MICROECONOMIA 1 – GRADUAÇÃO

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Notas de Aula 13 – Escolha sob Incerteza
Prof. José Guilherme de Lara Resende

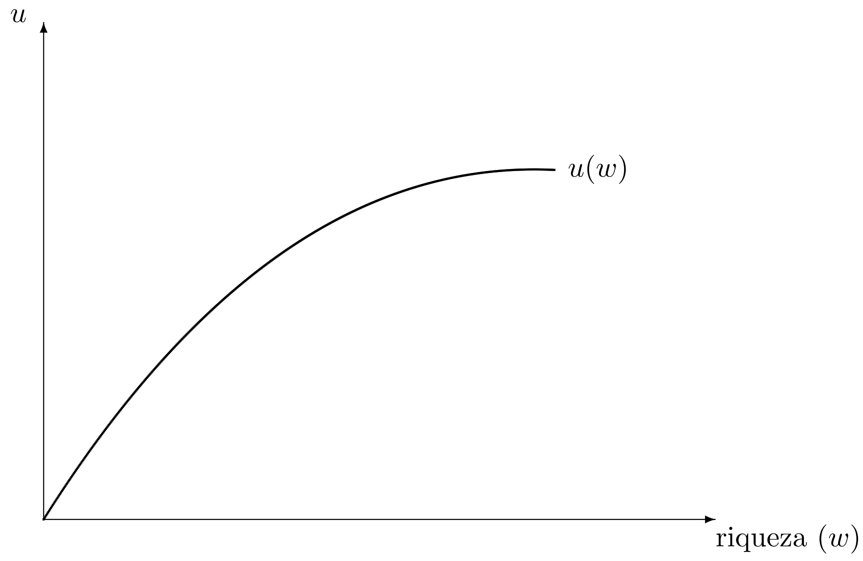
1 Introdução

Considere o seguinte jogo. Uma moeda é lançada. Se o resultado for cara, você ganha R$ 2. Se o resultado for coroa, a moeda é lançada novamente. Se o resultado for cara, você ganha R$ 2^2 = R$ 4. Se o resultado for coroa, a moeda é lançada novamente. Continuamos dessa forma ad infinitum, ou até que o jogo termine com um lançamento da moeda que resulte em cara. Nesse caso, o participante recebe R$ 2^n, onde n é o número de lançamentos feitos até cara sair.

Quanto você estaria disposto a pagar para participar deste jogo? Se você decidir pagar o *valor esperado* do jogo, você pagaria qualquer valor para participar do jogo, já que o valor esperado do jogo diverge para infinito.

Observe que o jogo pode dar prêmios enormes. Por exemplo, se o jogo for até o vigésimo lance de moeda, você ganharia mais de um milhão de reais. Se o jogo chegar até a trigésima rodada, você ganharia mais de um bilhão de reais. Porém, a chance desses prêmios é bastante baixa (para o prêmio de um milhão, a chance é menor do que uma em um milhão). Metade das vezes, o jogo paga apenas R$ 2, e a chance de um valor maior que R$ 100 é uma em cento e vinte e oito. Logo, poucas pessoas pagariam um valor alto por esse jogo, apesar de seu valor esperado ser infinito. Esse problema é conhecido como o *paradoxo de São Petersburgo*.

Daniel Bernoulli, em 1738, apresentou uma solução para este paradoxo, baseada na ideia de *utilidade marginal decrescente do dinheiro* (Bernoulli, 1954). Bernoulli afirmou que o valor de algo depende da utilidade gerada, e que o ganho de utilidade do dinheiro cai quanto mais dinheiro a pessoa tem. O gráfico abaixo ilustra uma função de utilidade com essa propriedade.



A ideia de Bernoulli, apesar de não resolver o paradoxo satisfatoriamente, foi incorporada em economia, na teoria de incerteza, que vamos analisar agora. A incerteza no problema do consumidor significa que este não saberá exatamente qual vai ser o seu consumo.

2 Utilidade Esperada

O primeiro passo ao analisarmos problemas com incertezas é definir o que a pessoa escolhe agora. No exemplo acima, existem duas características distintas, o valor monetário pago pelo jogo e a probabilidade de ocorrência desse valor. Então o indivíduo deve escolher um objeto que contém *resultados* e *probabilidades*. Vamos chamar um objeto desse tipo de *loteria*. Vamos definir formalmente esse conceito.

Suponha que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto finito de *resultados* (por exemplo, a_i pode ser um valor monetário para cada i). Uma *loteria* $g = (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$ assinala a probabilidade p_i ao resultado a_i, para todo resultado $i = 1, 2, \ldots, n$, onde $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Dado um conjunto de resultados A qualquer, o conjunto de todas as loterias simples definidas sobre A é denotado por $\mathcal{G}_A$ ou simplesmente $\mathcal{G}$. Dizemos que a loteria g é *degenerada* se $p_i = 1$ para algum i, isto é, g equivale a um resultado com certeza. Portanto, uma loteria não-degenerada corresponde a uma situação onde não existe resultado certo. Podemos incluir também no conjunto de escolha $\mathcal{G}$ loterias sobre loterias, chamadas *loterias compostas*. Vamos supor que o indivíduo é indiferente entre uma loteria composta e a loteria simples associada a ela, ou seja, a loteria simples que leva diretamente aos mesmos resultados com as mesmas probabilidades.

O consumidor decidirá entre loterias, degeneradas ou não degeneradas, simples ou compostas. Loterias são o objeto de consumo agora. As loterias são *planos contingentes de consumo*, contingentes na incerteza existente. Note a mudança na *estrutura* da teoria: não consideramos mais cestas de bens, mas loterias. Isso exige um grau diferente de capacidade de escolha do indivíduo. Se existem n probabilidades possíveis, então existem n *estados da natureza*. Por exemplo, suponha que o indivíduo considera adquirir um seguro contra incêndios para a sua casa. Os estados da natureza relevantes nesse caso são dois: "incêndio" e "não-incêndio" (na casa). Logo, o número de estados da natureza relevantes depende do problema em questão.

Uma vez definido o objeto de escolha do consumidor, loteria, vamos supor que este possui uma função de utilidade sobre loterias. Vamos considerar utilidades que satisfazem uma propriedade de linearidade sobre as probabilidades.

Definição: Utilidade Esperada (von Neumann & Morgenstern, 2007). A utilidade $U : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ possui a propriedade de *utilidade esperada* se, para toda loteria $g = (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n) \in \mathcal{G}$ temos que:

$$U(p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i).$$

Portanto, a utilidade esperada U é linear nas probabilidades e determinada pelos valores que assume no conjunto dos resultados. Mais adiante, veremos que a função u determina o comportamento em relação ao risco da pessoa. Segundo Bernoulli, a utilidade marginal da riqueza deve ser decrescente, ou seja, a função u deve ser côncava. Alguns autores chamam U de utilidade esperada ou utilidade de von-Neuman e Morgenstern e u de utilidade de Bernoulli. Definido u, definimos a utilidade esperada U.

Exemplo: Um indivíduo possui uma riqueza avaliada em R$ 100.000. Parte dessa riqueza consiste em um carro avaliado em R$ 20.000. A probabilidade de o carro ser roubado é de 20% caso não seja instalado um alarme anti-furto. O alarme custa R$ 1.000 e, se instalado, reduz a probabilidade de roubo para 5%. Suponha que a função de utilidade sobre a riqueza desse indivíduo é $u(x) = \ln(x)$. A utilidade esperada do indivíduo quando ele instala o sistema anti-furto (opção 1) é, portanto, igual a:

$$U(\text{opção 1}) = 0{,}95 \times \ln(100.000 - 1.000) + 0{,}05 \times \ln(100.000 - 20.000 - 1.000) = 11{,}4915$$

Caso ele não instale o sistema (opção 2), sua utilidade esperada será igual a:

$$U(\text{opção 2}) = 0{,}80 \times \ln(100.000) + 0{,}20 \times \ln(100.000 - 20.000) = 11{,}4683$$

Portanto, caso não tenha a opção de contratar um seguro, o indivíduo optará por instalar o alarme. Nesse exemplo, existem dois estados da natureza relevantes ao problema: o primeiro, "carro não é roubado", o segundo, "carro é roubado".

A utilidade esperada do jogo descrito no paradoxo de São Petersburgo, com $u(w) = \ln(w)$, é:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln(2^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} n \ln(2) = \ln(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2\ln(2),$$

pois a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ converge para 2. Portanto, o indivíduo ficaria indiferente entre participar do jogo ou receber R$ 4,00 com certeza.

Se o conjunto de resultados for $A = \mathbb{R}_+$, então uma loteria será representada por uma função de distribuição acumulada $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ ($F(x) = P(g \leq x)$). Se a loteria for absolutamente contínua, com função de densidade de probabilidade $f(x)$, a utilidade de uma loteria pode então ser calculada como:

$$U(F) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x)\, dx$$

3 Construção da Utilidade Esperada

Vimos que agora o consumidor decidirá entre loterias - o objeto de consumo agora. Vamos supor que o consumidor possui preferências $\succeq$ sobre o conjunto $\mathcal{G}$ de loterias, onde estas preferências satisfazem os axiomas abaixo.

Axioma 1 - Completeza e Transitividade. $\succeq$ é completa e transitiva.

Axioma 2 - Continuidade. Para quaisquer loterias $g, h, k \in \mathcal{G}$, os conjuntos

$$\{\alpha \in [0,1] \mid \alpha g + (1-\alpha)h \succeq k\} \subset [0,1] \quad \text{e} \quad \{\alpha \in [0,1] \mid k \succeq \alpha g + (1-\alpha)h\} \subset [0,1]$$

são fechados.

Axioma 3 - Independência. Para quaisquer loterias $g, h, k \in \mathcal{G}$ e $\alpha \in (0,1)$, vale que:

$$f \succeq g \quad \Leftrightarrow \quad \alpha f + (1-\alpha)h \succeq \alpha g + (1-\alpha)h.$$

O primeiro axioma exige que todo par de loterias seja comparável em termos de preferência e que esta preferência satisfaça a propriedade de transitividade. O significado do segundo axioma é similar ao do axioma de continuidade para preferências em um ambiente sem incerteza, sendo também um axioma de caráter mais técnico, necessário para obtermos a representação da preferência por uma função de utilidade. O terceiro axioma assegura que a função de utilidade que representa o sistema de escolhas do consumidor tenha a forma de utilidade esperada (linear nas probabilidades).

Vimos que a utilidade $U : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ possui a propriedade de utilidade esperada se, para todo $g \in \mathcal{G}$, $g = (p_1 \circ a_1, \ldots, p_n \circ a_n)$, temos que:

$$U(g) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i)\,.$$

Teorema: Existência de Utilidade Esperada. Se as preferências $\succeq$ definidas sobre o espaço de loterias $\mathcal{G}$ satisfazem os três axiomas acima, então existe $U : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ que representa $\succeq$ e satisfaz a propriedade de utilidade esperada (é linear nas probabilidades).

A utilidade U é chamada *utilidade esperada* ou *utilidade de Von Neumann e Morgenstern*. A função u é chamada *utilidade de Bernoulli* (alguns livros não fazem essa distinção e chamam ambas as funções U e u utilidade de Von Neumann e Morgenstern). Uma vez garantida a existência de uma utilidade que represente a preferência, a questão que surge diz respeito à existência de outras funções de utilidade que representem a mesma preferência. Na teoria do consumidor sem incerteza vimos que qualquer transformação crescente de uma função de utilidade continua representando a mesma preferência. Agora isto não será mais verdade, pois queremos preservar a propriedade de utilidade esperada. Para que esta propriedade seja mantida, devemos considerar apenas *tranformações lineares crescentes* da utilidade esperada. O teorema a seguir enuncia este resultado.

Teorema: Unicidade da Utilidade Esperada. Suponha que a utilidade esperada U representa $\succeq$. Então a utilidade esperada $\hat{U}$ representa as mesmas preferências $\succeq$ se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, tais que $\hat{U}(g) = \alpha + \beta U(g)$, para toda loteria $g \in \mathcal{G}$.

Dizemos então que a utilidade esperada que representa um sistema de preferências que satisfaça os axiomas acima é única *a menos de transformações lineares (ou afins) positivas*. O teorema anterior tem como consequência o fato de que diferenças de utilidades têm significado, no caso de utilidades esperadas.

Portanto, a teoria da utilidade esperada não é mais uma teoria puramente ordinal, já que diferenças de utilidade têm significado econômico. Porém, esta teoria também não é puramente cardinal, pois o valor da utilidade de uma determinada loteria não tem conteúdo econômico, já que uma transformação afim crescente desta utilidade continua representando o mesmo sistema de escolhas.

Exemplo: Suponha 4 resultados, a_1, a_2, a_3 e a_4. A afirmação "a diferença de utilidade entre os resultados 1 e 2 é maior do que a diferença de utilidade entre os resultados 3 e 4", $u(a_1) - u(a_2) > u(a_3) - u(a_4)$, é equivalente à $(1/2)u(a_1) - (1/2)u(a_2) > (1/2)u(a_3) - (1/2)u(a_4)$. Logo, a afirmação resulta na loteria $g = ((1/2) \circ a_1, 0 \circ a_2, 0 \circ a_3, (1/2) \circ a_4)$ ser preferível à $h = (0 \circ a_1, (1/2) \circ a_2, (1/2) \circ a_3, 0 \circ a_4)$. Esta ordenação de preferências é preservada por qualquer transformação afim positiva da utilidade esperada.

4 Comportamento com relação ao Risco

A curvatura da função u mede a atitude do indivíduo com relação ao risco. Por exemplo, suponha um indivíduo com R\$ 100 de riqueza. Ele pode entrar em uma aposta g onde com 50% de chance ele ganhará R\$ 50 e com 50% de chance ele perderá R\$ 50. O valor esperado da aposta é 0 ($^1/_2 \times 50 + {^1/_2} \times (-50)$) e, portanto, o valor esperado da sua riqueza se participar da aposta é R\$ 100. Já a utilidade esperada da aposta é:

$$U(g) = \frac{1}{2} \times u(150) + \frac{1}{2} \times u(50) < u\left(\frac{1}{2} \times 150 + \frac{1}{2} \times 50\right) = u(100),$$

onde o sinal de desigualdade estrita é válido quando a função u for estritamente côncava. Nesse caso, dizemos que o indivíduo é **avesso ao risco**, já que ele prefere o valor esperado da aposta a participar dela. O indivíduo avesso ao risco não participa então de nenhuma aposta cujo valor esperado seja zero. A figura abaixo ilustra essa situação.

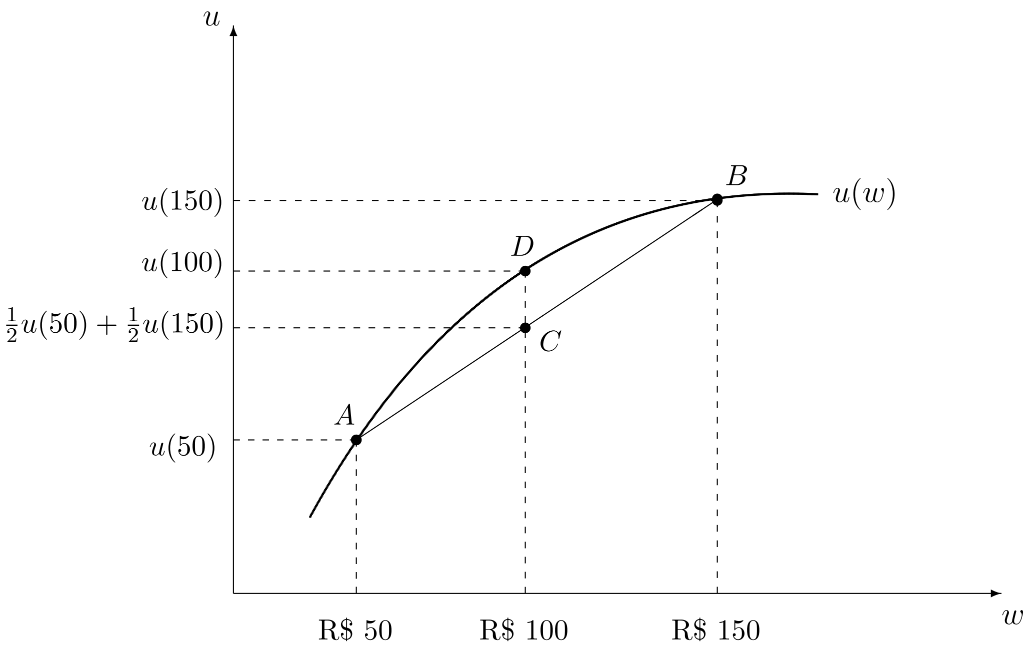


Figura 1: Aversão ao Risco

Na figura acima, os pontos A e B representam as utilidades associadas aos valores R\$ 50 e R\$ 150, respectivamente. O ponto C, dado pela combinação linear entre A e B com peso $^1/_2$, diz a utilidade esperada da aposta com 50% de chance de receber R\$ 50 e 50% de chance de perder R\$ 50. A utilidade de R\$ 100 com certeza, ou seja, de não participar da aposta, é representada pelo ponto D e se situa acima do ponto C, pois a função de utilidade é estritamente côncava. Portanto, um consumidor com função u estritamente côncava prefere receber o valor esperado de uma aposta a participar da aposta, qualquer que seja a aposta.

Vamos definir o comportamento do consumidor diante do risco em termos da utilidade esperada $U : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, onde o conjunto de resultados $A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ é formado por valores não-negativos de riqueza ($w_i \geq 0$, para todo i).

Definição: Comportamento em Relação ao Risco. Considere a loteria g não-degenerada. Dizemos que o indivíduo é:

1. Avesso ao risco em g se $u(\mathrm{E}(g)) > U(g)$;

2. Neutro ao risco em g se $u(\mathrm{E}(g)) = U(g)$;

3. Amante do risco em g se $u(\mathrm{E}(g)) < U(g)$.

Se o indivíduo for avesso (neutro, amante) ao risco para toda loteria não-degenerada g, então dizemos que esse indivíduo é avesso (neutro, amante) ao risco.

Exemplo: Seguros. Todo indivíduo *avesso ao risco* escolherá assegurar totalmente os seus ativos, se o preço do seguro for *atuarialmente justo*, isto é, tal que o seu preço seja igual à perda esperada. Sejam:

- w_0: riqueza inicial;

- $\pi \in (0,1)$: probabilidade do indivíduo sofrer uma perda de X reais;

- c: quantidade de seguro comprada;

- $p = \pi$: preço atuarialmente justo de cada real assegurado.

O problema do indivíduo é escolher a quantidade c de seguro que maximiza a sua utilidade esperada:

$$\max_c \left[\pi u(w_0 - \pi c - X + c) + (1-\pi)u(w_0 - \pi c)\right]$$

A CPO resulta em:

$$u'(w_0 - \pi c - X + c) = u'(w_0 - \pi c),$$

o que resulta em $c^* = X$ se $u'' < 0$ (garante a validade da CSO para um máximo e garante que $c^* > 0$). Portanto, no caso de um seguro atuarialmente justo, o indivíduo se assegura totalmente contra uma perda. A condição $u'' < 0$ significa que o indivíduo é *avesso ao risco*, segundo o teorema abaixo.

Dois conceitos importantes para a teoria de escolha sob incerteza são os de *equivalente de certeza* e *prêmio ao risco* associados a uma determinada loteria. O equivalente de certeza de uma loteria é a quantidade de dinheiro dado com certeza ao indivíduo que o faz indiferente à loteria. O prêmio ao risco de uma loteria é o montante de dinheiro que retirado do valor esperado da loteria, torna o indivíduo indiferente à loteria. Observe que estes dois conceitos estão sempre associados a uma determinada loteria.

Definição: Equivalente de Certeza e Prêmio ao Risco. O *equivalente de certeza* (EC_g) da loteria g é o montante de dinheiro EC_g dado com certeza, tal que $U(g) = u(EC_g)$. O *prêmio ao risco* associado à loteria g é o montante de dinheiro P_g tal que $U(g) = u(E(g) - P_g)$ (logo, $P_g = E(g) - EC_g$).

Aversão ao risco, conforme definida acima, é equivalente a três outras definições. Primeiro, um indivíduo será averso ao risco se, e somente se, a função u for estritamente côncava. Segundo, um indivíduo será averso ao risco se, e somente se, o equivalente de certeza de toda loteria não-degenerada for menor do que o valor esperado da loteria. Terceiro, um indivíduo será averso ao risco se, e somente se, o prêmio ao risco de toda loteria não-degenerada for negativo. O teorema abaixo resume essas equivalências.

Teorema: Aversão ao Risco, EC e Prêmio ao Risco. As seguintes afirmativas são equivalentes:

1. O indivíduo é averso ao risco;
2. $u(\cdot)$ é estritamente côncava;
3. $EC_g < \mathrm{E}(g)$, para toda loteria não-degenerada g;
4. $P_g < 0$, para toda loteria não-degenerada g.

De modo similar, temos os seguintes resultados para os casos de neutralidade ao risco e de propensão ao risco:

Teorema: Neutralidade ao Risco, EC e Prêmio ao Risco. As seguintes afirmativas são equivalentes:

1. O indivíduo é neutro ao risco;
2. $u(\cdot)$ é linear;
3. $EC_g = \mathrm{E}(g)$, para toda loteria não-degenerada g;
4. $P_g = 0$, para toda loteria não-degenerada g.

Teorema: Propensão ao Risco, EC e Prêmio ao Risco. As seguintes afirmativas são equivalentes:

1. O indivíduo é propenso ao risco;
2. $u(\cdot)$ é estritamente convexa;
3. $EC_g > \mathrm{E}(g)$, para toda loteria não-degenerada g;
4. $P_g < 0$, para toda loteria não-degenerada g.

Os teoremas acima mostram que o comportamento do indivíduo com relação ao risco está ligado à curvatura da função u. Se a função u for estritamente côncava, o indivíduo será averso ao risco. É de se esperar que a concavidade de u, medida pela segunda derivada de u, seja usada para medir o grau de aversão ao risco de um indivíduo. Porém, não é adequado utilizar u'' como medida de aversão ao risco, já que uma transformação linear crescente $v = a + bu$, com $b > 0$, continua representando o mesmo indivíduo. Neste caso, $v'' = bu''$ também seria uma medida do grau de aversão ao risco deste indivíduo e, portanto, teríamos diversos valores possíveis como grau de aversão ao risco do indivíduo.

Os *coeficientes de Arrow-Pratt* (Arrow, n.d.; Pratt, 1964) medem o grau de aversão ao risco de um consumidor sem incorrer neste problema: estes coeficientes são *invariantes* com respeito à utilidade usada para representar as escolhas do indivíduo.

Definição: Coeficiente de Aversão Absoluta ao Risco (CAAR). O *coeficiente de aversão absoluta ao risco* (CAAR) de Arrow-Pratt da utilidade U no nível de riqueza w é definido como:

$$R_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}\,.$$

Definição: Coeficiente de Aversão Relativa ao Risco. O *coeficiente de aversão relativa ao risco* (CARR) de Arrow-Pratt da utilidade U no nível de riqueza w é definido como:

$$R_r(w) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}\,.$$

As duas definições usam a segunda derivada de u para definir o grau de aversão ao risco de um indivíduo. Essas medidas são *locais*, ou seja, calculadas em um ponto do nível de renda. Observe que essas medidas não se alteram caso representemos o indivíduo por outra função v tal que $v = a + bu$, com $b > 0$.

Exemplo: CARA constante. Considere a utilidade $u(w) = -\mathrm{e}^{-\alpha w}$. Para essa utilidade, $R_a(w) = \alpha$, para todo w.

Exemplo: CARR constante. Considere a utilidade $u(w) = \frac{w^{1-\rho}}{1-\rho}$. Para essa utilidade, $R_r(w) = \rho$, para todo w.

Os três resultados a seguir, intuitivamente esperados, podem ser demonstrados formalmente. O primeiro reforça o uso do coeficiente de aversão absoluta ao risco como uma medida de aversão ao risco. O segundo relaciona o coeficiente de aversão absoluta ao risco às noções de equivalente de certeza e prêmio ao risco. O terceiro diz que todo indivíduo cujo grau de aversão absoluta ao risco aumenta com a riqueza, então o seu grau de aversão relativa ao risco também aumenta com a riqueza.

Resultado: Aversão ao Risco. O coeficiente de aversão absoluta ao risco de u é maior do que o de v, para todo nível de renda se, e somente se, a função u for *mais côncava* do que a função v (no seguinte sentido: $u = h \circ v$, onde h é uma função crescente e estritamente côncava).

Resultado: CARA e Prêmio ao Risco. Quanto maior o coeficiente de aversão absoluta ao risco, maior (menor) o prêmio ao risco (equivalente de certeza) associado a alguma loteria qualquer.

Resultado: CARR e Prêmio ao Risco. Se o CAAR for crescente, então o CARR será crescente.

Exemplo: Escolha de Portfolio. Considere um investidor com riqueza inicial w_0, que pode investir o montante β em um ativo com risco, cujo retorno pode ser r_i no estado i, $i = 1, \dots, n$, que pode ocorrer com probabilidade p_i. A riqueza do investidor caso o estado i ocorra será $w_i = (w_0 - \beta) + \beta(1 + r_i) = w + \beta r_i$. O problema de um investidor é maximizar sua utilidade esperada da riqueza final:

$$\max_{0 \leq \beta \leq w_0} \sum_{i=1}^{n} p_i u(w_0 + \beta r_i) \tag{1}$$

Vamos analisar primeiro o caso em que $\beta = 0$, ou seja, nada é investido no ativo arriscado. A derivada da função objetivo calculada em $\hat{\beta} = 0$ é:

$$f_{CPO}(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u'(w_0 + \hat{\beta} r_i) r_i = u'(w_0) \sum_{i=1}^{n} p_i r_i = u'(w_0) \mathrm{E} r$$

Para que a solução seja $\beta = 0$, a derivada acima tem que ser não-positiva, ou seja, $\mathrm{E}r \leq 0$, pois u' é positivo. Logo, obtivemos o seguinte resultado:

> Todo investidor avesso ao risco sempre investirá algum valor positivo em um ativo arriscado cujo retorno médio seja maior do que o retorno do ativo sem risco, *independentemente do grau risco do ativo arriscado* (Arrow, 1967).

5 Paradoxos e Extensões

5.1 Paradoxo de Allais

O *paradoxo de Allais* (Allais, 1953) consiste num conjunto de duas escolhas estre loterias, em que um tipo de comportamento observado não pode ser explicado pelo modelo de utilidade esperada que vimos acima.

Suponha três prêmios, R$ 2.500.000, R$ 500.000 e R$ 0, e considere as quatro loterias abaixo:

Prêmios/Loterias	g_1	g_1'	g_2	g_2'
R$ 2.500.000	0	0,10	0	0,10
R$ 500.000	1	0,89	0,11	0
R$ 0	0	0,01	0,89	0,90

Logo, g_1 denota a loteria que paga R$ 500.000 com certeza e g_1' denota a loteria que paga R$ 2.500.000 com 10% de probabilidade, R$ 500.000 com 89% de probabilidade e R$ 0 com 1% de probabilidade. Já g_2 denota a loteria que paga R$ 500.000 com 11% de probabilidade e R$ 0 com 89% de probabilidade e g_2' denota a loteria que paga R$ 2.500.000 com 10% de probabilidade e R$ 0 com 90% de probabilidade. As seguintes escolhas são apresentadas:

Escolha 1: g_1 vs g_1'

Escolha 2: g_2 vs g_2'

Um padrão comum observado de escolhas é $g_1 \succ g_1'$ e $g_2' \succ g_2$. Vamos mostrar que essas escolhas são inconsistentes com os axiomas da utilidade esperada. Se $g_1 \succ g_1'$, então usando o conceito de utilidade esperada, temos que:

$$u(500) > 0{,}10u(2.500) + 0{,}89u(500) + 0{,}01u(0),$$

onde simplificamos a notação cortando três zeros dos prêmios positivos. Agora, se $g_2' \succ g_2$, então usando o conceito de utilidade esperada, temos que:

$$0{,}10u(2.500) + 0{,}90u(0) > 0{,}11u(500) + 0{,}89u(0)$$

Se adicionarmos $0{,}89u(500) - 0{,}89u(0)$ em ambos os lados da última desigualdade acima, obtemos:

$$0{,}10u(2.500) + 0{,}89u(500) + 0{,}01u(0) > u(500),$$

ou seja, que $g_1' \succ g_1$. Isso significa que as escolhas $g_2' \succ g_2$ e $g_1 \succ g_1'$ são inconsistentes para um indivíduo maximizador de utilidade esperada. Esse resultado é conhecido como *paradoxo de Allais*.

5.2 Utilidade Esperada Subjetiva

Existe uma distinção entre risco e ambiguidade (incerteza ou incerteza Knightiana): a maioria dos eventos incertos não possui (ou não é conhecida) uma distribuição objetiva de probabilidade caracterizando essa incerteza.

Knight (Knight, 1921) distingue risco de incerteza:

- Risco é uma situação onde a incerteza é mensurável;
- Incerteza refere-se à situação onde nenhuma (ou pouca) inferência estatística pode ser feita sobre o futuro.

Risco é o conceito de incerteza comumente usado em economia, em que os agentes conhecem a distribuição estatística dos resultados de suas ações. A estrutura do modelo de utilidade esperada pode ser alterada para esses casos. Um *estado da natureza* é uma descrição do mundo, que pode vir a ocorrer ou não, e que não deixa nenhum aspecto relevante ao problema de fora. Estados da natureza são portanto *exaustivos* e *mutualmente excludentes*.

Vamos agora permitir que a probabilidade seja subjetiva, já que a incerteza não é objetiva aqui. A probabilidade então está ligada ao grau de confiança que um indivíduo tem em um evento/afirmação, com base em evidência (de Finetti e Savage). A principal restrição sobre probabilidades subjetivas é chamada *coerência*: probabilidades devem somar um:

$$\text{Se} \quad p(A) = p, \quad \text{então} \quad p(A^c) = 1 - p\,,$$

onde A denota um evento qualquer e A^c o evento complementar de A.

O modelo de Savage (Savage, 1954) define um espaço de estados da natureza S e conjunto A de consequências (resultados). Definimos um *ato* como uma função que associa a cada estado da natureza $s \in S$ a uma consequência $a \in A$. O conjunto de todos os atos é o conjunto de todas as funções de S em A, denotado por $F = \{f : S \to A\}$. O objeto de escolha do consumidor agora são atos: as preferências do indivíduo estão definidas para elementos em F.

Suponha que S é finito. Dizemos que as funções $\pi : S \to [0, 1]$ e $u : A \to \mathbb{R}$ representam a preferência $\succeq$ definida sobre atos, se para $f, g \in F$ temos que:

$$f \succeq g \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{s \in S} \pi(s) u(f(s)) \geq \sum_{s \in S} \pi(s) u(g(s))$$

Logo, no modelo de utilidade esperada subjetiva de Savage temos que:

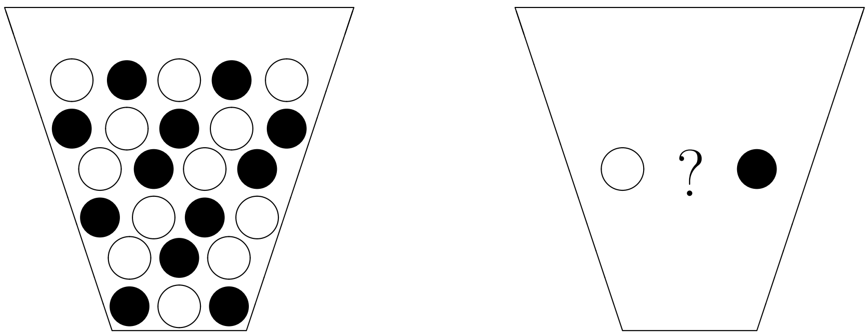
- Tanto gostos (u) como crenças (π) são subjetivos.
- Gostos e crenças são independentes.
- A probabilidade π não depende da ação escolhida e a utilidade de uma consequência não depende da ação escolhida.

5.3 Paradoxo de Ellsberg

O paradoxo de Ellsberg (Ellsberg, 1961) é consequência de um experimento simples e intuitivo, onde razoável proporção das escolhas feitas contradiz o modelo de utilidade esperada subjetiva. A grosso modo, o paradoxo é uma evidência de que incerteza é conceitualmente diferente de risco:

> "A number of sets of constraints on choice-behavior under uncertainty (...) having the implication that - for a "rational" man - *all* uncertainties can be reduced to risks. (p.645)"

Vamos descrever o paradoxo de Ellsberg. Considere duas urnas, cada uma com cem bolas, onde a Urna I contém 50 bolas pretas e 50 bolas brancas e a Urna II contém 100 bolas pretas ou brancas, sem que se saiba o número de bolas pretas e de bolas brancas.



Urna I	*Urna II*
100 Bolas	100 Bolas
50 Bolas Pretas	? Bolas Pretas
50 Bolas Brancas	? Bolas Brancas

Suponha as seguintes apostas:

PI: Ganha R\$ 20 se uma bola preta é retirada da urna I;

BI: Ganha R\$ 20 se uma bola branca é retirada da urna I;

PII: Ganha R\$ 20 se uma bola preta é retirada da urna II;

BII: Ganha R\$ 20 se uma bola branca é retirada da urna II.

Considere a escolha entre os seguintes pares de apostas: 1) PI vs PII, e 2) BI vs BII. É comum observar escolhas onde se prefere PI a PII e BI a BII, o que contraria os postulados da utilidade esperada subjetiva, já que:

$$\begin{aligned} \text{PI} \succ \text{PII} \quad &\Rightarrow \quad p_I(preta) > p_{II}(preta) \\ \text{BI} \succ \text{BII} \quad &\Rightarrow \quad p_I(branca) > p_{II}(branca) \end{aligned}$$

Logo $p_{II}(preta) + p_{II}(branca) < p_I(preta) + p_I(branca) = 1$. Esse comportamento viola a propriedade de coerência. Os modelos tradicionais de escolha excluem escolhas desse tipo.

5.4 Modelos que "Acomodam" os Paradoxos

Os desvios em escolhas nos modelos de utilidade esperada e utilidade esperada subjetiva levaram a uma pesquisa com o objetivo de descrever o comportamento de decisão individual usando *experimentos* (Camerer & Weber, 1992; Starmer, 2000). As duas conclusões principais dessa linha de pesquisa são que: 1) o comportamento sob ambiguidade não necessariamente se reduz ao comportamento sob risco,e 2) incerteza, seja qual for a forma, não entra de forma linear na função de utilidade.

Se probabilidades não entram linearmente na função de utilidade, então como se dá o processo de escolha individual sob risco e sob incerteza? Vários estudos (Abdellaoui, 2000; Gonzalez & Wu, 1999; Kilka & Weber, 2001; Tversky & Kahneman, 1992; Wu & Gonzalez, 1996) sugerem que *certeza* e *impossibilidade* são pontos de referência no processo de escolha individual. Mudanças próximas a esses pontos são percebidas de forma mais forte do que mudanças em valores intermediários. Essa *"sensibilidade decrescente"* a partir desses pontos de referência tem sido amplamente confirmada por diversos estudos, tanto para escolhas com ganhos como para escolhas com perdas.

Novos modelos de utilidade, tais como *Choquet Expected Utility* (CEU) (Schmeidler, 1989), *Multiple-Priors Expected Utility* (MEU) (Gilboa & Schmeidler, 1989), *Cumulative Prospect Theory* (CPT) (Tversky & Kahneman, 1992), etc, incorporam essas distorções em probabilidades por meio de uma *função de probabilidade.*

Nos modelos CEU e CPT, a distorção ocorre na função de distribuição acumulada, e não nas probabilidades diretamente. Neste caso, o peso de um resultado depende da ordem desse resultado no espaço de escolha do indivíduo. Modelos deste são capazes de descrever comportamentos típicos do paradoxo de Allais e do paradoxo de Ellsberg (Tversky & Kahneman, 1992).

Leitura Recomendada

- Varian, cap. 11, 12 e 13.
- Pindick e Rubinfeld, cap. 5 - "Comportamento do Consumidor e Incerteza".
- Nicholson e Snyder, cap. 7 - "Uncertainty and Information".

Referências

Abdellaoui, M. (2000). Parameter-free elicitation of utility and probability weighting functions. *Management Science*, *46*, 1497-1512.

Allais, M. (1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica*, *21:4*, 503-546.

Arrow, K. J. (n.d.). The theory of risk aversion. In K. J. Arrow (Ed.), (chap. Aspects of the Theory of Risk Bearing).

Bernoulli, D. (1954). Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica*, *22:1*, 23-36.

Camerer, C. F., & Weber, M. (1992). Recent developments in modeling preferences: Uncertainty and ambiguity. *Journal of Risk and Uncertainty*, *5*, 325-370.

Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity and the savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, *75*, 643-669.

Gilboa, I., & Schmeidler, D. (1989). Maxmim expected utility with non-unique prior. *Journal of Mathematical Economics*, *18*, 141-153.

Gonzalez, R., & Wu, G. (1999). On the shape of the probability weighting function. *Cognitive Psychology*, *38*, 129-166.

Kilka, M., & Weber, M. (2001). What determines the shape of the probability weighting function under uncertainty? *Management Science*, *47*, 1712-1726.

Knight, F. (1921). *Risk, uncertainty and profit.* Houghton Mifflin Co.

Pratt, J. W. (1964). Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, *32:1/2*, 122-136.

Savage, L. J. (1954). *The founations of statistics.* New York: Wiley.

Schmeidler, D. (1989). Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, *57*, 571-587.

Starmer, C. (2000). Developments in non-expected utility theory: the hunt for a descriptive theory of choice under risk. *Journal of Economic Literature*, *38*, 332-382.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1992). Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, *5*, 297-323.

von Neumann, J., & Morgenstern, O. (2007). *Theory of games and economic behavior* (1944: 1^{st} ed.). Princeton University Press.

Wu, G., & Gonzalez, R. (1996). Curvature of the probability weighting function. *Management Science*, *42*, 1676-1690.

Exercícios

13.1) Considere as loterias $g = (0{,}50 \circ 100; 0{,}50 \circ 1000)$ e $h = (0{,}20 \circ 100; 0{,}30 \circ 25; 0{,}50 \circ 16)$. Calcule a utilidade esperada, o equivalente de certeza, o prêmio de risco dessas duas loterias para os casos abaixo:

a) $u(w) = \sqrt{w}$, $w_0 = 100$.

b) $u(w) = \sqrt{w}$, $w_0 = 50$.

c) $u(w) = w$, $w_0 = 100$.

d) $u(w) = w$, $w_0 = 50$.

e) $u(w) = w^2$, $w_0 = 100$.

f) $u(w) = w^2$, $w_0 = 50$.

13.2) Considere as loterias $g = (0{,}60 \circ 10.000; 0{,}40 \circ 1.000)$ e $h = (0{,}50 \circ 10.000; 0{,}50 \circ 2.800)$. Se um consumidor está indiferente entre estas duas loterias, então pode-se afirmar que ele é neutro ao risco. Verdadeiro ou falso? Justifique.

13.3) Responda os seguintes itens.

a) Suponha duas loterias $g = (0{,}50 \circ m_1; 0{,}50 \circ m_2)$ e $h = (0{,}50 \circ w_1; 0{,}50 \circ w_2)$, tais que $u(m_1) = 25$, $u(m_2) = 65$, $u(w_1) = 35$, $u(w_2) = 50$ e $v(m_1) = 1$, $v(m_2) = 9$, $v(w_1) = 3$, $v(w_2) = 6$. Verifique se u e v representam a mesma utilidade esperada.

b) Suponha que a função de utilidade da riqueza de um indivíduo seja $u(w) = \log_{10}(w)$ (logaritmo na base 10). O indivíduo possui um carro no valor de R$ 100.000,00. Existe uma probabilidade de 10% de ocorrer um acidente e o carro passar a valer R$ 10.000,00. Calcule a utilidade esperada deste indivíduo.

c) Suponha que a função de utilidade da riqueza de um indivíduo seja $u(w) = \sqrt{w}$. Considere a loteria $g = (0{,}10 \circ 100; 0{,}60 \circ 60, 0{,}30 \circ 0)$. Determine o valor esperado, a utilidade esperada e o desvio-padrão de g. Calcule o equivalente de certeza e o prêmio ao risco da loteria g.

13.4) (A07) Um indivíduo tem uma riqueza não nula e sua função de utilidade de Bernoulli é $u(x) = K - a/x$, em que a e K são constantes positivas e $x > a/K$. Este indivíduo é convidado a participar de uma loteria que triplica sua riqueza com probabilidade p e a reduz à terça parte com probabilidade $1-p$. Qual deve ser o valor mínimo de p para que o indivíduo aceite participar da loteria?

13.5) (A96) Quais das funções abaixo têm as propriedades de utilidade esperada? Justifique a sua resposta.

a) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = pw_1 + (1-p)w_2$.

b) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = a(pw_1^2 + (1-p)w_2^2)$.

c) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = pa\ln(w_1) + (1-p)b\ln(w_2)$.

d) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = \frac{p}{1-p}\ln(w_1) + \frac{1-p}{p}\ln(w_2)$.

e) $U(p \circ w_1; (1-p) \circ w_2) = p^\alpha \ln(w_1) + (1-p)^\alpha \ln(w_2)$.

13.6) (NS) Um fazendeiro acha que existe uma probabilidade de 50% que na sua próxima temporada de plantação irá ter muita chuva. A utilidade esperada desse fazendeiro é:

$$U = \frac{1}{2}\ln(w_{tn}) + \frac{1}{2}\ln(w_{mc}),$$

em que w_{tn} denota a renda dele no estado da natureza "*tempo normal*" e w_{mc} denota a renda dele no estado da natureza "*muita chuva*". Suponha que a existam dois tipos de plantação possíveis, que geram os seguintes resultados para o fazendeiro:

Plantação	w_{tn}	w_{cm}
Trigo	R$ 28.000	R$ 10.000
Milho	R$ 19.000	R$ 15.000

a) Qual tipo de plantação o fazendeiro escolhe?

b) Suponha agora que o fazendeiro pode plantar a sua fazenda com metade de trigo e metada de milho. Ele fará isso? Explique o seu resultado.

c) Qual é o mix de trigo e milho que maximiza a utilidade esperada do fazendeiro, supondo agora que ele pode plantar qualquer proporção de milho e trigo?

d) Suponha agora que exista um seguro para a plantação de apenas trigo, que custa R$ 4.000 e paga R$ 8.000 caso ocorra muita chuva. Isso mudaria a escolha do fazendeiro?

13.7) Um indivíduo tem uma função de utilidade de Bernoulli e uma riqueza inicial denotadas por u e w_0, respectivamente. Considere a loteria g que paga o valor B com probabilidade p e o valor L com probabilidade $1-p$. Responda os itens abaixo.

a) Se o indivíduo já possui essa loteria, qual é o menor preço que ele estaria disposto a vendê-la?

b) Se o indivíduo não possui essa loteria, qual é o maior preço que ele estaria disposto a comprá-la?

c) Os preços encontrados nas soluções dos itens a) e b) são iguais? Interprete intuitivamente a sua resposta. Encontre condições nos parâmetros do problema que garantem que esses dois preço serão iguais.

d) Seja $B =$ R$ 10, $L =$ R$ 5, $w_0 =$ R$ 10 e $0u(w) = \sqrt{w}$. Calcule os preços de venda e compra descritos nos itens a) e b) para este caso.

13.8) (NS) Um indivíduo avesso ao risco possui uma riqueza igual a R$ 20.000. Suponha que ele tem uma chance de perder R$ 10.000 com probabilidade de 50% (e 50% de chance de não perder nada).

a) Calcule o preço atuarialmente justo de um seguro total para essa perda e ilustre graficamente que o indivíduo prefere o seguro justo a correr o risco da perda por conta própria.

b) Suponha agora que existam dois tipos de seguro disponíveis: i) um seguro justo que cobre a perda total, ii) um seguro justo que cobre metade da perda total. Calcule o preço do seguro ii) e mostre que indivíduos avessos ao risco preferem o primeiro ao segundo.

13.9) Considere o exemplo de seguros que desenvolvemos na página 6. Suponha agora que o preço do seguro é $p > \pi$ (ou seja, o preço do seguro é maior do que o preço atuarialmente justo). Derive novamente a condição de primeira oredem para o exemplo, agora para esta situação. Mostre que todo indivíduo avesso ao risco irá adquirir uma quantidade de seguro menor do que o seguro total.

13.10) (A09) Um indivíduo possui uma função de utilidade de Bernoulli dada por $u(w) = 1 - (1/w)$, em que w denota o valor presente líquido da sua renda futura. No momento, ele está contemplando duas opções de carreira profissional. A primeira opção dará a ele uma renda certa de $w = 5$. A outra alternativa dará $w = 400$, com 1% de chance, e $w = 4$ com 99% de chance. Responda aos seguintes itens:

a) Calcule os coeficientes de aversão absoluta e relativa ao risco de Arrow-Pratt. Esse indivíduo é avesso ao risco?

b) Calcule a utilidade esperada das duas opções. Qual deve ser a escolha desse indivíduo?

c) Calcule o equivalente de certeza da segunda alternativa.

d) Suponha que exista um teste de aptidão que revela com certeza se o indivíduo obterá $w = 400$ ou $w = 4$ se escolher a segunda alternativa. Calcule o maior valor p que o indivíduo estaria disposto a pagar por esse teste de aptidão.