MICROECONOMIA 1

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Notas de Aula 16 – Graduação

Prof. José Guilherme de Lara Resende

1 Introdução

1.1 Maximização de Lucros

Vamos supor que o objetivo da firma seja maximizar lucros. Como firmas têm donos, a hipótese de maximização de lucros é equivalente à hipótese de maximização da renda do dono ou donos (acionistas) da empresa. Se o dono maximiza a sua renda, ele estará maximizando a sua utilidade, já que ao aumentar a sua renda, ele pode alcançar uma curva de indiferença mais alta. Podemos também analisar outros objetivos que não o de maximização de lucros. Mais importante do que a hipótese de maximização de lucros é que a firma seja coerente com o objetivo proposto, ou seja, que suas *ações estejam de acordo com o objetivo a que se propõe alcançar.*

O lucro de uma empresa é a diferença entre a receita gerada pela venda da sua produção menos os custos dos fatores usados nessa produção. Para a firma que produz um único bem, a sua receita é dada pela quantidade vendida do produto. Como a função de produção descreve a relação entre insumos e quantidade produzida, temos que $q = f(x_1, x_2)$, no caso em que a firma utilize apenas dois insumos (a fim de simplificar a notação da análise a seguir, vamos continuar considerando apenas dois insumos. As conclusões obtidas abaixo são facilmente generalizadas para o caso de n insumos).

1.2 Mercado Competitivo

Dizemos que o mercado de um bem é perfeitamente competitivo se todas as firmas que produzem esse bem são tomadoras de preço: cada firma, individualmente, acha que não pode afetar o preço do bem que produz, e o toma como dado quando faz suas escolhas de produção e de uso de fatores.

Vamos assumir também que o mercado dos insumos é competitivo: cada firma, individualmente, acha que não pode afetar o preço dos insumos que utiliza, e os toma como dados quando faz suas escolhas de produção e de uso de fatores.

A firma então é *tomadora de preços*: toma o preço do produto e os preços dos insumos como fixos, fora da sua capacidade de negociação. Essa hipótese é razoável para várias indústrias, como a de padarias, por exemplo. Uma padaria dificilmente vai poder cobrar mais pelo seu pão (controlando pela qualidade) do que o preço de mercado. Nem vai poder comprar insumos com um desconto maior do que outras padarias obtêm. Nesse caso, dizemos que a firma não tem *poder de mercado.*

A hipótese de competição perfeita é razoável para mercados onde o número de firmas é grande, e cada firma produz uma parcela pequena da produção total do bem ou utiliza uma parcela pequena do total produzido de cada insumo. Um mercado como o de pães é um mercado competitivo (ou com características muito próximas de um mercado competitivo): cada padaria sabe que não pode cobrar um preço muito alto pelo seu pão, pois nesse caso perderia sua clientela. Além disso, cada padaria não consegue adquirir os insumos que usa a um preço menor do que as outras padarias.

Outra característica comum a mercados competitivos é entrada e saída livres (ou sem muitas dificuldades) do mercado. Montar uma padaria é um empreendimento que tem um custo, mas não tão alto que impeça o surgimento de novas padarias, como podemos ver em qualquer cidade, onde novas padarias abrem e velhas padarias fecham.

O mercado em competição perfeita é uma versão idealizada do mercado concorrencial. Modelos de mercado em concorrência perfeita normalmente supõem que o número de compradores e vendedores é grande o suficiente para dissipar qualquer influência de uma firma no mercado como um todo. Além disso, assume que o bem produzido é homogêneo, em que as firmas não conseguem diferenciar a sua produção (por exemplo, a padaria produzir um pão diferente, de qualidade maior do que as suas concorrentes).

O mercado em concorrência perfeita é o principal paradigma econômico, pois apresenta diversas características de eficiência de bem-estar social. Entre elas, a mais importante é que na ausência de falhas de mercado, a alocação do mercado competitivo maximiza o bem-estar social.

Para que um mercado seja perfeitamente competitivo basta que as firmas participantes desse mercado sejam tomadoras de preços. Mesmo que existam poucas firmas, se cada uma acha que o preço do bem que produz independe das ações que toma, então o mercado desse bem será perfeitamente competitivo.

2 Maximização de Lucros

2.1 Set-up

Se a firma vender cada unidade do seu produto pelo preço p, sua receita R será:

$$R = p \times q = pf(x_1, x_2)$$

A despesa da firma é o custo dos fatores que usa na produção de $q = f(x_1, x_2)$. Se a firma comprar os fatores de produção em um mercado competitivo, aos preços w_1 e w_2, então a despesa D da firma será:

$$D = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

A firma deve escolher quantidades de insumos que maximizam o seu lucro, igual à diferença entre receita e despesa:

$$\max_{x_1, x_2} pf(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

Observe que a quantidade ótima de produção é escolhida implicitamente, ao escolher as quantidades de insumos que maximizam o lucro.

Vamos supor que a maximização acima tem solução interior (isto é, x_1^*, x_2^* são maiores do que zero) e que as condições de segunda ordem são satisfeitas. As CPO do problema são:

$$\begin{aligned} (x_1):& \quad pf_1(x_1^*, x_2^*) = w_1 \\ (x_2):& \quad pf_2(x_1^*, x_2^*) = w_2 \end{aligned}$$

onde $f_i(x_1^*, x_2^*) = \partial f(x_1^*, x_2^*)/\partial x_i$, para $i = 1, 2$.

O termo ao lado esquerdo das CPO é o preço do bem final multiplicado pelo produto marginal do insumo i, ou seja, é a taxa em que a receita aumenta dado um aumento no uso do insumo i.

Esse é *o valor do produto marginal de um insumo.* Já o lado direito é o preço do insumo. Como o mercado de insumos é competitivo, o custo marginal de adquirir uma unidade a mais de um insumo é sempre igual ao seu preço.

A CPO tem uma interpretação intuitiva clara. Se a firma aumentar o uso do insumo i em Δx_i (e mantiver todos os outros insumos inalterados), a sua produção aumentará em $\Delta q = f_i(\mathbf{x})\Delta x_i = PMg_i(\mathbf{x})\Delta x_i$. A receita adicional obtida é igual à $p\Delta q = pf_i(\mathbf{x})\Delta x_i = pPMg_i(\mathbf{x})\Delta x_i$. Já a despesa adicional gerada pelo aumento do uso do fator i é igual à $w_i\Delta x_i$.

Suponha que o nível de insumos escolhido pela firma seja tal que $pPMg_i(\mathbf{x}) > w_i$. Nesse caso, se a firma aumentar a quantidade do insumo i, o acréscimo de receita obtido será maior do que a despesa adicional, o que aumenta o lucro. Portanto, a firma deve aumentar o uso do insumo i se quiser maximizar lucros. Como o produto marginal de um insumo é decrescente no seu uso, ao aumentarmos a quantidade do insumo i, a desigualdade $pPMg_i(\mathbf{x}) > w_i$ se torna uma igualdade.

Se o nível de insumos escolhido for tal que $pPMg_i(\mathbf{x}) < w_i$, então a firma deve diminuir o uso do insumo i, pois o decréscimo de receita obtido será menor do que a economia gerada pelo uso menor do fator, o que aumentará o lucro. Portanto, a firma deve diminuir o uso do insumo i se quiser maximizar lucros. Como o produto marginal de um insumo é decrescente no seu uso, ao diminuirmos a quantidade do insumo i, a desigualdade $pPMg_i(\mathbf{x}) < w_i$ se torna uma igualdade.

Portanto, a firma maximiza o seu lucro ao escolher os insumos de modo que ***o valor do produto marginal de cada insumo seja igual ao seu custo marginal*** (lembrando que o custo marginal de um insumo, no caso de uma firma competitiva, é igual ao preço desse insumo).

2.2 Demandas por Insumos e Oferta da Firma

Se resolvermos as CPO do problema de maximização de lucros da firma, encontramos as quantidades ótimas de insumos como funções dos preços:

$$x_i^* = x_i(p, w_1, w_2)\,, \qquad i = 1, 2.$$

Essas demandas por insumos são as *demandas ótimas* da firma: $x_1(p, w_1, w_2)$ e $x_2(p, w_1, w_2)$ são as escolhas de insumos que maximizam o lucro da firma quando o preço do bem que a firma vende é p e os preços dos insumos que a firma adquire são w_1 e w_2.

Se substituirmos essas demandas na função de produção da firma, encontramos a *função de oferta* ou *oferta ótima* da firma, denotada por $q^* = q(p, w_1, w_2)$:

$$q^* = q(p, w_1, w_2) = f(x_1^*, x_2^*) = f(x_1(p, w_1, w_2), x_2(p, w_1, w_2))$$

Finalmente, a *função lucro* da firma, quando existir, é dada por:

$$\begin{aligned}\pi(p, w_1, w_2) &= \max_{x_1, x_2}\ [pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2] \\ &= pq(p, w_1, w_2) - w_1x_1(p, w_1, w_2) - w_2x_2(p, w_1, w_2)\end{aligned}$$

A função lucro da firma diz o lucro máximo que a firma obtém quando o preço do bem que vende é p e os preços dos insumos que utiliza na produção são w_1 e w_2.

Vamos encontrar as demandas ótimas e a função de oferta da firma para o caso de uma função de produção Cobb-Douglas.

Exemplo: Função de produção Cobb-Douglas. O problema de maximização de lucros de uma firma com tecnologia Cobb-Douglas $f(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$, A, α, β positivos, que usa dois insumos é dado por:

$$\max_{x_1, x_2} pAx_1^\alpha x_2^\beta - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned}
(x_1):& \quad p\alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^\beta = w_1 \\
(x_2):& \quad p\beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} = w_2
\end{aligned}$$

Vamos multiplicar a primeira CPO por x_1 e a segunda por x_2, lembrando que $q = f(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$:

$$\begin{aligned}
p\alpha A x_1^\alpha x_2^\beta = w_1 x_1 \quad &\Rightarrow \quad x_1^* = \frac{\alpha p q^*}{w_1} \\
p\beta A x_1^\alpha x_2^\beta = w_2 x_2 \quad &\Rightarrow \quad x_2^* = \frac{\beta p q^*}{w_2}
\end{aligned}$$

As escolhas ótimas dos dois insumos acima estão como funções dos preços e do *nível de produção ótimo*. Observe que essas expressões para x_1 e x_2 ainda não constituem as funções demandas ótimas dos insumos: elas estão em função de q, a oferta ótima, que deve ser determinada. Para encontrarmos a oferta ótima, substituímos as escolhas ótimas de insumos em função de q na função de produção:

$$q^* = A\left(x_1^*\right)^\alpha \left(x_2^*\right)^\beta = A\left(\frac{\alpha p q^*}{w_1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta p q^*}{w_2}\right)^\beta \quad \Rightarrow \quad q^* = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} p^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

Portanto, encontramos a oferta ótima da firma. Substituindo q^* nas escolhas ótimas dos insumos em função de q, encontramos as demandas ótimas dos insumos (que são funções apenas dos preços e que dependem de parâmetros da função de produção, como esperado):

$$\begin{aligned}
x_1^*(p, w_1, w_2) &= A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\
x_2^*(p, w_1, w_2) &= A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha}{w_1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{w_2}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}} p^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}
\end{aligned}$$

As soluções acima para as demandas e oferta ótimas não est ao definidas para o caso em que $\alpha+\beta = 1$. Nesse caso, a função de produção apresenta retornos constantes de escala. Vamos discutir abaixo a condição de segunda ordem do problema de maximização de lucro da firma. Veremos que essa condição requer, para o caso da função de produção Cobb-Douglas, que $\alpha + \beta < 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. A condição $\alpha + \beta < 1$ significa que a solução acima só é válida para funções de produção Cobb-Douglas que apresentam retornos decrescentes de escala.

Essa conclusão é válida em geral para funções de produção homogêneas: as demandas e oferta ótimas somente podem ser encontradas por meio da resolução do problema de maximização do lucro da firma no caso em que a função de produção apresente retornos decrescentes de escala (ou seja, se o grau de homogeneidade for menor do que 1). Abaixo discutiremos a intuição desse resultado.

2.3 Condições de Segunda Ordem

O Hessiano do problema da firma é:

$$H = \begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} & \dots & pf_{1n} \\ pf_{21} & pf_{22} & \dots & pf_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ pf_{n1} & pf_{n2} & \dots & pf_{nn} \end{pmatrix}$$

As CSO para um máximo são satisfeitas se a matriz Hessiana for negativa definida. Essa condição é satisfeita se o determinante dos menores principais do Hessiano alternam o sinal, ou seja, se:

$$pf_{11} < 0, \;\; \det \begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{pmatrix} > 0, \;\; \det \begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} & pf_{13} \\ pf_{21} & pf_{22} & pf_{23} \\ pf_{31} & pf_{32} & pf_{33} \end{pmatrix} < 0, \;\; \dots$$

Para o caso de dois bens, as CSO se resumem a (podemos eliminar p, pois ele não afeta o sinal da desigualdade):

$$f_{11} < 0, \;\; f_{22} < 0, \;\; f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

Portanto, para o caso de dois bens (e mais geralmente também) não é suficiente que os produtos marginais de cada bem sejam negativos ($f_{ii} < 0$). A condição $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$ também deve ser satisfeita.

Exemplo: Função Cobb-Douglas. As CPO do problema da firma com tecnologia Cobb-Douglas são:

$$p\alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} - w_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad p\beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} - w_2 = 0$$

As derivadas de segunda ordem da função objetivo são:

$$\begin{array}{ll} (11) & \alpha(\alpha-1)pAx_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} \\ (22) & \beta(\beta-1)pAx_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \\ (12) & \alpha\beta pAx_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} \end{array}$$

As CSO são:

$$\begin{array}{l} \alpha(\alpha-1)pAx_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} < 0, \qquad \beta(\beta-1)pAx_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} < 0, \qquad \text{e} \\ \alpha(\alpha-1)pAx_1^{\alpha-2}x_2^{\beta}\beta(\beta-1)pAx_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} - \left(\alpha\beta pAx_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1}\right)^2 > 0 \end{array}$$

As duas primeiras condições são satisfeitas se $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha < 1$, $\beta < 1$ e $A > 0$. A terceira condição pode ser simplificada para:

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) - (\alpha\beta) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha + \beta < 1$$

Ou seja, as CSO para o problema da firma com tecnologia Cobb-Douglas são $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$ (além de $A > 0$).

O que ocorre se $\alpha + \beta = 1$? Nesse caso, a tecnologia apresenta retornos constantes de escala:

$$f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^{\alpha} (tx_2)^{\beta} = t^{\alpha+\beta} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = tf(x_1, x_2)$$

Portanto, se a firma tiver um lucro positivo $\bar{\pi} > 0$ usando uma determinada combinação de insumos, denotada por $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, quando os preços são $\bar{p}$, $\bar{w}_1$ e $\bar{w}_2$, então ela poderá multiplicar infinitamente o seu lucro ao replicar a sua escala de produção infinitamente, já que a despesa aumenta também de modo linear com a escala de produção, como a equação abaixo mostra:

$$\bar{p}f(t\bar{x}_1, t\bar{x}_2) - \bar{w}_1(t\bar{x}_1) - \bar{w}_2(t\bar{x}_2) = t\left[\bar{p}f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - \bar{w}_1\bar{x}_1 - \bar{w}_2 x_2\right] = t\bar{\pi} > 0$$

Logo, aumentando t, o lucro aumenta indefinidamente. O mesmo problema ocorre, de modo mais acentuado, se a tecnologia apresentar retornos crescentes de escala. Nesse caso, ao aumentar a escala de produção, a firma aumentará o seu lucro de modo mais do que proporcional ao aumento da escala de produção.

Como podemos então encontrar a oferta e as demandas ótimas da firma nos casos em que a tecnologia apresenta RCE ou RCrE? Nesses casos, será impossível determinar as escolhas ótimas da firma analisando o seu problema de maximização de lucro de modo *isolado*. Alguma restrição externa deve ser levada em conta, tais como quantidades de insumos limitadas ou restrições de mercado competitivo ou de demanda de mercado decrescente no preço do bem.

Por exemplo, no caso de um mercado competitivo, o único lucro econômico possível de *longo prazo* para uma firma com retornos constantes de escala é zero. Isso ocorre por que se a firma tiver lucro positivo no longo prazo, novas firmas serão atraídas para esse mercado e a competição fará com que o lucro tenda a zero (caso o lucro fosse negativo, firmas sairiam do mercado, fazendo com que o prejuízo desaparecesse). Logo, a firma, por apresentar retornos constantes de escala, será indiferente entre qual quantidade produzir, já que todo nível de produção leva ao mesmo lucro econômico, igual a zero.

No caso de retornos crescentes de escala, pode se configurar uma situação de *monopólio natural*, onde a existência de uma única firma provendo todo o mercado é mais econômico, devido aos ganhos de escala da produção. Nesse caso, a demanda de mercado limitará a produção da firma. Em um monopólio, seja ele natural ou não, pode-se mostrar que a firma produzirá menos do que o socialmente ótimo e obterá lucros econômicos positivos. Isso gera uma ineficiência econômica, apesar de que no caso do monopólio natural exista uma justificativa econômica para se ter uma única firma produzindo, de modo a tirar o máximo de proveito dos ganhos de escala que a tecnologia apresenta.

3 Propriedades

3.1 Propriedades da Função Lucro

Vimos que a função de oferta da firma, caso exista, é definida como:

$$q^* = q(p, w_1, w_2) = f(x_1^*, x_2^*),$$

onde $x_1^* = x_1(p, w_1, w_2)$ e $x_2^* = x_2(p, w_1, w_2)$ são as demandas ótimas por insumos da firma. Essas funções ótimas são bem definidas se a a tecnologia da firma apresentar retornos decrescentes de escala. A função lucro, caso exista, pode ser calculada como:

$$\pi(p, w_1, w_2) = pq(p, w_1, w_2) - w_1 x_1(p, w_1, w_2) - w_2 x_2(p, w_1, w_2)$$

Vamos analisar as propriedades que a função lucro satisfaz, caso exista.

Propriedades da Função Lucro. Suponha que a função de produção satisfaz as propriedades 1)-4) da nota de aula 15. A função lucro, caso exista, satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Contínua nos preços.

(2) Crescente em p; não crescente em w_i para todo insumo i.

(3) Homogênea de grau um nos preços (p, w_1, w_2).

(4) Convexa nos preços (p, w_1, w_2).

(5) (Lema de Hotelling) Diferenciável em (p, w_1, w_2), onde vale que:

$$\frac{\partial \pi(p, w_1, w_2)}{\partial p} = q(p, w_1, w_2) \ ; \qquad \frac{\partial \pi(p, w_1, w_2)}{\partial w_i} = -x_i(p, w_1, w_2), \ i = 1, 2.$$

Vamos primeiro verificar a validade dessas propriedades, para depois discutir a intuição de cada uma delas.

Prova: (1) Suponha que a solução do problema da firma aos preços (p, w_1, w_2) é (x_1^*, x_2^*). Represente a solução do problema da firma por $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ quando o preço do produto aumenta para $\hat{p} > p$. Note que:

$$\pi(\hat{p}, w_1, w_2) \geq \hat{p} f(x_1^*, x_2^*) - w_1 x_1^* - w_2 x_2^* > p f(x_1^*, x_2^*) - w_1 x_1^* - w_2 x_2^* = \pi(p, w_1, w_2)$$

A primeira desigualdade é válida porque $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ é a solução do problema da firma aos preços $(\hat{p}, w_1, w_2)$. A segunda desigualdade é válida porque $\hat{p} > p$. Caso a firma de fato produza o bem (ou seja, a produção $q^* = f(x_1^*, x_2^*)$ é positiva), então a segunda desigualdade é estrita.

(2) Similar à prova de (1): Suponha que a solução do problema da firma aos preços (p, w_1, w_2) é (x_1^*, x_2^*). Represente a solução do problema da firma por $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ quando o preço do insumo 1 aumenta para $\hat{w}_1 > w_1$. Note que:

$$\pi(p, \hat{w}_1, w_2) \leq p f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - w_1 \hat{x}_1 - w_2 \hat{x}_2 \leq p f(x_1^*, x_2^*) - w_1 x_1^* - w_2 x_2^* = \pi(p, w_1, w_2)$$

A primeira desigualdade é válida porque $\hat{w}_1 > w_1 \Rightarrow -\hat{w}_1\hat{x}_1 \leq -w_1\hat{x}_1$. A segunda desigualdade é válida porque (x_1^*, x_2^*) é a solução do problema da firma aos preços (p, w_1, w_2). Caso a firma de fato utilize o insumo sob consideração ($\hat{x}_1 > 0$), então a primeira desigualde é estrita.

(3) Suponha que aumentamos todos os preços pelo mesmo fator $t > 0$. Então:

$$\begin{aligned}\pi(tp, tw_1, tw_2) &= \max_{x_1,x_2} tpf(x_1, x_2) - tw_1x_1 - tw_2x_2 = t\left[\max_{x_1,x_2} pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2\right] \\ &= t\pi(p, w_1w_2)\,.\end{aligned}$$

(4) Suponha que as demandas ótimas do problema da firma aos preços (p, w_1, w_2) são (x_1^*, x_2^*) e, aos preços $(\hat{p}, \hat{w}_1, \hat{w}_2)$, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Denote $(p^t, w_1^t, w_2^t) = t(p, w_1, w_2) + (1-t)(\hat{p}, \hat{w}_1, \hat{w}_2)$, $t \in [0, 1]$, e seja (x_1^t, x_2^t) a solução do problema da firma a esses preços. Então:

$$\begin{aligned}\pi(p, w_1, w_2) &= pf(x_1^*, x_2^*) - w_1x_1^* - w_2x_2^* \geq pf(x_1^t, x_2^t) - w_1x_1^t - w_2x_2^t \\ \pi(\hat{p}, \hat{w}_1, \hat{w}_2) &= \hat{p}f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - \hat{w}_1\hat{x}_1 - \hat{w}_2\hat{x}_2 \geq \hat{p}f(x_1^t, x_2^t) - \hat{w}_1x_1^t - \hat{w}_2x_2^t\end{aligned}$$

Portanto, para $0 \leq t \leq 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}t\pi(p, w_1, w_2) + (1-t)\pi(\hat{p}, \hat{w}_1, \hat{w}_2) &\geq (tp + (1-t)\hat{p})f(x_1^t, x_2^t) - (tw_1 + (1-t)\hat{w}_1)x_1^t \\ &\quad - (tw_2 + (1-t)\hat{w}_2)x_2^t \;=\; \pi(p^t, w_1^t, w_2^t)\,.\end{aligned}$$

(5) Esse resultado é consequência do *Teorema do Envelope*. Vamos derivar a função lucro com respeito a w_1 (o resultado para w_2 é obtido de modo similar):

$$\frac{\partial \pi}{\partial w_1} = \left(pf_1\frac{\partial x_1}{\partial w_1} + pf_2\frac{\partial x_2}{\partial w_1}\right) - \left(w_1\frac{\partial x_1}{\partial w_1} + x_1 + w_2\frac{\partial x_2}{\partial w_1}\right) = (pf_1 - w_1)\,\frac{\partial x_1}{\partial w_1} + (pf_2 - w_2)\,\frac{\partial x_2}{\partial w_1} - x_1$$

As CPOs são $pf_1 - w_1 = 0$ e $pf_2 - w_2 = 0$. Então,

$$\frac{\partial \pi}{\partial w_1} = \underbrace{(pf_1 - w_1)}_{=0 \text{ (CPO de } x_1)}\,\frac{\partial x_1}{\partial w_1} + \underbrace{(pf_2 - w_2)}_{=0 \text{ (CPO de } x_2)}\,\frac{\partial x_2}{\partial w_1} - x_1 = -x_1$$

Para o preço do produto, observe que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial p} &= f + \left(pf_1\frac{\partial x_1}{\partial p} + pf_2\frac{\partial x_2}{\partial p}\right) - \left(w_1\frac{\partial x_1}{\partial p} + w_2\frac{\partial x_2}{\partial p}\right) \\ &= f + \underbrace{(pf_1 - w_1)}_{=0 \text{ (CPO de } x_1)}\,\frac{\partial x_1}{\partial p} + \underbrace{(pf_2 - w_2)}_{=0 \text{ (CPO de } x_2)}\,\frac{\partial x_2}{\partial p} = f\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial \pi(p, w_1, w_2)}{\partial p} = q(p, w_1, w_2)\,.$$

Vamos discutir a intuição dessas propriedades. A primeira é a propriedade usual de continuidade: se um dos preços variar muito pouco, o lucro não irá se alterar muito. A segunda diz que se o preço do bem que a firma vende aumentar, tudo o mais constante, o lucro da firma aumentará. E que se o preço de algum insumo que a firma utiliza aumentar, todo o resto inalterado, o lucro diminuirá (o aumento de preços de insumos que a firma não utiliza não altera o lucro). A terceira propriedade diz que se todos os preços aumentarem na mesma proporção, o lucro aumenta na mesma proporção (a conhecida propriedade de que "preços absolutos não importam": se todos os preços são multiplicados por dez, a produção continua a mesma e o lucro é multiplicado por dez. Em termos reais, o lucro é o mesmo de antes).

A quarta propriedade diz que variação nos preços é "bom" para firma. Essa propriedade tem consequências importantes para o comportamento da firma sob incerteza. Ao contrário do consumidor, que não gosta de incerteza, pois deixa o seu fluxo de consumo incerto e sujeito a variações, a firma gosta de incerteza nos preços, pois o seu *lucro esperado* será maior.

Mais ainda, a convexidade da função lucro tem uma interpretação similar à associada à concavidade da função custo, de que os agentes, dentro do possível, reagem a modificações no ambiente econômico, ou seja, de que incentivos importam. Suponha que os preços são $(\bar{p}, \bar{w}_1, \bar{w}_2)$ e que a escolha ótima da firma dados esses preços é $(\bar{q}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Suponha que os preços dos insumos estão fixos e denote a função lucro apenas como função de p: $\pi(p)$.

Assuma que a firma age de modo passivo a uma mudança no preço p do bem que a firma vende. Ou seja, se p mudar, ela continua utilizando a escolha ótima $(\bar{q}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Logo, a função de lucro *passivo*, denotada por $\pi_p(p)$, é dada por:

$$\pi_p(p) = p\bar{q} - \bar{w}_1\bar{x}_1 - \bar{w}_2\bar{x}_2$$

Em um gráfico com o lucro no eixo vertical e o preço p no eixo horizontal, $\pi_p(p)$ é uma reta com inclinação $\bar{q} > 0$ e intercepto no eixo vertical igual a $-\bar{w}_1\bar{x}_1 - \bar{w}_2\bar{x}_2$. Porém, a firma não age de modo passivo: se p mudar, ela reajusta sua escolha de insumos e produção de modo a obter o maior lucro possível. A convexidade da função lucro é consequência dessa reação da firma, e é ilustrada na Figura 1 abaixo.

Note que se o preço aumentar para $\hat{p}$ e a firma agir de modo passivo, ou seja, não modificar a sua escolha de insumos e produção e continuar usando $(\bar{q}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$, então o aumento do preço leva a um aumento do lucro marcado no eixo vertical da Figura 1 como Lucro Passivo. Porém, o aumento do preço p induz a firma, considerando as suas limitações tecnológicas, a reajustar a sua produção e uso de insumos de modo que ela obtém um aumento no lucro ainda maior do se agisse de forma passiva (na Figura 1, o Lucro Real, grafado no eixo vertical, é maior do que o Lucro Passivo).

A quinta propriedade diz que se o preço de um insumo aumentar em R$ 1, o lucro diminui em um valor igual à quantidade de insumo i que está sendo usada (x_i). Se o preço do produto subir em R$ 1, o lucro aumenta em um valor igual ao nível de produção, q^*. Percebemos que uma variação no preço de um insumo não vai causar impacto no lucro da firma apenas se este insumo não for usado pela firma. Se a firma utilizar o insumo, um aumento (uma queda) no seu preço levará a firma a usar menos (mais) desse insumo

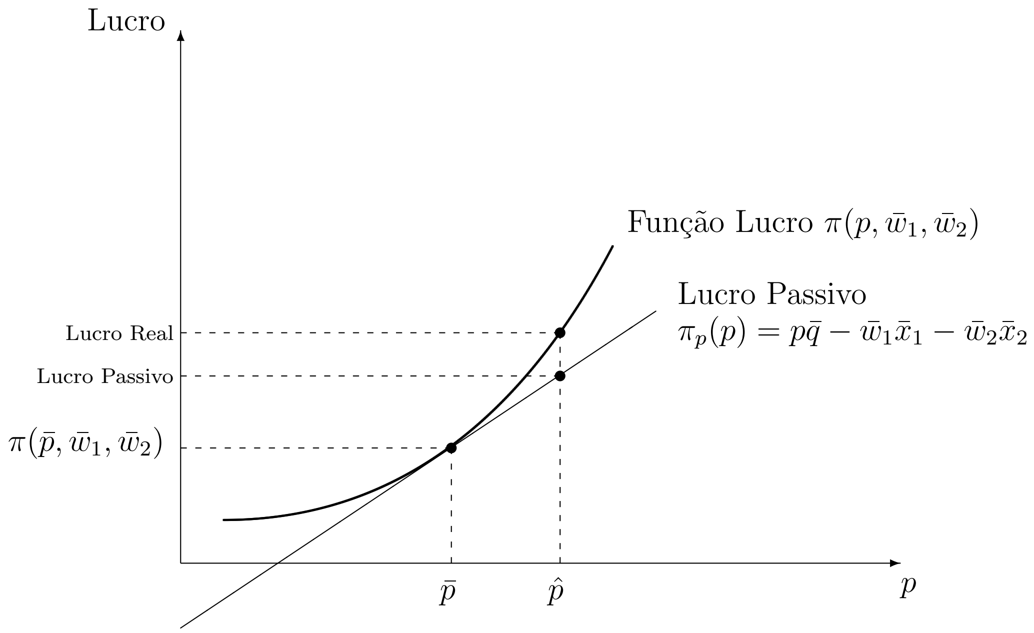

Figura 1: Convexidade da Função Lucro

3.2 Propriedades das Demandas e Oferta Ótimas

Propriedades das Demandas e da Oferta Ótimas. Sob certas condições, a função de oferta e as funções de demanda por insumos, caso existam, são contínuas e satisfazem as seguintes propriedades:

(1) São homogêneas de grau zero:

$$q(tp, tw_1, tw_2) = q(p, w_1, w_2), \quad \forall t > 0$$
$$x_i(tp, tw_1, tw_2) = x_i(p, w_1, w_2), \quad \forall t > 0, \ i = 1, 2\,.$$

(2) Um aumento no preço de um insumo diminui a demanda por esse insumo, um aumento no preço do produto aumenta a sua oferta:

$$\frac{\partial q(p, w_1, w_2)}{\partial p} \geq 0\,; \qquad \frac{\partial x_i(p, w_1, w_2)}{\partial w_i} \leq 0\,, \ i = 1, 2$$

(3) Os efeitos-preço cruzados são iguais para os insumos:

$$\frac{\partial x_1(p, w_1, w_2)}{\partial w_2} = \frac{\partial x_2(p, w_1, w_2)}{\partial w_1}$$

Novamente, vamos primeiro verificar a validade dessas propriedades para depois discutir a intuição de cada uma delas.

Prova: (1) Se aumentarmos todos os preços pelo mesmo fator t, então a solução do problema da firma não se altera:

$$\begin{aligned}\pi(tp, tw_1, tw_2) &= \max_{x_1, x_2} tpf(x_1, x_2) - tw_1x_1 - tw_2x_2 = t\left[\max_{x_1, x_2} pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2\right]\\ &= t\pi(p, w_1w_2).\end{aligned}$$

Portanto, a escolha ótima de insumos da firma aos preços (tp, tw_1, tw_2) é a mesma escolha ótima quando os preços são (p, w_1, w_2). Consequentemente, a oferta ótima da firma também será a mesma em ambos os casos.

(2) Esse resultado pode ser obtido usando o *Teorema da Função Implícita*. As CPOs do problema de maximização de lucro da firma são:

$$\begin{aligned} CPO_1: &\quad pf_1(x_1^*, x_2^*) = w_1 \\ CPO_2: &\quad pf_2(x_1^*, x_2^*) = w_2 \end{aligned}$$

Diferenciando as CPO com respeito aos preços w_1 e w_2, obtemos:

$$\begin{aligned} (w_1), CPO_1: &\quad pf_{11}(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} + pf_{12}(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} = 1 \\ (w_1), CPO_2: &\quad pf_{21}(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} + pf_{22}(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} = 0 \\ (w_2), CPO_1: &\quad pf_{11}(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} + pf_{12}(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2} = 0 \\ (w_2), CPO_2: &\quad pf_{21}(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} + pf_{22}(x_1^*, x_2^*)\frac{\partial x_2^*}{\partial w_2} = 1 \end{aligned}$$

Escrevendo essas equações em forma matricial, obtemos:

$$\begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{12} & pf_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se as CSO são satisfeitas, então a matriz Hessiana é negativa semi-definida e, portanto, invertível. As demandas pelos fatores são:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial w_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{12} & pf_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{12} & pf_{22} \end{pmatrix}^{-1},$$

já que toda matriz multiplicada pela matriz identidade é igual a ela mesma. Usando o fato de que:

$$\begin{pmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{12} & pf_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(H)} \begin{pmatrix} pf_{22} & -pf_{12} \\ -pf_{21} & pf_{11} \end{pmatrix},$$

onde $\det(H) = p^2\left(f_{11}f_{22} - f_{12}^2\right) > 0$, já que a solução é um máximo, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial w_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(H)} \begin{pmatrix} pf_{22} & -pf_{12} \\ -pf_{21} & pf_{11} \end{pmatrix}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} = \frac{pf_{22}}{\det(H)} < 0 &\qquad \text{e} \qquad \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} = -\frac{pf_{12}}{\det(H)} \gtreqqless 0 \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} = -\frac{pf_{12}}{\det(H)} \gtreqqless 0 &\qquad \text{e} \qquad \frac{\partial x_2^*}{\partial w_2} = \frac{pf_{11}}{\det(H)} < 0 \end{aligned}$$

(3) Esse resultado, que já pôde ser observado nas equações acima para $\partial x_1^*/\partial w_2$ e $\partial x_2^*/\partial w_1$, é consequência do lema de Hotteling ($-\partial\pi/\partial w_i = x_i$):

$$\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial p_j \partial p_i} = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial x_j}{\partial w_i}\,.$$

Vamos discutir a intuição dessas propriedades. A propriedade 1 diz que uma mudança em todos os preços na mesma proporção não afeta a escolha ótima da firma.

A segunda propriedade mostra que não podem existir "*insumos de Giffen*": as demandas por insumos de uma firma reagem *negativamente* (ou não se alteram) a uma mudança do preço do insumo, *sem exceções* (veja, por exemplo, as demandas $\partial x_1^*/\partial w_1$ e $\partial x_2^*/\partial w_2$ acima). Portanto, se o preço de um insumo aumentar, tudo o mais constante, então a firma usará menos desse insumo (ou usará a mesma quantidade), e *nunca usará mais do insumo* caso o seu preço aumente. Na teoria da firma, não existe efeito análogo ao efeito renda da teoria do consumidor, que permite a existência de bens de Giffen.

A terceira propriedade é um tanto inesperada. Se a firma maximiza lucros, então o efeito de um aumento no salário sobre o uso de capital na firma é igual ao efeito de um aumento no preço de capital sobre o uso de trabalho na firma. Essa propriedade não é intuitiva, mas é uma consequência do problema de maximização da firma. Se a firma maximiza lucros, então ela será verdadeira.

3.3 Princípio de LeChatelier

O princípio de LeChatelier diz que um ajuste na produção da firma devido a uma alteração no preço do produto é sempre maior no longo prazo do que no curto prazo:

$$\frac{dq_{LP}^*}{dp} \geq \frac{dq_{CP}^*}{dp}$$

Vamos derivar esse resultado. Primeiro note que o lucro de longo prazo da firma é sempre igual ou maior do que o lucro de curto prazo. Esse resultado é intuitivamente claro: no curto prazo a firma pode ajustar apenas os insumos variáveis, enquanto no longo prazo ela pode ajustar todos os insumos. Portanto, definindo a função $h(p)$ como a diferença entre as funções lucro de longo prazo e de curto prazo, temos que:

$$h(p) = \pi_{LP}(p) - \pi_{CP}(p) \geq 0$$

Sob certas condições, pode ser provado que essas duas funções são iguais apenas em um único nível de preço do bem que a firma vende, denotado por $p = p^*$. Portanto, $h(p)$ tem um mínimo em p^* e a segunda derivada de $h(p)$ é não-negativa em p^*. Ou seja,

$$\frac{\partial^2 h(p)}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \pi_{LP}(p)}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 \pi_{CP}(p)}{\partial p^2} \geq 0.$$

Usando o lema de Hotteling, o resultado desejado é obtido:

$$\frac{dq_{LP}^*}{dp} - \frac{dq_{CP}^*}{dp} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq_{LP}^*}{dp} \geq \frac{dq_{CP}^*}{dp}\,.$$

4 Lucratividade Revelada

A ideia da lucratividade revelada é semelhante à ideia da preferência revelada: observando as escolhas da firma, podemos testar se essas escolhas são consistentes com o comportamento maximizador de lucros.

Esse teste é válido desde que a tecnologia da firma não se altere para os períodos analisados. Se a firma comprar novas máquinas ou contratar mão-de-obra mais experiente, o teste abaixo não é mais válido.

Suponha que observamos duas escolhas de produção da firma, feitas em dois períodos onde os preços mudaram. No período t, o nível de preços era (p^t, w_1^t, w_2^t) e a escolha de produção foi (q^t, x_1^t, x_2^t). No período s, o nível de preços era (p^s, w_1^s, w_2^s) e a escolha de produção foi (q^s, x_1^s, x_2^s). Então as seguintes relações devem ser válidas se a firma maximiza lucros:

$$p^t q^t - w_1^t x_1^t - w_2^t x_2^t \geq p^t q^s - w_1^t x_1^s - w_2^t x_2^s$$
$$p^s q^s - w_1^s x_1^s - w_2^s x_2^s \geq p^s q^t - w_1^s x_1^t - w_2^s x_2^t$$

Dizemos que a firma satisfaz o *Axioma da Maximização de Lucros* (AML) se as duas desigualdades acima forem válidas para cada par de observações coletado.

Vamos manipular algebricamente as duas desigualdades que compõem o AML. Multiplique a segunda desigualdade por -1, invertendo o sinal da desigualdade, e some essa nova desigualdade à primeira desigualdade, para obter:

$$p^t q^t - w_1^t x_1^t - w_2^t x_2^t - p^s q^t + w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t \geq p^t q^s - w_1^t x_1^s - w_2^t x_2^s - p^s q^s + w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s$$

Reagrupando os termos, obtemos:

$$(p^t - p^s)q^t - (w_1^t - w_1^s)x_1^t - (w_2^t - w_2^s)x_2^t - (p^t - p^s)q^s - (w_1^t - w_1^s)x_1^s - (w_2^t - w_2^s)x_2^s \geq 0$$

Reagrupando os termos uma vez mais, e usando a notação $\Delta p = p^t - p^s$ (similarmente para as outras variáveis), obtemos:

$$\Delta p \Delta q - \Delta w_1 \Delta x_1 - \Delta w_2 \Delta x_2 \geq 0.$$

Essa última equação é consequência do comportamento maximizador da firma e caso não seja satisfeita, indica que a firma pode não estar maximizando lucros. A variação no preço final multiplicada pela variação na produção subtraída de todas as variações nos preços de cada insumo multiplicadas pelas variações nas quantidades dos insumos não podem ser negativas.

Vamos analisar dois casos especiais dessa equação, e veremos que as conclusões obtidas são similares às obtidas anteriormente.

Caso 1) Suponha que apenas o preço do produto se alterou. Nesse caso, $\Delta w_i = 0$ para todo insumo i. Então:

$$\Delta p \Delta q \geq 0\,,$$

ou seja, a variação na produção é na mesma direção que a variação no preço do produto: se o preço do produto aumentar, a oferta deve aumentar caso a firma maximize lucros (ou, permanecerá a mesma, mas um aumento no preço do bem final nunca pode levar a uma queda na quantidade ofertada).

Caso 2) Suponha que apenas o preço do insumo i se alterou. Nesse caso, $\Delta w_j = 0$ para todo insumo $j \neq i$ e $\Delta p = 0$. Então:

$$-\Delta w_i \Delta x_i \geq 0\,,$$

ou seja, a variação na demanda do insumo é na direção contrária à variação no seu preço: se o preço do insumo aumentar, a firma deve usar menos desse insumo (ou não se alterar a quantidade usada, mas um aumento no preço do insumo nunca deve levar a um aumento no uso desse insumo).

Na teoria da firma, não existe um "Axioma Forte da Maximização do Lucro". O AML já esgota todas as implicações do comportamento maximizador da firma. Se coletarmos várias observações sobre as escolhas de uma firma, que satisfazem o AML, então podemos sempre estimar uma função de produção que pode gerar essas escolhas.

Leitura Recomendada

- Varian, cap. 19 - "Maximização do Lucro".
- Pindick e Rubinfeld, cap. 8 - "Maximização de Lucros e Oferta Competitiva", seções 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4.
- Hall e Lieberman, cap. 7 - "Como as Firmas tomam Decisões: Maximização de Lucros".
- Nicholson e Snyder, cap. 11 - "Profit Maximization".

Exercícios

1. Considere as seguintes tecnologias:

   i) Tecnologia linear: $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, onde $a > 0, b > 0$.

   ii) Tecnologia Leontief: $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, onde $a > 0$, $b > 0$.

   iii) Tecnologia CES: $f(x_1, x_2) = [\alpha x_1^\rho + \beta x_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$, onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

   Responda os seguintes itens:

   a) É possível encontrar a função lucro e as funções de demanda incondicionais para essas funções de produção? Justifique.

   b) Encontre a Taxa Técnica de Substituição das funções de produção acima.

   c) Encontre a elasticidade de substituição da função de produção 3) acima.

2. Considere a função de produção $f(x_1, x_2) = (\min\{x_1, x_2\})^\alpha$. Encontre as demandas ótimas por insumos, a função oferta e a função lucro. Que restrição α deve satisfazer para que a solução encontrada seja de fato uma solução para o problema de maximização de lucros da firma?

3. Suponha que você está fazendo uma consultoria para uma empresa que utiliza dois insumos, com o objetivo de verificar se essa empresa está maximizando lucros. Você coletou duas observações sobre o comportamento dessa empresa, com os seguintes dados:

	w_1	w_2	x_1	x_2	p	q
Observação 1	3	1	40	50	4	60
Observação 2	2	2	55	40	4	60

   onde w_1 e w_2 são os preços dos insumos 1 e 2, respectivamente, x_1 e x_2 são as quantidades usadas dos insumos 1 e 2, respectivamente, p é o preço do produto vendido pela firma e q é a quantidade vendida desse produto. Com base nessas duas observações, o que você pode dizer sobre o comportamento maximizador de lucros dessa firma?

4. Considere a função de produção $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^{0,5}$.

   a) Encontre a oferta e as demandas ótimas que maximizam o lucro da firma.

   b) Suponha que o preço do bem que a firma vende é R\$ 120,00, que o preço do insumo 1, w_1, é R\$ 2,00, e que o o preço do insumo 2, w_2, é R\$ 4,00. Quais são as demandas ótimas dos dois insumos, a oferta ótima e o lucro da firma?

   c) Suponha agora que o preço do insumo 1 aumente para R\$ 3,00, todo o resto ceteris paribus. Quais são as novas demandas ótimas dos dois insumos, a oferta ótima e o lucro da firma agora?

   d) Suponha agora que o preço do insumo 1 aumente para R\$ 5,00, todo o resto ceteris paribus. Quais são as novas demandas ótimas dos dois insumos, a oferta ótima e o lucro da firma agora?

   e) O que ocorre com a decisão de produção da firma se o preço do insumo 1 aumentar de R\$ 5,00 para R\$ 6,00 (todo o resto constante)? Justifique e dê a intuição da sua resposta.

5. Considere a propriedade de convexidade da função lucro.

   a) Assuma que o preço do bem que a firma vende caiu de $\bar{p}$ para $\tilde{p}$. No contexto da Figura 1, a relação Lucro Passivo e Lucro Real é o que você esperaria? Explique a intuição.

   b) A Figura 1 ilustra a relação de convexidade assumindo variação apenas para o preço do bem que a firma vende. Assuma agora que este preço e o preço do insumo 2 estão fixos e apenas o preço do insumo 1, w_1, varia. Ilustre graficamente como a função lucro varia de acordo com mudanças em w_1, também usando a ideia de Lucro Passivo e Lucro Real. Sua análise está de acordo com o esperado, no sentido de que a firma ajusta os insumos sempre de modo a alcançar o maior lucro possível, dadas as limitações existentes? Explique a intuição.