Solução da Primeira Prova de Microeconomia 1 – 1º semestre de 2020
Departamento de Economia, Universidade de Brasília
Brasília, 29 de setembro de 2020
Duração da prova: 120 minutos

Questão 1 (25 pontos): Responda Verdadeiro ou Falso (justifique sucintamente):

a) (5 pontos) Se uma preferência for completa, então toda cesta é indiferente a si mesma.

S: Verdadeiro. Completeza significa que o consumidor consegue ordenar quaisquer duas cestas em termos de preferência. Se as preferências forem completas, então qualquer cesta $\mathbf{x}$ pode ser comparada com ela mesmo, resultando em $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$. Logo, toda cesta será indiferente a ela mesmo, implicando que as preferências sejam reflexivas.

b) (5 pontos) Uma redução na renda nominal do consumidor em 50% tem o mesmo efeito sobre o conjunto de possibilidade de consumo do indivíduo que uma redução de 50% nos preços de todos os bens disponíveis para consumo.

S: Falso. Uma redução na renda nominal do consumidor em 50% é equivalente a um aumento de 100% em todos os preços, pois:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = m/2 \quad \Leftrightarrow \quad (2\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} = m$$

c) (5 pontos) Se a utilidade de um consumidor é do tipo Cobb-Douglas, então a elasticidade-renda de cada bem é unitária, independentemente dos valores dos coeficientes da utilidade.

S: Verdadeiro. Se a utilidade é $u(x_1, x_2) = Kx_1^{\alpha}x_2^{\beta}$ (ou uma transformação crescente de u), então a demanda ótima dos bens é:

$$x_1^M(p_1, p_2, m) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{m}{p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2^M(p_1, p_2, m) = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{m}{p_2}$$

Logo, temos que as elasticidades-renda dos dois bens serão:

$$\eta_1 = \frac{m}{x_1^M(p_1, p_2, m)} \times \frac{\partial x_1^M(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \frac{m}{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{m}{p_1}} \times \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{p_1}\right] = 1$$
$$\eta_2 = \frac{m}{x_2^M(p_1, p_2, m)} \times \frac{\partial x_2^M(p_1, p_2, m)}{\partial m} = \frac{m}{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{m}{p_2}} \times \left[\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{p_2}\right] = 1$$

Portanto, as funções de demanda geradas por uma utilidade Cobb-Douglas, quaisquer que sejam os coeficientes da utilidade, terão elasticidade-renda unitária.

d) (5 pontos) No ponto de escolha ótima do consumidor, a taxa marginal de substituição é sempre igual à razão de preços.

S: Falso. Primeiro, para utilidades bem-comportadas, teremos que o *valor absoluto* da taxa marginal de substituição será igual à razão de preços. Mais ainda, nem isso será sempre verdade. Um contraexemplo é a utilidade linear, quando a solução é necessariamente de canto.

e) (5 pontos) O gasto com um bem, cuja demanda é inelástica, aumenta quando o seu preço é reduzido.

S: Falso. Se o bem é inelástico, as variações de preço e gasto são na mesma direção. Logo, se o preço diminuir, o gasto com esse bem diminuirá. Vamos derivar esse resultado. O gasto ou dispêndio total com o bem i, representado por D_i, é:

$$D_i = p_i x_i(\mathbf{p}, m)$$

Se derivarmos o dispêndio D_i com relação ao preço p_i, obtemos:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} = x_i + p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = x_i \left(1 + \frac{p_i}{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right) = x_i \left(1 - |\varepsilon_i|\right),$$

onde ε_i é a elasticidade-preço da demanda do bem i. Logo, se o preço do bem i se altera, a mudança no dispêndio total do consumidor com esse bem é:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} = x_i \left(1 - |\varepsilon_i|\right)$$

Portanto, se $|\varepsilon_i| < 1$ (demanda inelástica), então preço e dispêndio se movem na mesma direção ($\partial D_i/\partial p_i > 0$). Intuitivamente, como a demanda pelo bem é inelástica, se o preço cair em 10%, a quantidade demandada aumentará *em menos de 10%*. Como o gasto é dado pelo preço multiplicado pela quantidade consumida, o gasto com o bem diminui.

Questão 2 (25 pontos): Considere a função de utilidade dada por

$$u(x_1, x_2) = 2\ln(x_1) + 3\ln(x_2),$$

onde x_1 e x_2 são as quantidades consumidas dos bens 1 e 2, respectivamente.

a) (5 pontos) Calcule as funções de demandas ótimas e a função de utilidade indireta, usando o método de Lagrange.

S: Observe que essa utilidade é uma Cobb-Douglas $\bar{u}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$ log-linearizada. As demandas podem ser encontradas montando o Lagrangeano,

$$\mathcal{L} = 2\ln(x_1) + 3\ln(x_2) + \lambda\left[m - (p_1 x_1 + p_2 x_2)\right]$$

As CPO são:

$$\begin{aligned}
(x_1): \quad & \frac{2}{x_1} = \lambda p_1 \\
(x_2): \quad & \frac{3}{x_2} = \lambda p_2 \\
(\lambda): \quad & m = p_1 x_1 + p_2 x_2
\end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda CPO, obtemos:

$$\left(\frac{2x_2}{3x_1}\right) = \frac{p_1}{p_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \left(\frac{3p_1}{2p_2}\right) x_1$$

Substituindo essa expressão para x_2 na reta orçamentária (terceira CPO) resulta em:

$$m = p_1 x_1 + p_2 \left(\frac{3p_1}{2p_2}\right) x_1 = x_1 p_1 \left(1 + \frac{3}{2}\right) = p_1 x_1 \left(\frac{5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2m}{5p_1}$$

Substituindo x_1 de volta em x_2, obtemos as funções de demanda dos dois bens:

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{2m}{5p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, m) = \frac{3m}{5p_2}$$

A função de utilidade indireta é:

$$v(p_1, p_2, m) = 2\ln\left(\frac{2m}{5p_1}\right) + 3\ln\left(\frac{3m}{5p_2}\right) = \ln\left(\frac{108\, m^5}{3125\, p_1^2 p_2^3}\right)$$

b) (5 pontos) Encontre a função dispêndio e as demandas hicksianas.

S: Usando a relação de dualidade $v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \bar{u})) = \bar{u}$ entre função de utilidade indireta e função dispêndio, obtemos:

$$\ln\left(\frac{108e(p_1,p_2,\bar{u})^5}{3125p_1^2p_2^3}\right) = \bar{u} \quad \Rightarrow \quad e(p_1,p_2,\bar{u}) = \left(\frac{5}{108^{1/5}}\right)p_1^{2/5}p_2^{3/5}e^{\bar{u}/5}$$

Usando o lema de Shephard, $x_i^h = \partial e/\partial p_i$, para $i = 1, 2$, encontramos as demandas hicksianas:

$$x_1^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \left(\frac{2}{108^{1/5}}\right)p_1^{-3/5}p_2^{3/5}e^{\bar{u}/5} \qquad \text{e} \qquad x_2^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \left(\frac{3}{108^{1/5}}\right)p_1^{2/5}p_2^{-2/5}e^{\bar{u}/5}$$

c) (5 pontos) Verifique se as demandas encontradas no item a) satisfazem a Lei de Walras e a propriedade de homogeneidade.

S: Primeiro vamos verificar se satisfazem a Lei de Walras. Usando a solução do item a), temos que:

$$p_1x_1^* + p_2x_2^* = p_1\left(\frac{2m}{5p_1}\right) + p_2\left(\frac{3m}{5p_2}\right) = \frac{2m}{5} + \frac{3m}{5} = m\,,$$

logo a lei de Walras é satisfeita, como esperado. Agora vamos mostrar que as funções de demanda determinadas na solução do item a) satisfazem a propriedade de homogeneidade. Temos que para todo $t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{aligned} x_1^M(tp_1,tp_2,tm) &= \frac{2(tm)}{5(tp_1)} = \frac{2m}{5p_1} = x_1^M(p_1,p_2,m) \\ x_2^M(tp_1,tp_2,tm) &= \frac{3(tm)}{5(tp_2)} = \frac{3m}{5p_2} = x_2^M(p_1,p_2,m) \end{aligned}$$

logo as funções de demanda dos dois bens são homogêneas de grau 0 nos preços e na renda, como esperado.

d) (5 pontos) Suponha que os preços dos bens 1 e 2 são $p_1 =$ R\$ 1 e $p_2 =$ R\$ 1, respectivamente, e que a renda do consumidor é R\$ 4.000. Calcule a quantidade consumida de cada bem. Suponha que o preço do bem 1 aumentou para R\$ 2. Calcule o excedente do consumidor e a variação compensadora associadas a essa mudanção de preço.

S: Usando as funções de demanda do bem encontradas na solução do item a), temos que:

$$\begin{aligned} x_1^M(p_1=1,p_2=1,m=4.000) &= \frac{2\times 4.000}{5\times 1} = 1.600 \\ x_2^M(p_1=1,p_2=1,m=4.000) &= \frac{3\times 4.000}{5\times 1} = 2.400 \end{aligned}$$

O valor da variação do excedente do consumidor para a mudança de preços descrita é:

$$\begin{aligned} \Delta EC = \int_2^1 x_1^M(p_1,p_2,m)\,dp_1 &= -\int_1^2 \frac{1.600}{p_1}\,dp_1 \\ &= -1.600[\ln(2) - \ln(1)] \approx -1.120\,, \end{aligned}$$

em que usamos a aproximação $\ln(2) \approx 0{,}7$. Já a variação compensadora é, por definição:

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}^0,m) = v(\mathbf{p}^1, m - VC) \ &\Rightarrow\ \ln\left(\frac{36m^5}{3125\times 1^2\times 1^3}\right) = \ln\left(\frac{36(m-VC)^5}{3125\times 2^2\times 1^3}\right) \\ &\Rightarrow\ 4m^5 = (m-VC)^5 \\ &\Rightarrow\ VC = (1-4^{1/5})\times 4.000 \approx -1.278 \end{aligned}$$

e) (5 pontos) Para o aumento de preço descrito no item anterior, determine o efeito total, o efeito substituição de Slutsky e o efeito renda.

S: Usando a função de demanda do bem encontrada na solução do item a), temos que:

$$x_1^M(p_1 = 1, p_2 = 1, m = 4.000) = \frac{2 \times 4.000}{5 \times 1} = 1.600$$
$$x_1^M(p_1 = 2, p_2 = 1, m = 4.000) = \frac{2 \times 4.000}{5 \times 2} = 800$$

Logo o efeito total dessa mudança no preço do bem sobre a sua demanda é uma queda no consumo do bem de 800 unidades ($ET = -800$). Para o caso de um efeito de substituição de Slutsky, a compensação é de modo que o consumidor possa comprar a mesma cesta que adquiria aos preços antigos, mas agora aos preços novos. Primeiro observe que aos preços originais eram consumidas 2.400 unidades do bem 2 (ver a solução do item anterior). A demanda de Slutsky do bem 1 é:

$$\begin{aligned} x_1^S(p_1 = 2, p_2 = 1, (x_1^* = 1.600, x_2^* = 2.400)) &= x_1^M(p_1 = 2, p_2 = 1, m = 2 \times 1.600 + 1 \times 2.400) \\ &= \frac{2 \times 5.600}{5 \times 2} = 1.120\,. \end{aligned}$$

Portanto, o efeito substituição de Slutsky constitui numa queda no consumo do bem 1 de 480 unidades ($ES = 1.120 - 1.600 = -480$). Logo, o efeito renda associado ao efeito substituição de Slustky é uma queda de 320 unidades do consumo do bem 1 ($ER = -320$).

Questão 3 (25 pontos): Um consumidor com renda m^0 que consome bens cujos preços são $\mathbf{p}^0$ tem utilidade dada por $v(\mathbf{p}^0, m^0)$. Quando os preços mudam para $\mathbf{p}^1$, o custo de vida é alterado. Para medir o efeito desse tipo de mudança, definimos o índice de custo de vida como

$$I(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, u_0) = \frac{e(\mathbf{p}^1, u_0)}{e(\mathbf{p}^0, u_0)},$$

onde $e(\mathbf{p}, u_0)$ é a função dispêndio desse consumidor.

a) (10 pontos) Mostre que $I(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, u_0)$ é maior (menor) que um se o dispêndio necessário para manter a utilidade inicial u_0 sobe (diminui) aos novos preços.

S: Temos que:

$$I(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, u_0) = \frac{e(\mathbf{p}^1, u_0)}{e(\mathbf{p}^0, u_0)} > 1 \quad \Rightarrow \quad e(\mathbf{p}^1, u_0) > e(\mathbf{p}^0, u_0)$$

A desigualdade $e(\mathbf{p}^1, u_0) > e(\mathbf{p}^0, u_0)$ significa exatamente que o dispêndio mínimo necessário para se manter o nível de utilidade original (u_0) aos novos preços ($\mathbf{p}^1$) é maior do que o dispêndio mínimo necessário para se manter o nível de utilidade original aos preços antigos ($\mathbf{p}^0$). A desigualdade reversa é análoga.

b) (15 pontos) Suponha que a renda do consumidor também se modifica, de m^0 para m^1. Mostre que o consumidor estará melhor (pior) no período 1 se $\frac{m^1}{m^0}$ é maior (menor) que $I(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, u_0)$.

S: Temos que:

$$I(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, u_0) = \frac{e(\mathbf{p}^1, u_0)}{e(\mathbf{p}^0, u_0)} < \frac{m^1}{m^0} \quad \Rightarrow \quad e(\mathbf{p}^1, u_0) < m^1,$$

pois o dispêndio mínimo necessário para alcançar o nível de utilidade u_0 quando os preços são dados por $\mathbf{p}^0$ é exatamente igual a m^0, supondo que o consumidor maximiza o seu bem-estar ($e(\mathbf{p}^0, u_0) = e(\mathbf{p}^0, v(\mathbf{p}^0, m^0)) = m^0$). A desigualdade então se reduz a $e(\mathbf{p}^1, u_0) < m^1$, e significa exatamente que o dispêndio mínimo necessário para se manter o nível de utilidade original (u_0) aos novos preços ($\mathbf{p}^1$) é menor do que a nova renda do consumidor, e portanto ele pode alcançar um nível de bem-estar mais alto do que u_0 no período 1.

Questão 4 (25 pontos): Cada gráfico abaixo ilustra três diferentes retas orçamentárias, sendo duas delas tangentes, com que um mesmo consumidor já se defrontou, e marca os pontos tangentes à curva de indiferença desse consumidor (sua escolha ótima para cada restrição orçamentária).

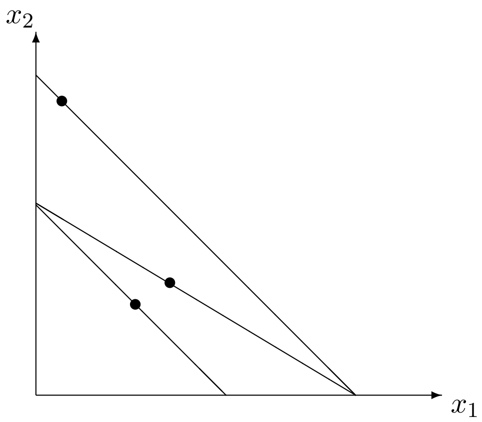

figura A

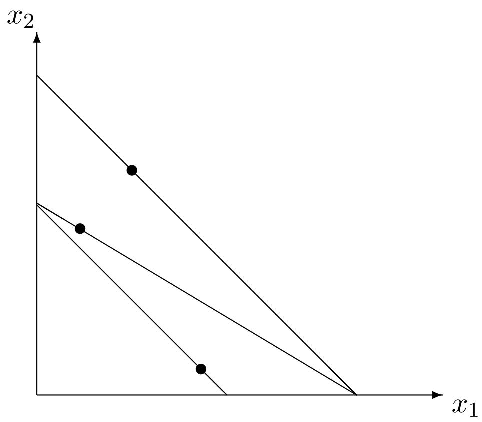

figura B

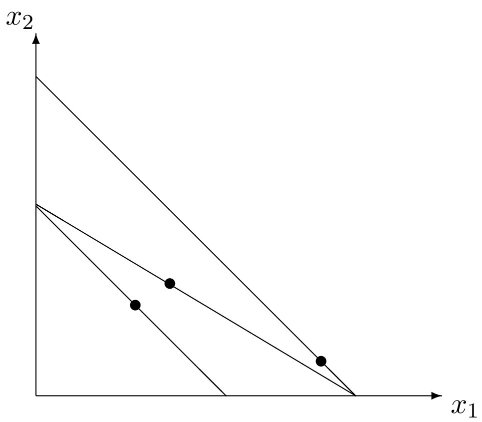

figura C

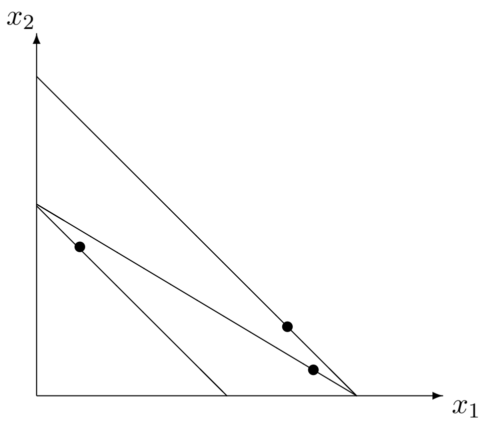

figura D

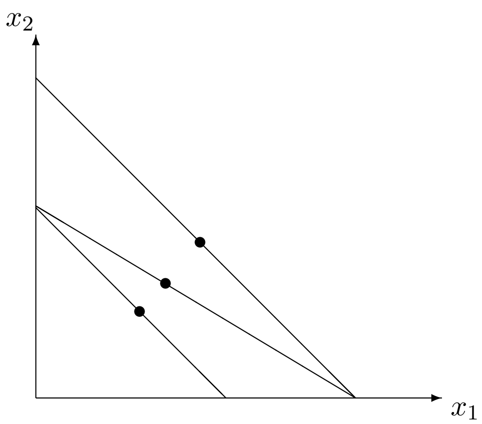

figura E

a) (5 pontos) Em que figura(s) o bem x_1 é um bem normal?

S: Figuras C, D e E. Comparando a reta orçamentária "*mais baixa*" com a "*mais alta*" (equivale a um aumento da renda): as Figuras C, D, E constituem os casos em que a renda aumenta e o consumo de x_1 aumenta. Para os gráficos A e B, quando a renda aumenta, o consumo de x_1 diminui.

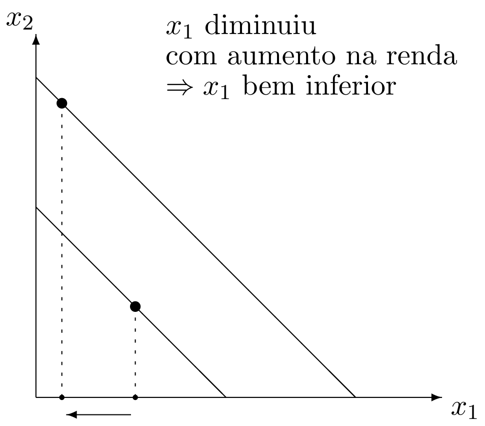

figura A

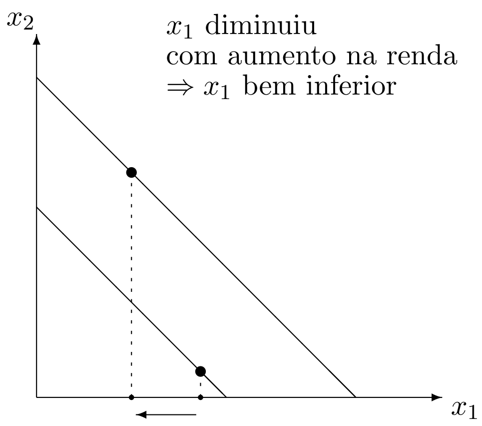

figura B

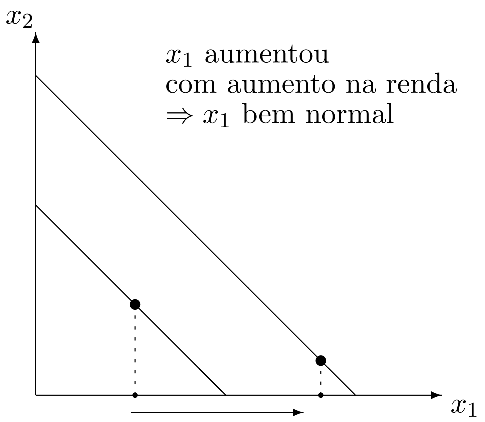

figura C

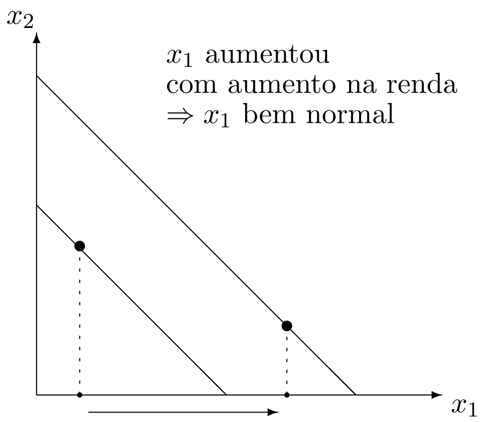

figura D

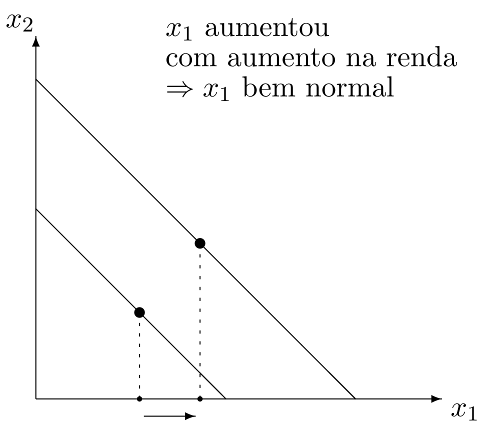

figura E

b) (5 pontos) Em que figura(s) o bem x_1 é um bem de Giffen?

S: Figura B. Comparando a reta orçamentária "*intermediária*" com a "*mais baixa*" (equivale a um aumento no preço do bem x_1): a Figura B é a única figura onde o preço do bem x_1 aumentou e o consumo desse bem aumentou.

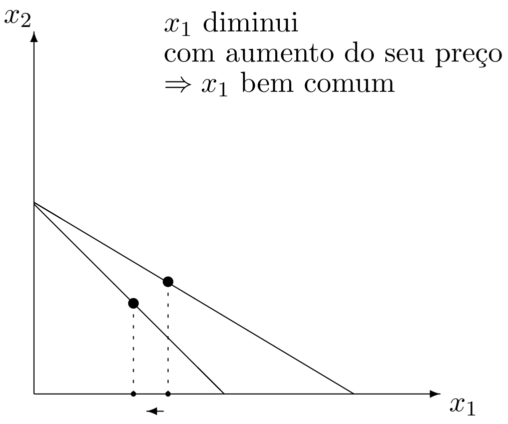

figura A

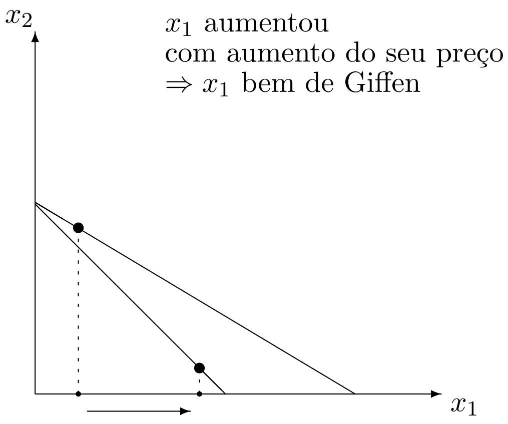

figura B

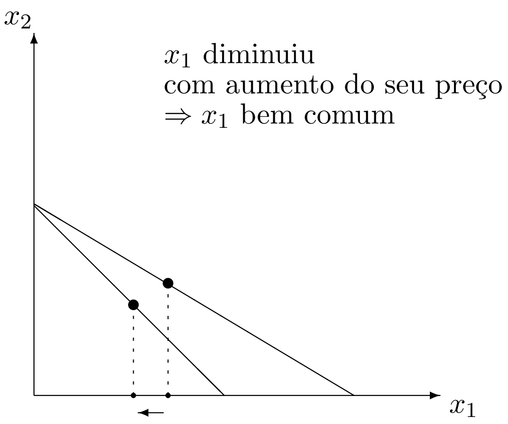

figura C

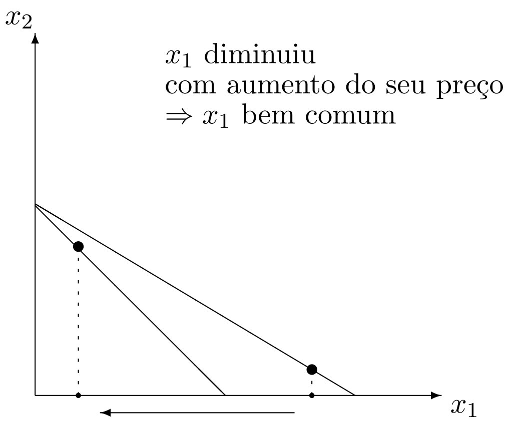

figura D

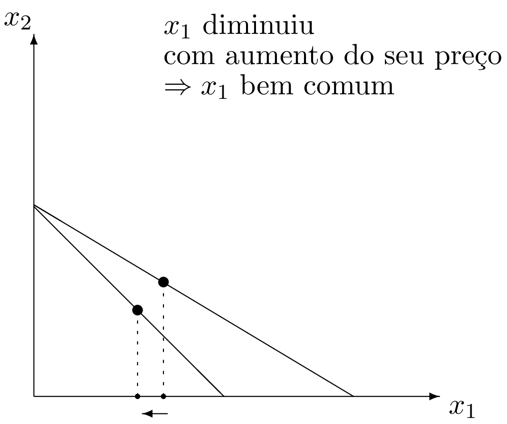

figura E

c) (5 pontos) Em que figura(s) o bem x_2 é um bem inferior?

S: Figuras C e D. Comparando a reta orçamentária "*mais baixa*" com a "*mais alta*" (equivale a um aumento da renda): as Figuras C e D constituem os casos em que a renda aumenta e o consumo de x_2 diminui. Para os gráficos A, B e E, quando a renda aumenta, o consumo de x_2 aumenta.

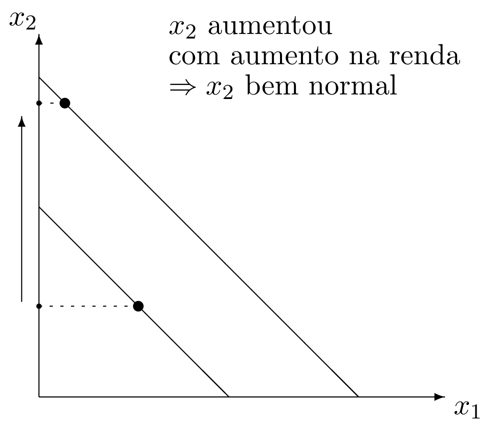

figura A

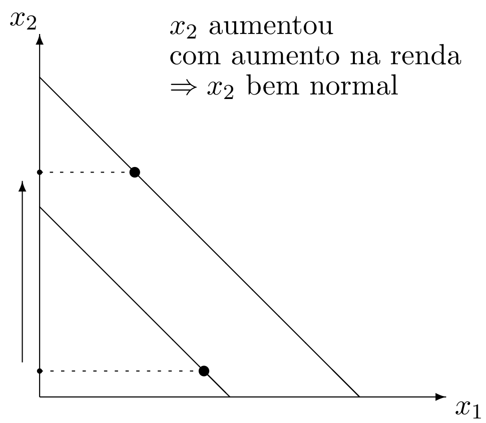

figura B

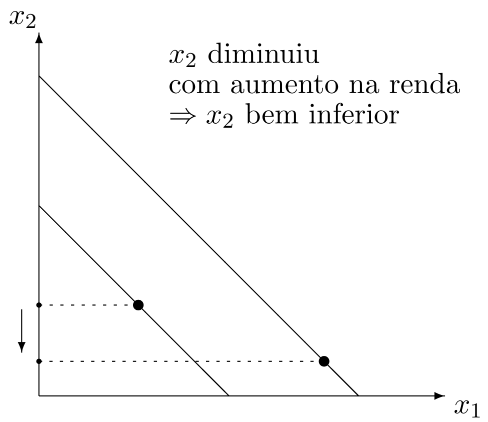

figura C

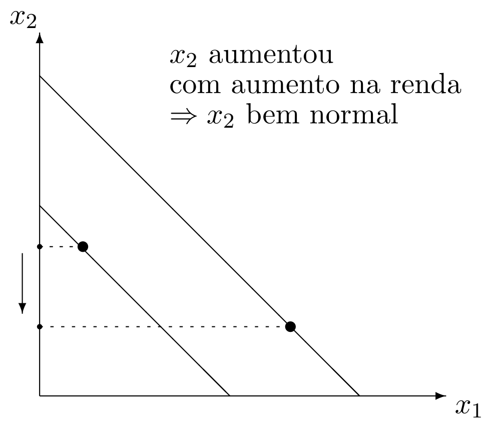

figura D

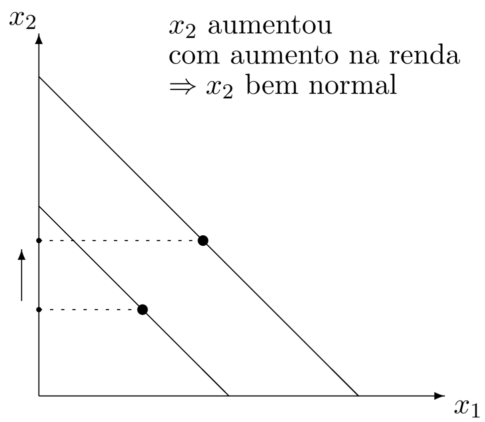

figura E

d) (5 pontos) Em que figura(s) o bem x_2 é um bem de Giffen?

S: Figura C. Comparando a reta orçamentária "*intermediária*" com a "*mais alta*" (equivale a uma queda no preço do bem x_2): a Figura C é a única figura onde o preço do bem x_2 diminuiu e o consumo desse bem diminui.

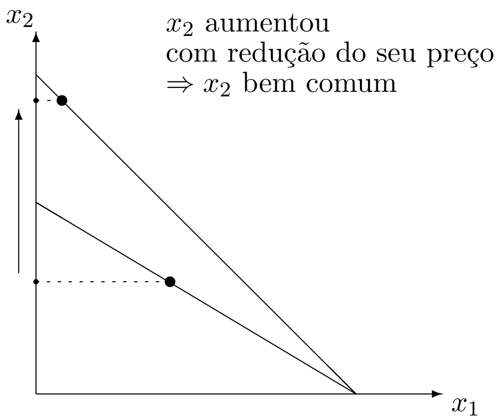

figura A

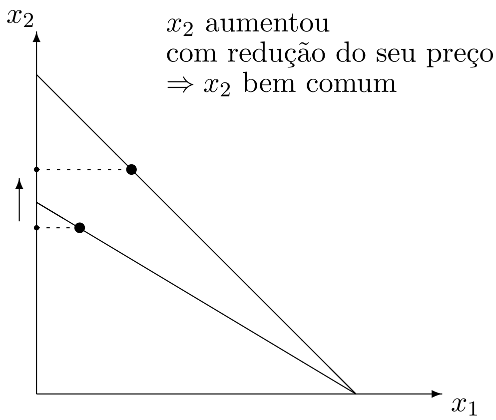

figura B

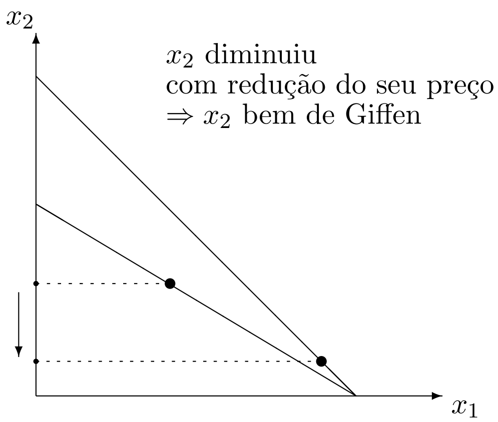

figura C

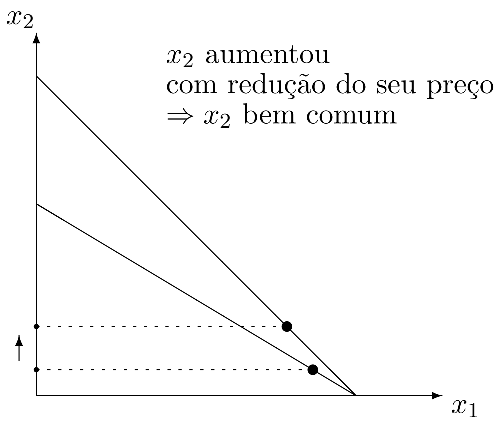

figura D

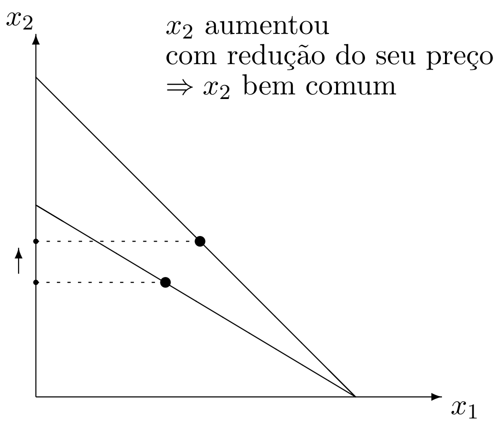

figura E

e) (5 pontos) Em que figura(s) o bem x_2 é um substituto bruto do bem 1?

S: Figura D. Comparando a reta orçamentária "*intermediária*" com a "*mais baixa*" (equivale a um aumento no preço do bem x_1): a Figura D é a única figura onde o preço do bem x_1 aumentou e o consumo do bem x_2 aumentou.

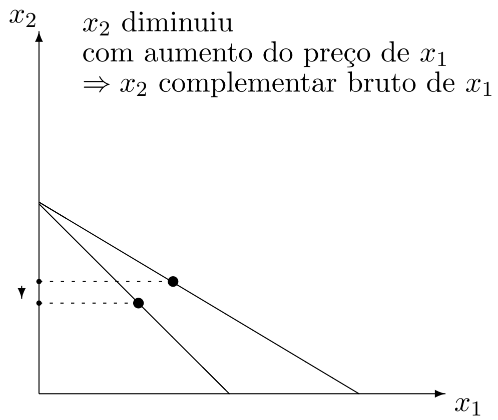

figura A

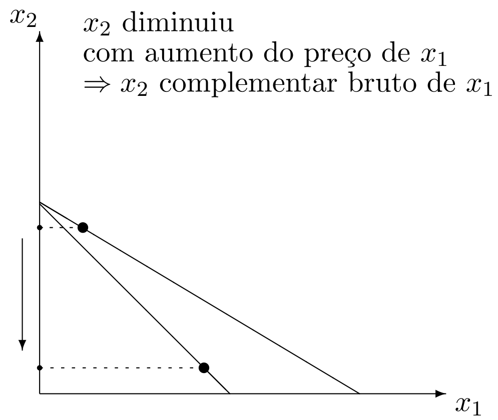

figura B

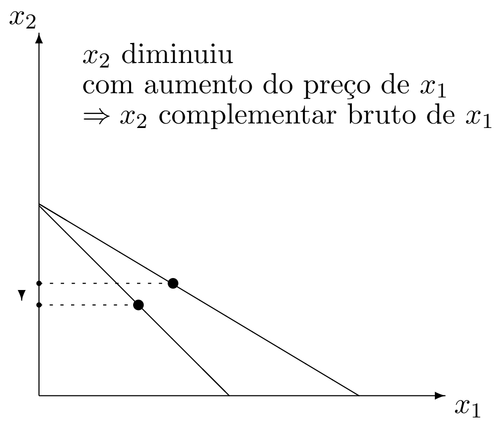

figura C

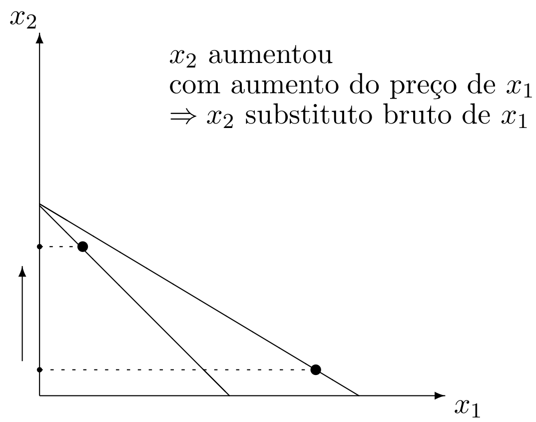

figura D

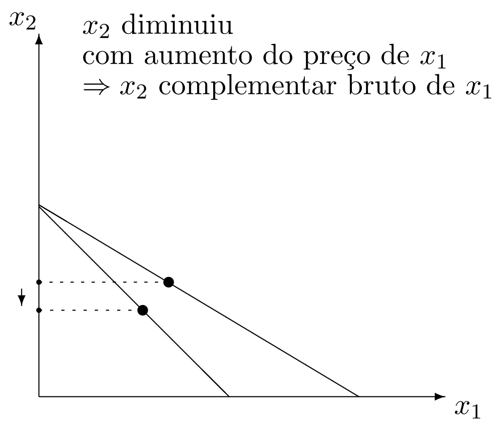

figura E