# MICROECONOMIA 1 – GRADUAÇÃO

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Nota de Aula 14 – Aplicação: Finanças

Prof. José Guilherme de Lara Resende

## 1 Introdução

Vamos aplicar o modelo de utilidade esperada para finanças. Na realidade, vamos utilizar as extensões vistas anteriormente, como o modelo de escolha intertemporal e o modelo de escolha sob incerteza. Primeiramente vamos analisar o princípio da diversificação, que aparece em diversos modelos de finanças. Depois, vamos analisar os seguintes modelos: 1) escolha de carteira de investimentos de Markowitz, 2) CAPM, e 3) árvore de Lucas.

## 2 Princípio da Diversificação

Por definição, ativos com risco geram retornos não conhecidos a priori. Logo, risco leva a uma situação em que o valor do investimento no futuro não é conhecido ao certo. Em finanças, é comum modelar essa situação assumindo que se conhece:

1. Os possíveis *estados da natureza que podem ocorrer*,
2. A distribuição de probabilidades desses estados,
3. O retorno do ativo em cada estado da natureza.

Vimos que a forma tradicional de modelar escolhas sob incerteza consiste em assumir que podem ocorrer vários resultados possíveis, cada um com uma certa chance. Dizemos que existem $S$ "*estados da natureza*" possíveis. Logo, apesar de não conhecermos o payoff ao certo, conhecemos a sua distribuição. Vamos supor que existe um investimento que pode levar aos resultados descritos abaixo:

$$\text{Investimento} \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & \text{com probabilidade} & p_1; \\ x_2 & \text{com probabilidade} & p_2; \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_s & \text{com probabilidade} & p_s; \end{array} \right.$$

Logo, esse *ativo financeiro* pode ser modelado como uma *variável aleatória* (v.a.) $x : \Omega \to \mathbb{R}$, em que as probabilidades associadas a cada resultado são as probabilidades de ocorrência do estado da natureza correspondente.

O *valor esperado* $\mathrm{E}(x)$ do payoff desse ativo é calculado como a soma do payoff de cada estado da natureza multiplicado pela probabilidade associada a esse estado da natureza, soma feita para todos os estados da natureza possíveis:

$$\mathrm{E}x = \sum_{s=1}^{S} p_s x_s = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_S \times x_S$$

A *variância* do payoff desse ativo é calculada como a soma do quadrado dos payoffs de cada estado da natureza, subtraídos do valor esperado, multiplicado pela probabilidade associada a esse estado da natureza. Logo, a variáncia é o valor esperado dos desvios elevados ao quadrado de cada payoff de sua média:

$$\text{Var}(x) = \text{E}\left(x - \text{E}(x)\right)^2 = \sum_{s=1}^{S} p_s (x_s - \text{E}x)^2$$

Agora considere duas ações, $A$ e $B$, onde a ação $A$ tem maior retorno esperado, no entanto, a ação $B$ tem menor risco. Saber qual ação uma pessoa deveria possuir depende de uma situação pessoal. Certamente, alguns investidores irão optar pela ação $A$ e outros, pela ação $B$. As opções citadas foram expostas como se o investidor fosse obrigado a escolher um único ativo. Mas, geralmente, ao invés de investir em somente um ativo, o investidor escolhe investir em ambos os ativos. Um típico investidor terá uma **carteira de títulos** (ou **portfolio**), que é uma combinação de ativos que ele guarda: títulos, ações ou qualquer outro ativo.

O **princípio da diversificação** tem como premissa o fato de que, ao dispersar sua carteira em diferentes ativos, o risco (quase sempre) será reduzido. O ponto principal é que os ativos devem ser diferentes e isso significa que os ativos não devem ser totalmente correlacionados entre si.

**Exemplo.** Suponha que alguém esteja pensando em investir em duas firmas: A Casa do Suco Aurora ($A$) e a Cia da Capa de Chuva Beleza ($B$). Os lucros de $A$ e $B$ dependerão do clima, se vai chover e esfriar ou fazer sol. Os retornos contigentes a fazer sol ou chover são descritos pela seguinte tabela:

| **Estado** | **Prob.** | **Capa de Chuva (R)** | **Suco (S)** |
|---|---|---|---|
| Chuva | 50% | 40% | −20% |
| Sol | 50% | −20% | 40% |

A tabela abaixo mostra os valores calculados para o retorno esperado, a variância e o desvio-padrão das duas firmas.

| **Estado** | **Capa de Chuva (R)** | **Suco (S)** |
|---|---|---|
| $\text{E}(R)$ | 10% | 10% |
| $\sigma^2$ | 900% | 900% |
| $\sigma$ | 30% | 30% |

O que ocorre se for investido metade do dinheiro em cada companhia? O retorno esperado da carteira será:

$$\text{E}(R_p) = (1/2 \times 10\%) + (1/2 \times 10\%) = 10\%$$

A covariância dos retornos das duas firmas é:

$$\begin{aligned}\sigma_{AB} = \text{Cov}(A, B) &= \sum_{i=1}^{n} p(s)(r_A(s) - \text{E}r_A)(r_B(s) - \text{E}r_B) \\ &= [0{,}5 \times (40 - 10)(-20 - 10)] + [0{,}5 \times (-20 - 10)(40 - 10)] = -900\end{aligned}$$

A variância da carteira é:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (1/2)^2 \times \sigma_A^2 + (1/2)^2 \times \sigma_B^2 + 2 \times (1/2) \times (1/2) \times \sigma_{AB} \\ &= (1/2)^2 \times 900 + (1/2)^2 \times 900 + 2 \times (1/2) \times (1/2) \times (-900) = 0\end{aligned}$$

Logo, por meio da diversificação de sua carteira de investimentos, o indivíduo consegue montar uma carteira sem risco, que terá o mesmo retorno em todo estado da natureza (no exemplo acima, igual a 10%). Nem sempre será possível eliminar todo o risco, ou seja, montar uma carteira de investimentos tal que o seu retorno seja sempre o mesmo, em todo estado da natureza. Porém, ao diversificarmos, podemos quase sempre eliminar parte do risco inerente a cada título individual, chamado *risco idiossincrático*, sobrando apenas o que chamamos *risco sistemático* ou *risco não-diversificável*. Resumindo, a diversificação pode diminuir o risco e, até mesmo, eliminá-lo.

Vamos generalizar a fórmula da variância de uma carteira para mais de dois ativos, para desenvolver a ideia do *princípio da diversificação*:

- Para 3 ativos: $x_1, x_2, x_3$: pesos nos ativos 1, 2 e 3. Então:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \mathrm{E}\left(r_p - \mathrm{E}r_p\right)^2 \\ &= \mathrm{E}[x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3 - (\mathrm{E}(x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3))]^2 \\ &= \mathrm{E}\left[x_1\left(r_1 - \mathrm{E}r_1\right) + x_2\left(r_2 - \mathrm{E}r_2\right) + x_3\left(r_3 - \mathrm{E}r_3\right)\right]^2 \\ &= x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + 2x_1x_2\sigma_{12} + 2x_1x_3\sigma_{13} + 2x_2x_3\sigma_{23}\end{aligned}$$

- De modo geral, para $n$ ativos com pesos $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \mathrm{E}\left(r_p - \mathrm{E}r_p\right)^2 \\ &= \mathrm{E}[x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n - (\mathrm{E}(x_1 r_1 + \cdots + x_n r_n))]^2 \\ &= \mathrm{E}\left[x_1\left(r_1 - \mathrm{E}r_1\right) + \cdots + x_n\left(r_n - \mathrm{E}r_n\right)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}\end{aligned}$$

Vamos supor que existem $n$ ativos, e que a carteira usa pesos iguais, na proporção $1/n$ para cada ativo. Deste modo, a fórmula acima para a variância da carteira se torna:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \sigma_{ij}$$

Se $\sigma_i^2 \geq \sigma^2$, $\forall i$, e $\sigma_{ij} \leq \bar{\sigma}$, $\forall i, j$, então:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{n^2} \times \sigma_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\bar{\sigma}}{n^2} = \frac{n(n-1)\bar{\sigma}}{n^2}$$

Se tirarmos o limite com $n$ tendendo a infinito, obtemos então que $\sigma_p^2 \to \bar{\sigma}$.

Logo, para o caso geral de vários ativos temos que a contribuição individual da variância dos ativos à variância da carteira tende a zero com diversificação. O risco que permanece tende à covariância média dos ativos. A diversificação então tende a eliminar risco individual, mas o risco gerado pelas covariâncias nem sempre pode ser totalmente eliminado.

Observe que:

1. O risco da carteira – desvio-padrão ou variância – resulta dos riscos – desvio-padrão ou variância – dos ativos individuais e das covariâncias entre os retornos dos ativos da carteira e dos pesos com que cada ativo entra na composição da carteira.

2. O risco da carteira decresce com uma decrescente correlação entre os retornos dos ativos. Quando os ativos são perfeita e negativamente correlacionados, é possível formar uma carteira sem risco, mesmo que todos os ativos sejam arriscados.

3. A redução do risco devido à diversificação depende de os ativos mantidos não serem perfeita e positivamente correlacionados (caso *vendas a descoberto* não sejam permitidas).

O princípio da diversificação norteia diversos modelos de finanças. Vamos discutir de maneira simplificada, com ênfase na parte que usa ferramentas microeconômicas, três modelos clássicos de finanças: 1) escolha de carteira de Markowitz, 2) o CAPM, e 3) árvore de Lucas.

# 3 Modelo de Escolha de Portfólio de Markowitz

O modelo de média e variância de Markowitz pode ser dividido em três partes. As duas primeiras, deteminação da fronteira de média-variância e determinação do portfólio tangente, são puramente técnicas. A última, determinação da carteira ótima, depende da utilidade do indivíduo. O modelo assume que os indivíduos levam em conta apenas o retorno e o risco quando tomam suas decisões de investimento.

## 3.1 Fronteira de Média-Variância

Em geral, temos uma quantidade grande de ativos financeiros à disposição do investidor. Queremos caracterizar a *fronteira de média-variância* dos ativos com risco (apesar desse nome, na verdade iremos determinar uma fronteira de média e desvio-padrão). Ou seja, queremos identificar para cada nível de retorno esperado, a carteira com menor variância.

Logo, o problema que queremos resolver é:

$$\min_{x_1,\ldots,x_n} \sigma_p^2 \qquad \text{s.a.} \qquad \mathrm{E}r_p = \mu\,, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1\,,$$

isto é,

$$\min_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{i=1}^n x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i\neq j} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad \text{s.a.} \qquad x_1\mathrm{E}r_1 + \cdots + x_n\mathrm{E}r_n = \mu\,, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1\,.$$

O problema escrito em forma matricial é:

$$\min_{x_1,\ldots,x_n} \mathbf{x}^T\Omega\,\mathbf{x} \qquad \text{s.a.} \qquad \mathbf{x}^T\mathrm{E}\mathbf{r} = \mu\,, \quad \mathbf{x}^T\mathbf{1} = 1\,,$$

onde $\mathbf{x}$ é o vetor de dimensão $n \times 1$ de pesos (o superescrito $^T$ indica a transposta de vetores ou matrizes), $\Omega$ é a matriz de variância e covariância e $\mathrm{E}\mathbf{r}$ é o vetor de retornos esperados, e $\mathbf{1}$ é o vetor $n \times 1$ formado por 1 em toda entrada:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{E}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}r_1 \\ \mathrm{E}r_2 \\ \vdots \\ \mathrm{E}r_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Escrever o problema na forma matricial simplifica a sua resolução (assim como derivar os estimadores de mínimos quadrados ordinários do problema da minimização da soma do quadrado dos resíduos se torna mais simples se esse problema é representado matricialmente). Porém, não vamos fazer essa derivação, já que nosso propósito é enfatizar a parte microeconômica do modelo de Markowitz.

É possível mostrar que a variância mínima será uma função quadrática do retorno esperado. Logo, no espaço retorno esperado/desvio-padrão, a fronteira de média-variância tem a forma de uma hipérbole.

Um investidor irá escolher carteiras na *fronteira eficiente*, ou seja, na parte crescente da fronteira de média e variância. Mas será possível restringir mais o conjunto de ativos com risco que um investidor deve escolher, ainda sem supor nada sobre a forma funcional específica da sua função de utilidade? A próxima subseção mostra que sim.

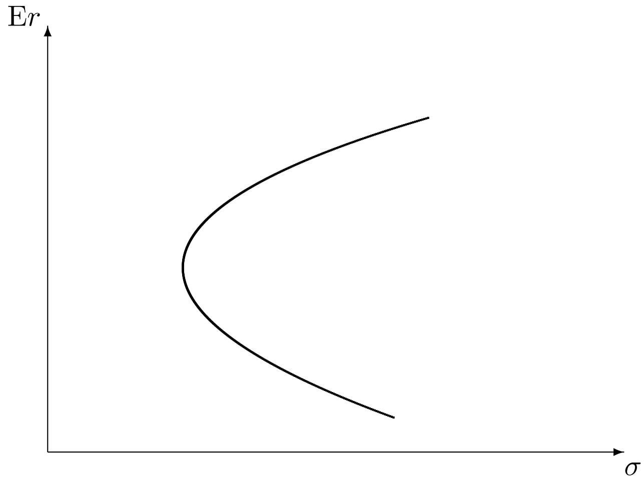


Figura 1: Fronteira de Média-Variância

## 3.2 Carteira Tangente

Vamos supor que a utilidade do indivíduo é do tipo *média e variância*, em que maior a média (o retorno esperado), maior a utilidade, e menor a variância, maior a utilidade (indivíduo avesso ao risco). O exemplo abaixo mostra que alavancar cria a possibilidade de carteiras com retornos esperados maiores, mas ao custo de volatilidades mais elevadas.

**Exemplo:** Suponha dois ativos, $A$ e $B$, tais que $\mathrm{E}r_A = 8\%$, $\sigma_A = 3\%$, $\mathrm{E}r_B = 14\%$, $\sigma_B = 6\%$ e $\rho_{AB} = 0{,}5$. Vamos supor que vendas a descoberto são permitidas e que o indivíduo tem uma renda de R$ 100 para investir. Se ele investir apenas em $B$ (carteira $x_A = 0$ e $x_B = 1$), ele obtém um retorno esperado de 14%. Suponha que $x_A = -10$ e $x_B = 11$ (note que $x_A + x_B = 1$). Ou seja, ele vende $ 1000 do ativo $A$ a descoberto, que a um retorno esperado de 8% implica $-80$ de retorno esperado, ou seja, 80% da renda dele. Se ele usa os R$ 1000 adquiridos com a venda a descoberto, somados a sua renda de R$ 100, para investir em $B$, ele obtém um retorno esperado de R$ 154, ou seja, 154% da renda inicial. O payoff esperado final é de R$ 74, ou seja, um retorno esperado de 74%. Portanto, a alavancagem serviu para aumentar o retorno esperado. É fácil perceber que se aumentarmos mais a alavancagem, aumentaremos o retorno esperado obtido. Porém essa estratégia também aumentará o risco:

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + x_A x_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} \\
&= (-10)^2(3\%)^2 + (11)^2(6\%)^2 + 2(-10)(11)(3\%)(6\%)0{,}5 \\
&= 32{,}76\%
\end{aligned}$$

Ou seja, o desvio-padrão da carteira é 57,24%. Portanto, a alavancagem de fato permite obter um retorno esperado mais alto, mas à custa de mais risco.

Logo, queremos uma medida que leve em conta esse trade-off entre retorno esperado e risco. Suponha que exista um ativo sem risco, cujo retorno vamos denotar por $r_f$. A medida que iremos usar é chamada *taxa de Sharpe* (*Sharpe ratio* ou também *preço do risco*), definida como:

$$TS_p = \frac{\mathrm{E}r_p - r_f}{\sigma_p}$$

Essa medida leva em conta o trade-off entre retorno esperado e risco. Suponha $r_f = 2\%$. A taxa Sharpe para os dois portfólios do exemplo acima são:

$$TS(x_A = 0, x_B = 1) = \frac{14\% - 2\%}{6\%} = 2$$
$$TS(x_A = -10, x_B = 11) = \frac{74\% - 2\%}{57{,}24\%} \approx 1{,}26$$

Portanto o portfólio alavancado tem uma taxa Sharpe menor do que o portfólio não-alavancado, indicando que o aumento de retorno esperado foi à custa de um aumento mais do que proporcional no risco. Nosso objetivo é determinar a *carteira tangente* (ou portfólio tangente), ou seja, a carteira de ativos com risco com a maior taxa Sharpe possível. O gráfico abaixo ilustra essa carteira para a fronteira de média-variância considerada.

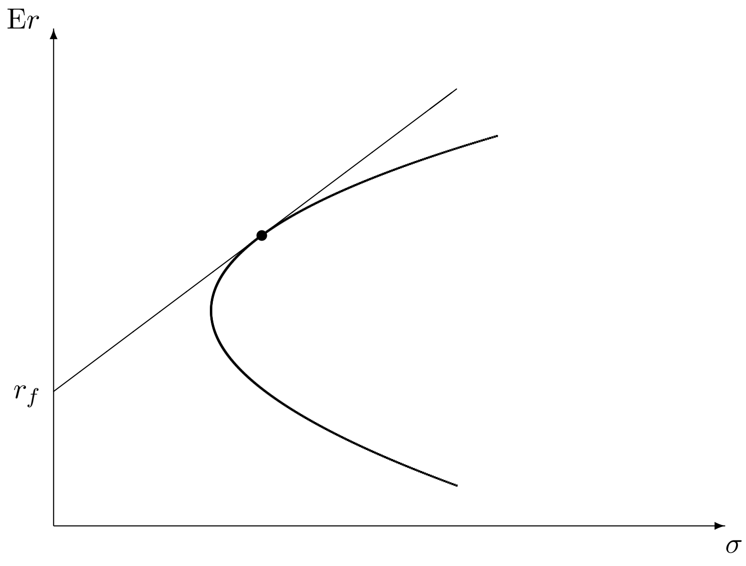


Figura 2: Carteira Tangente

O problema então que queremos resolver é:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \frac{\mathrm{E}(r_p) - r_f}{\sigma_p} \qquad \text{s.a.} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{1}$$

Podemos resolver o problema acima usando o método de Lagrange e assumindo a validade ou não de certas hipóteses (por exemplo, se *vendas a descoberto* são permitidas e se é possível aplicar e tomar dinheiro emprestado à taxa de juros sem risco). Novamente, esse é um problema técnico e não vamos nos preocupar em derivar a sua solução.

## 3.3 Carteira Ótima

Suponha que determinamos a carteira tangente, que maximiza a taxa Sharpe, e denote essa carteira com o subscrito $p$. Suponha que exista um ativo sem risco, cujo retorno é denotado por $r_f$. O problema do investidor é decidir quanto investir no ativo sem risco e na carteira tangente, ou seja, determinar a fração da riqueza $x$ que deve ser investida na carteira tangente o que, por sua vez, determina a fração da riqueza investida no ativo sem risco, $1 - x$. Vamos denotar por $r_c$ e por $\sigma_c^2$ o retorno e a variância dessa carteira formada pelo ativo livre de risco e pela carteira tangente.

Por definição, como $r_c = xr_p + (1 - x)r_f$, temos que:

$$\mathrm{E}r_c = x\mathrm{E}r_p + (1 - x)r_f \tag{2}$$

$$\sigma_c^2 = x^2\sigma_p^2 \tag{3}$$

Observe que a expressão para $\sigma_c^2$ resulta em $x = \sigma_c/\sigma_p$. Se substituirmos esse valor para $x$ na expressão do retorno esperado da carteira $c$, obtemos:

$$\mathrm{E}r_c = r_f + (\mathrm{E}r_p - r_f)\, x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}r_c = r_f + \underbrace{(\mathrm{E}r_p - r_f)}_{\text{prêmio ao risco}} \frac{\sigma_c}{\sigma_p}$$

Rearranjando essa expressão, obtemos:

$$\mathrm{E}r_c = r_f + \left[\frac{\mathrm{E}r_p - r_f}{\sigma_p}\right] \sigma_c$$

Essa equação define uma reta no espaço retorno-esperado×desvio-padrão. Ela é chamada *linha de alocação de capital* (LAC); em inglês, *capital allocation line* (CAL). A CAL decompõe o retorno esperado da carteira completa em: 1) taxa sem risco; e 2) (taxa de retorno médio/volatilidade) × quantidade de risco. Observe que:

- $r_f$ é o intercepto,
- $(\mathrm{E}r_p - r_f)/\sigma_p$ é a inclinação.

A LAC mostra as combinações (os pares) de $\{\mathrm{E}r_c, \sigma_c\}$ factíveis, isto é, que podem ser alcançadas usando uma carteira composta da carteira tangente $p$ e do ativo sem risco. Vale então o *Teorema de Separação em Dois Fundos*: Todo investidor, independentemente de suas preferências, deve investir apenas em uma carteira formada por dois ativos: o ativo sem risco e a carteira tangente (alguns autores chamam esse resultado de separação em um fundo, já que não consideram $r_f$ um fundo de investimento).

Queremos determinar o ponto na LAC escolhido pelo investidor, ou seja, quais frações da renda ele irá alocar no ativo sem risco e na carteira tangente. Claramente, a composição dessa carteira completa depende da utilidade do investidor. A Figura 3 a seguir ilustra esse processo.

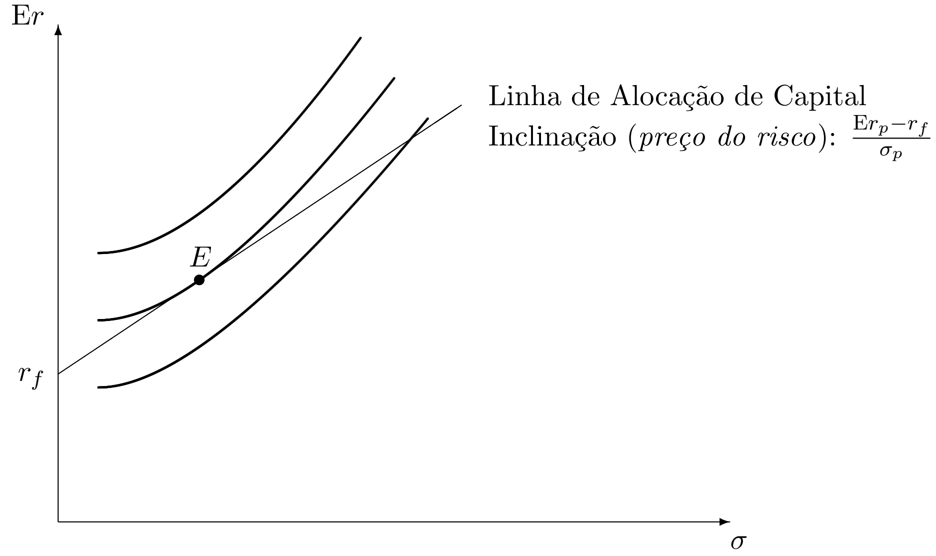


Figura 3: Escolha do Investidor

Suponha que o investidor tenha uma utilidade do tipo *média-variância*:

$$U = \mathrm{E}\left(r_c\right) - 0,005A\sigma_c^2 \tag{4}$$

onde $A > 0$ é um coeficiente de aversão ao risco (observe que se $A = 0$, o investidor é neutro ao risco, se $A < 0$, o investidor é propenso ao risco). Se substituirmos as expressões (2) e (3) na utilidade de média-variância (equação 4), obtemos:

$$\begin{aligned} U &= x\mathrm{E}r_p + (1-x)r_f - 0,005Ax^2\sigma_p^2 \\ &= r_f + \left(\mathrm{E}r_p - r_f\right)x - 0,005Ax^2\sigma_p^2 \end{aligned}$$

O problema do investidor é:

$$\max_x r_f + \left(\mathrm{E}r_p - r_f\right)x - 0,005Ax^2\sigma_p^2$$

A CPO desse problema é:

$$\mathrm{E}r_p - r_f - 0,01A\sigma_p^2 x = 0$$

Resolvendo a CPO para $x$, encontramos:

$$x^* = \frac{\mathrm{E}r_p - r_f}{0,01A\sigma_p^2}$$

Observe que o modelo de Markowitz implica que a fração ótima investida na carteira tangente $x^*$ será maior quanto:

- Maior for o excesso de retorno de $p$ (i.e., $\mathrm{E}r_p - r_f$),
- Menor for a variância $\sigma_p^2$ da carteira tangente,
- Menor a aversão ao risco do indivíduo ($A$) (ou seja, maior a fração da renda investida no ativo sem risco).

# 4 CAPM

O modelo de Markowitz analisa a questão de escolha de carteira de um investidor, onde, dadas as informações sobre preços e retornos dos ativos, construímos a fronteira de média e variância do mercado, que descreve as possibilidades de investimento em termos de retorno médio e desvio-padrão disponíveis ao indivíduo. Agora, queremos analisar a questão de como os preços ou retornos esperados desses ativos financeiros são determinados. Para isso, vamos desenvolver um modelo de equilíbrio de mercado onde os preços são determinados pela demanda e oferta.

O modelo CAPM ("*Capital Asset Pricing Model*" ou "*Modelo de Apreçamento de Mercado de Capitais*") é um modelo de equilíbrio de mercado que relaciona o retorno esperado (ou o preço) de cada ativo com o seu risco. Existem várias formas de derivar a equação fundamental do CAPM, cada uma assumindo um conjunto de hipóteses distinto. A equação fundamental do CAPM explica como os preços dos diversos ativos e carteiras de ativos devem estar relacionados. Quatro autores, em artigos independentes, desenvolveram a teoria do CAPM.

Logo, o CAPM proporciona uma previsão do relacionamento entre risco de um ativo e seu retorno esperado. Esse relacionamento pode ser usado, por exemplo, para:

- Definir estratégias de investimento;
- Fornecer uma taxa de retorno de referência para a avaliação de possíveis investimentos;
- Auxiliar a previsão de retornos esperados de ativos que ainda não foram comercializados no mercado;
- Calcular a taxa de retorno a ser usada em uma regulação de taxa de retorno ou de preço-teto.

A derivação que vamos desenvolver assume uma utilidade quadrática de dois períodos. As hipóteses são:

- Cada indivíduo é tomador de preços (não afeta preços ou retornos esperados);
- Não existem restrições a vendas a descoberto ou tomada de empréstimos;
- A função de utilidade de Bernoulli em cada período é do tipo quadrática:
$$u(c) = -\frac{1}{2}(c-v)^2 \ ,$$
onde $v$ é um parâmetro grande o suficiente de modo que garanta que a utilidade marginal do consumo seja positiva para todo nível de consumo relevante.
- Os agentes vivem por dois períodos (jovem e idoso, hoje e amanhã). Sob certas condições, podemos estender o modelo para períodos mais longos. Logo, a função de utilidade intertemporal é:
$$U(c_t, c_{t+1}) = -\frac{1}{2}(c_t - v)^2 - \frac{1}{2}\beta \mathrm{E}_t\left[(c_{t+1}-v)^2\right] \ ,$$
onde $\beta$ é a taxa de desconto intertemporal.
- O agente nasce com uma riqueza $w_t$ no primeiro período e não trabalha. Ele pode investir em $n$ ativos com risco. Cada ativo $i$ custa uma unidade monetária e paga um retorno bruto $R^i_{t+1}$, $i = 1, \ldots, n$. Denote o *valor* investido no ativo $i$ por $s_i$, $\sum_{i=1}^n s_i = S_t$.

O problema do investidor é:

$$\max_{c_t,\{s_i\}_{i=1}^n} \; -\frac{1}{2}(c_t - v)^2 - \frac{1}{2}\beta \mathrm{E}_t\left[(c_{t+1} - v)^2\right] \quad \text{s.a.} \quad c_t + \sum_{i=1}^n s_i = w_t \quad \text{e} \quad c_{t+1} = \sum_{i=1}^n s_i R^i_{t+1}$$

Substituindo as restrições na função objetivo, podemos reescrever o problema como:

$$\max_{\{s_i\}_{i=1}^n} \; -\frac{1}{2}\left(w_t - \sum_{i=1}^n s_i - v\right)^2 - \frac{1}{2}\beta \mathrm{E}_t\left[\left(\sum_{i=1}^n s_i R^i_{t+1} - v\right)^2\right]$$

A CPO com respeito ao *valor* $s_i$ investido no ativo $i$, $i = 1, \ldots, n$, é:

$$(w_t - S_t - v) - \beta \mathrm{E}_t\left[R^i_{t+1}\left(\sum_{i=1}^n s_i R^i_{t+1} - v\right)\right] = 0$$

Podemos reescrever essa CPO como:

$$\mathrm{E}_t\left[\beta\left(\frac{\sum_{i=1}^n s_i R^i_{t+1} - v}{w_t - S_t - v}\right) R^i_{t+1}\right] = 1\,. \tag{5}$$

Defina:

$$m_{t+1} = \beta\left(\frac{\sum_{i=1}^n s_i R^i_{t+1} - v}{w_t - S_t - v}\right)$$

Então a equação (5) pode ser reescrita como:

$$\mathrm{E}_t\left[m_{t+1} R^i_{t+1}\right] = 1\,. \tag{6}$$

A variável aleatória $m_{t+1}$ é chamada *fator de desconto estocástico* e, para a função de utilidade quadrática, $m_{t+1}$ é linear no retorno $R^m_{t+1}$:

$$m_{t+1} = a_t + b_t R^m_{t+1}\,,$$

onde:

$$a_t = \frac{-\beta v}{c_t - v}\,, \qquad b_t = \frac{\beta(w_t - c_t)}{c_t - v} \qquad \text{e} \qquad R^m_{t+1} = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{w_t - c_t} R^i_{t+1}\,,$$

já que $c_t = w_t - S_t$. Observe que $s_i/(w_t - c_t) = s_i/S_t$ é a fração da renda usada para investir aplicada no ativo $i$. Logo $R^m_{t+1}$ é o retorno da carteira de investimentos do indivíduo.

A equação (6) é igual a:

$$\mathrm{E}_t[R^i_{t+1}]\mathrm{E}_t[m_{t+1}] + \mathrm{Cov}_t(R^i_{t+1}, m_{t+1}) = 1\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Como $m_{t+1} = a_t + b_t R^m_{t+1}$, temos que:

$$a_t \mathrm{E}_t[R^i_{t+1}] + b_t \mathrm{E}_t[R^i_{t+1}]\mathrm{E}_t[R^m_{t+1}] + b_t \mathrm{Cov}_t(R^i_{t+1}, R^m_{t+1}) = 1\,. \tag{7}$$

Se existir um ativo livre de risco com retorno bruto denotado por $R^f_t$, então a equação (6) implica:

$$R^f_t = \frac{1}{\mathrm{E}_t\left[m_{t+1}\right]} = \frac{1}{a_t + b_t \mathrm{E}_t[R^m_{t+1}]}$$

Com isso, podemos reescrever a equação (7) como:

$$\frac{\mathrm{E}_t[R^i_{t+1}]}{R^f_t} = 1 - b_t \mathrm{Cov}_t(R^i_{t+1}, R^m_{t+1}),$$

ou seja,

$$\mathrm{E}_t[R^i_{t+1}] - R^f_t = -b_t R^f_t \mathrm{Cov}_t(R^i_{t+1}, R^m_{t+1}) \,. \tag{8}$$

Esta última expressão é válida para qualquer retorno, inclusive o retorno de mercado $R^m_{t+1}$. Isso implica:

$$\mathrm{E}_t[R^m_{t+1}] - R^f_t = -b_t R^f_t \mathrm{Cov}_t(R^m_{t+1}, R^m_{t+1}) = -b_t R^f_t \mathrm{Var}_t(R^m_{t+1}) \,,$$

logo temos que:

$$-b_t R^f_t = \frac{\mathrm{E}_t[R^m_{t+1}] - R^f_t}{\mathrm{Var}_t(R^m_{t+1})}$$

Substituindo essa última expressão na equação (8), obtemos:

$$\mathrm{E}_t[R^i_{t+1}] - R^f_t = \frac{\mathrm{E}_t[R^m_{t+1}] - R^f_t}{\mathrm{Var}_t(R^m_{t+1})} \mathrm{Cov}_t(R^i_{t+1}, R^m_{t+1}) = \frac{\mathrm{Cov}_t(R^i_{t+1}, R^m_{t+1})}{\mathrm{Var}_t(R^m_{t+1})} \left[\mathrm{E}_t[R^m_{t+1}] - R^f_t\right]$$

Derivamos, portanto, a equação fundamental do CAPM:

$$\mathrm{E}_t[R^i_{t+1}] - R^f_t = \beta^{i,m}_t \left[\mathrm{E}_t[R^m_{t+1}] - R^f_t\right] \,,$$

onde

$$\beta^{i,m}_t = \frac{\mathrm{Cov}_t(R^i_{t+1}, R^m_{t+1})}{\mathrm{Var}_t(R^m_{t+1})} \,.$$

Essa equação pode ser reescrita em termos de retornos líquidos, usando a relação $r^i_t = R^i_t - 1$, o que resulta em:

$$\mathrm{E}_t[r^i_{t+1}] - r^f_t = \beta^{i,m}_t \left[\mathrm{E}_t[r^m_{t+1}] - r^f_t\right] \,,$$

onde:

$$\beta^{i,m}_t = \frac{\mathrm{Cov}_t(r^i_{t+1}, r^m_{t+1})}{\mathrm{Var}_t(r^m_{t+1})} \,.$$

Por que o resultado acima é um resultado de equilíbrio? Porque interpretamos o retorno da riqueza do agente como o *retorno de mercado* e precificamos todos os outros retornos em relação a este retorno em especial.

O CAPM pode ser graficamente interpretado pela Linha de Mercado de Capitais (*Security Market Line*): o intercepto é o retorno do ativo livre de risco $R^f_t$, e a inclinação da linha é o prêmio ao risco do excesso de retorno esperado da carteira de mercado com o ativo livre de risco, $\mathrm{E}_t[R^m_{t+1}] - R^f_t$.

Finalmente, observe a dependência em $t$ das expectativas acima. Isso significa que essas variáveis são calculadas usando toda informação disponível até o período analisado. Mais ainda, o *beta* de um ativo não necessariamente é constante ao longo do tempo. Isto é, o risco de um ativo financeiro, medido pelo seu *beta*, pode mudar ao longo do tempo.

Vamos simplificar a notação usada acima e escrever a expressão do CAPM sem a dependência em $t$ e com o ativo $i$ representado como subscrito, ou seja:

$$\mathrm{E}r_i = r_f + \beta_i(\mathrm{E}r_m - r_f),$$

onde $r_i$ é o retorno do ativo em análise, $r_m$ é o retorno do mercado, $r_f$ é o retorno do ativo sem risco e $\beta_i$ é o beta do ativo, definido como:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_m)}{\mathrm{Var}(r_m)}$$

Essa relação tem a seguinte interpretação econômica: como o ativo livre de risco não tem risco, seu retorno é associado somente ao custo de perda de liquidez ou custo de preterir o consumo para uma data futura. Esse retorno é chamado "*preço do tempo*". A diferença $\mathrm{E}r_m - r_f$ é o *excesso de retorno* do mercado, o valor do retorno esperado do mercado que excede a taxa de juros livre de risco. O *excesso de retorno* de mercado dividido pelo seu desvio-padrão, $(\mathrm{E}r_m - r_f)/\sigma_m$, é denominado "*preço do risco*" ou *taxa Sharpe*. O coeficiente $\mathrm{Cov}(r_i, r_M)/\sigma_m$ mede a *quantidade de risco de mercado* do ativo $i$. Então, o CAPM exprime:

$$\text{Ret. Esp.} = \text{Preço do Tempo} + \text{Preço do Risco} \times \text{Quant. de Risco}$$

O risco específico (não-sistemático) pode ser reduzido para um grau arbitrariamente baixo por meio de diversificações. Logo, os investidores não exigem um prêmio de risco como indenização por guardarem esse tipo de risco, e são compensados somente por manterem risco sistemático, o qual não pode ser diversificado. A contribuição de um só título para o risco de uma carteira grande depende apenas do risco sistemático desse título, medido pelo seu beta.

Se o CAPM é válido, então a única carteira de ativos com risco que qualquer investidor possuirá é a carteira de mercado. Na realidade, apenas alguns investidores mantêm verdadeiramente a carteira de mercado. Isso não necessariamente invalida o CAPM. Logo, obtemos um *teorema de separação em dois fundos*: todos os participantes do mercado investirão em carteiras compostas apenas pelo retorno de mercado e pelo retorno sem risco. Existem implicações de ordem prática desse fato, concernentes principalmente à gestão ativa de carteiras.

O modelo CAPM possui algumas limitações, pois depende da carteira teórica de mercado (que abrange todos os ativos, reais e financeiros, de uma economia, tais como ações estrangeiras, imóveis, capital humano, etc) e lida com retornos esperados em vez de retornos observados. Na prática, o que se faz é trabalhar com o modelo na forma de índice, usando retornos realizados e não esperados e carteiras reais, como S&P500, no caso americano, ou o índice IBOVESPA, no caso brasileiro, no lugar de carteira teórica de mercado.

O CAPM possui diversas aplicações. Pode ser usado, por exemplo, no setor de gestão de investimentos, para calcular o retorno esperado justo de um ativo de risco. Pode também ser aplicado às decisões de orçamento de capital, proporcionando o retorno que um novo projeto precisa oferecer para ser admitido pelos investidores, ou seja, dando o ponto de corte da *taxa interna de retorno – TIR*, ou da taxa de atratividade para o projeto. O CAPM, pode, além dessas aplicações, ser utilizado na confecção de taxas de serviços públicos, definindo a taxa de retorno que deveria ser permitida para que um serviço regulamentado ganhasse com o seu investimento em estabelecimentos industriais e equipamentos.

# 5 Modelo de Árvore de Lucas

O modelo de árvore de Lucas supõe:

(i) Agente representativo, um bem de consumo representado por $c_t$,

(ii) Horizonte infinito,

(iii) Uma árvore perfeitamente durável, que no início de cada período $t$ gera frutos $d_t$ aos seus donos, na forma do bem de consumo,

(iv) Os frutos da árvore não podem ser estocados e seguem algum processo estocástico qualquer,

(v) Existem ações perfeitamente divisíveis $s_t$ da árvore, que são negociadas em um mercado perfeitamente competitivo ao preço $p_t$.

O problema do agente representativo é:

$$\max_{\{c_t,s_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t\right) \qquad \text{s.a.} \qquad c_t + p_t s_{t+1} = \left(d_t + p_t\right) s_t \quad \forall t = 0, 1, \dots ,$$

em que $s_0$ é dado e $\beta \in (0,1)$ é o fator de desconto intertemporal.

Vamos resolver esse problema usando o método de Lagrange, mas outros métodos podem ser usados. O Lagrangeano do problema é:

$$\mathcal{L} = \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left\{\beta^t u\left(c_t\right) + \lambda_t \left[\left(d_t + p_t\right) s_t - c_t - p_t s_{t+1}\right]\right\},$$

onde $\lambda_t$ é o multiplicador de Lagrange associado à restrição orçamentária do período $t$. As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned}
(c_t): &\quad \beta^t u'(c_t) = \lambda_t \\
(s_{t+1}): &\quad -p_t\lambda_t + \mathrm{E}_t[\lambda_{t+1}(d_{t+1} + p_{t+1})] = 0 \\
(\lambda_t): &\quad (d_t + p_t)s_t - c_t - p_t s_{t+1} = 0
\end{aligned}$$

Além disso, é necessário impor mais uma condição (necessária por razões técnicas), chamada *condição de transversalidade* (CT), dada por:

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}_t(\lambda_{t+k} p_{t+k}) = 0$$

Podemos reescrever a CPO para $s_{t+1}$ como:

$$p_t \lambda_t = \mathrm{E}_t \lambda_{t+1} \left(d_{t+1} + p_{t+1}\right),$$

Usando a CPO para $c_t$, podemos eliminar os multiplicadores $\lambda$ da expressão acima, obtendo:

$$p_t u'(c_t) = \mathrm{E}_t \left[\beta u'(c_{t+1})(d_{t+1} + p_{t+1})\right] \tag{9}$$

A equação (9) é chamada *equação de Euler*. Ela diz que o custo marginal de se comprar uma ação da árvore, em termos de utilidade, dado por $p_t \beta^t u'(c_t)$, deve ser igual ao seu benefício marginal, também em termos de utilidade, dado por $\mathrm{E}_t\left[\beta^{t+1} u'(c_{t+1})(d_{t+1}+p_{t+1})\right]$, na escolha ótima do indivíduo. Ou seja, ele comprará ações da árvore até que o custo marginal dessa compra se iguale ao seu benefício marginal. Esta é a interpretação econômica da equação de Euler (não é difícil notar que essa condição é exatamente igual à relacionada com o problema de um investidor que vive apenas dois períodos, $t$ e $t+1$, e tem que decidir a quantidade $s_{t+1}$ de ações que deve comprar, sendo que ele possui uma quantidade $s_t$, tomando como dados os preços e o processo estocástico dos dividendos).

Podemos reescrever a equação de Euler como:

$$p_t = \mathrm{E}_t\left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\left(d_{t+1}+p_{t+1}\right)\right].$$

Em equilíbrio, o *agente representativo* consome todo o dividendo (os *frutos da árvore*), $c_t = d_t$ para todo $t$, logo:

$$p_t = \mathrm{E}_t\left[\beta \frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}\left(d_{t+1}+p_{t+1}\right)\right], \tag{10}$$

o que resulta na *equação de precificação fundamental*:

$$p_t = \mathrm{E}_t\left[m_{t+1} x_{t+1}\right],$$

onde $m_{t+1} = \beta u'(d_{t+1})/u'(d_t)$ é o *fator de desconto estocático intertemporal* e $x_{t+1} = d_{t+1} + p_{t+1}$ é o payoff recebido em $t+1$.

Portanto, diferentes modelos de precificação nada mais são diferentes modelos para o fator de desconto estocástico: utilidades distintas levam a fatores de desconto estocástico distintos e, portanto, a diferentes implicações para a precificação de ativos. Por exemplo, podemos derivar o CAPM usando uma utilidade quadrática, como fizemos anteriormente.

Substituindo $p_{t+1}$ recursivamente na expressão para $p_t$, obtemos:

$$\begin{aligned} p_t &= \mathrm{E}_t\left[\beta \frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}\left(d_{t+1} + \mathrm{E}_{t+1}\left[\beta \frac{u'(d_{t+2})}{u'(d_{t+1})}\left(d_{t+2}+p_{t+2}\right)\right]\right)\right] \\ &= \mathrm{E}_t\left[\beta \frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)} d_{t+1} + \beta^2 \frac{u'(d_{t+2})}{u'(d_t)}\left(d_{t+2}+p_{t+2}\right)\right] \end{aligned}$$

Repetindo essa substituição para todos os outros preços futuros, encontramos:

$$p_t = \mathrm{E}_t\left[\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \frac{u'(d_{t+k})}{u'(d_t)} d_{t+k} + \lim_{k\to\infty} \beta^k \frac{u'(d_{t+k})}{u'(d_t)} p_{t+k}\right].$$

Usando a condição de transversalidade, obtemos:

$$p_t = \mathrm{E}_t\left[\sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \frac{u'(d_{t+k})}{u'(d_t)} d_{t+k}\right],$$

ou seja, o preço é dado pelo valor presente de todos os dividendos gerados pela árvore. Podemos reescrever essa última expressão como:

$$p_t = \mathrm{E}_t\left[\sum_{k=1}^{\infty} m_{t+k} d_{t+k}\right],$$

onde $m_{t+j,t+k} = \beta^{k-j}(u'(d_{t+k})/u'(d_{t+j}))$ (ou $m_{t,t+k} \equiv m_{t+k}$, para facilitar a notação). A condição de transversalidade elimina a possibilidade de *bolhas*, ou seja, elimina a possibilidade de que preços não sejam determinados apenas pelos "*fundamentos*".

Podemos reescrever a equação (10) como:

$$p_t = \mathrm{E}_t\left[\beta\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}\right]\mathrm{E}_t\left(x_{t+1}\right) + \mathrm{Cov}_t\left[\beta\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}, x_{t+1}\right]$$

Se existir um ativo sem risco com retorno bruto $R^f_{t+1}$, então (10) implica:

$$\frac{1}{R^f_{t+1}} = \mathrm{E}_t\left[\beta\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}\right] = \mathrm{E}_t[m_{t+1}],$$

e, portanto, a expressão anterior se torna:

$$p_t = \frac{\mathrm{E}_t(x_{t+1})}{R^f_{t+1}} + \frac{\mathrm{Cov}_t\left[\beta u'(d_{t+1}), x_{t+1}\right]}{u'(d_t)}, \tag{11}$$

onde $\mathrm{E}_t(x_{t+1})/R^f_{t+1}$ é o preço do ativo em um mundo *neutro ao risco* (um mundo em que os indivíduos se preocupam apenas com o valor esperado) e $\mathrm{Cov}_t[\beta u'(d_{t+1}), x_{t+1}]/u'(d_t)$ é o ajustamento no preço dado pelo risco (um ativo cujo payoff covaria positivamente com o fator de desconto estocástico tem o seu preço aumentado).

Sob a hipótese de aversão ao risco ($u'' < 0$), a utilidade marginal do consumo $u'(c)$ é decrescente em $c$. Logo o preço do ativo diminui quando o seu payoff e consumo covariam positivamente e, portanto, o fator de desconto estocástico covaria negativamente com o payoff. Isso ocorre porque os investidores são avessos ao risco e não gostam de incerteza no consumo. Um ativo cujo payoff e consumo covariam positivamente torna o consumo mais volátil, de modo que o preço desse ativo deve ser menor para que seja comprado. Um ativo cujo payoff e consumo covariam negativamente torna o consumo menos volátil, logo ele é mais valioso para os investidores.

Observe que é a covariância do payoff com o fator de desconto estocástico que importa, e não a variância do payoff. Os investidores se importam com a **volatilidade do consumo**, e não com a volatilidade do payoff por si só.

Definindo $R_{t+1} = (p_{t+1} + d_{t+1})/p_t = x_{t+1}/p_t$, obtemos:

$$1 = \frac{\mathrm{E}_t(R_{t+1})}{R^f_{t+1}} + \frac{\mathrm{Cov}_t\left[\beta u'(d_{t+1}), R_{t+1}\right]}{u'(d_t)},$$

ou seja,

$$\frac{\mathrm{E}_t(R_{t+1}) - R^f_{t+1}}{R^f_{t+1}} = -\frac{\mathrm{Cov}_t\left[\beta u'(d_{t+1}), R_{t+1}\right]}{u'(d_t)}$$

Usando o fato de que:

$$\frac{1}{R^f_{t+1}} = \mathrm{E}_t\left[\beta\frac{u'(d_{t+1})}{u'(d_t)}\right],$$

obtemos:

$$\mathrm{E}_t(R_{t+1}) = R^f_{t+1} - \frac{\mathrm{Cov}_t\left[u'(d_{t+1}), R_{t+1}\right]}{\mathrm{E}_t\left[u'(d_{t+1})\right]} \tag{12}$$

Esta expressão é similar a (11), só que em termos de retornos, mais comum em finanças. Ela diz que ativos que covariam positivamente com o consumo (negativamente com a utilidade marginal do consumo) devem gerar um retorno esperado maior do que o retorno do ativo livre de risco, para induzir os investidores a comprar esses ativos.

# Leitura Recomendada

- Varian, cap. 11, 12 e 13.
- Pindick e Rubinfeld, cap. 5 - "Comportamento do Consumidor e Incerteza".
- Nicholson e Snyder, cap. 7 - "Uncertainty and Information".

# Exercícios

14.1) Considere um investidor com renda $w$ e utilidade $u(w) = \sqrt{w}$. Suponha que ele deseja investir R$ 150,00 na compra de ações de duas empresas, empresa A e empresa B. Os preços das ações das duas empresas são iguais a R$ 15,00. O preço das ações das duas empresas no período seguinte depende de dois estados da natureza: expansão ou contração. A tabela abaixo descreve os preços de ambas as ações para os dois estados da natureza possíveis, além das probabilidades destes estados.

| **Estado** | **Prob.** | **empresa A** | **empresa B** |
|---|---|---|---|
| expansão | 50% | 40 | 5 |
| contração | 50% | 5 | 40 |

a) Calcule o preço esperado destas ações. Calcule o retorno esperado destas ações.

b) Se o indivíduo investir toda a sua renda na ação A, qual será a sua utilidade esperada? Qual será a utilidade esperada se ele investir toda a renda na ação B?

c) Qual a utilidade esperada se o indivíduo investir metade da renda na ação A e metade na ação B?

d) Comparando as três possibilidades de investimento descritas nos itens b) e c), em qual delas o investidor obterá maior utilidade?

e) A opção de investimento encontrada no item d) é a que maximiza a utilidade do investidor?

14.2) Suponha que os investidores possam alocar sua riqueza em um ativo sem risco e uma carteira com risco $P$ que possua retorno esperado maior do que o retorno do ativo sem risco e que possua variância positiva. Suponha também que os investidores tenham função de utilidade $U = \mathrm{E}(r) - 0,005A\sigma^2$.

a) Mostre que a proporção ótima investida no ativo sem risco aumenta quando a taxa de juros sem risco aumentar.

b) Mostre que a mesma relação é válida quando o grau de aversão ao risco aumenta.

c) Em um gráfico com a *linha de alocação de capital (LAC)* e o mapa de indiferença de um agente, mostre como a escolha ótima muda quando a taxa de juros sem risco aumenta (seja consistente com a sua resposta no item a)).

14.3) Considere a equação do CAPM a seguir:

$$\mathrm{E}(r_i) = 0{,}04 + 0{,}10\beta_i$$

Qual é o excedente de retorno do mercado em relação à taxa livre de risco? Qual é o valor da taxa livre de risco?

14.4) Suponha que o CAPM estimado para certo período seja:

$$\mathrm{E}(r_i) = 0{,}06 + 0{,}18\beta_i$$

Imagine que durante o mesmo período dois fundos de investimento tenham apresentado os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} &\text{Fundo A:} \quad \text{Retorno Observado} = 10\%\,, \quad \text{beta} = 0{,}8 \\ &\text{Fundo B:} \quad \text{Retorno Observado} = 15\%\,, \quad \text{beta} = 1{,}2 \end{aligned}$$

O que pode ser dito a respeito de cada fundo?

14.5) Suponha um investidor avesso ao risco cujas preferências por consumo em $t$ e $t+1$ são dadas por (existem apenas dois períodos):

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta \mathrm{E}_t u(c_{t+1})\,,$$

onde $0 < \beta < 1$ é o fator de desconto subjetivo. Suponha que exista um ativo cujo preço é $p_t$. O payoff desse ativo no próximo período é dado por $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$, onde $d_{t+1}$ são os dividendos pagos. O investidor tem uma renda $w_t$ no período $t$ e no período $t+1$ ele tem uma renda $w_{t+1}$. Denote por $z$ o quanto desse ativo o investidor quer comprar.

a) Qual a restrição orçamentária no período $t$? Qual a restrição orçamentária no período $t+1$? Formule o problema do consumidor/investidor.

b) Derive a CPO com respeito a $z$. Escreva essa CPO com $p_t$ isolado no lado esquerdo da expressão encontrada.

c) Suponha que esse investidor é um *agente representativo* e o mercado está em equilíbrio: $c_t = w_t$ e $c_{t+1} = w_{t+1}$. Qual é o fator de desconto estocástico $m_{t+1}$?

d) Suponha que a função de utilidade é quadrática, i.e.,

$$u(c) = -\frac{1}{2}(c - v)^2\,,$$

onde $v$ é um parâmetro. Reescreva o fator de desconto estocástico usando a forma funcional acima.

e) Mostre que se $w_{t+1} = R^m_{t+1} w_t$, podemos escrever esse fator de desconto estocástico como:

$$m_{t+1} = a_t + b_t R^m_{t+1}$$

Que tipo de modelo de precificação de ativos gera essa relação linear entre o fator de desconto estocástico e o retorno de mercado?