MICROECONOMIA 1

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Notas de Aula 7 - Graduação

Prof. José Guilherme de Lara Resende

1 Minimização do Dispêndio

Já examinamos as demandas Marshallianas, soluções do problema de maximização de utilidade do consumidor. Essas demandas dizem quais são as quantidades que devem ser escolhidas de cada bem para maximizar a utilidade do indivíduo, dados a sua renda e os preços de mercado.

Vamos agora examinar o problema em que o indivíduo *minimiza os seus gastos, dado um certo nível de utilidade que deseja alcançar*. Esse problema de minimização de dispêndio é também chamado **dual** do problema de maximização de utilidade. Mais à frente estudaremos a questão de dualidade entre os dois problemas do consumidor.

O dispêndio (ou gasto) do consumidor com a cesta de bens $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

O consumidor minimiza os seus gastos para adquirir uma cesta $\mathbf{x}$ que alcança o nível de utilidade $\bar{u}$:

$$\min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \qquad \text{s.a} \qquad u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{u} \tag{1}$$

As soluções deste problema, funções dos preços e do *nível de utilidade*:

$$x_i^h = x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

são chamadas **demanda hicksianas** (ou *demandas compensadas*), e dizem qual a escolha ótima de um consumidor com determinada função de utilidade, que deseja alcançar o nível de utilidade $\bar{u}$ ao menor custo possível, quando os preços dos n bens são descritos pelo vetor $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

A função dispêndio $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ do consumidor informa o menor gasto possível que aos preços $p_1, \ldots, p_n$ alcança o nível de utilidade $\bar{u}$:

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \min_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}} p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \qquad \text{s.a} \qquad u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{u}\,,$$

ou seja, $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ é a *função valor* do problema de minimização de dispêndio do consumidor. Podemos determinar essa função substituindo as demandas Hicksianas no gasto do consumidor:

$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = p_1x_1^h(\mathbf{p}, \bar{u}) + p_2x_2^h(\mathbf{p}, \bar{u}) + \cdots + p_nx_n^h(\mathbf{p}, \bar{u})\,.$$

As funções de demanda Hicksianas são diferentes das funções de demanda Marshallianas. As demandas Hicksianas constituem a solução do problema de minimizar o gasto necessário para se alcançar determinado nível de utilidade. Portanto, são funções dos preços e *do nível de utilidade*. Já as demandas Marshallianas constituem a solução do problema de maximizar a utilidade, dada a restrição orçamentária do consumidor. Portanto, são funções dos preços e *do nível de renda*. Mais adiante vamos discutir melhor a relação entre essas duas demandas.

O problema de minimização do dispêndio tem a seguinte interpretação gráfica (ver Figura 1): o consumidor fixa o nível de utilidade que deseja alcançar. Ele então procura pela cesta de bens de menor gasto que alcança esse nível de satisfação. Ou seja, o consumidor quer obter o nível de utilidade $\bar{u}$ ao menor custo possível. A solução desse problema no caso de uma utilidade bem-comportada é dada pela *reta de isodispêndio* que tangencia a curva de indiferença almejada (a cesta ótima possui TMS entre os dois bens igual à relação de preços, a mesma condição que vale na solução do problema de maximização de utilidade).

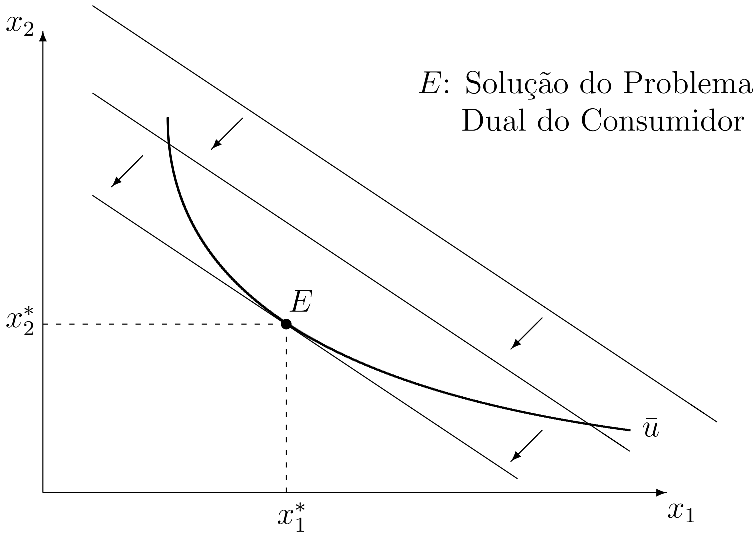

Figura 1: Solução do Problema de Minimização do Dispêndio

Por que a demanda Hicksiana também é chamada demanda compensada? Porque ela "compensa" o consumidor de modo a mantê-lo sempre na mesma curva de indiferença $\bar{u}$. Por exemplo, se o preço do bem 1 aumenta, as demandas ótimas mudam de modo que o nível de utilidade continue o mesmo (naturalmente, o dispêndio mínimo para alcançar o mesmo nível de utilidade aumentará, já que o preço de um dos bens consumidos aumentou). A Figura 2 abaixo ilustra essa situação. Portanto, essa demanda *compensa* o consumidor de modo a mantê-lo sempre com o mesmo nível de utilidade, seja qual for a alteração de preços ocorrida.

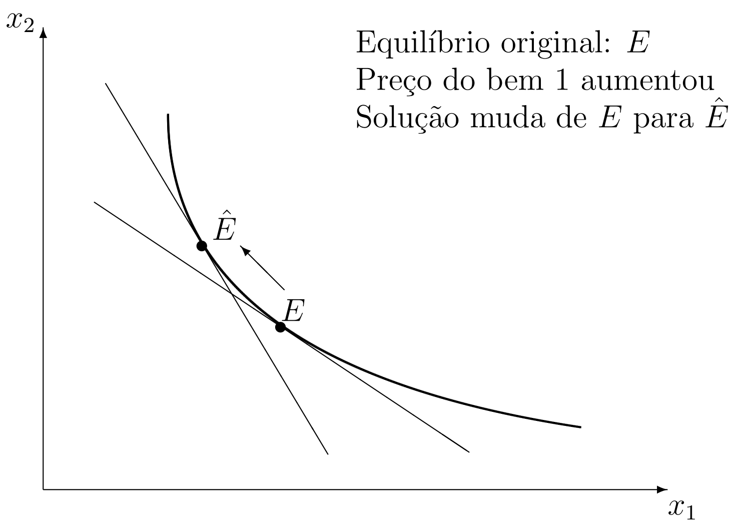

Figura 2: Demanda Compensada

A demanda Hicksiana não é diretamente observável, pois depende do nível de utilidade $\bar{u}$ que o consumidor alcança, que não é observável. Apenas a demanda Marshalliana é observável: ela depende dos preços e do nível de renda, variáveis que podem ser observadas, e é resultado do problema de maximização de bem-estar do indivíduo.

Vamos supor que a utilidade é bem-comportada, o que permite usar o método do Lagrange para resolver o problema de minimização de dispêndio. Para facilitar o desenvolvimento e a análise gráfica, vamos supor apenas dois bens. O Langrageano desse problema é então:

$$\mathcal{L} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \mu(\bar{u} - u(x_1, x_2)) \,,$$

em que μ denota o multiplicador de Lagrange. As CPOs do problema resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1): \quad & p_1 = \mu^* \, \partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1 \,, \\ (x_2): \quad & p_2 = \mu^* \, \partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2 \,, \\ (\mu): \quad & \bar{u} = u(x_1^*, x_2^*) \,, \end{aligned}$$

onde (x_1^*, x_2^*) é a cesta candidata a ótimo. Observe que as duas primeiras CPOs são similares às duas primeiras CPOs do problema de maximização da utilidade e resultam na condição de que a TMS entre dois bens na cesta candidata a ótimo seja igual à relação de preços. Portanto, para o caso de dois bens, a solução do problema de minimização de dispêndio do consumidor satisfaz a condição de tangência entre a curva de indiferença dada por $\bar{u}$ e a *reta de isodispêndio* (ou isocusto). Apenas a última CPO é substancialmente diferente, e serve para garantir que a cesta ótima encontrada alcance o nível de utilidade $\bar{u}$.

Qual a interpretação econômica do multiplicador de Lagrange μ do problema dual do consumidor? Ele representa o custo marginal para se obter uma unidade adicional de utilidade:

$$\mu(\mathbf{p}, \bar{u}) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial \bar{u}} \,.$$

Como o conceito de utilidade é ordinal, o multiplicador de Lagrange desse problema não possui conteúdo econômico relevante.

Sabemos que as CPOs são *necessárias, porém não suficientes* para garantir que o candidato à solução encontrado resolvendo as CPOs seja de fato uma solução do problema de minimização de dispêndio. Para garantir que o candidato a solução seja de fqato uma solução do problema de minimização do dispêndio precisamos verificar as *condições de segunda ordem* (CSO) do problema. Essas condições são obtidas a partir do *Hessiano orlado* do Lagrangeano. As CSOs são satisfeitas se o Hessiano orlado calculado no candidato a ótimo for uma matriz negativa definida, já que temos um problema de minimização. No caso de dois bens, basta verificar se o Hessiano orlado possui determinante negativo.

O Hessiano orlado para esse problema no caso de apenas dois bens é:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mu \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mu \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial \mu} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial \mu} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -u_1 & -u_2 \\ -u_1 & -\mu u_{11} & -\mu u_{12} \\ -u_2 & -\mu u_{12} & -\mu u_{22} \end{pmatrix}$$

onde $u_i = \partial u/\partial x_i$, $i = 1, 2$. O determinante de H é:

$$\det(H) = -2\mu u_1 u_2 u_{12} + \mu u_2^2 u_{11} + \mu u_1^2 u_{22}$$

Como $\mu > 0$, as demandas Hicksianas vão ser de fato solução do problema de minimização de dispêndio do consumidor se:

$$-2u_1u_2u_{12} + u_2^2u_{11} + u_1^2u_{22} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2u_1u_2u_{12} - u_2^2u_{11} - u_1^2u_{22} > 0$$

Observe que a CSO para o problema de minimização da função dispêndio é igual à CSO do problema de maximização da utilidade. As CPOs serão suficientes para determinar a solução dos dois problemas caso as curvas de indiferença sejam convexas em relação à origem. Para ambos os problemas de maximização da utilidade e minimização do dispêndio, uma função de utilidade bem-comportada garante que o determinante do Hessiano orlado tenha o sinal requerido.

Vamos agora resolver o problema de minimização de dispêndio para o caso da utilidade Cobb-Douglas.

Exemplo 1: Função de Utilidade Cobb-Douglas. O Lagrangeano do problema de minimização de dispêndio para o caso da utilidade Cobb-Douglas com dois bens é:

$$\mathcal{L} = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu(\bar{u} - x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha})$$

As CPOs resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1): &\quad p_1 = \mu^*\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} \\ (x_2): &\quad p_2 = \mu^*(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} \\ (\mu): &\quad \bar{u} = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Dividindo as duas primeiras CPOs, encontramos uma expressão para x_2 em função de x_1. Substituindo essa expressão na terceira CPO, determinamos a demanda compensada para o bem 1. Substituindo a demanda do bem 1 para a expressão de x_2 em função de x_1, determinamos a demanda compensada do bem 2. Essas demandas são:

$$x_1^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1^{\alpha-1}p_2^{1-\alpha}\bar{u} \qquad \text{e} \qquad x_2^h(p_1,p_2,\bar{u}) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} p_1^{\alpha}p_2^{-\alpha}\bar{u}$$

A função de dispêndio é encontrada substituindo as demandas compensadas no gasto do consumidor: $e(p_1,p_2,\bar{u}) = p_1x_1^h + p_2x_2^h$. Simplificando essa expressão, obtemos:

$$e(p_1,p_2,\bar{u}) = \alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}\bar{u}\,.$$

O método de Lagrange supõe uma série de condições que nem sempre são satisfeitas. Vamos analisar novamente dois casos em que o método de Lagrange não se aplica: 1) bens substitutos perfeitos (utilidade linear) e 2) bens complementares perfeitos (utilidade de Leontief). A análise é feita caso a caso, com ajuda gráfica para encontrar as demandas.

Exemplo 2: Bens Substitutos Perfeitos. Vimos que dois bens são *substitutos perfeitos* se o consumidor aceita substituir um pelo outro a uma taxa constante. A função de utilidade que representa essa relação é $u(x_1,x_2) = ax_1 + bx_2$, com $a > 0,\ b > 0$. O problema dual é:

$$\min_{x_1,x_2\geq 0} p_1x_1 + p_2x_2 \qquad \text{s.a.} \qquad \bar{u} = ax_1 + bx_2$$

Esse problema pode ser resolvido usando o método de Kuhn-Tucker. Porém vamos resolvê-lo usando intuição e ajuda gráfica. A Figura 3 abaixo ilustra graficamente esse problema.

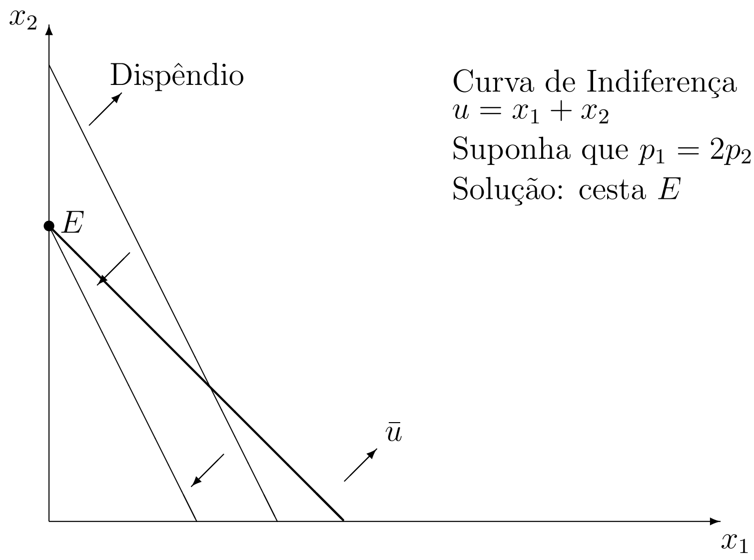

Figura 3: Minimização do Dispêndio – Bens Substitutos Perfeitos

A cesta de bens ótima do consumidor que deseja escolher entre bens substitutos perfeitos é consumir nada do bem relativamente mais caro e comprar somente o bem relativamente mais barato. Portanto, as demandas Hicksianas são:

$$x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \begin{cases} \bar{u}/a, & \text{se} \quad p_1/a < p_2/b \\ 0, & \text{se} \quad p_1/a > p_2/b \end{cases} \quad \text{e} \quad x_2^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad p_1/a < p_2/b \\ \bar{u}/b, & \text{se} \quad p_1/a > p_2/b \end{cases}$$

No caso em que $p_1/a = p_2/b$, o consumidor comprará qualquer cesta (x_1^*, x_2^*) tal que satisfaça a restrição, $ax_1^* + bx_2^* = \bar{u}$. A função dispêndio é:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \begin{cases} p_1(\bar{u}/a), & \text{se} \quad p_1/a \leq p_2/b \\ p_2(\bar{u}/b), & \text{se} \quad p_1/a > p_2/b \\ p_1(\bar{u}/a) = p_2(\bar{u}/b), & \text{se} \quad p_1/a = p_2/b \end{cases}$$

Podemos reescrever a função dispêndio de modo mais simples como:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \min\left\{\frac{p_1}{a}, \frac{p_2}{b}\right\} \bar{u}\,.$$

Exemplo 3: Bens Complementares Perfeitos. Vimos que dois bens são complementares perfeitos se são consumidos conjuntamente, *em proporções fixas*. A Figura 4 abaixo ilustra graficamente o problema nesse caso. A função de utilidade que representa essa relação é $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, com $a > 0,\ b > 0$. O problema dual é:

$$\min_{x_1, x_2 \geq 0} p_1 x_1 + p_2 x_2 \qquad \text{s.a.} \qquad \bar{u} = \min\{ax_1, bx_2\}$$

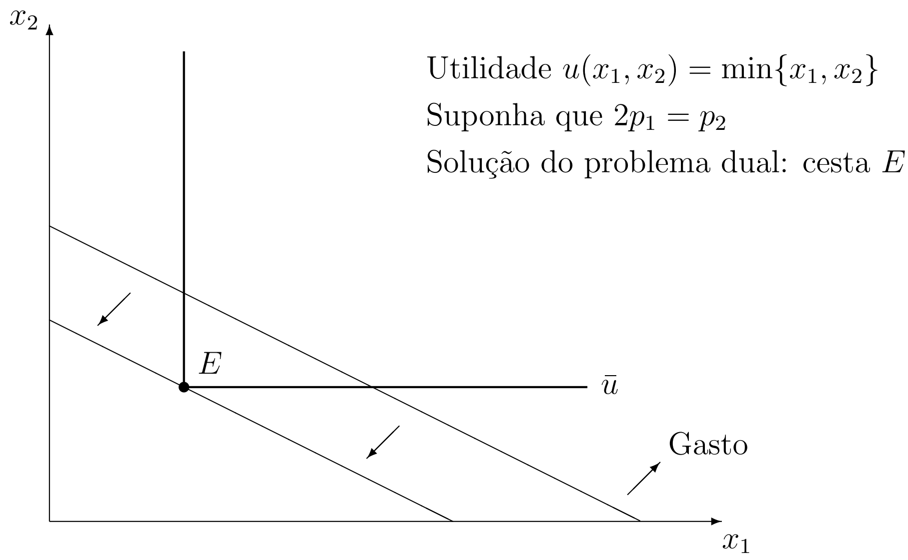

Figura 4: Minimização do Dispêndio – Bens Complementares Perfeitos

A cesta de bens ótima satisfaz a relação $ax_1 = bx_2$. Portanto $ax_1^h = bx_2^h$ e, usando a restrição do problema, encontramos:

$$x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{a} \qquad \text{e} \qquad x_2^h(p_1, p_2, \bar{u}) = \frac{\bar{u}}{b}$$

A função dispêndio é, portanto:

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = \left(\frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{b}\right)\bar{u}\,.$$

2 Propriedades da Função Dispêndio

Proposição. Se $u(\mathbf{x})$ é contínua e estritamente crescente, então a função dispêndio $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ é:

1. Contínua;
2. Homogênea de grau 1 nos preços;
3. Estritamente crescente em $\bar{u}$ e crescente nos preços;
4. Côncava nos preços;
5. Vale o *Lema de Shepard*: a derivada de $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ com relação ao preço do bem i, $i = 1, 2, \ldots, n$, é igual à demanda desse bem:
$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})\,.$$

A propriedade de continuidade é consequência do *teorema do máximo*, um resultado matemático que garante a continuidade da *função valor* (a função objetivo do problema de otimização; neste caso, o dispêndio do consumidor; calculada no ótimo; ou seja, a função dispêndio), sob condições bastante gerais. Vamos analisar detalhadamente cada uma das outras propriedades listadas acima. Como usaremos o Lema de Shepard para mostrar a terceira propriedade, começamos por ele.

1) Lema de Shepard.

As derivadas da função dispêndio com respeito aos preços são as funções de demanda Hicksianas:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\bar{u})}{\partial p_i} = x_i^h(\mathbf{p},\bar{u})$$

Portanto, usando o lema de Shepard, podemos obter as funções de demanda a partir de qualquer função dispêndio. O lema de Shepard é consequência do *teorema do envelope*, que diz que para a derivada de uma função otimizada com respeito a um parâmetro e calculada no ótimo, a única mudança que importa é a "*de primeira ordem*".

Vamos provar o lema de Shepard para o bem 1 (supondo apenas dois bens, o caso geral con n bens é similar, assim como o caso de uma mudança no preço do bem 2 é análogo). Se derivarmos a função dispêndio com relação a p_1, obtemos:

$$\frac{\partial e(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_1} = x_1^h(p_1,p_2,\bar{u}) + p_1\frac{\partial x_1^h(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial x_2^h(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_1}$$

Logo, uma mudança no preço do bem 1 tem dois tipos de efeitos sobre a função dispêndio: 1) efeito de primeira ordem, dado pelo acréscimo do valor do consumo desse bem, e 2) efeito de segunda ordem, dado pelas mudanças que a alteração do preço causa nas demandas dos bens. Vamos omitir o argumento das funções para simplificar a notação. No ótimo, as CPOs do problema dual garantem que $p_i = \mu u_i$, com $u_i = \partial u/\partial x_i$, para todo bem i. Substituindo as CPOs na equação acima, obtemos:

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = x_1^h + \mu\left(u_1\frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} + u_2\frac{\partial x_2^h}{\partial p_1}\right)$$

Se derivarmos a CPO para μ, $\bar{u} = u(x_1^h, x_2^h)$, com relação ao preço p_1, temos que:

$$u_1\frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} + u_2\frac{\partial x_2^h}{\partial p_1} = 0$$

Substituindo essa última equação na equação anterior a ela, obtemos o lema de Shepard:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\bar{u})}{\partial p_1} = x_1^h(\mathbf{p},\bar{u})\,.$$

2) Homogênea de grau um nos preços.

A função dispêndio é homogênea de grau um nos preços:

$$e(t\mathbf{p},\bar{u}) = te(\mathbf{p},\bar{u}), \qquad \text{para todo } t \geq 0\,.$$

Essa propriedade é consequência direta da definição da função dispêndio: se todos os preços, por exemplo, dobram, então o dispêndio irá dobrar para o consumidor permanecer na mesma curva de indiferença.

3) Não decrescente em preços e crescente em pelo menos um dos preços; crescente na utilidade.

Pelo lema de Shepard,
$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u}) \geq 0$$

Um aumento do preço do bem i obriga o consumidor a gastar mais (ou o mesmo, no caso em que o bem não é consumido, $x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u}) = 0$) para manter o nível de utilidade $\bar{u}$ inalterado. Deve existir pelo menos um bem tal que a derivada acima é estritamente maior do que zero.

Já com relação ao nível de utilidade $\bar{u}$ desejado, temos que:
$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial \bar{u}} = \mu(\mathbf{p}, \bar{u}) > 0\,,$$
ou seja, no caso de um aumento do nível de utilidade almejado, se os preços estão fixos, então o consumidor deve necessariamente gastar mais para alcançar esse maior nível de utilidade.

4) Côncava nos preços.

Essa propriedade é crucial, pois gera propriedades importantes das funções de demandas Hicksianas. Vamos prová-la formalmente. Primeiro vamos definir o que significa a função dispêndio ser côncava.

Definição: A função de dispêndio $e(\mathbf{p}, \bar{u})$ é côncava nos preços se dados $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ quaisquer, e denotando $\mathbf{p}_t = t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p}'$, com $t \in [0, 1]$, for sempre válido que:
$$e(\mathbf{p}_t, \bar{u}) \geq te(\mathbf{p}, \bar{u}) + (1-t)e(\mathbf{p}', \bar{u})\,, \quad \text{para todo } t \in [0,1]\,.$$

Prova da propriedade 4): Fixe um nível de utilidade $\bar{u}$ qualquer. Considere vetores de preços $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ arbitrários. Denote por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ as soluções dos problemas de minimização do dispêndio para os preços $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$, respectivamente, considerando o nível de utilidade $\bar{u}$. Então:
$$e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \qquad \text{e} \qquad e(\mathbf{p}', \bar{u}) = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}'\,,$$
onde a notação $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ denota o produto interno dos vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$. Seja $\mathbf{p}^t = t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p}'$ para $t \in [0, 1]$. Denote por $\mathbf{x}^t$ a solução do problema de minimização do dispêndio para o vetor de preços $\mathbf{p}^t$, considerando o nível de utilidade $\bar{u}$. Observe que:
$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}^t, \bar{u}) &= \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}^t = (t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}^t = t\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^t + (1-t)\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}^t \\ &\geq t\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + (1-t)\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' = te(\mathbf{p}, \bar{u}) + (1-t)e(\mathbf{p}', \bar{u}) \end{aligned}$$

A desigualdade acima é válida porque $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ e $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}'$ são os dispêndios mínimos para alcançar a utilidade $\bar{u}$ aos preços $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$, respectivamente. Ou seja,
$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}, \bar{u}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^t \\ e(\mathbf{p}', \bar{u}) = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^t \end{aligned}$$

Isso conclui a prova da concavidade da função dispêndio.

Vamos analisar a intuição econômica desse resultado, o mais importante desta seção. Na Figura 5 abaixo, ilustramos o efeito de uma mudança no dispêndio causada por uma alteração no preco do bem 1, originalmente $\bar{p}_1$, mantido o preço do bem 2 fixo em $\bar{p}_2$. A linha reta representa uma resposta *passiva* do consumidor a uma mudança no preço do bem 1, ou seja, o consumidor não altera a cesta $\mathbf{x}^*$ de bens consumidos. Nesse caso, o consumidor não está escolhendo as quantidades de bens otimamente e reage passivamente à mudança do preço p_1. Portanto, a inclinação da reta e_p de *dispêndio passivo* é x_1^*, a quantidade comprada do bem 1. Porém, o consumidor *ajusta a cesta que consome* quando o preço p_1 muda e, portanto, a curva de dispêndio se posiciona abaixo da reta e_p. Quando essas duas linhas se tocarão? Quando o preço é tal que o consumo ótimo é x_1^*, ambas as linhas e_p, dispêndio passivo, e e, o dispêndio ótimo, vão ter o mesmo valor e serão tangentes. Para outros valores do preço do bem 1, a função de dispêndio está abaixo da reta e_p. Isso implica que a função dispêndio é côncava.

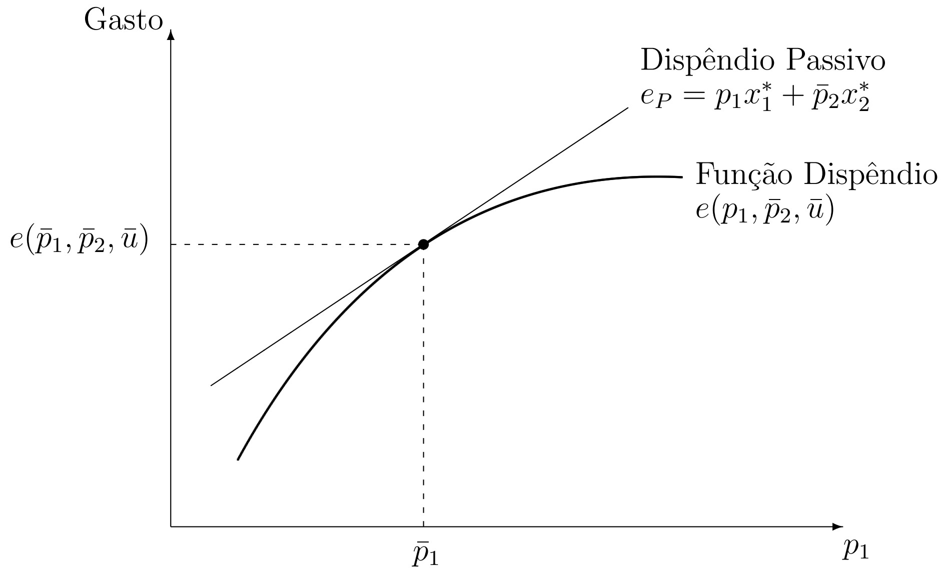

Figura 5: Concavidade da Função Dispêndio

Caso a utilidade seja bem-comportada, então a função dispêndio será estritamente côncava, como a Figura 5 ilustra. Utilidades bem-comportadas implicam a existência de substituição entre os bens. No caso extremo de uma utilidade de Leontief, a função dispêndio ilustrada na Figura 5 seria uma reta que se sobrepõe ao dispêndio passivo, ilustrando exatamente a ausência de substituição entre os bens que ocorre no caso desta utilidade.

As propriedades derivadas para função dispêndio refletem-se em três propriedades sobre as demandas Hicksianas: homogeneidade, lei da demanda e simetria.

Homogeneidade.

As demandas Hicksianas são homogêneas de grau zero nos preços:

$$x_i(tp_1, tp_2, \bar{u}) = x_i(p_1, p_2, \bar{u}), \qquad \forall\ t > 0,\ i = 1, 2$$

Essa propriedade segue do fato de que se todos os preços variarem na mesma proporção, as demandas que solucionam o problema de minimização do dispêndio não se alterarão (porém o dispêndio mínimo se elevará na mesma proporção do aumento dos preços, propriedade 2) da função dispêndio). Esse resultado também pode ser derivado do *Teorema de Euler*, bastante usado em economia.

Lei da Demanda (Compensada).

Se combinarmos as propriedade de concavidade nos preços e o lema de Shepard, obtemos:

$$\frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 e(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i^2} \leq 0,$$

ou seja, a demanda Hicksiana satisfaz a **lei da demanda** *sem exceções mesmo do ponto de vista teórico*: um aumento nos preços leva a uma queda na quantidade consumida (ou permanece a mesma, mas nunca aumentará), *se mantivermos o nível de utilidade do consumidor constante.*

O ponto principal é que uma restrição orçamentária linear nos preços é transformada em uma função dispêndio *côncava nos preços*, devido à minimização dos gastos pelo consumidor. Se o consumidor procura minimizar os seus gastos quando tenta atingir um determinado nível de utilidade, o custo incorrido aumenta proporcionalmente menos do que a mudança nos preços. Não é necessário levantar qualquer hipótese sobre a utilidade para se atingir esse resultado: se o consumidor minimiza os gastos para obter um dado nível de utilidade, esses gastos crescem proporcionalmente menos (ou no caso extremo de não existir possibilidade de substituição entre os bens, na mesma proporção, mas nunca numa proporção maior) do que uma mudança nos preços, qualquer que seja a função de utilidade do consumidor.

Simetria.

A mudança na quantidade demandada do bem i quando o preço do bem k muda é igual à mudança na quantidade demandada do bem k quando o preço do bem i muda, mantendo o nível de utilidade constante. Esse resultado é uma consequência da simetria da matriz de derivadas segundas da função dispêndio e do lema de Shepard:

$$\frac{\partial x_k^h}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 e}{\partial p_k \partial p_i} = \frac{\partial^2 e}{\partial p_i \partial p_k} = \frac{\partial x_i^h}{\partial p_k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x_k^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})}{\partial p_k}$$

Definição: Substitutos e Complementares Líquidos. Dizemos que o bem i é:

- *substituto líquido* do bem j se $\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})/\partial p_j > 0$, e
- *complementar líquido* do bem j se $\partial x_i^h(\mathbf{p}, \bar{u})/\partial p_j < 0$.

A propriedade de simetria diz que se i é substituto (complementar) líquido do bem j, então o bem j é substituto (complementar) líquido do bem i. Logo, podemos escrever, *sem perigo de ambiguidade*, que i e j são substitutos (complementares) líquidos (observe que essa propriedade de simetria não vale em geral para substitutos e complementares *brutos*).

As propriedades acima, consequência da função dispêndio ser côncava nos preços, são usualmente condensadas na *matriz de substituição*, definida a seguir.

Definição. Matriz de Substituição. A matriz de Substituição S é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^h}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^h}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^h}{\partial p_n} \\ \frac{\partial x_2^h}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2^h}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_2^h}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^h}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n^h}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^h}{\partial p_n} \end{bmatrix}$$

As propriedades acima podem ser redefinidas em termos da matriz de substituição, ao dizermos que essa matriz é *simétrica* e *negativa semidefinida* (essa última propriedade é mais restritiva do que a lei da demanda vista acima, mas também é válida, pois é consequência da concavidade da função dispêndio). A matriz de substituição é utilizada para testar a teoria do consumidor: o sistema de demandas Hicksianas deve satisfazer as propriedades de simetria e ser negativa semidefinida. Porém, como a demanda Hicksiana não é observável, vamos encontrar uma relação entre as derivadas das demandas Hicksianas contidas nessa matriz e as derivadas das demandas Marshallianas, que são observáveis. Esse relação é descrita pela *equação de Slutsky*.

Leitura Recomendada

- Nicholson e Snyder, cap. 4 "Utility Maximization and Choice".

Exercícios

1. A utilidade de Maria é $u(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2$.

   a) Encontre as demandas Marshallianas de Maria. Derive as elasticidades-preço, preço-cruzada e renda para os dois bens, para o caso de solução interior.

   b) Classifique os bens em termos de cada uma dessas elasticidades, como visto em sala, para o caso de solução interior.

   c) Encontre as demandas Hicksianas dos dois bens. Compare a demanda Hicksiana com a demanda Marshalliana do bem 1, quando as demandas são positivas. Interprete.

   Podemos definir elasticidades similares às que foram definidas na Nota de Aula 6, mas usando as demandas hicksianas. Essas elasticidades são denominadas *compensadas*. Podemos definir um bem i como *substituto líquido* (*complementar líquido*) do bem j caso ϵ_{ij}^h seja positivo (negativo), onde ϵ_{ij}^h denota a elasticidade preço-cruzada da demanda compensada do bem i (com relaçõ ao preço do bem j).

   d) Classique os bens 1 e 2 em termos de complementares ou substitutos líquidos. Neste caso, ao contrário do que o item b) acima mostra, seria possível ocorrer que o bem i seja substituto líquido (complementar líquido) do bem j mas o bem j não seja substituto líquido (complementar líquido) do bem i? Explique.

   Podemos definir elasticidades similares às que foram definidas na Nota de Aula 6, mas usando as demandas hicksianas. Essas elasticidades são denominadas *compensadas*. Podemos definir um bem i como *substituto líquido* (*complementar líquido*) do bem j caso ϵ_{ij}^h seja positivo (negativo), onde ϵ_{ij}^h denota a elasticidade preço-cruzada da demanda compensada do bem i (com relaçõ ao preço do bem j).

   d) Classique os bens 1 e 2 em termos de complementares ou substitutos líquidos. Neste caso, ao contrário do que o item b) acima mostra, seria possível ocorrer que o bem i seja substituto líquido (complementar líquido) do bem j mas o bem j não seja substituto líquido (complementar líquido) do bem i? Explique.

2. Encontre as demandas Hicksianas e a função dispêndio para os seguintes casos:

   a) Utilidade Cobb-Douglas: $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

   b) Utilidade linear: $u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, $a, b > 0$.

   c) Utilidade Leontief: $u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, $a, b > 0$.

   d) Utilidade CES: $u(x_1, x_2) = [ax_1^{\rho} + bx_2^{\rho}]^{\frac{1}{\rho}}$, $a, b > 0$, $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

3. Resolva os seguintes itens para cada uma das funções de utilidade elencadas no exercício anterior.

   a) Verifique se as demandas Hicksianas são homogêneas de grau 0 nos preços.

   b) Cheque a validade do lema de Shephard para o bem 1.

   c) Cheque se a propriedade de simetria é satisfeita.

   d) Ilustre graficamente a função dispêndio como função do preço do bem 1, todas as outras variáveis constantes. Interprete economicamente o formato de cada gráfico em termos da possibilidade de substituição do consumo dos dois bens.