidades, então existem 720 firmas no mercado.

d) O que ocorre com o equilíbrio de curto prazo (suponha a informação descrita no item a) se a firma melhorar a eficiência produtiva, de modo que a função de produção passe a ser descrita por $f(L) = 2L^{0,5}$?

S: O problema de maximização de lucros dessa firma é:

$$\max_{L \geq 0} \; p2L^{0,5} - 2L$$

A CPO desse problema resulta em:

$$pL^{-0,5} = 2 \quad \Rightarrow \quad L(p) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$$

Já a oferta ótima de cada firma é:
$$q(p) = \frac{p}{2}$$
Portanto, a oferta de mercado é:
$$q_S = \sum_{j=1}^{80} q_j(p) = \sum_{j=1}^{80} \frac{p}{2} = 40p$$
Igualando demanda de mercado à oferta de mercado, encontramos o preço de equilíbrio:
$$q_D(p) = q_S(p) \quad \Rightarrow \quad 800 - 20p = 40p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{40}{3} \approx 13{,}33$$
A quantidade de equilíbrio é $q^* = 1600/3 \approx 533{,}33$. Observe que o lucro econômico de cada firma nesse caso será zero. Logo, se considerarmos um custo fixo de 8 reais por firma, a firma será indiferente entre produzir ou não no curto prazo e, portanto, podemos supor que todas decidem continuar produzindo no curto prazo.

e) Essa melhora tecnológica descrita no item anterior corresponde a que tipo de choque? O resultado obtido acima está de acordo com o que é predito em uma análise gráfica de tal choque?

S: A melhora tecnológica corresponde a um choque positivo de positivo de oferta. Graficamente, um choque positivo de oferta desloca a oferta de mercado "para fora", o que resulta em um menor preço e uma maior quantidade de equilíbrios. Foi exatamente isto que obtemos na solução do item d), comparado ao item a).

20.7) Suponha que o mercado de um bem é descrito pela função de demanda $q_D = 1600 - 20p$ e pela função de oferta $q_S = 30p - 900$.

a) Determine o equilíbrio nesse mercado e os excedentes do produtor e do consumidor.

S: O equilíbrio é encontrado igualando demanda à oferta:
$$q_D = q_S \quad \Rightarrow \quad 1600 - 20p = 30p - 900 \quad \Rightarrow \quad p^* = 50 \;\text{ e }\; q^* = 600$$
O excedente do consumidor é:
$$EC = \frac{(80 - 50) \times 600}{2} = 9.000$$
O excedente do produtor é:
$$EP = \frac{(50 - 30) \times 600}{2} = 6.000$$

b) Se o governo decide que o preço nesse mercado não pode ultrapassar $\bar{p} = 35$, qual será a nova quantidade *de equilíbrio*? Quais são os novos excedentes do consumidor e do produtor?

S: O novo preço é abaixo do preço de equilíbrio. Isso significa que ocorrerá um excesso de demanda e a quantidade de equilíbrio sera'a determinada pela oferta, $q^* = 30 \times 35 - 900 = 150$. Neste caso, o novo excedente do consumidor será:
$$EC' = \frac{(80 - 72{,}5) \times 150}{2} + (72{,}5 - 35) \times 150 = 562{,}5 + 5.625 = 6.187{,}5$$
O novo excedente do produtor será:
$$EP' = \frac{(35 - 30) \times 150}{2} = 375$$

c) *Supondo a situação inicial do mercado* (i.e., suponha que o governo desistiu de impor um preço mínimo para o bem), se o governo decide subsidiar a oferta de mercado, pagando R$ 20,00 por unidade produzida, qual o novo equilíbrio? Qual a redução do preço de equilíbrio para os consumidores?

S: Agora temos que $p_D = p_S - s$, onde s é o valor do subsídio, $s =$ R$ 20. A quantidade de equilíbrio é determinada por:

$$1600 - 20(p_S - 20) = 30p_S - 900 \quad \Rightarrow \quad p_S = 58$$

Logo, $p_D = 58 - 20 = 38$ e $q^* = 840$. A redução do preço de equilíbrio para os consumidores é de R$ 12,00.

d) Qual o custo para o governo do subsídio criado em c)? Qual o ganho para os consumidores e para os produtores (medido pelo excedente do consumidor e pelo excedente do produtor, respectivamente)? Qual a perda de peso morto gerada pelo subsídio?

S: o custo do governo ,CG, é:

$$CG = 20 \times 840 = \text{R\$ } 16.800,00$$

O ganho dos consumidores, ΔEC, é:

$$\Delta EC = 12 \times 600 + \frac{12 \times 240}{2} = 7.200 + 1.440 = 8.640$$

O ganho dos produtores, ΔEP, é:

$$\Delta EP = 8 \times 600 + \frac{8 \times 240}{2} = 4.800 + 960 = 5.760$$

Logo, a perda de peso morto é:

$$DWL = 16.800 - 8.640 - 5.760 = 2.400$$

20.8) Suponha que o mercado de um bem é descrito pela função de demanda $q_D(p) = 2.000 - 100p$ e as firmas que produzem o bem possuem todas a tecnologia descrita na questão 5 da nota de aula 19, e suponha que os preços dos insumos que as firmas utilizam são $w_1 = w_2 = w_3 = 1$.

a) Suponha que os insumos x_1 e x_2 estão fixos em 1 unidade e que existam 200 firmas nesse mercado no curto prazo. Determine o preço e a quantidade de equilíbrio desse mercado.

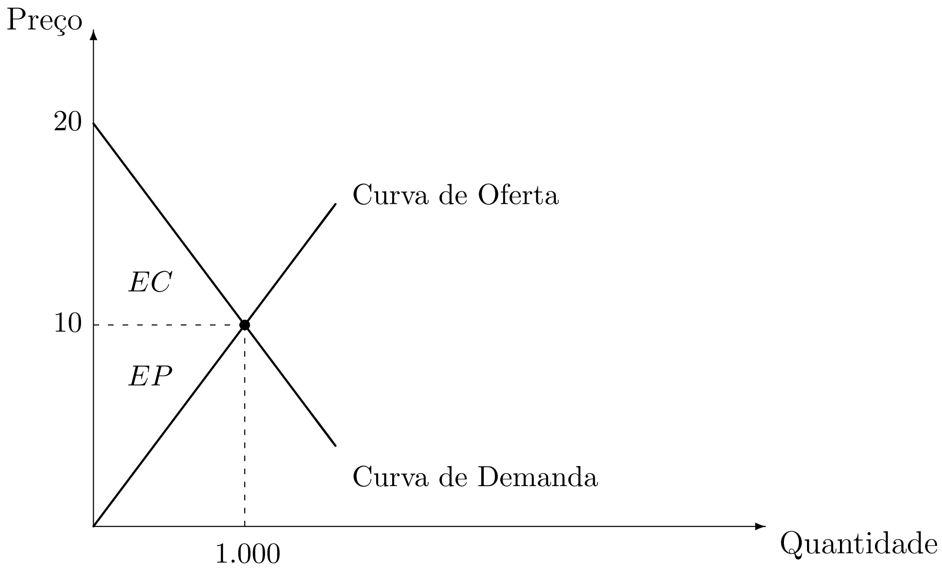
S: Usando a resposta do item a) da questão 5) da nota de aula 19, temos que a curva de oferta da firma é $q = p/2$, já que $w_3 = 1$. Como existem 200 firmas neste mercado, então a oferta de mercado de curto prazo é $q_S(p) = 200q = 100p$. Igualando a demanda de mercado à oferta de mercado, obtemos o preço de equilíbrio p^*:

$$q_D(p^*) = q_S(p^*) \quad \Rightarrow \quad 2.000 - 100p^* = 100p^* \quad \Rightarrow \quad p^* = 10\,.$$

Logo, a quantidade de equilíbrio é $q^* = 1.000$.

b) Calcule os excedentes do produtor e do consumidor no curto prazo.

S: A figura abaixo ilustra graficamente o equilíbrio neste mercado e os excedentes do consumidor e do produtor:



Logo, os excedentes dos consumidores e dos produtores são:

$$EC = \frac{10 \times 1.000}{2} = 5.000 \quad \text{e} \quad EP = \frac{10 \times 1.000}{2} = 5.000$$

c) Suponha que o governo decida colocar um imposto neste mercado no valor de t por unidade consumida. Quais os novos preços e quantidade de equilíbrio desse mercado, em função de t?

S: No caso de um subsídio no valor $s =$ R\$ 20, temos que $p_S = p_D - t$. Os preços de equilíbrio podem ser encontrados fazendo:

$$q_D(p_D) = q_S(p_S) \;\Leftrightarrow\; 2.000 - 100p_D^* = 100(p_D^* - t) \;\Leftrightarrow\; p_D^{**} = 10 + \frac{t}{2} \;\Rightarrow\; p_S^* = 10 - \frac{t}{2}$$

A quantidade de equilíbrio agora será $q^{**} = 1.000 - 50t$.

d) Calcule a arrecadação do governo. Qual o valor de t que maximiza essa arrecadação? Para este valor de t, qual o valor da arrecadação do governo e qual a quantidade de equilíbrio de mercado? Qual o peso morto neste caso?

S: A arrecadação do governo, denotada por AG, é $AG = t \times q^{**} = 1.000t - 50t^2$. Maximizando AG em t:

$$\max_{t \geq 0} 1.000t - 50t^2$$

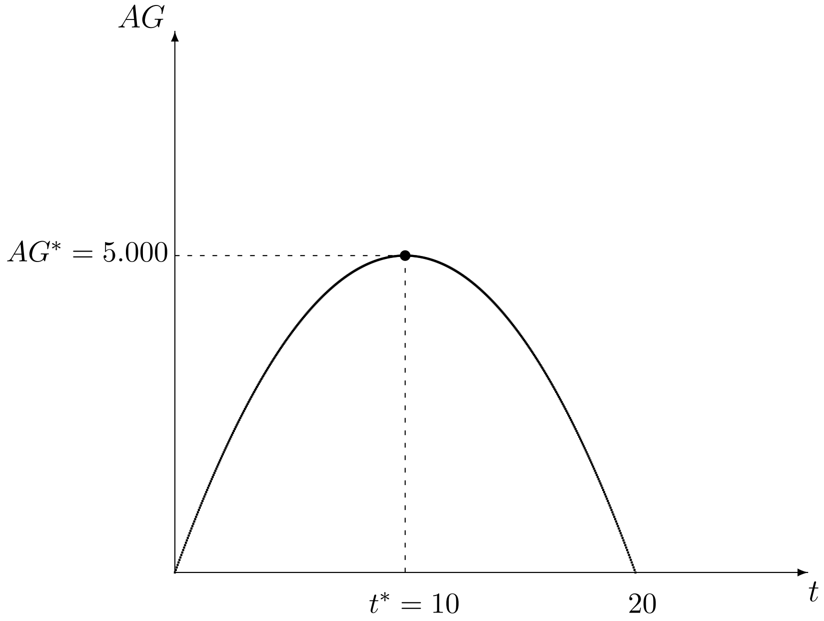
resulta na seguinte CPO:

$$1.000 - 100t^* = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = 10$$

Como a CSO é satisfeita para um máximo ($-100 < 0$), então quando a alíquota do imposto é igual a R\$ 10,00 por unidade consumida, a arrecadação do governo alcança o seu máximo, que no caso é $AG^* =$ R\$ 5.000. Já a quantidade de equilíbrio é $q^{**} = 1.000 - 50t^* = 500$ unidades, e o peso morto é $DWL = (10 \times 500)/2 = 2.500$.

e) Ilustre graficamente como a arrecadação do governo (coloque essa variável no eixo vertical) varia com o valor do imposto t (coloque essa variável no eixo horizontal). Esse gráfico é chamado *curva de Laffer*. Interprete intuitivamente o formato que a curva de Laffer apresenta neste caso.

S: O gráfico é:



O gráfico mostra que se o governo instituir um imposto sobre a quantidade no valor de t, a medida que ele for aumentando a taxa, a arrecadação aumenta, até que o valor do imposto alcance R\$ 10, que resulta no maior valor arrecadado possível para o governo, R\$ 5.000. A partir daí, aumentos subsequentes no valor do imposto vão reduzir tanto a quantidade transacionada que a arrecadação irá diminuir. Se o imposto chegar ao valor $t = 20$, então a arrecadação se torna zero novamente, já que a este valor, nenhuma transação ocorre.

20.9) Suponha que a demanda de mercado seja dada por $q_D(p) = 300 - 20p$. Neste mercado existem 20 firmas no curto prazo, cada uma com função custo dada por $c_j(q_j) = q_j^2 + 10$.

a) Calcule o preço e a quantidade de equilíbrios neste mercado.

S: O custo marginal da firma j é $c_j'(q_j) = 2q_j$. A curva de oferta desta firma é determinada pela curva de custo marginal, na região onde a curva de custo marginal é crescente e maior do que o custo variável médio, igual a $CVMe_j(q_j) = q_j + 10/q_j$. Logo, $CMg_j(q_j) \geq CVMe_j(q_j)$ resulta em $q_j \geq \sqrt{10} \approx 3{,}2$. A curva de oferta da firma j é dada então por $q_j = p/2$, para $p \geq 2\sqrt{10} \approx 6{,}4$. Como existem 20 firmas idênticas no mercado, a curva de oferta agregada é:

$$q^S(p) = \sum_{j=1}^{20} q_j(p) = \sum_{j=1}^{20} \frac{p}{2} = 10\,p$$

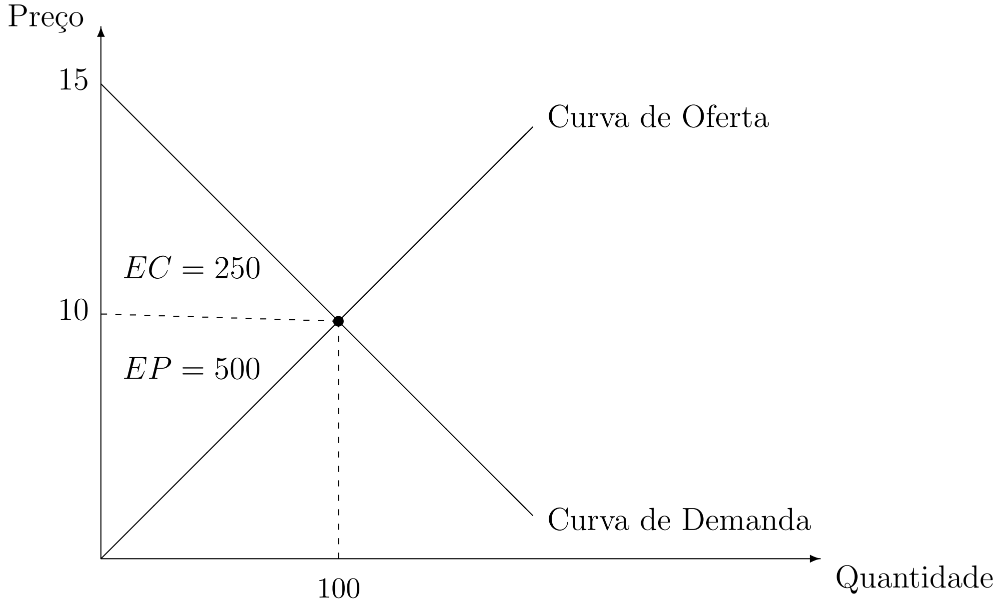
O equilíbrio é encontrado igualando a demanda de mercado à oferta de mercado:

$$q^D(p) = q^S(p) \quad \Rightarrow \quad 300 - 20p = 10p \quad \Rightarrow \quad p = 10$$

e a quantidade de equilíbrio é $q^* = 100$. A esse preço, cada firma oferta 5 unidades do bem, $q_j^S = p/2 = 5$.

b) Calcule os excedentes do consumidor e do produtor associados ao equilíbrio.

S: A figura abaixo ilustra o equilíbrio graficamente. O Excedente do Produtor EP é dado pela área entre o preço e a curva de oferta de mercado, igual a $EP = (10 \times 100)/2 = 500$. O Excedente do Consumidor EC é dado pela área entre a curva de demanda e o preço, igual a $EC = (5 \times 100)/2 = 250$.



c) Suponha que o governo imponha um imposto sobre a quantidade no valor $t = 6$. Quais os novos preços e quantidade de equilíbrio agora?

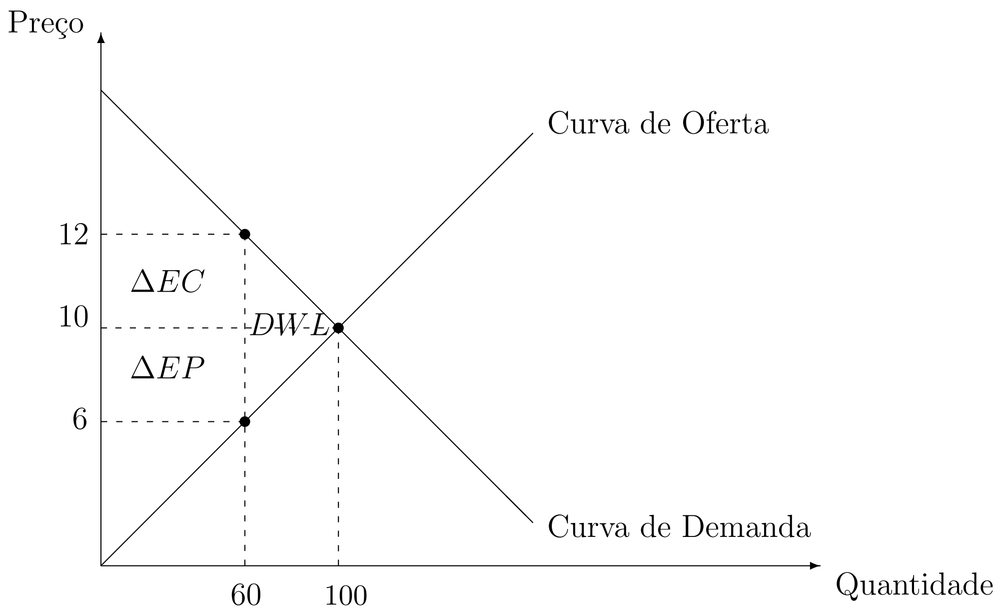
S: Vamos igualar demanda e oferta, levando em conta que agora temos que $p_S = p_D - t$:

$$q_S(p_D - t) = q_D(p_D) \quad \Rightarrow \quad 10(p_D - t) = 300 - 20p_D \quad \Rightarrow \quad p_D = 10 + \frac{t}{3}\,.$$

Se $t = 6$, então o novo preço para os consumidores é R\$ 12 e o preço recebido pelas firmas é R\$ 6. Já a quantidade de equilíbrio é $q^{**} = 60$. O gráfico abaixo ilustra essa situação. O preço pago pelos consumidores aumenta de R\$ 10 para R\$ 12, o preço recebido pelas firmas cai de R\$ 10 para R\$ 6. A quantidade transacionada do bem cai de 100 para 60 unidades.

d) Quanto o governo arrecada com o imposto descrito no item c)? Qual a perda de peso morto associada? Qual a incidência do imposto sobre cada lado do mercado (demanda e oferta)? Pode-se dizer que o imposto prejudica mais consumidores do que firmas?

S: O governo arrecada $t \times q^{**} = 6 \times 60 = 360$ reais. O peso morto DWL causado pelo imposto é $DWL = \left(t \times (q^* - q^{**})\right)/2 = (6 \times 40)/2 = 120$ reais. O valor de excedente do produtor transferido para o governo devido ao imposto é $\Delta EP = 4 \times 60 = 240$ reais. Já o valor de excedente do consumidor transferido para o governo devido ao imposto é $\Delta EC = (2 \times 60) = 120$ reais. Logo, os consumidores arcam com $120/360 = 1/3$ do ônus do imposto. Podemos dizer que os consumidores são proporcionalmente menos afetados do que as firmas com este imposto, no curto prazo.



e) Suponha agora o mercado sem imposto. No longo prazo, o número de firmas no mercado irá aumentar, diminuir ou permanecer o mesmo? No longo prazo, qual a incidência de um imposto sobre um mercado competitivo, usando esta análise de equilíbrio parcial? Justifique sua resposta sucintamente.

S: Usando a solução encontrada no item a) acima, temos que cada firma oferta $q_j = p/2 =$ 5 unidades do bem. O lucro de cada firma é $\pi^j = p \times q_j - c(q_j) = 10 \times 5 - (5^2 + 10) = 15$. Como cada firma tem lucro positivo, novas firmas entrarão neste mercado no longo prazo. Como o lucro de longo prazo é zero e a oferta de longo prazo é perfeitamente elástica, a incidência de um imposto sobre a quantidade recai toda sobre os consumidores, no longo prazo.

20.10) Considere o mercado de anchovas no Brasil, caracterizado pelas curvas de oferta $p = -4 + q^s$ e de demanda $p = 25 - 2q^d$, onde o preço está cotado em dólar. O governo brasileiro analisa sua política de abertura do mercado ao comércio exterior.

a) Se o preço internacional de anchovas for R$ 3, calcule a quantidade importada pelo Brasil, na ausência de barreiras às importações.

S: Se o preço internacional for $ 3 e não existem barreiras às importações, então o preço nacional será $ 3. Logo, serão demandadas $3 = 25 - 2q^d \Rightarrow q^d = 11$ unidades de anchovas. A produção nacional será $3 = -4 + q^s \Rightarrow q^s = 7$. Portanto, 4 unidades são importadas.

b) Suponha que o governo imponha uma tarifa sobre as importações no valor de R$ 1 por unidade importada. Qual o efeito dessa tarifa sobre o preço e a quantidade de equilíbrio?

S: Neste caso, o novo preço passa a ser $ 4. Logo, serão demandadas $4 = 25 - 2q^d \Rightarrow q^d =$ 10,5 unidades de anchovas. A produção nacional será $4 = -4 + q^s \Rightarrow q^s = 8$. Portanto 2,5 unidades são importadas. O preço de equilíbrio aumenta e a quantidade de equilíbrio cai.

c) Calcule o efeito de uma imposição de uma quota de importação de três unidades sobre este mercado. Como essa política se compara com a política de tarifação descrita no item anterior?

S: Neste caso, apenas 3 unidades podem ser importadas. Podemos encontrar o preço de equilíbrio fazendo $q^d = q_s + 3$, ou seja, $25/2 - p/2 = 4 + p + 3 \;\Rightarrow\; p = 11/3 \approx 3{,}67$. A quantidade demandada é $q^d = 32/3 \approx 10{,}67$ e a quantidade ofertada pela indústria nacional é $q^s = 23/3 \approx 7{,}67$. Logo essa política, comparada à do item anterior, reduz o preço, aumenta a demanda e reduz a produção nacional.

d) Calcule as variações no excedente do produtor (ΔEP) e no excedente do consumidor (ΔEC) no Brasil causada pela tarifa sobre as importações descrita no item b).

S: O EC cai em 10,75 e o EP aumenta em 7,5.

20.11) Suponha um mercado que possui 20 consumidores do bem x. Metade dos consumidores possui utilidade $u(x,y) = x^{0,5}y^{0,5}$ e a outra metade possui utilidade $u(x,y) = x^{0,25}y^{0,75}$. Todos os consumidores possuem a mesma renda, de R$ 10 (para cada consumidor). A curva de oferta de mercado para o bem x é $q_S(p_x) = 75p_x$.

a) Encontre a demanda de mercado e derive o preço e a quantidade de equilíbrio (se você sabe resolver o problema de maximização de utilidade de uma Cobb-Douglas bem, não é necessário derivar as demandas, basta lembrar que o formato delas).

S: A demanda por x do primeiro tipo de indivíduo é $x = m/2p_x = 5/p_x$. A demanda por x do segundo tipo de indivíduo é $x = m/4p_x = 2{,}5/p_x$. Somando todas as demandas indivíduais por x, encontramos a demanda de mercado de x:

$$q_D(p_x) = \sum_{i=1}^{10} \frac{5}{p_x} + \sum_{i=1}^{10} \frac{2{,}5}{p_x} = \frac{50}{p_x} + \frac{25}{p_x} = \frac{75}{p_x}$$

Logo, o equilíbrio de mercado é:

$$q_S(p_x) = q_D(p_x) \quad \Rightarrow \quad 75p_x = \frac{75}{p_x} \quad \Rightarrow \quad p_x = 1$$

Logo, a quantidade de equilíbrio de mercado é 75 unidades do bem x.

b) Suponha agora que todos esses indivíduos são aprovados no concurso público dos correios e passem a ganhar R$ 1.000. Qual será o novo equilíbrio de mercado? Ilustre graficamente essa mudança. Esse fato corresponde a que tipo de choque?

S: Nesse caso, é fácil ver que a demanda de mercado pelo bem x se torna $\bar{q}_D(p_x) = 7500/p_x$. O novo equilíbrio de mercado é:

$$q_S(p_x) = \bar{q}_D(p_x) \quad \Rightarrow \quad 75p_x = \frac{7500}{p_x} \quad \Rightarrow \quad p_x = 10$$

A nova quantidade de equilíbrio é $75 \times 10 = 750$. Esse fato consiste em um choque de demanda positivo.

c) Dada a nova situação de renda dos consumidores, o governo resolve impor um *preço-teto* no mercado do bem x e fixa $p_x = 5$. Qual o novo equilíbrio de mercado? Qual é o excesso de demanda, caso exista?

S: Agora o bem x não pode ser vendido a um preço maior do que R$ 5. Para esse preço, a demanda será $q_D(5) = 7500/5 = 1500$ e a oferta será $q_S(15) = 75 \times 5 = 375$. Logo, existe um excesso de demanda de $1.500 - 375 = 1.125$ unidades. O novo equilíbrio de mercado é $q^* = 375$.

d) Agora suponha que ocorre uma mudança de governo e o novo ministro da economia resolve incentivar a indústria nacional impondo um *preço mínimo* $p_x = 15$. Qualquer excesso de oferta que ocorrer, o governo irá adquirir e formar estoques. Qual o equilíbrio de mercado agora? Qual o excesso de oferta, caso exista? Qual o gasto do governo com essa política?

S: Agora o bem x não pode ser vendido a um preço menor do que 15. Para esse preço, a demanda será $q_D(15) = 7500/15 = 500$ e a oferta será $q_S(15) = 75 \times 15 = 1.125$. Logo, existe um excesso de oferta de $1.125 - 500 = 625$ unidades. O governo irá adquirir 625 unidades e o gasto com essa política, denotado por G e assumindo que o preço pago pelo governo é 15, é $G = 15 \times 625 = \text{R\$ } 9.375,00$.

20.12) Suponha que a oferta de um bem é $Q_S = 120 + 240p$ e que a demanda desse bem é $Q_D = 480 - 120p$. Responda os itens abaixo.

a) Determine o preço, a quantidade e os excedentes do consumidor e do produtor de equilíbrios.

S: O equilíbrio é determinado igualando a oferta à demanda: $Q_D = Q_S$. Para as funções dadas, temos que $p^* = 1$ e $Q^* = 360$.

b) Suponha que o governo decida cobrar um imposto de R$ 0,50 por unidade do bem vendido. Determine os novos preços, a quantidade de equilíbrio e o peso morto do imposto.

S: Agora temos que $p_D = p_S + 0{,}5$, ou seja, existem dois preços de equilíbrio: um pago pelos consumidores e outro recebido pelas firmas. Como $Q_D = Q_D(p_D)$ e $Q_S = Q_S(p_S)$, podemos encontrar primeiro um dos preços de equilíbrio fazendo $Q_D(p_D) = Q_S(p_S)$, com $p_D = p_S + 0{,}5$, ou seja, $Q_D(p_S + 0{,}5) = Q_S(p_S)$. Neste caso, obtemos $480 - 120(p_S + 0,5) = 120 + 240p_S$. Resolvendo, obtemos $p_S = 5/6$, $p_D = 5/6 + 0,5 = 8/6$ e $Q^* = 320$.

c) Considere a situação original e suponha agora que o governo estabeleça uma política de **preço máximo** p_{max}, ou seja, o preço máximo que pode ser cobrado no mercado é $p_{max} = 0{,}75 = 3/4$. Descreva o que ocorre com o equilíbrio neste caso.

S: Como o preço máximo fixado é menor do que o preço de equilíbrio encontrado na solução do item a), ele será de fato o preço vigente no mercado. Neste caso, a oferta determina a quantidade de equilíbrio, já que para este preço, as firmas ofertarão menos do que os consumidores gostariam de adquirir do bem. Temos que: $Q_S(p_{max}) = 120 + 240 \times 0{,}75 = 300$ e $Q_D(p_{max}) = 480 - 120 \times 0{,}75 = 390$, logo existe um excesso de demanda de 90 unidades do bem.

d) Novamente considere a situação original e suponha agora que o governo estabeleça uma política de **preço mínimo** p_{min}, ou seja, o preço mínimo que pode ser cobrado no mercado é $p_{min} = 1{,}5 = 3/2$. Descreva o que ocorre com o equilíbrio neste caso. Calcule o custo do governo com esta política.

S: Como o preço mínimo fixado é maior do que o preço de equilíbrio encontrado na solução do item a), ele será de fato o preço vigente no mercado. Neste caso, a demanda determina a quantidade de equilíbrio, já que para este preço, as firmas ofertarão mais do que os consumidores gostariam de adquirir do bem. Temos que: $Q_S(p_{max}) = 120 + 240 \times 1{,}5 = 480$ e $Q_D(p_{max}) = 480 - 120 \times 1{,}5 = 300$, logo existe um excesso de oferta de 180 unidades do bem. Essas unidades devem ser adquiridas pelo governo que, ao pagar o preço de 1,5 por unidade, desembolsa $180 \times 1,5 = 270$. Portanto, o custo para o governo dessa política é R$ 270.