MICROECONOMIA 1

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Notas de Aula 3 – Graduação

Prof. José Guilherme de Lara Resende

1 Preferências

Já modelamos o problema da escassez que um consumidor enfrenta. Agora vamos modelar o bem-estar do consumidor. A maximização desse bem-estar, sujeita à restrição orçamentária, é conhecida como o *problema de maximização de utilidade* ou *problema primal* do consumidor.

Nas notas de aula 2, denotamos por X o conjunto de escolha do consumidor. Vamos assumir que $X = \mathbb{R}^n_+$, no caso de n bens, ou $X = \mathbb{R}^2_+$, no caso de dois bens.

Vamos representar o consumidor por uma *relação binária*, denotada por $\succeq$ e chamada *relação de preferência*, sobre o conjunto de cestas X. Escrevemos $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ para dizer que $\succeq$ relaciona as duas cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (por isto, binária), onde escrever $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ significa "*a cesta* $\mathbf{x}$ *é fracamente preferível à cesta* $\mathbf{y}$". Logo ou o consumidor prefere a cesta $\mathbf{x}$ à cesta $\mathbf{y}$ ou é indiferente a essas duas cestas (ou seja, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ significa que a cesta $\mathbf{x}$ é *pelo menos tão boa quanto* a cesta $\mathbf{y}$).

Podemos definir duas outras relações a partir da relação de preferência $\succeq$:

1) *Preferência estrita*: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ significa $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ e que não vale $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$; e
2) *Indiferença*: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ significa $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$.

Portanto, $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ significa que a cesta $\mathbf{x}$ é estritamente melhor do que a cesta $\mathbf{y}$. Finalmente, $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ significa que as cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são indiferentes para o consumidor. Observe que as relações de preferência estrita, $\succ$, e de indiferença, $\sim$, são definidas a partir da relação de preferência $\succeq$. Logo, definida uma relação de preferência $\succeq$ qualquer, deriva-se de $\succeq$ as relações de preferência estrita e de indiferença, por meio de 1) e 2) acima.

Vamos supor que as preferências satisfaçam certas propriedades, denominadas "*axiomas*". Os três primeiros axiomas que vamos analisar são:

A.1) **"Completeza":** Para quaisquer cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em X, ou $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ (ou ambos).

A.2) **Reflexividade:** Para qualquer cesta $\mathbf{x}$ em X, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$.

A.3) **Transitividade:** Para quaisquer cestas $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ em X, se $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ e $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ então $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$.

O axioma da "completeza" diz que o consumidor é sempre capaz de comparar duas cestas quaisquer do seu conjunto de escolha X. Portanto, se oferecermos duas cestas quaisquer de bens para um consumidor, ele dirá qual cesta prefere (ou se é indiferente entre elas). O axioma de reflexividade diz que toda cesta é indiferente a ela mesmo. À primeira vista ele parece trivial, mas existem experimentos que mostram que uma cesta de bens pode não ser preferível a essa mesma cesta "*empacotada*" ou descrita de modo diferente. Se assumirmos que as preferências são completas, o axioma da reflexividade se torna redundante (isto é, ele é consequência do axioma de completeza).

O axioma de transitividade, apesar de intuitivo, é crucial para a teoria do consumidor: sem ele, em geral, não é possível dizer qual a cesta preferida pelo consumidor. O melhor argumento em defesa da transitividade das preferências é de *ordem normativa*, relacionado à consistência interna das escolhas, como veremos no exemplo a seguir. Preferências não-transitivas resultam na possibilidade de um "*dutch book*": uma sequência de trocas que levam o consumidor a perder todo o seu dinheiro.

Por exemplo, suponhamos que um consumidor tenha uma cesta $\mathbf{x}$ de bens e que ordene as cestas $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, e $\mathbf{z}$ da seguinte maneira não-transitiva: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ e $\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$, ou seja, $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$. Se oferecermos a ele a cesta $\mathbf{z}$ em troca da cesta $\mathbf{x}$ e mais uma pequena quantia de dinheiro (pequena o suficiente para que ele aceite a troca), ele aceita a troca (já que $\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$) e passa a possuir a cesta $\mathbf{z}$. Similarmente, se oferecermos a ele a cesta $\mathbf{y}$ em troca da cesta $\mathbf{z}$ e mais uma pequena quantia de dinheiro (novamente, pequena o suficiente para que ele aceite a troca), ele aceita a troca (já que $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$) e passa a possuir a cesta $\mathbf{y}$. Finalmente, se oferecermos a ele a cesta $\mathbf{x}$ em troca da cesta $\mathbf{y}$ e mais uma pequena quantia de dinheiro, ele aceita a troca (já que $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$) e passa a possuir a cesta $\mathbf{x}$. O resultado líquido é que ele termina com a cesta que possuía originalmente, tendo perdido dinheiro nas transações acima. Continuando com essas trocas circulares, o consumidor terminaria com a mesma cesta inicial e sem dinheiro algum. Esse resultado é consequência direta de assumir que as preferências não são transitivas.

Logo, o axioma de transitividade impõe uma consistência interna nas escolhas do consumidor. Alguns autores costumam dizer que preferências completas e transitivas representam consumidores *racionais* (mas esta terminologia não é padrão, o termo *racional* pode ter significado diferente para outros autores).

Os quatro axiomas abaixo estão associados à ideia de *não saciação* do consumo.

A.4) **Axioma de Não-Saciação Global.** Para todo $\mathbf{x} \in X$, existe uma cesta $\mathbf{y} \in X$ tal que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

A.5) **Axioma de Não-Saciação Local.** Para todo $\mathbf{x} \in X$, existe uma cesta $\mathbf{y} \in X$ *suficientemente próxima* de $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

A.6) **Monotonicidade:** Dizemos que a preferência $\succeq$ é *monótona* (ou monotônica) se quando $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ (isto é, cada coordenada do vetor $\mathbf{x}$, que representa a quantidade de um bem, é maior ou igual à respectiva coordenada do vetor $\mathbf{y}$), então $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ e se $\mathbf{x} \gg \mathbf{y}$ (isto é, cada coordenada do vetor $\mathbf{x}$, que representa a quantidade de um bem, é estritamente maior do que a respectiva coordenada do vetor $\mathbf{y}$), então $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

A.7) **Monotonicidade Estrita:** Dizemos que a preferência $\succeq$ é *estritamente monótona* (ou estritamente monotônica) se $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ então $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$; e se $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, com $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ (isto é, a cesta $\mathbf{x}$ possui pelo menos um bem com quantidade maior do que a cesta $\mathbf{y}$), então $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

O axioma de não-saciação global diz que, para qualquer cesta considerada, sempre existe uma outra cesta que provê maior satisfação. O axioma de não-saciação local vai além: diz que para toda cesta, existe uma outra cesta *bem próxima a ela* que provê maior satisfação ao consumidor. O axioma da monotonicidade diz que *mais é melhor*: se acrescentamos mais de todos os bens à cesta do consumidor, sua satisfação aumenta. O axioma de monotonicidade estrita diz que se a cesta $\mathbf{x}$ tem ou a mesma quantidade ou mais bens do que a cesta $\mathbf{y}$, com pelo menos a quantidade de um bem qualquer maior em $\mathbf{x}$, então a cesta $\mathbf{x}$ é estritamente preferida à cesta $\mathbf{y}$. Observe que se a preferência é estritamente monotóna, então ela é monotóna, e que se ela é monotóna, então ela é localmente não saciável. E se uma preferência é localmente não saciável, então ela é globalmente não saciável. Porém uma preferência pode ser globalmente não saciável, mas não ser nem monotóna nem localmente não saciável (nota: no livro do Varian, *Microeconomia, Princípios Básicos*, p. 47, o axioma de monotonicidade que o autor expõe equivale ao nosso axioma de monotocidade estrita A.7).

Dois outros axiomas importantes são:

A.8) **Convexidade:** Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são duas cestas de bens tais que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, então $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y} \succeq \mathbf{y}$, para todo $\lambda \in [0,1]$.

A.9) **Convexidade estrita:** Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são duas cestas de bens tais que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, então $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \succ \mathbf{y}$, para todo $\lambda \in (0,1)$.

O axioma de convexidade diz que *médias são pelo menos tão boas quanto extremos*: uma combinação linear de duas cestas é pelo menos tão boa quanto a cesta menos preferida que forma a combinação. Uma versão mais forte desse axioma é a convexidade estrita, que diz que a combinação linear de duas cestas distintas (onde essa combinação linear é diferente das duas cestas, por isso exige-se $\lambda \in (0,1)$, ou seja, $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 1$) é estritamente melhor do que a cesta menos preferida que a define.

Um modo equivalente de definir convexidade das preferências é dizer que para toda cesta $\bar{\mathbf{x}}$, o *conjunto das cestas preferidas a* $\bar{\mathbf{x}}$, dado por $C(\bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x} \succeq \bar{\mathbf{x}}\}$, é um *conjunto convexo*: se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertencem a $C(\bar{\mathbf{x}})$, então $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$ pertence a $C(\bar{\mathbf{x}})$, para todo $t \in [0,1]$.

Existem outros axiomas ou propriedades que podem ser impostos sobre as preferências. Cada axioma tem um significado e supõe algo sobre o comportamento do consumidor. Por exemplo, vimos que os axiomas de monotonicidade modelam consumidores que preferem mais a menos. Axiomas sobre preferências são portanto hipóteses sobre o comportamento dos consumidores. Essas hipóteses podem ser testadas natural ou experimentalmente. Observe que os axiomas acima não levam em conta a factibilidade das cestas. O consumidor pode preferir um carro importado a um carro nacional, mas, por não ter dinheiro suficiente, compra o carro nacional.

Um axioma de caráter mais técnico, necessário para o resultado principal da próxima seção, é o axioma da continuidade:

A.10) **Continuidade:** Para toda cesta $\mathbf{x} \in X$, se a sequência de cestas $\mathbf{x}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, é tal que $\mathbf{x}_n \succeq \mathbf{x}$ para todo n e $\mathbf{x}_n \to \bar{\mathbf{x}}$, então vale que $\bar{\mathbf{x}} \succeq \mathbf{x}$ (se tivermos que $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}_n$ para todo n e $\mathbf{x}_n \to \bar{\mathbf{x}}$, então vale que $\mathbf{x} \succeq \bar{\mathbf{x}}$).

O axioma da continuidade, ao fixar a cesta $\mathbf{x}$ e considerar uma sequência de cestas $\mathbf{x}_n$ com $\mathbf{x}_n \succeq \mathbf{x}$ para todo n e que converge para uma cesta $\bar{\mathbf{x}}$, então se valer continuidade devemos ter que a cesta limite $\bar{\mathbf{x}}$ é tal que $\bar{\mathbf{x}} \succeq \mathbf{x}$ (vale algo análogo caso a sequência $\mathbf{x}_n$ seja tal que $\mathbf{x}_n \succeq \mathbf{x}$ para todo n; neste caso continuidade implica que $\mathbf{x} \succeq \bar{\mathbf{x}}$).

Se as preferências satisfazem os axiomas A.1)-A.3), A.7), A.9) e A.10), (ou, em algumas situações, o axioma A.6) no lugar do axioma A.7)), dizemos que essas preferências são *bem-comportadas*.

2 Função de Utilidade

Preferências constituem uma forma bastante geral de caracterizar o consumidor, exigindo apenas que ele seja capaz de ordenar as cestas de bens em ordem de preferência. Porém, do ponto de vista analítico, preferências nem sempre são fáceis de manusear e de obter inferências econômicas. Funções de utilidades são um conceito mais maleável que permite tirar resultados e conclusões que não seriam tão facilmente obtidos a partir do conceito de preferências diretamente.

Definição: Uma função de utilidade $u : X \to \mathbb{R}$ assinala para cada cesta $\mathbf{x}$ em X um valor $u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$.

Uma função utilidade nada mais é do que uma representação numérica das cestas disponíveis para o consumidor. Se para as cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ temos que $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$, então dizemos que a cesta $\mathbf{x}$ provê ou o mesmo tanto ou mais utilidade (ou satisfação, ou bem-estar) para o consumidor do que a cesta $\mathbf{y}$. Se $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$, então dizemos que $\mathbf{x}$ provê mais utilidade que $\mathbf{y}$. Finalmente, se $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y})$, então dizemos que $\mathbf{x}$ provê o mesmo tanto de utilidade que $\mathbf{y}$.

Evidentemente, uma função de utilidade depende também de outras variáveis que não o consumo de bens. Como usaremos a hipótese de *ceteris paribus*, ou seja, de que estas outras variáveis permanecem inalteradas (pelo menos para o período analisado), não explicitaremos essa dependência da função de utilidade com relação a outras variáveis.

Exemplo: Função de Utilidade Cobb-Douglas. Essa função de utilidade é uma das mais usadas em economia. Para o caso de dois bens, ela é representada por $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, onde $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Utilidade originalmente era um conceito *cardinal*: se $u(\mathbf{x}) = 2u(\mathbf{y})$, então se dizia que a cesta $\mathbf{x}$ era duas vezes "*mais útil*" do que a cesta $\mathbf{y}$. A grandeza do valor da utilidade tinha um significado preciso, e acreditava-se que era possível medir a utilidade de cada pessoa em unidades, que poderíamos chamar de "*utis*". Assumia-se que esse tipo de comparação entre cestas de bens e também entre pessoas era possível.

Porém, o conceito de utilidade cardinal sofre muitas críticas. O que significa dizer que uma cesta possui o dobro de utilidade da outra? Seria o caso em que o consumidor está disposto a pagar o dobro do preço por ela? Ou estaria ele disposto a trabalhar o dobro do tempo para obtê-la, por meio de um segundo emprego que não paga o mesmo que o emprego original? E qual o sentido em comparar utilidades de pessoas diferentes?

Felizmente, a hipótese de cardinalidade não é necessária na teoria de escolha sem incerteza. A derivação dessa teoria utiliza a hipótese mais fraca de *ordinalidade*, em que se exige apenas que o consumidor seja capaz de ordenar as cestas de bens em termos de preferência (e, portanto, não precisa saber o quanto mais ele gosta de uma cesta em relação a outra). Se o consumidor possui preferências que satisfazem os axiomas de completeza, reflexividade, transitividade, e continuidade, podemos derivar uma função de utilidade que *representa* essas preferências, no sentido da definição abaixo. Então o conteúdo econômico de uma utilidade não está no valor atribuído a uma cesta isoladamente, mas sim na comparação dos valores atribuídos a cestas diferentes. Essa ideia é capturada na definição abaixo, que relaciona os conceitos de preferências e funções de utilidade.

Definição: A função de utilidade u *representa o sistema de preferências* $\succeq$ se u ordena as cestas em X do mesmo modo que $\succeq$, ou seja, se temos que:

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \quad \text{se, e somente se,} \quad u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})\,.$$

Nem todo sistema de preferências pode ser representado por uma função de utilidade. Um exemplo clássico é o seguinte:

Exemplo: Preferências Lexicográficas. A preferência lexicográfica $\succeq_L$ para o caso de dois bens é definida como:

$$(x_1, x_2) \succeq_L (y_1, y_2) \qquad \text{se, e somente se,} \qquad \{x_1 > y_1\} \;\; \text{ou} \;\; \{x_1 = y_1 \;\; \text{e} \;\; x_2 \geq y_2\}$$

A lógica dessas preferências assemelha-se à lógica de procurar uma palavra no dicionário. O consumidor com preferências lexicográficas preocupa-se primeiro apenas com o bem 1: se a cesta $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ tem uma quantidade maior do bem 1 do que a cesta $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, então ele prefere a cesta $\mathbf{x}$. Caso as duas cestas tenham a mesma quantidade do primeiro bem, então ele compara o segundo bem: a cesta que tiver mais do segundo bem é a preferida. A preferência lexicográfica é completa, reflexiva e transitiva, mas não é contínua. Ela é o exemplo clássico de uma preferência que não pode ser representada por nenhuma função de utilidade (por não satisfazer o axioma de continuidade).

Teorema de Representação: Seja $X = \mathbb{R}^n_+$ o conjunto de escolha do consumidor. Se o sistema de preferências $\succeq$ satisfaz os axiomas de completeza, reflexividade, transitividade e continuidade, então existe uma função de utilidade u que representa esse sistema. *Mais ainda*, qualquer transformação crescente dessa função de utilidade também representa o mesmo sistema de preferências e qualquer outra função de utilidade que representa a preferência pode ser escrita como uma transformação crescente da primeira função de utilidade.

O Teorema de Representação deixa claro que não exigimos que o consumidor compute um número para cada cesta de bens que oferecemos a ele, mas apenas que ele ordene as várias cestas de bens de modo que satisfaça os axiomas necessários para que o teorema seja válido. Se o consumidor é capaz de fazer essa ordenação (e se essa ordenação satisfaz os axiomas enunciados no teorema, onde incluímos o axioma de reflexividade apenas por preciosismo, já que ele é redundante quando se assume o axioma de completeza), podemos então encontrar uma função utilidade que representa o seu sistema de preferências, no sentido da definição acima. Portanto, o importante em uma função utilidade é o modo como ela *ordena* as cestas de bens, *e não o valor da utilidade associado a cada cesta, visto de modo isolado.*

Como o que importa é a ordenação dos bens, se uma utilidade representa essas preferências, qualquer transformação crescente (também chamada em alguns livros transformação monotônica positiva) dessa utilidade também representará essas mesmas preferências. Suponha que u representa $\succeq$, ou seja,

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função crescente em todo o seu domínio (ou seja, uma transformação monotônica positiva), então para todo $a > b$, temos que $f(a) > f(b)$. Logo:

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}) \quad \Leftrightarrow \quad f(u(\mathbf{x})) \geq f(u(\mathbf{y}))$$

Ou seja, a função de utilidade U, definida por $U(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$, também representa o mesmo sistema de preferências que u, no sentido de que preserva a ordenação das cestas de bens determinada por $\succeq$. Mais ainda, pode-se provar que se u e U são duas utilidades que representam a mesma relação de preferência $\succeq$, então existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente tal que $U = f \circ u$. Logo, podemos dizer que *a função de utilidade que representa uma relação de preferência é unica* ***a menos de transformações crescentes.***

Os axiomas de uma preferência se refletem na utilidade que a representa. Se a preferência for monótona, então a utilidade que a representa será crescente. Observe que o significado intuitivo de utilidade crescente é o mesmo de preferência monótona: o consumidor prefere mais a menos. Se a preferência for estritamente monótona, então a função de utilidade será estritamente crescente (ou seja, $\partial u/\partial x_i > 0$, para todo bem i).

Se a preferência for convexa, a utilidade que a representa será *quasecôncava*, ou seja, para duas cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ quaisquer, então a cesta definida como uma combinação linear dessas duas cestas, $\mathbf{z}^t = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$, para todo t tal que $0 \le t \le 1$, é fracamente preferível à cesta menos preferida entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Formalmente,

$$u(\mathbf{z}^t) = u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \ge \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\},$$

para todo $t \in [0, 1]$. A intuição dessa propriedade para a utilidade é a mesma intuição da propriedade de convexidade da preferência, já que as duas representam a mesma ideia para o comportamento do consumidor, de que ele prefere médias a extremos.

Finalmente, se a preferência for estritamente convexa, a utilidade que a representa será *estritamente quasecôncava*, ou seja, para duas cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ distintas ($\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$) quaisquer, então a cesta definida como uma combinação estrita dessas duas cestas, $\mathbf{z}^t = t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$, para todo t tal que $0 < t < 1$ (se $t = 0$, obtemos $\mathbf{z}^t = \mathbf{y}$, se $t = 1$, obtemos $\mathbf{z}^t = \mathbf{x}$), é estritamente melhor do que a cesta menos preferida entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Formalmente, temos que:

$$u(\mathbf{z}^t) = u(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) > \min\{u(\mathbf{x}), u(\mathbf{y})\},$$

para todo $t \in (0, 1)$. A intuição dessa propriedade para a utilidade é a mesma intuição da propriedade de convexidade estrita da preferência, já que as duas representam a mesma ideia para o comportamento do consumidor, de que ele prefere estritamente médias a extremos (quando consideramos cestas indiferentes, $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$).

Portanto, uma preferência bem-comportada será representada por uma utilidade bem-comportada, ou seja, uma utilidade estritamente crescente e estritamente quasecôncava.

3 Curvas de Indiferença

Uma *curva de indiferença* representa um conjunto de cestas indiferentes entre si. Então, uma curva de indiferença contém todas as cestas que dão um mesmo nível de utilidade ao consumidor. Em termos de preferências, podemos representar a curva de indiferença definida pela cesta $\mathbf{x}$ qualquer como o conjunto de cestas $\mathbf{y}$ tais que:

$$I(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \sim \mathbf{x}\}\ .$$

Se usarmos o conceito de função de utilidade, curvas de indiferença são definidas pelos conjuntos:

$$I(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in X \mid u(\mathbf{y}) = \bar{u},\ \text{onde } u(\mathbf{x}) = \bar{u}\}\ .$$

Um *mapa de indiferença* é a coleção de todas as curvas de indiferença associadas a uma determinada utilidade ou preferência. Observe que se a preferência for completa, cada cesta em X define uma curva de indiferença e, portanto, cada cesta possui uma curva de indiferença que a inclui (pode ser que apenas a própria cesta faça parte da sua curva de indiferença, como é o caso de preferências lexicográficas, mas para os casos mais interessantes, não será isso o que ocorrerá). Graficamente, plotamos apenas algumas curvas de indiferença e indicamos a direção em que a utilidade aumenta, para ilustrarmos um mapa de indiferença (veja a Figura 1 abaixo).

Observe que se as preferências forem transitivas, então duas curvas de indiferença distintas não poderão se cruzar, pois curvas de indiferença distintas representam níveis de satisfação diferentes. Logo, se elas se cruzarem, todas as cestas nessas duas curvas seriam indiferentes entre si. Nesse caso, elas não seriam duas curvas de indiferença distintas.

Exemplo: Preferências "Bem-Comportadas". No caso de dois bens, uma curva de indiferença muito usada (isto é, gerada por funções de utilidade muito usadas, tais como a Cobb-Douglas) é ilustrada na Figura 1 abaixo. Para ver que as curvas de indiferença possuem esse formato, fixe um nível de utilidade $\bar{u}$ qualquer (por exemplo, $\bar{u} = 10$). Então a curva de indiferença associada a esse nível de utilidade é dada por $\bar{u} = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, ou seja, $x_2 = \sqrt[\beta]{\bar{u}}/x_1^{\alpha/\beta}$. No caso em que $\alpha = \beta = 1$ e $\bar{u} = 10$, temos que $x_2 = 10/x_1$, uma hiperbóle equilátera. A Figura 1 ilustra o mapa de indiferença para este caso.

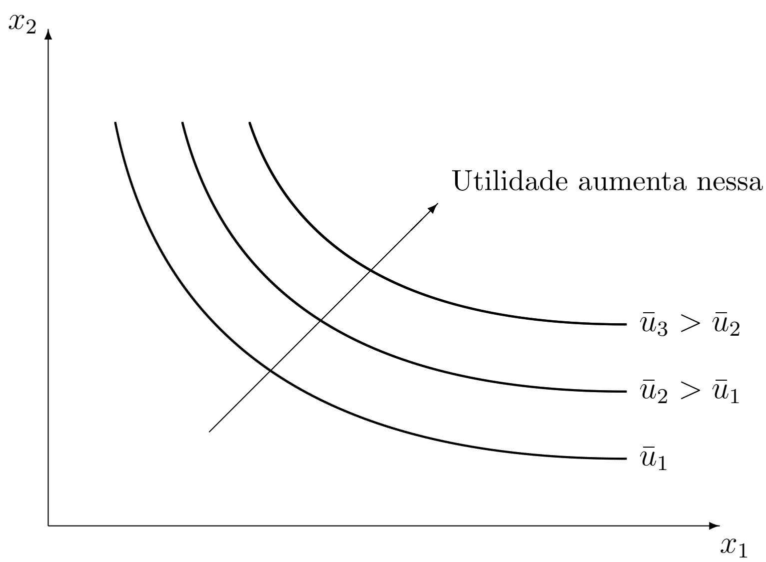

Figura 1: Curvas de Indiferença Bem-Comportadas

Que propriedades ou axiomas as preferências que geram as curvas de indiferença acima satisfazem? Elas são completas, reflexivas e transitivas. Além disso, são estritamente monótonas ("mais é melhor") e estritamente convexas (qualquer combinação convexa entre duas cestas indiferentes é estritamente melhor do que essas duas cestas). O axioma de monotonicidade faz com que as curvas de indiferença não possam ter inclinação positiva, já o axioma de monotonicidade estrita faz com que as curvas de indiferença necessariamente tenham inclinação negativa. O axioma de convexidade estrita faz com que a curva de indiferença seja convexa em relação à origem.

No caso de preferências bem-comportadas, veremos que a reta orçamentária é tangente em um único ponto de uma única curva de indiferença. Ambos os bens são adquiridos e então dizemos que a solução do problema do consumidor é *interior*, no sentido de que os bens são consumidos em quantidades positivas. Mais ainda, a função de demanda é bem definida e contínua nos preços e na renda. O método de Lagrange pode ser usado para resolver o problema do consumidor e encontrar as demandas por cada bem.

Exemplo: Preferências Lexicográficas. A curva de indiferença para a cesta $\mathbf{x}$ gerada por uma preferência lexicográfica é formada apenas pela cesta $\mathbf{x}$. Graficamente, cada curva de indiferença é um ponto no espaço de bens. A satisfação do consumidor aumenta quando caminhamos para direita no eixo horizontal (isto é, aumentando a quantidade do primeiro bem). Se estamos em uma linha vertical (ou seja, mesma quantidade do bem 1), então a satisfação aumenta quando caminhamos para cima dessa linha vertical (isto é, aumentando a quantidade do bem 2). Portanto, uma cesta de bens só é indiferente a ela mesmo e a mais nenhuma outra cesta. Essa é, no fundo, a razão porque não podemos representar preferências lexicográficas por uma função utilidade: existem "muitas" cestas que não são indiferentes entre si (isso ocorre porque as preferências lexicográficas não satisfazem o axioma da continuidade).

4 Taxa Marginal de Substituição

A utilidade marginal do bem x_i mede o acréscimo na utilidade devido a um aumento no consumo do bem i:

$$UMg_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

O valor da utilidade marginal não possui nenhum conteúdo econômico, pois apenas a ordenação das cestas importa. Se usarmos uma outra utilidade para representarmos as preferências, a utilidade marginal mudará.

A *única* informação relevante que podemos obter da utilidade marginal tomada de modo isolado é do seu *sinal*: se a utilidade marginal de um bem é positiva, então quantidades maiores desse bem aumentam o nível de bem-estar do consumidor (observe que se a utilidade marginal de um bem é positiva, então ela será positiva também para qualquer outra utilidade que representa a mesma preferência). Vamos ver que a utilidade marginal serve para calcular a Taxa Marginal de Substituição entre dois bens, definida a seguir.

Definição: Taxa Marginal de Substituição (TMS). A *taxa marginal de substituição* (TMS) entre dois bens mede a taxa pela qual o consumidor está disposto a trocar um bem por outro, de modo a manter a sua utilidade inalterada: a TMS do bem 1 pelo bem 2 diz *o valor que o consumidor atribui ao bem 1 em termos do bem 2.* A TMS é medida pela inclinação da curva de indiferença.

A TMS, como definida acima, é um número negativo se a preferência for estritamente monótona: se o consumidor abre mão de um pouco de um bem, ele precisa receber um pouco do outro bem para manter-se na mesma curva de indiferença. Alguns livros, como Nicholson e Snyder, definem a TMS como o *valor absoluto* da inclinação da curva de indiferença. Isto evidentemente não altera o valor da TMS, apenas o seu sinal.

Suponha que o consumidor possui a cesta $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Vamos modificar essa cesta por $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2)$, *de modo a manter o mesmo nível de satisfação* (ou seja, de modo que o consumidor permaneça na mesma curva de indiferença). Então a diferencial total de u implica:

$$du = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \times dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \times dx_2$$

O primeiro termo no lado direito da igualdade mede a mudança na utilidade dada pela mudança em x_1 e o segundo termo mede a mudança na utilidade dada pela mudança em x_2. Como essas mudanças são feitas de modo a manter o nível de satisfação constante, então $du = 0$. Rearranjando a equação acima, obtemos:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{du=0} = -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

Note que a a TMS não depende da função de utilidade que usamos para representar as preferências. Sabemos que qualquer outra função de utilidade U que representa essa preferência deve ser tal que $U(\mathbf{x}) = f(u(\mathbf{x}))$, onde f é uma função crescente. A utilidade marginal de U é:

$$UMg_i^U(\mathbf{x}) = \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(u(\mathbf{x}))}{\partial u(\mathbf{x})} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i},$$

onde a última igualdade resulta da regra da cadeia. Portanto a TMS de $\bar{u}$ é:

$$TMS_{1,2}^{\bar{u}}(x_1, x_2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = -\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}},$$

ou seja, igual à TMS da utilidade u. Podemos concluir então que a TMS não se modifica, qualquer que seja a função de utilidade usada para representar a preferência do consumidor.

A TMS pode ser medida na prática, se as preferências forem bem-comportadas, por exemplo. Se o consumidor possui a cesta $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, podemos oferecer a ele diversas razões de troca entre os dois bens: uma unidade do primeiro bem por duas unidades do segundo bem, etc. Se para alguma dessas razões de troca, ele for indiferente em trocar ou continuar com a cesta original, então essa razão é a TMS.

Isso ocorre porque se a taxa de troca cruza a curva de indiferença que passa pela cesta $\mathbf{x}$, então o consumidor vai preferir trocar um pouco de um bem por um tanto do outro bem. A única razão pela qual ele não vai querer fazer nenhuma troca é a que passa pela cesta x *tangenciando a curva de indiferença dessa cesta*, ou seja, para a razão de troca que é igual a TMS. Para qualquer outra razão de troca que não seja igual a TMS, o consumidor vai aceitar trocar um bem pelo outro.

Exemplo: Suponha que $\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)/\partial x_1 = 10$ e $\partial u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)/\partial x_2 = 5$. Então na margem (pequenas mudanças ou trocas entre os bens), considerando a cesta $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, uma unidade do bem 1 vale duas vezes mais para o consumidor do que uma unidade do bem 2. Ou seja, se aumentarmos o consumo $\bar{x}_1$ do bem 1 por uma pequena quantidade ε e diminuirmos o consumo $\bar{x}_2$ do bem 2 por 2ε, então o consumidor continuará com o mesmo nível de satisfação (na mesma curva de indiferença).

Se as preferências forem estritamente convexas, então o valor absoluto da TMS do bem 1 com relação ao bem 2 diminuirá quanto maior a quantidade do bem 1 que o consumidor possui (supondo que ele continua na mesma curva de indiferença). Intuitivamente, essa é uma hipótese razoável e que captura a ideia de que médias são melhores do que extremos: quanto mais o consumidor possui de um bem, menor o valor dele em termos do outro bem.

A propriedade de TMS decrescente em valor absoluto ao longo de uma curva de indiferença captura uma ideia antiga, que antes era associada à propriedade de utilidade marginal decrescente: o aumento de utilidade que o indivíduo obtém ao consumir um bem diminui à medida que ele consome mais desse bem. Na teoria ordinal, a noção de utilidade marginal decrescente não tem conteúdo econômico, já que uma mesma preferência pode ser representada por diversas funções de utilidades diferentes. Porém, como vimos acima, a TMS de uma preferência não muda com a representação escolhida da preferência. Logo, a propriedade de TMS decrescente em valor absoluto captura, em certo sentido, essa ideia de saciação (agora *relativa*) do bem, ao dizer que quanto mais o indivíduo possui de um bem relativo a outro bem, menor será o *valor* para o consumidor desse bem, em termos do outro bem, no sentido de manter sua utilidade constante.

Resumindo, temos que:

1. A TMS não depende da função de utilidade que usamos para representar as preferências.

2. A TMS pode ser medida na prática, se certas condições forem satisfeitas (preferências bem-comportadas, por exemplo).

3. Se as preferências são bem comportadas, o axioma de convexidade estrita implica que o *valor absoluto* da TMS diminui quando percorremos uma curva de indiferença (na direção de se afastar do eixo do bem 2).

Abaixo derivamos a TMS de algumas funções de utilidade:

1. **Utilidade Cobb-Douglas:** $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Nesse caso,

$$TMS_{1,2}(x_1, x_2) = -\frac{UMg_{x_1}(x_1, x_2)}{UMg_{x_2}(x_1, x_2)} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}\,.$$

2. **Utilidade Linear:** $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, $a > 0$ e $b > 0$. Nesse caso, a TMS entre os dois bens é igual a $-a/b$, qualquer que seja a cesta (x_1, x_2) de bens considerada.
3. **Utilidade de Leontief:** $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, $a > 0$ e $b > 0$. Nesse caso, a TMS é zero, infinita, ou não está definida, dependendo da cesta considerada. Mais especificamente, temos que:

   - Se (x_1, x_2) é tal que $ax_1 < bx_2$, $TMS_{1,2}(x_1, x_2) = +\infty$;
   - Se (x_1, x_2) é tal que $ax_1 > bx_2$, $TMS_{1,2}(x_1, x_2) = 0$;
   - Se (x_1, x_2) é tal que $ax_1 = bx_2$, $TMS_{1,2}(x_1, x_2)$ não é definida.

4. **Utilidade CES ou ESC (elasticidade constante de escala):** $u(x_1, x_2) = (ax_1^{\rho} + bx_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$, $a > 0$, $b > 0$, $\rho < -1$, $\rho \neq 0$. Nesse caso,

$$TMS_{1,2}(x_1, x_2) = -\frac{UMg_{x_1}(x_1, x_2)}{UMg_{x_2}(x_1, x_2)} = -\frac{a}{b}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\rho}\,.$$

5 Preferências Homotéticas

Uma propriedade importante sobre as preferências é a *homotetia.* Dizemos que a preferência é homotética caso satisfaça a propriedade abaixo. Todas as utilidades elencadas acima representam preferências homotéticas.

Definição. Preferências Homotéticas. A preferência $\succeq$ é *homotética* se todas as curvas de indiferença são relacionadas por *expansões proporcionais ao longo de raios*, isto é:

$$\text{Se } \ \mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \ \text{ então } \ \alpha\mathbf{x} \sim \alpha\mathbf{y}, \qquad \forall \alpha \geq 0,$$

onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são cestas de bens.

Em termos de utilidade, dizemos que uma utilidade é homotética (ou também, é uma utilidade que representa preferências homotéticas) se satisfaz:

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) \ \text{ então } \ u(\alpha\mathbf{x}) = u(\alpha\mathbf{y}), \qquad \forall \alpha \geq 0.$$

Portanto, para qualquer linha reta saindo da origem em direção ao quadrante positivo, todos os pontos de curvas de indiferença distintas que essa linha cruza possuem a mesma TMS, como a Figura 2 abaixo ilustra. Então, a TMS é a mesma nas cestas A e B e nas cestas C e D.

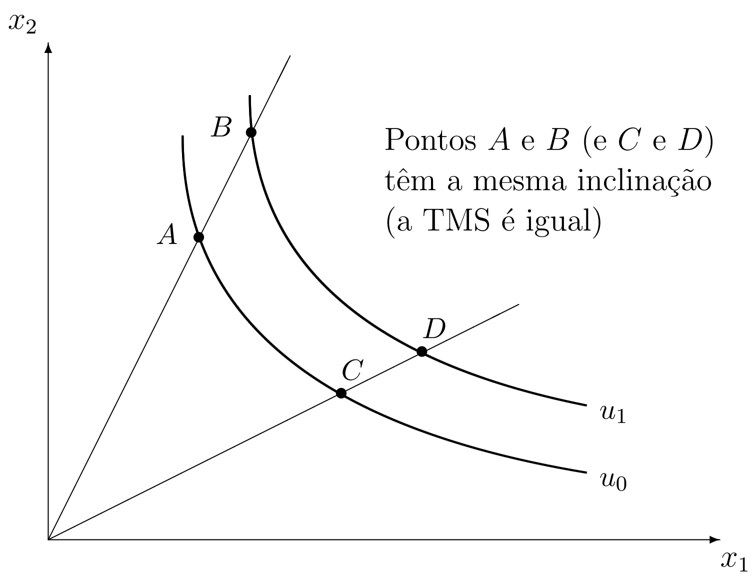

Figura 2: Preferências Homotéticas

Se conhecemos uma única curva de indiferença gerada por uma preferência homotética, somos capazes de descrever *todas* as curvas de indiferença geradas por esta preferência, pois todas as curvas de indiferença são versões aumentadas ou diminuídas umas das outras. Logo, podemos descrever completamente o sistema de preferências que gerou essa curva. Esse fato tem implicações importantes, principalmente na análise empírica da teoria do consumidor. *Utilidades homotéticas*, isto é, utilidades que representam preferências homotéticas, possuem várias características importantes, que simplificam a análise do problema do consumidor.

Temos então que a taxa marginal de substituição de utilidades homotéticas depende apenas da *razão entre os bens*, ou seja, temos que $TMS_{12}(x_1, x_2) = TMS_{12}(\alpha x_1, \alpha x_2)$, para todo $\alpha > 0$. Podemos então escrever $TMS_{12}(x_1, x_2)$ como função de uma única variável, a razão de consumo entre os bens 1 e 2: $TMS_{12}(x_1/x_2)$, sempre que $x_2 \neq 0$. Observe que tanto a utilidade Cobb-Douglas quanto a utilidade CES, que são homotéticas, possuem TMS que dependem apenas da razão entre os bens. Isso também é válido para as outras TMS calculadas acima, já que todas as utilidades elencadas na página anterior são homotéticas.

Pode-se mostrar ainda que toda função utilidade que representa uma preferência homotética tem o seguinte formato:

$$u(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})),$$

onde f é uma função estritamente crescente e g é uma função homogênea de grau 1 (ou seja, $g(t\mathbf{x}) = tg(\mathbf{x})$, para todo $t \geq 0$). Isso implica que toda função de utilidade homogênea de qualquer grau $k > 0$ é homotética. Logo, a utilidade Cobb-Douglas é homotética, já que é homogênea de grau $\alpha + \beta > 0$.

Mais ainda, como uma transformação crescente da utilidade u continua representando a mesma preferência e a inversa de uma função crescente é crescente, temos que $v(\mathbf{x}) = f^{-1}(u(\mathbf{x})) = f^{-1}(f(g(\mathbf{x}))) = g(\mathbf{x})$ continua representando a preferência homotética $\succeq$. Logo, se $\succeq$ é uma preferência homotética, então existe uma utilidade homogênea de grau um que a representa.

Leitura Recomendada

- Varian, cap. 3 - "Preferências" - e 4 - "Utilidade".
- Pindick e Rubinfeld, cap. 3 - "Comportamento do Consumidor", seção 1, "Preferências do Consumidor".
- Hall e Lieberman, cap. 5 - "A Escolha do Consumidor", seção 2 - "Preferências".
- Nicholson e Snyder, cap. 3 - "Preferences and Utility".
- Deaton e Muelbauer, cap. 2 "Preferences and Demand", seção 1 - "Axioms and Utility".

Exercícios

1. Suponha um consumidor que tenha preferências definidas entre cestas compostas por dois bens do seguinte modo: se $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$ (ou seja, $x_1 \geq y_1$ e $x_2 \geq y_2$), então $x \succeq y$.

   a) Mostre como são as relações de preferência estrita e de indiferença associadas a $\succeq$.
   b) Essas preferências são (justifique sua resposta):
      i) Completas? ii) Transitivas?
      iii) Monótonas? iv) Convexas?

2. O técnico de volei Bernardo acha que os jogadores devem ter três qualidade: altura, agilidade e obediência. Se o jogador A é melhor que o jogador B em duas dessas três características, então Bernardo prefere A a B. Para os outros casos, ele é indiferente entre A e B. Carlos mede 2,08m, é pouco ágil e obediente. Luis mede 1,90m, é muito ágil, e muito desobediente. Paulo mede 1,85m, é ágil, e extremamente obediente.

   a) Bernardo prefere Carlos ou Luis? Bernardo prefere Luis ou Paulo? Bernardo prefere Carlos ou Paulo?

b) As preferências do técnico são transitivas?

c) Depois de perder vários campeonatos, Bernardo decide mudar sua forma de comparar os jogadores. Agora ele prefere o jogador A ao jogador B se A é melhor do que B nas três características Ele é indiferente entre A e B se eles têm todas as três características iguais. Para todas as outras possibilidades, Bernardo diz que não é possível comparar os jogadores. As novas preferências de Bernardo são: completas? transitivas? reflexivas? Justifique.

3. Mostre que a preferência lexicográfica é completa, reflexiva e transitiva.

4. Considere a utilidade $u(x_1, x_2) = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$.

   a) Calcule as utilidades marginais dos bens 1 e 2. Verifique que são decrescentes. Qual seria a interpretação de utilidades marginais decrescentes?

   b) Calcule as utilidades marginais dos bens 1 e 2 para a função de utilidade $\bar{u}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$. Verifique que são crescentes.

   c) Mostre que u e $\bar{u}$ representam a mesma preferência. O que isso implica a respeito de a utilidade marginal ser decrescente ou crescente?

5. Desenhe as curvas de indiferença para as seguintes utilidades:

   a) **Utilidade Linear:** $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, $a, b > 0$.

   b) **Utilidade de Leontief:** $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, $a, b > 0$.

   c) **Utilidades com um Bem Neutro:** $u(x_1, x_2) = x_1$ e $u(x_1, x_2) = x_2$.

   d) **Utilidade com um Mal:** $u(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

6. Suponha que uma pessoa esteja consumindo uma cesta de bens tal que a sua utilidade marginal de consumir o bem A é 12 e a sua utilidade marginal de consumir o bem B é 2. Suponha também que os preços dos bens A e B são R$ 2 e R$ 1, respectivamente, e que as preferências desse consumidor são estritamente convexas.

   a) Essa pessoa está escolhendo quantidades ótimas dos bens A e B? Caso não esteja, qual bem ela deveria consumir relativamente mais (não se preocupe com a restrição orçamentária nesse item)?

   b) A sua resposta para o item a) depende do valor da utilidade marginal? Explique.

7. Suponha que Ana consome apenas pão e circo, e suas preferências são bem-comportadas. Um certo dia o preço do pão aumenta e o preço do circo diminui. Ana continua tão feliz quanto antes da mudança de preços (a renda de Ana não mudou).

   a) Ana consome mais ou menos pães após a mudança de preços?

   b) Ana consegue agora comprar a cesta que comprava antes?