MICROECONOMIA 1

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Notas de Aula 15 – Graduação

Prof. José Guilherme de Lara Resende

PARTE II – TEORIA DA FIRMA

Na primeira parte do curso, analisamos o comportamento dos consumidores. Desse comportamento, obtivemos a demanda por um bem, quase sempre decrescente no seu preço. Vamos analisar o comportamento das firmas nessa parte do curso. Desse comportamento, vamos obter a oferta de um bem, que será crescente no seu preço. O comportamento desses dois agentes pode levar a uma situação de equilíbrio no mercado do bem analisado, onde a quantidade demandada iguala a quantidade produzida, por meio de ajustes no preço do bem.

Nesta nota de aula, vamos descrever algumas formas como a microeconomia modela a firma. Uma firma é uma entidade que transforma insumos em produtos, por meio de uma *tecnologia de produção*. A Figura 1 abaixo ilustra esse processo.

Figura 1: Modelando a Firma

A tecnologia descreve a limitação técnica da firma, definida por leis da natureza e pelo conhecimento existente. A tecnologia de uma firma descreve então a sua capacidade de produzir bens usando *insumos de produção* (também chamados *fatores de produção*). Por exemplo, uma padaria consegue produzir 1000 pães por dia se usar um espaço de 30m^2, dois padeiros, três ajudantes, farinha, ovos, etc.

Note que medimos insumos e produtos como fluxos no tempo. No exemplo acima, o período de tempo considerado foi de um dia. Podemos considerar períodos mais longos, como um mês ou um ano. O importante é que todos os insumos e produtos sejam calculados para o mesmo período de tempo.

Normalmente, agregamos insumos de produção em alguns poucos fatores, como *trabalho*, *capital* e *terra*. Capital, por exemplo, se refere a um insumo agregado, que inclui tanto capital financeiro (depósitos em um banco que a firma tem, etc) como capital físico (máquinas, tratores, ferramentas, etc).

Veremos duas formas de modelar a tecnologia de uma firma: o conjunto de possibilidade de produção e a função de produção. As duas formas são relacionadas, conforme explicaremos.

1 Conjunto de Possibilidade de Produção

O modo mais geral de representar a tecnologia de uma firma é por meio do *conjunto de possibilidade produção* (CPP), definido como o conjunto de todas as combinações de insumos e produtos disponíveis para a firma. Vamos denotar o CPP de uma firma por $Y \subset \mathbb{R}^m$, onde m é a quantidade total de bens e serviços considerados, que podem ser tanto usados como insumos ou serem produzidos pela firma. Um vetor $\mathbf{z} \in Y$ é chamado *plano de produção.* A convenção usada é de que se o bem i for um *insumo líquido* da firma (isto é, a firma utiliza mais desse bem na produção do que é capaz de produzir ou caso não seja capaz de produzi-lo), a coordenada i de $\mathbf{z}$ será negativa ($z_i < 0$). Se o bem i for um *produto líquido* da firma (isto é, a firma produz mais desse bem do que o consome no processo produtivo), então a coordenada i de $\mathbf{z}$ será positiva ($z_i > 0$).

Logo, o conjunto de possibilidade de produção de uma firma é composto por listas de bens que descrevem o que pode ser produzido (coordenadas positivas) e o que é necessário para essa produção (coordenadas negativas). A figura abaixo ilustra um exemplo desse conjunto para o caso de apenas um insumo (ou fator de produção), denotado por z_1, e um *produto* (ou *bem final*), denotado por z_2.

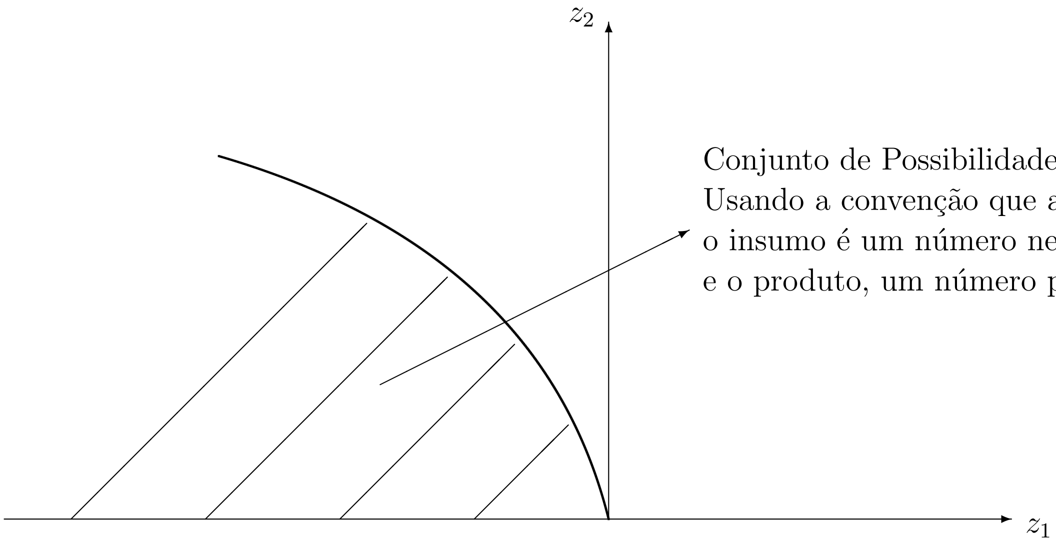

Figura 2: Exemplo de CPP

Existem diversas hipóteses que podem ser feitas a respeito do conjunto de possibilidade de produção. Cada hipótese está associada a uma restrição diferente sobre a tecnologia da firma. Certas hipóteses podem ser válidas para determinadas tecnologias, mas não para outras. Listamos e interpretamos abaixo o significado de algumas dessas hipóteses:

1. $Y \neq \emptyset$: existe algum plano de produção que a firma pode utilizar. Logo, alguma coisa é possível de ser feita.

2. $\mathbf{0} \in Y$: possibilidade de inação, a firma pode decidir não usar nenhum insumo e não produzir nada. De outro modo, sem nada não se produz nada.

3. $Y \cap \mathbb{R}^m_+ = \{\mathbf{0}\}$: impossibilidade de produção sem o uso de insumos. Portanto, para produzir alguma coisa, é necessário usar algum ou alguns insumos.

4. Se $\mathbf{z} \in Y$, então para todo $\hat{\mathbf{z}} \leq \mathbf{z}$, $\hat{\mathbf{z}} \in Y$ (ou $Y \setminus \mathbb{R}^m_+ \subset Y$): se uma dada quantidade de insumos é suficiente para produzir uma determinada quantidade de bens finais, então uma quantidade maior desses insumos é capaz de produzir essa mesma quantidade de bens finais. Essa hipótese é válida caso a firma possa descartar insumos sem custo algum. Por isso, ela tem o nome de *hipótese de descarte livre* (no inglês, "*free-disposal*").

5. Se $\mathbf{z} \in Y$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, então $-\mathbf{z} \notin Y$ (irreversibilidade): é impossível reverter a produção. Uma vez produzido o bem final, é impossível "desmontá-lo" e obter todos os insumos que foram usados na sua fabricação. Isso é razoável, já que um insumo essencial na produção de qualquer bem é trabalho.

6. $Y + Y \subset Y$ (aditividade): Se $\mathbf{z}$ é um plano de produção, então $k\mathbf{z}$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$, também é um plano de produção. Logo, é possível *replicar* planos de produção.

7. Se $\mathbf{z} \in Y$, então $t\mathbf{z} \in Y$, para todo $t \geq 0$: essa hipótese é mais forte do que a anterior: agora existe a possibilidade de replicar a produção, *sem problemas de divisibilidade*. Logo, se $\mathbf{z}$ é um plano de produção, então 0,5 $\mathbf{z}$ também é um plano de produção. Nesse caso, dizemos que a tecnologia apresenta *retornos constantes de escala.*

8. Y é um conjunto convexo (se $\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}'$ pertencem a Y, então $\alpha\mathbf{z} + (1 - \alpha)\mathbf{z}'$ pertence a Y, para todo $\alpha \in [0, 1]$): qualquer combinação linear de dois planos produção é um plano de produção. Essa hipótese exclui a possibilidade de que a tecnologia apresente retornos crescentes de escala (um conceito que veremos mais à frente).

9. Y é um cone convexo (se $\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}'$ pertencem a Y, então $\alpha\mathbf{z} + \beta\mathbf{z}'$ pertence a Y, para todo $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$): essa hipótese garante que a tecnologia apresenta retornos constantes de escala e é um conjunto convexo.

Outras hipóteses também podem ser feitas, de modo que descrevam propriedades que o conjunto de possibilidade de produção satisfaz, caracterizando, desse modo, a tecnologia da firma. Como a partir de agora vamos lidar com funções de produção, discutiremos algumas dessas restrições sobre a tecnologia no contexto de funções de produção.

2 Função de Produção

Se a firma produz apenas um bem, a fronteira do conjunto de possibilidade de produção descreve o nível de produção tecnologicamente eficiente, em que não ocorrem desperdícios de insumos. Logo, ela diz o máximo que pode ser produzido, dada a quantidade de insumos considerada. Essa fronteira pode ser descrita por uma função, chamada *função de produção.* Portanto, a *função de produção* relaciona a quantidade máxima do bem final que a firma pode obter, dados os insumos utilizados. Vamos analisar então apenas firmas que produzem um único bem ou serviço (firmas que produzem mais de um produto de modo integrado exigem uma modelagem diferente).

Suponha que a firma utiliza n insumos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como agora não há possibilidade de confundirmos insumos com produtos, vamos abandonar a notação de representar insumos por números negativos. A função de produção, representada por:

$$q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

diz a *quantidade máxima* q do bem final que a firma consegue produzir utilizando os insumos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Logo, a função de produção é um conceito cardinal, onde $f(x_1,\ldots,x_n) = q$ diz que exatamente q unidades do bem final são produzidas com $x_1,\ldots,x_n$ unidades utilizadas dos n insumos. No caso de dois bens, é comum denominar um dos insumos *trabalho*, denotado por L, e o outro, *capital*, denotado por K. Para simplificar a notação e facilitar a análise gráfica, vamos voltar a considerar o caso de apenas dois insumos.

Uma *isoquanta* descreve essas combinações de insumos que produzem a mesma quantidade do bem final. Isoquanta é um conceito da teoria da firma similar ao conceito de curva de indiferença, visto na teoria do consumidor. Existe, porém, *uma diferença fundamental entre os dois conceitos: enquanto o nível de utilidade associado à curva de indiferença não tem significado econômico, o valor associado à isoquanta tem significado preciso: é a quantidade do bem final produzido.* Uma isoquanta pode ser definida, em termos da função de produção, como:

$$I(q) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid f(x_1,x_2) = q\}$$

Já um *mapa de isoquantas* é um figura com diversas isoquantas diferentes, mostrando a direção em que a quantidade produzida aumenta.

Hipóteses sobre a função de produção são hipóteses sobre a tecnologia da firma. Podemos assumir (ou não) que a função de produção satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(0,0) = 0$: nada produz nada;

2. Contínua: uma mudança pequena nos insumos não altera muito a quantidade produzida;

3. Crescente (ou estritamente crescente): $f_i(x_1,x_2) \geq 0$ (ou $f_i(x_1,x_2) > 0$), para todo insumo i, onde $f_i = \partial f/\partial x_i$: se aumentarmos o uso de um insumo, a produção aumenta ou permanece inalterada (no caso de f estritamente crescente, se aumentarmos o uso de um insumo, a produção aumenta);

4. Quasecôncava (estritamente quasecôncava): se as quantidades de insumos $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ e $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ produzem a quantidade q de produto, então a média ponderada dessas quantidades, denotada por $\mathbf{x}^t = t\mathbf{x} + (1-t)\bar{\mathbf{x}}$, para $t \in [0,1]$, produzirá uma quantidade maior ou igual do que q unidades do produto:

   $$f(\mathbf{x}^t) = f(t\mathbf{x} + (1-t)\bar{\mathbf{x}}) \geq \min\{f(\mathbf{x}), f(\bar{\mathbf{x}})\}.$$

   Já para uma função de produção *estritamente quasecôncava*, temos que:

   $$f(\mathbf{x}^t) = f(t\mathbf{x} + (1-t)\bar{\mathbf{x}}) > \min\{f(\mathbf{x}), f(\bar{\mathbf{x}})\},$$

   para todo $t \in (0,1)$ e todo $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$.

O primeiro item diz que nada não produz nada (equivale à propriedade $\mathbf{0} \in Y$ para o CPP). O segundo item diz que mudanças pequenas nos insumos mudam pouco o nível de produção. Além disso, vamos supor também que a função de produção possui derivadas primeiras e segundas contínuas em todos os pontos. O terceiro item diz que usar mais de um insumo produz mais ou a mesma quantidade do bem final e, portanto, as isoquantas geradas por essa função de produção terão inclinação não-positiva (no caso f estritamente crescente, produz mais do bem final e as isoquantas terão inclinação negativa). Observe que se vale a propriedade de descarte livre, na qual a firma pode descartar qualquer insumo sem nenhum custo, então devemos ter que $f_i(x_1,x_2) \geq 0$, para todo insumo.

A intuição do último item é similar à intuição da propriedade de quaseconcavidade e quaseconcavidade estrita para funções de utilidade. Se a função de produção for quasecôncava, então os dois insumos serão conjuntamente importantes na produção. Graficamente, quaseconcavidade estrita implica isoquantas com formato convexo com relação à origem, como ilustra a Figura 3 abaixo. Logo, combinações de tecnologias diferentes, que produzem a mesma quantidade, produzem uma quantidade maior do bem final. Na Figura 3, observe que as duas cestas de insumos *capital* e *trabalho*, (L_1, K_1) e (L_2, K_2), produzem a mesma quantidade e qualquer combinação dessas cestas de insumos produzem uma quantidade maior do bem final.

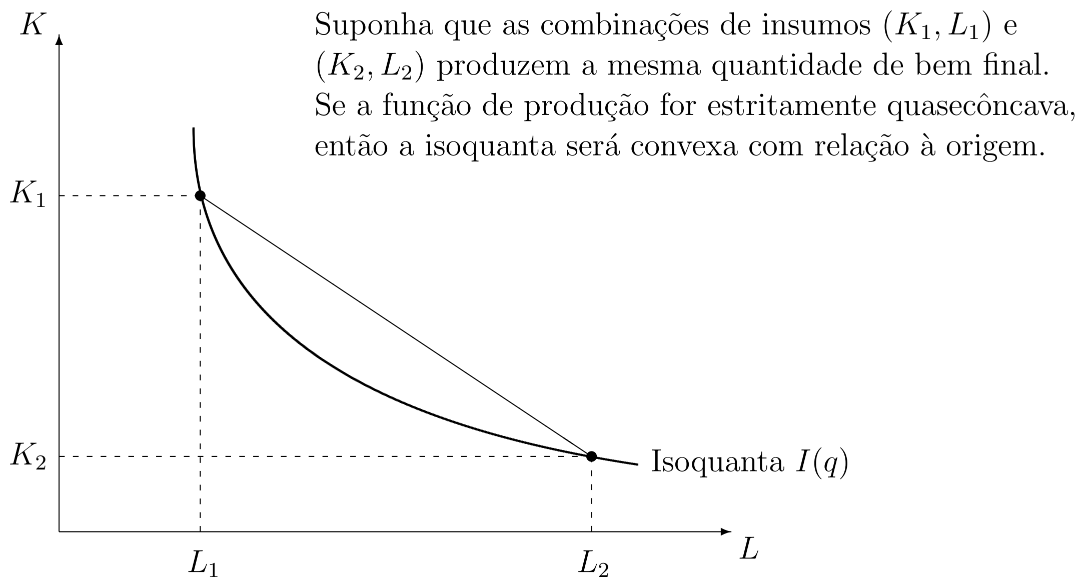

Figura 3: Quaseconcavidade Estrita

2.1 Produto Marginal e Produto Médio

Se derivarmos a função de produção com relação a algum dos insumos, determinamos o *produto marginal desse insumo*:

$$PMg_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = f_i(\mathbf{x}), \qquad i = 1, \ldots, n$$

O produto marginal do trabalho, por exemplo, mede o quanto a produção aumentará se aumentarmos (um pouco) a quantidade de trabalho usada, mantendo a quantidade dos outros insumos fixa. Logo, se $PMg_L(\bar{\mathbf{x}}) = 2$, então dada a quantidade de insumos $\bar{\mathbf{x}}$ utilizada, se aumentarmos L em uma unidade, a produção aumentará em (aproximadamente) 2 unidades.

Se a propriedade de descarte livre dos insumos for válida, então a firma poderá dispor de insumos sem incorrer custo algum. Logo, *a produtividade marginal de um insumo será sempre não-negativa* ($PMg_i(\mathbf{x}) \geq 0$, para todo insumo i). Nesse caso, se aumentarmos o uso do insumo, o nível de produção não diminuirá.

A **lei do produto marginal decrescente** (ou *lei do rendimento marginal decrescente*) diz que o produto marginal de qualquer insumo decresce à medida que usamos mais desse insumo, *mantendo o uso dos outros insumos inalterado*. Ou seja, se a firma mantém a quantidade de capital fixa e vai acrescentando trabalhadores na sua linha de produção, cada novo trabalhador adicionado trará um acréscimo na produção igual ou menor ao trabalhador que foi empregado antes dele.

Essa propriedade é razoável e está ligada à idéia de *exaustão dos fatores*. Mesmo que para certos intervalos de produção ou uso de insumos ocorra que o aumento de um insumo, mantendo os outros fixos, aumente a produção de maneira mais que proporcional, é de se esperar que se a firma continuar a aumentar a quantidade deste insumo, sem aumentar as quantidades dos outros insumos, chega uma hora que esse acréscimo do insumo passa a trazer acréscimos cada vez menores na produção.

Se a lei do produto marginal decrescente for válida para qualquer nível de uso dos insumos, teremos que:

$$f_{ii}(\mathbf{x}) = \frac{\partial PMg_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} \leq 0,$$

para todo insumo i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

O *produto médio do insumo* i é definido como:

$$PMe_i(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{x_i}, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Se $PMe_L(\hat{\mathbf{x}}) = 5$, então, quando for usada a quantidade $\hat{\mathbf{x}}$ de insumos, para cada 5 unidades produzidas de q, terá sido utilizada uma unidade de trabalho L. Logo, o produto médio de um insumo diz quantas unidades são produzidas para cada unidade usada do insumo, na média.

Existe uma relação entre o produto médio $PMe_i(\mathbf{x})$ e o produto marginal $PMg_i(\mathbf{x})$ de um insumo i. Se derivarmos o produto médio com relação à quantidade usada x_i do insumo i obtemos:

$$\frac{\partial PMe_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial (f(\mathbf{x})/x_i)}{\partial x_i} = \frac{x_i PMg_i(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{x_i^2}$$

Note que esta derivada sera maior, igual ou menor do que zero se:

$$\frac{\partial PMe_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} \gtreqless 0 \quad \Rightarrow \quad PMg_i(\mathbf{x}) \gtreqless PMe_i(\mathbf{x})\,,$$

já que $x_i^2 > 0$. Então se o produto médio de um insumo for crescente, o produto marginal será maior do o produto médio. Já se o produto médio for decrescente, o produto marginal será menor do que ele. Finalmente, no ponto de máximo do produto médio, o produto médio e o produto marginal serão iguais.

2.2 Taxa Técnica de Substituição

A *taxa técnica de substituição* (TTS) ou *taxa marginal de substituição técnica* (TMST) entre dois insumos mede o quanto a firma deve abrir mão de um desses insumos e acrescentar do outro insumo, de modo a continuar produzindo a mesma quantidade do bem final. A TTS entre os insumos i e j pode ser obtida do seguinte modo. Suponha que alteramos os insumos i e j em dx_i e dx_j, mantendo o nível de produção inalterado ($dq = 0$). Supondo apenas dois insumos, a fórmula da diferencial total diz que:

$$dq = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$$

Como a alteração nos insumos 1 e 2 é feita sem alterar o nível de produção ($dq = 0$), obtemos:

$$TTS_{12}(x_1, x_2) = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dq=0} = -\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}, \quad \text{onde} \;\; f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \;\; i = 1, 2\,.$$

A TTS é o análogo para a teoria da firma da taxa marginal de substituição da teoria do consumidor. Ela mede a inclinação da isoquanta para uma determinada quantidade de insumos considerada. Se f for estritamente crescente, então as isoquantas serão negativamente inclinadas e a TTS será negativa. Além disso, se a TTS for decrescente em valor absoluto, então as isoquantas serão convexas com relação à origem: à medida que percorremos uma isoquanta qualquer , a TTS decrescerá em valor absoluto. Isso ocorrerá quando a função de produção for estritamente quasecôncava. Se f for estritamente quasecôncava, então as isoquantas serão convexas com relação à origem e a TTS será decrescente em valor absoluto ao longo de uma determinada isoquanta (ver Figura 3).

3 Exemplos

Vamos ver alguns exemplos de funções de produção. Observe que as funções listadas abaixo têm a mesma forma funcional das funções de utilidade que vimos na teoria do consumidor.

1) Proporções Fixas (tecnologia de Leontief). Uma tecnologia de *proporções fixas* exige que os fatores de produção sejam usados em proporções fixas para se produzir uma certa quantidade do bem final *sem desperdícios de insumos*. Portanto, *não existe nenhum grau de substituição entre os insumos*: a firma não pode diminuir o uso de um insumo e aumentar o uso de outro, mantendo o nível de produção constante. A função de produção dessa tecnologia no caso de dois insumos pode ser representada por:

$$q = g(\min\{ax_1, bx_2\}),$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente e a e b são números positivos.

As isoquantas dessa função de produção têm a mesma forma das curvas de indiferença de bens complementares perfeitos. Para o caso de dois insumos, a Figura 4 abaixo ilustra as isoquantas geradas por essa tecnologia.

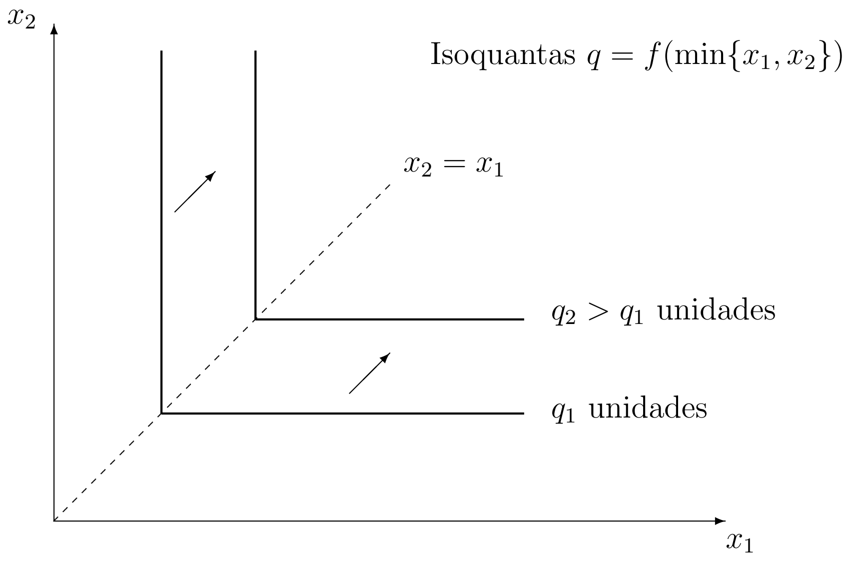

Figura 4: Tecnologia de Proporções Fixas

2) Insumos Substitutos Perfeitos (Tecnologa Linear). Nesse tipo de tecnologia, os fatores de produção podem ser perfeitamente substituídos um pelo outro, qualquer que seja o nível de produção considerado. Logo, a TTS será sempre constante, mostrando que o grau de substituição entre os insumos é sempre o mesmo, para toda cesta de insumos utilizada pela firma. A função de produção dessa tecnologia no caso de dois insumos pode ser representada por:

$$q = g(ax_1 + bx_2),$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente e a e b são números positivos.

As isoquantas dessa função de produção têm a mesma forma das curvas de indiferença de bens substitutos perfeitos. Para o caso de dois insumos, o mapa de isoquantas é ilustrado na Figura 5 abaixo.

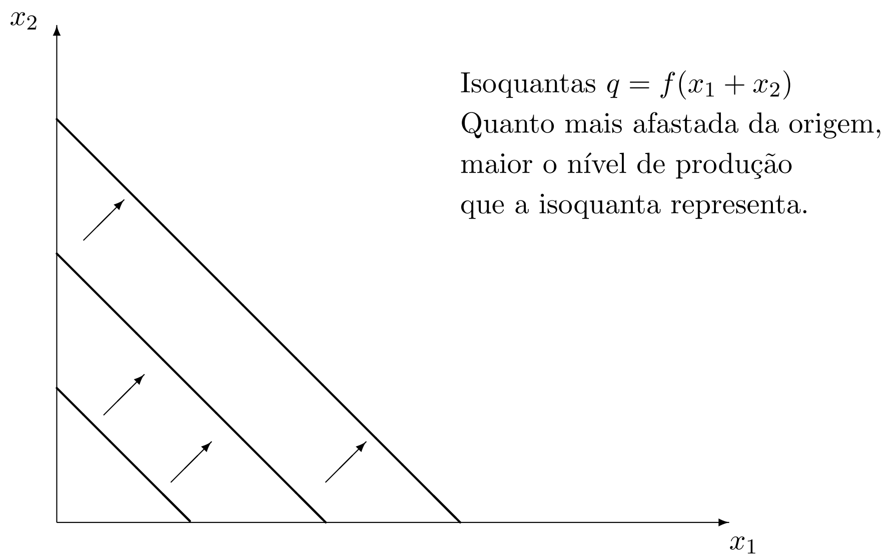

Figura 5: Tecnologia Linear

3) Cobb-Douglas. Nesse tipo de tecnologia, os fatores de produção podem ser substituídos um pelo outro, mas não de forma perfeita. Portanto, existe algum grau de substituição entre os fatores: a firma pode diminuir o uso de um insumo e aumentar o uso de outro, mantendo o nível de produção constante. A função de produção de Cobb-Douglas para o caso de dois insumos pode ser representada por:

$$q = g(Ax_1^\alpha x_2^\beta),$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente e A, α e β são números positivos. As isoquantas dessa função de produção são convexas com relação à origem, conforme a Figura 6 abaixo ilustra.

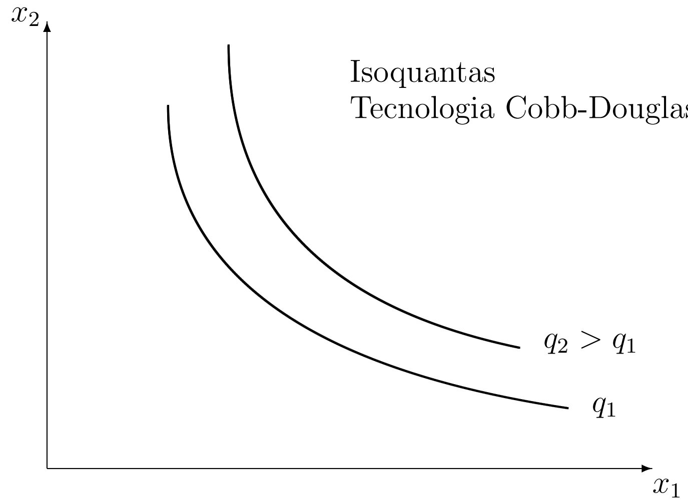

Figura 6: Tecnologia Cobb-Douglas

4 Elasticidade de Substituição

A TTS mede a inclinação de uma isoquanta. A *elasticidade de substituição* entre dois insumos é uma medida da *curvatura* de uma isoquanta. Para o caso de dois insumos, a elasticidade de substituição entre os insumos 1 e 2 é definida como:

$$\sigma_{12} = \frac{d\ln\left(x_2/x_1\right)}{d\ln\left(|TTS_{1,2}|\right)} = \frac{d\ln\left(x_2/x_1\right)}{d\ln\left(f_1(x_1,x_2)/f_2(x_1,x_2)\right)} = \frac{\left(\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}\right) d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right) d\left(\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}\right)}.$$

Portanto, a elasticidade de substituição diz o quanto a razão dos insumos utilizada se alterá em termos percentuais quando alteramos a taxa técnica de substituição (em valor absoluto) dos insumos. Vamos calcular calcular a elasticidade de substituição para as funções de produção Cobb-Douglas e CES.

Exemplo 1: Função de Produção Cobb-Douglas. A elasticidade de substituição entre os dois insumos de uma função de produção Cobb-Douglas é igual a um. Vamos derivar esse resultado. Primeiro observe que os produtos marginais da função Cobb-Douglas $f(x_1,x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$ são:

$$f_1(x_1,x_2) = \alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^\beta$$
$$f_2(x_1,x_2) = \beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}$$

Portanto,

$$|TTS_{12}(x_1,x_2)| = \frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \ln\left(\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}\right) - \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Essa última igualdade implica que:

$$\sigma_{12}(x_1,x_2) = \frac{d\ln\left(x_2/x_1\right)}{d\ln\left(|TTS_{12}(x_1,x_2)|\right)} = \frac{d\ln\left(x_2/x_1\right)}{d\ln\left(f_1(x_1,x_2)/f_2(x_1,x_2)\right)} = 1$$

Podemos encontrar esse mesmo valor sem log-linearizarmos a relação entre TTS_{12} e x_2/x_1:

$$\sigma_{12} = \frac{\left(\frac{f_1}{f_2}\right) d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right) d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)} = \left(\frac{\alpha A x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{\beta A x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}}\right)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\frac{\beta}{\alpha} = 1\,.$$

Exemplo 2: Função de Produção CES. Vamos agora analisar a função de produção CES (*elasticidade de substituição constante*). Uma representação dessa função de produção para o caso de dois bens é:

$$f(x_1,x_2) = A\left(\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}\right)^{\frac{\gamma}{\rho}}\,, \qquad 0 \neq \rho < 1,\ A, \alpha, \beta, \gamma > 0\,.$$

Vamos verificar que essa função possui uma elasticidade de substituição constante. Os produtos marginais dos insumos 1 e 2 são:

$$f_1(x_1,x_2) = (\gamma/\rho)A\left(\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}\right)^{\frac{\gamma}{\rho}-1}\rho\alpha x_1^{\rho-1}$$
$$f_2(x_1,x_2) = (\gamma/\rho)A\left(\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}\right)^{\frac{\gamma}{\rho}-1}\rho\beta x_2^{\rho-1}$$

Portanto,

$$|TTS_{12}(x_1,x_2)| = \frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}$$

Tirando o logaritmo da expressão acima e isolando $\ln(x_2/x_1)$, obtemos:

$$\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{1}{1-\rho}\ln\left(\frac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}\right) - \frac{1}{1-\rho}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Então a elasticidade de substituição associada a esta tecnologia é:

$$\sigma_{12} = \frac{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\ln\left(|TTS_{12}|\right)} = \frac{1}{1-\rho}\,.$$

É possível mostrar que as seguintes funções são casos especiais da CES:

$$\lim_{\rho\to-\infty}\left(\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}\,, \qquad \lim_{\rho\to-\infty}\sigma_{12} = 0$$
$$\lim_{\rho\to 0}\left(\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\,, \qquad \lim_{\rho\to 0}\sigma_{12} = 1$$
$$\lim_{\rho\to 1}\left(\alpha x_1^{\rho} + \beta x_2^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} = \alpha x_1 + \beta x_2\,, \qquad \lim_{\rho\to 1}\sigma_{12} = +\infty$$

Portanto, a função de produção CES engloba diversos graus de substituição entre os insumos. Os gráficos na Figura 7 abaixo ilustram diferentes tipos de isoquantas geradas pela função de produção CES.

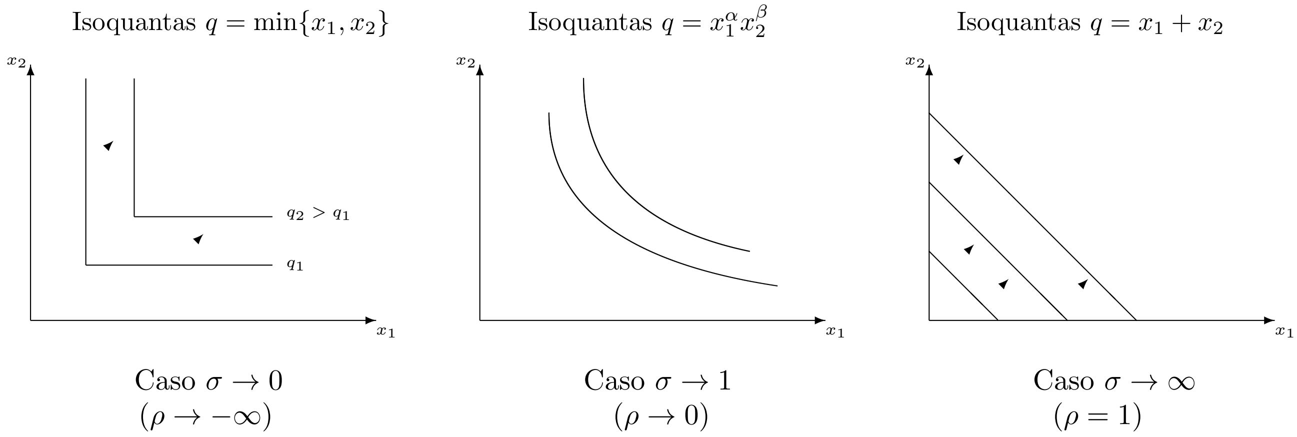

Figura 7: Casos Especiais da CES

Observe que a função de produção CES definida acima, para $\gamma = 1$, é *homogênea de grau um* (ou *homogênea linear*), ou seja, vale que:

$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2),$$

para todo $t \geq 0$. Essa propriedade significa que se aumentarmos a escala de produção (ou seja, o uso dos insumos (x_1, x_2), em uma determinada proporção t, então a produção aumenta na mesma proporção t. Nesse caso, dizemos que a tecnologia apresenta **retornos constantes de escala**. Para confirmar essa propriedade, basta notar que:

$$f(tx_1, tx_2) = A\left(\alpha(tx_1)^\rho + \beta(tx_2)^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = A\left(t^\rho \alpha x_1^\rho + t^\rho \beta x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = tA\left(\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} = tf(x_1, x_2)$$

A homogeneidade linear impõe uma estrutura adicional na função de produção e, portanto, na tecnologia da firma. Essa hipótese tem uma importância grande na teoria e em trabalhos empíricos. A função CES, apesar de gerar várias funções diferentes, e mesmo no caso geral em que $\gamma \neq 1,\ \gamma > 0$, impõe uma estrutura considerável sobre a tecnologia: a elasticidade de substituição é a mesma para qualquer nível de produção e qualquer combinação de uso de insumos.

Além disso, pode ser provado que se a função de produção for quasecôncava, a elasticidade de substituição será maior ou igual a zero. A quaseconcavidade da função de produção está ligada, portanto, à possibilidade de substituição do uso de insumos no processo produtivo.

5 Outros Conceitos

5.1 Retornos de Escala

Dizemos que a função de produção apresenta retornos constantes de escala (RCE), retornos crescentes de escala (RCrE) ou retornos decrescentes de escala (RDE) se a função de produção satisfaz a propriedade da coluna do meio da tabela abaixo, onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots x_n)$ denota o vetor de insumos considerado.

Tipo de Rendimentos de escala	Propriedade	Tipo da tecnologia
Constantes	$f(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}),\ t > 0,\ \forall\mathbf{x}$	replica
Decrescentes	$f(t\mathbf{x}) < tf(\mathbf{x}),\ t > 1,\ \forall\mathbf{x}$	algum fator fixo
Crescente	$f(t\mathbf{x}) > tf(\mathbf{x}),\ t > 1,\ \forall\mathbf{x}$	ganhos de escala

Retornos constantes de escala são uma hipótese natural para a firma no longo prazo. Se o padeiro do nosso exemplo anterior é capaz de produzir 1000 pães usando uma certa tecnologia, ou seja, uma certa combinação de fatores de produção (espaço físico, padeiros, ajudantes, máquinas, insumos, etc), então ele pode produzir dois mil pães se apenas replicar o que é feito na sua primeira padaria.

Retornos decrescentes de escala (ou deseconomias de escala) ocorrem usualmente quando algum ou alguns insumos estão fixos. Por exemplo, se não houver mais espaços para alugar, o nosso padeiro não poderá montar uma nova padaria e dobrar a sua produção replicando o que estava fazendo antes.

Retornos crescentes de escala (ou ganhos de escala ou economias de escala) ocorrem quando a tecnologia permite que haja ganhos de escala na produção. Se a Petrobrás decidir construir um oleoduto, ao dobrar os insumos utilizados, dobra-se o diâmetro do oleoduto. Isso significa que a Petrobrás poderá transportar mais do que o dobro de óleo.

Os retornos de escala determinam o tamanho ótimo das empresas que deveriam operar em um setor. Se existem *economias de escala* (ou seja, retornos crescentes de escala), as empresas devem ser grandes para poder aproveitar estas economias. Se existem *deseconomias de escala* (ou seja, retornos decrescentes de escala), é melhor ter várias empresas pequenas em uma indústria. Se existem rendimentos constantes de escala, podem coexistir empresas grandes e pequenas.

Se a tecnologia apresentar retornos constantes de escala, então a função de produção que representa essa tecnologia será homogênea linear. Se a função de produção for homogênea de grau k, ou seja,

$$f(tx_1, tx_2) = t^k f(x_1, x_2), \qquad \text{para todo } t > 0,$$

temos que se $k < 1$, a tecnologia apresenta retornos decrescentes de escala, e se $k > 1$, a tecnologia apresenta retornos crescentes de escala.

Observe que certas tecnologias podem ter retornos crescentes para um determinado nível de produção, retornos constantes para um outro nível de produção, e retornos decrescentes em uma terceira faixa de produção. Para lidarmos com essas situações, é possível definir um conceito *local* de retornos de escala (ver Exercício 3 abaixo).

5.2 Economias de Escopo

Existem economias de escopo quando uma empresa pode produzir dois produtos a um custo menor do que em duas empresas separadas.

As economias de escopo ocorrem quando existem sinergias entre as atividades de produção ou entre distintas etapas de um processo produtivo. Essas sinergias usualmente estão presentes quando dois bens são produzidos usando insumos em comum. Por exemplo, no processo produtivo da gasolina também se obtém outros produtos como óleo diesel, gás de cozinha, queresone, etc. Logicamente, não faz sentido produzir cada um desses bens separadamente, já que todos (e alguns outros) são obtidos pelo refino do petróleo.

Em outros casos, a economia de escopo pode não ser tão forte assim e determinados bens podem ser produzidos em firmas separadas, mesmo na presença de economias de escopo. Neste caso, existe uma justificativa para a *integração vertical* de empresas que produzem diferentes bens ou que operam diferentes etapas de um certo processo produtivo (por exemplo, uma produtora de papel também plantar eucaliptos, caso exista economia de escopo na produção desses dois bens, papel e eucalipto).

Também podem existir complementaridades no fornecimento de diferentes bens e serviços. Por exemplo, uma empresa de utilidade pública que forneça vários serviços (eletricidade e gás, por exemplo) pode economizar nos custos de medição e faturamento. Neste caso, existe uma economia de escopo em oferecer os dois serviços conjuntamente.

5.3 Curto Prazo e Longo Prazo

O curto prazo é o período de tempo onde alguns insumos que a firma usa estão fixos, ou seja, a quantidade desses insumos não pode ser modificada nesse período de tempo. Por exemplo, suponha que uma empresa aluga um galpão por um período de um ano. Se não for possível para a firma renegociar esse contrato, o galpão constitui um insumo fixo, para um prazo de tempo menor do que um ano, quando o contrato vence. O aluguel desse galpão é, portanto, um *custo fixo* da firma, se considerarmos, por exemplo, o período de um mês: a firma, mesmo que deixe de produzir, terá que honrar o pagamento do aluguel pelo prazo estipulado no contrato. Se a análise for feita tomando o período de um ano, então o aluguel do galpão passa a ser um *custo variável*, já que a firma pode renogociar o contrato firmado, decidindo alugar um galpão menor ou maior ou galpão nenhum.

O longo prazo é o período de tempo em que *todos* os fatores de produção são variáveis: a firma pode ajustar *todos* os seus fatores de produção da forma que desejar. Desse modo, no longo prazo a firma pode decidir fechar as portas e sair do mercado. Duas consequências importantes são: 1) nenhuma firma opera, no longo prazo, com prejuízo, e 2) todos os custos são variáveis no longo prazo.

Os conceitos de curto e longo prazo são abstratos, de modo geral. O longo prazo de uma firma pode ser um ano, cinco anos, seis meses, etc. Não podemos afirmar qual será esse período sem conhecermos as peculiaridades da firma sob análise. Portanto, usaremos esses conceitos sem especificar exatamente quanto tempo é o longo prazo. Além disto, a firma opera no curto prazo, no sentido de que o longo prazo é visto mais como um prazo de planejamento da firma, em que ela define as suas estratégias de atuação (por exemplo, pode ser que a firma decida se expandir, aumentando seus insumos fixos. No longo prazo, o valor dos insumos fixos será outro, de acordo com o plano de expansão da firma).

5.4 Custo Econômico e Custo Financeiro, Custo Implícito

O custo econômico de um bem ou serviço equivale ao valor dos bens e serviços que se deixam de produzir como consequência do uso dos insumos e mão-de-obra para produzir o bem em questão. O custo econômico de um bem ou serviço é um conceito de "*custo de oportunidade*", ou seja, o valor da melhor alternativa de uso desse bem ou serviço.

Nem sempre o custo econômico de um bem será igual ao seu custo financeiro ou ao seu custo contábil. O custo contábil de um bem é o custo registrado do bem, usualmente igual ao seu custo de aquisição, descontada a depreciação ocorrida. O custo financeiro é o custo de mercado do bem. Uma motivo que pode levar ao custo econômico ser diferente do custo contábil e do custo financeiro é a existência de *custos implícitos*.

Custos implícitos são custos não explicitamente contabilizados pelo agente econômico. Um exemplo corriqueiro de custo implícito em pequenas empresas é o custo de oportunidade de trabalho do dono da empresa. Por exemplo, o dono de uma barraca de cachorro-quente que calcula o seu lucro como a receita gerada pela venda de cachorros-quentes e bebidas menos o custo dos insumos para fornecer esses produtos está se esquecendo de adicionar um custo importante: o valor do seu trabalho. Esse valor é o custo de oportunidade do trabalho do dono da barraca, igual ao maior rendimento ou salário que ele conseguiria empregando o seu tempo em outra atividade. Se a melhor alternativa para o dono da barraca for um emprego onde ele receba R$ 3.000,00 por mês, então usamos esse valor como o custo do seu trabalho.

Outro custo implícito importante refere-se ao custo do capital financeiro investido na firma. Se o capital for de terceiros, proveniente de empréstimos tomados junto ao setor financeiro, os juros constituem o custo de oportunidade desse capital, que é explícito, portanto contabilizado como custo tanto por contadores como por economistas. Todavia, se o capital for próprio, proveniente dos sócios ou acionistas, o custo de oportunidade, que seria a melhor alternativa ao uso do dinheiro aplicado na firma, é um custo implícito.

Uma alternativa possível de aplicação para o capital próprio dos sócios é no mercado financeiro, que rende um determinado montante sob a forma de juros. Isto significa que o custo de oportunidade do capital próprio é, no mínimo, igual a esses juros não recebidos, pelo fato de o capital ter sido investido na firma em lugar do mercado financeiro. Por exemplo, se os juros que o capital próprio ganharia no mercado financeiro fossem de R$ 15.000, o economista tomaria esse valor como custo implícito de produção, já o contador não. O mercado financeiro é de grande utilidade para medirmos o custo de oportunidade do capital próprio.

O lucro econômico pode ser diferente do lucro contábil quando existem esses custos implícitos. O lucro econômico ser igual a zero não significa que a firma não tenha lucros contábeis. Ela terá, nesse caso, um lucro contábil positivo, igual ao rendimento que os acionistas da empresa obteriam se tivessem investido o seu dinheiro no mercado financeiro. Mais precisamente, já que investir em uma empresa envolve risco, o retorno esperado desse investimento deve, em equilíbrio, ser condizente com esse risco.

5.5 Custo Social e Custo Privado

Outra distinção importante é a de *custo social* versus *custo privado.* Recordando que os custos econômicos devem refletir "o que se perde" por produzir uma unidade adicional do bem, estes devem também considerar as perdas de bens e serviços que não necessariamente se transacionam nos mercados, como as *externalidades na produção.*

Na presença de externalidades, os custos econômicos que afetam toda a sociedade (sociais) não coincidem com os custos que o produtor enfrenta (custos privados). Por exemplo, a produção de tinta pode gerar efeitos negativos ao meio ambiente, como a poluição de um rio, que podem não ser levados em conta pela empresa na sua decisão de produção. Esta deterioração do meio ambiente significa uma perda para a sociedade e constitui um custo adicional da produção de tintas. Logo, o nível ótimo de produção social é menor do que o ótimo privado, já que o ótimo privado não leva em conta essa perda para a sociedade (um custo social). Uma questão fundamental é como fazer com que o impacto de externalidades causadas pelas ações de um agente econômico sejam levadas em conta pelo próprio agente, de modo que se *internalize as externalidades.*

Na análise a seguir, vamos supor que todos os custos medidos são econômicos e que não existe distinção entre custo social e custo privado. Portanto, não discutiremos problemas como externalidades nem questões de cunho prático, como o cálculo de custos implícitos da firma.

Leitura Recomendada

- Varian, cap. 18 - "Tecnologia".
- Pindick e Rubinfeld, cap. 6 - "Produção".
- Hall e Lieberman, cap. 6 - "Produção e Custo", seções 1 - "A Natureza da Firma", 2 - "Pensando sobre a Produção" e 3 - "Produção no Curto Prazo".
- Nicholson e Snyder, cap. 9 - "Production Functions".

Exercícios

1. Verifique o grau de homogeneidade das seguintes funções de produção:
   (a) Tecnologia linear: $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^\gamma$, onde $a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$.
   (b) Tecnologia Leontief: $f(x_1, x_2) = (\min\{ax_1, bx_2\})^\eta$, onde $a > 0$, $b > 0$, $\eta > 0$.
   (c) Tecnologia CES: $f(x_1, x_2) = A\left[\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}$, onde $a > 0$, $b > 0$ e $\rho < 1$, $\rho \neq 0$, $\gamma > 0$.

2. Defina a *elasticidade-produto com relação ao insumo i* $\mu_i(\mathbf{x})$ da função de produção $f(\mathbf{x})$ com n insumos por:
$$\mu_i(x_1, x_2) = \frac{\partial \ln(f(x_1, x_2))}{\partial \ln x_i}\,, \qquad i = 1, \ldots, n.$$
   a) Interprete intuitivamente o significado dessa elasticidade.
   b) Mostre que $\mu_i(\mathbf{x}) = Pmg_i(\mathbf{x})\, x_i / f(\mathbf{x}) = PMg_i(\mathbf{x})/PMe_i(\mathbf{x})$.

3. Defina a *elasticidade de escala da produção* no ponto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, denotada por $\mu(\mathbf{x})$, como:
$$\mu(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 1} \frac{\partial \ln(f(t\mathbf{x}))}{\partial \ln t}.$$
   a) Interprete intuitivamente o significado dessa elasticidade. Dizemos que os retornos de escala são *localmente* constantes, crescentes ou decrescentes se $\mu(\mathbf{x})$ é igual, menor, ou maior do que 1, respectivamente.
   b) Mostre que
$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\mathbf{x})\,,$$
   onde $\mu_i(\mathbf{x})$ foi definido no exercício anterior.
   c) Calcule $\mu(\mathbf{x})$ para a função de produção Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$. O valor de $\mu(\mathbf{x})$ depende do ponto $\mathbf{x}$? Interprete.

4. Considere a seguinte função de produção:
$$f(x_1, x_2) = \frac{K}{1 + x_1^{-\alpha} x_2^{-\beta}}\,,$$
   onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e K é um número positivo que serve de limite superior para a produção (ou seja, $0 \leq q < K$).
   a) Mostre que esta função de produção não é homogênea.
   b) Calcule o retorno de escala *local* dessa função de produção, segundo $\mu(\mathbf{x})$ definido no exercício anterior. Observe que $\mu(\mathbf{x})$ de fato depende do ponto $\mathbf{x}$.

5. Sejam f uma função de produção *homotética* (ou seja, $f = g \circ h$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função estritamente crescente e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é função homogênea de grau 1) e $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ duas combinações de insumos que produzem a mesma quantidade de bem final. Mostre que as combinações de insumos $t\mathbf{x}$ e $t\mathbf{x}'$ produzem a mesma quantidade de bem final, para qualquer $t > 0$.