SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DE TÓPICOS DA TEORIA DO CONSUMIDOR

Microeconomia – Graduação – Parte 2/3

Departamento de Economia – Universidade de Brasília

Prof. José Guilherme de Lara Resende

NOTA DE AULA 10 – PREFERÊNCIA REVELADA

10.1) A tabela abaixo mostra os preços e as quantidades vendidas de 4 produtos em 2 períodos de tempo diferentes, para um determinado consumidor:

	Período 0		Período 1	
Produto	Preço (R$/Kg)	Quantidade (Kg)	Preço (R$/Kg)	Quantidade (Kg)
A	2	200	3	300
B	3	400	4	300
C	4	300	4	400
D	2	200	3	200

Dadas essas informações, responda os itens abaixo.

a) Calcule os índices de quantidade de Laspeyres e de Paasche.

S: Os índices de quantidade de Laspeyres (L_Q) e de Paasche (P_Q) são:

$$Q_L = \frac{2 \times 300 + 3 \times 300 + 4 \times 400 + 2 \times 200}{2 \times 200 + 3 \times 400 + 4 \times 300 + 2 \times 200} = \frac{3500}{3200} = \frac{35}{32}$$
$$Q_P = \frac{3 \times 300 + 4 \times 300 + 4 \times 400 + 3 \times 200}{3 \times 200 + 4 \times 400 + 4 \times 300 + 3 \times 200} = \frac{4300}{4000} = \frac{43}{40}$$

b) Compare os índices de quantidade de modo a obter (ou não) alguma inferência sobre o bem-estar deste consumidor.

S: Usando a solução do item anterior, observe que:

$$Q_P = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{43}{40} > 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 > \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0 \,,$$

o que significa que $\mathbf{x}^1 \succeq \mathbf{x}^0$, e, portanto, o consumidor está melhor no período 1.

c) Calcule os índices de preço de Laspeyres e de Paasche.

S: Os índices de preços de Laspeyres (P_L) e de Paasche (P_P) são:

$$P_L = \frac{3 \times 200 + 4 \times 400 + 4 \times 300 + 3 \times 200}{2 \times 200 + 3 \times 400 + 4 \times 300 + 2 \times 200} = \frac{4000}{3200} = \frac{5}{4}$$
$$P_P = \frac{3 \times 300 + 4 \times 300 + 4 \times 400 + 3 \times 200}{2 \times 300 + 3 \times 300 + 4 \times 400 + 2 \times 200} = \frac{4300}{3500} = \frac{43}{35}$$

d) Compare os índices de preço com a variação no gasto total deste consumidor, de modo a obter (ou não) alguma inferência sobre o bem-estar deste consumidor.

S: Primeiro observe que a variação no gasto total ΔGT é:

$$\Delta GT = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{3 \times 300 + 4 \times 300 + 4 \times 400 + 3 \times 200}{2 \times 200 + 3 \times 400 + 4 \times 300 + 2 \times 200} = \frac{43}{32}$$

Então como:

$$P_L = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0} = \frac{5}{4} = \frac{40}{32} < \frac{43}{32} = \Delta GT = \frac{\mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1}{\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{x}^0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^0 < \mathbf{p}^1 \cdot \mathbf{x}^1 \, ,$$

o que significa que $\mathbf{x}^1 \succeq \mathbf{x}^0$, e, portanto, o consumidor está melhor no período 1.

10.2) Suponha que existam apenas 3 bens e que um certo indivíduo escolhe as cestas $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ aos preços $\mathbf{p}^i = (p_1^i, p_2^i, p_3^i)$, $i = 1, 2, 3$ (logo, existem três observações de consumo desse indivíduo), onde:

Observação 1: $\mathbf{p}^1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{x}^1 = (5, 19, 9)$
Observação 2: $\mathbf{p}^2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{x}^2 = (12, 12, 12)$
Observação 3: $\mathbf{p}^3 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{x}^3 = (27, 11, 1)$

a) Mostre que essas observações satisfazem o Axioma Fraco da Preferência Revelada (AFrPR).

b) Mostre que essas observações não satisfazem o Axioma Forte da Preferência Revelada (AFoPR).

S: (itens a) e b) juntamente) A tabela abaixo, com os custos de cada cesta para cada situação de preço, mostra que a cesta 1 foi revelada preferida à cesta 3 ($\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$), a cesta 2 foi revelada preferida à cesta 1 ($\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$), e que a cesta 3 foi revelada preferida à cesta 2 ($\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$). Portanto não ocorre violação do AFrPR, já que sempre que temos que a cesta $\mathbf{x}$ é revelada diretamente preferida à cesta $\mathbf{y}$, não ocorre que a cesta $\mathbf{y}$ seja revelada diretamente preferida à cesta $\mathbf{x}$:

- $\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$ mas não ocorre $\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$;
- $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$ mas não ocorre $\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$;
- $\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$ mas não ocorre $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$;

Logo, as observações satisfazem o AFrPR. Porém as observações acima não satisfazem o AFoPR, já que a preferência revelada é intransitiva: $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$ e $\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$. Mais precisamente, segue de $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_1 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_3$ que $\mathbf{x}_2 \succeq_{R^I} \mathbf{x}_3$ e como ocorre que $\mathbf{x}_3 \succeq_{R^D} \mathbf{x}_2$, isso caracteriza a violação do AFoPR.

	Cesta Obs 1	Cesta Obs 2	Cesta Obs 3
Preços Obs 1	42	48	40(*)
Preços Obs 2	33(*)	36	39
Preços Obs 3	52	48(*)	50

10.3) Suponha que o indivíduo é indiferente entre as cestas $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Suponha que essas duas cestas foram escolhidas em momentos diferentes: quando $\mathbf{x}$ foi escolhido, os preços eram $\mathbf{p}^x = (p_1^x, p_2^x)$ e quando $\mathbf{y}$ foi escolhido, os preços eram $\mathbf{p}^y = (p_1^y, p_2^y)$.

a) Suponha que as escolhas desse indivíduo satisfazem o AFrPR. Obtenha a relação entre os custos das cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ no período x e no perído y. Explique o porquê dessas duas relações serem válidas.

S: Como o indivíduo é indiferente entre as cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, então deve valer que quando $\mathbf{x}$ foi escolhido, $\mathbf{y}$ custava pelo menos tanto quanto $\mathbf{x}$:

$$p_1^x x_1 + p_2^x x_2 \leq p_1^x y_1 + p_2^x y_2$$

De modo análogo, como o indivíduo é indiferente entre as cestas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, então deve valer que quando $\mathbf{y}$ foi escolhido, $\mathbf{x}$ custava pelo menos tanto quanto $\mathbf{y}$:

$$p_1^y y_1 + p_2^y y_2 \leq p_1^y x_1 + p_2^y x_2$$

Essas desigualdades devem ser válidas pois as duas cestas, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são indiferentes e estamos assumindo que o AFrPR é satisfeito (estamos assumindo também que a preferência revelada do consumidor satisfaz alguma propriedade de mononotonicidade, pois se valesse por exemplo que $p_1^x x_1 + p_2^x x_2 > p_1^x y_1 + p_2^x y_2$, como $\mathbf{x} \sim_{R^D} \mathbf{y}$, se o indivíduo aumentasse um pouco o consumo dos bens na cesta $\mathbf{y}$, ele poderia comprar essa nova cesta obtendo utilidade maior).

b) Manipulando as duas relações obtidas na solução do item anterior, obtenha agora uma relação que mostre que o efeito substituição é negativo.

S: Podemos reescrever as duas desigualdades obtidas na solução do item a) como:

$$\begin{aligned} p_1^x(x_1 - y_1) + p_2^x(x_2 - y_2) &\leq 0 \\ -p_1^y(x_1 - y_1) - p_2^y(x_2 - y_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Somando essas duas desigualdades, obtemos:

$$(p_1^x - p_1^y)(x_1 - y_1) + (p_2^x - p_2^y)(x_2 - y_2) \leq 0$$

Denotando $\Delta p_i = p_i^x - p_i^y$ e $\Delta q_i = x_i - y_i$, para $i = 1, 2$, temos que:

$$\Delta p_1 \Delta q_1 + \Delta p_2 \Delta q_2 \leq 0$$

Suponha, por exemplo, que não houve variação no preço do bem 2, isto é, $\Delta p_2 = 0$. Então a útima desigualdade obtida na solução do item b) se torna:

$$\Delta p_1 \Delta q_1 \leq 0$$

Logo, se $\Delta p_1 > 0$ (ou seja, $p_1^x > p_1^y$, o preço do bem 1 aumentou do período $\mathbf{x}$ para o período $\mathbf{y}$), então $\Delta q_1 \leq 0$ (ou seja, $x_1 \leq y_1$, a quantidade consumida do bem 1 diminui do do período $\mathbf{x}$ para o período $\mathbf{y}$). Isso significa que o efeito substituição é negativo (note que a utilidade é a mesma nos dois períodos).

c) Analise o resultado obtido anteriormente. Você precisou assumir a existência de funções de utilidade ou de que a taxa marginal de substituição seja decrescente em valor absoluto ao longo da curva de indiferença?

S: Obtivemos o resultado da solução do item b) sem assumir nada sobre funções de utilidade ou taxas marginais de substituição.

10.4) Suponha que Renata consome apenas dois bens, cerveja e prato de macarrão. Quando o preço da cerveja é R$ 4 e o preço do prato de macarrão é R$ 8, ela consome uma cerveja e dois pratos de macarrão. Quando o preço da cerveja é R$ 5 e o preço do prato de macarrão é R$ 10, ela consome duas cervejas e um prato de macarrão. O comportamento de Renata é coerente com o modelo de maximização de utilidade que estudamos?

S: Vamos denotar as duas observações descritas na questão por:

$$\begin{array}{ll} \text{Obs1:} & x^1 = (x_c^1, x_m^1) = (1,2),\ p^1 = (p_c^1, p_m^1) = (4,8) \\ \text{Obs2:} & x^2 = (x_c^2, x_m^2) = (2,1),\ p^2 = (p_c^2, p_m^2) = (5,10), \end{array}$$

onde o subscrito c indica cerveja e o subscrito m indica prato de macarrão. Note que nas duas observações a renda de Renata era R$ 20:

$$\begin{array}{ll} \text{Renda na Obs1:} & p_c^1 x_c^1 + p_m^1 x_m^1 = 4 + 16 = 20 \\ \text{Renda na Obs2:} & p_c^2 x_c^2 + p_m^2 x_m^2 = 10 + 10 = 20 \end{array}$$

Devemos verificar se essas escolhas satisfazem o AFoPR, que esgota todas implicações testáveis da teoria do consumidor. Como só temos duas observações, basta verificarmos o AFrPR. A tabela abaixo calcula o gasto de cada cesta para os preços das duas observações:

	Cesta Obs 1	Cesta Obs 2
Preços Obs 1	20	16
Preços Obs 2	25	20

A primeira linha diz aos preço da cesta escolhida (cesta obs. 1), a cesta 2 poderia ter sido escolhida. Portanto, a cesta da observação 1 é revelada preferida à cesta da observação 2. Porém, aos preços da observação 2, a cesta da observação 1 não poderia ser comprada. Não existe portanto nenhuma violação da teoria de maximização de utilidade e o comportamento de Renata é coerente com o modelo de maximização de utilidade que estudamos.

10.5) A tabela abaixo mostra os preços e as quantidades vendidas de 2 bens em 2 períodos de tempo diferentes, para um determinado consumidor:

	Período 1		Período 2	
Bem	Preço (R$/Kg)	Quantidade (Kg)	Preço (R$/Kg)	Quantidade (Kg)
x_1	100	100	100	120
x_2	100	100	80	?

Para quais valores do bem x_2 consumidos no período 2 podemos concluir que:

a) O comportamento deste consumidor viola o AFrPR.

S: Denote os preços e quantidades no período 1 por $\mathbf{p}^1 = (p_1^1, p_2^2)$ e $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ e no período 2 por $\mathbf{p}^2 = (p_1^2, p_2^2)$ e $\mathbf{x}^2(x_1^2, x_2^2)$. Para que o AFrPR seja violado devemos ter que as duas desigualdades abaixo sejam válidas:

$$\begin{array}{c} p_1^1 x_1^2 + p_2^1 x_2^2 \leq p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 \\ p_1^2 x_1^1 + p_2^2 x_2^1 \leq p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 \end{array}$$

A primeira desigualdade significa que a cesta $\mathbf{x}^1$ consumida no período 1 é revelada diretamente preferida à cesta $\mathbf{x}^2$ escolhida no período 2 e a segunda desigualdade significa que a cesta $\mathbf{x}^2$ consumida no período 2 é revelada diretamente preferida à cesta $\mathbf{x}^1$ escolhida no período 1. Substituindo para os valores dados na questão, obtemos que as duas desigualdades acima resultam em:

$$\begin{aligned}100 \times 120 + 100 \times x_2^2 \leq 100 \times 100 + 100 \times 100 \\ 100 \times 100 + 80 \times 100 \leq 100 \times 120 + 80 \times x_2^2\end{aligned}$$

A primeira desigualdade resulta em $x_2^2 \leq 80$ e a segunda desigualda resulta em $x_2^2 \geq 75$. Logo, se $75 \leq x_2^2 \leq 80$, então o AFrPR será violado.

b) Que a cesta consumida no período 1 é revelada diretamente preferida à cesta consumida no período 2 (assuma que o AFrPR é satisfeito)?

S: Usando a notação do item anterior, temos a cesta consumida no período 1 será revelada diretamente preferida à cesta consumida no período 2 e o AFrPR será satisfeito se valer que:

$$\begin{aligned}p_1^1 x_1^2 + p_2^1 x_2^2 \leq p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 \\ p_1^2 x_1^1 + p_2^2 x_2^1 > p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2\end{aligned}$$

A primeira desigualdade significa que a cesta consumida no período 1 é revelada diretamente preferida à cesta escolhida no período 2 e a segunda desigualdade significa que a cesta consumida no período 2 *não* é revelada diretamente preferida à cesta escolhida no período 1. Substituindo para os valores dados na questão, obtemos que as duas desigualdades acima resultam em:

$$\begin{aligned}100 \times 120 + 100 \times x_2^2 \leq 100 \times 100 + 100 \times 100 \\ 100 \times 100 + 80 \times 100 > 100 \times 120 + 80 \times x_2^2\end{aligned}$$

A primeira desigualdade resulta em $x_2^2 \leq 80$ e a segunda desigualda resulta em $x_2^2 < 75$. Logo, se $x_2^2 < 75$, as duas desigualdades acima são satisfeitas e vale o que o item pediu.

c) Que a cesta consumida no período 2 é revelada diretamente preferida à cesta consumida no período 1 (assuma que o AFrPR é satisfeito)?

S: Usando a notação do item a), temos a cesta consumida no período 2 será revelada diretamente preferida à cesta consumida no período 1 e o AFrPR será satisfeito se valer que:

$$\begin{aligned}p_1^1 x_1^2 + p_2^1 x_2^2 > p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 \\ p_1^2 x_1^1 + p_2^2 x_2^1 \leq p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2\end{aligned}$$

A primeira desigualdade significa que a cesta consumida no período 1 *não* é revelada diretamente preferida à cesta escolhida no período 2 e a segunda desigualdade significa que a cesta consumida no período 2 é revelada diretamente preferida à cesta escolhida no período 1. Substituindo para os valores dados na questão, obtemos que as duas desigualdades acima resultam em:

$$\begin{aligned}100 \times 120 + 100 \times x_2^2 > 100 \times 100 + 100 \times 100 \\ 100 \times 100 + 80 \times 100 \leq 100 \times 120 + 80 \times x_2^2\end{aligned}$$

A primeira desigualdade resulta em $x_2^2 > 80$ e a segunda desigualda resulta em $x_2^2 \geq 75$. Logo, se $x_2^2 > 80$, as duas desigualdades acima são satisfeitas e vale o que o item pediu.

10.6) Considere que existem três bens e que as demandas ótimas do consumidor são:

$$x_1^M(\mathbf{p}, m) = \frac{p_2}{p_3}\,, \qquad x_2^M(\mathbf{p}, m) = -\frac{p_1}{p_3}\,, \qquad \text{e} \qquad x_3^M(\mathbf{p}, m) = \frac{m}{p_3}$$

a) Mostre que as demandas ótimas acima satisfazem a lei de Walras e a propriedade de homogeneidade.

S: Primeiro vamos verificar que as funções de demanda descritas na questão satisfazem a lei de Walras. Usando a solução do item a), temos que:

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* + p_3 x_3^* = p_1\left(\frac{p_2}{p_3}\right) + p_2\left(-\frac{p_1}{p_3}\right) + p_3\left(\frac{m}{p_3}\right) = \frac{p_1 p_2}{p_3} - \frac{p_1 p_2}{p_3} + m = m$$

Agora vamos mostrar que as funções de demanda acima satisfazem a propriedade de homogeneidade. Temos que para todo $t \in \mathbb{R}$ vale:

$$x_1^M(tp_1, tp_2, tp_3, tm) = \frac{(tp_2)}{(tp_3)} = \frac{p_2}{p_3} = x_1^M(p_1, p_2, p_3, m)$$
$$x_2^M(tp_1, tp_2, tp_3, tm) = -\frac{(tp_1)}{(tp_3)} = -\frac{p_1}{p_3} = x_2^M(p_1, p_2, p_3, m)$$
$$x_3^M(tp_1, tp_2, tp_3, tm) = \frac{(tm)}{(tp_3)} = \frac{m}{p_3} = x_3^M(p_1, p_2, p_3, m)$$

b) Suponha que no momento 1 os preços são $(p_1, p_2, p_3) = (1, 2, 1)$ e a renda é $m = 1$. Calcule a escolha ótima do consumidor.

S: Usando as demandas acima, obtemos:

$$x_1^M(1, 2, 1, 1) = \frac{2}{1} = 2, \quad x_2^M(1, 2, 1, 1) = -\frac{1}{1} = -1, \quad \text{e} \quad x_3^M(1, 2, 1, 1) = \frac{1}{1} = 1$$

Logo a cesta ótima é $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (2, -1, 1)$.

c) Suponha que no momento 2 os preços são $(p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 1)$ e a renda é $m = 2$. Calcule a escolha ótima do consumidor.

S: Usando as demandas acima, obtemos:

$$x_1^M(1, 1, 1, 2) = \frac{1}{1} = 1, \quad x_2^M(1, 1, 1, 2) = -\frac{1}{1} = -1, \quad \text{e} \quad x_3^M(1, 1, 1, 2) = \frac{2}{1} = 2$$

Logo a cesta ótima é $(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = (1, -1, 2)$.

d) As duas escolhas descritas nos itens b) e c) satisfazem o AFrPR? O que esse fato indica sobre essas escolhas ótimas?

S: Primeiro note que no momento b), quando os preços e a renda eram $(p_1^b, p_2^b, p_3^b) = (1, 2, 1)$ e $m^b = 1$, a cesta do momento c), $(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = (1, -1, 2)$, poderia ser comprada:

$$1 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times 2 = 1 \leq 1 = m^b\,,$$

e, portanto, $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (2, -1, 1) \succeq_{R_D} (1, -1, 2) = (x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**})$ (a cesta do momento b) foi revelada diretamente preferida à cesta do momento c)). Agora note que no momento c), quando os preços e a renda eram $(p_1^c, p_2^c, p_3^c) = (1, 1, 1)$ e $m^c = 2$, a cesta do momento b), $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (2, -1, 1)$, poderia ser comprada:

$$1 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 2 \leq 2 = m^c\,,$$

e, portanto, $(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = (1, -1, 2) \succeq_{R_D} (2, -1, 1) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ (a cesta do momento c) foi revelada diretamente preferida à cesta do momento b)). Como $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (2, -1, 1) \succeq_{R_D} (1, -1, 2) = (x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**})$ e $(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = (1, -1, 2) \succeq_{R_D} (2, -1, 1) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, temos uma violação do AFrPR.

NOTA DE AULA 11 – RENDA ENDÓGENA

11.1) Um consumidor tem uma função utilidade $u(x_1, x_2) = x_1^{0,5} x_2^{0,5}$ e uma dotação inicial de $e_1 = 2$ e $e_2 = 1$.

a) Resolva o problema do consumidor e encontre as demandas brutas pelos bens.

S: O problema do consumidor é:

$$\max_{x_1, x_2} x_1^{0,5} x_2^{0,5} \qquad \text{s.a.} \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 e_1 + p_2 e_2$$

O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = x_1^{0,5} x_2^{0,5} + \lambda(p_1 e_1 + p_2 e_2 - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned}
(x_1): &\ \ 0{,}5 x_1^{-0,5} x_2^{0,5} = \lambda p_1 \\
(x_2): &\ \ 0{,}5 x_1^{0,5} x_2^{-0,5} = \lambda p_2 \\
(\lambda): &\ \ p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 e_1 + p_2 e_2
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de CPOs para x_1 e x_2 encontramos:

$$x_1(p_1, p_2, p_1 e_1 + p_2 e_2) = \frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{2 p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, p_1 e_1 + p_2 e_2) = \frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{2 p_2}$$

b) Suponha que os preços dos dois bens sejam $p_1 = p_2 = 1$. Calcule a demanda ótima nesse caso. O consumidor é vendedor líquido de algum dos bens?

S: Observe primeiro que para esses preços, a renda do consumidor é $p_1 e_1 + p_2 e_2 = 3$. Usando a solução do item a), temos que:

$$x_1(1,1,3) = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \text{e} \qquad x_2(1,1,3) = \frac{3}{2} = 1{,}5\,.$$

Logo, o consumidor é vendedor líquido do bem 1 e comprador líquido do bem 2.

c) Suponha que o preço do bem 1 diminui de 1 para $\tilde{p}_1 = 0{,}9$. O que ocorre nesse caso com o bem-estar do consumidor?

S: Quando o preço do bem 1 se altera, a renda do consumidor também se altera. Nesse caso, a nova renda é $\tilde{p}_1 e_1 + p_2 e_2 = 2{,}8$. Portanto, as novas demandas são:

$$x_1(0{,}9; 1; 2{,}8) = \frac{2{,}8}{2 \times 0{,}9} = 1{,}555 \qquad \text{e} \qquad x_2(0{,}9; 1; 2{,}8) = \frac{2{,}8}{2} = 1{,}4\,.$$

O consumidor era vendedor líquido do bem 1, cujo preço diminuiu e ele continuou a ser vendedor líquido desse bem. Podemos garantir então que o seu bem-estar diminui. Vamos verificar essa afirmação:

$$\begin{aligned}
\text{Bem-estar quando } p_1 = 1: &\ \ u(x_1, x_2) = 1{,}5^{0,5} \times 1{,}5^{0,5} = 1{,}5 \\
\text{Bem-estar quando } \tilde{p}_1 = 0,9: &\ \ u(x_1, x_2) = 1{,}555^{0,5} \times 1{,}4^{0,5} = 1{,}475\,,
\end{aligned}$$

ou seja, a utilidade quando $\tilde{p}_1 = 0{,}9$ é menor do que a utilidade quando $p_1 = 1$.

d) Suponha agora que o preço do bem 1 diminui de 1 para $\hat{p}_1 = 0{,}1$. O que ocorre nesse caso com o bem-estar do consumidor? Compare com o item anterior.

S: Novamente, a alteração no preço do bem 1 altera a renda do consumidor também. Nesse caso, a nova renda é $\hat{p}_1 e_1 + p_2 e_2 = 1{,}2$. Portanto, as novas demandas são:

$$x_1(0{,}1; 1; 1{,}2) = \frac{1{,}2}{2 \times 0{,}1} = 6 \qquad \text{e} \qquad x_2(0{,}1; 1; 1{,}2) = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6\,.$$

O consumidor era vendedor líquido do bem 1, cujo preço diminuiu e ele passou a ser comprador líquido do bem. Nesse caso, não podemos garantir se o seu bem-estar diminui ou aumenta a priori. Vamos calcular o que ocorre com o bem-estar do consumidor:

$$\begin{aligned} \text{Bem-estar quando } p_1 = 1: &\quad u(x_1, x_2) = 1{,}5^{0{,}5} \times 1{,}5^{0{,}5} = 1{,}5 \\ \text{Bem-estar quando } \hat{p}_1 = 0{,}1: &\quad u(x_1, x_2) = 6^{0{,}5} \times 0{,}6^{0{,}5} = 1{,}89\,, \end{aligned}$$

ou seja, a utilidade quando $\hat{p}_1 = 0{,}1$ é maior do que a utilidade quando $p_1 = 1$. Nesse caso, a diminuição do preço do bem 1 foi tão grande que ele deixou de ser vendedor e passou a ser comprador líquido do bem, obtendo um nível de utilidade mais alto.

11.2) Responda os seguintes itens, considerando um modelo de renda endógena.

a) Suponha um consumidor vendedor líquido do bem 1. Suponha que o preço deste bem diminuiu de modo que o consumidor decidiu se tornar comprador líquido do bem 1. Ilustre graficamente os três casos possíveis:

a.1) bem-estar diminui,

a.2) bem estar aumenta,

a.3) bem estar se mantém o mesmo.

S: Ver os gráficos feitos em sala.

b) Se o consumidor descrito no item a), após a diminuição do preço do bem 1, continuou sendo vendedor líquido do bem, o que ocorre com o seu bem-estar? Ilustre graficamente a sua resposta.

S: Se o preço do bem que o indivíduo vende caiu e ele continuou vendedor líquido desse bem, podemos garantir que o seu bem-estar caiu. Ver o gráfico feito em aula.

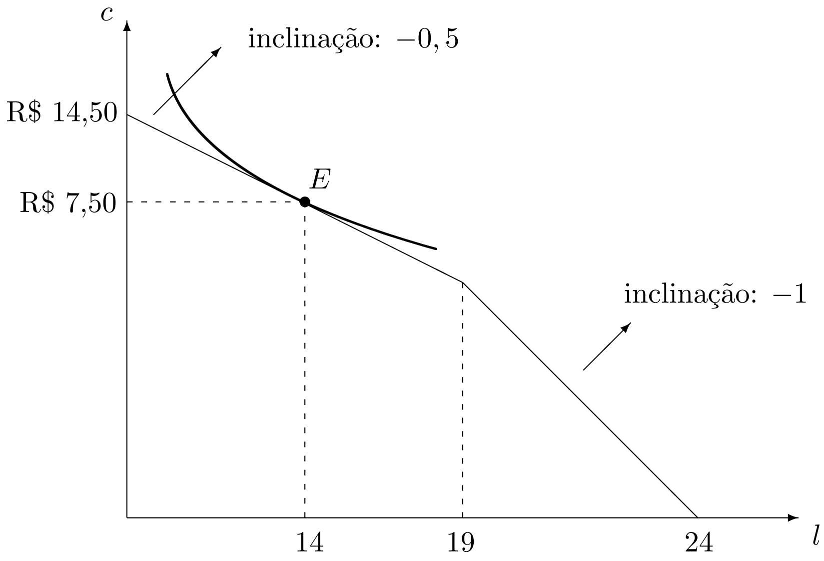
c) Em aula, nas notas e neste exercício, a análise feita assumiu a existência de apenas dois bens. As conclusões dos itens a) e b) acima e as obtidas em sala para os casos 1, 2, 3 e 4 se alteram? Justifique sua resposta.

S: Não. O que ocorre com n bens, é que ele pode ser comprador líquido de $n-1$ bens e vendedor líquido apenas de um bem (por exemplo, lazer). Porém isso não altera as conlusões qualitativas obtidas anteriormente.

11.3) Carlos pode trabalhar de 0 a 24 horas por dia, recebendo um salário de R$ 1 por hora. O imposto sobre a renda superior a R$ 5 por dia é de 50% (ou seja, os primeiros R$ 5 não são taxados). Carlos escolhe trabalhar 10 horas por dia. Além de lazer, Carlos consome um outro bem, com preço igual a R$ 1. Suponha que Carlos possua preferências bem-comportadas (ou seja, as curvas de indiferença associadas a essas preferências são convexas com relação à origem) e que não possua nenhuma outra fonte de renda além da obtida com trabalho.

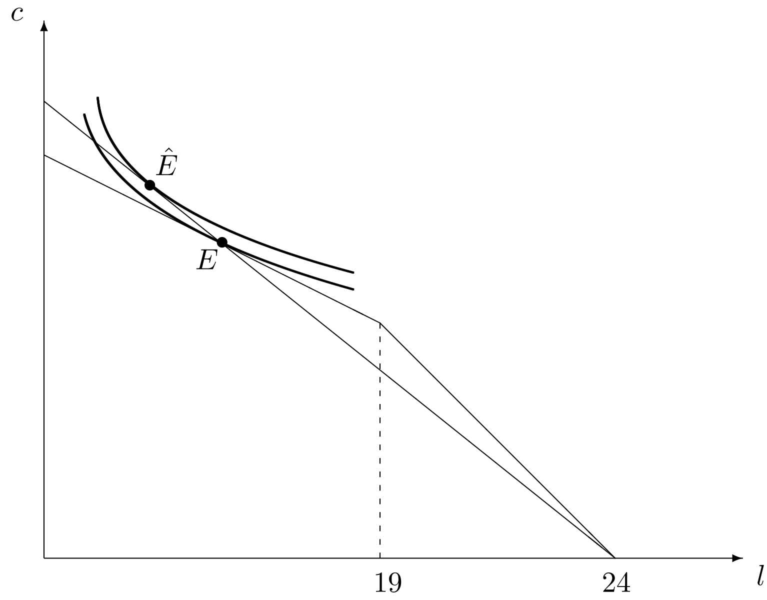
a) Ilustre graficamente a reta orçamentária de Carlos e a sua escolha ótima.

S: A reta orçamentária e a escolha ótima de Carlos, denotada por E, são representadas no gráfico abaixo.



b) O governo muda a forma do imposto: agora toda a renda está sujeita a um imposto de 25%. Carlos trabalha mais ou menos ou a mesma quantidade de horas agora? O governo coleta mais ou menos receita sobre o imposto de Carlos agora?

S: O ponto crucial para obtermos a nova reta orçamentária de Carlos e para solucionarmos o item é observar que o novo imposto coleta o mesmo valor que antes (R$ 2,50), *se Carlos continuasse trabalhando 10 horas*. Portanto, a nova reta orçamentária passa pela antiga escolha ótima de Carlos, representada pela cesta E na figura abaixo. Como as preferências são bem-comportadas, a nova cesta de equilíbrio, representada por $\hat{E}$ na figura abaixo, deve estar em uma curva de indiferença mais alta do que a original. Graficamente, obtemos que agora Carlos trabalha mais e consome mais, alcançando um nível maior de utilidade. Como Carlos trabalha mais do que 10 horas, o novo imposto coleta mais de R$ 0,25, o valor coletado com o imposto na situação original.



c) Qual tipo de imposto Carlos prefere? Justifique sua resposta.

S: Carlos prefere o novo imposto, já que ele alcança uma curva de indiferença mais alta (ver gráfico e discussão na solução do item b) acima).

11.4) Um consumidor tem uma função utilidade $u(x_1, x_2) = x_1x_2$ e uma dotação inicial de $e_1 = 1$ e $e_2 = 5$.

a) Resolva o problema do consumidor e encontre as demandas brutas pelos bens.

S: O problema do consumidor é:

$$\max_{x_1,x_2} x_1x_2 \qquad \text{s.a.} \qquad p_1x_1 + p_2x_2 = p_1e_1 + p_2e_2$$

O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = x_1x_2 + \lambda(p_1e_1 + p_2e_2 - p_1x_1 - p_2x_2)$$

As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1):&\ \ x_2 = \lambda p_1 \\ (x_2):&\ \ x_1 = \lambda p_2 \\ (\lambda):&\ \ p_1x_1 + p_2x_2 = p_1e_1 + p_2e_2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de CPOs para x_1 e x_2 encontramos:

$$x_1(p_1, p_2, p_1e_1 + p_2e_2) = \frac{p_1e_1 + p_2e_2}{2p_1} \qquad \text{e} \qquad x_2(p_1, p_2, p_1e_1 + p_2e_2) = \frac{p_1e_1 + p_2e_2}{2p_2}$$

b) Suponha que os preços dos dois bens sejam $p_1 = p_2 = 1$. Calcule a demanda ótima nesse caso. O consumidor é vendedor líquido de algum dos bens?

S: Observe primeiro que para esses preços, a renda do consumidor é $p_1e_1 + p_2e_2 = 6$. Usando a solução do item a), temos que:

$$x_1(1, 1, 6) = \frac{6}{2} = 3 \qquad \text{e} \qquad x_2(1, 1, 6) = \frac{3}{2} = 3\,.$$

Logo, o consumidor é comprador líquido do bem 1 e vendedor líquido do bem 2.

c) Suponha que o preço do bem 1 diminui de 1 para $\tilde{p}_1 = 0{,}5$. O que ocorre nesse caso com a demanda ótima dos bens 1 e 2 e com o bem-estar do consumidor?

S: Quando o preço do bem 1 se altera, a renda do consumidor também se altera. Nesse caso, a nova renda é $\tilde{p}_1e_1 + p_2e_2 = 5{,}5$. Portanto, as novas demandas são:

$$x_1(0{,}5; 1; 5{,}5) = \frac{5{,}5}{2 \times 0{,}5} = 5{,}5 \qquad \text{e} \qquad x_2(0{,}5; 1; 5{,}5) = \frac{5{,}5}{2 \times 1} = 2{,}75\,.$$

O consumidor era comprador líquido do bem 1, cujo preço diminuiu e ele continuou a ser comprador líquido desse bem. Podemos garantir então que o seu bem-estar aumenta. Vamos verificar essa afirmação:

$$\begin{aligned} \text{Bem-estar quando } p_1 = 1:&\ \ u(x_1, x_2) = 3 \times 3 = 9 \\ \text{Bem-estar quando } \tilde{p}_1 = 0,5:&\ \ u(x_1, x_2) = 5{,}5 \times 2{,}75 = 15{,}125\,, \end{aligned}$$

ou seja, a utilidade quando $\tilde{p}_1 = 0{,}5$ é maior do que a utilidade quando $p_1 = 1$.

d) Calcule os efeitos substituição, renda tradicional e renda dotação para a mudança de preço descrita no item anterior. Como se comportam os sinais dos efeitos renda tradicional e renda dotação?

S: Usando a solução dos itens anteriores, temos que a demanda pelo bem x_1 aumentou em 2,5 unidades. Logo, o efeito total é igual a $ET = +2{,}5$. Vamos calcular o efeito de substituição de Slutsky (para o efeito substituição de Hicks, devemos usar a demanda hicksiana). A renda necessária para comprar a cesta original aos novos preços é $\bar{R} = 0{,}5 \times 3 + 1 \times 3 = 4{,}5$. Logo a compensação de Slutsky consiste em *diminuir* a renda do indivíduo em 1 unidade monetária. Neste caso, a demanda por x seria $\bar{x} = \bar{R}/2 \times 0{,}5 = 4{,}5$. Como a demanda por x_1 aos preço iniciais era 3, então o efeito substituição de Slutsky é um aumento no consumo do bem x_1 de 1,5 unidade ($ES = +1{,}5$). Lembrando que o efeito renda é igual ao efeito total menos o efeito substituição, obtemos que o efeito renda total é igual a um aumento no consumo do bem x_1 de $2{,}5 - 1{,}5 = 1$ unidade ($ER_{\text{Total}} = +1$). Este efeito renda é composto do efeito renda tradicional mais o efeito renda dotação ($ER_{\text{Total}} = ER_{Trad} + ER_D$). O efeito renda tradicional pode ser obtido calculando qual seria o efeito total *caso a renda não mudasse de valor devido à mudança no preço do bem, que afeta o valor da dotação.* Neste caso, como a renda inicial é $m = 6$, o consumo do bem x com a sua queda de preço seria $\bar{x} = R/2p_x = 6/(2 \times 0{,}5) = 6$. O efeito total seria então de 3 unidades. Como o efeito substituição de Slutsky é 1,5, então o efeito renda tradicional é 1,5 ($ER_{Trad} = +1{,}5$). Logo o efeito renda dotação é igual a uma *queda* no consumo de x_1 de 0,5 unidade ($ER_D = -0{,}5$). A equação de Slutsky ampliada mostra que o efeito renda dotação e o efeito renda tradicional, caso não sejam nulos, terão sempre sinais opostos, quando o bem for normal. Isto é esperado: para uma queda de preço, o nível de renda real se expande, o que aumenta o consumo do bem. Porém a queda do preço do bem diminui o valor da dotação do bem que o indivíduo possui. Logo, o efeito renda dotação será negativo (raciocínio análogo vale para o caso de um aumento de preço do bem).

11.5) Suponha que a função de utilidade de um consumidor é $u(l, c) = l^\alpha c^{1-\alpha}$, em que l é o bem lazer, expresso em horas, e c é um bem de consumo qualquer, cujo preço é p. Suponha que o indivíduo possui T horas de tempo, que ele pode dividir em lazer ou trabalho. Se ele trabalha h horas, ele recebe um salário de w por hora trabalhada. A renda do consumidor é determinada apenas pelo seu trabalho.

a) Determine a curva de oferta de trabalho.

S: O problema do consumidor é:

$$\max_{l,c} \; l^\alpha c^{1-\alpha} \qquad \text{s.a.} \qquad pc + wl = wT$$

O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = l^\alpha c^{1-\alpha} + \lambda(wT - pc - wl)$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} (l):&\ \ \alpha l^{\alpha-1} c^{1-\alpha} = \lambda w \\ (c):&\ \ (1-\alpha) l^\alpha c^{-\alpha} = \lambda p \\ (\lambda):&\ \ pc + wl = wT \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de CPO para c e l encontramos:

$$l(p, w) = \frac{\alpha w T}{w} = \alpha T \qquad \text{e} \qquad c(p, w) = \frac{(1-\alpha) w T}{p}$$

A oferta de trabalho h é portanto:

$$h = T - l = T - \alpha T = (1-\alpha) T$$

b) Suponha que o governo transfere um valor τ para o indivíduo, determinado por $\tau = G - twh$, onde G é a renda mínima garantida pelo governo e t é a alíquota de imposto sobre a renda do trabalho. Encontre a curva de oferta de trabalho para este caso.

S: A reta orçamentária agora se torna:

$$pc+wl = \tau+wT = G-twh+wT = G-tw(T-l)+wT \quad \Rightarrow \quad pc+(1-t)wl = G+(1-t)wT$$

O problema do consumidor é:

$$\max_{l,c} l^{\alpha}c^{1-\alpha} \qquad \text{s.a.} \qquad pc + (1-t)wl = G + (1-t)wT$$

Resolvendo usando o método de Lagrange, obtemos que as demandas ótimas são:

$$l(p,w) = \frac{\alpha(G + (1-t)wT)}{(1-t)w} \qquad \text{e} \qquad c(p,w) = \frac{(1-\alpha)(G + (1-t)wT}{p}$$

A oferta de trabalho h é portanto:

$$h = T - l = T - \frac{\alpha(G + (1-t)wT}{(1-t)w} = \frac{(1-\alpha)(1-t)wT - \alpha G}{(1-t)w}$$

c) Como um aumento em G afeta a oferta de trabalho do indivíduo?

S: Usando a solução do item anterior, temos que:

$$\frac{\partial h}{\partial G} = -\frac{\alpha}{(1-t)w}$$

Como $\alpha > 0$, $w > 0$ e $0 < t < 1$, a derivada $\partial h/\partial G$ é negativa. Então um aumento em G leva a diminuição da oferta de trabalho.

d) Como um aumento no preço p afeta a oferta de trabalho?

S: Usando a solução do item b), temos que:

$$\frac{\partial h}{\partial p} = 0$$

Logo, uma mudança em p não afeta nem a demanda por lazer nem a oferta de trabalho (esse resultado é devido à utilidade ser do tipo Cobb-Douglas).

NA 12 – ESCOLHA INTERTEMPORAL

12.1) Suponha que Paulo tem R$ 1000 hoje e espera receber R$1000 em um ano. Paulo não tem outra renda, e ele pode poupar ou pegar emprestado a uma taxa de juros de 25% ao ano.

a) Qual o máximo que Paulo pode gastar no ano que vem? Qual o máximo que Paulo pode gastar hoje?

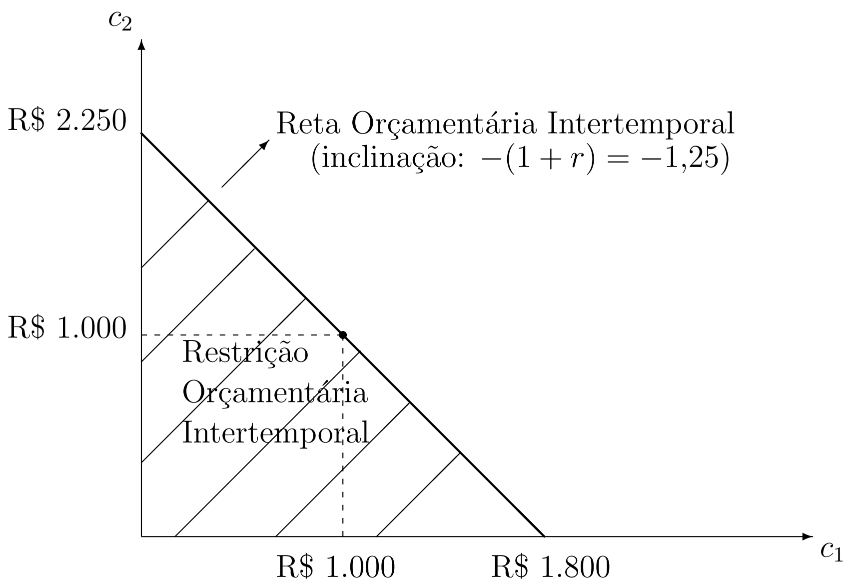
S: Hoje: R$ 1000+R$ 1000/1,25 = R$ 1800. Ano que vem: R$ 1000(1,25)+R$ 1000=R$ 2250.

b) Suponha que Paulo toma emprestado R$ 800 e consome R$ 1800 hoje. Quanto ele terá para consumir no ano que vem?

S: 0 (se ele tomar R$ 800 emprestado hoje, dada a taxa de juros de 25% a.a., ele terá que pagar R$ 1000 no ano que vem).

c) Desenhe a reta orçamentária de Paulo, entre "consumo hoje" (eixo x) e "consumo ano que vem" (eixo y). Qual é a inclinação dessa reta? Qual a interpretação econômica dessa inclinação?

S: Vamos denotar por c_1 o consumo hoje e por c_2 o consumo amanhã. A figura é ilustrada abaixo.



d) Mostre como a reta orçamentária se desloca para os dois casos abaixos:

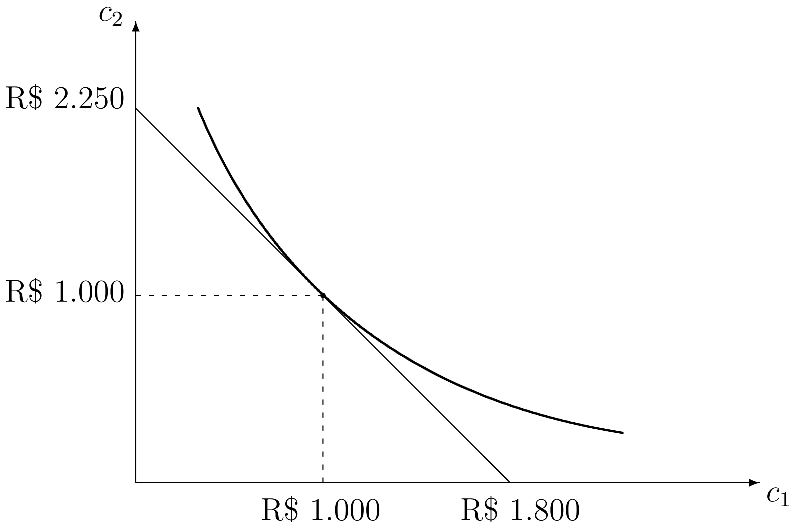
i) Paulo acha R$ 400 em uma gaveta hoje.

ii) Paulo descobre que vai receber no ano que vem R$ 500 de uma herança.

S: Nos dois casos a reta orçamentária se desloca para fora, *na mesma medida*, pois R$ 400 hoje equivalem a R$ 500 no ano que vem ($1{,}25 \times 400 = 500$).

e) Volte a supor que Paulo tem R$ 1000 hoje e terá R$ 1000 no ano que vem. Paulo escolhe não poupar nem tomar emprestado. Ilustre a tangência do curva de indiferença de Paulo com a sua reta orçamentária.

S: A figura é ilustrada abaixo.



f) Suponha que Paulo usa o seu dinheiro conforme o item e), quando a taxa de juros for 25%. Porém a taxa de juros aumentou hoje para 50%. Paulo altera o seu consumo hoje? Ele está melhor ou pior do que antes?

S: Nesse caso Paulo está melhor. O aumento da taxa de juros faz com que Paulo passe a poupar para consumir no segundo período, pois antes ele estava consumindo exatamente as suas dotações de cada período.

g) Decomponha a mudança no consumo de Paulo ocorrida no item f) em efeito substituição e efeito renda. Determine, se possível, as direções do efeito substituição e do efeito renda.

S: O efeito substituição é sempre negativo: como a taxa de juros subiu, o consumo hoje se tornou mais caro em relação ao consumo amanhã. O efeito renda pode ser negativo, o que significa que o aumento da taxa de juros eleva a renda disponível.

12.2) Suponha um modelo com dois períodos, onde o indivíduo pode escolher o consumo hoje (c_1), o consumo amanhã (c_2), e a quantidade de lazer que consome (l). O indivíduo pode trabalhar no primeiro período, onde recebe um salário igual a w_1 por unidade de tempo trabalhada. Ele possui H unidades de tempo para dividir entre trabalho e lazer. O indivíduo também pode poupar no primeiro período (ou pegar emprestado) a uma taxa de juros igual à r. Finalmente, o individuo não tem nenhuma outra fonte de renda, a não ser a gerada pelo seu trabalho (ele só trabalha no primeiro período). A utilidade é dada por:

$$u(c_1, c_2, l) = u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l),$$

onde $0 < \beta < 1$ é o fator de desconto intertemporal.

a) Quais são as restrições orçamentárias para cada período?

S: As restrições orçamentárias de cada período são:

$$\begin{aligned} \text{Período 1:} \quad & c_1 + s = (H - l)w \\ \text{Período 2:} \quad & c_2 = (1 + r)s \end{aligned}$$

b) Qual é a restrição orçamentária intertemporal?

S: A restrição orcamentária intertemporal pode ser obtida substituindo $s = c_2/(1 + r)$ na restrição orçamentária para o primeiro período, o que resulta em:

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = (H - l)w$$

c) Derive as CPO do problema de maximização de utilidade desse indivíduo.

S: O problema de maximização desse consumidor é:

$$\max_{c_1,c_2,l} u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l) \quad \text{s.a.} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (H-l)w$$

O Lagrangeano do problema é:

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l) + \lambda \left[(H-l)w - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right],$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned} (c_1): &\ \ u'(c_1) = \lambda \\ (c_2): &\ \ \beta u'(c_2) = \lambda \frac{1}{1+r} \\ (l): &\ \ v'(l) = \lambda w \\ (\lambda): &\ \ c_1 + \frac{c_2}{1+r} = (H-l)w \end{aligned}$$

d) Suponha que o governo introduz um imposto sobre o consumo do primeiro período, com alíquota τ_1, e um imposto sobre o consumo do segundo período, com alíquota τ_2. Reescreva o problema do consumidor para esse caso e derive as CPO desse problema.

S: Nesse caso, o problema do consumidor se torna:

$$\max_{c_1,c_2,l} u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l) \quad \text{s.a.} \quad (1+\tau_1)c_1 + \frac{(1+\tau_2)c_2}{1+r} = (H-l)w$$

O Lagrangeano é portanto:

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + v(l) + \lambda \left[(H-l)w - (1+\tau_1)c_1 - \frac{(1+\tau_2)c_2}{1+r} \right],$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. As CPO agora resultam em:

$$\begin{aligned} (c_1): &\ \ u'(c_1) = \lambda(1+\tau_1) \\ (c_2): &\ \ \beta u'(c_2) = \lambda \frac{(1+\tau_2)}{1+r} \\ (l): &\ \ v'(l) = \lambda w \\ (\lambda): &\ \ (1+\tau_1)c_1 + \frac{(1+\tau_2)c_2}{1+r} = (H-l)w \end{aligned}$$

e) Mostre que se as duas alíquotas forem iguais, o imposto não distorce a escolha intertemporal de consumo, porém distorce a escolha entre consumo e lazer, desestimulando a oferta de trabalho.

S: Dividindo as CPOs para c_1 e c_2 obtidas na solução do item d), obtemos:

$$\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = \frac{(1+\tau_1)}{(1+\tau_2)}(1+r)$$

Se $\tau_1 = \tau_2$, então temos que:

$$\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = 1 + r,$$

exatamente a mesma relação de escolha intertemporal de consumo para o caso onde não existe imposto. Dividindo as CPO para c_1 e l em derivadas na solução do item d), obtemos:

$$\frac{u'(c_1)}{v'(l)} = \frac{(1+\tau_1)}{w},$$

diferente da relação de escolha entre consumo e lazer hoje para o caso onde não existe imposto ($u'(c_1)/v'(l) = 1/w$). Como $(1+\tau_1) > 1$, e $u'' < 0$, $v'' < 0$, então o nível de consumo hoje cai em relação ao nível de lazer.

12.3) Suponha um modelo com dois períodos, onde o indivíduo possui uma renda fixa m que pode alocar entre os dois períodos. A utilidade do indivíduo é:

$$U(c_1, c_2)\,,$$

e a reta orçamentária é:

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m\,,$$

em que r denota a taxa de juros de um período.

a) Mostre que para maximizar a utilidade, dada a restrição orçamentária descrita, o indivíduo deve escolher c_1 e c_2 de modo que a TMS em valor absoluto entre c_1 e c_2 deve ser igual a $1+r$.

S: O problema do indivíduo é:

$$\max_{c_1,c_2} U(c_1,c_2) \qquad \text{s.a.} \qquad c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m$$

O Lagrangeano desse problema é:

$$\mathcal{L} = U(c_1,c_2) + \lambda\left(m - c_1 - \frac{c_2}{1+r}\right)$$

As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned}
(c_1): &\ \frac{\partial U(c_1,c_2)}{\partial c_1} = \lambda \\
(c_2): &\ \frac{\partial U(c_1,c_2)}{\partial c_2} = \frac{\lambda}{1+r} \\
(\lambda): &\ c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m
\end{aligned}$$

Dividindo a CPO para c_1 pela CPO para c_2, obtemos:

$$|TMS| = \left|\frac{dc_2}{dc_1}\right| = \frac{\partial U(c_1,c_2)/\partial c_1}{\partial U(c_1,c_2)/\partial c_2} = 1+r$$

b) Mostre que $\partial c_2/\partial r \geq 0$, mas que o sinal de $\partial c_1/\partial r$ é indeterminado. Se $\partial c_1/\partial r$ for negativo, o que você pode concluir sobre a elasticidade-preço da demanda por c_2?

S: Como c_2 é um bem normal com preço $1/(1+r)$, então $\partial c_2/\partial r \geq 0$. Já o sinal da derivada $\partial c_1/\partial r$ é indeterminado pois o efeito substituição vai na direção em que $\partial c_1/\partial r < 0$, mas o efeito renda vai na direção em que $\partial c_1/\partial r > 0$. Se $\partial c_1/\partial r < 0$, uma queda no preço de c_2 aumenta o gasto total com c_2. Isso significa que a demanda por c_2 é elástica quando $\partial c_1/\partial r < 0$.

c) Como os seus resultados para o item b) mudariam se o indivíduo recebesse uma renda em cada período (m_1 e m_2), de modo que a sua restrição orçamentária seja:

$$m_1 - c_1 + \frac{m_2 - c_2}{1+r} = 0?$$

S: A reta orçamentária possui a mesma inclinação que antes, mas agora passa sobre os pontos $c_1 = m_1$ e $c_2 = m_2$. O Lagrangeano do problema se torna:

$$\mathcal{L} = U(c_1, c_2) + \lambda \left(m_1 - c_1 + \frac{m_2 - c_2}{1+r} \right)$$

As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned}
(c_1):\ & \frac{\partial U(c_1,c_2)}{\partial c_1} = \lambda \\
(c_2):\ & \frac{\partial U(c_1,c_2)}{\partial c_2} = \frac{\lambda}{1+r} \\
(\lambda):\ & c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m
\end{aligned}$$

Dividindo a CPO para c_1 pela CPO para c_2, obtemos a mesma condição que encontramos na solução do item a):

$$|TMS| = \left| \frac{dc_2}{dc_1} \right| = \frac{\partial U(c_1,c_2)/\partial c_1}{\partial U(c_1,c_2)/\partial c_2} = 1 + r$$

12.4) (NS) Laibson (1997) supõe que as pessoas possuem uma utilidade intertemporal com a seguinte forma:

$$U(c_t, c_{t+1}, \ldots, c_T) = u(c_t) + \beta \sum_{k=1}^{T-t} \delta^k u(c_{t+k}),$$

com $T > t$, $0 < \beta < 1$ e $0 < \delta < 1$. Este tipo particular de desconto intertemporal leva a possibilidade de *miopia*.

a) Laibson sugere que $\beta = 0{,}6$ e $\delta = 0{,}99$. Mostre que para esses valores, os fatores pelos quais consumo futuro é descontado seguem um padrão hiperbólico (isto é, que esses fatores caem abruptamente em $t+1$ e depois seguem uma taxa de declínio geométrico ao longo do tempo).

S: Note que "*hoje*" (t) não há desconto. Nos períodos seguintes, a partir de "*amanhã*" ($t+1$), toda utilidade do consumo futuro recebe um desconto de $\beta = 0{,}6$, e períodos subsequentes $t+k$, $k = 1, \ldots, T$, recebem um desconto de δ^k.

b) Calcule a TMS entre c_{t+1} e c_{t+2} no período t. Compare esse valor com a TMS entre c_{t+1} e c_{t+2} no período $t+1$. Explique por que, com uma taxa de juros constante, isso implicaria escolhas "*dinamicamente inconsistentes*" ao longo do tempo (especificamente, como a relação ótima entre c_{t+1} e c_{t+2} muda na duas perspectivas)?

S: A TMS entre c_{t+1} e c_{t+2} no período t é:

$$TMS^t_{t+1,t+2} = -\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_{t+2}} = -\frac{\beta\delta u'(c_{t+1})}{\beta\delta^2 u'(c_{t+2})} = \frac{u'(c_{t+1})}{\delta u'(c_{t+2})}$$

Já a TMS entre c_{t+1} e c_{t+2} no período $t+1$ é:

$$TMS^{t+1}_{t+1,t+2} = -\frac{\partial U/\partial c_{t+1}}{\partial U/\partial c_{t+2}} = -\frac{u'(c_{t+1})}{\beta\delta u'(c_{t+2})} = \frac{u'(c_{t+1})}{\beta\delta u'(c_{t+2})}$$

Logo, com uma taxa de juros r constante, as duas TMS acima serão iguais a $1 + r$, o que implica escolhas "*dinamicamente inconsistentes*" ao longo do tempo, já que em t e em $t + 1$ a taxa marginal de substituição entre $t + 1$ e $t + 2$ muda, devido à presença de β. Se a taxa de juros não se modificou, a relação ótima entre $t + 1$ e $t + 2$ determinada em t não valerá em $t + 1$.

c) Laibson afirma que a inconsistência descrita no item anterior leva aos indivíduos de hoje a restringirem os indivíduos de amanhã, de modo a alcançar uma maximização de utilidade sem o efeito da miopia. Explique por que tais restrições são necessárias.

S: Se a pessoa percebe que existe miopia na sua escolha, que consiste em um desconto excessivo dos períodos futuros, essa pessoa pode optar por planos que "*amarrem*" as suas escolhas, no sentido de que esse planos forçam a escolha ótima do consumidor. Por exemplo, um plano de aposentadoria com contribuição obrigatória. Essas restrições são necessárias pois se não existissem, a pessoa simplesmente não pouparia para o consumo futuro, fazendo uma escolha que se revelaria subótima mais à frente.

d) Descreva alguns modos que as pessoas procuram restringir as suas escolhas futuras no mundo real.

S: Planos de aposentadorias com contribuição obrigatória, poupanças planejadas em que mensalmente é guardado um valor da renda, etc.

NA 13 – INCERTEZA

13.1) Considere as loterias $g = (0{,}50 \circ 100; 0{,}50 \circ 1000)$ e $h = (0{,}20 \circ 100; 0{,}30 \circ 25; 0{,}50 \circ 16)$. Calcule a utilidade esperada, o equivalente de certeza, o prêmio de risco dessas duas loterias para os casos abaixo:

a) $u(w) = \sqrt{w}$, $w_0 = 100$.
S: Vamos arredondar todas as contas para a segunda casa decimal, quando houver necessidade. As utilidades esperadas das duas loterias, levando em conta a riqueza inicial, são:

$$U(g) = 0{,}5 \times \sqrt{100 + 100} + 0{,}5 \times \sqrt{100 + 1000} = 23{,}65$$
$$U(h) = 0{,}2 \times \sqrt{100 + 100} + 0{,}3 \times \sqrt{100 + 25} + 0{,}5 \times \sqrt{100 + 16} = 11{,}57$$

Os equivalentes de certeza EC_g e EC_h para as loterias g e h, *somadas a* w_0, respectivamente, são calculados abaixo:

$$\sqrt{EC_g} = u(EC_g) = U(g) = 23{,}65 \quad \Rightarrow \quad EC_g = 559{,}32$$
$$\sqrt{EC_h} = u(EC_h) = U(h) = 11{,}57 \quad \Rightarrow \quad EC_h = 133{,}86$$

Já os equivalentes de certeza EC_g e EC_h para as loterias g e h, *sem somar* w_0, respectivamente, são calculados abaixo:

$$\sqrt{100 + EC_g} = u(EC_g) = U(g) = 23{,}65 \quad \Rightarrow \quad EC_g = 459{,}32$$
$$\sqrt{100 + EC_h} = u(EC_h) = U(h) = 11{,}57 \quad \Rightarrow \quad EC_h = 33{,}86$$

Finalmente, observe que o valor esperado Eg e Eh das loterias g e h, sem levar em conta a renda inicial w_0, são:

$$\mathrm{E}g = 0{,}5 \times 100 + 0{,}5 \times 1.000) = 550$$
$$\mathrm{E}h = 0{,}2 \times 100 + 0{,}3 \times 25 + 0{,}5 \times 16 = 35{,}50$$

Portanto, os prêmios de risco P_g e P_h das duas loterias são:

$$P_g = \mathrm{E}g - EC_g = 550 - 459{,}32 = 90{,}68$$
$$P_h = \mathrm{E}h - EC_h = 35{,}5 - 33{,}86 = 1{,}82$$

b) $u(w) = \sqrt{w}$, $w_0 = 50$.
S: As utilidades esperadas das duas loterias, levando em conta a riqueza inicial, são:

$$U(g) = 0{,}5 \times \sqrt{50 + 100} + 0{,}5 \times \sqrt{50 + 1000} = 22{,}33$$
$$U(h) = 0{,}2 \times \sqrt{50 + 100} + 0{,}3 \times \sqrt{50 + 25} + 0{,}5 \times \sqrt{50 + 16} = 9{,}11$$

Os equivalentes de certeza EC_g e EC_h para as loterias g e h, *sem somar* w_0, respectivamente, são calculados abaixo:

$$\sqrt{50 + EC_g} = u(EC_g) = U(g) = 22{,}33 \quad \Rightarrow \quad EC_g = 448{,}63$$
$$\sqrt{50 + EC_h} = u(EC_h) = U(h) = 9{,}11 \quad \Rightarrow \quad EC_h = 32{,}99$$

Finalmente, observe que o valor esperado Eg e Eh das loterias g e h, sem levar em conta a renda inicial w_0, são:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}g &= 0{,}5 \times 100 + 0{,}5 \times 1.000 = 550 \\ \mathrm{E}h &= 0{,}2 \times 100 + 0{,}3 \times 25 + 0{,}5 \times 16 = 35{,}5 \end{aligned}$$

Portanto, os prêmios de risco P_g e P_h das duas loterias são:

$$\begin{aligned} P_g &= \mathrm{E}g - EC_g = 101{,}37 \\ P_h &= \mathrm{E}h - EC_h = 2{,}51 \end{aligned}$$

c) $u(w) = w$, $w_0 = 100$.
S: As utilidades esperadas das duas loterias, levando em conta a riqueza inicial, são:

$$\begin{aligned} U(g) &= 0{,}5 \times (100 + 100) + 0{,}5 \times (100 + 1000) = 650 \\ U(h) &= 0{,}2 \times (100 + 100) + 0{,}3 \times (100 + 25) + 0{,}5 \times (100 + 16) = 135{,}50 \end{aligned}$$

Os equivalentes de certeza EC_g e EC_h para as loterias g e h, *sem somar* w_0, respectivamente, são calculados abaixo:

$$\begin{aligned} 100 + EC_g = u(EC_g) = U(g) = 650 \quad &\Rightarrow \quad EC_g = 550 \\ 100 + EC_h = u(EC_h) = U(h) = 135{,}50 \quad &\Rightarrow \quad EC_h = 35{,}50 \end{aligned}$$

Finalmente, observe que o valor esperado Eg e Eh das loterias g e h, sem levar em conta a renda inicial w_0, são:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}g &= 0{,}5 \times 100 + 0{,}5 \times 1.000 = 550 \\ \mathrm{E}h &= 0{,}2 \times (100 + 100) + 0{,}3 \times 25 + 0{,}5 \times 16 = 35{,}50 \end{aligned}$$

Portanto, os prêmios de risco P_g e P_h das duas loterias são:

$$\begin{aligned} P_g &= \mathrm{E}g - EC_g = 0 \\ P_h &= \mathrm{E}h - EC_h = 0 \end{aligned}$$

d) $u(w) = w$, $w_0 = 50$.
S: As utilidades esperadas das duas loterias, levando em conta a riqueza inicial, são:

$$\begin{aligned} U(g) &= 0{,}5 \times (50 + 100) + 0{,}5 \times (50 + 1000) = 600 \\ U(h) &= 0{,}2 \times (50 + 100) + 0{,}3 \times (50 + 25) + 0{,}5 \times (50 + 16) = 85{,}5 \end{aligned}$$

Os equivalentes de certeza EC_g e EC_h para as loterias g e h, *sem somar* w_0, respectivamente, são calculados abaixo:

$$\begin{aligned} 50 + EC_g = u(EC_g) = U(g) = 600 \quad &\Rightarrow \quad EC_g = 550 \\ 50 + EC_h = u(EC_h) = U(h) = 85{,}50 \quad &\Rightarrow \quad EC_h = 35{,}50 \end{aligned}$$

Finalmente, observe que o valor esperado Eg e Eh das loterias g e h, sem levar em conta a renda inicial w_0, são:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}g &= 0{,}5 \times 100 + 0{,}5 \times 1.000 = 550 \\ \mathrm{E}h &= 0{,}2 \times 100 + 0{,}3 \times 25 + 0{,}5 \times 16 = 35{,}50 \end{aligned}$$

Portanto, os prêmios de risco P_g e P_h das duas loterias são:

$$\begin{aligned} P_g &= \mathrm{E}g - EC_g = 0 \\ P_h &= \mathrm{E}h - EC_h = 0 \end{aligned}$$

e) $u(w) = w^2$, $w_0 = 100$.
S: As utilidades esperadas das duas loterias, levando em conta a riqueza inicial, são:

$$U(g) = 0{,}5 \times (100 + 100)^2 + 0{,}5 \times (100 + 1000)^2 = 625.000$$
$$U(h) = 0{,}2 \times (100 + 100)^2 + 0{,}3 \times (100 + 25)^2 + 0{,}5 \times (100 + 16)^2 = 19.415{,}50$$

Os equivalentes de certeza EC_g e EC_h para as loterias g e h, *sem somar* w_0, respectivamente, são calculados abaixo:

$$(100 + EC_g)^2 = u(EC_g) = U(g) = 625.000 \quad \Rightarrow \quad EC_g = 690{,}57$$
$$(100 + EC_h)^2 = u(EC_h) = U(h) = 19.415{,}50 \quad \Rightarrow \quad EC_h = 39{,}34$$

Finalmente, observe que o valor esperado Eg e Eh das loterias g e h, sem levar em conta a renda inicial w_0, são:

$$\mathrm{E}g = 0{,}5 \times 100 + 0{,}5 \times 1.000 = 550$$
$$\mathrm{E}h = 0{,}2 \times 100 + 0{,}3 \times 25 + 0{,}5 \times 16 = 35{,}50$$

Portanto, os prêmios de risco P_g e P_h das duas loterias são:

$$P_g = \mathrm{E}g - EC_g = -140{,}57$$
$$P_h = \mathrm{E}h - EC_h = -3{,}84$$

f) $u(w) = w^2$, $w_0 = 50$.
S: As utilidades esperadas das duas loterias, levando em conta a riqueza inicial, são:

$$U(g) = 0{,}5 \times (50 + 100)^2 + 0{,}5 \times (50 + 1000)^2 = 562.500$$
$$U(h) = 0{,}2 \times (50 + 100)^2 + 0{,}3 \times (50 + 25)^2 + 0{,}5 \times (50 + 16)^2 = 8.365{,}50$$

Os equivalentes de certeza EC_g e EC_h para as loterias g e h, *sem somar* w_0, respectivamente, são calculados abaixo:

$$(50 + EC_g)^2 = u(EC_g) = U(g) = 562.500 \quad \Rightarrow \quad EC_g = 700$$
$$(50 + EC_h)^2 = u(EC_h) = U(h) = 8.365{,}50 \quad \Rightarrow \quad EC_h = 41{,}46$$

Finalmente, observe que o valor esperado Eg e Eh das loterias g e h, sem levar em conta a renda inicial w_0, são:

$$\mathrm{E}g = 0{,}5 \times 100 + 0{,}5 \times 1.000 = 550$$
$$\mathrm{E}h = 0{,}2 \times 100 + 0{,}3 \times 25 + 0{,}5 \times 16 = 35{,}50$$

Portanto, os prêmios de risco P_g e P_h das duas loterias são:

$$P_g = \mathrm{E}g - EC_g = -150$$
$$P_h = \mathrm{E}h - EC_h = -5{,}96$$

13.2) Considere as loterias $g = (0{,}60 \circ 10.000; 0{,}40 \circ 1.000)$ e $h = (0{,}50 \circ 10.000; 0{,}50 \circ 2.800)$. Se um consumidor está indiferente entre estas duas loterias, então pode-se afirmar que ele é neutro ao risco. Verdadeiro ou falso? Justifique.

S: Observe que:

$$\mathrm{E}g = 0{,}6 \times 10.000 + 0{,}4 \times 1.000 = 6.400 \quad \text{e} \quad \mathrm{E}h = 0{,}5 \times 10.000 + 0{,}5 \times 2.800 = 6.400$$

Como os valores esperados dessas duas loterias são iguais, então se ele é indiferente a elas, é possível mostrar que o indivíduo é neutro ao risco.

13.3) Responda os seguintes itens.

a) Suponha duas loterias $g = (0{,}50 \circ m_1; 0{,}50 \circ m_2)$ e $h = (0{,}50 \circ w_1; 0{,}50 \circ w_2)$, tais que $u(m_1) = 25$, $u(m_2) = 65$, $u(w_1) = 35$, $u(w_2) = 50$ e $v(m_1) = 1$, $v(m_2) = 9$, $v(w_1) = 3$, $v(w_2) = 6$. Verifique se u e v representam a mesma utilidade esperada.

S: Vamos primeiro calcular as utilidades esperadas das duas loterias, levando em conta as funções u e v:

$$\begin{aligned} U_u(g) &= 0{,}5u(m_1) + 0{,}5u(m_2) = 45 \\ U_u(h) &= 0{,}5u(w_1) + 0{,}5u(w_2) = 42{,}5 \\ U_v(g) &= 0{,}5v(m_1) + 0{,}5v(m_2) = 5 \\ U_v(g) &= 0{,}5v(w_1) + 0{,}5v(w_2) = 4{,}5 \end{aligned}$$

As funções U_u e U_v representam as mesmas escolhas se existirem a e b, $b > 0$, tais que $U_u = a + b\,U_v$. Usando as duas loterias g e h acima, obtemos que:

$$\begin{aligned} U_u(g) &= a + bU_v(g) \quad &\Rightarrow& \quad 45 = a + 5b \\ U_u(h) &= a + bU_v(h) \quad &\Rightarrow& \quad 42{,}5 = a + 4{,}5b \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a = 20$ e $b = 5 > 0$. Logo, estas duas funções, para os valores dados, representam as mesmas escolhas.

b) Suponha que a função de utilidade da riqueza de um indivíduo seja $u(w) = \log_{10}(w)$ (logaritmo na base 10). O indivíduo possui um carro no valor de R$ 100.000,00. Existe uma probabilidade de 10% de ocorrer um acidente e o carro passar a valer R$ 10.000,00. Calcule a utilidade esperada deste indivíduo.

S: Existem dois estados da natureza relevantes neste caso: 1) carro é roubado e 2) carro não é roubado, com probabilidades de ocorrência de 10% e 90%, respectivamente. A utilidade esperada é:

$$U = 0{,}10 \log_{10}(10.000) + 0{,}90 \log_{10}(100.000) = 0{,}4 + 4{,}5 = 4{,}9\,.$$

c) Suponha que a função de utilidade da riqueza de um indivíduo seja $u(w) = \sqrt{w}$. Considere a loteria $g = (0{,}10 \circ 100; 0{,}60 \circ 60, 0{,}30 \circ 0)$. Determine o valor esperado, a utilidade esperada e o desvio-padrão de g. Calcule o equivalente de certeza e o prêmio ao risco da loteria g.

S: O valor esperado, denotado por Eg, é:

$$\mathrm{E}g = \sum_{i=1}^{3} p_i w_i = 0{,}10 \times 100 + 0{,}60 \times 60 + 0{,}3 \times 0 = 46$$

A variância, denotada por σ_g^2, é:

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{3} p_i (w_i - \mathrm{E}g)^2 = 0{,}10 \times (100 - 46)^2 + 0{,}60 \times (60 - 46)^2 + 0{,}3 \times (0 - 46)^2 = 1.044$$

Logo, o desvio-padrão é $\sigma_g = \sqrt{1.044} \approx 32{,}31$. A utilidade esperada da loteria g, assumindo que $w_0 = 0$, é:

$$U(g) = 0{,}10 \times \sqrt{100} + 0{,}60 \times \sqrt{60} + 0{,}3 \times \sqrt{0} \approx 5{,}65$$

O equivalente de certeza da loteria g, denotado por EC_g, é o valor tal que o indivíduo seja indiferente entre este valor dado com certeza e a loteria g. Logo:

$$\sqrt{EC_g} = U(g) = 5{,}65 \qquad \Rightarrow \qquad EC_g \approx 31{,}92\,.$$

O prêmio ao risco de g, Denotado por P_g, é a diferença entre o valor esperado da loteria e o equivalente de certeza desta loteria: $P_g = \mathrm{E}g - EC_g \approx 46 - 31{,}92 = 14{,}08$.

13.4) (A07) Um indivíduo tem uma riqueza não nula e sua função de utilidade de Bernoulli é $u(x) = K - a/x$, em que a e K são constantes positivas e $x > a/K$. Este indivíduo é convidado a participar de uma loteria que triplica sua riqueza com probabilidade p e a reduz à terça parte com probabilidade $1-p$. Qual deve ser o valor mínimo de p para que o indivíduo aceite participar da loteria?

S: A loteria descrita é tal que com probabilidade p a riqueza do indivíduo se torna $3w_0$, onde w_0 denota a sua riqueza inicial, e com probabilidade $1-p$, a riqueza se torna $(1/3)w_0$. Queremos encontrar o valor de p que iguala a utilidade da loteria com a utilidade de w_0:

$$pu\left(\frac{w_0}{3}\right) + (1-p)u\left(\frac{1}{3w_0}\right) = u(w_0) \quad\Leftrightarrow\quad p\left(K - \frac{a}{3w_0}\right) + (1-p)\left(K - \frac{3a}{w_0}\right) = \left(K - \frac{a}{w_0}\right)$$

A equação do lado direito acima pode ser simplificada para:

$$\frac{p}{3} + 3(1-p) = 1 \quad\Rightarrow\quad p = \frac{3}{4} = 0{,}75\,.$$

Logo, o menor valor de p que faz o indivíduo aceitar a loteria (na verdade, o torna indiferente entre aceitar ou não a loteria) é 75%.

13.5) (A96) Quais das funções abaixo têm as propriedades de utilidade esperada? Justifique a sua resposta.

a) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = pw_1 + (1-p)w_2$.
S: Esta utilidade é linear nas probabilidades, com utilidade de Bernoulli dada por $u(w) = w$. Logo ela é uma utilidade esperada de von Neumann e Morgenstern.

b) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = a(pw_1^2 + (1-p)w_2^2)$.
S: Esta utilidade é linear nas probabilidades, com utilidade de Bernoulli dada por $u(w) = aw^2$. Logo ela é uma utilidade esperada de von Neumann e Morgenstern.

c) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = pa\ln(w_1) + (1-p)b\ln(w_2)$.
S: Esta utilidade é linear nas probabilidades, mas a utilidade de Bernoulli muda com o estado da natureza, com $u_1(w) = a\ln(w)$ e $u_2(w) = b\ln(w)$, onde u_1 denota a utilidade do consumidor se o estado da natureza com probabilidade p ocorre e u_2 denota a utilidade do consumidor se o estado da natureza com probabilidade $1-p$ ocorre. Logo ela não é uma utilidade esperada de von Neumann e Morgenstern e sim uma utilidade esperada *dependente do estado da natureza* (*state-dependent expected utility*).

d) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = \frac{p}{1-p}\ln(w_1) + \frac{1-p}{p}\ln(w_2)$.
S: Esta utilidade não é linear nas probabilidades, logo ela não é uma utilidade esperada.

e) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = p^\alpha \ln(w_1) + (1-p)^\alpha \ln(w_2)$.
S: Esta utilidade não é linear nas probabilidades (se $\alpha \neq 1$), logo ela não é uma utilidade esperada.

13.6) (NS) Um fazendeiro acha que existe uma probabilidade de 50% que na sua próxima temporada de plantação irá ter muita chuva. A utilidade esperada desse fazendeiro é:

$$U = \frac{1}{2}\ln(w_{tn}) + \frac{1}{2}\ln(w_{mc})\,,$$

em que w_{tn} denota a renda dele no estado da natureza "*tempo normal*" e w_{mc} denota a renda dele no estado da natureza "*muita chuva*". Suponha que a existam dois tipos de plantação possíveis, que geram os seguintes resultados para o fazendeiro:

Plantação	w_{tn}	w_{cm}
Trigo	R\$ 28.000	R\$ 10.000
Milho	R\$ 19.000	R\$ 15.000

a) Qual tipo de plantação o fazendeiro escolhe?

S: Vamos denotar por T a plantação de trigo e por M a de milho. As utilidades esperadas das duas plantações, assumindo que $w_0 = 0$, são:

$$U(T) = 0{,}5 \times \ln(28.000) + 0{,}5 \times \ln(10.000) = 9{,}7252$$
$$U(M) = 0{,}5 \times \ln(19.000) + 0{,}5 \times \ln(15.000) = 9{,}7340$$

Logo o fazendeiro prefere plantar milho.

b) Suponha agora que o fazendeiro pode plantar a sua fazenda com metade de trigo e metade de milho. Ele fará isso? Explique o seu resultado.

S: Se o fazendeiro planta metade de trigo e metade de milho, ele obtém R\$ 23.500 se o tempo for normal e R\$ 12.500 se o tempo for de muita chuva. A utilidade esperada obtida neste caso é:

$$U = 0{,}5 \times \ln(23.500) + 0{,}5 \times \ln(12.500) = 9{,}7491\,,$$

maior do que a obtida plantando um único tipo de grão. Logo ele fará isso. Observe que plantar trigo dá um resultado muito bom se o tempo for normal. Já se o tempo for de muita chuva, o resultado será melhor se plantar milho. Ao diversificar a plantação, o fazendeiro consegue obter uma utilidade maior.

c) Qual é o mix de trigo e milho que maximiza a utilidade esperada do fazendeiro, supondo agora que ele pode plantar qualquer proporção de milho e trigo?

S: Denote por $0 \leq x \leq 1$ a proporção da área da fazenda plantada com trigo. As soluções dos itens a) e b) mostram que o valor x^* que maximiza a utilidade do fazendeiro não será nem 0 nem 1. Podemos determinar x^* resolvendo o problema de maximização da utilidade do fazendeiro:

$$\max_{0\leq x\leq 1}\; 0{,}5\ln\left(28.000x + 19.000(1-x)\right) + 0{,}5\ln\left(10.000x + 15.000(1-x)\right)$$

Esse problema pode ser reescrito como:

$$\max_{0\leq x\leq 1}\; 0{,}5\ln\left(19.000 + 9.000x\right) + 0{,}5\ln\left(15.000 - 5.000x\right)$$

A CPO resulta em:

$$\frac{0{,}5 \times 9.000}{19.000 + 9.000x^*} = \frac{0{,}5 \times 5.000}{15.000 - 5.000x^*} \quad \Rightarrow \quad x^* = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$$

Logo, o fazendeiro deve plantar trigo em 4/9 da área da fazenda, e milho nos 5/9 restantes da área. A utilidade que o fazendeiro obterá procedendo deste modo é:

$$U^* = 0{,}5 \times \ln\left(19.000 + \frac{4}{9} \times 9.000\right) + 0{,}5 \times \ln\left(15.000 - \frac{4}{9} \times 5.000\right) = 9{,}7494\,.$$

d) Suponha agora que exista um seguro para a plantação de apenas trigo, que custa R$ 4.000 e paga R$ 8.000 caso ocorra muita chuva. Isso mudaria a escolha do fazendeiro?

S: Neste, a utilidade do fazendeiro se plantar apenas trigo e fizer o seguro será:

$$U = 0{,}5 \times \ln(28.000 - 4.000) + 0{,}5 \times \ln(10.000 - 4.000 + 8.000) = 9{,}8163\,,$$

maior do que se ele diversificar a plantação. O seguro cobre o risco de plantar trigo e ter muita chuva, e possibilita o fazendeiro obter uma utilidade ainda maior.

13.7) Um indivíduo tem uma função de utilidade de Bernoulli e uma riqueza inicial denotadas por u e w_0, respectivamente. Considere a loteria g que paga o valor B com probabilidade p e o valor L com probabilidade $1 - p$. Responda os itens abaixo.

a) Se o indivíduo já possui essa loteria, qual é o menor preço que ele estaria disposto a vendê-la?

S: Se o indivíduo possui a loteria, o menor preço P_v que o indivíduo está disposto a vendê-la é determinado pela seguinte equação:

$$u(w_0 + P_v) = pu(w_0 + B) + (1 - p)u(w_0 + L)$$

b) Se o indivíduo não possui essa loteria, qual é o maior preço que ele estaria disposto a comprá-la?

S: Se o indivíduo não possui a loteria, o maior preço P_c que o indivíduo está disposto a comprá-la é determinado pela seguinte equação:

$$u(w_0) = pu(w_0 + B - P_c) + (1 - p)u(w_0 + L - P_c)$$

c) Os preços encontrados nas soluções dos itens a) e b) são iguais? Interprete intuitivamente a sua resposta. Encontre condições nos parâmetros do problema que garantem que esses dois preço serão iguais.

S: Em geral eles serão diferentes, pois o formato de u pode fazer com que eles não sejam iguais. É possível mostrar que eles serão iguais quando u exibir um coeficiente de aversão absoluta ao risco constante ou quando o indivíduo for neutro ao risco.

d) Seja $B =$ R$ 10, $L =$ R$ 5, $w_0 =$ R$ 10, $p = 0{,}5$ e $u(w) = \sqrt{w}$. Calcule os preços de venda e compra descritos nos itens a) e b) para este caso.

S: Usando as soluções anteriores, temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{10 + P_v} &= 0{,}5\sqrt{10 + 10} + 0{,}5\sqrt{10 + 5} \quad &\Rightarrow \quad P_v \approx 7{,}41 \\ \sqrt{10} &= 0{,}5\sqrt{10 + 10 - P_c} + 0{,}5\sqrt{10 + 5 - P_c} \quad &\Rightarrow \quad P_c \approx 7{,}34 \end{aligned}$$

13.8) (NS) Um indivíduo avesso ao risco possui uma riqueza igual a R$ 20.000. Suponha que ele tem uma chance de perder R$ 10.000 com probabilidade de 50% (e 50% de chance de não perder nada).

a) Calcule o preço atuarialmente justo de um seguro total para essa perda e ilustre graficamente que o indivíduo prefere o seguro justo a correr o risco da perda por conta própria.

S: O preço atuarialmente justo P de um seguro total para essa perda é:

$$P = 0{,}5 \times 10.000 = 5.000$$

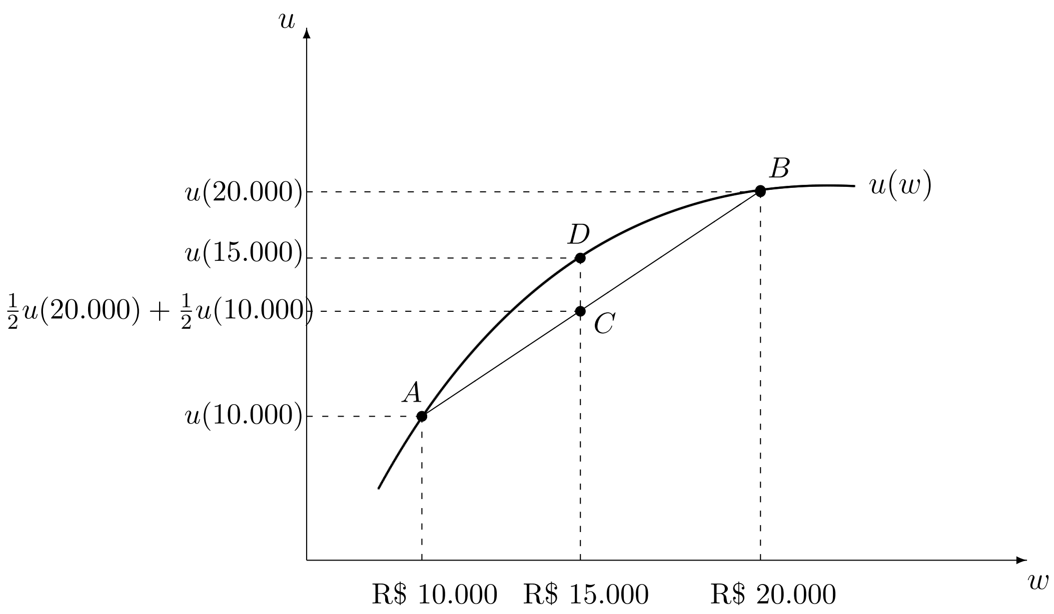
As utilidades do indivíduo com (U_{cs}) e sem (U_{ss}) o seguro são:

$$U_{cs} = 0{,}5u(20.000 - 5.000) + 0{,}5u(20.000 - 5.000 - 10.000 + 10.000) = u(15.000)$$
$$U_{ss} = 0{,}5u(20.000) + 0{,}5u(10.000)$$

onde u denota a utilidade de Bernoulli do indivíduo. Como ele é avesso ao risco, u é estritamente côncava e então:

$$U_{cs} = u(15.000) > 0{,}5u(20.000) + 0{,}5u(10.000) = U_{ss}$$

A figura abaixo ilustra essa situação.



b) Suponha agora que existam dois tipos de seguro disponíveis: i) um seguro justo que cobre a perda total, ii) um seguro justo que cobre metade da perda total. Calcule o preço do seguro ii) e mostre que indivíduos avessos ao risco preferem o primeiro ao segundo.

S: O preço atuarialmente justo P_2 do seguro que cobre só a metade da perda é:

$$P = 0{,}5 \times 5.000 = 2.500$$

A utilidade do indivíduo com este seguro (U_m) é:

$$U_m = 0{,}5u(20.000-2.500)+0{,}5u(20.000-2.500-10.000+5.000) = 0{,}5u(17.500)+0{,}5u(12.500)$$

Como u é estritamente côncava, vale que:

$$U_{cs} = u(15.000) > 0{,}5u(17.500) + 0{,}5u(12.500) = U_m$$

O indivíduo prefere o seguro total, em que ele consegue eliminar totalmente o risco e obter a mesma utilidade qualquer que seja o estado da natureza que ocorra. Como o segundo seguro, o indivíduo consegue apenas diminuir um pouco a variação na sua renda, mas não eliminar completamente o risco. Isso implica que sua utilidade será maior com o seguro total do que com o seguro parcial.

13.9) Considere o exemplo de seguros que desenvolvemos na página 6. Suponha agora que o preço do seguro é $p > \pi$ (ou seja, o preço do seguro é maior do que o preço atuarialmente justo). Derive novamente a condição de primeira ordem para o exemplo, agora para esta situação. Mostre que todo indivíduo avesso ao risco irá adquirir uma quantidade de seguro menor do que o seguro total.

S: O problema do indivíduo é escolher a quantidade c de seguro que maximiza a sua utilidade esperada:

$$\max_c \left[\pi u(w_0 - pc - X + c) + (1-\pi)u(w_0 - pc)\right]$$

A derivada da função objetivo resulta em:

$$(1-p)\pi u'(w_0 - pc - X + c) - p(1-\pi)u'(w_0 - pc)$$

Se fizermos $c = X$ (seguro completo), a derivada acima se torna:

$$\begin{aligned}(1-p)\pi u'(w_0 - pX) - p(1-\pi)u'(w_0 - pX) &= u'(w_0 - pX)\left((1-p)\pi - p(1-\pi)\right) \\ &= u'(w_0 - pX)(\pi - p) < 0\,,\end{aligned}$$

onde a desigualdade vale porque $p > \pi$ e a primeira derivada de u é positiva. Mas isso significa que a CPO não é satisfeita para $c = X$ e como a derivada para $c = X$ é negativa, então devemos ter que $c^* < X$ (ou seja, que a quantidade de seguro ótimo escolhida pelo indivíduo não será o seguro total e sim menor do que o seguro total (seguro parcial).

13.10) (A09) Um indivíduo possui uma função de utilidade de Bernoulli dada por $u(w) = 1 - (1/w)$, em que w denota o valor presente líquido da sua renda futura. No momento, ele está contemplando duas opções de carreira profissional. A primeira opção dará a ele uma renda certa de $w = 5$. A outra alternativa dará $w = 400$, com 1% de chance, e $w = 4$ com 99% de chance. Responda aos seguintes itens:

a) Calcule os coeficientes de aversão absoluta e relativa ao risco de Arrow-Pratt. Esse indivíduo é avesso ao risco?

S: Vamos calcular as derivadas primeira e segunda da utilidade descrita na questão:

$$\begin{aligned}u'(w) &= \frac{1}{w^2} > 0, \quad \forall w > 0, \\ u''(w) &= -\frac{2}{w^3} < 0, \quad \forall w > 0,\end{aligned}$$

Os coeficientes de aversão absoluta e relativa ao risco de Arrow-Pratt são:

$$\begin{aligned}R_A(w) &= -\frac{u''(w)}{u'(w)} = \frac{2/w^3}{1/w^2} = \frac{2}{w} \\ R_R(w) &= -\frac{wu''(w)}{u'(w)} = \frac{w(2/w^3)}{1/w^2} = 2\end{aligned}$$

b) Calcule a utilidade esperada das duas opções. Qual deve ser a escolha desse indivíduo?

S: A utilidade esperada da opção 1 é $U(O1) = 1 - 1/5 = 4/5 = 0{,}8$. A utilidade esperada da segunda opção é:

$$\begin{aligned}U(O2) &= \frac{1}{100}\left(1 - \frac{1}{400}\right) + \frac{99}{100}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{100}\left(\frac{399}{400}\right) + \frac{99}{100}\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{400}(3{,}99 + 297) = \frac{300{,}99}{400} \approx \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Logo, como $3/4 < 4/5$, a utilidade da primeira opção é maior.

c) Calcule o equivalente de certeza da segunda alternativa.

S: O equivalente de certeza da segunda opção, denotado por EC_2, pode ser encontrado resolvendo a seguinte equação:

$$u(EC_2) = U(O_2) \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{EC_2} = \frac{300,99}{400} \quad \Rightarrow \quad EC_2 = \frac{400}{99{,}01} \approx 4{,}04\,,$$

pouco maior do que 4.

d) Suponha que exista um teste de aptidão que revela com certeza se o indivíduo obterá $w = 400$ ou $w = 4$ se escolher a segunda alternativa. Calcule o maior valor p que o indivíduo estaria disposto a pagar por esse teste de aptidão.

S: Vamos calcular p que, uma vez pago, revela ao indivíduo se ele obterá $W = 400$ ou $W = 4$ na segunda alternativa. Primeiro observe que se ele descobrir que receberá $W = 4$ se escolher a segunda alternativa, então ele escolherá a primeira opção. Além disso, a "*utilidade reserva*" do indivíduo é dada pela primeira opção, que gera a maior utilidade entre as duas opções. Então o valor p pode ser calculado como:

$$\frac{99}{100}\left(1 - \frac{1}{5-p}\right) + \frac{1}{100}\left(1 - \frac{1}{400-p}\right) = 1 - \frac{1}{5}$$

Simplificando a expressão acima, obtemos a seguinte equação de segundo grau para p:

$$4p^2 - 8000p + 395 = 0$$

Resolvendo essa equação, encontramos p igual (aproximadamente) a 0,05 (a outra solução, $p \approx 399{,}95$ não faz sentido). Portanto, o valor máximo que o indivíduo estaria disposto a pagar pela informação é (aproximadamente) 5 centavos.

NA 14 – APLICAÇÃO: FINANÇAS

14.1) Considere um investidor com renda w e utilidade $u(w) = \sqrt{w}$. Suponha que ele deseja investir R$ 150,00 na compra de ações de duas empresas, empresa A e empresa B. Os preços das ações das duas empresas são iguais a R$ 15,00. O preço das ações das duas empresas no período seguinte depende de dois estados da natureza: expansão ou contração. A tabela abaixo descreve os preços de ambas as ações para os dois estados da natureza possíveis, além das probabilidades destes estados.

Estado	**Prob.**	**empresa A**	**empresa B**
expansão	50%	40	5
contração	50%	5	40

a) Calcule o preço esperado destas ações. Calcule o retorno esperado destas ações.

S: Os preços esperados das ações A e B, $\mathrm{E}p_A$ e $\mathrm{E}p_B$, respectivamente, são:

$$\mathrm{E}p_A = 0{,}5 \times 40 + 0{,}5 \times 5 = 22{,}5$$
$$\mathrm{E}p_B = 0{,}5 \times 5 + 0{,}5 \times 40 = 22{,}5$$

Os retornos esperados das ações A e B, $\mathrm{E}r_A$ e $\mathrm{E}r_B$, são:

$$\mathrm{E}r_A = \frac{\mathrm{E}p_A - p_A}{p_A} = \frac{22{,}5 - 15}{15} = 0{,}5 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{E}r_B = \frac{\mathrm{E}p_B - p_B}{p_B} = \frac{22{,}5 - 15}{15} = 0{,}5$$

b) Se o indivíduo investir toda a sua renda na ação A, qual será a sua utilidade esperada? Qual será a utilidade esperada se ele investir toda a renda na ação B?

S: Se o indivíduo investir toda a renda na empresa A, ele compra 10 ações. Se investir toda renda na empresa B, ele compra também 10 ações. As utilidades esperadas são:

$$U(A) = 0{,}5\sqrt{400} + 0{,}5\sqrt{50} \approx 13{,}54$$
$$U(B) = 0{,}5\sqrt{400} + 0{,}5\sqrt{50} \approx 13{,}54$$

c) Qual a utilidade esperada se o indivíduo investir metade da renda na ação A e metade na ação B?

S: Neste caso, o indivíduo gasta R$ 75 com cada ação e adquire 5 ações de cada empresa. Logo, a utilidade esperada será:

$$U = 0{,}5 \times \sqrt{5 \times 40 + 5 \times 5} + 0{,}5 \times \sqrt{5 \times 5 + 5 \times 40} = 0{,}5 \times \sqrt{225} + 0{,}5 \times \sqrt{225} = 15\,.$$

d) Comparando as três possibilidades de investimento descritas nos itens b) e c), em qual delas o investidor obterá maior utilidade?

S: O investidor obterá maior utilidade na opção descrita no item c).

e) A opção de investimento encontrada no item d) é a que maximiza a utilidade do investidor?

S: Para resolvermos este item, devemos montar o problema do investidor. Denote por x_A e x_B as quantidades de ações da empresa A e da empresa B, respectivamente, que o investidor adquire. O problema do investidor é:

$$\max_{x_A, x_B} 0{,}5\sqrt{40x_A + 5x_B} + 0{,}5\sqrt{5x_A + 40x_B} \qquad \text{s.a.} \qquad 15x_A + 15x_B = 150$$

Usando a restrição orçamentária do problema, temos que $5x_B = 50 - 5x_A$. Substituindo esta expressão para x_B na função objetivo, o problema do investidor pode ser escrito como:

$$\max_{x_A} 0{,}5\sqrt{35x_A + 50} + 0{,}5\sqrt{400 - 35x_A}$$

A CPO do problema acima é:

$$\frac{0{,}5 \times 35}{2\sqrt{50 + 35x_A^*}} - \frac{0{,}5 \times 35}{2\sqrt{400 - 35x_A^*}} = 0$$

Resolvendo a CPO, encontramos $x_A^* = 5$. Substituindo o valor ótimo de x_A na restrição orçamentária, encontramos $x_B = 5$. Então podemos afirmar que a estratégia de investimento descrita no item c) é a melhor estratégia de investimento possível para o indivíduo.

14.2) Suponha que os investidores possam alocar sua riqueza em um ativo sem risco e uma carteira com risco P que possua retorno esperado maior do que o retorno do ativo sem risco e que possua variância positiva. Suponha também que os investidores tenham função de utilidade $U = \mathrm{E}(r) - 0,005A\sigma^2$.

a) Mostre que a proporção ótima investida no ativo sem risco aumenta quando a taxa de juros sem risco aumentar.

S: Vimos na nota de aula 14 que o problema do investidor no modelo de Markowitz é determinar a fração ótima da riqueza x que deve ser investida na carteira tangente:

$$\max_{x} r_f + (\mathrm{E}r_p - r_f)\, x - 0{,}005Ax^2\sigma_p^2$$

A CPO desse problema é:

$$\mathrm{E}r_p - r_f - 0{,}01A\sigma_p^2 x^* = 0$$

Resolvendo a CPO para x, encontramos:

$$x^* = \frac{\mathrm{E}r_p - r_f}{0{,}01A\sigma_p^2}$$

Logo,

$$1 - x^* = 1 - \frac{\mathrm{E}r_p - r_f}{0{,}01A\sigma_p^2}$$

Então:

$$\frac{\partial(1 - x^*)}{\partial r_f} = \frac{1}{0{,}01A\sigma_p^2} > 0\,,$$

já que $A > 0$ e $\sigma_p^2 > 0$. Logo, quando r_f aumenta, a proporção ótima investida no ativo sem risco $1 - x^*$ aumenta.

b) Mostre que a mesma relação é válida quando o grau de aversão ao risco aumenta.

S: Na solução do item a) vimos que:

$$1 - x^* = 1 - \frac{\mathrm{E}r_p - r_f}{0{,}01A\sigma_p^2}$$

Então:

$$\frac{\partial(1 - x^*)}{\partial A} = \frac{\mathrm{E}r_p - r_f}{0{,}01\sigma_p^2 A^2} > 0\,,$$

já que o excesso de retorno da carteira tangente é positivo ($\mathrm{E}r_p - r_f > 0$).

c) Em um gráfico com a *linha de alocação de capital (LAC)* e o mapa de indiferença de um agente, mostre como a escolha ótima muda quando a taxa de juros sem risco aumenta (seja consistente com a sua resposta no item a)).

S: Veja a Figura 3 da nota de aula: se r_f aumenta, a inclinação da LAC diminui e o intercepto aumenta, *de tal modo que a escolha ótima do indivíduo implique uma proporção maior investida no ativo sem risco* (devido ao que encontramos na solução do item a)).

14.3) Considere a equação do CAPM a seguir:

$$\mathrm{E}(r_i) = 0{,}04 + 0{,}10\beta_i$$

Qual é o excedente de retorno do mercado em relação à taxa livre de risco? Qual é o valor da taxa livre de risco?

S: O CAPM pode ser escrito como:

$$\mathrm{E}r_i = r_f + \beta_i(\mathrm{E}r_m - r_f),$$

onde r_i é o retorno do ativo em análise, r_m é o retorno do mercado, r_f é o retorno do ativo sem risco e β_i é o beta do ativo, definido como:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_m)}{\mathrm{Var}(r_m)}$$

Temos então que $r_f = 0{,}04 = 4\%$ e o excedente de retorno de mercado, $\mathrm{E}r_m - r_f$, é 10% (o retorno esperado $\mathrm{E}r_m$ da carteira de mercado é portanto 14%).

14.4) Suponha que o CAPM estimado para certo período seja:

$$\mathrm{E}(r_i) = 0{,}06 + 0{,}18\beta_i$$

Imagine que durante o mesmo período dois fundos de investimento tenham apresentado os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} &\text{Fundo A:} \quad \text{Retorno Observado} = 10\%\,, \quad \text{beta} = 0{,}8 \\ &\text{Fundo B:} \quad \text{Retorno Observado} = 15\%\,, \quad \text{beta} = 1{,}2 \end{aligned}$$

O que pode ser dito a respeito de cada fundo?

S: Usando a fórmula do CAPM, o retorno esperado dos dois fundos deveria ser:

$$\begin{aligned} &\text{Fundo A:} \quad \mathrm{E}(r_A) = 0{,}06 + 0{,}18 \times 0{,}8 = 0{,}204 \\ &\text{Fundo B:} \quad \mathrm{E}(r_B) = 0{,}06 + 0{,}18 \times 1{,}2 = 0{,}276 \end{aligned}$$

Portanto, pelo CAPM, os retornos esperados dos fundos A e B devem ser 20,4% e 27,6%, respectivamente. Se os resultados desses fundos estão abaixo do predito pelo CAPM, e assumindo que o CAPM é válido, então os dois fundos deram um resultado abaixo do esperado, dado o risco de cada um (determinado pelo beta do fundo).

14.5) Suponha um investidor avesso ao risco cujas preferências por consumo em t e $t+1$ são dadas por (existem apenas dois períodos):

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta \mathrm{E}_t u(c_{t+1}),$$

onde $0 < \beta < 1$ é o fator de desconto subjetivo. Suponha que exista um ativo cujo preço é p_t. O payoff desse ativo no próximo período é dado por $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$, onde d_{t+1} são os dividendos pagos. O investidor tem uma renda w_t no período t e no período $t+1$ ele tem uma renda w_{t+1}. Denote por z o quanto desse ativo o investidor quer comprar.

a) Qual a restrição orçamentária no período t? Qual a restrição orçamentária no período $t+1$? Formule o problema do consumidor/investidor.

S: As restrições orçamentárias no período t e $t+1$ são:

$$\begin{aligned} \text{período t:} \quad & c_t + p_t z = w_t \\ \text{período t+1:} \quad & c_{t+1} = (p_{t+1} + d_{t+1})z + w_{t+1} \end{aligned}$$

O problema do consumidor é:

$$\max_{c_t, c_{t+1}, z} u(c_t) + \beta \mathrm{E}_t u(c_{t+1}) \text{ sujeito à:} \qquad \begin{aligned} & c_t + p_t z = w_t \\ & c_{t+1} = (p_{t+1} + d_{t+1}) z + w_{t+1} \end{aligned}$$

Incorporando as restrições na função objetivo, o problema se torna:

$$\max_z u(w_t - p_t z) + \beta \mathrm{E}_t \left[u\left((p_{t+1} + d_{t+1}) z + w_{t+1} \right) \right]$$

b) Derive a CPO com respeito a z. Escreva essa CPO com p_t isolado no lado esquerdo da expressão encontrada.

S: A CPO resulta em:

$$-p_t u'(c_t) + \beta \mathrm{E}_t \left[(p_{t+1} + d_{t+1}) u'(c_{t+1}) \right] = 0$$

Isolando p_t no lado esquerdo da expressão encontrada, obtemos:

$$p_t = \mathrm{E}_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} (p_{t+1} + d_{t+1}) \right]$$

c) Suponha que esse investidor é um *agente representativo* e o mercado está em equilíbrio: $c_t = w_t$ e $c_{t+1} = w_{t+1}$. Qual é o fator de desconto estocástico m_{t+1}?

S: Em equilíbrio, $c_t = w_t$ e $c_{t+1} = w_{t+1}$. Então:

$$p_t = \mathrm{E}_t \left[\beta \frac{u'(w_{t+1})}{u'(w_t)} (p_{t+1} + d_{t+1}) \right]$$

Podemos escrever a expressão acima como:

$$p_t = \mathrm{E}_t \left[m_{t+1} \, x_{t+1} \right],$$

onde $x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}$ é o payoff do ativo e m_{t+1} é o fator de desconto estocástico, definido como:

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(w_{t+1})}{u'(w_t)} .$$

d) Suponha que a função de utilidade é quadrática, i.e.,

$$u(c) = -\frac{1}{2} (c - v)^2 ,$$

onde v é um parâmetro. Reescreva o fator de desconto estocástico usando a forma funcional acima.

S: Para esta função de utilidade, temos que:

$$u'(c) = -(c - v),$$

e, portanto, o fator de desconto estocástico será:

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(w_{t+1})}{u'(w_t)} = \beta \left(\frac{w_{t+1} - v}{w_t - v} \right) .$$

e) Mostre que se $w_{t+1} = R^m_{t+1} w_t$, podemos escrever esse fator de desconto estocástico como:

$$m_{t+1} = a_t + b_t R^m_{t+1}$$

Que tipo de modelo de precificação de ativos gera essa relação linear entre o fator de desconto estocástico e o retorno de mercado?

S: Usando a solução do item anterior, se $w_{t+1} = R^m_{t+1} w_t$ obtemos:

$$m_{t+1} = \beta \left(\frac{R^m_{t+1} w_t - v}{w_t - v} \right) = -\frac{\beta - v}{w_t - v} + \left(\frac{\beta w_t}{w_t - v} \right) R^m_{t+1} = a_t + b_t R^m_{t+1} \,,$$

em $a_t = -(\beta - v)/(w_t - v)$ e $b_t = \beta w_t/(w_t - v)$. Como vimos na nota de aula, O CAPM gera uma relação linear entre o fator de desconto estocástico e o retorno de mercado.