MICROECONOMIA 1 – GRADUAÇÃO

Departamento de Economia, Universidade de Brasília

Nota de Aula 17 – Minimização de Custos

Prof. José Guilherme de Lara Resende

1 Minimização de Custos

Vamos analisar novamente o problema de maximização de lucros da firma, mas agora de modo indireto, em duas etapas. Na primeira etapa, a firma decide o uso de insumos que minimiza o custo de produção de uma determinada quantidade do bem final. Na segunda etapa, a firma escolhe o nível de produção que maximiza o seu lucro. Logo, o problema de maximização de lucro da firma será dividido em duas etapas:

1. A firma minimiza o seu custo de produção, para um dado nível de produção;
2. A firma escolhe o nível de produção ótimo que maximiza lucros.

Essa análise traz novos insights sobre o problema da firma. Nesta e na próxima nota de aula vamos analisar a primeira etapa acima, válida para firmas em qualquer tipo de mercado, desde que sejam tomadoras de preços no mercado de insumos (lembre-se que a análise de maximização de lucros anterior só é válida para firmas competitivas não somente no mercado de insumos, mas também no mercado do produto que vende). Portanto, a minimização de custos é válida não somente para firmas competitivas mas também para firmas que possuem algum controle sobre o preço do seu produto, como monopólios e oligopólios. Vamos continuar supondo dois insumos, a fim de simplificar a notação.

Queremos resolver o seguinte problema:

$$\min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2 \qquad \text{s.a.} \qquad q = f(x_1,x_2)$$

A slolução do problema de minimização de custos da firma, se existir, consiste nas **demandas condicionais** (no nível de produção q):

$$x_i^* = x_1(w_1,w_2,q)\,, \qquad i = 1,2.$$

Essas demandas são funções diferentes das demandas derivadas para o problema de maximização do lucro visto na nota de aula 16. A *demanda condicional* $x_i(w_1,w_2,q)$ informa a quantidade do insumo i que minimiza o custo de se produzir q, quando os preços dos insumos são w_1 e w_2. A *demanda ótima* (ou *demanda incondicional*) $x_i(p,w_1,w_2)$ diz a quantidade do insumo i que maximiza o lucro da firma quando o preço do produto é p e os preços dos insumos são w_1 e w_2.

A **função custo**, denotada por $c(w_1, w_2, q)$, é definida como:

$$c(w_1, w_2, q) = \left[\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2 \quad \text{s.a.} \quad q = f(x_1, x_2) \right] = w_1 x_1(w_1, w_2, q) + w_2 x_2(w_1, w_2, q)$$

Portanto, a função custo $c(w_1, w_2, q)$ informa o menor custo de se produzir a quantidade q de produto, quando os preços dos insumos são w_1 e w_2.

Vamos supor que a solução é interior ($x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$) e que o método de Lagrange se aplica. O Lagrangeano do problema de minimização de custos é:

$$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda \left(q - f(x_1, x_2) \right),$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange do problema. As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1): &\quad w_1 = \lambda f_1(x_1^*, x_2^*) \\ (x_2): &\quad w_2 = \lambda f_2(x_1^*, x_2^*) \\ (\lambda): &\quad q = f(x_1^*, x_2^*) \end{aligned}$$

Se dividirmos a CPO do insumo 1 pela CPO do insumo 2, obtemos:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{PMg_1(x_1^*, x_2^*)}{PMg_2(x_1^*, x_2^*)} \tag{1}$$

Essa condição também é válida para o caso de maximização do lucro. Note que se ela não for válida, a firma pode diminuir o seu custo mantendo o mesmo nível de produção q. Por exemplo, se:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{1} > \frac{1}{1} = \frac{PMg_1(x_1^*, x_2^*)}{PMg_2(x_1^*, x_2^*)},$$

então o insumo 1 está caro em relação ao insumo 2, levando-se em conta a relação entre as produtividades marginais no nível de insumos (x_1^*, x_2^*) considerado. Se a firma diminuir em uma unidade o uso do insumo 1 e aumentar em uma unidade o uso do insumo 2, o nível de produção não se altera ($PMg_1(x_1^*, x_2^*) = PMg_2(x_1^*, x_2^*) = 1$), porém a firma economiza R$ 1, já que $w_1 = 2$ e $w_2 = 1$. Portanto, se a firma escolher quantidades positivas de insumos tais que a relação de preços entre dois insumos seja diferente da sua taxa técnica de substituição, a firma não estará minimizando custos.

Graficamente, o problema de minimização de custo é encontrar o menor custo possível para a isoquanta associada à quantidade de produção desejada (matematicamente, esse problema é semelhante ao problema de minimização do dispêndio do consumidor). Uma *reta de isocusto* é a combinação de insumos que tem o mesmo custo, ou seja, pode ser representado pelo conjunto $I_c = \{(x_1, x_2) \mid w_1 x_1 + w_2 x_2 = c\}$. A Figura 1 ilustra o problema de minimização de custo para o caso de uma isoquanta convexa com relação à origem. A equação (1) acima representa a condição de tangência entre a reta de isocusto e a isoquanta associada ao nível de produção q.

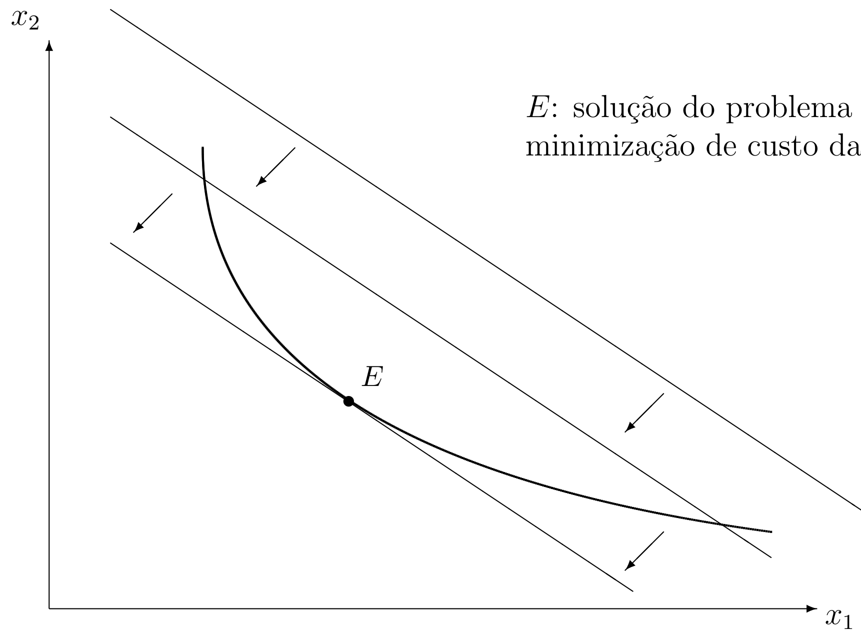

Figura 1: Minimização de Custo

2 Propriedades

Propriedades da Função Custo. A função custo satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $c(w_1, w_2, q)$ é contínua;

(2) Crescente em q e não decrescente em w_1 e w_2;

(3) Homogênea de grau 1 nos preços dos insumos w_1 e w_2;

(4) Côncava nos preços dos insumos w_1 e w_2;

(5) *Lema de Shephard*: Se a função custo for diferenciável, então:

$$\frac{\partial c(w_1, w_2, q)}{\partial w_i} = x_i(w_1, w_2, q), \quad \text{para todo insumo } i\,.$$

Propriedades das Funções de Demandas Condicionais. As demandas condicionais satisfazem as seguintes propriedades:

(1) $x_i(w_1, w_2, q)$, $i = 1, 2$, é homogênea de grau 0 em w_1, w_2;

(2) Não existem "insumos condicionais de Giffen":

$$\frac{\partial x_i(w_1, w_2, q)}{\partial w_i} \leq 0, \quad \text{para todo insumo } i$$

(3) Os efeitos preço-cruzados são iguais:

$$\frac{\partial x_1(w_1, w_2, q)}{\partial w_2} = \frac{\partial x_2(w_1, w_2, q)}{\partial w_1}\,.$$

A prova dessas propriedades é similar à prova das propriedades da função dispêndio e das demandas hicksianas do problema dual do consumidor, já que, *do ponto de vista matemático*, os dois problemas são idênticos.

A intuição das propriedades também é similar à intuição detalhada na parte de teoria do consumidor, com as adaptações necessárias. Observe que para os dois tipos de demandas por insumos, incondicional e condicional, não é possível ocorrer que o preço de um insumo aumente e que a firma passe a usar uma quantidade maior desse insumo.

3 Exemplos

Vamos encontrar as demandas condicionais e a função custo para três funções de produção, supondo que existam apenas dois insumos.

1) Insumos Substitutos Perfeitos (tecnologia linear). Suponha que a tecnologia é representada pela função de produção $q = g(ax_1 + bx_2)$, onde g é uma função crescente e $a > 0$, $b > 0$. Vamos considerar, em particular, a função:

$$q = ax_1 + bx_2\,,$$

Os dois insumos são substitutos perfeitos. A firma usa apenas o insumo relativamente mais barato. Logo, as demandas condicionais são:

$$x_1(w_1, w_2, q) = \begin{cases} q/a, & \text{se} \quad w_1/a < w_2/b \\ 0, & \text{se} \quad w_1/a > w_2/b \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x_2(w_1, w_2, q) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad w_1/a < w_2/b \\ q/b, & \text{se} \quad w_1/a > w_2/b \end{cases}$$

No caso em que $w_1/a = w_2/b$, a firma comprará qualquer quantidade x_1^* e x_2^* dos insumos que satisfaça a restrição $ax_1^* + bx_2^* = q$. A função custo pode ser escrita de forma simplificada como:

$$c(w_1, w_2, q) = \min\left\{\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}\right\} q,$$

já que a firma usa apenas o insumo mais barato, numa quantidade igual a q, para poder produzir q unidades do bem final.

2) Insumos Complementares Perfeitos (tecnologia de Leontief). Suponha que a tecnologia é representada pela função de produção $q = g(\min\{ax_1, bx_2\})$, onde g é uma função crescente e $a > 0$, $b > 0$. Vamos considerar, em particular, a função:

$$q = \min\{ax_1, bx_2\}$$

Não há possibilidade de substituição entre os dois insumos: eles devem ser usados na mesma proporção sempre, $ax_1^* = bx_2^*$, pela firma que deseja minimizar custos. Além disso, as demandas condicionais devem satisfazer a restrição do problema, produzir q unidades do bem final. Logo, essas demandas são:

$$x_1(w_1, w_2, q) = \frac{q}{a} \qquad \text{e} \qquad x_2(w_1, w_2, q) = \frac{q}{b}$$

A função custo é, portanto,

$$c(w_1, w_2, q) = \left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b}\right) q\,.$$

3) Cobb-Douglas. Considere o seguinte formato da função de produção Cobb-Douglas:

$$q = f(x_1, x_2) = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

Nesse caso, resolvemos o problema de minimização de custos montando o Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda \left(q - A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \right)$$

As CPO resultam em:

$$\begin{aligned} (x_1): &\quad w_1 = \lambda \alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} \\ (x_2): &\quad w_2 = \lambda \beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} \\ (\lambda): &\quad q = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \end{aligned}$$

Dividindo a primeira CPO pela segunda CPO, obtemos:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{\beta w_1 x_1}{\alpha w_2}$$

Substituindo essa expressão para x_2 na terceira CPO, obtemos a demanda condicional do insumo x_1:

$$q = A x_1^{\alpha} \left(\frac{\beta w_1 x_1}{\alpha w_2} \right)^{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad x_1^* = \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (w_1)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (w_2)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (q)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Substituindo a demanda de x_1 na expressão de x_2 em função de x_2, obtemos a demanda ótima do segundo insumo. Temos que:

$$\begin{aligned} x_1(w_1, w_2, q) &= \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (w_1)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (w_2)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (q)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ x_2(w_1, w_2, q) &= \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (w_1)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (w_2)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (q)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{aligned}$$

Podemos mostrar que a função custo é:

$$c(w_1, w_2, q) = \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] (w_1)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (w_2)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (q)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Se a função apresentar retornos constantes de escala, ou seja, se $\alpha + \beta = 1$, logo, $\beta = 1 - \alpha$, então as demandas condicionais simplificam para:

$$x_1(w_1, w_2, q) = \frac{1}{A} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} w_1^{-(1-\alpha)} w_2^{1-\alpha} q \qquad \text{e} \qquad x_2(w_1, w_2, q) = \frac{1}{A} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{-\alpha} w_1^{\alpha} w_2^{-\alpha} q$$

e a função custo simplifica para:

$$c(w_1, w_2, q) = (1/A)\, \alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{-(1-\alpha)} w_1^{\alpha} w_2^{1-\alpha} q\,.$$

Observe que podemos dizer que a função custo gerada pela tecnologia representada por uma função de produção Cobb-Douglas tem o *formato Cobb-Douglas* nos preços dos insumos.

Para todos os casos acima encontramos as demandas condicionais e as funções custo, *mesmo para tecnologias com retornos constantes ou crescentes de escala.* Logo, o problema de inexistência de solução que ocorre na maximização de lucro não ocorre aqui. O problema de minimização de custos fixa a quantidade a ser produzida em q, não se preocupando em determinar a quantidade ótima que a firma deve produzir. O problema de inexistência de solução para os casos de RCE e RCrE reaparece apenas na segunda etapa da análise do problema de maximização de lucros em duas etapas, ou seja, na decisão da firma do nível de produção ótimo, que maximiza o lucro da firma. Vamos discutir agora as condições de segunda ordem para o problema de minimização de custos da firma.

4 Condições de Segunda Ordem

As condições de segunda ordem, para o caso de dois insumos, são derivadas do Hessiano orlado (ou Hessiano com borda) do problema de minimização de custos. A matriz do Hessiano orlado é:

$$H_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ -f_1 & -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} \\ -f_2 & -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} \end{pmatrix}$$

O determinante do Hessiano orlado é:

$$\det H = \lambda \left(f_{11} f_2^2 + f_{22} f_1^2 - 2 f_1 f_2 f_{12} \right)$$

Para que as CSO sejam satisfeitas, esse determinante deve ser negativo. Como o multiplicador de Lagrange λ é sempre positivo, temos então que as CSO do problema de minimização de custos da firma resumem-se a $f_{11} < 0$, $f_{22} < 0$ e a:

$$f_{11} f_2^2 + f_{22} f_1^2 - 2 f_1 f_2 f_{12} < 0\,,$$

onde essas derivadas são calculadas no ponto candidato a ótimo.

Observação: No caso geral de n bens, os determinantes dos menores principais do Hessiano orlado devem ser sempre negativos, para garantirmos que a solução encontrada pelas CPO seja de fato um mínimo. Por exemplo, no caso de quatro bens devemos ter que:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ -f_1 & -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} \\ -f_2 & -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} \end{pmatrix} < 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 & -f_3 \\ -f_1 & -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -\lambda f_{13} \\ -f_2 & -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -\lambda f_{23} \\ -f_3 & -\lambda f_{31} & -\lambda f_{32} & -\lambda f_{33} \end{pmatrix} < 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 & -f_3 & -f_4 \\ -f_1 & -\lambda f_{11} & -\lambda f_{12} & -\lambda f_{13} & -\lambda f_{14} \\ -f_2 & -\lambda f_{21} & -\lambda f_{22} & -\lambda f_{23} & -\lambda f_{24} \\ -f_3 & -\lambda f_{31} & -\lambda f_{32} & -\lambda f_{33} & -\lambda f_{34} \\ -f_4 & -\lambda f_{41} & -\lambda f_{42} & -\lambda f_{43} & -\lambda f_{44} \end{pmatrix} < 0$$

O caso de n bens segue o mesmo padrão.

Vamos analisar as CSO para o problema de minimização de custos da função de produção Cobb-Douglas, para verificar que as demandas condicionais e a função custo encontradas acima são válidas. As CSO são satisfeitas se a seguinte desigualdade for satisfeita:

$$f_{11}f_2^2 + f_{22}f_1^2 - 2f_1f_2f_{12} < 0$$

Calculando essas derivadas (vamos supor que $A = 1$), temos que:

$$\alpha(\alpha-1)\beta^2 x_1^{3\alpha-2}x_2^{3\beta-2} + \beta(\beta-1)\alpha^2 x_1^{3\alpha-2}x_2^{3\beta-2} - 2\alpha^2\beta^2 x_1^{3\alpha-2}x_2^{3\beta-2} < 0$$

Podemos dividir essa última desigualdade por $\alpha\beta x_1^{3\alpha-2}x_2^{3\beta-2}$, supondo que α e β sejam maiores do que zero (as quantidades usadas de insumo são sempre maiores ou iguais a zero). Obtemos:

$$(\alpha-1)\beta + (\beta-1)\alpha - 2\alpha\beta < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta > 0$$

Ou seja, para o problema de minimização de custos de uma firma com tecnologia Cobb-Douglas, basta que os coeficientes da função de produção sejam positivos ($\alpha > 0$ e $\beta > 0$). Ressaltamos uma vez mais que se a tecnologia apresentar retornos constantes ou crescentes de escala ($\alpha+\beta \geq 1$), não aparece o problema de determinação da quantidade ótima que vimos na nota de aula 16. Naquele caso, se o lucro for positivo para algum nível positivo de produção, a firma pode replicar a produção, obtendo um lucro infinito. Agora, o nível de produção está fixo em q e queremos apenas encontrar o custo mais barato de se produzir q unidades do bem final.

5 Rendimentos de Escala e Função Custo

Observe que nos três exemplos acima, a função custo de tecnologias que apresentam retornos constantes de escala é *linear* na quantidade produzida. Este resultado não é uma coincidência: existe uma ligação entre rendimentos constantes de escala (RCE) e a função custo. Lembrem-se que uma tecnologia que apresenta RCE pode ser representada por uma função de produção homogênea linear:

$$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2)\,, \quad \text{para todo } t > 0\,.$$

Vamos denotar por $c(w_1, w_2, 1)$ o menor custo de se produzir 1 unidade do bem final ($q = 1$). O seguinte resultado é válido:

Teorema: Se a firma possui uma tecnologia que apresenta RCE, então a função custo dessa firma pode ser escrita como:

$$c(w_1, w_2, q) = c(w_1, w_2, 1)\, q\,.$$

Prova: Sejam x_1^*, x_2^* as demandas condicionais para se produzir *uma unidade* do bem final, quando os preços dos insumos são w_1, w_2. Queremos mostrar que:

$$c(w_1, w_2, q) = w_1 q x_1^* + w_2 q x_2^* = (w_1 x_1^* + w_2 x_2^*)\, q = c(w_1, w_2, 1)\, q$$

Precisamos mostrar dois pontos:

1) A quantidade de insumos (qx_1^*, qx_2^*) pode produzir q unidades do bem final. Isso é consequência da propriedade de RCE de f:
$$f(qx_1^*, qx_2^*) = qf(x_1^* x_2^*) = q\,,$$
já que as quantidades x_1^*, x_2^* produzem uma unidade do bem final.

2) A quantidade de insumos (qx_1^*, qx_2^*) é a forma mais barata de se produzir q unidades do bem final. Suponha que isso não seja verdade, ou seja, que exista um vetor de quantidades de insumos $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ que produz q a um custo mais barato do que (qx_1^*, qx_2^*). Então:
$$w_1\tilde{x}_1 + w_2\tilde{x}_2 < w_1(qx_1^*) + w_2(qx_2^*)$$
Se dividirmos essa última desigualdade por q, obtemos:
$$w_1\frac{\tilde{x}_1}{q} + w_2\frac{\tilde{x}_2}{q} < w_1x_1^* + w_2x_2^*$$
Novamente, como a tecnologia apresenta RCE, o vetor de insumos $(\tilde{x}_1/q, \tilde{x}_2/q)$ produz uma unidade do bem final:
$$f\left(\frac{\tilde{x}_1}{q}, \frac{\tilde{x}_2}{q}\right) = \frac{1}{q}f\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right) = \frac{q}{q} = 1.$$
Porém (x_1^*, x_2^*) é a forma mais barata de se produzir uma unidade do bem final, aos preços w_1 e w_2. Essa contradição foi gerada pela suposição de que (qx_1^*, qx_2^*) não era a forma mais barata de se produzir q unidades do bem final.

Então, (qx_1^*, qx_2^*) é a forma mais barata de se produzir q unidades do bem final. Logo, obtemos:
$$c(w_1, w_2, q) = w_1qx_1^* + w_2qx_2^* = (w_1x_1^* + w_2x_2^*)\,q = c(w_1, w_2, 1)\,q,$$
o que completa a prova do teorema. ■

O resultado do teorema é intuitivo. Se a firma apresenta RCE, então o custo de se produzir cem unidades do seu produto é apenas cem multiplicado pelo custo de produzir uma unidade desse produto.

O que ocorre se a tecnologia da firma apresentar rendimentos crescentes de escala (RCrE)? Nesse caso, *o custo aumentará numa proporção menor do que o aumento da produção*: se a firma, por exemplo, aumentar a produção em dez vezes, o custo aumentará em *menos* de dez vezes. O inverso ocorre se a tecnologia apresentar rendimentos decrescentes de escala (RDE): *se a firma aumentar a produção em dez vezes, o custo aumentará em mais de dez vezes.*

Vamos analisar qual será o formato da função custo associada a funções de produção *homotéticas*. Dizemos que f é homotética se pode ser escrita como $f = g \circ h$, onde g é uma função estritamente crescente e h é uma função homogênea de grau um. Logo, toda função de produção homogênea de grau $k > 0$ é homotética, já que pode ser escrita como uma combinação $g \circ h$, onde $g(t) = t^k$ e h é homogênea de grau um.

O teorema abaixo descreve o formato da função custo gerada por funções de produção homotéticas e, como caso particular desse tipo de função, também o formato da função custo gerada por funções de produção homogêneas de grau k.

Teorema: Função Custo Associada a Funções de Produção Homotéticas. Se a função de produção é homotética, então as funções custo e as demandas condicionais podem ser escritas como:

$$c(\mathbf{w}, q) = \phi(q)\, c(\mathbf{w}, 1),$$
$$\mathbf{x}(\mathbf{w}, q) = \phi(q)\, \mathbf{x}(\mathbf{w}, 1),$$

onde $\phi(q)$ é função estritamente crescente e $\mathbf{w}$ representa o vetor de preços dos insumos. Se a função de produção é homogênea de grau $k > 0$, então:

$$c(\mathbf{w}, q) = q^{1/k}\, c(\mathbf{w}, 1),$$
$$\mathbf{x}(\mathbf{w}, q) = q^{1/k}\, \mathbf{x}(\mathbf{w}, 1).$$

O teorema mostra que se a função de produção for homotética, então a função custo será separável em duas partes, uma que depende apenas dos preços dos insumos e outra que depende apenas do nível de produção. Mais ainda, se a função de produção for homogênea de grau k, a função custo será homogênea de grau $1/k$ *no nível de produção.* O resultado do teorema para as demandas condicionais é consequência do lema de Shephard.

Por exemplo, se a função de produção for homogênea de grau 0,5, então ela apresentará retornos decrescentes de escala. Se a escala de produção dobrar, o nível de produção aumentará em apenas $2^{0,5} \approx 1{,}41$ vezes. Neste caso, o custo de dobrar o nível de produção será multiplicar o custo inicial em quatro vezes.

Exemplo: Considere a seguinte função de produção Cobb-Douglas:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{0,25} x_2^{0,25}\,.$$

Usando a fórmula obtida acima para a função custo associada à Cobb-Douglas, obtemos:

$$c(w_1, w_2, q) = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] (w_1)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, (w_2)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\, (q)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = 2 w_1^{0,5} w_2^{0,5} q^2$$

Logo, o custo de produção de uma unidade de q é $c(w_1, w_2, 1) = 2w_1^{0,5} w_2^{0,5}$. A função custo pode então ser reescrita como:

$$c(w_1, w_2, q) = c(w_1, w_2, 1)\, q^2\,,$$

exatamente o formato previsto pelo teorema acima.

6 Plantas de Produção

Suponha que uma firma opere com duas *plantas de produção* (fábricas) distintas, cada uma com uma função custo diferente (ou seja, a firma já sabe como operar cada planta de modo a produzir qualquer quantidade em cada uma das plantas ao menor custo possível). O problema da firma é encontrar a divisão ótima da produção total entre as duas plantas.

Suponha que $c_1(q_1)$ e $c_2(q_2)$ são as funções custo das plantas 1 e 2, respectivamente. O custo total de produção é dado pela soma dessas duas funções custo. Se a firma deseja produzir a quantidade q do bem, devemos ter que $q_1 + q_2 = q$. Neste caso, o custo total de produzir q é $c_1(q_1) + c_2(q_2)$. O problema da firma é determinar o melhor uso das plantas de produção, no sentido de minimizar o custo total de produção:

$$\min_{q_1,q_2} c_1(q_1) + c_2(q_2) \qquad \text{s.a.} \qquad q_1 + q_2 = q$$

Podemos simplificar o problema substituindo a restrição na função objetivo. Neste caso, o problema se torna:

$$\min_{q_1} c_1(q_1) + c_2(q - q_1)$$

A CPO resulta em:

$$c_1'(q_1^*) = c_2'(q_2^*)$$

Portanto, a firma deve dividir a produção entre plantas diferentes de modo que o *custo marginal de produção em cada planta seja igual*. Isso não necessariamente significa que o custo de produção em cada planta será igual. A firma usará primeiro a planta cujo custo marginal de produção é mais baixo. Se o custo marginal de produção dessa planta aumentar com o nível de produção, a firma pode vir a usar outras plantas que não sejam tão econômicas quanto a primeira.

No caso geral da firma ter k plantas de produção, o resultado acima pode ser generalizado facilmente: a firma minimiza o custo total de produção dividindo a produção de modo a igualar o custo marginal de produção de cada uma das k plantas de produção. Para verificar isso, considere o seguinte problema:

$$\min_{q_1,\ldots,q_k} \sum_{i=1}^{k} c_i(q_i) \qquad \text{s.a.} \qquad q_1 + \cdots q_k = q\,.$$

O Lagrangeano deste problema é:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{k} c_i(q_i) + \lambda \left(q - \sum_{i=1}^{k} q_i \right)\,,$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. As CPO do problema resultam em:

$$\begin{aligned} &(q_i): \; c_i'(q_i^*) = \lambda\,, && i = 1, \ldots, k\,, \quad \text{e} \\ &(\lambda): \; q_1^* + \cdots q_k^* = q \end{aligned}$$

Observe que como $c_i'(q_i^*) = \lambda$ para toda planta i, então temos que na divisão ótima da produção de q, o custo marginal de produção em cada planta será o mesmo.

7 Minimização de Custos Revelada

Suponha que coletamos duas observações de produção sobre uma firma qualquer que utiliza apenas dois insumos (o caso geral é similar). Essas informações contêm as demandas por fatores usadas pela firma, o preço desses fatores no período em que os fatores foram comprados, e o nível de produção, *igual para as duas observações*:

$$\begin{array}{ll} 1) & (x_1^t, x_2^t),\ (w_1^t, w_2^t),\ q^t \\ 2) & (x_1^s, x_2^s),\ (w_1^s, w_2^s),\ q^s \end{array}$$

onde $q^t = q^s$. Como nas duas observações o nível de produção é igual, as duas desigualdades abaixo devem ser satisfeitas para a firma que minimiza custos:

$$\begin{aligned} w_1^t x_1^t + w_2^t x_2^t &\leq w_1^t x_1^s + w_2^t x_2^s \\ w_1^s x_1^s + w_2^s x_2^s &\leq w_1^s x_1^t + w_2^s x_2^t \end{aligned}$$

As duas desigualdades acima compõem o *Axioma Fraco de Minimização de Custos* (AFrMC). Se multiplicarmos a segunda desigualdade por -1, somarmos com a primeira e rearranjarmos os termos, obtemos:

$$(w_1^t - w_1^s)(x_1^t - x_1^s) + (w_2^t - w_2^s)(x_2^t - x_2^s) \leq 0\,.$$

Vamos usar a notação $\Delta w_i = w_i^t - w_i^s$, $\Delta x_i = x_i^t - x_i^s$, para todo insumo i. Então a última desigualdade se torna:

$$\Delta w_1 \times \Delta x_1 + \Delta w_2 \times \Delta x_2 \leq 0\,.$$

A implicação óbvia dessa última desigualdade é que a demanda condicional por um insumo reage inversamente a uma mudança no seu preço. Por exemplo, se apenas o preço do insumo 1 se altera, então $\Delta w_2 = 0$, e a última desigualdade acima se torna:

$$\Delta w_1 \times \Delta x_1 \leq 0\,,$$

ou seja, se o preço do insumo 1 aumentar, a sua quantidade demandada condicional não aumentará (ou diminuirá ou continuará a mesma, no caso mais extremo).

Leitura Recomendada

- Varian, cap. 20 - "Minimização de Custos".
- Pindick e Rubinfeld, cap. 7 - "Custos de Produção", seções 7.1, 7.2 e 7.3.
- Hall e Lieberman, cap. 6 - "Produção e Custo", seções 4 - "Pensando sobre Custos", 5 - "Custos no Curto Prazo" e 6 - "Produção e Custo no Longo Prazo".
- Nicholson e Snyder, cap. 10 - "Cost Functions".

Exercícios

1. Encontre as demandas *condicionais* e a função custo para os três casos abaixo:

   a) Tecnologia linear: $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, com $a > 0$, $b > 0$.
   b) Tecnologia Leontief: $f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$, com $a > 0$, $b > 0$.
   c) Tecnologia CES: $f(x_1, x_2) = [ax_1^\rho + bx_2^\rho]^{\frac{1}{\rho}}$, com $a > 0$, $b > 0$ e $\rho < 1$, $\rho \neq 0$.

2. Considere uma firma com tecnologia Cobb-Douglas $f(k, l) = k^\alpha l^\beta$, onde k denota unidades de capital usadas pela firma, l denota unidades de trabalho usadas pela firma, w o salário pago aos trabalhadores e r o preço do insumo capital. A firma quer minimizar o custo de produzir q unidades do bem final e possui acesso a mercados de fatores perfeitamente competitivos.

   a) Qual é o problema de minimização de custos da firma? Denote o multiplicador de Lagrange desse problema por μ.
   b) Quais são os parâmetros do problema?
   c) Encontre as funções de demanda condicionais. Denote-as por $l^*(w, r, q)$ e $k^*(w, r, q)$.
   d) Encontre a função custo $c(w, r, q)$. Qual a interpretação dessa função?
   e) Ache μ^*. Qual a interpretação do multiplicador?
   f) Calcule dc/dq e mostre que é igual ao multiplicador μ^*.
   g) Como dc/dq varia com relação a $(\alpha + \beta)$?
   h) Mostre que as demandas condicionais são homogêneas de grau 0 em w e r.
   i) Mostre que a função custo é homogênea linear em w e r. Qual é a intuição desse resultado?
   j) Mostre que $dc/dw \geq 0$ e que $dc/dr \geq 0$. Qual é a intuição desse resultado?
   k) Mostre gráfica e matematicamente que a função custo é côncava em w. Qual é a intuição desse resultado?

3. Discuta a relação entre as seguintes definições possíveis de fatores de produção complementares:

   (i) $f_{ij} > 0$;
   (ii) $(\partial x_i / \partial w_j)_{w_i, p} < 0$;
   (iii) $(\partial x_i / \partial w_j)_{w_i, q} < 0$;

   onde $f(x_1, x_2)$ é a função de produção de uma firma competitiva e onde os parâmetros fora dos parênteses indicam que esses parâmetros são mantidos constantes.

4. Suponha uma função de produção com dois insumos. As demandas condicionais são representadas por $x_i(w_1, w_2, q)$, $i = 1, 2$. Verifique se cada item abaixo é consistente ou não com minimização de custos. Se o item for inconsistente, justifique. Se for consistente, dê um exemplo de uma função de produção que gera as propriedades descritas no item.

   a) $\partial x_1 / \partial w_1 = 0$ e $\partial x_2 / \partial w_2 = 0$.
   b) $\partial x_1 / \partial w_1 < 0$ e $\partial x_2 / \partial w_2 < 0$.
   c) $\partial x_1 / \partial w_1 < 0$, $\partial x_2 / \partial w_2 > 0$.
   d) $\partial x_1 / \partial q = 0$.
   e) $\partial x_1 / \partial w_2 > 0$ e $\partial x_2 / \partial w_1 < 0$.

5. Uma firma que utiliza três insumos tem uma função de produção descrita por:

$$q = f(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1 + 2x_2, x_3\}$$

   Qual é a função custo dessa firma? Quais são as demandas condicionais dos três insumos (denote o preço dos insumos por w_1, w_2 e w_3)? Justifique a sua resposta.

6. Uma firma usa quatro insumos e sua tecnologia de produção é descrita pela seguinte função:

$$q = \min\{x_1 + x_2, x_3^{\alpha} x_4^{\beta}\}, \quad \text{onde } \alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1\,.$$

   Determine as demandas condicionais por insumos dessa firma. Qual é a função custo?

7. Suponha a seguinte função de produção com *três insumos*:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \sqrt{2x_2 + x_3}$$

   Suponha que os preços dos fatores sejam $w_1 = 10$, $w_2 = w_3 = 4$, respectivamente. Encontre as quantidades dos três insumos que devem ser demandadas para minimizar o custo de produção de $q = 24$.

8. A tabela abaixo contém duas observações de escolha de produção e insumos para uma mesma firma (que usa apenas dois insumos):

Observação	q	x_1	x_2	w_1	w_2
A	100	15	12	1	2
B	100	16	12	2	2

   Suponha que nenhuma outra variável relevante mudou (por exemplo, a firma continua usando a mesma tecnologia).

   a) Usando as observações acima, derive duas desigualdades que uma firma que minimiza lucros satisfaz.
   b) O comportamento da firma descrito pela tabela acima é consistente com o comportamento minimizador de custos? Por quê?
   c) Ainda usando as observações contidas na tabela acima, existe algum "insumo de Giffen" para essa firma?