MICROECONOMIA 1

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Notas de Aula 6 – Graduação

Prof. José Guilherme de Lara Resende

1 O conceito de Elasticidade

Suponha que a variável Y depende da variável Z, ou seja, mudanças em Z afetam Y. Queremos medir a sensibilidade de Y a mudanças em Z. A elasticidade de Y com relação a Z (vamos denotar esse conceito por ε_{YZ}) mede a variação que ocorre em Y, *em termos percentuais*, dada uma variação em Z, *também em termos percentuais*. Portanto:

$$\varepsilon_{YZ} = \frac{\%\Delta Y}{\%\Delta Z} = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta Z}{Z}} = \frac{Z}{Y}\frac{\Delta Y}{\Delta Z}$$

A ideia de usar a mudanças em termos percentuais no lugar de mudanças em termos absolutos é que a primeira independe das unidades em que Y e Z são medidas. Por exemplo, vimos que a curva de demanda, tudo mais constante, mostra como a quantidade demandada varia com o preço do bem. Porém medir variações absolutas na quantidade, causadas por variações absolutas no preço, pode levar a inferências vazias de sentido. Suponha que um aumento de R$ 1 no preço de um bem leva a uma queda de dez quilos na quantidade consumida. Isto é uma resposta grande ou pequena?

Não há como saber a não ser que sejam informados o preço e a quantidade iniciais. Se o preço inicial era R$ 1, então o aumento de R$ 1 representa um aumento de 100% no preço. Se o preço inicial era R$ 100, então o aumento de R$ 1 representa um aumento de 1% no preço. Raciocínio similar vale para a quantidade.

A elasticidade é um conceito que reconhece e leva em conta mudanças relativas das variáveis, o que a torna uma medida independente da unidade em que se mede essas variáveis. Por exemplo, se $\varepsilon_{YZ} = 2$, isso significa que uma mudança em Z de $\%\Delta Z = 1\%$ leva a uma mudança em Y, em termos relativos, de $\%\Delta Y = \varepsilon_{YZ} \times \%\Delta Z = 2\%$.

Portanto, se estivermos analisando a demanda por cerveja em diversos países, tanto faz se essa demanda é calculado em litros ou "*ounces*" ou qualquer outra medida e se o preço é calculado em reais, dólar ou euros. Se a elasticidade-preço da demanda por cerveja for $-1{,}5$, significa que um aumento no preço da cerveja de 1% leva a uma queda no consumo de cerveja em 1,5%.

Como estamos analisando a demanda de um bem, as elasticidades da demanda que iremos estudar são: 1) a elasticidade da demanda de um bem com relação a mudanças no seu preço (*elasticidade-preço da demanda*), 2) a elasticidade da demanda de um bem com relação a mudanças no preço de outro bem (*elasticidade-preço cruzada da demanda*), e 3) a elasticidade da demanda de um bem com relação a mudanças na renda do consumidor (*elasticidade-renda da demanda*).

2 Elasticidade-preço da demanda

A elasticidade-preço do bem i, denotada por ε_i^M, é calculada como a mudança percentual na quantidade, $\Delta x_i/x_i$, dividida pela mudança percentual no preço, $\Delta p_i/p_i$:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\Delta x_i/x_i}{\Delta p_i/p_i} = \frac{p_i}{x_i}\frac{\Delta x_i}{\Delta p_i}$$

Exemplo 1: Suponha que medimos o consumo de chocolate de uma família em dois meses, janeiro, $q^{jan} = 10$, e fevereiro, $q^{fev} = 5$, medido em número de barras de chocolate consumido, e que também sabemos o preço da barra de chocolate consumido nesses dois períodos: $p^{jan} = 3$, $p^{fev} = 4$. A variação na quantidade consumida é $\Delta q = 5 - 10 = -5$, ou seja, houve uma queda de 5 barras no consumo, e a variação no preço é $\Delta p = 4 - 3 = 1$, ou seja, um aumento de 1 real no preço da barra. Note que todas essas variações (que são em termos absolutos), dependem da unidade que usamos para medir o consumo de chocolate (barras) e da unidade de valor monetário (real). Para calcularmos a variação em termos percentuais, podemos tanto usar a quantidade e o preço inicial ou a quantidade e o preço final. Temos então que:

$$\begin{aligned} \text{Inicial:} \quad \varepsilon_i &= \frac{\Delta q/q^{jan}}{\Delta p/p^{jan}} = \frac{-5/10}{1/3} = -1{,}5 \\ \text{Final:} \quad \varepsilon_f &= \frac{\Delta q/q^{fev}}{\Delta p/p^{fev}} = \frac{-5/5}{1/4} = -4 \end{aligned}$$

Note que ocorre uma diferença bem grande no valor calculado para a elasticidade em cada caso: se usarmos as variáveis finais, temos um valor de elasticidade (em valor absoluto) mais do que o dobro da elasticidade calculada usando as variáveis iniciais. Essa discrepância ocorre porque a mudança na quantidade e no preço foram grandes (se essas mudanças forem menores, a discrepância será menor). Isso motiva o conceito de *elasticidade-arco*, onde usamos a *média* entre os valores iniciais e finais para calcular a elasticidade:

$$\text{Elasticidade-arco:} \quad \varepsilon_i = \frac{\Delta q/(0,5q^{jan} + 0,5q^{fev})}{\Delta p/(0,5p^{jan} + 0,5p^{fev})} = \frac{-5/7{,}5}{1/3{,}5} = -\frac{7}{3} = -2{,}33\,,$$

ou seja, um valor intermediário. É comum usarmos a elasticidade-arco em casos onde temos poucos dados e variações relativamente grandes nos preços e nas quantidades.

Se as variações nos preços e nas quantidades se tornam cada vez menores, podemos mostrar que, no limite, a elasticidade-preço da demanda é igual a:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial \ln x_i^M}{\partial \ln p_i}$$

Se estamos lidando com funções de demanda $x_i^M(\mathbf{p}, m)$, a elasticidade-preço pode então ser calculada como:

$$\varepsilon_{ii}^M = \varepsilon_{ii}^M(\mathbf{p}, m) = \frac{\partial \ln(x_i^M(\mathbf{p}, m))}{\partial \ln(p_i)} = \frac{p_i}{x_i^M(\mathbf{p}, m)}\frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial p_i}\,,$$

onde o superescrito M apenas indica que estamos computando uma elasticidade Marshalliana, ou seja, que usa as demandas Marshallianas no seu cálculo.

Exemplo 2: Utilidade Cobb-Douglas. Suponha que a utilidade do consumidor é $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, com $\alpha, \beta > 0$. Vimos que as funções de demandas dos bens são $x_1^M = (\alpha/\alpha+\beta)m/p_1$ e $x_2^M = (\beta/\alpha+\beta)m/p_2$. Logo, a elasticidade-preço dessas demandas é:

$$\text{Bem 1:} \quad \varepsilon_{11}^M = \frac{p_1}{x_1^M}\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} = \frac{p_1}{(\alpha/\alpha+\beta)m/p_1} \times \left(-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{m}{p_1^2}\right) = -1$$
$$\text{Bem 2:} \quad \varepsilon_{22}^M = \frac{p_2}{x_2^M}\frac{\partial x_2^M}{\partial p_2} = \frac{p_2}{(\beta/\alpha+\beta)m/p_2} \times \left(-\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{m}{p_2^2}\right) = -1$$

Então as elasticidades-preço das demandas geradas por uma utilidade Cobb-Douglas são sempre constantes, iguais a 1 (em valor absoluto).

Apesar de a elasticidade-preço da demanda ser um número negativo (a demanda quase sempre responde negativamente a mudanças no preço do bem), e já que o que importa é a sua magnitude e não o seu sinal, é comum reportá-la em valor absoluto. Essa padronização não gera problemas, pois na prática nunca nos deparamos com bens de Giffen, ou seja, bens que de fato teriam a elasticidade-preço da sua demanda positiva. Então, para o Exemplo 2 acima, é mais comum dizer que as elasticidades-preços das demandas dos bens 1 e 2 são unitárias (iguais a 1).

Podemos classificar os bens com relação ao valor da sua elasticidade-preço da demanda. A classificação e a terminologia usadas são:

- Quando a elasticidade-preço da demanda é menor que 1, diz-se que a demanda é **inelástica**;
- Quando a elasticidade-preço da demanda é maior que 1, diz-se que a demanda é **elástica**; e
- Quando a elasticidade-preço da demanda é igual a 1, diz-se que a demanda tem **elasticidade unitária**.

Dizer que um bem tem demanda elástica significa dizer que se o preço desse bem aumentar (ou diminuir) em 10%, a demanda do bem diminui (aumenta) mais de 10%. Um exemplo de um bem inelástico é o sal (elasticidade $\approx$ 0,10) e de um bem elástico são tomates frescos (elasticidade $\approx$ 4,6). A demanda pode ser elástica para certas faixas de preço e inelástica para outras faixas de preço. A Figura 1 abaixo ilustra uma curva de demanda linear e os valores da elasticidade-preço da demanda dessa curva.

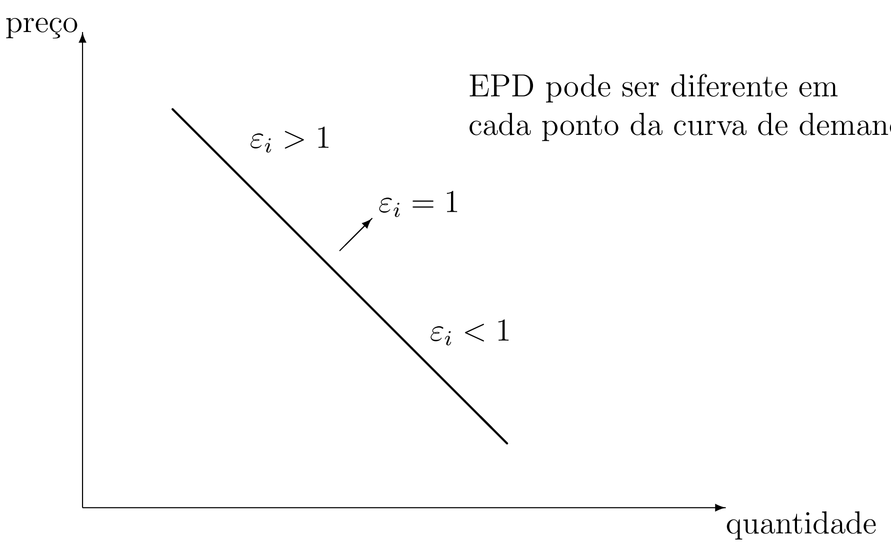

Figura 1: Curva de Demanda Linear

A elasticidade-preço da demanda do bem i depende da possibilidade de o consumidor abdicar do consumo do bem i. Portanto, ela será maior:

i) Quanto mais fácil for substituir o consumo do bem i pelo consumo de outros bens. Coca-cola é fácil de ser substituída. Sal já não é um bem tão fácil de ser substituído como coca-cola.
ii) No longo prazo. Quanto mais tempo o consumidor tem para ajustar a sua demanda a uma mudança do preço, maior será a elasticidade. Se você tem um carro que consome muita gasolina e o preço da gasolina aumenta bastante, você provavelmente não trocará de carro hoje, mas você pode decidir trocar o carro por um mais econômico nos próximos meses.
iii) Quanto menos "imprescindível" o bem for. O conceito de bem "imprescindível" usado aqui é subjetivo. Um bem pode ser imprescindível para uma pessoa e não para outra.

Ou seja, *o fator fundamental para determinar a elasticidade-preço da demanda de um bem é a possibilidade de substituir o seu consumo.*

3 Elasticidade-preço cruzada da demanda

A elasticidade-preço cruzada da demanda do bem i mede a sensibilidade da demanda do bem i com relação ao preço de algum outro bem, digamos j:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\Delta x_i / x_i}{\Delta p_j / p_j} = \frac{p_j}{x_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta p_j}$$

As mesmas considerações feitas com respeito a usar os valores iniciais, finais ou uma média deles para calcular a elasticidade-preço da demanda valem aqui. Normalmente, se as mudançás são substanciais, utiliza-se a elasticidade-arco para o cálculo dessa elasticidade.

Se as mudanças são "*infinitesimais*" ("*muito pequenas*"), ou se conhecemos as funções de demanda dos bens, a elasticidade-preço cruzada pode ser calculada como:

$$\varepsilon_{ij}^M = \varepsilon_{ij}^M(\mathbf{p}, m) = \frac{\partial \ln x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial \ln p_j} = \frac{p_j}{x_i^M(\mathbf{p}, m)} \frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial p_j}$$

Se a elasticidade-preço da demanda do bem i com relação ao preço do bem j for positiva, dizemos que o bem i é *substituto bruto* do bem j. Se for negativa, dizemos que o bem i é *complementar bruto* do bem j. Observe que essas definições podem ser feitas tanto em termos da elasticidade cruzada como em termos da derivada cruzada.

Levando em consideração todos esse aspectos, temos que:

- Se $\varepsilon_{ij}^M > 0$ (de modo equivalente, $\partial x_i / \partial p_j > 0$): dizemos que o bem i é *substituto bruto* do bem j.
- Se $\varepsilon_{ij}^M < 0$ (de modo equivalente, $\partial x_i / \partial p_j < 0$): dizemos que o bem i é *complementar bruto* do bem j.

A qualificação *bruto* é usada para diferenciar uma outra classificação possível, bens substitutos e complementares *líquidos*, definida usando a *demanda hicksiana*, que será vista mais à frente.

Exemplo 3: podemos ter dois bens cujas demandas sejam tais que $\partial x_1/\partial p_2 > 0$ e $\partial x_2/\partial p_1 = 0$. Nesse caso, o bem 1 é substituto bruto do bem 2, mas o bem 2 não é substituto (nem complementar) bruto do bem 1 (esse é o caso das demandas geradas pela utilidade quaselinear $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$, para soluções interiores).

Vimos anteriormente que um bem complementar perfeito tem que ser consumido com outro bem, em proporções fixas. Sapato do pé esquerdo é perfeitamente complementar para sapato do pé direito, e vice-versa. Porém, o grau de complementaridade, medido pela elasticidade-preço cruzada, não tem que ser recíproco, como o exemplo acima ilustra. No caso de televisões e aparelhos de blu-ray, o aparelho de blu-ray (*bem complementar*) tem que ser utilizado com uma televisão (*bem base*), mas o contrário não vale: a televisão não necessariamente tem que ser utilizada com um aparelho de blu-ray.

Em marketing, bens complementares dão um poder adicional à firma, permitindo que a firma "prenda" o consumidor quando os custos para mudar de produto são altos. Algumas estratégias de valoração usadas por firmas quando produzem ambos, o bem base e o bem complementar, são:

1. Cobrar barato o bem base em relação ao bem complementar. Essa estratégia incentiva o consumidor a comprar o bem base e a se manter cliente da firma (exemplo: aparelho de barbear e gilete, playstation e jogos).
2. Cobrar caro o bem base em relação ao bem complementar. Essa estratégia cria uma barreira à entrada do consumidor no consumo dos bens da firma (exemplo: clubes, como clubes de golfe e taxas para jogar golfe).

4 Elasticidade-renda

Outra elasticidade importante na teoria do consumidor é a elasticidade-renda da demanda de um bem. A intuição é similar à da elasticidade-preço, agora levando em conta que estamos medindo a sensibilidade da demanda do bem i em relação *a mudanças na renda*:

$$\eta_i = \frac{\Delta x_i / x_i}{\Delta m / m} = \frac{m}{x_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta m}$$

Uma vez mais, as mesmas considerações feitas com respeito a usar os valores iniciais, finais ou uma média deles para calcular a elasticidade-preço da demanda valem aqui. Normalmente, se as mudanças são substanciais, utiliza-se a elasticidade-arco para o cálculo dessa elasticidade.

Se as mudanças são "*infinitesimais*" ("*muito pequenas*"), ou se conhecemos as funções de demanda dos bens, a elasticidade-renda da demanda pode ser calculada como:

$$\eta_i = \eta_i^M(\mathbf{p}, m) = \frac{\partial \ln x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial \ln m} = \frac{m}{x_i^M(\mathbf{p}, m)} \frac{\partial x_i^M(\mathbf{p}, m)}{\partial m}$$

Os bens são classificados de acordo com a sua elasticidade-renda da demanda do seguinte modo. Quando a elasticidade-renda da demanda for menor que zero ($\eta_i < 0$), o bem i é chamado **inferior**: um aumento na renda do consumidor leva a uma redução na quantidade consumida. Quando a elasticidade-renda da demanda for positiva ($\eta_i \geq 0$), o bem i é chamado **normal**: um aumento na renda do consumidor leva a um aumento na quantidade consumida.

Dentre os bens normais, existem os bens **necessários** ou **básicos** (como, por exemplo, serviços de saneamento), onde a demanda do bem i aumenta com a renda, mas aumenta numa proporção menor que a da renda ($0 \leq \eta_i \leq 1$) e existem os **bens de luxo** (jantar em restaurantes chiques, automóveis importados), onde a demanda do bem i aumenta numa proporção maior que a do aumento da renda ($\eta_i > 1$). A Figura 2 abaixo ilustra esses casos.

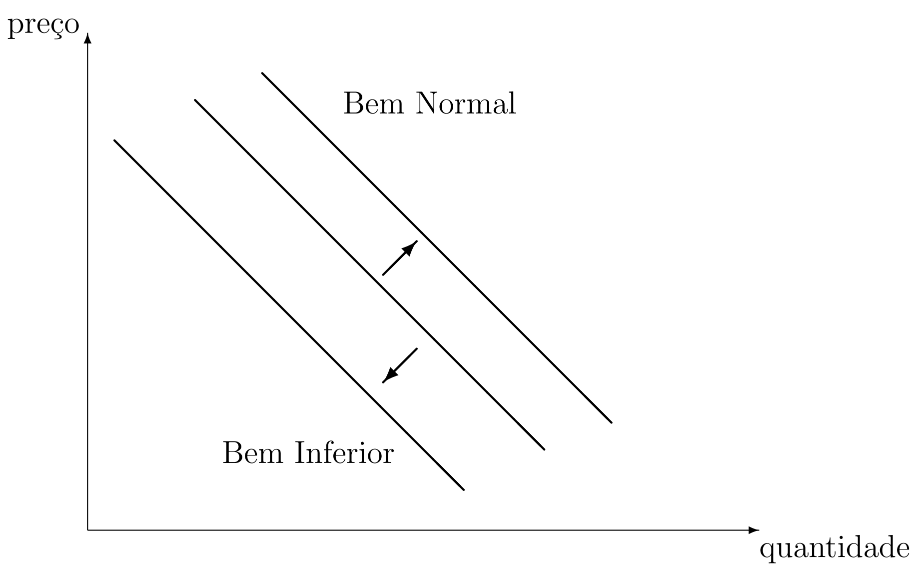

Figura 2: Bem Normal e Bem Inferior

Um bem pode ter uma classificação para uma certa faixa de renda e depois mudar essa classificação para outra faixa de renda. Por exemplo, passagem de ônibus pode ser bem normal para quem usa esse tipo de transporte regularmente, levando em conta aumentos pequenos da renda. Porém, se houver um aumento muito grande na renda de uma pessoa que usa ônibus, ela pode comprar um carro e então passagem de ônibus se torna um bem inferior. Portanto, a elasticidade-renda pode e provavelmente muda com o nível de renda e com o nível geral de preços.

Definição: Curva de Engel. A *curva de Engel* é uma representação gráfica que relaciona a quantidade demandada de um bem com o nível de renda, todo o resto constante.

Portanto, usamos a função de demanda para ilustrar a curva de Engel de um bem, considerando apenas a renda e a quantidade como as variáveis no gráfico.

Exemplo 4: Vimos que para a utilidade Cobb-Douglas $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ a demanda do bem 1 é $x_1 = \alpha(m/p_1)$ e do bem 2 é $x_2 = (1-\alpha) \times (m/p_2)$ (logo, para α entre $(0,1)$, ambos os bens são normais). A Figura 3 abaixo ilustra a curva de Engel para o bem 1.

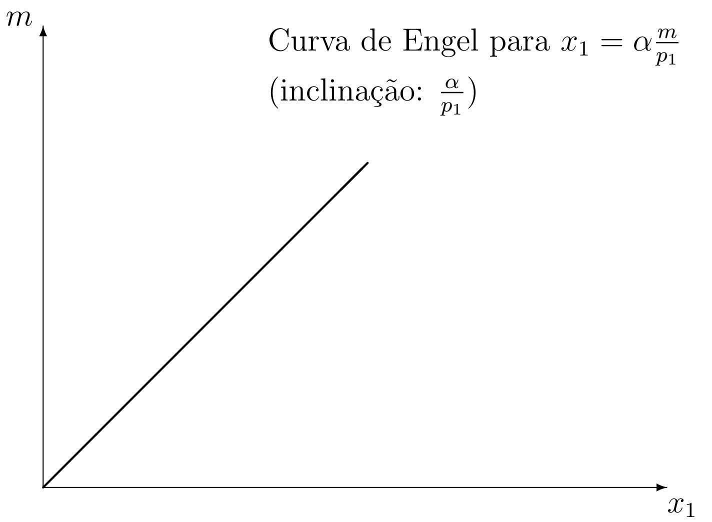

Figura 3: Curva de Engel – Demanda Cobb-Douglas

As curvas de Engel geradas por utilidades lineares (bens substitutos perfeitos) e por utilidades de Leontief (bens complementares perfeitos) também são lineares. Então toda curva de Engel é linear? Não necessariamente. Essa propriedade é característica de funções de utilidade *homotéticas*, e todas as funções de utilidade vistas até agora, com exceção da utilidade quaselinear, são homotéticas.

Podemos provar rigorosamente a validade dessa propriedade para as utilidades homotéticas, mas ela é intuitivamente clara. Se aumentarmos a renda do consumidor pouco a pouco, a cesta ótima se desloca sobre um raio que parte da origem e passa pela cesta ótima original, pois a TMS continua a mesma ao longo desse raio e o sistema de preços não se alterou. Portanto, se aumentarmos a renda em 10 vezes, o consumo de cada bem aumenta em 10 vezes. Isso implica que as elasticidades-renda de todos os bens são unitárias: um aumento na renda aumenta o gasto em cada bem na mesma proporção (um aumento de 10% na renda aumenta o gasto com cada bem em 10%).

Exemplo 5: Vimos que as demandas geradas por uma utilidade quaselinear $\ln x_1 + x_2$ são:

$$x_1^M(p_1,p_2,m) = \begin{cases} p_2/p_1 & \text{se} \quad m \geq p_2 \\ m/p_1 & \text{se} \quad m < p_2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x_2^M(p_1,p_2,m) = \begin{cases} m/p_2 - 1 & \text{se} \quad m \geq p_2 \\ 0 & \text{se} \quad m < p_2 \end{cases}$$

A representação gráfica das curvas de Engel desses dois bens é ilustrada na Figura 4 abaixo.

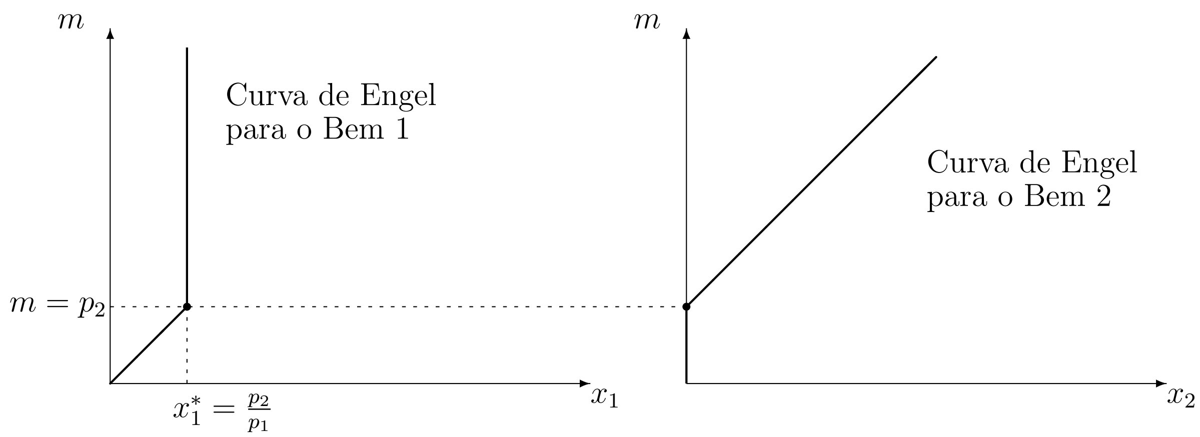

Figura 4: Curva de Engel – Utilidade Quaselinear

O **caminho de expansão da renda** descreve as cestas de bem consumidas para vários níveis de renda. Essa curva também é chamada **curva de renda-consumo**. O gráfico do caminho de expansão da renda tem como eixo as quantidades dos dois bens (note que os eixos de um gráfico da curva de Engel são a quantidade de um bem e a renda). Se ambos os bens são normais, a curva de renda-consumo tem inclinação positiva. A Figura 5 abaixo ilustra esse caso.

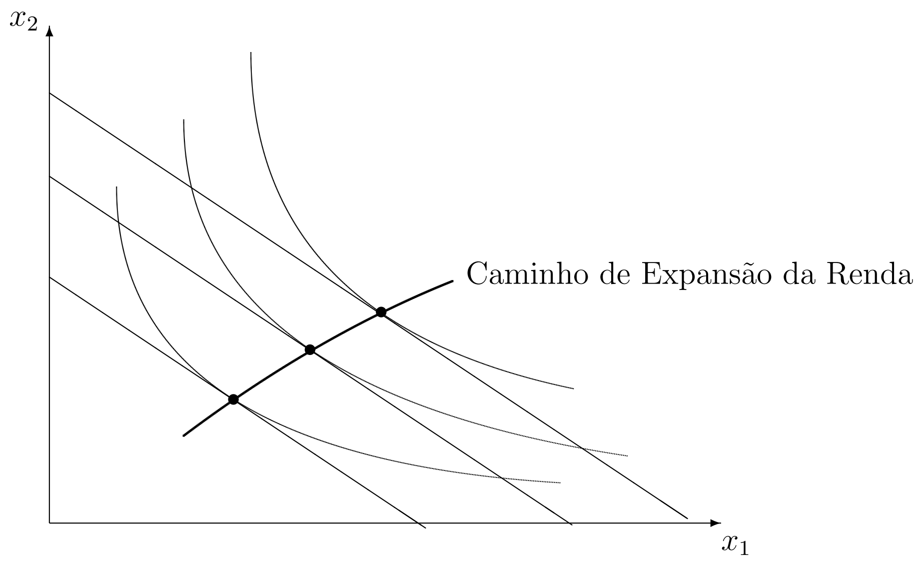

Figura 5: Caminho de Expansão da Renda

5 Relações entre Elasticidades

O primeiro resultado derivado abaixo, provavelmente o mais importante dessa seção e que será usado na explicação do terceiro resultado, não constitui uma relação entre elasticidades, como é o caso dos resultados 2, 3 e 4 a seguir, mas sim uma relação entre a elasticidade-preço da demanda de um bem e a variação no gasto ou despesa do consumidor com esse bem quando o seu preço muda.

1. Se o preço de um bem aumenta, o gasto com esse bem aumenta (diminui) caso sua demanda seja inelástica (elástica).

O gasto ou dispêndio total com o bem i, representado por D_i, é:

$$D_i = p_i x_i(\mathbf{p}, m)$$

Se derivarmos o dispêndio D_i com relação ao preço p_i, obtemos:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} = x_i + p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = x_i \left(1 + \frac{p_i}{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right) = x_i \left(1 - |\varepsilon_i|\right),$$

onde ε_i é a elasticidade-preço da demanda do bem i. Logo, se o preço do bem i se altera, a mudança no dispêndio total do consumidor com esse bem é:

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_i} = x_i \left(1 - |\varepsilon_i|\right)$$

Portanto, temos que:

1. Se $|\varepsilon_i| < 1$ (demanda inelástica): preço e dispêndio se movem na mesma direção;
2. Se $|\varepsilon_i| = 1$ (demanda com elasticidade unitária): dispêndio não se altera com uma mudança no preço;
3. Se $|\varepsilon_i| > 1$ (demanda elástica): preço e dispêndio se movem em direções opostas.

Observe que as relações acima são intuitivas. Se o bem é inelástico, então a sua demanda varia em proporção menor do que a variação no preço: um aumento no preço em 10%, por exemplo, reduzirá o consumo do bem em menos de 10%. Logo, o gasto do consumidor com esse bem, $p_i \times x_i(p_i)$, irá aumentar. Se o bem é elástico, então a sua demanda varia em proporção maior do que a variação no preço: um aumento no preço em 10%, por exemplo, reduzirá o consumo do bem em mais de 10%. Logo, o gasto do consumidor com esse bem, $p_i \times x_i(p_i)$, irá reduzir.

Se a demanda de um bem for linear, vimos que a elasticidade-preço desse bem varia ao longo da curva de demanda. Nesse caso, obtemos a relação ilustrada na Figura 6 abaixo para gasto total e preço do bem.

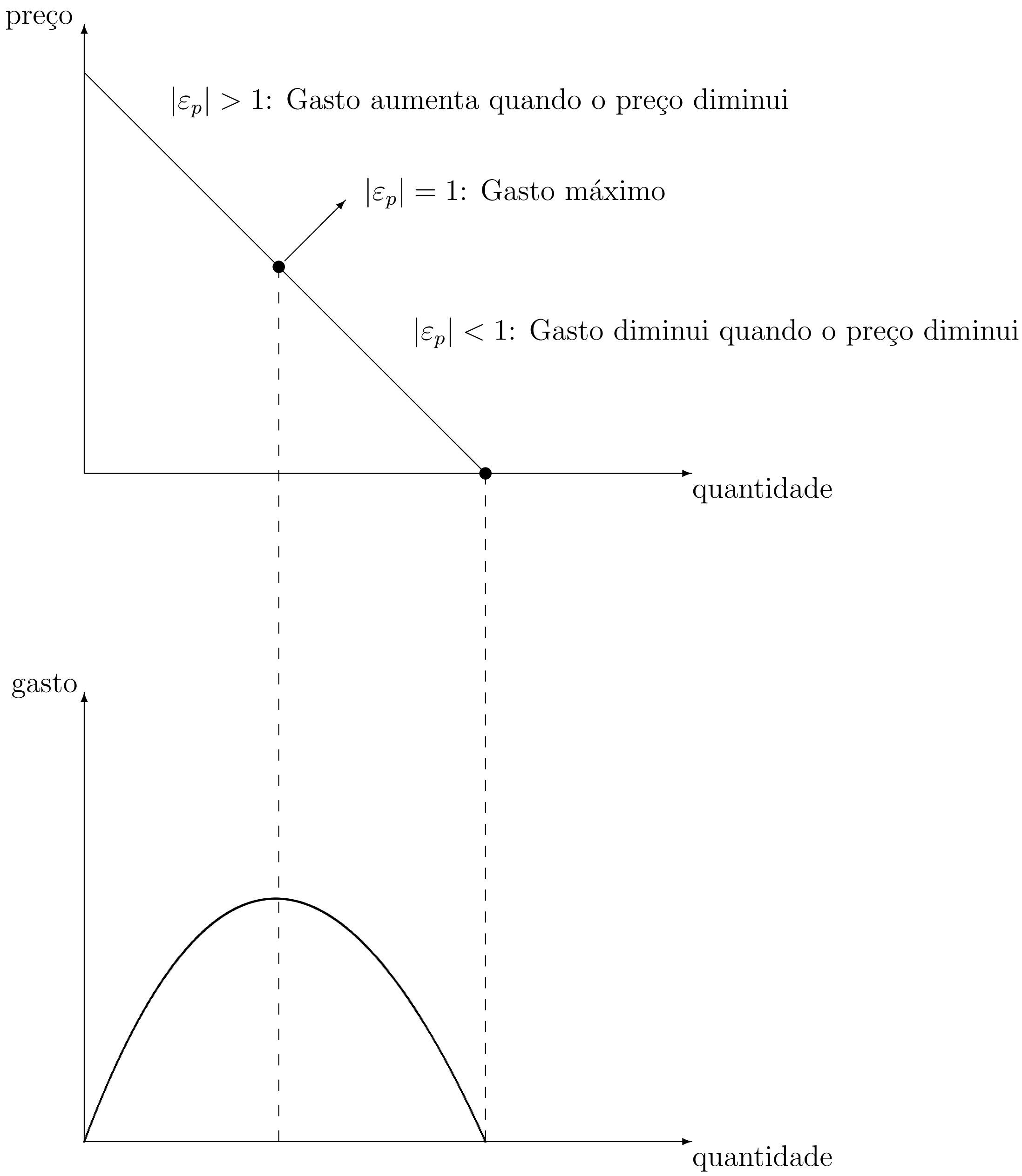

Figura 6: Demanda Linear e Gasto com o Bem

Vamos agora derivar relações entre elasticidades. Essas relações constituem restrições sobre os valores que determinadas elasticidades podem tomar. Por exemplo, a relação 2 abaixo mostra que as elasticidades-renda de todos os bens consumidos por um indivíduo devem somar um, quando ponderadas pela fração da renda gasta com cada bem.

Se as preferências são monótonas, as funções de demanda de um consumidor satisfazem a *lei de Walras*:

$$p_1 x_1^M(p_1, p_2, m) + p_2 x_2^M(p_1, p_2, m) = m\,. \tag{1}$$

A lei de Walras implica a seguinte propriedade:

2. Todas as elasticidades-renda somam um, quando ponderadas pela fração da renda gasta em cada bem.

Como a lei de Walras é válida para quaisquer valores de p_1, p_2 e m, podemos derivá-la com relação à renda, o que resulta em:

$$p_1 \frac{\partial x_1^M(p_1, p_2, m)}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2^M(p_1, p_2, m)}{\partial m} = 1 \tag{2}$$

A equação (2) é chamada *Agregação de Engel*. Observe que ela pode ser reescrita como:

$$\frac{p_1 x_1^M}{m}\left(\frac{m}{x_1^M}\frac{\partial x_1^M}{\partial m}\right) + \frac{p_2 x_2^M}{m}\left(\frac{m}{x_2^M}\frac{\partial x_2^M}{\partial m}\right) = 1\,,$$

onde as demandas dos bens 1 e 2 são funções dos preços e da renda (vamos simplificar a notação, não mais denotando as demandas dependentes explicitamente dos preços e da renda). Portanto, em termos de elasticidades, a agregação de Engel é dada por:

$$s_1\eta_1 + s_2\eta_2 = 1\,,$$

onde $s_i = p_i x_i^M/m$ é a fração da renda gasta com o bem i, $i = 1, 2$, e $\eta_i = (m/x_i^M) \times (\partial x_i^M/\partial m)$ é a elasticidade-renda da demanda do bem i.

Podemos concluir então que:

1. Todas as elasticidades-renda podem ser iguais a um. Nesse caso, um aumento da renda levará a um aumento na mesma proporção no consumo de todos os bens (se a renda aumentar em 10%, o consumo de cada bem aumentará em 10%). Preferências homotéticas são um exemplo desse caso.

2. Se $\eta_1 > 1$ então $\eta_2 < 1$: se a fração da renda consumida do bem 1 aumentar mais que proporcionalmente à renda, o consumo do bem 2 terá que aumentar menos que proporcionalmente à renda.

3. Se $\eta_1 < 0$ então $\eta_2 > 0$: se um bem for inferior, então o outro bem será normal.

Se derivarmos a lei de Walras para o caso geral de n bens, não é difícil ver que a agregação de Engel obtida é:

$$p_1 \frac{\partial x_1^M}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2^M}{\partial m} + \cdots + p_n \frac{\partial x_n^M}{\partial m} = 1\,. \tag{3}$$

Procedendo de modo similar para o caso de 2 bens, a agregação de Engel pode ser reescrita em termos de elasticidades como:

$$s_1\eta_1 + s_2\eta_2 + \cdots + s_n\eta_n = 1\,. \tag{4}$$

Podemos concluir no caso geral de n bens que:

1. Todas as elasticidades-renda podem ser iguais a um. Nesse caso, um aumento da renda leva a um aumento na mesma proporção no consumo de todos os bens (se a renda aumentar em 10%, o consumo de cada bem aumentará em 10%). Preferências homotéticas são um exemplo desse caso.

2. Se $\eta_i > 1$ então existe pelo menos um bem j tal que $\eta_j < 1$.

3. No máximo $n-1$ bens podem ser inferiores. Logo, pelo menos um bem consumido deve ser normal.

A lei de Walras também implica a seguinte propriedade:

3. Se um bem é elástico (inelástico), os outros bens são, na média ponderada pela fração da renda gasta no bem, substitutos (complementares) desse bem.

Para obter esta propriedade, vamos derivar a lei de Walras com relação ao preço de um bem. Para facilitar o entendimento, vamos derivar com relação a p_1, para o caso de dois bens, o que resulta em:

$$x_1^M + p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1} = 0 \qquad \text{(Agregação de Cournot para o bem 1)} \tag{5}$$

A equação (5) é chamada *Agregação de Cournot* para o bem 1. Podemos reescrevê-la como:

$$\frac{p_1 x_1^M}{m}\left(1 + \frac{p_1}{x_1}\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}\right) = -\frac{p_2 x_2}{m}\left(\frac{p_1}{x_2}\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}\right)$$

Em termos de elasticidades temos que:

$$s_1(1+\varepsilon_{11}^M) = -s_2\varepsilon_{21}^M \tag{6}$$

Analisando a equação (6), se o bem 1 for elástico (inelástico), então $\varepsilon_{11}^M < -1$, e o lado esquerdo de (6) será negativo (positivo). O lado direito de (6) deve ser negativo (positivo) também, ou seja, a elasticidade-preço cruzada do bem 1 com relação ao bem 2 deve ser positiva (negativa). Portanto, se a demanda do bem 1 for elástica (inelástica), então o bem 2 será substituto (complementar) bruto do bem 1. Se o bem 1 tiver elasticidade-preço da demanda unitária, então o bem 2 não será nem complementar nem substituto bruto do bem 1, e vice-versa.

Observe que se o bem 1 for elástico, então pela relação 1 acima, um aumento no seu preço diminuirá a despesa do consumidor com esse bem. Para que a lei de Walras continue satisfeita, a despesa com o segundo bem deve aumentar, ou seja, o consumo com o bem 2 deve aumentar quando o preço do bem 1 aumentar. Logo, o bem 2 é substituto bruto do 1 quando o bem 1 for elástico. Similarmente, se o bem 1 for inelástico, então um aumento do seu preço levará a um aumento na sua despesa (relação 1 acima). Logo, para que a lei de Walras continue satisfeita, a despesa com o bem 2 deve diminuir, ou seja, o consumo com o bem 2 deve diminuir quando o preço do bem 1 aumentar. Logo, o bem 2 será complementar bruto do bem 1 quando o bem 1 for inelástico.

Evidentemente, podemos obter uma relação similar se derivarmos a demanda do bem 2 com relação ao preço do bem 1. Neste caso, a agregação de Cournot em termos de elasticidade é:

$$s_2(1+\varepsilon_{22}^M) = -s_1\varepsilon_{12}^M\,.$$

Mais ainda, podemos determinar a agregação de Cournot para o caso geral de n bens. Para isso, derivando a lei de Walras para o caso de n bens com relação ao preço do bem i obtemos:

$$x_i^M + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k^M}{\partial p_i} = 0 \qquad \text{(Agregação de Cournot – caso geral)}$$

Podemos reescrever a agregação de Cournot para o bem i acima como:

$$\frac{x_i p_i}{m} + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j x_j}{m}\frac{p_i}{x_j}\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = 0$$

Ou seja, a agregação de Cournot reescrita em termos de elasticidades é dada por:

$$s_i(1+\varepsilon_{ii}^M) = -\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} s_j\varepsilon_{ji}^M \tag{7}$$

Se o bem i for elástico (inelástico), então $\varepsilon_{ii}^M < -1$, e o lado esquerdo de (7) será negativo (positivo). O lado direito de (7) deve ser negativo (positivo) também, ou seja, a soma ponderada das elasticidades-preço cruzadas dos outros bens com relação ao bem i deve ser na média positiva (negativa). Portanto, se a demanda do bem i for elástica (inelástica), então os outros bens devem ser, na média ponderada pela fração gasta em cada bem, substitutos (complementares) brutos do bem i, *independente de como esses bens afetem a função de utilidade.*

Em geral, dois efeitos ocorrem. Primeiro, todos os bens dão utilidade para o consumidor e, portanto, todos são substitutos de certo modo. Segundo, bens vão ser substitutos ou complementares devido ao efeito de uma mudança nos gastos de um bem qualquer de acordo com a relação (7) acima, derivada da lei de Walras. Se o bem for inelástico, então um aumento no seu preço aumentará a fração da renda gasta com esse bem e, portanto, o gasto com todos os outros bens deve diminuir, o que, considerando que os preços dos outros bens estão fixos, significa quantidades consumidas menores desses outros bens. Portanto, se a demanda do bem for inelástica, os demais bens se comportarão como complementares brutos desse bem, enquanto que se a demanda do bem for elástica, os outro bens se comportarão como substitutos brutos desse bem.

A propriedade de homogeneidade de grau zero das funções de demanda implica a seguinte propriedade:

> *4. A propriedade de homogeneidade implica que a soma de todas as elasticidades com respeito à demanda de um bem deve ser zero.*

Para facilitar o entendimento, vamos analisar a demanda do bem 1, supondo que existam apenas dois bens. Como a função de demanda do bem 1 é homogênea, temos que ela satisfaz:

$$x_1^M(tp_1, tp_2, tm) = x_1(p_1, p_2, m)\,,$$

para todo $t > 0$. Como essa propriedade é válida para todo $t > 0$, podemos derivá-la com relação a t, o que resulta, pela regra da cadeia, em:

$$\frac{\partial x_1^M(tp_1, tp_2, tm)}{\partial p_1}\frac{d(tp_1)}{dt} + \frac{\partial x_1^M(tp_1, tp_2, tm)}{\partial p_2}\frac{d(tp_2)}{dt} + \frac{\partial x_1^M(tp_1, tp_2, tm)}{\partial m}\frac{d(tm)}{dt} = 0$$

Ou seja,

$$\frac{\partial x_1^M(tp_1, tp_2, tm)}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial x_1^M(tp_1, tp_2, tm)}{\partial p_2}p_2 + \frac{\partial x_1^M(tp_1, tp_2, tm)}{\partial m}m = 0$$

A equação acima é válida para todo $t > 0$, logo vale em particular para $t = 1$. Fazendo $t = 1$ e dividindo a última equação por $x_1^M(p_1, p_2, m)$, obtemos:

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1^M} + \frac{\partial x_1^M}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1^M} + \frac{\partial x_1^M}{\partial m}\frac{m}{x_1^M} = 0\,,$$

onde todas as demandas são calculadas agora em (p_1, p_2, m), já que fizemos $t = 1$. Escrita em termos de elasticidades, a última equação é equivalente a:

$$\varepsilon_{11}^M + \varepsilon_{12}^M + \eta_1 = 0\,.$$

Logo, *a soma de todas as elasticidades da demanda de um bem (preço, preço-cruzada e renda) deve ser igual a zero.*

Evidentemente, podemos obter uma relação similar se derivarmos a propriedade de homogeneidade para a demanda do bem 2 com relação a t. Neste caso, obtemos:

$$\varepsilon_{22}^M + \varepsilon_{21}^M + \eta_2 = 0\,.$$

Mais ainda, podemos determinar a restrição sobre as elasticidades da demanda de um determinado bem que a propriedade de homogeneidade resulta para o caso geral de n bens. Não é difícil perceber que neste caso, considerando a demanda do bem i, teremos que:

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} + \eta_i = 0\,, \qquad \text{para todo bem } i \tag{8}$$

Observe que os resultados 2) e 3) acima são derivados da "*lei de Walras*", que depende apenas da hipótese de a escolha ótima do consumidor exaurir a sua renda. Já o resultado 4) é obtido da propriedade de homogeneidade de grau zero das funções demandas, que depende da hipótese de que os consumidores não sofram de ilusão monetária. Logo, esses resultados (e também o resultado 1) acima) são válidos para qualquer tipo de consumidor, por mais "*estranhas*" que sejam suas preferências, desde que apenas essas duas hipótese comportamentais sejam satisfeitas.

Exercícios

1. Derive as agregações de Engel e Cournot para o caso de n bens. Reescreva essas agregações em termos de elasticidades. Interprete (por exemplo, é possível que todos os bens que um indivíduo consuma sejam bens inferiores? Por quê? Se um indivíduo consome n bens, no máximo quantos bens podem ser inferiores? Justifique sua resposta).
2. Suponha a existência de n bens. Usando a propriedade de homogeneidade das funções de demanda Marshalliana, mostre que as elasticidades-preço e renda de um dado bem i satisfazem a seguinte igualdade:
$$\eta_i + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{ij} = 0, \tag{9}$$
onde η_i é a elasticidade-renda do bem i e ϵ_{ij} é a elasticidade-preço da demanda do bem i com relação ao preço do bem j. Interprete intuitivamente a relação (9) acima.
3. Suponha que a elasticidade-renda da demanda per capita de cerveja é constante e igual a 3/4 e a elasticidade-preço é também constante e igual a $-1/2$. Os consumidores gastam, em média, R$ 400,00 por ano com cerveja. A renda média anual destes consumidores é R$ 6.000,00. Cada garrafa de cerveja custa R$ 3,00.
   a) Se o governo pretende desestimular o consumo de cerveja pela metade, qual deve ser o aumento no preço da cerveja que alcançaria esta meta?
   b) Suponha que o governo estimou um aumento da renda média anual no próximo ano de R$ 3.000,00. O governo deseja manter o nível de consumo de cerveja constante no próximo ano, usando um imposto sobre o preço da cerveja. Qual deve ser o aumento no preço da cerveja no próximo ano para que o seu consumo não se modifique, dado que a previsão de aumento de renda se realize?

Leitura Recomendada

- Varian, caps. 15 - "Demanda de mercado" - e 6 - "Demanda".
- Pindick e Rubinfeld, cap. 2 - "Os Fundamentos da Oferta e da Demanda", seções 4 - " Elasticidades da Oferta e da Demanda" - e 5 - "Elasticidades de Curto-Prazo *versus* Elasticidades de Longo-Prazo".
- Hall e Lieberman, cap. 4 - "Como Trabalhar com a Oferta e a Demanda", seções 2 - "Elasticidade-Preço da Demanda" - e 3 - "Outras Elasticidades da Demanda".
- Nicholson e Snyder, cap. 5 - "Income and Subsitution Effects", seção 7 - "Demand Elasticities".