Notas de Aula - Microeconomia

Gil Riella

12 de março de 2018

Sumário

Capítulo 1

Revisão sobre Otimização

1.1 Derivadas Parciais

Seja f uma função diferenciável de n variáveis. Nós denotamos o valor de f no ponto $(x_1, ..., x_n)$ por $f(x_1, ..., x_n)$.

Suponha que fixemos o valor de todas as variáveis exceto x_i. Isto é $x_j = c_j$ para todo $j \neq i$. Agora, podemos definir uma função g da variável x_i por

$$g(x_i) := f(c_1, ..., c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, ..., c_n).$$

Observe que g é uma função de uma única variável. A derivada da função g em um dado ponto c_i é chamada de derivada parcial de f com respeito ao iézimo argumento no ponto $(c_1, ..., c_i, ..., c_n)$.

Notação. Dada uma função de n variáveis f, nós denotamos a derivada parcial de f com respeito ao iézimo termo, no ponto $(c_1, ..., c_i, ..., c_n)$, por $f_i(c_1, ..., c_i, ..., c_n)$.

Exemplo 1.1. Seja $f(x_1, x_2) = (x_1)^3 \ln x_2$. Então,

$$f_1(x_1, x_2) = 3(x_1)^2 \ln x_2 \text{ e } f_2(x_1, x_2) = \frac{(x_1)^3}{x_2}.$$

Algumas vezes as variáveis da função tem um significado específico. Por exemplo, em uma função de produção $F(K, L)$, K representa o capital utilizado pela firma e L representa a mão de obra. Nesses casos nós escrevemos F_K e F_L para representar as derivadas parciais de F.

1.2 Otimização

Grande parte das situações estudadas em microeconomia envolve a solução de algum problema de otimização. Isto é, nós temos um agente econômico resolvendo um problema do tipo

$$\max_x f(x)$$
$$\text{sujeito a } x \in S.$$

O problema acima é lido da seguinte forma: encontre x^* no conjunto S tal que $f(x^*) \geq f(x)$ para todo x em S. Usualmente nós chamamos f de função objetivo, x de variável de escolha e S de conjunto restrição.

Exemplo 1.2. Se o agente econômico é um consumidor padrão, então f é sua função de utilidade, x é sua cesta de consumo, e S é o conjunto das cestas de consumo que o consumidor tem condições de comprar.

1.3 Otimização sem Restrição

Nós estudaremos agora a versão simplificada do problema de maximização acima em que não existe restrição. Isto é, o problema do agente econômico é

$$\max_x f(x).$$

Em geral a existência de uma solução para um problema do tipo acima não é garantida. Por exemplo, a função $f(x) = x$ obviamente não tem um máximo irrestrito. De qualquer forma, quando o problema acima tem solução e f é uma função diferenciável, nós sabemos que qualquer solução x^* acima satisfaz

$$f'(x^*) = 0,^{1.1} \tag{1.1}$$

se f é uma função de uma única variável, ou

$$f_i(x_1^*, ..., x_n^*) = 0 \text{ para } i = 1 \text{ até } n, \text{ se } f \text{ é uma função de } n \text{ variáveis.} \tag{1.2}$$

Observações.

- (1.1) e (1.2) são chamadas de condições de primeira ordem do problema.
- Um ponto ou vetor x^* que satisfaz (1.1) ou (1.2), respectivamente, é chamado de ponto crítico.
- Nem todo ponto crítico é uma solução do problema de maximização, mas toda solução do problema de maximização é ponto crítico.

1.4 Método para Resolver um Problema de Maximização sem Restrição

Dado o que aprendemos na seção anterior, o seguinte método parece ser uma alternativa interessante para a solução de problemas de maximação sem restrição:

(a) Encontre todos os pontos críticos do problema.

[1.1] Para uma função de uma única variável f nós usamos a notação f' para representar a derivada de f.

(b) Compute o valor de f para todos os pontos críticos.

(c) Identifique os pontos críticos em que f atingiu o seu maior valor. Se o problema tem solução, então os pontos críticos em que f atinge o seu maior valor (dentre os pontos críticos) são exatamente as soluções do problema.

Exemplo 1.3. Considere o seguinte problema de maximização:

$$\max_{x,y} \left[-(x-1)^2 - (y+2)^2 \right]$$

As condições de primeira ordem do problema acima são:

x: $-2(x-1) = 0$

y: $-2(y+2) = 0$

É fácil ver que o sistema acima tem uma única solução dada por $(x^*, y^*) = (1, -2)$. Portanto, se o problema acima tiver solução, então esta solução é exatamente $(1, -2)$. De fato $(1, -2)$ é a solução do problema acima. Para verificar isto, note que a função objetivo nunca assume valores positivos. Como o valor da função objetivo no ponto $(1, -2)$ é zero, concluímos que $(1, -2)$ realmente maximiza a função objetivo.

1.5 Otimização com Restrição em Formato de Igualdade

Considere um problema da seguinte forma:

$$\max_{x,y} f(x, y)$$
$$\text{sujeito a } g(x, y) = 0.$$

O método para solução de um problema do tipo acima é conhecido como o método do Lagrangeano. O método consiste dos seguintes passos:

(a) Construa o Lagrangeano do problema. Ou seja, defina uma função $L(x, y, \lambda)$ dada por

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

A variável auxiliar, λ, utilizada na construção do Lagrangeano é conhecida como multiplicador de Lagrange.

(b) Encontre os pontos críticos de L como no caso de otimização sem restrição. Isto é, resolva o sistema

$$\begin{aligned} L_x(x, y, \lambda) &= 0 \\ L_y(x, y, \lambda) &= 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

(c) Dentre os pontos (x^*, y^*, λ^*) que satisfazem o sistema acima encontre aqueles em que f atinge o seu maior valor.

Exemplo 1.4 (Problema do consumidor Cobb-Douglas)**.** Considere o seguinte problema de maximização:

$$\max_{x,y} f(x,y) := x^\alpha y^{1-\alpha}$$
$$\text{sujeito a } p_x x + p_y y = w.$$

em que $0 < \alpha < 1$. Como este problema se trata de um de maximização com restrição de igualdade, podemos usar o método acima para resolvê-lo. O primeiro passo é construir o Lagrangeano do problema.[1.2] Este é dado por

$$L(x,y,\lambda) = x^\alpha y^{1-\alpha} - \lambda\left[p_x x + p_y y - w\right].$$

As condições de primeira ordem do problema são:

$$\begin{aligned} x &: \alpha\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\alpha} = p_x\lambda \\ y &: (1-\alpha)\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} = p_y\lambda \\ \lambda &: p_x x + p_y y = w. \end{aligned}$$

Isolando λ na segunda expressão e substituindo na primeira nós obtemos

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y}.$$

Ou seja,

$$y = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_x}{p_y}x. \tag{1.3}$$

Substituindo a expressão acima na restrição orçamentária nós ficamos com

$$p_x x + p_y\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_x}{p_y}x = w.$$

Isolando x na expressão acima nós encontramos

$$x = \alpha\frac{w}{p_x}.$$

Substituindo a expressão acima em (1.3) nós encontramos

$$y = (1-\alpha)\frac{w}{p_y}.$$

[1.2] Note que no problema do consumidor acima $g(x,y) = p_x x + p_y y - w$.

Capítulo 2

Preferências

2.1 Introdução

Em economia, nós estudamos o comportamento dos chamados agentes econômicos. Um *agente econômico* pode ser uma pessoa, uma família, uma firma, um país, *etc.*. Muitas vezes, tais agentes econômicos têm que tomar decisões, isto é, têm que fazer escolhas. Na teoria econômica tradicional, nós fazemos a hipótese de que os agentes sempre escolhem as melhores coisas disponíveis. Para que possamos discutir tais conceitos, nós primeiro precisamos definir um arcabouço teórico em que as ideias mencionadas acima tenham um significado formal. Para tanto, neste capítulo nós estudaremos o conceito de uma *relação de preferências*. Uma relação de preferências é um objeto matemático que nos permitirá descrever formalmente um *agente racional* que faz escolhas ótimas. Posteriormente, nós discutiremos o conceito de representação de uma relação de preferências por uma função de utilidade.

2.2 Relações Binárias

Seja X um conjunto qualquer. A ideia é que X é o conjunto de todas as alternativas sobre as quais um agente econômico pode algum dia ser chamado a tomar uma decisão. Por exemplo, se o nosso agente econômico é um potencial comprador de carro, X é o conjunto de todos os carros existentes, mesmo que no momento a renda do indivíduo só permita que ele compre um conjunto mais restrito de carros. Como nós dissemos na introdução, nós estamos interessados em um agente que faça sempre a melhor escolha. Para tanto, nós precisamos de alguma ferramenta que nos permita representar as opiniões do indivíduo. A ferramenta que nós utilizaremos será o conceito matemático conhecido como relação binária. Formalmente, uma relação binária $\succsim$ é simplesmente um subconjunto do conjunto $X \times X$.[2.1] Seguindo a tradição em economia e matemática, nós escreveremos $x \succsim y$ para representar o fato de que $(x, y) \in \succsim$. Nós lemos a expressão $x \succsim y$ como x é pelo menos tão bom quanto y. A relação binária $\succsim$ está naturalmente associada a outras duas relações binárias. A primeira delas é a relação de indiferenças $\sim$. Nós escrevemos $x \sim y$ para representar o fato de que $x \succsim y$ e $y \succsim x$ são verdade e nós lemos $x \sim y$ como x é indiferente a y. Finalmente, uma relação

[2.1] *Notação:* Nós escrevemos $X \times X$ para representar o produto cartesiano do conjunto X com ele mesmo. Ou seja, os objetos do conjunto $X \times X$ têm o formato (x, y) em que x e y pertencem ao conjunto X.

binária $\succsim$ também induz uma relação de preferências estritas $\succ$. Nós escrevemos $x \succ y$ para representar o fato de que $x \succsim y$, mas não é verdade que $y \succsim x$. Nós lemos $x \succ y$ como x é estritamente preferível a y.

2.3 Propriedades de Relações Binárias

Quando nós usamos uma relação binária $\succsim$ para representar as opiniões de algum agente econômico, nós geralmente fazemos algumas hipóteses a respeito de $\succsim$. Nós tradicionalmente chamamos tais propriedades de axiomas. Abaixo nós apresentamos três propriedades que geralmente são impostas sobre $\succsim$.

Axioma 2.1 (Reflexividade)**.** *Para toda alternativa $x \in X$, nós temos que $x \succsim x$.*

Axioma 2.2 (Completude)**.** *Para todo par de alternativas $x, y \in X$, ou $x \succsim y$, ou $y \succsim x$ (ou os dois) tem que ser verdade.*

Axioma 2.3 (Transitividade)**.** *Para todo trio de alternativas $x, y, z \in X$, se $x \succsim y$ e $y \succsim z$, então necessariamente nós temos que ter que $x \succsim z$.*

A propriedade de reflexividade simplesmente diz que qualquer alternativa x tem que ser pelo menos tão boa quanto ela mesma. Completude exige que o agente sempre seja capaz de comparar qualquer par de alternativas. Não é permitido que o agente ao se deparar com uma decisão entre x e y, por exemplo, simplesmente diga que não sabe. Finalmente, Transividade impõe uma condição de consistência entre decisões do agente. Ela diz que se o agente considera uma alternativa x pelo menos tão boa quanto uma alternativa y, e considera a alternativa y pelo menos tão boa quanto uma outra alternativa z, então o agente tem que considerar a alternativa x pelo menos tão boa quanto a alternativa z.

Quando uma relação binária $\succsim$ satisfaz Completude e Transitividade, nós dizemos que $\succsim$ é uma relação de preferências. Note que uma relação binária completa sempre satisfaz Reflexividade. Além disto, sempre que a relação $\succsim$ é transitiva, tanto a relação de indiferenças quanto a relação de preferências estritas induzidas por $\succsim$ são também transitivas.

Proposição 2.1. *Seja X um conjunto qualquer e considere uma relação binária $\succsim$ sobre X. Se $\succsim$ satisfaz Transitividade, então a relação de indiferenças $\sim$ induzida por $\succsim$ também é transitiva.*

Demonstração. Suponha que $\succsim$ seja uma relação binária que satisfaça Transitividade e pegue alternativas $x, y, z \in X$ tais que $x \sim y$ e $y \sim z$. Pela definição de $\sim$, isto é o mesmo que dizer que $x \succsim y$, $y \succsim x$, $y \succsim z$ e $z \succsim y$. Como $\succsim$ é transitiva, de $x \succsim y$ e $y \succsim z$ nós aprendemos que $x \succsim z$, e de $y \succsim x$ e $z \succsim y$ nós aprendemos que $z \succsim x$. Ou seja, $x \succsim z$ e $z \succsim x$, que é o mesmo que $x \sim z$. $\|$

Exercício 2.1. *Seja X um conjunto qualquer e considere uma relação binária $\succsim$ sobre X. Mostre que se $\succsim$ satisfaz Transitividade, então a relação de preferências estritas $\succ$ induzida por $\succsim$ também é transitiva.*

2.4 Exemplos de Relações de Preferências

Nesta seção nós veremos alguns exemplos de relações de preferências.

Exemplo 2.1 (Preferências lexicográficas)**.** Suponha que $X := \mathbb{R}^2$. Ou seja, os elementos de X são vetores da forma (x, y), em que x e y são números reais. A relação de preferências lexicográficas tem a seguinte definição: Para quaisquer dois elementos (x, y) e $(\hat{x}, \hat{y})$ em X, $(x, y) \succsim^{lex} (\hat{x}, \hat{y})$ se, e somente se, $x > \hat{x}$, ou $x = \hat{x}$ e $y \geq \hat{y}$. Ou seja, um agente com preferências lexicográficas, ao comparar duas alternativas, primeiro olha para a primeira coordenada e vê se alguma alternativa é estritamente melhor que a outra em relação a esta coordenada. Se isto ocorre, o agente simplesmente escolhe a alternativa que é melhor na primeira coordenada. Quando ocorre empate na primeira coordenada, o agente usa a segunda coordenada como critério de desempate. Por exemplo, de acordo com as preferências lexicográficas, $(2, 1) \succ^{lex} (1, 100)$ e $(1, 100) \succ^{lex} (1, 50)$.

Exercício 2.2. *Mostre que a relação de preferências lexicográficas é de fato uma relação de preferências sobre* $\mathbb{R}^2$*. Isto é, mostre que* $\succsim^{lex}$ *é completa e transitiva.*

Exemplo 2.2 (Preferências triviais)**.** Seja X um conjunto qualquer. Nós dizemos que uma relação de preferências $\succsim$ sobre X é trivial se $x \succsim y$ pra todo $x, y \in X$. Observe que isto implica que $x \sim y$ pra todo $x, y \in X$. Ou seja, um agente com preferências triviais é indiferente entre qualquer par de alternativas.

Exercício 2.3. *Existe um sentido em que podemos dizer que as preferências triviais são as maiores preferências possíveis sobre um conjunto* X *qualquer. Que sentido é este?*

Exemplo 2.3 (Ordens lineares)**.** Se $\succsim$ é uma relação de preferências sobre um determinado conjunto X tal que $x \succsim y$ e $y \succsim x$ implica que $x = y$, pra todo $x, y \in X$, nós dizemos que $\succsim$ é uma ordem linear. Observe que uma ordem linear é simplesmente uma relação de preferências que nunca exibe indiferença entre duas alternativas distintas.

Exercício 2.4. *Dê um exemplo de uma ordem linear sobre um conjunto* X *com infinitos elementos.*

2.5 Relações de Preferências e Escolhas Ótimas

Na seção anterior, nós vimos que em economia relações binárias são usadas para representar a opinião dos agentes a respeito de pares de alternativas. No entanto, no início do capítulo nós dissemos que nós estávamos interessados em modelar agentes que, de certa forma, fazem escolhas ótimas. É claro que algumas vezes os agentes têm mais que duas opções a sua disposição, o que nos faz indagar se o formalismo definido na seção anterior é também apropriado para tais situações. Se as nossas relações binárias forem relações de preferências, então a resposta é sim. Ou seja, se um agente pode ser representado por uma relação de preferências, então nós sempre podemos identificar as suas escolhas ótimas, pelo menos quando o número de opções for finito.

Seja X um conjunto qualquer e considere uma relação binária $\succsim$ sobre X. Agora, fixe um subconjunto qualquer, A, de X. Nós dizemos que uma alternativa $x \in A$ é ótima com relação a $\succsim$ se, pra toda alternativa $y \in A$, nós temos $x \succsim y$. Ou seja, x é ótima em A se x é pelo menos tão boa quanto qualquer outra alternativa em A. Nós escrevemos $\max(A, \succsim)$ para representar o conjunto de todas as alternativas que são ótimas em A com relação a $\succsim$. Em notação matemática, $\max(A, \succsim)$ é definido por $\max(A, \succsim) := \{x \in A : x \succsim y \text{ pra todo } y \in A\}$. Quando $\succsim$ é uma relação de preferências e A é um conjunto finito, então A sempre tem alternativas ótimas.

Teorema 2.1. *Seja X um conjunto qualquer e considere uma relação de preferências $\succsim$ sobre X. Se $A \subseteq X$ é um conjunto finito, então* $\max(A, \succsim) \neq \emptyset$.

Demonstração. Comece com um par de elementos qualquer $x^1, x^2 \in A$. Como $\succsim$ é completa, nós sabemos que $x^1 \succsim x^2$ ou $x^2 \succsim x^1$ tem que ser verdade. Logo, $\max(\{x^1, x^2\}, \succsim) \neq \emptyset$. Agora, pegue $x^* \in \max(\{x^1, x^2\}, \succsim)$ e pegue uma outra alternativa qualquer, x^3, distinta de x^1 e x^2, em A. Como $\succsim$ é completa, nós temos que ter ou $x^* \succsim x^3$ ou $x^3 \succsim x^*$. No primeiro caso, como nós já sabemos que $x^* \succsim x^1$ e $x^* \succsim x^2$, é claro que $x^* \in \max(\{x^1, x^2, x^3\}, \succsim)$. No segundo caso, como $\succsim$ é transitiva e nós temos $x^3 \succsim x^*$, $x^* \succsim x^1$ e $x^* \succsim x^2$, nós aprendemos que $x^3 \succsim x^1$ e $x^3 \succsim x^2$. Ou seja, $x^3 \in \max(\{x^1, x^2, x^3\}, \succsim)$. Isto mostra que $\max(\{x^1, x^2, x^3\}, \succsim) \neq \emptyset$. Nós podemos repetir tal procedimento indefinidamente, sempre chegando a um conjunto com um elemento a mais do que o anterior e que tem elementos ótimos. Como A é um conjunto finito, eventualmente o conjunto que nós obteremos será exatamente A. Consequentemente, $\max(A, \succsim) \neq \emptyset$.[2.2] ‖

Exercício 2.5. *Forneça os seguinte exemplos:*

(a) *Dê um exemplo de um conjunto A finito e uma relação binária $\succsim$ completa, mas não transitiva, tais que* $\max(A, \succsim) = \emptyset$.

(b) *Dê um exemplo de um conjunto A finito e uma relação binária $\succsim$ reflexiva e transitiva, mas não completa, tais que* $\max(A, \succsim) = \emptyset$.

2.6 Representação por Função de Utilidade

Muitas vezes as relações de preferências com que nós trabalhamos podem ser induzidas por um objeto matemático que nos é familiar. Mais especificamente, muitas vezes as relações de preferências com que trabalhamos podem ser induzidas pelo que chamamos de função de utilidade. Formalmente, nós temos a seguinte definição:

Definição 2.1. Seja X um conjunto qualquer. Nós dizemos que uma relação de preferências $\succsim$ sobre X é representada por uma determinada função $u : X \to \mathbb{R}$ se, pra todo par de alternativas $x, y \in X$, $x \succsim y$ se, e somente se, $u(x) \geq u(y)$. Neste caso, a função u é chamada de função de utilidade.

[2.2] A demonstração acima informalmente está usando a ideia de uma demonstração por indução. Uma discussão mais detalhada de tal técnica está fora do escopo do presente material. As nossas demonstrações sempre seguirão um formato mais intuitivo e menos formal.

Quando uma função u representa uma determinada preferência $\succsim$, ela nos fornece uma forma simples de testar se uma determinada alternativa x é pelo menos tão boa quanto outra alternativa y ou não. Para tanto, nós só temos que testar se o valor da função u em x é maior ou igual ao valor da função u em y.

Exemplo 2.4. Seja $X := \mathbb{R}^2$ e considere a função de utilidade $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x, y) := xy$, pra todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nós podemos definir uma relação de preferências $\succsim$ sobre $\mathbb{R}^2$ por $(x^1, y^1) \succsim (x^2, y^2)$ se, e somente se, $u(x^1, y^1) \geq u(x^2, y^2)$. Observe que, dada a definição de $\succsim$, nós temos que $(0, y^1) \sim (0, y^2)$ pra quaisquer $y^1, y^2 \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.6. *Encontre uma representação por função de utilidade para as preferências triviais apresentadas no Exemplo 2.2.*

Não é difícil perceber que o fato de que uma determinada relação de preferências tem uma representação por função de utilidade facilita muito a análise. Isto nos leva a indagar o quão restritiva é tal hipótese. Isto é, quais relações de preferências admitem uma representação por função de utilidade? Quando o conjunto de alternativas X é finito, a resposta para tal pergunta é extremamente positiva, já que qualquer relação de preferências sobre um conjunto finito admite uma representação por função de utilidade. Formalmente:

Teorema 2.2. *Seja X um conjunto finito e considere uma relação binária $\succsim \subseteq X \times X$. A relação binária $\succsim$ é uma relação de preferências (*i.e.*, é completa e transitiva) se, e somente se, existe uma função $u : X \to \mathbb{R}$ tal que, pra todo par de alternativas $x, y \in X$,*

$$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y).$$

Demonstração. Suponha primeiro que $\succsim$ seja uma relação binária sobre X e $u : X \to \mathbb{R}$ seja uma função tal que, pra todo par de alternativas $x, y \in X$,

$$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y).$$

Isto imediatamente implica que $\succsim$ é completa, já que para todo par de alternativas $x, y \in X$, nós necessariamente teremos $u(x) \geq u(y)$, ou $u(y) \geq u(x)$. Nós também podemos facilmente checar que $\succsim$ é transitiva. Para tanto, suponha que $x, y, z \in X$ sejam tais que $x \succsim y$ e $y \succsim z$. Como u representa $\succsim$, isto implica que $u(x) \geq u(y)$ e $u(y) \geq u(z)$. Mas então, $u(x) \geq u(z)$, o que implica que $x \succsim z$. Isto mostra que $\succsim$ é transitiva e, consequentemente, é uma relação de preferências.

Suponha agora que $\succsim \subseteq X \times X$ seja uma relação de preferências. Nós precisamos encontrar uma função $u : X \to \mathbb{R}$ que represente $\succsim$. Por sorte, esta não é uma tarefa muito complicada e, na verdade, várias funções podem ser usadas para tal fim. Por exemplo, nós podemos simplesmente contar quantas alternativas são piores que uma determinada alternativa. Formalmente, nós podemos definir $u : X \to \mathbb{R}$ por

$$u(x) := \left|\{y \in X : x \succsim y\}\right|,$$

pra todo $x \in X$. A notação $|\{y \in X : x \succsim y\}|$ representa a cardinalidade (*i.e.*, o número de elementos) do conjunto $\{y \in X : x \succsim y\}$. Isto é, o número de elementos y em X tais que $x \succsim y$. Vamos checar que tal função u de fato representa $\succsim$. Suponha primeiro que x e y sejam tais que $x \succsim y$. Como $\succsim$ é transitiva, para toda alternativa z tal que $y \succsim z$, nós também temos que ter $x \succsim z$. Logo, $|\{z \in X : x \succsim z\}| \geq |\{z \in X : y \succsim z\}|$ e, consequentemente, $u(x) \geq u(y)$. Suponha agora que x e y sejam tais que $u(x) \geq u(y)$. Se nós tivéssemos que $y \succ x$ (*i.e.*, $y \succsim x$, mas não é verdade que $x \succsim y$), então $|\{z \in X : y \succsim z\}| > |\{z \in X : x \succsim z\}|$, já que $y \in \{z \in X : y \succsim z\}$, mas $y \notin \{z \in X : x \succsim z\}$. Isto implicaria que $u(y) > u(x)$, o que não é verdade. Nós concluímos que $y \succ x$ não pode ser verdade. Como $\succsim$ é completa, isto implica que $x \succsim y$. Isto mostra que, pra qualquer par de alternativas $x, y \in X$,

$$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y).$$

Ou seja, u representa $\succsim$. ‖

Exercício 2.7. *Suponha que X seja um conjunto finito e $\succsim$ seja uma relação de preferências sobre X. Encontre uma função u, diferente da apresentada na demonstração do Teorema 2.2, que represente $\succsim$. Mostre que a sua função de fato representa $\succsim$.*

Quando o conjunto X não é finito, geralmente uma hipótese técnica adicional é necessária para que tenhamos a garantia de que uma relação de preferências possa ser representada por uma função de utilidade. Tal hipótese é chamada de continuidade e está relacionada ao fato de que as preferências do agente não podem mudar abruptamente. Nós não apresentaremos tal discussão aqui. Mais detalhes podem ser encontrados em Kreps (1988).

2.7 Exercícios

Exercício 2.8 (Maximização de preferências incompletas)**.** *Seja X um conjunto qualquer e seja $\succsim \subseteq X \times X$ uma relação binária que satisfaz Reflexividade e Transitividade, mas não necessariamente Completude. Neste caso, dizemos que $\succsim$ é uma preferência incompleta. Nós vimos no exercício 2.5.b que é possível que exista um problema de escolhas finito A tal que* $\max(A, \succsim) \neq \emptyset$*. Para lidarmos com tal situação, nós trabalharemos com um conceito alternativo de maximalidade. Dado um conjunto qualquer $A \subseteq X$, defina $MAX(A, \succsim) := \{x \in A :$não existe $y \in A$ com $y \succ x\}$.*

(a) Argumente que se $\succsim$ também satisfizer Completude, então $\max(A, \succsim)$ *=$MAX(A, \succsim)$ pra todo $A \subseteq X$;*

(b) Mostre que se $\succsim$ é uma preferência incompleta, então $MAX(A, \succsim) \neq \emptyset$ pra todo subconjunto finito A de X.

Capítulo 3

Teoria da Escolha

3.1 Modelos Econômicos e Testabilidade

Em economia, nós frequentemente usamos modelos para investigar os mais diversos tipos de situações. Por exemplo, no capítulo anterior nós apresentamos o modelo de um agente que maximiza uma relação de preferências, ou uma função de utilidade, na hora de fazer as suas escolhas. Já que nós fazemos uso de modelos, é natural indagarmos a respeito de o quão razoável um determinado modelo é como aproximação de uma determinada situação real. Além disto, mesmo que um modelo falhe como descrição da realidade, entender exatamente por que isto acontece pode nos ensinar muita coisa.

A resposta para o questionamento no parágrafo anterior passa necessariamente por duas considerações. Primeiramente, nós precisamos identificar que tipo de dados nós conseguimos observar e que podem ser utilizados para testar um determinado modelo. Quando estamos falando da teoria do consumidor, geralmente nós trabalhamos com a hipótese de que tudo que nós podemos observar são as escolhas que os agentes fazem em diferentes situações. Deste modo, para que possamos testar o quão razoável um determinado modelo é como representação do comportamento dos consumidores, nós precisamos primeiro entender quais são as consequências do modelo para as escolhas dos agentes econômicos em questão. Isto é, nós precisamos entender que propriedades as escolhas de um consumidor que segue um determinado modelo satisfazem. Deste modo, quando as nossas observações mostram uma violação sistemática de alguma dessas propriedades, nós podemos concluir que um determinado modelo não é uma boa descrição do comportamento dos agentes que estamos querendo modelar. Além disto, muitas vezes a natureza da propriedade que é violada por um determinado conjunto de observações nos sugere um modelo alternativo, mais apropriado para descrever o comportamente dos agentes em questão. O tipo de análise apresentada neste parágrafo é o que chamamos de uma aplicação descritiva de uma determinada teoria.

Existe ainda uma outra razão para que nós estudemos as propriedades fundamentais que um determinado modelo implica para um determinado conjunto de observações. As vezes nós temos interesse que as nossas decisões satisfaçam determinadas condições de consistência. Por exemplo, suponha que nós tenhamos que fazer várias escolhas entre pares de elementos. Se nós acreditarmos que as nossas escolhas devem ser completas e transitivas, o Capítulo 2 nos mostrou que uma forma bastante interessante de garantir isto seria maximizar uma função de utilidade. De fato, o Teorema 2.2 nos mostrou que qualquer conjunto de escolhas entre pares de elementos que satisfaça essas duas propriedades pode ser modelado como se fosse oriundo da maximização de alguma função de utilidade u. Este tipo de análise é conhecida como aplicação normativa de uma teoria.

Neste capítulo, nós faremos uma análise das propriedades que caracterizam o modelo do agente maximizador de uma relação de preferências completa (ou de uma função de utilidade), dado um conjunto de observações de escolhas abrangente e que inclui situações de escolhas com um número de elementos arbitrário.

3.2 Correspondência de Escolhas e Agentes Racionais

Seja X um conjunto qualquer. Seja Ω_X uma coleção de subconjuntos não vazios de X. Nós chamamos o par (X, Ω_X) de espaço de escolhas. A interpretação é que X é o espaço de todas as alternativas que existem e Ω_X é o espaço de possíveis problemas de escolha que o agente pode enfrentar. Ou seja, se o conjunto A pertence a Ω_X, então pode ser que seja oferecido ao agente exatamente o problema de escolher uma das alternativas do conjunto A.

Exemplo 3.1 (Espaço de escolhas finito)**.** Quando X é um conjunto finito e Ω_X é o espaço de todos os subconjuntos não vazios de X, nós chamamos (X, Ω_X) de espaço de escolhas finito.

Exemplo 3.2 (Espaço de conjuntos orçamentários)**.** Seja $X := \mathbb{R}^n_+$. Isto é, X é o espaço de vetores da forma $(x_1, ..., x_n)$ em que $x_i \geq 0$ pra todo $i = 1, ..., n$. Fixe um vetor $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ (isto é, um vetor da forma $(p_1, ..., p_n)$ em que $p_i > 0$ pra todo $i = 1, ..., n$) e um número não negativo $w \in \mathbb{R}_+$. Nós interpretamos p como um possível vetor de preços que pode ocorrer na sociedade e w como um possível nível de renda que um dado agente pode possuir. Um conjunto orçamentário tem a forma $B(p, w) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq w\}$. Intuitivamente, $B(p, w)$ é o conjunto de todas as cestas de consumo que o agente conseguiria comprar se a sua renda fosse w e o vetor de preços da economia fosse p. O espaço de conjuntos orçamentários é simplesmente o espaço de todos os possíveis conjuntos orçamentários. Isto é, $\Omega_X := \{B(p, w) : p \in \mathbb{R}^n_{++} \text{ e } w \in \mathbb{R}_+\}$.

Exercício 3.1. *Suponha que $X := \mathbb{R}^2_+$. Isto é, X é o espaço de vetores (x, y) em que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Suponha que o vetor de preços seja $p := (1, 1)$ e a renda seja $w := 1$. Represente o conjunto orçamentário $B(p, w)$ em um gráfico.*

Definição 3.1. Seja (X, Ω_X) um espaço de escolhas. Uma correspondência de escolhas c sobre (X, Ω_X) é um mapa que associa a cada problema de escolha $A \in \Omega_X$ um subconjunto não vazio $c(A) \subseteq A$.

Intuitivamente, uma correspondência de escolhas c nos diz quais são as alternativas escolhíveis para o agente em cada possível problema de escolha A. Observe que $c(A)$ é um subconjunto de A, então é possível que o agente considere mais do que uma alternativa como sendo escolhíveis no conjunto A. Tal possibilidade é permitida, pois nós precisamos lidar com o fato de que o agente pode ser indiferente entre duas alternativas.

3.2.1 Modelo de Escolhas Racional

Nós dizemos que uma correspondência de escolhas é racional se ela simplesmente maximiza alguma relação de preferências. Formalmente:

Definição 3.2. Seja (X, Ω_X) um espaço de escolhas e c uma correspondência de escolhas sobre (X, Ω_X). Nós dizemos que a correspondência de escolhas c é racional se existe uma relação de preferências $\succsim$ sobre X tal que, pra todo problema de escolha $A \in \Omega_X$, $c(A) = \max(A, \succsim)$. Neste caso, nós dizemos que $\succsim$ racionaliza c.

Uma correspondência de escolhas racional segue o modelo que nós estudamos no capítulo anterior. O agente pode ser representado por uma relação de preferências e as suas escolhas comportam-se como se o agente simplesmente maximizasse tal relação de preferências. No capítulo anterior, nós também aprendemos que quando o espaço de alternativas X é finito, qualquer relação de preferências admite uma representação por função de utilidade. Então, ao lidarmos com correspondências de escolhas quando X é finito, nós podemos dizer que uma correspondência racional maximiza alguma função de utilidade.

3.3 Teorema Fundamental da Escolha Revelada

É improvável que alguém acredite que as pessoas façam as suas escolhas de fato maximizando uma função de utilidade. Será que isto imediatamente implica que este modelo não tem utilidade para descrever o comportamento de agentes econômicos? Não necessariamente. Um modelo é sempre uma descrição simplificada e não necessariamente fiel de algum processo. Na maior parte dos casos, o mais importante é que as previsões geradas pelo modelo sejam consistentes com os dados observados.

Mesmo que algumas pessoas de fato utilizassem uma função de utilidade para tomar as suas decisões, nós não teríamos como observar o que acontece dentro da cabeça dessas pessoas para que pudéssemos confirmar tal fato. Como nós podemos testar a plausibilidade do modelo de agente racional, então? Para responder tal pergunta nós primeiro temos que definir que tipo de dados nós temos a nossa disposição e depois temos que entender quais as consequências do modelo para tais dados.

Nós faremos a nossa análise aqui sob a hipótese de que os únicos dados que nós temos disponíveis são os relativos às escolhas dos agentes. Formalmente, o nosso objeto de estudos será uma correspondência de escolhas. O nosso objetivo agora é tentar identificar que propriedades uma determinada correspondência de escolhas satisfaz quando esta pode ser modelada como se maximizasse uma relação de preferências ou função de utilidade. A propriedade abaixo parece ser interessante.

Axioma 3.1 (Axioma Fraco da Preferência Revelada)**.** *Sejam A e B dois problemas de escolha e x e y duas alternativas tais que $x, y \in A \cap B$. Se $x \in c(A)$ e $y \in c(B)$, então $x \in c(B)$.*

Na propriedade acima, existem duas alternativas, x e y, que pertencem a dois problemas de escolhas. Primeiramente, nós observamos que x é uma das alternativas escolhíveis no problema de escolha A. Posteriormente, nós vemos que y é uma das alternativas escolhíveis no problema de escolha B. A propriedade, então, demanda que x também seja uma das alternativas escolhíveis no problema de escolha B. Alternativamente, nós podemos usar a ideia de preferência revelada. Quando nós observamos que x foi escolhido em A, quando y estava disponível, nós aprendemos que x foi revelado (fracamente) preferível a y. Agora, se y é escolhível em algum outro problema de escolha que contém x, então necessariamente x também tem que ser escolhível. Observe que a propriedade implica que também será verdade que $y \in c(A)$, mas nós não precisamos escrever isto, já que x e y são apenas nomes de variáveis arbitrárias.

Não é difícil ver que se a correspondência de escolhas c de fato maximiza uma relação de preferências $\succsim$, então necessariamente c satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada. Na verdade, se Ω_X incluir todos os problemas de escolha com 3 ou menos elementos, então o Axioma Fraco da Preferência Revelada é exatamente a propriedade que caracteriza as correspondências de escolhas que podem ser modeladas como se elas maximizassem uma relação de preferências. Formalmente:

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental da Escolha Revelada)**.** *Seja (X, Ω_X) um espaço de escolhas tal que todos os subconjuntos de X com 3 ou menos elementos pertençam a Ω_X. Então, uma correspondência de escolhas c sobre Ω_X satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada se, e somente se, existe uma (única) relação de preferências $\succsim$ tal que, pra todo problema de escolha $A \in \Omega_X$,*

$$c(A) = \max(A, \succsim).$$

Demonstração. Seja (X, Ω_X) um espaço de escolhas tal que todos os subconjuntos de X com 3 ou menos elementos pertençam a Ω_X. Primeiro suponha que c é uma correspondência de escolhas sobre Ω_X tal que $c(A) = \max(A, \succsim)$, pra todo problema de escolha $A \in \Omega_X$, pra alguma relação de preferências $\succsim$ sobre X. Agora suponha que $x, y \in X$ e $A, B \in \Omega_X$ sejam tais que $x, y \in A \cap B$, $x \in c(A)$ e $y \in c(B)$. Por hipótese, isto implica que $x \succsim z$ pra todo $z \in A$. Em particular, $x \succsim y$. Isto também implica que $y \succsim z$ pra todo $z \in B$. Como $\succsim$ é transitiva e $x \succsim y$, isto implica que $x \succsim z$ pra todo $z \in B$. Logo, $x \in \max(B, \succsim) = c(B)$. Isto mostra que c satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada.

Suponha agora que c seja uma correspondência de escolhas que satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada. Nós precisamos encontrar uma relação de preferências $\succsim$ tal que $c(A) = \max(A, \succsim)$ pra todo problema de escolha $A \in \Omega_X$. Não é difícil ver que se de fato tal relação $\succsim$ existe, ela tem que ser dada por $x \succsim y$ se, e somente se, $x \in c(\{x, y\})$, afinal de contas nós precisamos que $c(\{x, y\}) = \max(\{x, y\}, \succsim)$. Considere, então, a relação binária $\succsim$ definida por $x \succsim y$ se, e somente se, $x \in c(\{x, y\})$. Fixe agora um problema de escolha $A \in \Omega_X$. Suponha que $x \in c(A)$ e pegue $y \in A$. Se $y \notin c(\{x, y\})$, então $\{x\} = c(\{x, y\})$. Caso contrário, aplicando o Axioma Fraco da Preferência Revelada com o conjunto $\{x, y\}$ fazendo o papel de B, nós obtemos que $x \in c(\{x, y\})$. Ou seja, nos dois casos nós temos que $x \succsim y$. Como x e y foram escolhidos arbitrariamente, isto mostra que $c(A) \subseteq \max(A, \succsim)$. Agora fixe $x \in \max(A, \succsim)$, que nós sabemos que é um conjunto não vazio, pelo que acabamos de mostrar. Fixe também $y \in c(A)$. Como $x \succsim y$, nós temos que $x \in c(\{x, y\})$. Agora, aplicando o Axioma Fraco da Preferência Revelada com o conjunto A aqui fazendo o papel do conjunto B no axioma e o conjunto $\{x, y\}$ fazendo o papel de A, nós obtemos que $x \in c(A)$. Como x e y foram escolhidos arbitrariamente, isto mostra que $\max(A, \succsim) \subseteq c(A)$ e, consequentemente, $c(A) = \max(A, \succsim)$. Falta apenas conferirmos que $\succsim$ é de fato uma relação de preferências.

Como $c(\{x,y\}) \neq \emptyset$ pra todo $x, y \in X$, $\succsim$ é completa. Para ver que $\succsim$ é transitiva, suponha que $x, y, z \in X$ sejam tais que $x \succsim y$ e $y \succsim z$. Se $y \in c(\{x,y,z\})$, então, como $x \in c(\{x,y\})$, o Axioma 3.1 implica que $x \in c(\{x,y,z\})$. Similarmente, se $z \in c(\{x,y,z\})$, então, como $y \in c(\{y,z\})$, o Axioma 3.1 agora implica que $y \in c(\{x,y,z\})$. Pela observação anterior, isto agora implica que $x \in c(\{x,y,z\})$. Como $c(\{x,y,z\}) \neq \emptyset$, essas duas observações implicam que necessariamente $x \in c(\{x,y,z\})$. Agora, se $z \in c(\{x,z\})$, o Axioma 3.1 implica que $x \in c(\{x,z\})$. Como $c(\{x,z\}) \neq \emptyset$, isto implica que necessariamente $x \in c(\{x,z\})$. Isto é, $x \succsim z$. Como x, y e z foram escolhidos arbitrariamente, nós concluímos que $\succsim$ é transitiva. $\|$

O Teorema Fundamental da Escolha Revelada nos mostra exatamente qual hipótese relativa às escolhas do agente caracteriza quando podemos modelá-lo como um maximizador de uma relação de preferências. Isto é, se as escolhas do agente satisfizerem o Axioma Fraco da Preferência Revelada, nós podemos modelá-lo como se este fosse um maximizador de uma relação de preferências, mesmo que na realidade este siga algum outro processo eurístico de tomada de decisão. O exemplo abaixo ilustra bem tal ponto.

Exemplo 3.3 (Escolha por lista de verificação de critérios – baseado em Mandler et al. (2012))**.** Considere o seguinte processo de tomada de decisão: O agente tem uma lista de critérios que ele sequencialmente verifica se as alternativas disponíveis satisfazem. A cada critério, ele verifica se existe alguma alternativa disponível que o satisfaz. Se existir, ele elimina todas as alternativas que não o satisfazem e passa para o próximo critério. Se não existir, ele mantém todas as alternativas restantes e passa para o próximo critério. Ele repete tal processo até chegar ao final da lista. As alternativas que sobrevivem até o final da lista são as escolhíveis no problema de escolha em questão.

Exercício 3.2. *Suponha que um gerente esteja escolhendo um sistema operacional para os computadores da sua empresa. Ele está em dúvida entre três opções: Windows, macOS e Linux. Os critérios que ele considera relevantes para a sua decisão são: Roda em Qualquer Máquina, É Estável, É Fácil de Usar. Suponha que ele vá usar uma lista de verificação de critérios com os critérios acima. Diga qual será a escolha do gerente para cada uma das ordenações dos critérios abaixo.*

(a) Roda em Qualquer Máquina, É Estável, É Fácil de Usar;

(b) É Estável, É Fácil de Usar, Roda em Qualquer Máquina;

(c) É Fácil de Usar, Roda em Qualquer Máquina, É Estável.

Exercício 3.3. *Seja X um conjunto finito com três ou mais elementos e suponha que Ω_X seja o espaço de todos os subconjuntos não vazios de X. Suponha ainda que a correspondência de escolhas c tome suas decisões usando uma lista de verificação de critérios. Argumente que c satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada.*

Continuação do Exemplo 3.3. No Exercício 3.3, nós vimos que uma correspondência de escolhas que usa um processo de lista de verificação de critérios satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada. Pelo Teorema 3.1, nós podemos encontrar uma relação de preferências $\succsim \subseteq X \times X$ tal que, pra todo problema de escolha A, $c(A) = \max(A, \succsim)$. Na verdade, como X

é finito, nós podemos até mesmo usar o Teorema 2.2, para encontrar uma função $u : X \to \mathbb{R}$, tal que c possa ser modelada como se maximizasse u. De fato, um agente que maximize tal função u é completamente indistinguível de um agente que use uma lista de verificação de critérios, se tudo que nós pudermos observar forem apenas as suas escolhas. Isto mostra que a hipótese de um agente racional, embora restritiva, talvez não seja tão restritiva assim.

Observação 3.1. Para alguém com familiaridade com alguns conceitos de matemática, o fato do processo de escolha por lista de verificação de critérios ser indistinguível do processo de maximização de uma função de utilidade não é realmente surpreendente. Se você olhar para uma lista de verificação de critérios com 5 elementos, por exemplo, você pode representá-la por uma lista de 5 zeros ou uns, em que um representa que o critério é satisfeito e zero representa que o critério não é. Porém, uma lista de zeros e uns pode ser simplesmente vista como a representação de um número em base binária. Assim, em um certo sentido, o uso do processo de escolha por lista de verificação de critérios não é apenas indistinguível do processo de maximização de função de utilidade em termos de escolhas. No fundo, eles são exatamente a mesma coisa, mas escritos de formas diferentes.

3.4 Exercícios

Exercício 3.4. *Considere um tomador de decisão que usa o seguinte procedimento: Ele divide o conjunto de alternativas em categorias. Para cada categoria ele tem uma relação de preferências que sabe comparar apenas os elementos daquela categoria. Além disto, ele tem uma preferência sobre as diversas categorias. Dado um problema de escolha, primeiro o agente usa a sua preferência sobre categorias para decidir de qual categoria ele vai fazer a escolha final. Uma vez decidida a categoria, ele usa a sua preferência sobre os elementos daquela categoria para identificar quais alternativas são escolhíveis no problema de escolha em questão. Suponha que a preferência dele sobre categorias seja sempre estrita. Isto é, o tomador de decisão não é indiferente entre nenhum par de categorias.*

(a) *Argumento que o procedimento de tomada de decisão acima satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada.;*

(b) *Se uma correspondência de escolhas que segue o procedimento acima satisfaz o Axioma Fraco da Preferência Revelada, então o Teorema Fundamental da Escolha Revelada nos garante que nós podemos representá-la como se ela maximizasse uma única relação de preferências sobre todo o conjunto de alternativas. Explique como você poderia construir tal relação de preferências a partir do procedimento descrito acima.*

Capítulo 4

Preferências sobre Cestas de Consumo

Nos capítulos anteriores nós trabalhamos sempre em ambientes bem gerais. Os nossos objetos de estudo foram relações binárias sobre um conjunto arbitrário X, ou correspondências de escolhas sobre um espaço de escolhas arbitrário (X, Ω_X). Agora nós trabalharemos em um ambiente muito mais especializado. Nós nos concentraremos no problema de um consumidor que tem preferências sobre cestas de consumo. Isto é, o consumidor tem preferências sobre vetores que indicam que quantidades ele consome de cada um dos bens existentes. A estrutura adicional existente neste tipo de ambiente nos permitirá abordar vários conceitos novos, que não tem significado nos ambientes mais abstratos dos capítulos 2 e 3.

4.1 Curvas de Indiferença e Conjuntos de Contorno

Seja X um conjunto qualquer e considere uma relação de preferências $\succsim$ sobre X. Fixe um elemento $x \in X$ qualquer. Em algumas ocasiões, será interessante caracterizarmos quais são os elementos de X que são indiferentes a x. Isto é, em algumas ocasiões será interessante caracterizarmos o conjunto $\{y \in X : x \sim y\}$. Nós vamos usar a notação $I_{\succsim}(x)$ para representar o subconjunto dos elementos de X que são indiferentes a x. Nós também teremos oportunidade de discutir os elementos de X que são (fracamente) preferíveis e preferidos a x. Nós chamamos o conjunto de elementos de X que são pelo menos tão bons quanto x de conjunto de contorno superior de x, e usamos a notação $U_{\succsim}(x)$ para representá-lo. Isto é, $U_{\succsim}(x) := \{y \in X : y \succsim x\}$. Similarmente, nós chamamos o conjunto de elementos y de X tais que x é pelo menos tão bom quanto y de conjunto de contorno inferior de x, e usamos a notação $L_{\succsim}(x)$ para representá-lo. Isto é $L_{\succsim}(x) := \{y \in X : x \succsim y\}$.

4.1.1 Cestas de Consumo de Dois Bens

Vamos agora trabalhar com um conjunto de alternativas X mais específico. Agora definiremos X como o espaço $\mathbb{R}^2_+$. Isto é, agora os objetos de escolha são vetores da forma (x, y), em que x e y são números reais não negativos. Neste caso, principalmente quando as preferências do indivíduo são representadas por uma função de utilidade, nós geralmente conseguimos representar o conjunto dos elementos de X que são indiferentes a um determinado vetor (x^*, y^*) em um gráfico. Por causa disto, nós chamamos o conjunto $I_{\succsim}(x^*, y^*)$ de *curva de* *indiferença* do indivíduo que passa pelo ponto (x^*, y^*). Os conjuntos de contorno superior e inferior podem também ser representados graficamente.

Exemplo 4.1 (Curvas de indiferença de bens substitutos perfeitos)**.** Considere um agente cuja função de utilidade seja dada por $u(x, y) := x + y$, pra todo vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$. Nós dizemos que, para tal agente, os bens x e y são substitutos perfeitos. Observe que a utilidade do agente não se altera se ele trocar uma unidade do bem x por uma unidade do bem y. Agora, fixe um ponto $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2_+$, em que $x^*, y^* > 0$. Será que nós conseguimos encontrar uma expressão que caracterize a curva de indiferença do indivíduo que passa pelo ponto (x^*, y^*)? Para tanto, suponha que (x, y) pertença a curva de indiferença do indivíduo que passe por (x^*, y^*). Ou seja $u(x, y) = u(x^*, y^*)$. Em termos da função de utilidade do agente, isto pode ser escrito como $x+y = x^*+y^*$. Se nós passarmos x para o lado direito, nós obtemos a expressão $y = x^* + y^* - x$. Ou seja, nós conseguimos escrever y como uma expressão linear de x, de modo que, para qualquer valor de x que nós pegarmos, nós conseguimos encontrar o valor de y que faz com que o vetor (x, y) seja indiferente ao vetor (x^*, y^*). Como y foi escrito como uma função linear de x, nós sabemos que a curva de indiferença do agente que passa pelo ponto (x^*, y^*) é uma reta. Mas então, nós só precisamos identificar dois pontos desta reta para que possamos representá-la graficamente. Por exemplo, é claro que se $x = 0$, então y tem que ser igual a $x^* + y^*$ para que o agente seja indiferente a esta cesta de consumo e (x^*, y^*). Isto é, $(0, x^* + y^*) \in I_{\succsim}((x^*, y^*))$. Similarmente, quando $y = 0$, nós vemos que x tem que ser igual a $x^* + y^*$ para que o agente seja indiferente entre tal cesta de consumo e (x^*, y^*). Na figura 4.1-(a), nós vemos as curvas de inferença do agente para diferentes valores de (x^*, y^*). Nós não precisamos nos limitar a representar graficamente as curvas de indiferença do agente. Nós podemos facilmente representar também os seus conjuntos de contorno superior e inferior. Nós fazemos isto na figura 4.1-(b).

Exercício 4.1. *Considere um agente cuja função de utilidade sobre* $X := \mathbb{R}^2_+$ *seja dada por* $u(x, y) := \min\{x, y\}$.

(a) *Quando o agente tem tal função de utilidade, nós dizemos que para este agente os bens* x *e* y *são complementos perfeitos. Por quê?*

(b) *Desenhe as curvas de indiferença de um agente que tem a função de utilidade acima.*

4.2 Taxa Marginal de Substituição

Seja $X := \mathbb{R}^2_+$ e considere um agente com função de utilidade $u : X \to \mathbb{R}$. Suponha que o agente esteja de posse da cesta de consumo (x^*, y^*), o que lhe dá uma utilidade de $u(x^*, y^*)$. Nós podemos perguntar, quantas unidades do bem y vale uma unidade do bem x para o agente. Em outras palavras, se nós retirarmos uma unidade de bem x do agente, quantas unidades do bem y nós temos que lhe dar em troca para que a sua utilidade permaneça mais ou menos a mesma? Mais geralmente, suponha que o agente perca (ganhe) Δx unidades do bem x. Qual a quantidade Δy do bem y que ele tem que ganhar (perder) para que a sua utilidade fique aproximadamente constante?

Do Teorema de Taylor, nós sabemos que se houverem variações pequenas de Δx unidades do bem x e de Δy unidades do bem y, a nova utilidade do agente será aproximadamente

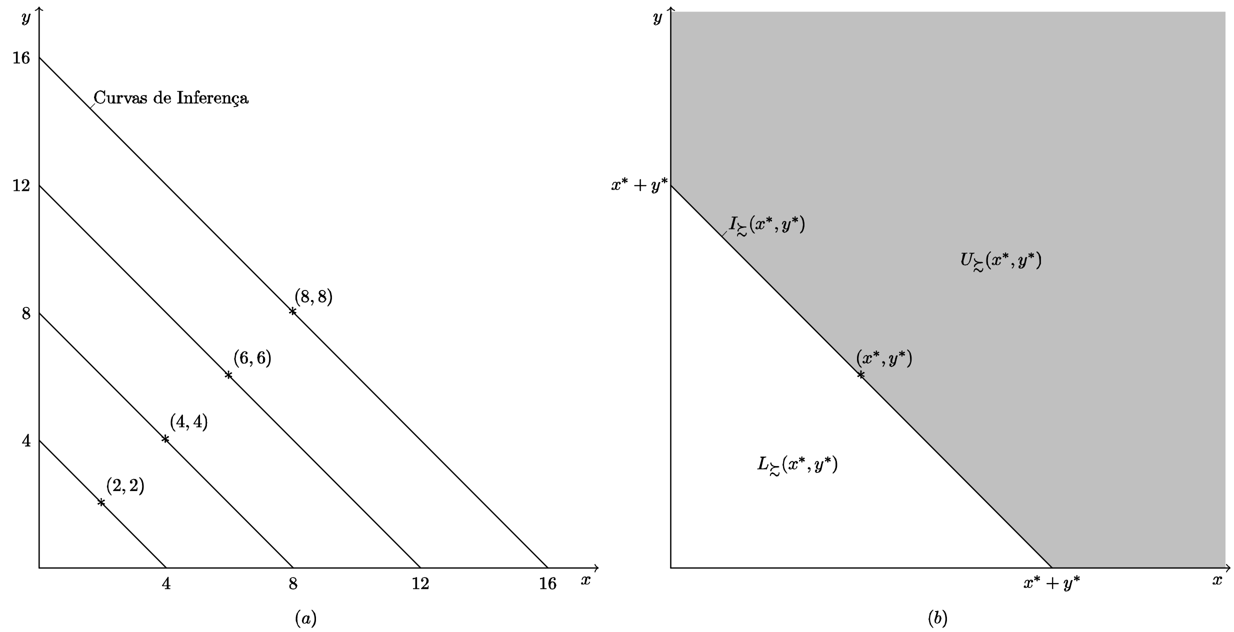

Figura 4.1: Curvas de indiferença de bens substitutos perfeitos

igual a $u(x^*, y^*) + u_x(x^*, y^*)\Delta x + u_y(x^*, y^*)\Delta y$. Nós estamos interessados no caso em que este novo valor é igual a $u(x^*, y^*)$. Ou seja, nós estamos interessados na situação em que

$$u(x^*, y^*) + u_x(x^*, y^*)\Delta x + u_y(x^*, y^*)\Delta y = u(x^*, y^*).$$

Rearranjando a expressão acima, nós chegamos na seguinte condição:

$$-\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_x(x^*, y^*)}{u_y(x^*, y^*)}.$$

Ou seja, a razão em que temos que trocar bem x pelo bem y para que a utilidade do agente permaneça mais ou menos constante, nas proximidades do ponto (x^*, y^*) é dada por $\frac{u_x(x^*,y^*)}{u_y(x^*,y^*)}$.[4.1] É exatamente este valor que nós chamamos de *taxa marginal de substituição* do agente no ponto (x^*, y^*). Nós escrevemos $TMgS(x^*, y^*)$ para representar tal valor. Uma vez mais, a intuição que nós temos que gravar é que a taxa marginal de substituição é qual o valor de uma unidade do bem x em unidades do bem y na vizinhança do ponto (x^*, y^*). Ou seja, se o agente vai perder Δx unidades do bem x, nós sabemos que, para que a sua utilidade permaneça mais ou menos constante, nós temos que lhe dar em troca $\Delta y := TMgS(x^*, y^*) * \Delta x$ unidades do bem y.

Exercício 4.2. *Encontre expressões algébricas para as taxas marginais de susbtituição das seguintes funções de utilidade, em um ponto arbitrário* (x, y) :

(a) $u(x, y) := x + y$;

[4.1] *Nota do autor:* Alguns livros definem a taxa marginal de substituição como sendo um número negativo. Isto é, alguns livros definem que $TMgS(x^*, y^*) = -\frac{u_x(x^*,y^*)}{u_y(x^*,y^*)}$.

(b) $u(x, y) := x + \sqrt{y}$;

(c) $u(x, y) := xy$;

(d) $u(x, y) := \ln x + \ln y$.

4.3 Inclinação das Curvas de Indiferença

Considere um agente com função de utilidade $u(x, y)$ sobre $\mathbb{R}^2_+$. Fixe um nível de utilidade $c \in \mathbb{R}$. Vamos agora investigar a curva de indiferença do agente associada ao nível de utilidade c. Isto é, nós vamos investigar o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : u(x, y) = c\}$. Agora, fixe um valor de x arbitrário. Nós podemos pensar em qual valor de y faz com que $u(x, y) = c$. Ao variarmos x, isto define implicitamente y como uma função de x. Para que isto fique mais claro, nós podemos escrever $u(x, y(x)) = c$. Isto é, para cada $x \in \mathbb{R}^2_+$, $y(x)$ é exatamente o valor de y que faz com que a utilidade da cesta $(x, y(x))$ seja exatamente c.

Exercício 4.3. *Encontre a função $y(x)$ que caracteriza a curva de indiferença quando as seguintes funções de utilidade obtém um valor c arbitrário:*

(a) $u(x, y) := x + y$;

(b) $u(x, y) := x + \sqrt{y}$;

(c) $u(x, y) := xy$;

(d) $u(x, y) := \ln x + \ln y$. *Neste item, considere que o nível de utilidade é $\ln c$, ao invés de c.*

Considere a expressão $u(x, y(x)) = c$ que caracteriza implicitamente a função $y(x)$ que representa a curva de indiferença do agente que gera utilidade c. Se nós derivarmos os dois lados desta expressão em relação a x, nós obtemos, usando a regra da cadeia, a expressão $u_x(x, y(x)) + u_y(x, y(x))y'(x) = 0$. Isolando $y'(x)$ nesta expressão, nós obtemos que

$$y'(x) = -\frac{u_x(x, y(x))}{u_y(x, y(x))} = -TMgS(x, y(x)).$$

Na expressão acima, nós vemos que a derivada da função y que caracteriza a curva de indiferença do agente é igual a menos a taxa marginal de substituição do agente no ponto em questão. Graficamente, isto quer dizer que a taxa marginal de substituição em um determinado ponto (x^*, y^*) é dada pelo negativo da inclinação da curva de indiferença do indivíduo no ponto (x^*, y^*). Na figura 4.2, nós vemos a representação gráfica deste fato.

Exercício 4.4. *Derive em relação a x as expressões que você encontrou no exercício 4.3 e cheque que os valores obtidos coincidem com o negativo das taxas marginais de substituição nos pontos em questão.*

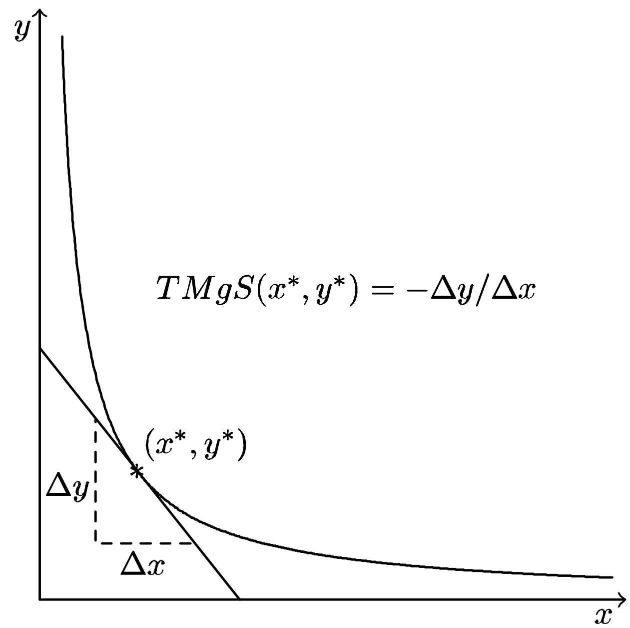

Figura 4.2: Curva de indiferença e taxa marginal de substituição

4.4 Exercícios

Exercício 4.5 (Preferências convexas). *Considere uma relação de preferências sobre o espaço de cestas de consumo de dois elementos. Formalmente, $\succsim$ é uma relação de preferências sobre $\mathbb{R}^2_+$. Nós dizemos que $\succsim$ é uma relação de preferências convexa se, pra todo par de alternativas (x^1, y^1) e (x^2, y^2) em $\mathbb{R}^2_+$ e todo número $\alpha \in (0, 1)$, se $(x^1, y^1) \succsim (x^2, y^2)$, então $\alpha(x^1, y^1) + (1 - \alpha)(x^2, y^2) \succsim (x^2, y^2)$.*

(a) *Represente graficamente as curvas de indiferença de uma preferência convexa. Tenha certeza de que você entendeu exatamente que propriedade no gráfico caracteriza a convexidade da relação de preferências $\succsim$;*

(b) *Lembre-se da definição de um conjunto convexo (se não lembrar, pesquise na internet). Mostre que uma relação de preferências $\succsim$ sobre $\mathbb{R}^2_+$ é convexa se, e somente se, pra todo ponto $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2_+$, $U_{\succsim}((x^*, y^*))$ é um conjunto convexo.*

Exercício 4.6 (Bem neutro). *Seja $\succsim$ uma relação de preferências sobre $\mathbb{R}^2_+$. Nós dizemos que x é um bem neutro se, pra todo $y \in \mathbb{R}_+$ e todo par $x, x' \in \mathbb{R}_+$, $(x, y) \sim (x', y)$. Isto é, x é um bem para o qual $\succsim$ não dá importância.*

(a) *Desenhe as curvas de indiferença de $\succsim$;*

(b) *Qual a taxa marginal de substituição de $\succsim$ em um ponto arbitrário (x, y).*

Capítulo 5

Problema do Consumidor

5.1 Introdução

Neste capítulo nós trabalharemos com um espaço de problemas de escolha bem específico. Agora, todos os problemas de escolha terão o formato que nós chamaremos de *problema do consumidor*. Como no capítulo anterior, o consumidor agora tem preferências sobre cestas de consumo. A novidade é que agora nós faremos a hipótese que o consumidor possui uma certa renda e que os diversos bens possuem preços distintos. As opções disponíveis para o consumidor são simplesmente todas as cestas de consumo que ele pode comprar dada a sua renda e o vetor de preços em questão.

O ambiente com mais estrutura com o qual nós trabalharemos neste capítulo nos permitirá discutir alguns aspectos interessantes da teoria do consumidor. Em particular, nós veremos que as escolhas ótimas do consumidor estão intimamente ligadas ao conceito de taxa marginal de substituição, que nós estudamos no capítulo anterior.

5.2 Restrição Orçamentária e Problema do Consumidor

Considere um mercado com n bens que podem ser consumidos em quaisquer quantidades não negativas. Suponha que o consumidor tenha uma renda $w \geq 0$ para gastar com esses n bens e que os preços por unidade dos bens sejam dados pelo vetor $p := (p_1, ..., p_n)$. Nós chamamos de *conjunto orçamentário* o conjunto de todas as cestas de consumo que o consumidor consegue comprar nesta situação. Isto é, o conjunto orçamentário é definido por $B(p, w) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^n p_i x^i \leq w\}$. A condição $\sum_{i=1}^n p_i x^i \leq w$ é chamada de *restrição orçamentária* do consumidor.

Suponha, também, que o consumidor tenha uma função de utilidade u que represente as suas preferências sobre as cestas de consumo $x \in \mathbb{R}^n_+$. Nós chamamos de problema do consumidor o problema que identifica as melhores cestas para o consumidor dentre aquelas que ele consegue comprar, dados o vetor de preços e a sua renda. Formalmente, nós chamamos de problema do consumidor o seguinte problema de maximização:

$$\max_{(x^1,...,x^n)} u\left(x^1, ..., x^n\right)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x^i \leq w,$$
$$x^1, ..., x^n \geq 0.$$

5.3 Solução do Problema do Consumidor

Suponha agora que estejamos em uma economia com apenas dois bens, x e y. O problema do consumidor pode ser escrito como:

$$\max_{(x,y)} u(x,y)$$

sujeito a

$$p_x x + p_y y \leq w,$$
$$x, y \geq 0.$$

Se a função de utilidade do consumidor for estritamente crescente a aumentos no consumo dos dois bens, então é claro que nós só precisamos procurar soluções para o problema entre as cestas que esgotam a renda do consumidor. Qualquer cesta que não esgote a renda do consumidor sempre será estritamente pior do que alguma cesta que a esgote. O problema do consumidor simplifica-se para

$$\max_{(x,y)} u(x,y)$$

sujeito a

$$p_x x + p_y y = w,$$
$$x, y \geq 0.$$

Isolando y na restrição orçamentária e substituindo na função objetivo, nós reduzimos o problema para um em que x é a única variável de escolha. Isto é, nós podemos simplificar o problema para

$$\max_{x} u\left(x, \frac{w - p_x x}{p_y}\right)$$

sujeito a

$$0 \leq x \leq \frac{w}{p_x},$$

em que a restrição $x \leq \frac{w}{p_x}$ corresponde à restrição $y \geq 0$ do problema original. Vamos ignorar as restrições em formato de desigualdade e trataremos o problema como um de maximização sem restrição. Isto é equivalente a assumir que o problema tem uma solução interior (que satisfaz as duas restrições com desigualdade estrita). Neste caso, sabemos que as soluções do problema satisfazem a condição de primeira ordem que consiste de derivar a função objetivo e igualar a zero. A condição de primeira ordem do problema acima é:

$$u_x\left(x, \frac{w - p_x x}{p_y}\right) - \frac{p_x}{p_y} u_y\left(x, \frac{w - p_x x}{p_y}\right) = 0.$$

Isolando $\frac{p_x}{p_y}$ na expressáo acima, nós obtemos

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{u_x\left(x, \frac{w-p_x x}{p_y}\right)}{u_y\left(x, \frac{w-p_x x}{p_y}\right)}.$$

Se prestarmos atenção, o lado direito da expressão acima nada mais é do que o que definimos no capítulo 4 como taxa marginal de substituição. Ou seja, em uma cesta que é solução do problema do consumidor a taxa marginal de substituição tem que ser exatamente igual à razão entre os preços

Voltando novamente ao Capítulo 4, lá nós vimos que a taxa marginal de subsitituição em um determinado ponto coincidia com o negativo da inclinação da curva de indiferença do consumidor no ponto em questão. Por outro lado, a razão $-\frac{p_x}{p_y}$ é exatamente a inclinação do que chamamos *reta orçamentária* do consumidor. Isto é, $-\frac{p_x}{p_y}$ é a inclinação da reta formada pelos pontos que satisfazem a restrição orçamentária com igualdade. Graficamente, isto implica que a solução do problema do consumidor ocorre em um ponto em que a curva de indiferença que passa por tal ponto é tangente à reta orçamentária.

A discussão acima é ilustrada na figura 5.1. Observe que se o consumidor estiver com uma cesta de consumo que pertença a uma curva de indiferença que passa pelo interior do conjunto orçamentário, então existem cestas que ele ainda teria condição de comprar e que lhe dariam uma maior utilidade. Por outro lado, as cestas de consumo que pertencem a curvas de indiferença que não tocam o conjunto orçamentário são inacessíveis ao consumidor, já que custam mais do que a sua renda. Deste modo, para que uma cesta de consumo seja ótima, ela necessariamente tem que pertencer a uma curva de indiferença que toque o conjunto orçamentário exatamente nela (ver Figura 5.1). Isto faz com que a curva de indiferença do consumidor seja tangente à reta orçamentária exatamente na solução do problema, o que implica que a inclinação da reta orçamentária tem que ser exatamente igual ao negativo da taxa marginal de substituição no ponto ótimo, que nós já vimos que é igual a $-p_x/p_y$.

5.4 Correspondência de Demanda

Fixe um vetor de preços $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ e uma renda $w \in \mathbb{R}_+$. Nós vamos utilizar a notação $x(p, w)$ para representar o conjunto das cestas de consumo que são solução para o problema do consumidor quando o vetor de preços é p e a renda é w. Observe que não necessariamente um problema de maximização tem uma única solução, portanto existem situações em que $x(p, w)$ é um conjunto de mais de um elemento. Se nós variarmos o par p e w, nós podemos pensar em $x(p, w)$ como um mapa que associa a cada par p e w o conjunto de cestas de consumo que são solução do problema do consumidor quando os preços são dados pelo vetor p e a renda do consumidor é w. Tal mapa é chamado de *correspondência de demanda* do consumidor.

Exemplo 5.1 (Correspondência de demanda de bens substitutos perfeitos)**.** Considere uma economia com apenas dois bens, x e y. Suponha que a função de utilidade do consumidor seja dada por $u(x, y) := x + y$, pra todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$. O problema do consumidor neste caso

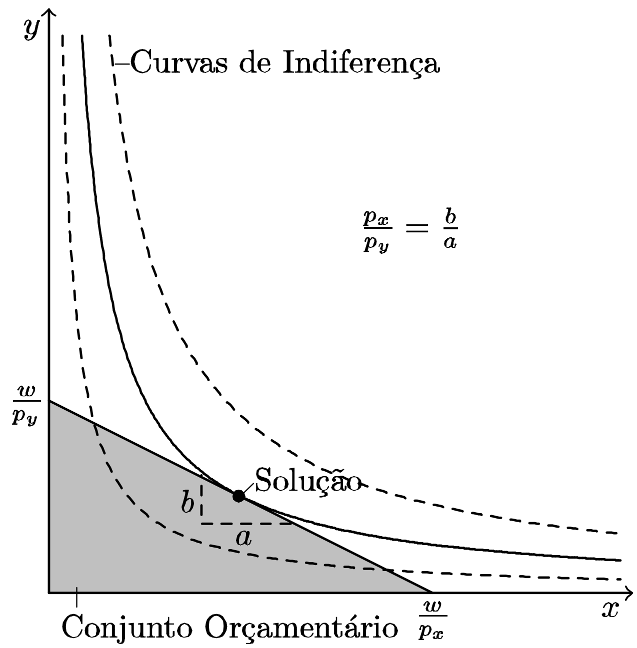

Figura 5.1: Solução do problema do consumidor

pode ser escrito como:

$$\max_{(x,y)} x + y$$

sujeito a

$$p_x x + p_y y \leq w,$$
$$x, y \geq 0.$$

Nós já vimos que para a função de utilidade acima uma unidade do bem x sempre vale exatamente a mesma coisa que uma unidade do bem y. Se nós pensarmos um pouco, é fácil ver que quando os dois bens têm preços diferentes a melhor coisa que o consumidor tem a fazer é gastar toda a sua renda no bem mais barato. Quando os dois bens têm exatamente o mesmo preço, qualquer divisão de sua renda entre os dois bens dá ao consumidor exatamente a mesma utilidade. Isto é, o problema do consumidor tem infinitas soluções. Esta discussão pode ser resumida na seguinte correspondência de demanda:

$$\{x(p,w), y(p,w)\} = \begin{cases} \{(\frac{w}{p_x}, 0)\}, \text{ se } p_x < p_y, \\ \{(0, \frac{w}{p_y})\}, \text{ se } p_y < p_x, \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : p_x x + p_y y = w\}, \text{ se } p_x = p_y. \end{cases}$$

Exemplo 5.2 (Demanda do consumidor Cobb-Douglas)**.** No Capítulo 1, nós resolvemos o problema do consumidor Cobb-Douglas usando o método do Lagrangeano. Nós fizemos isto por motivos didáticos, mas, em geral, como as restrições que aparecem no problema do consumidor são lineares, o método do Lagrangeano acaba sendo desnecessariamente complicado para resolver tal problema. Vamos agora caracterizar a correspondência de demanda do consumidor Cobb-Douglas usando o método de substituição da restrição na função objetivo, para diminuir o número de variáveis do problema.

Como dissemos acima, estamos interessados no problema do consumidor Cobb-Douglas. Isto é, estamos interessados no seguinte problema:

$$\max_{(x,y)} x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & p_x x + p_y y \leq w, \\ & x, y \geq 0, \end{aligned}$$

em que $\alpha \in (0,1)$, $p_x, p_y > 0$ e $w \geq 0$. A primeira coisa que temos que fazer é argumentar que nós só precisamos procurar soluções do problema entre cestas de consumo que satisfaçam a restrição orçamentária com igualdade. Tal fato é claro, já que a função de utilidade do consumidor é estritamente crescente em relação aos dois argumentos. Logo, se o consumidor não gasta toda a sua renda, ele sempre pode aumentar a sua utilidade comprando mais dos dois bens. Ou seja, nós podemos trabalhar com a seguinte versão simplificada do problema acima:

$$\max_{(x,y)} x^{\alpha} y^{1-\alpha}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & p_x x + p_y y = w, \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

Agora que sabemos que a restrição orçamentária tem que ser satisfeita com igualdade, nós podemos isolar y em tal condição e substituir na função objetivo. Isto reduzirá o número de variáveis no problema. Formalmente, nós ficamos com o seguinte problema:

$$\max_{x} x^{\alpha} \left(\frac{w - p_x x}{p_y} \right)^{1-\alpha}$$

sujeito a

$$0 \leq x \leq \frac{w}{p_x},$$

em que a restrição $x \leq \frac{w}{p_x}$ corresponde à restrição $y \geq 0$ do problema original. Vamos ignorar as restrições em formato de desigualdade do problema e vamos tratá-lo como um problema sem restrição. Assim, a condição de primeira ordem do problema acima passa a ser apenas

$$\alpha x^{\alpha-1} \left(\frac{w - p_x x}{p_y} \right)^{1-\alpha} - (1-\alpha) \frac{p_x}{p_y} x^{\alpha} \left(\frac{w - p_x x}{p_y} \right)^{-\alpha} = 0.$$

Passando o termo negativo para o lado direito, nós ficamos com

$$\alpha x^{\alpha-1} \left(\frac{w - p_x x}{p_y} \right)^{1-\alpha} = (1-\alpha) \frac{p_x}{p_y} x^{\alpha} \left(\frac{w - p_x x}{p_y} \right)^{-\alpha}.$$

A expressão acima pode ser simplificada para

$$\alpha\left(\frac{w-p_x x}{p_y}\right)=(1-\alpha)\frac{p_x}{p_y}x,$$

que agora pode ser simplificada para

$$\alpha\frac{w}{p_y}=\frac{p_x}{p_y}x.$$

Isolando x, nós obtemos

$$x=\alpha\frac{w}{p_x}.$$

Substituindo tal expressão para x na restrição orçamentária do problema original, em igualdade, nós obtemos

$$p_x\left(\alpha\frac{w}{p_x}\right)+p_y y=w.$$

Isolando y na expressão acima:

$$y=(1-\alpha)\frac{w}{p_y}.$$

Ou seja, a correspondência de demanda do consumidor Cobb-Douglas é dada por

$$\{x(p,w),y(p,w)\}=\{(\alpha\frac{w}{p_x},(1-\alpha)\frac{w}{p_y})\}.$$

Observe que o problema do consumidor Cobb-Douglas sempre tem uma única solução. Portanto, nós podemos pensar em sua correspondência de demanda como sendo na verdade uma função demanda. Além disto, preste atenção que a sua possui uma interpretação bastante simples. Note que o consumidor Cobb-Douglas simplesmente divide a sua renda entre os dois bens proporcionalmente ao coeficiente de cada bem na sua função de utilidade. Ou seja, uma fração α da renda do consumidor é usada para comprar o bem x e uma franção $1-\alpha$ é usada para comprar o bem y. O consumidor Cobb-Douglas é um dos mais comuns em economia, então é importante que nós memorizemos a sua função demanda. Isto fará com que, no futuro, nós economizemos muitas contas.

5.5 Exercícios

Exercício 5.1. *Encontre a correspondência de demanda do consumidor cuja função de utilidade é dada por $u(x,y):=\max\{x,y\}$. Dica: Não faça contas, use apenas lógica. Além disto, o problema é bastante parecido com o problema do consumidor com bens susbtitutos perfeitos que nós vimos acima, mas não é exatamente igual.*

Exercício 5.2 (Correspondência de demanda de bens complementos perfeitos)**.** *Encontre a correspondência de demanda do consumidor cuja função de utilidade é dada por $u(x,y):=\min\{x,y\}$. Dica: Novamente, não faça contas, use apenas lógica.*

Exercício 5.3. *Encontre a correspondência de demanda do consumidor cuja função de utilidade é dada por* $u(x, y) := x + \sqrt{y}$*. Dica: Agora não tem escapatória. Você terá que fazer contas.*

Exercício 5.4. *Ilustre graficamente as soluções dos problemas dos consumidores estudados nos exercícios 5.1, 5.2 e 5.3.*

Exercício 5.5 (Problema do consumidor com funções estritamente quase-côncavas)**.** *Nós dizemos que uma função* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é estritamente quase-côncava se, pra todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e todo* $\alpha \in (0, 1)$*,* $u(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \min\{u(x), u(y)\}$*. Mostre que se a função de utilidade do agente for estritamente quasi-côncava, então o problema do consumidor sempre tem uma única solução, pra qualquer vetor de preços* p *e renda* w*. Ou seja, neste caso nós podemos falar de uma função demanda ao invés de uma correspondência.*

Capítulo 6

Demanda

6.1 Introdução

No capítulo 5, nós estudamos o problema do consumidor. Nós vimos como a escolha ótima do consumidor depende do vetor de preços e da sua renda. Nós introduzimos também os conceitos de correspondência e função de demanda.

Agora, nós estudaremos a fundo como a demanda por um determinado bem varia com mudanças nos preços e na renda do consumidor. Na maior parte do tempo, nós trabalharemos com a hipótese de que a função de utilidade do consumidor é bem comportada, de modo que o seu problema tenha sempre uma única solução. Isto é, nós faremos a hipótese que o consumidor tem uma função demanda bem definida. Tal tipo de análise é conhecido em economia como *estática comparativa*.

6.2 Bens Normais e Bens Inferiores

Nesta seção nós estudaremo como a demanda por um determinado bem responde a variações na renda do consumidor. A nossa expectativa natural é que ao aumentarmos a renda do consumidor a quantidade que este demanda de um determinado bem aumentará. De fato, tal situação é a mais intuitiva e por isto bens cuja demanda por eles aumenta com a renda são chamados de *bens normais*.

Exemplo 6.1 (Variação da demanda com a renda para o consumidor Cobb-Douglas)**.** Considere um consumidor Cobb-Douglas. Isto é, suponha que a função de utilidade do consumidor seja definida por $u(x, y) := x^{\alpha}y^{(1-\alpha)}$, em que $\alpha \in (0, 1)$. Nós vimos no Exemplo 5.2 que, para um vetor de preços $p := (p_x, p_y)$ e uma renda w, a demanda do consumidor por cada um dos bens é dada por $x(p, w) = \alpha \frac{w}{p_x}$ e $y(p, w) = (1 - \alpha)\frac{w}{p_y}$. Claramente, a demanda pelos dois bens aumenta com a renda w. Isto é, para um consumidor Cobb-Douglas ambos os bens são normais. Na figura 6.1, nós vemos como a demanda por cada um dos bens varia com mudanças na renda. Este tipo de gráfico é conhecido como *curva de Engel*.

Apesar de ser natural esperarmos que a demanda por um determinado bem aumente quanda a renda do consumidor aumenta, a situação oposta é relativamente comum. Quando a demanda por um determinado bem diminui com um aumento na renda, nós chamamos o

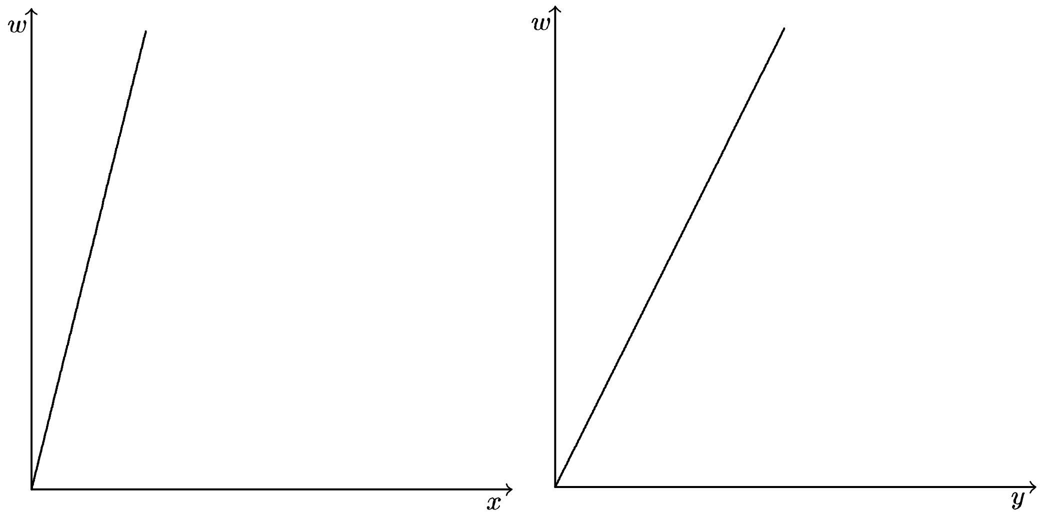

Figura 6.1: Curvas de Engel para consumidor Cobb-Douglas. Parâmetros: $\alpha = 1/2$, $p_x = 2$, $p_y = 1$.

bem de *bem inferior*. Um exemplo tradicional é o consumo de salsicha. Famílias com renda mais baixa tendem a comer bastante salsicha, por ser um tipo de carne barata. No entanto, com o aumento de renda o padrão de consumo das famílias muda e estas passam a demandar comidas mais sofisticadas, o que faz com que o consumo de salsicha destas diminua.

Em geral, a inferioridade de um bem está restrita a uma faixa de renda. No caso da salsicha, por exemplo, é provável que em faixas mais baixas de renda o seu consumo aumente com pequenos aumentos na renda. Apenas após um certo patamar na renda da família é que o consumo de salsicha passa a ter um comportamento de bem inferior. Isto é, passa a diminuir com um aumento de renda.

Exemplo 6.2 (Variação da demanda com a renda para um bem inferior)**.** Considere um consumidor com a função de utilidade $u(x, y) := \ln y - 2\ln(20 - x)$. Suponha que o vetor de preços da economia seja $(p_x, p_y) := (1, 1)$. O problema de tal consumidor, para um dado nível de renda w, é:

$$\max_{(x,y)} \ln y - 2\ln(20 - x)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x + y &\leq w, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Como a função de utilidade do consumidor é crescente em relação aos dois bens, é claro que este vai gastar toda a sua renda e, portanto, a restrição orçamentária será satisfeita com igualdade. O problema vira:

$$\max_{(x,y)} \ln y - 2\ln(20 - x)$$

sujeito a

$$x + y = w,$$
$$x, y \geq 0.$$

Nós podemos agora isolar y na restrição orçamentária e substituir na função objetivo para simplificar o problema para

$$\max_y \ln(w - x) - 2\ln(20 - x)$$

sujeito a

$$0 \leq x \leq w.$$

Vamos ignorar a restrição em formato de desigualdade e vamos tentar encontrar uma solução interior para o problema. Para tanto, tudo que temos que fazer é olhar para a condição de primeira ordem. Isto é, temos que derivar a função objetivo em relação a x e igualar a zero:

$$-\frac{1}{w - x} + \frac{2}{20 - x} = 0.$$

Isolando x na expressão acima, nós obtemos $x = 2w - 20$. Nós vemos que se $w < 10$, tal valor de x é negativo, o que viola a condição de não negatividade do bem x. Nós aprendemos, então, que para valores de w menores do que 10 o consumo do bem x será nulo. Similarmente, se $w > 20$, a condição $x \leq w$ é violada. Nós aprendemos que para valores de w superiores a 20, o consumidor gastará toda a sua renda com o bem x e não consumirá nada do bem y. Usando a restrição orçamentária para encontrarmos os valores correspondentes ao consumo do bem y para as três situações acima, nós chegamos à seguinte função demanda:

$$\{x(p, w), y(p, w)\} = \begin{cases} \{(0, w)\}, \text{ se } w \leq 10, \\ \{(2w - 20, 20 - w)\}, \text{ se } 10 \leq w \leq 20, \\ \{(w, 0)\}, \text{ se } w \geq 20. \end{cases}$$

As curvas de Engel relativas a tal caso aparecem na figura 6.2. Observe como, para valores de w entre 10 e 20, o bem y comporta-se como inferior. Na figura 6.3, nós vemos as soluções do problema do consumidor relativas a uma situação em que o bem y comporta-se como bem inferior.

6.3 Bens Comuns e Bens de Giffen

Suponha que para um determinado vetor de preços e uma determinada renda o consumidor consuma uma certa quantidade do bem y. Suponha agora que o preço do bem y diminua, enquanto a renda do consumidor e todos os outros preços permaneçam inalterados. O que acontecerá com a demanda pelo bem y? A nossa intuição nos diz que o consumo do bem y irá aumentar, já que este ficou mais barato. De fato, na maior parte das vezes é exatamente isto que ocorre e nós chamamos os bens que satisfazem tal propriedade de *bens comuns*. No entanto, em algumas situações especiais é possível que uma diminuição no preço do bem y

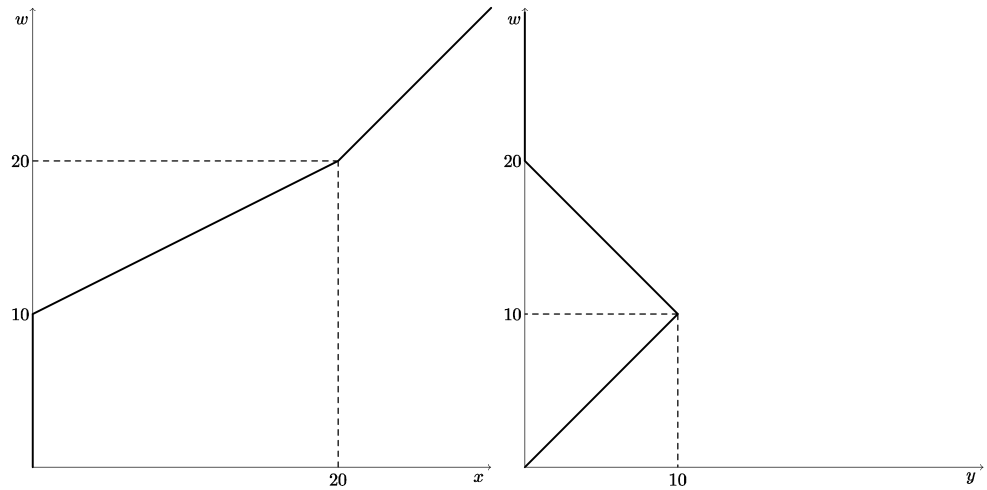

Figura 6.2: Curvas de Engel relativas ao Exemplo 6.2.

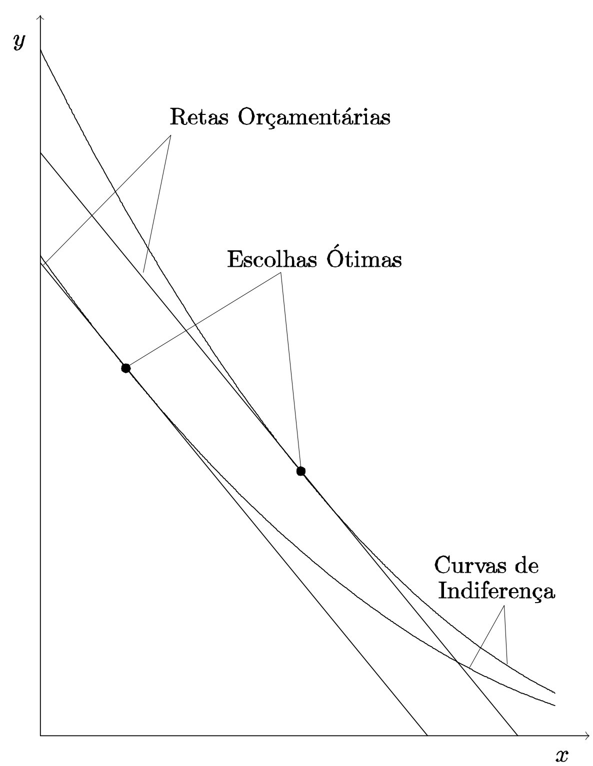

Figura 6.3: Exemplo de escolhas ótimas quando o bem y comporta-se como inferior.

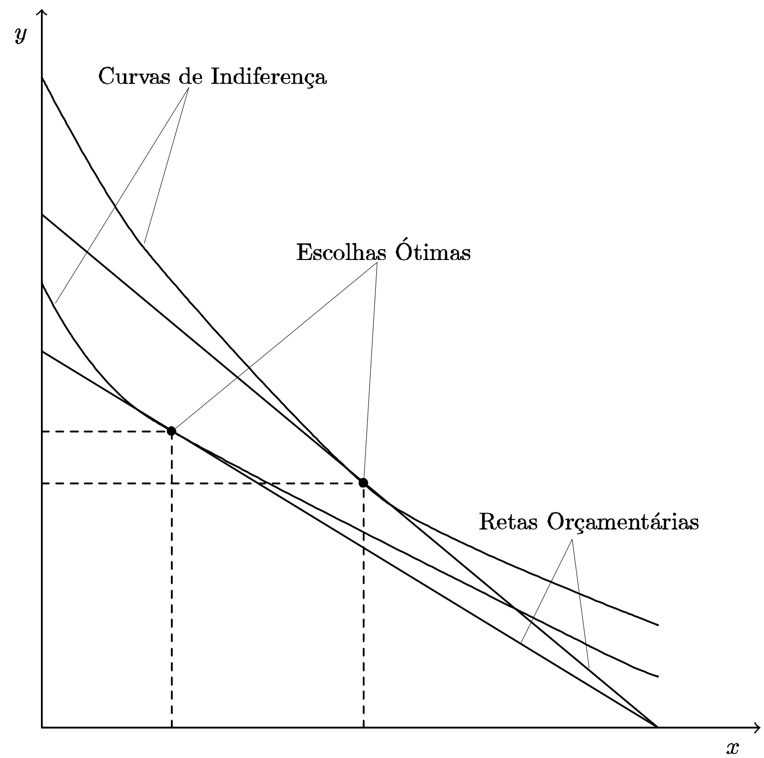

Figura 6.4: Exemplo em que o bem y exibe um comportamento de bem de Giffen.

gere também uma diminuição na demanda por tal bem. Quando isto ocorre, nós dizemos que y é um *bem de Giffen*.

Na Figura 6.4, nós vemos uma situação em que o consumo do bem y diminui com a diminuição do seu preço. Nós veremos que o conceito de bem de Giffen está intimamente relacionado com o conceito de bem inferior. Mais especificamente, ser um bem inferior é uma condição necessária para que um bem seja de Giffen. Isto é, todo bem de Giffen é um bem inferior, no entanto, nem todo bem inferior é um bem de Giffen. Intuitivamente, quando o preço do bem y diminui dois efeitos ocorrem. Primeiro, ocorre o que chamamos de *efeito subsituição*. Como y fica mais barato em comparação com o bem x, o consumidor tem uma tendência a trocar um pouco do consumo do bem x por bem y. Segundo, ocorre também o chamado *efeito renda*. Como o bem y está mais barato, com a mesma renda o consumidor consegue comprar mais dos dois bens. Em um certo sentido, o consumidor fica mais rico. Quando o bem y é inferior, um aumento na renda induz uma diminuição no consumo do bem y. Quando esta diminuição é severa a ponto de compensar o efeito substituição, ocorre o fenômeno de bem de Giffen. Nós estudaremos os conceitos de efeito substituição e efeito renda mais formalmente mais à frente.

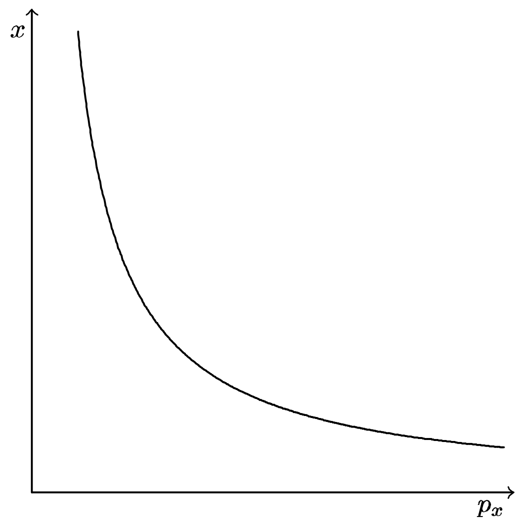

Figura 6.5: Curva de demando do consumidor Cobb-Douglas. Parâmetros: $\alpha = \frac{1}{2}$ e $w = 40$.

6.4 Curva de Demanda e Curva de Demanda Inversa

Continuando a análise da seção anterior, vamos continuar mantendo a renda do consumidor e o preço de um dos bens fixos e variar apenas o preço do outro bem. Mais especificamente, considere um consumidor com uma função de utilidade $u(x, y)$ e suponha que a sua renda w e o preço p_y do bem y estejam fixos. Suponha ainda que a função u seja bem comportada a ponto de que o problema do consumidor tenha sempre uma única solução. Nós podemos, então, investigar como a demanda pelo bem x muda com relação a variações no seu preço, p_x. De fato, se nós identificarmos, para cada possível valor de p_x a demanda $x(p_x)$ do consumidor pelo bem x, nós podemos pensar nisto como uma função. Tal função é chamada de função demanda do bem x. Quando fazemos o seu gráfico, nós muitas vezes a chamamos de curva de demanda do bem x.

Exemplo 6.3 (Função demanda do consumidor Cobb-Douglas)**.** Considere um consumidor Cobb-Douglas. Isto é, um consumidor cuja utilidade é dada por $u(x, y) := x^\alpha y^{1-\alpha}$, pra algum $0 < \alpha < 1$. Suponha que o preço do bem y e a renda do consumidor estejam fixos em p_y e w, respectivamente. Nós vimos no Exemplo 5.2 que para um determinado preço p_x do bem x a demanda por tal bem será dada por $x(p_x) = \alpha \frac{w}{p_x}$. Na Figura 6.5, nós vemos a representação gráfica de tal função.

Quando o bem x é um bem comum e, consequentemente, a sua curva de demanda tem inclinação negativa, cada valor de p_x é associado a um valor distinto $x(p_x)$. Neste caso, nós podemos também pensar em qual valor de p_x que gera a demanda x. Isto é, nós podemos escrever o preço p_x como função da demanda x. Nós escrevemos tal função como $p_x(x)$ e a chamamos de função de demanda inversa. A função de demanda inversa contém exatamente a mesma informação que a função demanda e, em geral, quando nós conhecemos uma das duas, nós podemos facilmente encontrar a outra. Em algumas ocasiões é mais conveniente trabalhar com a função demanda e em outras é mais conveniente trabalhar com a função de

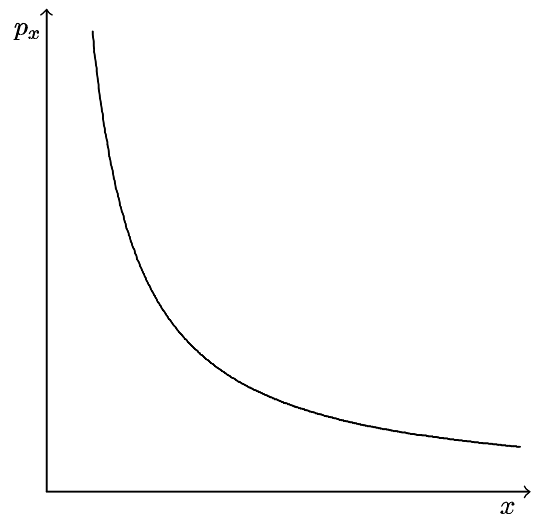

Figura 6.6: Curva de demanda inversa do consumidor Cobb-Douglas. Parâmetros: $\alpha = \frac{1}{2}$ e $w = 40$.

demanda inversa.

Exemplo 6.4 (Função demanda inversa do consumidor Cobb-Douglas)**.** No exemplo 6.3, nós vemos que a função demanda do bem x para o consumidor Cobb-Douglas era dada por $x(p_x) = \alpha \frac{w}{p_x}$. Para encontrarmos a função demanda inversa nós só temos que isolar p_x nesta expressão. Fazendo isto, nós obtemos a função $p_x(x) = \alpha \frac{w}{x}$. A representação gráfica de tal função é apresentada na Figura 6.6.

6.5 Exercícios

Exercício 6.1. *Considere um consumidor cuja função de utilidade é dada por $u(x, y) := x + y$. Suponha que o vetor de preços seja $(p_x, p_y) := (1, 2)$. Escreva as demandas do consumidor por cada um dos bens como uma função de sua renda w e represente tais funções em um gráfico. Observação: Tradicionalmente a literatura representa a curva de Engel com a demanda pelo bem aparecendo no eixo x e a renda w aparecendo no eixo y, mas aqui eu quero um gráfico com a renda w aparecendo no eixo x e a demanda por cada um dos bens aparecendo no eixo y.*

Exercício 6.2. *Repita o exercício 6.1 para a função de utilidade $u(x, y) := \min\{x, y\}$. Use o mesmo vetor de preços do exercício 6.1.*

Exercício 6.3. *Repita o exercício 6.1 para a função de utilidade $u(x, y) := x + 8\sqrt{y}$. Novamente, use o vetor de preços $(p_x, p_y) := (1, 2)$.*

Exercício 6.4. *Agora suponha que a renda do consumidor é $w := 64$ e o preço do bem y está fixo em $p_y := 4$. A função de utilidade do consumidor é dada por $u(x, y) := \min\{x, y\}$. Encontre a função demanda do bem x e a represente graficamente.*

Exercício 6.5. *Considere um consumidor cuja função de utilidade é dada por* $u(x,y) := x + 8\sqrt{y}$*. A renda* w *e o preço* p_x *são fixos em* 64 *e* 1*, respectivamente. Encontra as funções demanda e demanda inversa do bem* y *e as represente graficamente.*

Capítulo 7

Efeito Substituição e Efeito Renda

7.1 Introdução

No Capítulo 6, nós começamos a ver como a demanda por um determinado bem responde a variações em seu preço e na renda do consumidor. Agora nós formalizaremos um pouco mais esta análise. Em particular, nós faremos a decomposição do impacto de uma variação de preços na demanda em duas partes: o *efeito substituição* e o *efeito renda*.

7.2 Efeito Substituição

Quando o preço de um bem varia, há dois tipos de efeito na demanda do consumidor. Primeiro, há o chamado efeito substituição. Isto é, um dos bens fica mais caro ou mais barato, fazendo com que o consumidor tenha uma tendência a comprar menos ou mais do bem. Porém, existe também o que chamamos de efeito renda. Quando o preço de um bem diminui, por exemplo, o consumidor continua sendo capaz de comprar as mesmas cestas de consumo que ele podia comprar antes, mas pode comprar algumas outras cestas que antes estavam além da sua restrição orçamentária. É como se o consumidor tivesse também ficado um pouco mais rico.

Neste capítulo vamos assumir que a função de utilidade do consumidor é bem comportada, de modo que o seu problema tenha sempre uma única solução. Neste caso, nós podemos falar em uma função demanda do consumidor. Consideraremos, também, um mercado com apenas dois bens, x e y. Nós podemos, então, escrever as demandas por ambos os bens como função dos preços dos dois bens e da renda do consumidor. Formalmente, suponha que as funções $x(p_x, p_y, w)$ e $y(p_x, p_y, w)$ nos dêem as demandas do consumidor por cada um dos bens, quando os preços são p_x e p_y, e quando a renda é w. Suponha agora que haja uma variação no preço do bem x e este mude para $\hat{p}_x$, enquanto p_y e w permanecem constantes. Isto induzirá novas demandas pelos dois bens dadas por $x(\hat{p}_x, p_y, w)$ e $y(\hat{p}_x, p_y, w)$.

Embora isto seja apenas uma construção teórica, é instrutivo pensar que a variação na demanda do consumidor se deu em duas etapas. Primeiramente, nós podemos, de certa forma, compensar o consumidor pela variação no preço do bem x, e ajustar a sua renda de modo que esta continue sendo igual ao custo da cesta de consumo que o consumidor escolhia sob os preços originais. Isto é, defina um novo nível de renda w' por $w' := \hat{p}_x x(p_x, p_y, w) +$

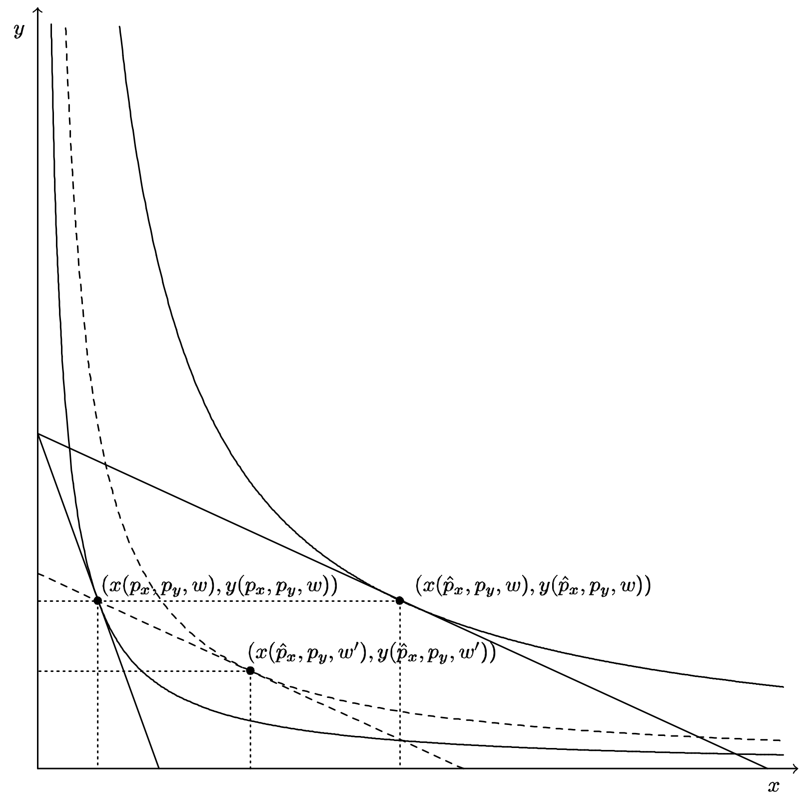

Figura 7.1: Efeito substituição e efeito renda após uma diminuição no preço do bem x.

$p_y y(p_x, p_y, w)$. Note que w' é exatamente o custo da cesta original sob os novos preços. Os efeitos substituição, em ambos os bens, da variação no preço do bem x são dados por $x(\hat{p}_x, p_y, w') - x(p_x, p_y, w)$ e $y(\hat{p}_x, p_y, w') - y(p_x, p_y, w)$.

Na Figura 7.1, nós decompomos o efeito de uma diminuição no preço do bem x, de modo que possamos identificar o efeito substituição. Originalmente, o consumidor escolhe a cesta $(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w))$. Após a dminuição no preço do bem x de p_x para $\hat{p}_x$, nós compensamos a renda do consumidor, de modo que o custo de tal cesta continue sendo exatamente igual à sua renda. Feito isto, nós identificamos qual seria a escolha ótima do consumidor em tal caso. Na figura, tal cesta está identificada por $(x(\hat{p}_x, p_y, w'), y(\hat{p}_x, p_y, w'))$. Observe que o efeito substituição é negativo, para o bem cujo preço foi alterado e positivo para o outro. Isto é, uma diminuição no preço do bem x gerou uma variação compensada positiva do bem x e uma negativa do bem y. Mais a frente, nós demonstraremos que isto não é uma particularidade do exemplo em questão. Isto é, o efeito substituição é sempre (fracamente) negativo para o bem cujo preço foi alterado.

7.3 Efeito Renda

Após esta primeira variação na demanda, identificada pelo efeito renda, nós podemos agora ajustar novamente a renda do consumidor, de modo que esta volte a ser igual a w. Isto corresponde a um deslocamento paralelo da sua reta orçamentária. Chamamos de efeito renda a diferença entre o efeito final da mudança de preço na demanda do consumidor e a sua demanda compensada. Isto é, os efeitos renda de uma variação no preço do bem x são dados por $x(\hat{p}_x, p_y, w) - x(\hat{p}_x, p_y, w')$ e $y(\hat{p}_x, p_y, w) - y(\hat{p}_x, p_y, w')$.

Na Figura 7.1, nós podemos também identificar o efeito renda gerado por uma diminuição no preço do bem x. Nós observamos que para ambos os bens o efeito é positivo. Isto ocorre apenas porque no exemplo em questão ambos os bens são normais, mas, como nós vimos na Seção 6.2, bens inferiores, nos quais o efeito renda é negativo, são relativamente comuns. De fato, nós vimos na Seção 6.3 que este pode ser forte a ponto de ofuscar totalmente o efeito substituição e fazer com que a variação total na demanda do bem que teve o seu preço alterado tenha o mesmo sinal da mudança de preço. Lembre que neste caso nós dizemos que temos uma situação de bem de Giffen.

7.4 Sinal do Efeito Substituição

Nós mencionamos acima que o sinal do efeito substituição é sempre negativo para o bem que teve o seu preço alterado. Agora nós demonstraremos formalmente este fato, usando um argumento de preferência revelada.

Teorema 7.1. *Considere um consumidor com funções demanda $x(.)$ e $y(.)$. Sob preços (p_x, p_y), e renda w, as suas demandas pelos bem x e y são dadas por $x(p_x, p_y, w)$ e $y(p_x, p_y, w)$. Suponha agora que o preço do bem x seja alterado para um novo valor $\hat{p}_x$. Se $w' := \hat{p}_x x(p_x, p_y, w) + p_y y(p_x, p_y, w)$, então $[x(\hat{p}_x, p_y, w') - x(p_x, p_y, w)](\hat{p}_x - p_x) \leq 0$.*

Demonstração. Suponha primeiro que $\hat{p}_x < p_x$. Considere agora qualquer cesta de consumo (x', y') tal que $\hat{p}_x x' + p_y y' \leq w'$ e $x' < x(p_x, p_y, w)$. Note que

$$\begin{aligned}
p_x x' + p_y y' &= p_x x' - \hat{p}_x x' + \hat{p}_x x' + p_y y' \\
&= (p_x - \hat{p}_x)x' + \hat{p}_x x' + p_y y' \\
&< (p_x - \hat{p}_x)x(p_x, p_y, w) + w' \\
&= (p_x - \hat{p}_x)x(p_x, p_y, w) + \hat{p}_x x(p_x, p_y, w) + p_y y(p_x, p_y, w) \\
&= p_x x(p_x, p_y, w) + p_y y(p_x, p_y, w) \\
&= w.
\end{aligned}$$

Isto é, qualquer cesta de consumo (x', y') com $x' < x(p_x, p_y, w)$ e que satisfaça a restrição orçamentária do problema do consumidor quando os preços são $(\hat{p}_x, p_y)$ e a renda é w', também satisfaz a restrição orçamentária do problema do consumidor quando os preços são (p_x, p_y) e a renda é w (ver Figura 7.2). Mas quando os preços são (p_x, p_y) e a renda é w, nós já sabemos que a melhor escolha para o consumidor é $(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w))$. Logo, o consumidor prefere $(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w))$ a qualquer cesta de consumo (x', y') com $x' < x(p_x, p_y, w)$ e que satisfaça a restrição orçamentária do problema do consumidor com preços $(\hat{p}_x, p_y)$ e renda w'. Como, por construção, a cesta $(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w))$ também satisfaz tal restrição orçamentária, nós vemos que o consumidor nunca escolherá uma cesta (x', y') com $x' < x$ quando os preços forem $(\hat{p}_x, p_y)$ e a renda w'. O argumento quando $\hat{p}_x > p_x$ é análogo. $\|$

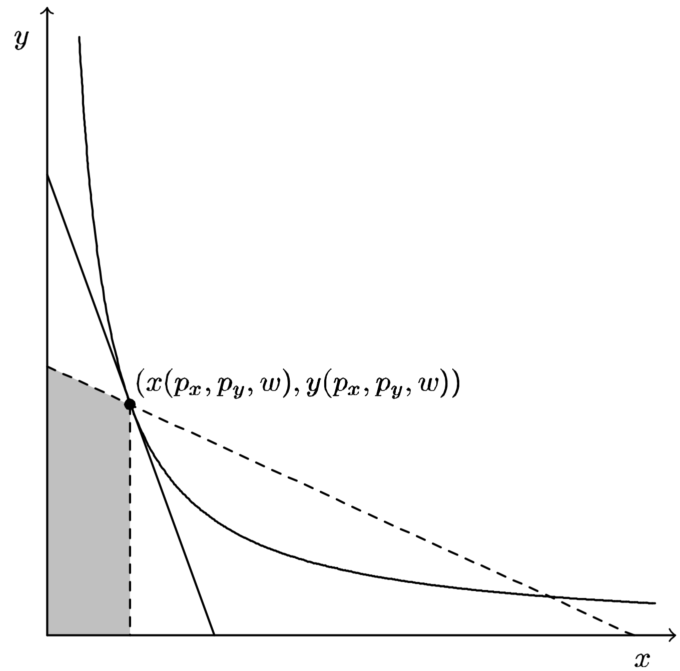

Figura 7.2: Argumento de preferência revelada para mostrar que o efeito substituição é sempre negativo. Observe que todas as cesta (x', y') com $x' < x(p_x, p_y, w)$ e que satisfazem a nova restrição orçamentária, também satisfazem a antiga.

7.5 Efeito Substituição de Hicks

O efeito substituição que nós vimos antes é conhecido como efeito substituição de Slutsky. Existe outra ideia similar, conhecida como *efeito substituição de Hicks*. Lembre que no efeito substituição de Slutsky, ao fazermos uma mudança de preços, nós ajustávamos a renda de modo que esta ficasse igual ao custo da escolha original do agente sob o novo vetor de preços. Uma ideia alternativa seria, após a mudança de preço, ajustar a renda de modo que o consumidor continue obtendo a mesma utilidade que ele obtinha com a sua escolha original.

Formalmente, suponha que o sob vetor de preços (p_x, p_y) e renda w a escolha ótima do consumidor seja $(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w))$. Agora, suponha que o preço do bem x seja alterado para $\hat{p}_x$. Nós podemos definir uma nova renda w' implicitamente através da seguinte expressão:

$$u(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w)) = u(x(\hat{p}_x, p_y, w'), y(\hat{p}_x, p_y, w')).$$

Os efeitos substituição de Hicks são dados por $x(\hat{p}_x, p_y, w') - x(p_x, p_y, w)$ e $y(\hat{p}_x, p_y, w') - y(p_x, p_y, w)$.

Graficamente, no efeito substituição de Slutsky, nós giramos a reta orçamentária ao redor da cesta ótima original (ver Figura 7.1). Já no efeito substituição de Hicks, nós rolamos a reta orçamentária sobre a curva de indiferenças que passa pela cesta ótima original, como mostra a Figura 7.3

Como no caso do efeito substituição de Slutsky, nós podemos demonstrar que o efeito

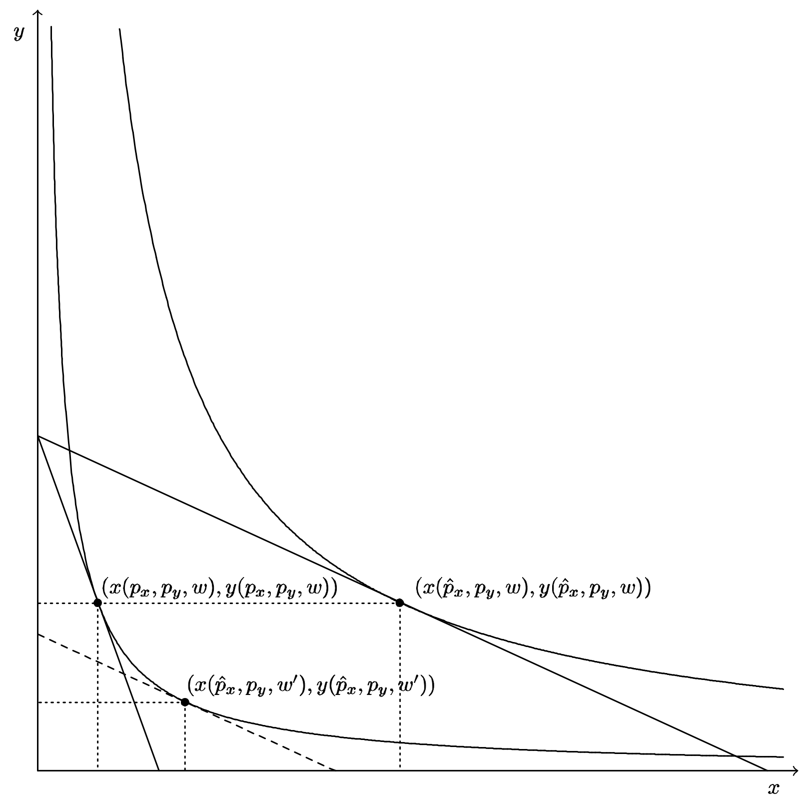

Figura 7.3: Efeito substituição de Hicks, após uma diminuição no preço do bem x.

substituição de Hicks também sempre tem sinal negativo.

Teorema 7.2. *Considere um consumidor com função de utilidade u estritamente crescente que gera funções demanda* $x(.)$ *e* $y(.)$*. Sob preços* (p_x, p_y)*, e renda* w*, as suas demandas pelos bem* x *e* y *são dadas por* $x(p_x, p_y, w)$ *e* $y(p_x, p_y, w)$*. Suponha agora que o preço do bem* x *seja alterado para um novo valor* $\hat{p}_x$*. Se* w' *é tal que*

$$u(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w)) = u(x(\hat{p}_x, p_y, w'), y(\hat{p}_x, p_y, w')),$$

então $[x(\hat{p}_x, p_y, w') - x(p_x, p_y, w)](\hat{p}_x - p_x) \leq 0$*.*

Demonstração. Suponha que para preços (p_x, p_y) e renda w as demandas do consumidor sejam dadas por $x(p_x, p_y, w)$ e $y(p_x, p_y, w)$. Suponha ainda que o preço do bem x seja alterado para um novo valor $\hat{p}_x$ e seja w' tal que

$$u(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w)) = u(x(\hat{p}_x, p_y, w'), y(\hat{p}_x, p_y, w')).$$

Se $(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w)) = (x(\hat{p}_x, p_y, w'), y(\hat{p}_x, p_y, w'))$, então nós temos que $[x(\hat{p}_x, p_y, w') - x(p_x, p_y, w)](\hat{p}_x - p_y) = 0$ e não existe nada mais a ser demonstrado. Suponha, então, que $(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w)) \neq (x(\hat{p}_x, p_y, w'), y(\hat{p}_x, p_y, w'))$. Como $(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w))$ e $(x(\hat{p}_x, p_y, w'), y(\hat{p}_x, p_y, w'))$ são as únicas escolhas ótimas nos seus respectivos conjuntos orçamentários e ambas têm a mesma utilidade, uma cesta não pode estar disponível no conjunto orçamentário da outra. Isto é, elas têm que satisfazer

$$p_x x(\hat{p}_x, p_y, w') + p_y y(\hat{p}_x, p_y, w') > w$$

e

$$\hat{p}_x x(p_x, p_y, w) + p_y y(p_x, p_y, w) > w'.$$

Como a função de utilidade do consumidor é estritamente crescente, nós sabemos que ele sempre esgotará toda a sua renda. Consequentemente, nós temos que $w = p_x x(p_x, p_y, w) + p_y y(p_x, p_y, w)$ e $w' = \hat{p}_x x(\hat{p}_x, p_y, w') + p_y y(\hat{p}_x, p_y, w')$. Substituindo isto nas expressões acima, nós ficamos com

$$p_x x(\hat{p}_x, p_y, w') + p_y y(\hat{p}_x, p_y, w') > p_x x(p_x, p_y, w) + p_y y(p_x, p_y, w)$$

e

$$\hat{p}_x x(p_x, p_y, w) + p_y y(p_x, p_y, w) > \hat{p}_x x(\hat{p}_x, p_y, w') + p_y y(\hat{p}_x, p_y, w').$$

Somando as duas expressões acima e agrupando os termos, nós obtemos

$$(\hat{p}_x - p_x)[x(\hat{p}_x, p_y, w') - x(p_x, p_y, w)] < 0.$$

Isto completa a demonstração. ‖

7.6 Exercícios

Exercício 7.1. *Considere um consumidor para quem os dois bens sejam substitutos perfeitos. Isto é,* $u(x,y) := x + y$*. Suponha que inicialmente o vetor de preços seja* $(p_x, p_y) := (4, 2)$ *e a renda seja* $w := 8$*. Suponha agora que o preço do bem* x *mude de* 4 *para* $\hat{p}_x := 1$*. Compute os efeitos substituição e renda de Slutsky e de Hicks. Ilustre a sua solução graficamente.*

Exercício 7.2. *Repita o exercício 7.1 para um consumidor para quem os dois bens sejam complementares perfeitos. Isto é, a função de utilidade do consumidor é dada por* $u(x,y) := \min\{x, y\}$*. Os preços continuam iguais aos do exercício 7.1, mas a renda do consumidor agora é* $w := 12$*.*

Exercício 7.3. *Agora suponha que a função de utilidade do consumidor seja dada por* $u(x,y) := x + 8\sqrt{y}$*. O preço do bem* x *é* $p_x := 1$*, o do bem* y *é* $p_y := 2$ *e a renda do consumidor é* $w := 16$*. Suponha agora que o preço do bem* y *mude para* $p_y := 4$*. Calcule os efeitos substituição e renda de Slutsky, para ambos os bens.*

Capítulo 8

Tecnologias de Produção

8.1 Introdução

Neste capítulo, nós começaremos a estudar o que geralmente é conhecido como *Teoria da Firma*. Nós veremos que, na maior parte do tempo, nós podemos interpretar as firmas simplesmente como sendo um tipo de consumidor que tem preferências bem específicas. Por conta disto, muitas coisas que nós vimos na Teoria do Consumidor podem facilmente ser traduzidas para o ambiente das firmas, o que facilitará muito a nossa análise.

Particularmente, nós veremos como as firmas fazem uso de alguma *tecnologia de produção* para transformar *insumos* em seus *produtos* . Fazendo uma analogia com a Teoria do Consumidor, nós veremos que os insumos são simplesmente os bens que as firmas consomem, e a função de utilidade da firma é dada simplesmente pela quantidade de produto que ela consegue produzir.

Por causa da analogia descrita no parágrafo anterior, nós veremos que apesar de alguns conceitos terem nomes diferentes quando falamos de firmas, eles são praticamente traduções imediatas de conceitos que nós vimos quando estudamos a Teoria do Consumidor. Por exemplo, nós trabalharemos com o conceito de *taxa técnica de substituição*, que nada mais é do que a ideia de taxa marginal de substituição aplicada ao ambiente de firmas.

8.2 Tecnologias e Funções de Produção

Uma firma é um agente econômico que consome certos bens, chamados insumos ou *fatores de produção*, para produzir outros bens, chamados de produtos. Suponha, por exemplo, que o processo de produção da firma faça uso de n bens. Logo, uma "cesta de consumo" da firma é simplesmente um vetor $x := (x^1, ..., x^n)$ em $\mathbb{R}^n_+$, que nos diz quanto a firma está usando de cada insumo no seu processo de produção. Suponha, também, que a firma produza um certo número k de produtos. Nós precisamos de algum meio para representarmos a *tecnologia de produção* da firma. Isto é, suponha que a firma vá utilizar um certo vetor x de insumos. Quanto de cada um dos seus produtos ela conseguirá produzir?

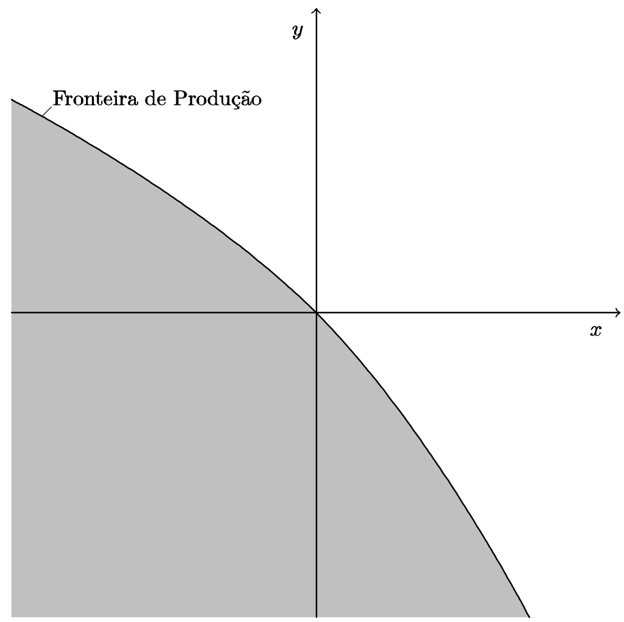

Figura 8.1: Conjunto de possibilidades do produção que satisfaz a propriedade do descarte livre.

8.2.1 Conjunto de Possibilidades de Produção

A forma mais conveniente de representar as restrições tecnológicas às quais a firma está sujeita é através do que nós chamamos de *conjunto de possibilidades de produção*. Para falarmos de conjunto de possibilidades de produção é conveniente nós ignorarmos a distinção entre insumo e produto e pensarmos apenas em um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Observe que nós estamos permitindo que um vetor $x \in X$ tenha coordenadas que assumam valores negativos. A nossa interpretação será que se para uma coordenada i o valor x^i for negativo, então significa que o bem i está sendo usado como insumo no processo de produção da firma. Se, por outro lado, para o bem j nós tivermos que $x^j > 0$, então o bem j está sendo produzido pela firma.

Nós chamaremos o conjunto X de conjunto de possibilidades de produção da firma, e faremos a hipótese de que ele satisfaz a seguinte propriedade:

Propriedade 8.1 (Descarte Livre)**.** O conjunto de possibilidades de produção X satisfaz a Propriedade do Descarte Livre se, pra quaisquer dois vetores x e y, se $x \leq y$ (*i.e.* $x^i \leq y^i$, pra $i = 1, ..., n$) e $y \in X$, então $x \in X$.

A propriedade do descarte livre simplesmente diz que se é possível produzir uma certa quantidade de produtos usando uma certa quantidade de insumos, então é possível produzir menos utilizando mais insumos. Na Figura 8.1, nós vemos um exemplo de conjunto de possibilidades de produção que satisfaz a propriedade do descarte livre. Observe como no exemplo em questão ambos os bens podem ser usados como insumos e podem ser produzidos. O limite do conjunto de possibilidades de produção é chamado de *fronteira de produção.*

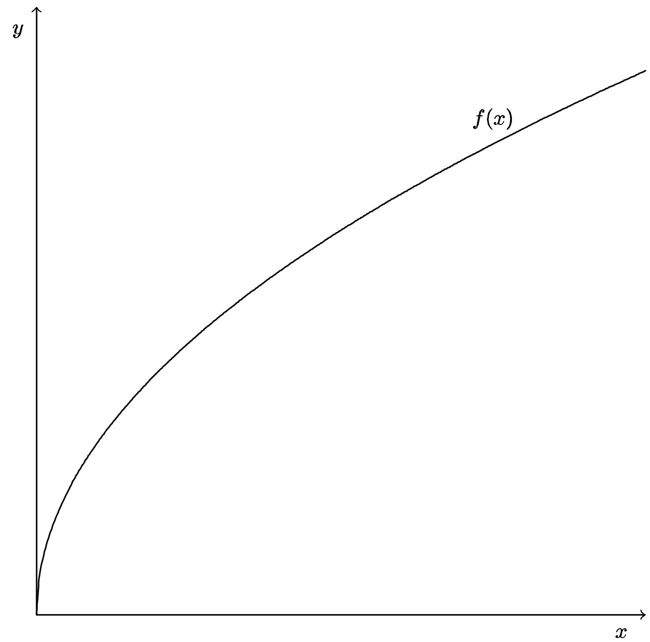

Figura 8.2: Função de produção: $y = 4\sqrt{x}$.

8.2.2 Função de Produção

Quande a firma possui um único produto e o seu conjunto de possibilidades de produção satisfaz a propriedade do descarte livre, existe uma forma conveniente de representar tal conjunto. Observe que quando o conjunto de possibilidades de produção satisfaz o descarte livre, uma vez determinada a fronteira de produção, o conjunto inteiro está identificado. É simplesmente tudo que fica abaixo da fronteira de produção.

Observe agora que, quando a firma produz um único bem e todos os outros são insumos, para encontrarmos a fronteira de produção nós só temos que descobrir qual a máxima quantidade que a firma consegue produzir com cada possível vetor de insumos. De fato, em tal caso é conveniente trabalhar com o que chamamos de *função de produção*. Considere uma firma que usa n insumos para produzir um único bem. Uma função de produção $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, é simplesmente uma função que nos diz, para cada possível vetor de insumos $(x^1, ..., x^n)$, qual é a máxima quantidade, $f(x^1, ..., x^n)$, do produto que a firma consegue produzir.

Exemplo 8.1 (Um insumo e um produto)**.** Considere uma firma que utiliza um único insumo, x, para produzir um único bem, y, através da função de produção $y := 4\sqrt{x}$. Ou seja, f nos diz qual a máxima quantidade do bem y que a firma consegue produzir quando esta utiliza uma quantidade x do seu insumo. Quando nós modelamos a firma utilizando uma função de produção, nós geralmente representamos tal função em um gráfico tradicional, em que o bem produzido aparece no eixo y. O gráfico desta função de produção aparece na Figura 8.2.

8.3 Isoquantas e Taxa Técnica de Substituição

8.3.1 Isoquantas

Considere agora uma firma que utiliza dois insumos, x e y, para produzir um único bem z. Suponha ainda que a tecnologia de produção da firma esteja representada por uma função de produção $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$. Dada uma certa quantidade z do bem que a firma produz, nós podemos nos perguntar quais combinações dos insumos x e y permitem que a máxima produção da firma seja exatamente z. Isto é, nós podemos pensar no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : f(x, y) = z\}$. Aqui é interessante que nós façamos uma analogia com a Teoria do Consumidor. Observe que nós podemos pensar na função de produção como sendo uma espécie de função de utilidade da firma. Sob esta interpretação, o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : f(x, y) = z\}$ é simplesmente a curva de indiferença da firma que lhe dá utilidade z. Quando estamos lidando com uma firma, nós chamamos tais curvas de *isoquantas*. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 8.2 (Substitutos perfeitos)**.** Assim como no caso dos consumidores, nós podemos pensar em uma firma para a qual os dois insumos sempre têm exatamente o mesmo valor no processo de produção. Em outras palavras, nós podemos pensar em uma firma em que a sua produção máxima é função apenas da soma das quantidades utilizadas dos dois insumos. Formalmente, a função de produção da firma é dada por $f(x, y) := g(x + y)$, em que g é uma função que leva dos números reais não negativos até os números reais não negativos. As isoquantas de tal função de produção têm exatamente as mesmas características das curvas de indiferença de um consumidor cujos bens são substitutos perfeitos. As isoquantas para tal tipo de firma são ilustradas na Figura 8.3.

Exemplo 8.3 (Complementares perfeitos)**.** Similarmente ao exemplo 8.2, nós podemos pensar no caso em que a tecnologia de produção da firma sempre precisa utilizar os dois bens em proporções iguais para produzir. Formalmente, a função de produção da firma é dada por $f(x, y) := g(\min\{x, y\})$, em que g é uma função que leva dos números reais não negativos até os números reais não negativos. Novamente, as isoquantas de tal função de produção têm exatamente as mesmas características das curvas de indiferença de um consumidor para o qual os dois bens são complementares perfeitos. Elas estão ilustradas na Figura 8.4.

8.3.2 Taxa Técnica de Substituição

Novamente, considere uma firma que utiliza dois insumos, x e y, para produzir um único bem z. Fixe quantidades x^* e y^* dos insumos x e y. Como nós fizemos na Teoria do Consumidor, nós podemos perguntar, quantas unidades do insumo y vale uma unidade do insumo x para a firma. Em outras palavras, se nós retirarmos uma unidade de insumo x da firma, quantas unidades do insumo y nós temos que lhe dar em troca para que ela continue produzindo mais ou menos a mesma quantidade do bem z? Mais geralmente, suponha que a firma perca (ganhe) Δx unidades do insumo x. Qual a quantidade Δy do insumo y que ela tem que ganhar (perder) para que a sua produção fique aproximadamente constante?

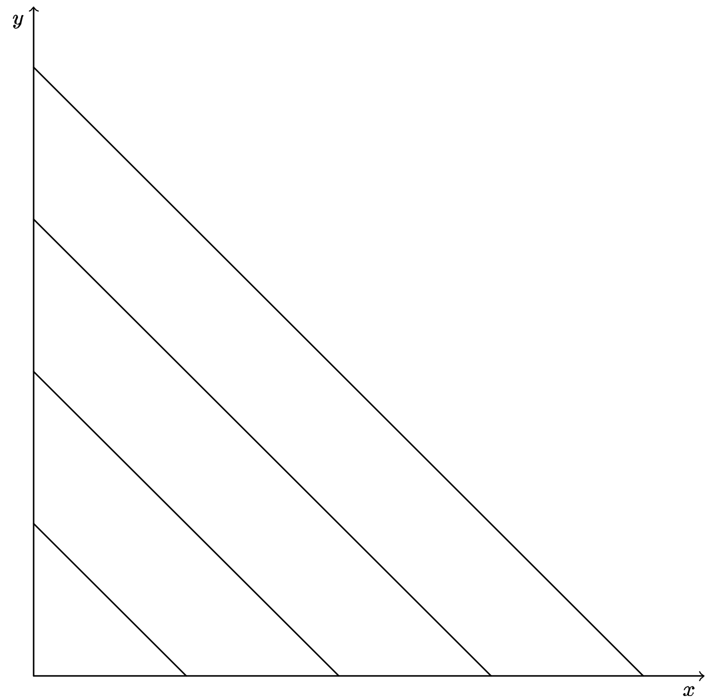

Figura 8.3: Isoquantas de uma função de produção cujos insumos são substitutos perfeitos.

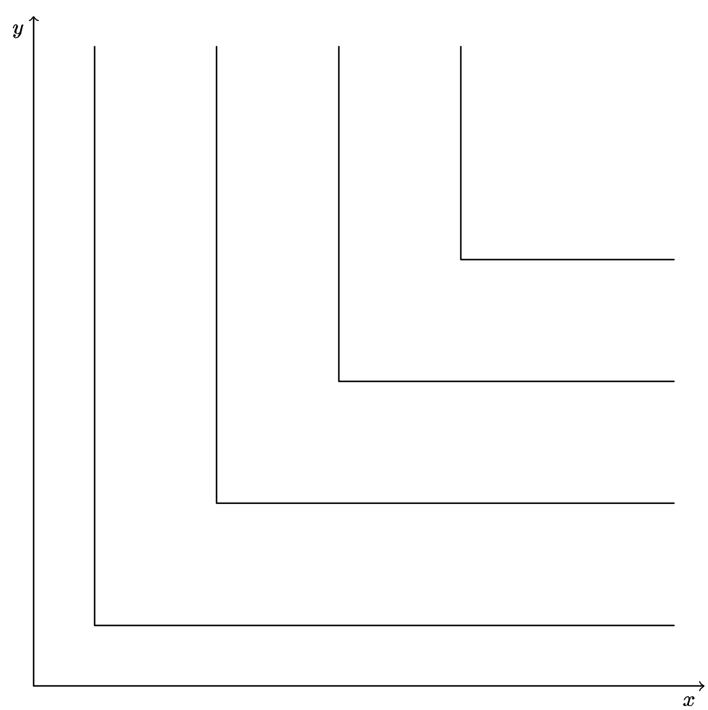

Figura 8.4: Isoquantas de uma função de produção cujos insumos são complementares perfeitos.

Lembre que, do Teorema de Taylor, nós sabemos que se houverem variações pequenas de Δx unidades do insumo x e de Δy unidades do insumo y, a nova produção da firma será aproximadamente igual a $f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)\Delta x + f_y(x^*, y^*)\Delta y$. Nós estamos interessados no caso em que este novo valor é igual a $f(x^*, y^*)$. Ou seja, nós estamos interessados na situação em que

$$f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)\Delta x + f_y(x^*, y^*)\Delta y = f(x^*, y^*).$$

Rearranjando a expressão acima, nós chegamos na seguinte condição:

$$-\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_x(x^*, y^*)}{f_y(x^*, y^*)}.$$

Ou seja, nas proximidades do ponto (x^*, y^*), a razão em que temos que trocar insumo x pelo insumo y para que a produção da firma permaneça mais ou menos constante é dada por $\frac{f_x(x^*, y^*)}{f_y(x^*, y^*)}$. É exatamente este valor que nós chamamos de *taxa técnica de substituição* da firma no ponto (x^*, y^*). Nós escrevemos $TTS(x^*, y^*)$ para representar tal valor. Mantendo a analogia com o problema do consumidor, observe que a taxa técnica de substituição nada mais é do que a ideia de taxa marginal de substituição aplicada ao mundo das firmas.

Exercício 8.1. *Repita o argumento utilizado na Teoria do Consumidor e mostre que a taxa técnica de substituição em um determinado ponto (x^*, y^*) é igual ao negativo da inclinação da isoquanta da firma que passa por (x^*, y^*).*

8.4 Exercícios

Exercício 8.2 (Rendimentos de escala)**.** *Considere uma firma com função de produção dada por $f(x, y)$. Nós dizemos que a tecnologia de produção da firma tem rendimentos constantes de escala se, pra todo número $t > 0$ e todo vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, $f(tx, ty) = tf(x, y)$. Intuitivamente, se dobrarmos a quantidade de todos os insumos, nós dobramos exatamente a quantidade produzida. Se, na verdade, nós tivermos $f(tx, ty) > tf(x, y)$, nós dizemos que a firma tem rendimentos crescentes de escala, e se $f(tx, ty) < tf(x, y)$, nós dizemos que os rendimentos de escala da firma são decrescentes. Dê exemplos de funções de produção com rendimentos constantes, crescentes e decrescentes de escala.*

Capítulo 9

Problema da Firma

9.1 Introdução

Como nós começamos a observar no capítulo 8, firmas são agentes econômicos que têm preferências bem específicas. Neste capítulo nós analisaremos as escolhas de tal tipo de agente. Nós modelaremos a firma como um agente econômico que simplesmente tenta maximizar o seu lucro e investigaremos as propriedades do que chamaremos de *problema da firma*.

9.2 Um Insumo e um Produto

Por simplicidade, vamos trabalhar inicialmente com uma firma que utiliza um insumo x para produzir um bem y. Suponha que a tecnologia de produção da firma esteja representada por uma função de produção f e que os preços do insumo e do produto estejam fixos em $p_x, p_y > 0$. Sob estas hipóteses, a firma resolverá o seguinte problema:

$$\max_x p_y f(x) - p_x x.$$

Ou seja, a firma escolhe quanto ela vai utilizar do insumo no seu processo de produção para maximizar o seu lucro.

O problema acima é um de maximização sem restrição. Nós sabemos que qualquer solução x^* do problema terá que satisfazer a seguinte condição de primeira ordem:

$$p_y f'(x^*) - p_x = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$p_y f'(x) = p_x. \tag{9.1}$$

Em palavras, a condição acima nos diz que o valor monetário da produtividade marginal do insumo x no ponto x^* deve ser igual ao preço do bem x. Vamos, então, tentar entender a intuição por trás da condição (9.1). Lembre que a produtividade marginal do insumo x no ponto x^*, $f'(x^*)$, nos diz quantas unidades do bem y uma unidade do bem x produz, na vizinhança do ponto x^*. Mais especificamente, se houver uma variação de Δx unidades do bem x (para Δx pequeno) haverá uma variação aproximada de $\Delta y := f'(x^*)\Delta x$ unidades do bem y. Agora suponha que $p_y f'(x^*) > p_x$. Neste caso, se a firma aumentar um pouco a quantidade utilizada do bem x, isto é, se houver uma variação $\Delta x > 0$, ela aumenta o seu gasto com o insumo x em $p_x \Delta x$. Por outro lado, ela aumenta a sua produção do bem y em $\Delta y = f'(x^*)\Delta x$. Mas isto aumenta a receita da firma em $p_y f'(x^*)\Delta x$ o que, como $p_y f'(x^*) > p_x$, é maior do que $p_x \Delta x$. Ou seja, a firma poderia aumentar o seu lucro aumentando um pouco a quantidade do insumo x utilizada no seu processo de produção, o que é uma contradição ao fato de que x^* é uma quantidade que maximiza o lucro da firma. Um raciocínio simétrico mostra que se $p_y f'(x^*) < p_x$, então a firma também conseguiria aumentar o seu lucro variando marginalmente a quantidade do insumo x utilizada na sua produção.

Exercício 9.1. *Utilize uma análise marginal para argumentar que se $p_y f'(x^*) < p_x$, então x^* não pode ser uma quantidade que maximiza o lucro da firma.*

9.3 Retas de Isolucro e Solução do Problema da Firma

Vamos ignorar por um momento a função de produção e vamos supor que a firma consiga produzir y^* unidades do produto utilizando uma quantidade x^* do insumo. Observe que neste caso o lucro da firma seria $\pi(y^*, x^*) = p_y y^* - p_x x^*$. Observe ainda, que vários outros pares (x, y) gerariam exatamente o mesmo lucro. De fato, qualquer par (x, y) que satisfaça $p_y y - p_x x = p_y y^* - p_x x^*$ gera o mesmo lucro que o par (x^*, y^*). Se nós isolarmos y na expressão anterior, nós obtemos que

$$y = \frac{p_x}{p_y} x + \left(y^* - \frac{p_x}{p_y} x^* \right).$$

Observe que esta é a equação de uma reta de inclinação $\frac{p_x}{p_y}$. Tais retas são conhecidas como *retas de isolucro*. Ou seja, uma reta de isolucro é uma coleção de pares (x, y) que gerariam o mesmo lucro para a firma, caso esta conseguisse produzir y unidades do produto usando x unidades do insumo.

Voltemos agora à expressão (9.1), que caracteriza a solução do problema da firma. Observe que nós podemos reescrever aquela expressão como

$$f'(x^*) = \frac{p_x}{p_y}.$$

Em palavras, a expressão acima nos diz que, na solução do problema da firma, a função de produção é tangente à reta de isolucro que passa por $(x^*, f(x^*))$. Nós ilustramos tal fato na Figura 9.1.

Intuitivamente, a firma gostaria de obter um par (x, y) em uma reta de isolucro mais alta possível. No entanto, a firma só pode obter pares (x, y) localizados sobre ou abaixo da sua função de produção. É claro, então, que para que não existam outros pares (x, y), possíveis de serem obtidos, que dêem um maior lucro à firma, a reta de isolucro que passa pela solução do problema da firma tem que ser tangente à função de produção.

Exercício 9.2. *Considere uma firma cuja função de produção seja dada por $y = f(x) := x^2$.*

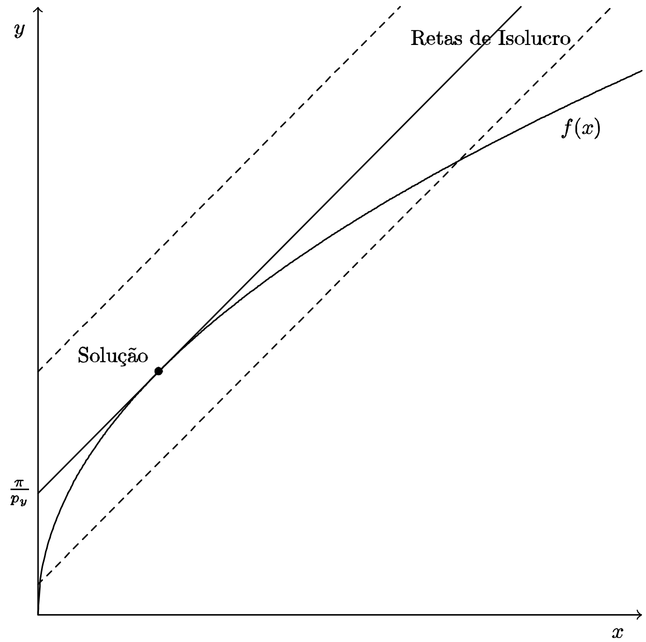

Figura 9.1: Solução do problema da firma.

(a) *Classifique tal função em relação aos rendimentos de escala (crescentes, constantes, ou decrescentes). Rendimentos de escala foram introduzidos no Exercício 8.2;*

(b) *Argumente intuitivamente (com um gráfico, por exemplo) que, independentemente do vetor de preços (p_x, p_y), o problema de maximização de lucro para uma firma com a função de produção acima jamais tem solução.*

9.4 Dois Insumos e um Produto

Suponha agora que a firma utilize dois insumos, x e y, para produzir um bem z. Suponha ainda que os preços dos bens sejam p_x, p_y e p_z, respectivamente, e que a tecnologia de produção da firma seja representada por uma função de produção f. O problema da firma agora pode ser escrito como

$$\max_{x,y} p_z f(x,y) - p_x x - p_y y$$

O problema acima é um de maximização sem restrição e sabemos que qualquer solução (x^*, y^*) do problema tem que satisfazer as seguintes condições de primeira ordem:

$$x : p_z f_x(x^*, y^*) - p_x = 0$$

e

$$y : p_z f_y(x^*, y^*) - p_y = 0.$$

As duas condições de primeira ordem acima formam um sistema com duas equações e duas incógnitas. Geralmente, para encontrar a solução do problema da firma nós só precisamos resolver tal sistema.

Exemplo 9.1 (Problema da firma Cobb-Douglas)**.** Considere uma firma cuja função de produção seja dada por $f(x,y) := x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. Suponha que os preços dos insumos sejam $p_x := 2$, $p_y := 1$ e o preço do produto seja $p_z := 3$. O problema da firma neste caso pode ser escrito como

$$\max_{x,y} 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - 2x - y.$$

As condições de primeira ordem do problema de maximização acima são

$$x : x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = 2$$

e

$$y : x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}} = 1.$$

Isolando y na primeira condição, nós obtemos que $y = 8x^2$. Substituindo na segunda, nós encontramos que $x = 1/4$. Substituindo isto na expressão que nós encontramos previamente para y, nós obtemos $y = 1/2$.

Voltemos agora às condições de primeira ordem que caracterizam a solução do problema da firma. Note que elas podem ser escritas como:

$$x : p_z f_x(x^*, y^*) = p_x \tag{9.2}$$

e

$$y : p_z f_y(x^*, y^*) = p_y. \tag{9.3}$$

Observe que a interpretação das condições acima é exatamente a mesma do caso com um único insumo. O valor monetário da produtividade marginal de cada insumo tem que ser igual ao preço do insumo. Isto também vale para a intuição por trás das condições acima. Suponha que a quantidade que a firma utiliza do bem y esteja fixa no valor y^*. Agora, nós podemos usar o mesmo raciocínio do caso com um único insumo para argumentar que se não fosse verdade que $p_z f_x(x^*, y^*) = p_x$, então a firma poderia variar marginalmente a quantidade do insumo x usada no seu processo produtivo e aumentar o seu lucro.

Exercício 9.3. *Utilize uma análise marginal para argumentar que se* (x^*, y^*) *é solução para o problema da firma no caso de dois insumos, então* (x^*, y^*) *tem que satisfazer (9.2) e (9.3).*

Capítulo 10

Minimização de Custo

10.1 Introdução

Frequentemente, é instrutivo dividir o problema da firma em duas partes. Primeiro esta encontra qual o mínimo custo para produzir cada possível quantidade do produto. De posse de tal informação, a firma decide o quanto produzir para maximizar o seu lucro. Tal abordagem é particularmente interessante, pois veremos que a oferta da firma, como função do preço do seu produto, está intimamente ligada com a sua função custo.

10.2 Problema de Minimização de Custo

Considere uma firma que utiliza dois insumos, x e y, para produzir um bem z. Suponha que a função de produção da firma seja dada por $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ e que os preços dos dois insumos estejam fixos em p_x e p_y, respectivamente. Finalmente, suponha que a firma decida produzir uma quantidade z do seu produto. O problema que identifica qual o *mínimo custo* para produzir tal quantidade do produto da firma pode ser escrito como:

$$\min p_x x + p_y y$$

sujeito a

$$f(x, y) = z$$

e

$$x, y \geq 0.$$

Vamos ignorar a restrição de não negatividade dos insumos e vamos resolver o problema como se fosse um de otimização com uma restrição em formato de igualdade. Como a restrição não é necessariamente linear, nós não poderemos usar o truque de isolar uma variável e substituir na função objetivo, que nós usamos no problema do consumidor. Aqui seremos obrigados a trabalhar com o método do Lagrangeano. O Lagrangeano do problema acima é

$$\mathcal{L} := p_x x + p_y y - \lambda(f(x, y) - z).$$

As condições de primeira ordem do problema acima são

$$x : p_x = \lambda f_x(x, y)$$

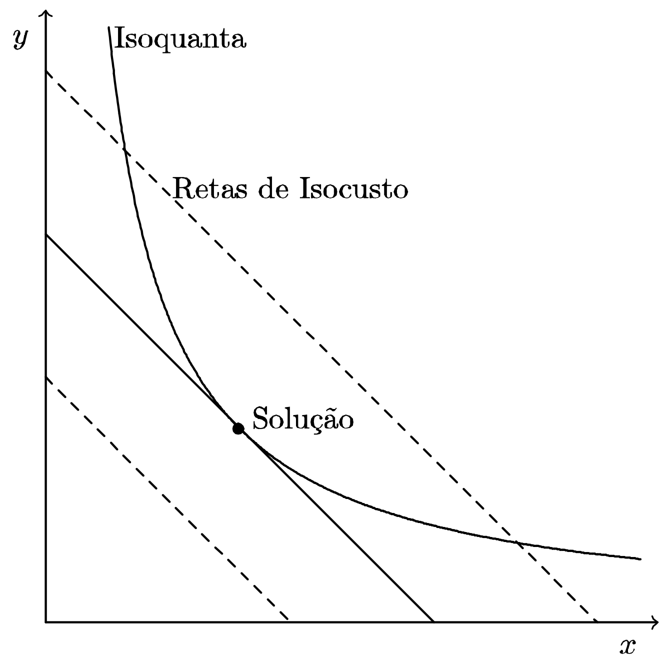

Figura 10.1: Solução do problema de minimização de custos.

$$y : p_y = \lambda f_y(x, y)$$

e

$$\lambda : f(x, y) = z.$$

Isolando λ na primeira restrição e substituindo na segunda, nós chegamos a

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}. \tag{10.1}$$

Portanto, a solução do problema de minimização de custos é caracterizada pela condição acima e a restrição $f(x, y) = z$. Nós já vimos que a razão $\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ é conhecida como Taxa Técnica de Substituição e é exatamente igual ao negativo da inclinação da isoquanta da firma que passa sobre o ponto em questão. Por outro lado, dados preços p_x e p_y, nós podemos caracterizar todas as combinações dos insumos x e y que geram o mesmo custo para firma. Isto é, nós podemos identificar todos os pares (x, y) tais que $p_x x + p_y y = c$, para algum $c > 0$. Isolando isto em tal condição, nós obtemos que $y = -\frac{p_x}{p_y}x + \frac{c}{p_y}$. Nós vemos que isto é a equação de uma reta de inclinação $-\frac{p_x}{p_y}$. Tais retas são conhecidas como *retas de isocusto* da firma. Nós vemos, então, que (10.1) está simplesmente nos dizendo que a solução do problema de minimização de custos ocorre em um ponto que a isoquanta da firma é tangente à reta de isocusto que passa pelo ponto. A Figura 10.1 ilustra tal fato.

10.3 Funções Custo e Demanda por Insumos

Considere novamente o problema de minimização de custos para a firma:

$$\min p_x x + p_y y$$

sujeito a

$$f(x, y) = z$$

e

$$x, y \geq 0.$$

Por simplicidade, vamos supor que o problema acima tenha sempre uma única solução, para todos os valores de p_x, p_y e z. Isto permite que nós representemos as demandas pelos dois insumos por funções $x(p_x, p_y, z)$ e $y(p_x, p_y, z)$. Por exemplo, a função $x(p_x, p_y, z)$ identifica qual a quantidade ótima a firma utilizará do bem x, para cada possível vetor de preços dos insumos e cada possível quantidade do produto. Similarmente, nós podemos definir uma função $c(p_x, p_y, z)$ que identifica qual o mínimo custo para a firma produzir z unidades do produto quando os preços dos insumos forem p_x e p_y.

Exemplo 10.1 (Demanda por insumo da firma Cobb-Douglas)**.** Considere o seguinte problema de minimização de custos:

$$\min p_x x + p_y y$$

sujeito a

$$x^\alpha y^\beta = z$$

e

$$x, y \geq 0,$$

em que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{++}$. Vamos ignorar as restrições de não negatividade dos insumos. Apesar da restrição ser não linear, nós podemos facilmente isolar y nela e substituir na função objetivo. Fazendo isto, nós ficamos com o seguinte problema de minimização sem restrição:

$$\min p_x x + p_y \left(z^{\frac{1}{\beta}} x^{-\frac{\alpha}{\beta}} \right)$$

A condição de primeira ordem do problema acima nos dá:

$$\frac{\alpha}{\beta} p_y z^{\frac{1}{\beta}} x^{-1-\frac{\alpha}{\beta}} = p_x.$$

Isolando x, nós encontramos a seguinte função demanda para o insumo x :

$$x(p_x, p_y, z) = \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{p_y}{px} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} z^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Substituindo tal expressão na restrição do problema original, nós encontramos a seguinte demanda para o insumo y :

$$y(p_x, p_y, z) = \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{p_x}{py} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} z^{\frac{1}{(\alpha+\beta)}}.$$

Já o custo da firma é dado por

$$c(p_x, p_y, z) = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] p_x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} p_y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} z^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

10.4 Problema da Firma

No Capítulo 9, nós vimos que o problema da firma completo era dado por

$$\max_{x,y} p_z f(x,y) - p_x x - p_y y$$

Agora nós veremos que tal problema pode ser dividido em duas partes. Primeiro, nós podemos resolver o problema de minimização de custos estudado nas seções 10.2 e 10.3. De posse da função custo e das funções demanda por insumos da firma, nós podemos agora resolver o seguinte problema:

$$\max_{z} p_z z - c(p_x, p_y, z)$$

O problema acima é de uma única variável sem restrição. A sua condição de primeira ordem é

$$c_z(p_x, p_y, z) = p_z.$$

Esta condição pode ser utilizada para encontrar a quantidade ótima do produto que a firma vai produzir. De posse de tal valor de z, agora nós só temos que utilizá-lo nas duas funções demanda por insumos que nós identificamos antes para encontrar quanto a firma vai demandar de cada insumo.

Exercício 10.1. *Resolva o problema da firma do Exemplo 9.1 utilizando a abordagem em dois passos descrita na Seção 10.4 e confira que a resposta é a mesma encontrada no exemplo em questão. Dica: Observe que o Exemplo 10.1 já fez boa parte do trabalho.*

10.5 Custo Marginal e Curva de Oferta

Vamos agora manter os preços dos dois insumos constantes. Neste caso, nós podemos pensar na função custo da firma como sendo apenas uma função da quantidade z do produto que esta vai produzir. Neste caso, quando o preço do produto é z, o problema da firma pode ser escrito simplesmente como

$$\max_{z} p_z z - c(z)$$

A condição de primeira ordem do problema acima pode ser escrita simplesmente como $c'(z) = p_z$. Nós chamamos a função c' de *custo marginal* da firma. Intuitivamente, ela mede o custo da firma para produzir mais uma unidade adicional do seu produto. Em geral, pelo menos no curto prazo, a função custo marginal é crescente. Quanto mais a firma produz, mais caro é produzir as próximas unidades. Nestas circunstâncias, o que a condição de primeira ordem do problema simplificado acima nos diz é que a firma produzirá até que o seu custo marginal se torne igual ao preço do produto. Tal fato é ilustrado na Figura 10.2. Observe que isto é bastante intuitivo. Enquanto o preço for maior do que o custo marginal da firma, a firma consegue vender unidades adicionais do produto por um valor maior do que o custo para produzi-las. Por outro lado, quando o preço é menor do que o custo marginal da firma, a firma vende unidades adicionais do produto por um valor menor do que o custo para produzi-las. Fica claro, então, que a firma vai produzir até o ponto em que o custo de uma unidade adicional seja exatamente igual ao seu preço de venda.

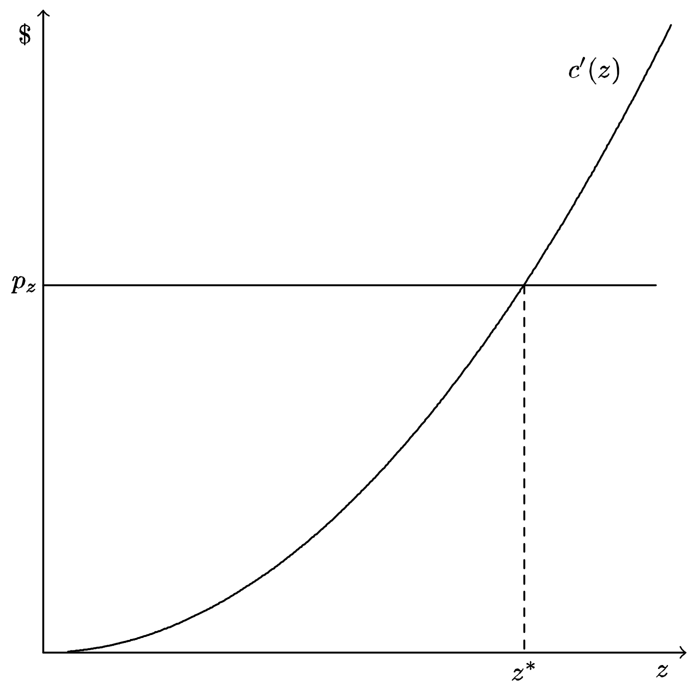

Figura 10.2: Solução do problema da firma ocorre quando o custo marginal é igual ao preço.

Nós vimos acima que a firma produzirá sempre até que o seu custo marginal se torne igual ao preço do seu produto. Isto é, até que $c'(z) = p_z$. Fazendo uma analogia com a Teoria do Consumidor e as suas funções demanda e demanda inversa, nós vemos que a função de custo marginal da firma corresponde ao que chamaríamos de *função de oferta inversa* da firma. Observe que a função custo marginal recebe como argumento uma quantidade a ser produzida e retorna exatamente o preço necessário para que a firma produza exatamente tal quantidade. Ou seja, ela funciona exatamente como uma função de oferta inversa e, de fato, nós a usaremos como tal daqui para a frente. Para completar a analogia com a teoria do consumidor, nós podemos pensar na função inversa da função custo marginal como a *função oferta* da firma. Isto é, a função $(c')^{-1}$ é exatamente a função que recebe como argumento o preço do produto e retorna que quantidade a firma produzirá sob tal preço. Trabalhar com a função oferta ou a função oferta inversa é uma questão de conveniência e, mais a frente, nós veremos que geralmente é mais conveniente trabalhar com a curva de oferta inversa.

Exercício 10.2. *Encontre a curva de oferta inversa da firma nos seguintes casos:*

(a) Os preços dos insumos são $p_x := 1$, $p_y := 2$ *e a função de produção é dada por* $f(x, y) := x + y$;

(b) Os preços dos insumos são $p_x := 1$, $p_y := 2$ *e a função de produção é dada por* $f(x, y) := \min\{x, y\}$;

(c) Os preços dos insumos são $p_x := 1$, $p_y := 2$ *e a função de produção é dada por* $f(x, y) := x + 2\sqrt{y}$.

Capítulo 11

Equilíbrio de Mercado e Medidas de Bem Estar

11.1 Introdução

Até agora nós temos nos concentrado na Teoria da Decisão Individual. Nós temos estudado como um único agente econômico toma suas decisões de forma isolada, mas, logicamente, nós estamos interessados em entender situações mais complexas e que envolvem vários agentes.

Neste capítulo, nós começaremos a estudar um modelo do que chamaremos de equilíbrio competitivo. Por simplicidade, nós começaremos estudando o que acontece no mercado de um único bem, sob a hipótese implícita de que os preços dos outros bens e a renda dos consumidores permacem constantes.

Para encerrar, nós estudaremos alguns conceitos relacionados ao bem estar dos agentes, na tentativa de obter alguma medida dos benefícios gerados pelas trocas ocorridas no mercado.

11.2 Oferta, Demanda e Equilíbrio

Na Seção 6.4, nós vimos que sob a hipótese de que os preços dos outros bens e a renda do consumidor permanecem constantes, nós podemos representar a demanda do consumidor por um determinado bem como sendo apenas função do preço deste bem. Ou seja, nós podemos encontrar uma função $q^D : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+$ que nos diz qual a demanda $q^D(p^D)$ pelo bem quando o preço deste é p^D. Aqui nós iremos um pouco além, e vamos supor que q^D é uma função que representa a soma das demandas de todos os consumidores na economia. Ou seja, $q^D(p^D)$ é a demanda total na economia pelo bem quando o preço é p^D. Como já discutimos na Seção 6.4, muitas vezes é mais conveniente trabalhar com a inversa da função q^D. Ou seja, é mais conveniente trabalhar com uma função $p^D : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_{++}$ que nos diz qual deve ser o preço $p^D(q^D)$ do bem para que a demanda por este seja exatamente igual a q^D. Lembre que nós chamamos tal função de função de demanda inversa.

Similarmente ao que fizemos na Seção 6.4, na Seção 10.5 nós vimos que, sob a hipótese de que os preços dos insumos permanecem constantes, nós podemos modelar a firma por uma função de oferta $q^S : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+$ que nos diz qual a quantidade $q^S(p^S)$ do bem que a firma oferece quando o preço deste é p^S. Como no caso dos consumidores, aqui nós

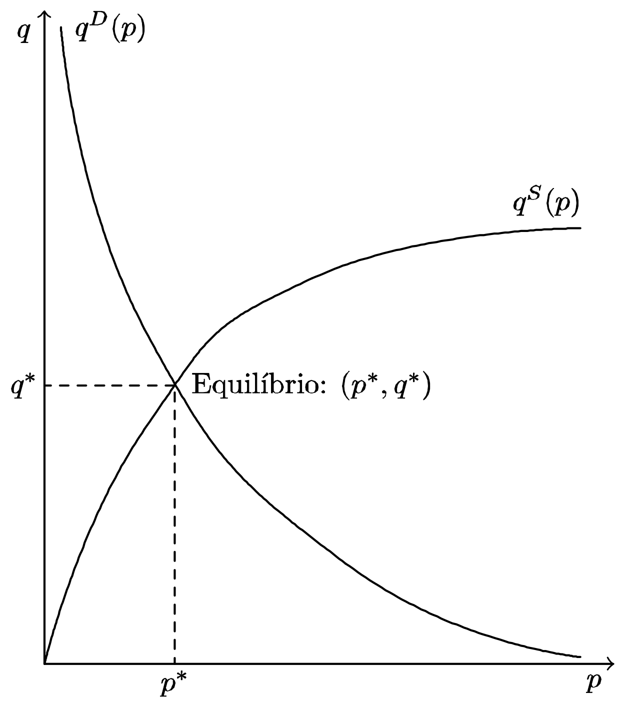

Figura 11.1: Equilíbrio de mercado.

faremos a hipótese de que q^S é uma função que representa a soma das ofertas de todas as firmas produtoras do bem em questão. Também no caso das firmas, muitas vezes será mais conveniente trabalhar com a inversa da função q^S. Ou seja, muitas vezes será mais conveniente trabalhar com uma função $p^S : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_{++}$ que nos diz qual deve ser o preço $p^S(q^S)$ para que a firma produza exatamente a quantidade q^S do bem. Lembre que nós chamamos tal função de função de oferta inversa.

Suponha agora que para um determinado preço p nós tenhamos que $q^D(p) > q^S(p)$. Ou seja, sob o preço p os consumidores demandam mais do bem do que as firmas estão dispostas a produzir. Neste caso, é natural esperarmos que isto gere uma pressão para cima no preço do bem e este aumente. Similarmente, se $q^D(p) < q^S(p)$, provavelmente haverá uma pressão para baixo no preço do bem e este cairá. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 11.1. Dizemos que um preço $p \in \mathbb{R}_{++}$ *equilibra* o mercado se $q^D(p) = q^S(p)$.

A definição acima simplesmente diz que um preço é de equilíbrio se ele faz com que a oferta e a demanda pelo bem se igualem. Assim, para encontrarmos o preço que equilibra os mercados, nós só temos que identificar o ponto em que as curvas de oferta e demanda pelo bem se cruzam. A Figura 11.1 ilustra tal fato.

11.3 Excedentes do Consumidor e do Produtor

Considere uma economia de um único bem com funções de demanda e oferta q^D e q^S, respectivamente. Suponha que tal economia esteja em equilíbrio e o preço e quantidade de

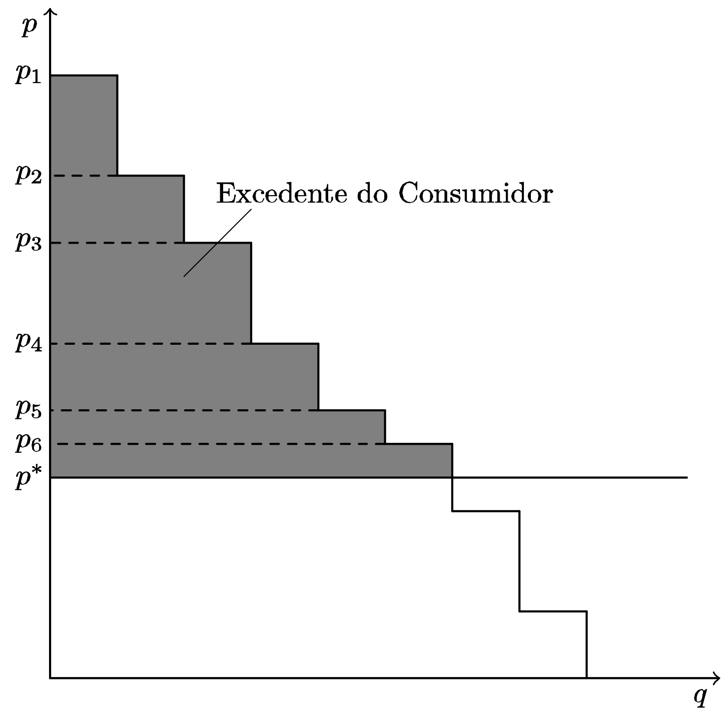

Figura 11.2: Excedente do consumidor para um bem discreto.

equilíbrio sejam p^* e q^*. Como podemos medir o benefício que a existência deste mercado gera aos consumidores? Para fazer isto, vamos primeiro supor que a curva de demanda representa um único consumidor e que esta seja a curva de demanda de um bem que é consumido em quantidades discretas. Além disto, aqui será mais instrutivo trabalharmos com a curva de demanda inversa do bem. Na Figura 11.2, nós vemos um exemplo de uma curva de demanda inversa para um bem que é vendido em quantidades discretas e também ilustramos o preço de equilíbrio pelo qual o bem acaba sendo comercializado.

Na figura, nós vemos que a curva de demanda inversa se inicia em um preço bem superior ao preço de equilíbrio, p^*. Isto é, o máximo preço, p_1 que o consumidor aceitaria pagar pela primeira unidade do bem é bem superior ao preço de equilíbrio, p^*. De certa forma, a existência do mercado propiciou ao consumidor um benefício monetário de $p_1 - p^*$ unidades monetárias com o consumo da primeira unidade do bem. Similarmente, com a segunda unidade, o benefício do consumidor foi de $p_2 - p^*$. Nós chamamos de *excedente do consumidor* a soma dos benefícios monetários do consumidor com todas as unidades consumidas. Graficamente, isto é simplesmente a área da curva de demanda inversa do consumidor que fica acima do preço de equilíbrio. Isto é, a área cinza na Figura 11.2.

Nós fizemos a análise acima olhando para uma curva de demanda inversa de um bem vendido em quantidades discretas e interpretando-a como sendo a curva de demanda inversa de um único consumidor. Nós vamos usar exatamente a mesma definição quando trabalharmos com bens divisíveis e quando a curva de demanda inversa representar a demanda agregada de todos os consumidores. Ou seja, em tais situações nós também definiremos o excedente do consumidor como sendo a área do gráfico abaixo da curva de demanda inversa e acima

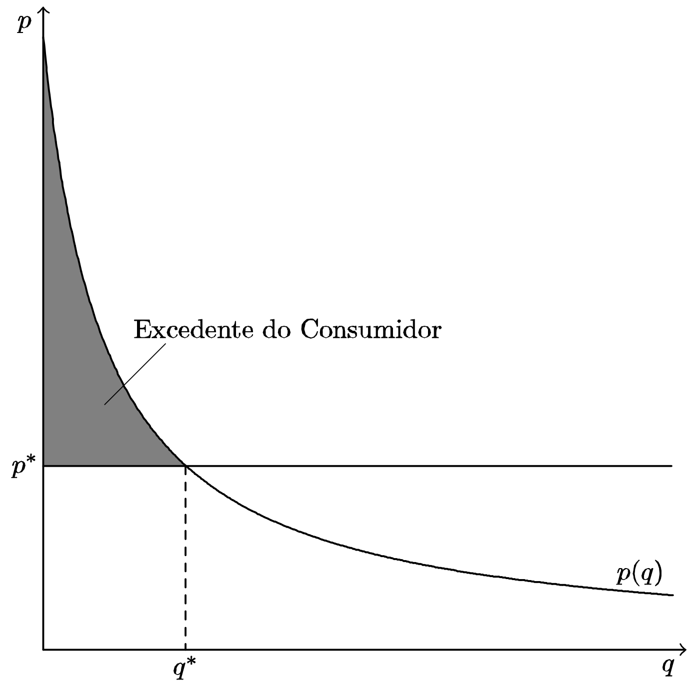

Figura 11.3: Excedente do consumidor com curva de demanda inversa contínua.

do preço de equilíbrio. Um exemplo de excedente do consumidor em tal tipo de situação é apresentado na Figura 11.3.

Agora, considere uma firma (ou um grupo de firmas) representada por uma curva de oferta inversa $p(q)$. Suponha ainda que o preço de equilíbrio seja p^*. Similarmente ao caso do consumidor, a curva de oferta inversa nos dá o mínimo preço pelo qual a firma aceitaria vender cada possível quantidade do bem. Então, de certa forma, a área do gráfico entre a curva de oferta inversa da firma e o preço de equilíbrio nos dá uma medida monetária do ganho que a existência do mercado proporciona à firma. Nós chamamos tal medida de *excedente do produtor*. Um exemplo de excedente do produtor para uma curva de oferta inversa contínua pode ser encontrado na Figura 11.4.

Nós chamamos a soma dos excedentes do consumidor e produtor de *excedente agregado*. De certa forma, o excedente agregado nos dá uma medida do benefício total proporcionado pela existência do mercado.

11.4 Outras Medidas de Bem Estar para o Consumidor

Embora o conceito de excedente do consumidor seja bastante útil, em algumas ocasiões existem algumas medidas mais apropriadas para analisar o efeito de certas mudanças no bem estar do consumidor. Nesta seção, nós veremos duas medidas alternativas que nós podemos utilizar para avaliar o impacto de mudanças de preços no bem estar do consumidor.

Considere um consumidor com função de utilidade $u(x, y)$. Suponha que sob preços (p_x, p_y) e renda w as demandas do consumidor sejam dadas por $x(p_x, p_y, w)$ e $y(p_x, p_y, w)$.

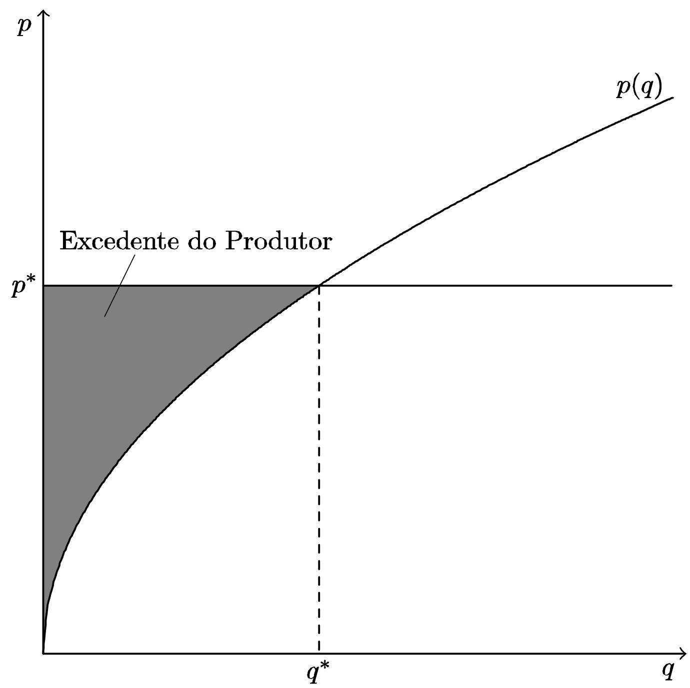

Figura 11.4: Excedente do produtor com curva de oferta inversa contínua.

Suponha agora que o preço do bem x seja alterado para um valor $\hat{p}_x > p_x$. Existem duas medidas interessantes para avaliar qual foi o impacto de tal mudança de preços no bem estar do consumidor.

Primeiramente, nós podemos nos perguntar quanto nós temos que pagar ao consumidor para que este aceite a mudança. Formalmente, nós podemos tentar identificar qual a renda w' que faz com que $u(x(p_x, p_y, w), y(p_x, p_y, w)) = u(x(\hat{p}_x, p_y, w'), y(\hat{p}_x, p_y, w'))$. Observe que, com a mudança de p_x para $\hat{p}_x$, a escolha do consumidor provavelmente será alterada. Mais do que isto, como $\hat{p}_x > p_x$, mantendo a renda w constante é provável que o consumidor não consiga obter a mesma utilidade que ele conseguia sob o preço p_x. Logo, para que a utilidade do consumidor não seja prejudicada pela mudança de preço, nós temos que, de certa forma, compensar tal mudança com um aumento em sua renda de w para w'. Por esta razão, a diferença $w' - w$ é chamada de *variação compensada da renda* e é uma possível medida monetária do impacto no bem estar do consumidor da mudança de preço. Geometricamente, a alteração do preço do bem x gera uma mudança na inclinação da reta orçamentária do consumidor (ver Figura 11.5). O que a variação compensada faz é gerar um deslocamento paralelo desta nova reta orçamentária, de modo que esta fique tangente à curva de indiferença do consumidor que passa pela cesta original.

Alternativamente, nós podemos nos perguntar quanto o consumidor aceitaria pagar para que a mudança de preço não seja realizada. Observe que após a mudança de preço a utilidade do consumidor será $u(x(\hat{p}_x, p_y, w), y(\hat{p}_x, p_y, w))$. Logo, qualquer variação de renda que mantenha a utilidade do consumidor acima deste valor, sob o preço antigo, é vantajosa para o consumidor. Nós podemos, então, olhar para a renda w' tal que $u(x(p_x, p_y, w'), y(p_x, p_y, w')) = u(x(\hat{p}_x, p_y, w), y(\hat{p}_x, p_y, w))$. Nós obtemos, então, uma nova medida da perda de bem estar

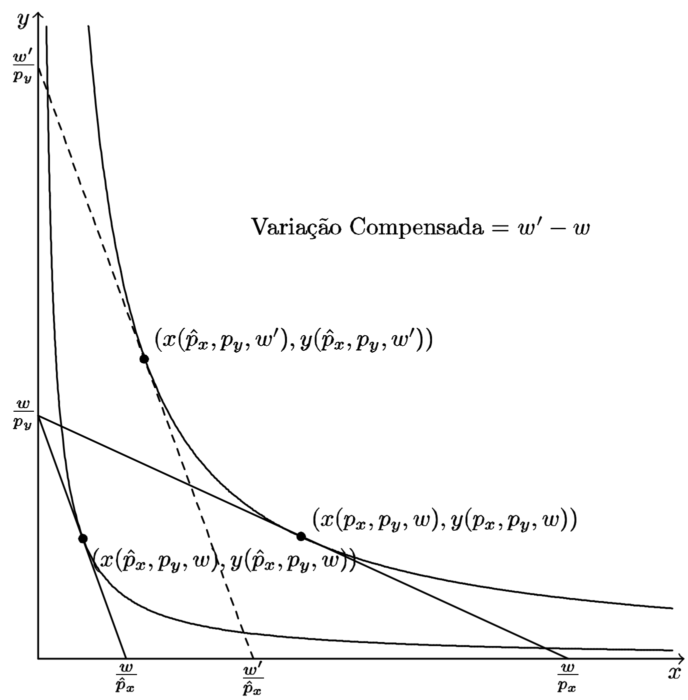

Figura 11.5: Variação compensada da renda após um aumento no preço do bem x.

do consumidor gerada pelo aumento de preço dada por $w - w'$. Tal medida é chamada de *variação equivalente da renda*. Graficamente, a diferença entre a variação equivalente e a variação compensada é que enquanto a variação compensada desloca a reta orçamentária posterior à mudança de preços de modo que esta fique tangente à curva de indiferença original do consumidor, a variação equivalente desloca a reta orçamentária anterior à mudança de preço de modo que esta fique tangente à curva de indiferença do consumidor correspondente à sua escolha posterior à mudança de preço. A Figura 11.6 ilustra tal fato.

11.5 Exercícios

Exercício 11.1. *Considere uma economia com um único bem cujas curvas de demanda e oferta sejam dadas por* $q^D(p) = \frac{9}{2} - \frac{p}{2}$ *e* $q^S(p) = p$*, respectivamente. Encontre o preço e a quantidade de equilíbrio de tal economia e calcule os excedentes do consumidor e do produtor.*

Exercício 11.2. *Considere uma firma que produz um único bem e cuja função custo é* $c(q) = q^2 + 2q$*. Calcule quanto a firma irá produzir se o preço do bem for igual a* 10 *e compute também qual será o excedente do produtor neste caso.*

Exercício 11.3. *Considere um consumidor com função de utilidade* $u(x, y) := x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$*. Suponha que inicialmente o vetor de preços da economia seja dado por* $(p_x, p_y) := (1, 1)$ *e a renda do consumidor seja* $w := 90$*. Suponha agora que o preço do bem* x *aumente para* $\hat{p}_x := 2$*. Calcule as variações compensada e equivalente da renda neste caso.*

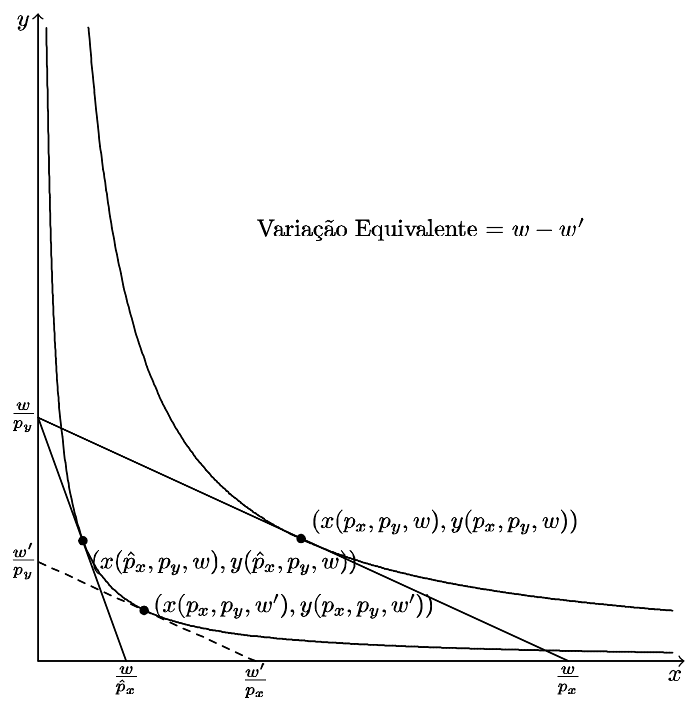

Figura 11.6: Variação equivalente da renda após um aumento no preço do bem x.

Capítulo 12

Equilíbrio Geral - Eficiência no Sentido de Pareto

12.1 Introdução

Até agora, nós temos nos concentrado na teoria da decisão individual e na análise de equilíbrio parcial. Nós estávamos preocupados em entender como fatores como riqueza inicial e preço afetavam a demanda de um único consumidor por um determinado bem ou, no máximo entender como o mercado de um determinado bem funcionava sob a hipótese de que os outros fatores da economia permaneciam constantes. Embora importantes, tais análises nos fornecem apenas a base teórica para que posteriormente possamos estudar situações econômicas mais interessantes. Geralmente em economia estamos interessados em entender situações que envolvem vários agentes interagindo e também situações em que existe interação entre os mercados dos diversos bens.

Pelas razões acima, surgiu em economia o interesse pela área de pesquisa que ficou conhecida como equilíbrio geral. De forma resumida, a teoria de equilíbrio geral estuda como as condições de oferta e demanda interagem em vários mercados para determinar os preços de muitos bens.

Como já era de se esperar, tais problemas são na maioria das vezes bastante complicados. Boa parte da pesquisa em equilíbrio geral trabalha com modelos que nem mesmo possuem uma solução analítica e, portanto, só podem ser resolvidos com o auxílio de um computador. Mesmo os modelos que possuem uma solução analítica geralmente têm uma solução que demanda um conhecimento matemático superior ao assumido por este curso. Por esta razão, nós trabalharemos com várias hipóteses simplificadoras. Principalmente, durante boa parte do tempo, nós trabalharemos com uma economia que possui apenas dois consumidores e dois bens. Embora esta seja uma simplificação radical, vários fenômenos que ocorrem em modelos mais interessantes podem ser descritos de maneira elegante e intuitiva em tal economia. Isto acaba compensando a perda de generalidade obtida como consequência de se trabalhar com uma economia tão reduzida.

12.2 Economia de Trocas

Suponha que tenhamos uma economia com n consumidores e k bens. Observe que nesta economia não temos firmas produtivas, o que justifica o fato de que tais economias sejam conhecidas como economias de trocas. Os seguintes elementos caracterizam uma economia de trocas:

- Para cada consumidor i, temos uma função de utilidade $U^i\left(x_i^1, ..., x_i^k\right)$.[12.1]
- Para cada consumidor i, temos um vetor de dotação inicial $\left(w_i^1, ..., w_i^k\right)$.[12.2]

Um conjunto de cestas de consumo, uma para cada consumidor, é chamado de **alocação**. Ou seja, uma alocação é um conjunto de n vetores $\left(x_1^1, ..., x_1^k\right), ..., \left(x_n^1, ..., x_n^k\right)$. Uma alocação é dita **factível** se para todo bem j,

$$x_1^j + ... + x_n^j = w_1^j + ... + w_n^j.$$

Ou seja, uma alocação é factível se para todo bem j o consumo agregado deste bem é igual a sua dotação inicial agregada. A mais óbvia alocação factível é a alocação da própria dotação inicial.

12.3 Dois Consumidores e Dois Bens

Vamos nos concentrar agora no caso simplificado em que a nossa economia possui apenas dois consumidores e dois bens. Identificaremos os dois consumidores por A e B e os bens por 1 e 2. Neste caso simplificado existe uma ferramenta gráfica que fornece uma representação bastante útil da nossa economia. Tal ferramenta é conhecida como caixa de Edgeworth, batizada em homenagem a Francis Ysidro Edgeworth, um dos desenvolvedores da noção de curva de indiferenças e criador de uma versão preliminar da ferramenta que vamos estudar agora.

Na figura 12.1 vemos uma representação da alocação da dotação inicial na caixa de Edegworth. Vamos primeiro olhar para a figura em sua posição normal. Na posição normal, a figura representa as cestas de consumo do consumidor A. Vemos que a dotação inicial de A inclui uma grande quantidade do bem 1 e uma quantidade pequena do bem 2. Mas agora, se olharmos para figura em sua posição invertida, de cabeça para baixo, esta agora representa as cestas de consumo de B. De forma consistente com o que observamos para o consumidor A, a dotação inicial de B inclui uma quantidade pequena do bem 1 e uma quantidade grande do bem 2.

Observe que todas as alocações factíveis podem ser representadas por um único ponto. Não é possível representar alocações não factíveis de forma natural na caixa de Edgeworth, mas este é um problema menor, já que alocações não factíveis têm pouco interesse econômico.

[12.1] *Notação:* Dado um bem j, nós escrevemos x_i^j para representar a quantidade do bem j que o consumidor i está consumindo.

[12.2] A interpretação aqui é que w_i^j é a quantidade inicial do bem j que o indivíduo i possui.

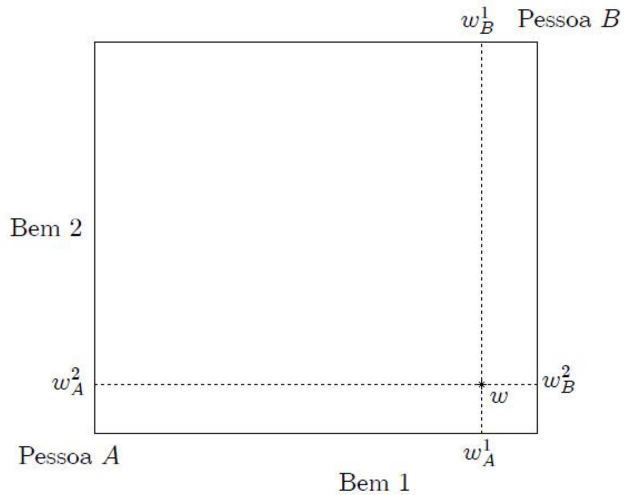

Figura 12.1: Representação da Dotação Inicial na Caixa de Edgeworth

12.4 Trocas

Suponhamos que A e B tenham funções de utilidade que representem preferências convexas (ou seja que tenham curvas de indiferenças como na figura 12.2). As curvas de indiferenças de A e B também podem ser representadas na caixa de Edgeworth. Na figura 12.2 nós vemos as curvas de indiferenças de ambos os agentes que passam pela alocação da dotação inicial.

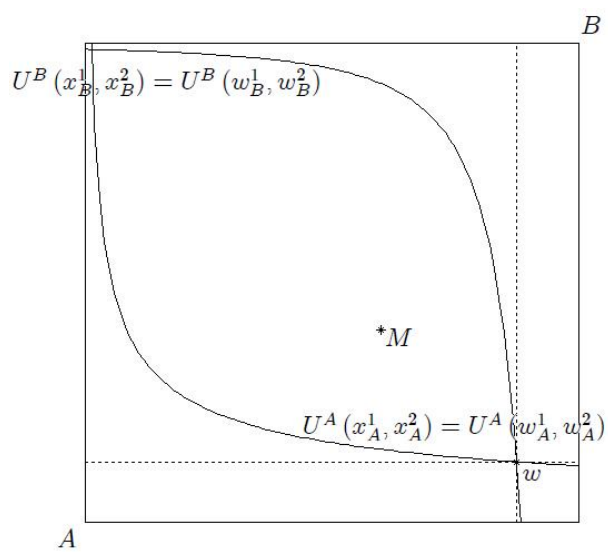

Figura 12.2: Curvas de Indiferença que passam pela alocação da dotação inicial

Observe que as cestas que A considera preferíveis à sua dotação inicial encontram-se na parte do diagrama que fica acima da curva de indiferenças de A. Similarmente, as cestas que

B considera preferíveis à sua dotação inicial encontram-se, sob o ponto de vista de B (ou seja, com a folha de cabeça para baixo), acima da curva de indiferenças de B. Mas então, existe uma região (a região com um formato de lente na figura) em que tanto A quanto B preferem as alocações naquela região à alocação da dotação inicial. Por exemplo, se fosse oferecida a ambos a possibilidade de trocarem seus bens de modo a mudarem da alocação da dotação inicial para o ponto M na figura, ambos considerariam esta possibilidade como uma vantagem.

Alternativamente, poderíamos imaginar que os dois agentes ao se depararem com uma situação como na alocação da dotação inicial, provavelmente iriam negociar de modo a trocarem bens para moverem-se para algum ponto no interior da região em formato de lente. Suponhamos, então, que os agentes tenham negociado trocas de modo a moverem-se do ponto w para o ponto M na figura 12.2. De modo similar ao que fizemos anteriormente, agora podemos traçar as curvas de indiferenças de A e B que passam por M. Como podemos observar na figura 12.3, a região das alocações preferidas a M pelos dois consumidores é menor do que a região das alocações preferidas a w. De qualquer forma, o processo de trocas que estudamos acima poderia ser repetido de modo que os consumidores concordassem em mover a alocação da economia para um novo ponto na região cinza da figura. Poderíamos repetir tal processo indefinidamente até que chegássemos a um ponto em que não houvesse mais trocas vantajosas para ambos os consumidores. Quais seriam as características de tal ponto?

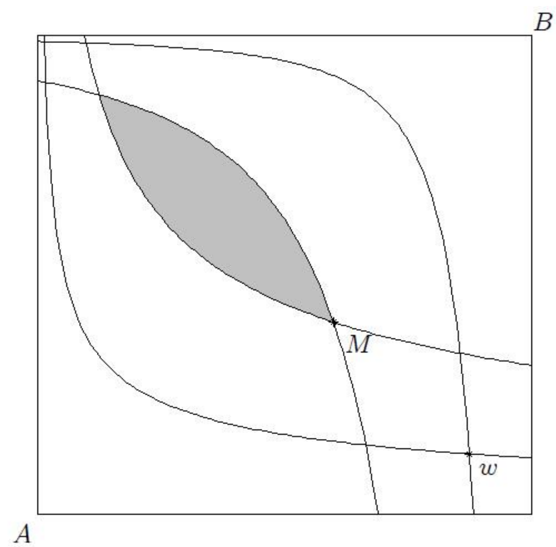

Figura 12.3: Curvas de Indiferença que passam por M

Parando para refletir um pouco, vemos que para que não existam mais trocas vantajosas para ambos os consumidores precisaremos que as suas curvas de indiferenças sejam tangentes. Na figura 12.4 vemos uma destas alocações. Observe que os pontos que o consumidor A prefere ao ponto E encontram-se acima da curva de indiferenças de A, na parte superior da figura. Já os pontos que o consumidor B prefere à alocação E encontram-se na parte inferior da figura, acima da curva de indiferenças de B, sob o ponto de vista de B, mas abaixo desta curva se estivermos olhando para a figura sob a orientação normal do papel. Esta discussão motiva a introdução do seguinte conceito:

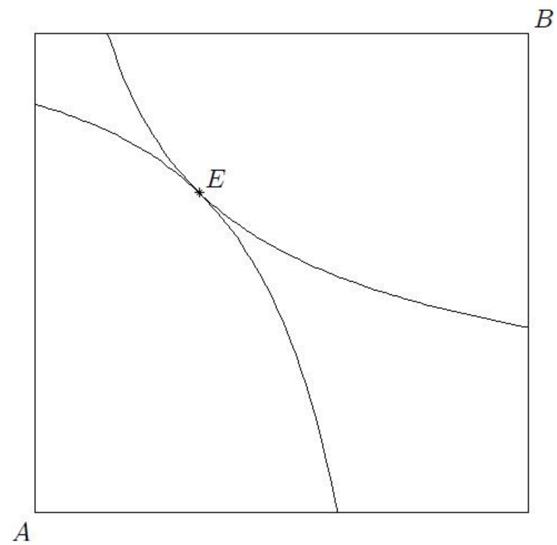

Figura 12.4: Alocação sem trocas vantajosas para ambos os consumidores

Definição 12.1. Dizemos que uma alocação *factível* $\left[\left(x_A^1, x_A^2\right), \left(x_B^1, x_B^2\right)\right]$ é eficiente no sentido de Pareto se não existe nenhuma outra alocação *factível* $\left[\left(y_A^1, y_A^2\right), \left(y_B^1, y_B^2\right)\right]$ tal que

$$U^A\left(y_A^1, y_A^2\right) \geq U^A\left(x_A^1, x_A^2\right) \text{ e } U^B\left(y_B^1, y_B^2\right) \geq U^B\left(x_B^1, x_B^2\right),$$

com pelo menos uma das desigualdades acima estrita.[12.3]

Em palavras, a definição de eficiência no sentido de Pareto simplesmente diz que uma alocação factível é eficiente se não existe nenhuma outra alocação factível que faz pelo menos um consumidor na economia estritamente mais satisfeito sem fazer nenhum outro consumidor mais insatisfeito. O conceito de eficiência no sentido de Pareto é, então, uma condição de consistência que aplicamos às alocações factíveis da nossa economia. Intuitivamente, numa economia em que os consumidores têm a possibilidade de negociar os seus bens, nós esperaríamos que tais negociações acabassem por gerar uma alocação eficiente. Também, sob um ponto de vista social, alocações não eficientes no sentido de Pareto são claramente indesejáveis.

12.5 Caracterizando as Alocações Eficientes

Gostaríamos agora de ter um método para encontrar as alocações eficientes no sentido de Pareto. Defina as dotações iniciais agregadas por $A^1 := w_A^1 + w_B^1$ e $A^2 := w_A^2 + w_B^2$. Pelo menos

[12.3]Nós escrevemos a definição acima em termos da nossa economia com apenas dois consumidores e dois bens, mas observe que ela pode ser facilmente adaptada para uma economia com n consumidores e k bens.

duas alocações eficientes são óbvias. É claro que estamos falando dos casos extremos em que um dos consumidores não recebe nada. Ou seja, estamos falando da alocação $(x_A^1, x_A^2) = (0,0)$ e $(x_B^1, x_B^2) = (A^1, A^2)$ e da alocação $(x_A^1, x_A^2) = (A^1, A^2)$ e $(x_B^1, x_B^2) = (0,0)$. Observe que se $(x_A^1, x_A^2) = (0,0)$, a única opção para melhorarmos a situação de A é retirar algo de B sem lhe dar nada em troca. Mas isto claramente torna a situação de B pior.[12.4]

O conjunto de todas as alocações eficientes no sentido de Pareto é chamado de curva de contrato ou conjunto de Pareto.[12.5] O primeiro nome é motivado pela idéia de que todos os contratos finais de troca têm que se localizar sobre a curva de contrato, caso contrário os agentes teriam incentivo para realizar mais um troca vantajosa para ambas as partes. Tipicamente a curva de contrato começa no ponto $(x_A^1, x_A^2) = (0,0)$ e termina em $(x_A^1, x_A^2) = (A^1, A^2)$ (ver figura 12.5)[12.6].

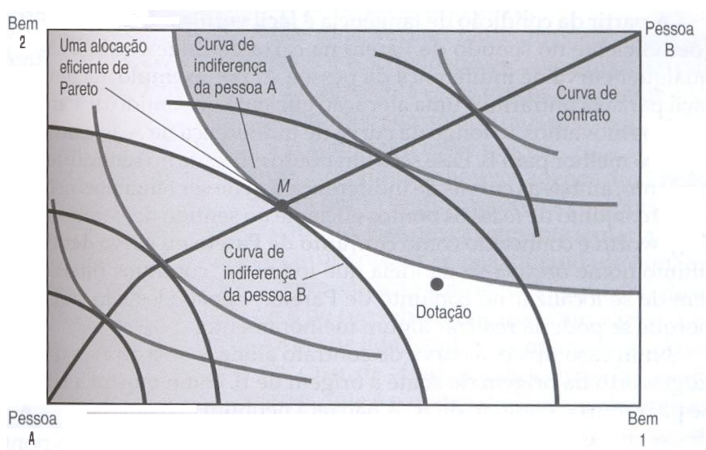

Figura 12.5: Curva de Contratos

12.5.1 Alocações Eficientes no Interior da Caixa de Edgeworth

Lembre-se de Micro 1 que para um dado consumidor i a razão

$$TMgS\,(i) = \frac{U_1^i\,(x_i^1, x_i^2)}{U_2^i\,(x_i^1, x_i^2)}$$

é chamada de taxa marginal de substituição entre os bens 1 e 2. Intuitivamente, seja $\varepsilon > 0$ um valor muito pequeno. Se $TM_gS = \alpha$, então se o consumidor trocar ε unidades do bem 1 por $\alpha\varepsilon$ unidades do bem 2 ele fica mais ou menos com a mesma utilidade. Suponha agora que $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ seja uma alocação eficiente no sentido de Pareto no interior da caixa de

[12.4] Aqui nós estamos trabalhando com a hipótese implícita de que as funções de utilidade de ambos os consumidores são estritamente crescentes em relação aos dois bens.

[12.5] Alguns livros usam uma terminologia um pouco diferente. Eles chamam o conjunto de todas as alocações eficientes de conjunto de Pareto e chamam de curva de contrato o conjunto das alocações eficientes que são preferíveis à alocação da dotação inicial por todos os consumidores. A terminologia adotada aqui segue Varian (2006).

[12.6] A figura 12.5 foi retirada de Varian (2006).

Edgeworth. Isto é, uma alocação eficiente em que $x_A^1, x_A^2, x_B^1, x_B^2 > 0$. Nós podemos mostrar que a alocação $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ necessariamente tem que satisfazer

$$TMgS(A) = TMgS(B).$$

Para mostrar isto, suponha primeiramente que $TMgS(A) = \alpha > \beta = TMgS(B)$. Fixe um número γ qualquer tal que $\alpha > \gamma > \beta$. Considere a seguinte alocação: $[(x_A^1 + \varepsilon, x_A^2 - \gamma\varepsilon), (x_B^1 - \varepsilon, x_B^2 + \gamma\varepsilon)]$, para algum número ε bem pequeno. Ou seja, os consumidores estão trocando ε unidades do bem 1 por $\gamma\varepsilon$ unidades do bem 2. Como ε é pequeno, nós sabemos que $x_A^1+\varepsilon, x_A^2-\gamma\varepsilon, x_B^1-\varepsilon, x_B^2+\gamma\varepsilon$ ainda são todos estritamente positivos, portanto $[(x_A^1+\varepsilon, x_A^2-\gamma\varepsilon), (x_B^1-\varepsilon, x_B^2+\gamma\varepsilon)]$ ainda é uma alocação no interior da caixa de Edgeworth. Agora lembre-se que para ε pequeno o consumidor A é mais ou menos indiferente a trocar $\alpha\varepsilon$ unidades do bem 2 por ε unidades do bem 1. Mas na troca acima ele está recebendo ε unidades do bem 1 e dando em troca apenas $\gamma\varepsilon < \alpha\varepsilon$ unidades do bem 2. Portanto, ele está mais feliz com a cesta $(x_A^1 + \varepsilon, x_A^2 - \gamma\varepsilon)$ do que ele estava antes. Similarmente, o consumidor B ficaria mais ou menos indiferente se ele trocasse ε unidades do bem 1 por $\beta\varepsilon$ unidades do bem 2. Mas na troca acima ele está dando ε unidades do bem 1 e recebendo $\gamma\varepsilon > \beta\varepsilon$ unidades do bem 2. Portanto, ele está mais feliz com a cesta $(x_B^1 - \varepsilon, x_B^2 + \gamma\varepsilon)$ do que ele estava antes. Mas se os dois consumidores estão mais felizes, então $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ não é eficiente, o que contradiz a nossa hipótese inicial. Concluímos que não pode ser verdade que $TMgS(A) > TMgS(B)$. Agora suponha que $TMgS(A) = \alpha < \beta = TMgS(B)$. Novamente, fixe um número γ tal que $\alpha < \gamma < \beta$ e considere a seguinte alocação: $[(x_A^1 - \varepsilon, x_A^2+\gamma\varepsilon), (x_B^1+\varepsilon, x_B^2-\gamma\varepsilon)]$, para algum número ε bem pequeno. Uma análise absolutamente simétrica à feita no caso anterior mostra que os dois consumidores estariam mais felizes com tais cestas, novamente contrariando o fato de que $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ é eficiente. Nós concluímos que necessariamente nós temos que ter $TMgS(A) = TMgS(B)$.

12.5.2 Alocações Eficientes na Fronteira da Caixa de Edgeworth

Para simplificar a notação, suponha que as dotações iniciais agregadas na nossa economia sejam dadas por $A_1 = A_2 = 1$. Suponha que $[(0, x_A^2), (1, x_B^2)]$ seja eficiente no sentido de Pareto. Nós podemos mostrar que na alocação $[(0, x_A^2), (1, x_B^2)]$ nós necessariamente temos que ter

$$TMgS(A) \leq TMgS(B).$$

Para mostrar isto, suponha que $TMgS(A) = \alpha > \beta = TMgS(B)$. Fixe um número γ qualquer tal que $\alpha > \gamma > \beta$. Como fizemos acima, considere a seguinte alocação: $[(0+\varepsilon, x_A^2-\gamma\varepsilon), (1-\varepsilon, x_B^2+\gamma\varepsilon)]$, para algum número ε bem pequeno. Novamente, como argumentamos acima, os dois consumidores estarão mais felizes em tal situação, o que contradiz o fato de que $[(0, x_A^2), (1, x_B^2)]$ é eficiente. Nós concluímos que $TMgS(A) \leq TMgS(B)$. Isto é o que queríamos mostrar, mas será que também neste caso não podemos mostrar que de fato temos que ter $TMgS(A) = TMgS(B)$? Vamos tentar. Suponha que $TMgS(A) = \alpha < \beta = TMgS(B)$. Fixe um número γ qualquer tal que $\alpha < \gamma < \beta$. Considere a seguinte alocação: $[(0-\varepsilon, x_A^2+\gamma\varepsilon), (1+\varepsilon, x_B^2-\gamma\varepsilon)]$, para algum número ε bem pequeno. Opa, agora temos um problema. Embora o consumidor A realmente fosse ficar mais feliz se ele pudesse trocar ε unidades do bem 1 por $\gamma\varepsilon$ unidades do bem 2, ele não tem nenhuma unidade do bem 1 para oferecer em troca. Nós vemos aqui que o argumento usado acima é problemático agora. De fato, tudo que podemos garantir a respeito de $[(0, x_A^2), (1, x_B^2)]$ é $TMgS(A) \leq TMgS(B)$. Mesmo quando tal desigualdade é estrita, o ponto $[(0, x_A^2), (1, x_B^2)]$ ainda é eficiente no sentido de Pareto.

Vamos analisar mais um caso. Suponha que $[(x_A^1, 0), (x_B^1, 1)]$ seja eficiente no sentido de Pareto. Neste caso nós podemos mostrar que $TMgS(A) \geq TMgS(B)$. Para tanto, suponha que $TMgS(A) = \alpha < \beta = TMgS(B)$. Fixe γ tal que $\alpha < \gamma < \beta$ e, para um ε pequeno, considere a seguinte alocação: $[(x_A^1 - \varepsilon, 0 + \gamma\varepsilon), (x_B^1 + \varepsilon, 1 - \gamma\varepsilon)]$. Observe que os dois consumidores estariam mais felizes, o que é uma contradição. Nós concluímos que $TMgS(A) \geq TMgS(B)$.

Seguindo o mesmo raciocínio nós podemos ainda mostrar que se $[(1, x_A^2), (0, x_B^2)]$ é eficiente, então $TMgS(A) \geq TMgS(B)$ e se $[(x_A^1, 1), (x_B^1, 0)]$ é eficiente, então $TMgS(A) \leq TMgS(B)$. Na lista de exercícios você será solicitado a mostrar estes dois casos.

12.6 Exercícios

Exercício 12.1 (Argumento intuitivo das taxas marginais de substituição na fronteira da caixa de Edgeworth)**.** *Considere uma economia na caixa de Edgeworth em que as dotações agregadas dos dois bens são dadas por $A_1 = A_2 = 1$. Utilizando a técnica aprendida nas notas de aula mostre que se $[(1, x_A^2), (0, x_B^2)]$ é eficiente no sentido de Pareto, então $TMgS(A) \geq TMgS(B)$ e que se $[(x_A^1, 1), (x_B^1, 0)]$ é eficiente no sentido de Pareto, então $TMgS(A) \leq TMgS(B)$.*

Exercício 12.2. *Considere uma economia na caixa de Edgeworth em que as dotações iniciais agregadas são dadas por $A^1 = A^2 = 1$ e as funções de utilidade dos consumidores são dadas por $U^i(x_i^1, x_i^2) = (x_i^1)^\alpha (x_i^2)^{1-\alpha}$, para algum $0 < \alpha < 1$, para $i = A, B$. Ou seja, as utilidades dos dois consumidores são medidas pela mesma função Cobb-Douglas. Utilize o que aprendemos nas notas de aula e no exercício 12.1 acima para encontrar uma expressão algébrica que caracterize a curva de contrato desta economia. Ou seja, ache uma expressão do tipo $x_A^2 = f(x_A^1)$ que caracterize todas as alocações eficientes para esta economia. Represente graficamente, na caixa de Edgeworth, esta curva de contrato.*

Exercício 12.3. *Repita a análise acima, mas agora suponha que as funções de utilidade dos dois consumidores sejam dadas por $U^i(x_i^1, x_i^2) = x_i^1 + (x_i^2)^\alpha$ para algum $0 < \alpha < 1$. Continue trabalhando com $A^1 = A^2 = 1$.*

Capítulo 13

Equilíbrio Geral - Equilíbrio Competitivo

13.1 Introdução

No capítulo anterior nós estudamos o conceito de eficiência no sentido de Pareto. Nós vimos que este é um conceito que caracteriza uma mínima condição necessária para que uma dada alocação possa ser considerada aceitável sob um ponto de vista social. Basicamente, o conceito de eficiência no sentido de Pareto diz que alocações em que você pode melhorar simultaneamente a situação de todos os agentes na economia não são aceitáveis.

Em uma economia de trocas com dois agentes e dois bens, eficiência no sentido de Pareto está associada com a inexistência de uma troca mutuamente benéfica para os dois agentes na nossa economia. Se existe uma possibilidade de negociação, é de se esperar que ao verificar que existem trocas que vão beneficiar a ambos, os agentes vão acabar realizando contratos de trocas de modo que os dois fiquem mais satisfeitos. Nós chamamos o conjunto de todas as alocações eficientes de conjunto de Pareto ou curva de contrato (ver figura 13.1). A motivação para isto vem da idéia de que todos os contratos finais de troca têm que se localizar dentro do conjunto de Pareto. Assim, dada uma dotação inicial W, é de se esperar que depois de negociarem os agentes acabem assinando um acordo que os leve para alguma alocação sobre a curva de contrato que deixe ambos mais satisfeitos (ver figura 13.1 novamente).

O grande problema com o processo de trocas descrito acima é que ele é muito impreciso. Através dele nós aprendemos que a alocação final da nossa economia provavelmente estará localizada sobre a curva de contratos, mas não somos capazes de prever exatamente que alocação será esta.

Para tentar sanar este problema, vamos tentar um processo diferente, então. Suponha que associemos um vetor de preços (p_1, p_2) às duas mercadorias em nossa economia. Suponha, também, que os dois agentes na nossa economia encarem tal vetor de preços como dado e simplesmente maximizem as suas utilidades dada a restrição orçamentária imposta por tal vetor de preços. Conforme aprendemos em Micro 1, graficamente a solução do problema do consumidor é caracterizada pelo ponto em que a sua curva de indiferenças é tangente a sua reta de restrição orçamentária. Se representarmos tal ponto para os nossos dois consumidores na caixa de Edgeworth teremos uma configuração como na figura 13.2.

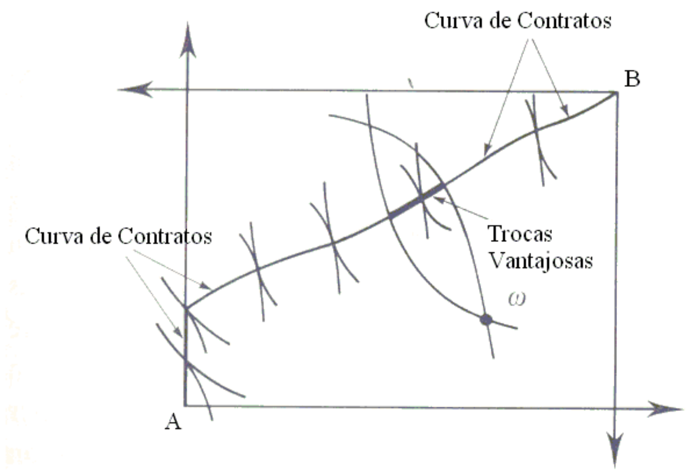

Figura 13.1: Trocas vantajosas sobre a curva de contratos

Observe que a alocação representada na figura 13.2 não é factível. De fato, percebemos que $x_A^1 + x_B^1 < A^1$ e $x_A^2 + x_B^2 > A^2$. Ou seja, existe um excesso de oferta pelo bem 1 e um excesso de demanda pelo bem 2. Quando tal situação acontece dizemos que o vetor de preços (p_1, p_2) não equilibra os mercados para os dois bens da nossa economia. Na figura 13.3, representamos um vetor de preços que equilibra o mercado para os dois bens em nossa economia. Vemos que tal situação é caracterizada, na caixa de Edgeworth, pelo fato de que as curvas de indiferenças dos dois agentes são tangentes à reta de restrição orçamentária no mesmo ponto. Mas isto implica que, em particular, as curvas de indiferenças dos dois agentes também são tangentes entre si. Tal observação nos indica que provavelmente existe alguma relação entre alocações originárias de vetores de preços que equilibram os mercados e eficiência. Nas próximas seções nós exploraremos tal resultado mais a fundo.

13.2 Equilíbrio Competitivo

Lembre-se que quando deparado com um vetor de preços (p_1, p_2) o consumidor i resolve o seguinte problema de maximização.

$$\max_{(x_i^1, x_i^2)} U^i\left(x_i^1, x_i^2\right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & p_1 x_i^1 + p_2 x_i^2 \leq p_1 w_i^1 + p_2 w_i^2 \\ & x_i^1, x_i^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Suponha que a solução do problema do consumidor A seja (x_A^1, x_A^2) e a do consumidor B seja (x_B^1, x_B^2). Como discutimos na seção anterior, em geral, para um vetor de preços (p_1, p_2)

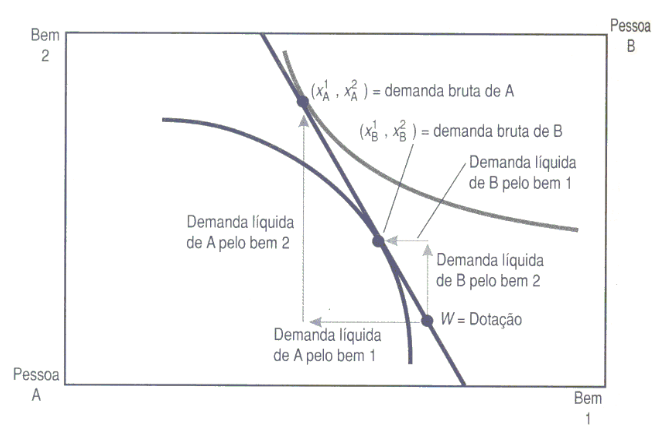

Figura 13.2: Vetor de preços que não equilibra os mercados de bens

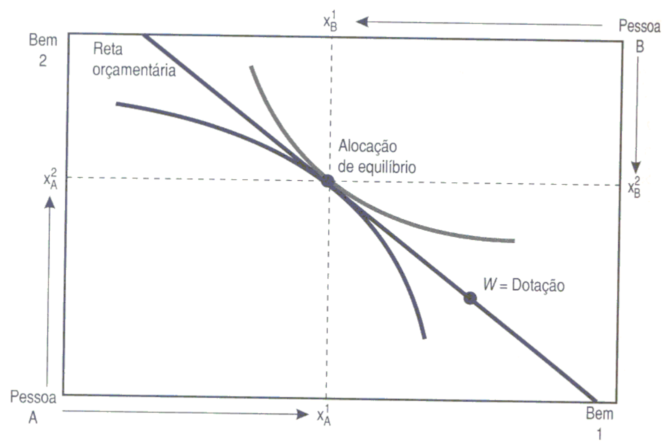

Figura 13.3: Preços que equilibram os mercados

qualquer não é verdade que $x_A^1 + x_B^1 = w_A^1 + w_B^1$ e $x_A^2 + x_B^2 = w_A^2 + w_B^2$. Ou seja, não é verdade que (p_1, p_2) equilibra os mercados para os dois bens na nossa economia. No entanto, a discussão que tivemos no final da seção anterior sugere que vetores de preços que equilibrem os mercados na nossa economia têm uma importância especial. Formalmente, nós temos a definição do seguinte conceito:

Definição 13.1. Dada uma economia com n consumidores e k bens, definimos um **equilíbrio competitivo** como sendo composto por um vetor de preços $(p_1, ..., p_k)$ e por uma alocação $\left[\left(x_1^1, ..., x_1^k\right), ..., \left(x_n^1, ..., x_n^k\right)\right]$ tais que, dado $(p_1, ..., p_k)$, pra $i = 1, ..., n$, $\left(x_i^1, ..., x_i^k\right)$ é uma solução para o problema do consumidor i e, além disto, pra todo bem j,

$$x_1^j + ... + x_n^j = w_1^j + ... + w_n^j.$$

Ou seja, um equilíbrio competitivo constitui-se de uma alocação e um vetor de preços que satisfazem algumas condições. A primeira condição diz que dado o vetor de preços a cesta de escolha referente ao agente i é uma solução para o seu problema do consumidor. A outra condição simplesmente diz que a alocação citada na definição do equilíbrio deve ser factível.

Nós vamos ver que o conceito de equilíbrio competitivo nos dá uma previsão bem mais precisa do que vai ocorrer em nossa economia do que o conceito de eficiência no sentido de Pareto, que vinhamos estudando até então. Isto sugere que um método para encontrar tal equilíbrio seja algo de grande utilidade. Nós vamos estudar tal método em breve, mas antes nós precisamos nos familiarizar com algumas propriedades do equilíbrio competitivo.

13.3 Lei de Walras e Equilíbrio de Mercado

Voltemos à nossa economia com dois consumidores. Dada uma dotação inicial $[(w_A^1, w_A^2), (w_B^1, w_B^2)]$, as soluções dos problemas dos dois consumidores geram funções de demanda $x_A^1(p_1,p_2)$, $x_A^2(p_1,p_2)$, $x_B^1(p_1,p_2)$ e $x_B^2(p_1,p_2)$.[13.1] Das restrições orçamentárias dos problemas dos dois consumidores temos:

$$p_1 x_A^1(p_1,p_2) + p_2 x_A^2(p_1,p_2) = p_1 w_A^1 + p_2 w_A^2$$

e

$$p_1 x_B^1(p_1,p_2) + p_2 x_B^2(p_1,p_2) = p_1 w_B^1 + p_2 w_B^2.$$[13.2]

Somando as duas equações acima temos:

$$p_1\left[x_A^1(p_1,p_2) + x_B^1(p_1,p_2)\right] + p_2\left[x_A^2(p_1,p_2) + x_B^2(p_1,p_2)\right] = p_1\left(w_A^1 + w_B^1\right) + p_2\left(w_A^2 + w_B^2\right).$$

A equação acima é conhecida como lei de Walras. Em palavras, ela diz que, dado um vetor de preços, o valor da demanda agregada na economia é igual ao valor da dotação inicial agregada da economia. Nós podemos rearranjar a equação acima da seguinte forma:

$$p_1\left[x_A^1(p_1,p_2) + x_B^1(p_1,p_2) - \left(w_A^1 + w_B^1\right)\right] + p_2\left[x_A^2(p_1,p_2) + x_B^2(p_1,p_2) - \left(w_A^2 + w_B^2\right)\right] = 0.$$

A lei de Walras é uma consequência imediata do problema dos consumidores. Na prática, ela implica que ao tentarmos localizar um ponto de equilíbrio de uma economia com k bens, nós só precisamos nos preocupar com o mercado de $k-1$ dos bens. Abaixo nós mostramos isto para a nossa economia com dois bens, mas é evidente que o argumento se generaliza para uma economia com qualquer número de bens.

Para verificar a propriedade que mencionamos acima, suponha que o mercado para o bem 1 esteja equilibrado. Isto é, suponha que

$$x_A^1(p_1,p_2) + x_B^1(p_1,p_2) = w_A^1 + w_B^1.$$

[13.1] Geralmente estamos acostumados a descrever a demanda do consumidor como função também da renda deste. Mas observe que neste caso a renda do consumidor i é dada por $p_1 w_i^1 + p_2 w_i^2$, ou seja, como a dotação inicial é fixa, a renda é também apenas uma função do vetor de preços.

[13.2] Observe que aqui nós estamos implicitamente usando o fato de que obviamente o agente consumirá toda a sua renda. Sendo assim, embora formalmente a restrição do problema do consumidor i seja $p_1 x_i^1 + p_2 x_i^2 \leq p_1 w_i^1 + p_2 w_i^2$, nós sabemos que a solução do problema necessariamente irá satisfazer $p_1 x_i^1 + p_2 x_i^2 = p_1 w_i^1 + p_2 w_i^2$.

Mas isto implica que o primeiro termo na nossa versão rearranjada da lei de Walras acima é nulo, o que simplifica aquela expressão para

$$p_2 \left[x_A^2 (p_1, p_2) + x_B^2 (p_1, p_2) - \left(w_A^2 + w_B^2\right)\right] = 0.$$

Mas agora é evidente que a equação acima só pode ser verdade se

$$x_A^2 (p_1, p_2) + x_B^2 (p_1, p_2) = \left(w_A^2 + w_B^2\right).$$

O resultado acima além de ter a implicação prática de que só precisamos checar que os mercados para $k-1$ bens estejam equilibrados para garantir que uma economia com k bens esteja em equilíbrio, tem também a implicação teórica de que apenas preços relativos são determinados em uma abordagem de equilíbrio geral. Nós discutimos isto formalmente na próxima seção.

13.4 Preços Relativos

Suponha que tenhamos resolvido o problema dos nossos dois consumidores e tenhamos achado as suas funções demanda $x_A^1 (p_1, p_2)$, $x_A^2 (p_1, p_2)$, $x_B^1 (p_1, p_2)$, $x_B^2 (p_1, p_2)$. Sabemos que um vetor de preços que é parte de um equilíbrio competitivo tem que satisfazer

$$x_A^1 (p_1, p_2) + x_B^1 (p_1, p_2) = w_A^1 + w_B^1$$

e

$$x_A^2 (p_1, p_2) + x_B^2 (p_1, p_2) = w_A^2 + w_B^2.$$

Aparentemente, tudo que precisamos fazer para encontrar p_1 e p_2 é resolver o sistema acima. O problema é que na seção anterior nós vimos que uma das consequências da lei de Walras é que as duas equações acima não são independentes. Em geral, em uma economia com k bens, só temos $k-1$ equações independentes. Como podemos, então, determinar completamente o vetor de preços em nosso equilíbrio competitivo?

A resposta é que não podemos determinar o valor absoluto dos preços. Apenas preços relativos são determinados pela abordagem acima. Isto é, num equilíbrio competitivo, tudo que podemos determinar são as razões entre os diversos preços. Na nossa economia com dois bens, apenas a razão p_1/p_2 será determinada. Por exemplo, se (p_1^*, p_2^*) é parte de um equilíbrio competitivo com alocação $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$, então, para qualquer $\lambda > 0$, $(\lambda p_1^*, \lambda p_2^*)$ também é parte de um equilíbrio competitivo com a mesma alocação. Observe que isto é também uma consequência direta da homogeneidade de grau zero das funções demanda em relação aos preços.

Novamente, tal fato é também generalizado para economias com um número maior de bens. Na prática, ao procurarmos por um equilíbrio competitivo nós sempre escolhemos um dos preços como numerário. Por exemplo, nós fazemos $p_1 = 1$.

13.5 Encontrando o Equilíbrio Competitivo

Nesta seção vamos encontrar o equilíbrio competitivo em um exemplo específico.

Exemplo 13.1. Sejam as dotações iniciais dos nossos consumidores (w_A^1, w_A^2) e (w_B^1, w_B^2), respectivamente, e suponha que suas funções de utilidade sejam dadas por

$$U^A\left(x_A^1, x_A^2\right) = \left(x_A^1\right)^{\alpha}\left(x_A^2\right)^{1-\alpha} \text{ e } U^B\left(x_B^1, x_B^2\right) = \left(x_B^1\right)^{\beta}\left(x_B^2\right)^{1-\beta},$$

com $0 < \alpha, \beta < 1$.

Vamos agora tentar encontrar um vetor de preços (p_1, p_2) que equilibre os mercados desta economia. Como foi discutido acima, nós sabemos que apenas preços relativos podem ser determinados e, portanto, nós podemos assumir, sem perda de generalidade, que $p_1 = 1$. O nosso vetor de preços assume, então, o formato $(1, p)$ e o nosso objetivo passa a ser encontrar p. O primeiro passo é resolver o problema dos dois consumidores e encontrar as suas respectivas funções demanda. Ou seja, temos que resolver

$$\max_{\left(x_A^1, x_A^2\right)} \left(x_A^1\right)^{\alpha}\left(x_A^2\right)^{1-\alpha}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & x_A^1 + p x_A^2 \leq w_A^1 + p w_A^2 \\ & x_A^1, x_A^2 \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$\max_{\left(x_B^1, x_B^2\right)} \left(x_B^1\right)^{\beta}\left(x_B^2\right)^{1-\beta}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & x_B^1 + p x_B^2 \leq w_B^1 + p w_B^2 \\ & x_B^1, x_B^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Os dois consumidores acima são Cobb-Douglas tradicionais e nós já sabemos que as suas funções demanda são dadas por

$$\begin{aligned} x_A^1(p) &= x_A^1(1,p) = \alpha \frac{w_A^1 + p w_A^2}{1} \\ x_A^2(p) &= x_A^2(1,p) = (1-\alpha)\frac{w_A^1 + p w_A^2}{p} \\ x_B^1(p) &= x_B^1(1,p) = \beta \frac{w_B^1 + p w_B^2}{1} \\ x_B^2(p) &= x_B^2(1,p) = (1-\beta)\frac{w_B^1 + p w_B^2}{p}. \end{aligned}$$

Para encontrarmos o valor de p, nós temos que equilibrar o mercado para um dos bens (o outro estará automaticamente equilibrado por consequência da lei de Walras). Equilibremos o mercado para o bem 1, então. A equação de equilíbrio de mercado para o bem 1 é

$$x_A^1(p) + x_B^1(p) = w_A^1 + w_B^1,$$

o que em termos das funções demanda encontradas acima pode ser escrito como

$$\alpha\left(w_A^1 + pw_A^2\right) + \beta\left(w_B^1 + pw_B^2\right) = w_A^1 + w_B^1.$$

Resolvendo a equação acima para p nós obtemos

$$p = \frac{(1-\alpha)\,w_A^1 + (1-\beta)\,w_B^1}{\alpha w_A^2 + \beta w_B^2}.$$

Substituindo tal valor de p nas expressões para as nossas funções demanda acima nós obtemos

$$\begin{aligned}
x_A^1 &= \alpha\left[\frac{\left(\alpha w_A^2 + \beta w_B^2\right)w_A^1 + \left((1-\alpha)\,w_A^1 + (1-\beta)\,w_B^1\right)w_A^2}{\alpha w_A^2 + \beta w_B^2}\right] \\
x_A^2 &= (1-\alpha)\left[\frac{\left(\alpha w_A^2 + \beta w_B^2\right)w_A^1 + \left((1-\alpha)\,w_A^1 + (1-\beta)\,w_B^1\right)w_A^2}{(1-\alpha)\,w_A^1 + (1-\beta)\,w_B^1}\right] \\
x_B^1 &= \beta\left[\frac{\left(\alpha w_A^2 + \beta w_B^2\right)w_B^1 + \left((1-\alpha)\,w_A^1 + (1-\beta)\,w_B^1\right)w_B^2}{\alpha w_A^2 + \beta w_B^2}\right] \\
x_B^2 &= (1-\beta)\left[\frac{\left(\alpha w_A^2 + \beta w_B^2\right)w_B^1 + \left((1-\alpha)\,w_A^1 + (1-\beta)\,w_B^1\right)w_B^2}{(1-\alpha)\,w_A^1 + (1-\beta)\,w_B^1}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, o nosso equilíbrio competitivo é dado pelo vetor de preços e a alocação acima.

13.6 Existência do Equilíbrio

No exemplo anterior nós pudemos verificar a existência do equilíbrio calculando-o explicitamente, mas será que ele existe sempre? A resposta é não. Existem casos em que um equilíbrio competitivo não existe. No entanto, duas condições particularmente interessantes são suficientes para garantir que um equilíbrio competitivo exista.

Primeiramente, sabemos que um equilíbrio competitivo existe se as preferências de todos os agentes na nossa economia forem contínuas e convexas. Isto é equivalente a assumir que todos os agentes na nossa economia têm funções de utilidade contínuas e quase-côncavas. Formalmente, isto significa que a função de utilidade do agente i é contínua e satisfaz

$$U^i(X) \geq U^i(Y) \implies U^i(\lambda X + (1-\lambda)\,Y) \geq U^i(Y),$$

pra todo λ entre 0 e 1. Em termos gráficos esta condição simplesmente diz que as curvas de indiferenças dos agentes são bem comportadas como nos exemplos acima.

O segundo caso em que sabemos que um equilíbrio sempre existe é quando o número de consumidores é grande. Infelizmente não temos a bagagem técnica necessária para discutir tal resultado formalmente, mas podemos pelo menos apreciar a sua importância. Toda a análise neste capítulo foi feita sob a hipótese implícita de que os consumidores encaram o vetor de preços como algo dado exogenamente. Obviamente, tal hipótese não é muito razoável em uma economia com apenas dois agentes, já que em tal situação os consumidores facilmente perceberiam que suas escolhas afetam os preços. Mas numa economia com muitos agentes, em que o impacto das ações individuais de cada consumidor é praticamente insignificante, a hipótese de que os consumidores são tomadores de preço parece bem mais razoável. Portanto, o resultado acima é particularmente interessante, pois exatamente quando as hipótes do nosso modelo fazem mais sentido, nós temos a garantia de que o equilíbrio existe.

13.7 Equilíbrio e Eficiência

Lembre-se que no interior da caixa de Edgeworth um equilíbrio competitivo se parece com a figura 13.3. Ou seja, as curvas de indiferenças dos dois agentes são tangentes à restrição orçamentária induzida pelo vetor de preços. Mas isto implica que as curvas de indiferenças dos dois agentes são tangentes entre si, o que, como vimos antes, é também o que caracteriza uma alocação eficiente no interior da caixa de Edegworth. Isto nos leva a conjecturar que talvez alocações que são parte de um equilíbrio competitivo sejam sempre eficientes. De fato, tal resultado é verdade, como nós mostramos abaixo.

Teorema 13.1 (Primeiro Teorema do Bem-Estar)**.** *Suponha que* $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ *e* (p_1, p_2) *sejam um equilíbrio competitivo. Então,* $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ *é eficiente no sentido de Pareto.*

Demonstração. Suponha que $[(y_A^1, y_A^2), (y_B^1, y_B^2)]$ domine $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ no sentido de Pareto. Isto é, suponha que

$$U^A\left(y_A^1, y_A^2\right) \geq U^A\left(x_A^1, x_A^2\right) \text{ e } U^B\left(y_B^1, y_B^2\right) \geq U^B\left(x_B^1, x_B^2\right),$$

com pelo menos uma das desigualdades acima estrita. Na verdade, vamos trapacear um pouquinho aqui e assumir que as duas desigualdades acima são estritas.[13.3] Nós vamos mostrar agora que isto implica que $[(y_A^1, y_A^2), (y_B^1, y_B^2)]$ não é factível. Lembre-se que para $i = A, B$, (x_i^1, x_i^2) é solução para o seguinte problema de maximização:

$$\max_{\left(x_i^1, x_i^2\right)} U^i\left(x_i^1, x_i^2\right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} &p_1 x_i^1 + p_2 x_i^2 \leq p_1 w_i^1 + p_2 w_i^2 \\ &x_i^1, x_i^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $U^i(y_i^1, y_i^2) > U^i(x_i^1, x_i^2)$, nós podemos concluir que (y_i^1, y_i^2) não pode satisfazer as restrições do problema acima. Se y_i^1 ou y_i^2 é menor do que zero, então trivialmente $[(y_A^1, y_A^2), (y_B^1, y_B^2)]$ não é factível. Logo, nós só temos que nos preocupar com a situação em que a primeira restrição não é satisfeita. Ou seja,

$$p_1 y_i^1 + p_2 y_i^2 > p_1 w_i^1 + p_2 w_i^2,$$

para $i = A, B$. Somando as desigualdades acima para A e B nós obtemos a seguinte desigualdade:

$$p_1\left(y_A^1 + y_B^1\right) + p_2\left(y_A^2 + y_B^2\right) > p_1\left(w_A^1 + w_B^1\right) + p_2\left(w_A^2 + w_B^2\right).$$

Rearranjando a equação acima temos:

$$p_1\left[\left(y_A^1 + y_B^1\right) - \left(w_A^1 + w_B^1\right)\right] + p_2\left[\left(y_A^2 + y_B^2\right) - \left(w_A^2 + w_B^2\right)\right] > 0.$$

[13.3] Formalmente, podemos usar um argumento de continuidade para construir uma nova alocação $\left[\left(\tilde{y}_A^1, \tilde{y}_A^2\right), \left(\tilde{y}_B^1, \tilde{y}_B^2\right)\right]$ que de fato faça as duas desigualdades acima estritas. De posse de $\left[\left(\tilde{y}_A^1, \tilde{y}_A^2\right), \left(\tilde{y}_B^1, \tilde{y}_B^2\right)\right]$ nós podemos usar esta alocação para finalizar a demonstração. O argumento formal completo não é importante para nós no momento, portanto nós vamos nos contentar com a nossa pequena trapaça.

Suponha que a alocação $\left[\left(y_A^1, y_A^2\right), \left(y_B^1, y_B^2\right)\right]$ equilibre o mercado para o bem 1, ou seja, suponha que

$$y_A^1 + y_B^1 = w_A^1 + w_B^1.$$

Isto implica que o primeiro termo da desigualdade acima é nulo o que a reduz para

$$p_2 \left[\left(y_A^2 + y_B^2\right) - \left(w_A^2 + w_B^2\right)\right] > 0.$$

Mas a desigualdade acima só pode ser verdadeira se $y_A^2 + y_B^2 > w_A^2 + w_B^2$, o que implica que o mercado para o bem 2 não está equilibrado e, portanto, $\left[\left(y_A^1, y_A^2\right), \left(y_B^1, y_B^2\right)\right]$ não é factível. Ou seja, qualquer alocação que domine $\left[\left(x_A^1, x_A^2\right), \left(x_B^1, x_B^2\right)\right]$ no sentido de Pareto necessariamente é não factível. Nós concluímos, então, que $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ é eficiente no sentido de Pareto. ‖

Acabamos de demonstrar que alocações que são parte de um equilíbrio competitivo são sempre eficientes. Novamente, embora tenhamos mostrado o resultado para a nossa economia simplificada com apenas dois consumidores e dois bens, o resultado é válido para uma economia com um número genérico de consumidores e bens.[13.4] Agora estudaremos a situação inversa. Isto é, investigaremos sob que condições alocações eficientes são parte de algum equilíbrio competitivo.

13.8 Eficiência e Equilíbrio

Suponha que tenhamos uma alocação eficiente típica no interior da caixa de Edgeworth (ver figura 13.4). Como já sabemos, as curvas de indiferenças dos dois agentes têm que ser tangentes em tal ponto. Suponha que associemos à economia acima um vetor de preços que induza como reta orçamentária exatamente a reta que separa as curvas de indiferenças dos dois agentes na figura 13.4 e escolhamos uma dotação inicial sobre esta reta orçamentária (ver figura 13.3). Agora observe que a nossa alocação eficiente é parte de um equilíbrio competitivo com qualquer vetor de preços que induz a restrição orçamentária na figura.

Aparentemente, então, nós podemos sempre escolher uma dotação inicial e um vetor de preços de modo a fazer uma dada alocação eficiente parte de um equilíbrio competitivo. O problema é que no exemplo acima as preferências dos nossos agentes são excessivamente bem comportadas. Considere a situação representada na figura 13.5, por exemplo. Vemos que o ponto X é eficiente, no entanto a reta tangente às curvas de indiferenças dos agentes no ponto X não está associada a um equilíbrio competitivo. Sob tal restrição orçamentária a escolha do agente A seria o ponto Y e não X.

O problema no exemplo acima surgiu porque as preferências do agente A não são convexas, gerando a curva de indiferenças mal comportada que observamos na figura 13.5. De fato, se exigirmos que os nossos consumidores tenham preferências convexas, então sempre poderemos construir um equilíbrio competitivo para qualquer alocação eficiente.

Teorema 13.2 (Segundo Teorema do Bem-Estar)**.** *Suponha que as preferências dos dois agentes na nossa economia sejam contínuas e convexas. Se* $\left[\left(x_A^1, x_A^2\right), \left(x_B^1, x_B^2\right)\right]$ *é eficiente*

[13.4] De fato, com um pouco de atenção podemos perceber que o argumento da demonstração acima pode ser facilmente generalizado para uma economia com mais consumidores e mais bens.

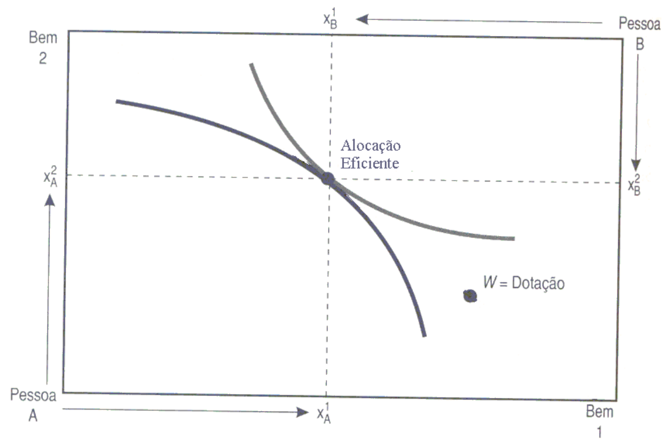

Figura 13.4: Alocação Eficiente

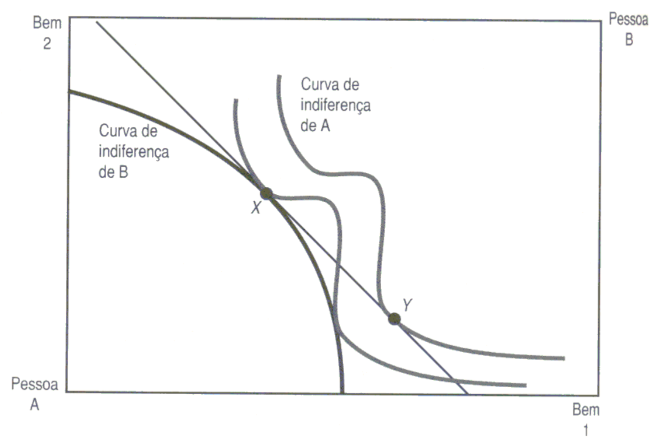

Figura 13.5: Preferências não convexas

no sentido de Pareto, então podemos encontrar uma dotação inicial $[(w_A^1, w_B^1), (w_A^2, w_B^2)]$ *e um vetor de preços* (p_1, p_2) *tais que dada a dotação* $[(w_A^1, w_B^1), (w_A^2, w_B^2)]$, $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ *e* (p_1, p_2) *constituem um equilíbrio competitivo.*

Demonstração. Na verdade, nós podemos mostrar que se fizermos $(w_A^1, w_A^2) := (x_A^1, x_A^2)$ e $(w_B^1, w_B^2) := (x_B^1, x_B^2)$, então existe um vetor de preços tal que $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ e (p_1, p_2) constituem um equilíbrio competitivo. Suponha, então, que $(w_A^1, w_A^2) := (x_A^1, x_A^2)$ e $(w_B^1, w_B^2) := (x_B^1, x_B^2)$. Como as preferências dos dois indivíduos são contínuas e convexas, dos nossos resultados a respeito da existência de equilíbrio, nós sabemos que existe um vetor de preços (p_1, p_2) e uma alocação factível $[(y_A^1, y_A^2), (y_B^1, y_B^2)]$ que formam um equilíbrio competitivo. Nós vamos agora mostrar que $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ e (p_1, p_2) também formam um equilíbrio competitivo. Note que, como $(w_A^1, w_A^2) = (x_A^1, x_A^2)$ e $(w_B^1, w_B^2) = (x_B^1, x_B^2)$, logicamente (x_A^1, x_A^2) satisfaz as restrições do problema do consumidor A e (x_B^1, x_B^2) satisfaz as restrições do problema do consumidor B. Isto implica que $U^A(y_A^1, y_A^2) \geq U^A(x_A^1, x_A^2)$

e $U^B(y_B^1, y_B^2) \geq U^B(x_B^1, x_B^2)$. Mas se alguma das duas desigualdades acima for estrita, então a alocação $[(y_A^1, y_A^2), (y_B^1, y_B^2)]$ domina $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ no sentido de Pareto, o que contradiz a eficiência de $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$. Nós concluimos que $U^A(y_A^1, y_A^2) = U^A(x_A^1, x_A^2)$ e $U^B(y_B^1, y_B^2) = U^B(x_B^1, x_B^2)$. Isto é, (x_A^1, x_A^2) também é solução do problema do consumidor A e (x_B^1, x_B^2) também é solução do problema do consumidor B. Ou seja, $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ e (p_1, p_2) formam um equilíbrio competitivo. $\|$

13.9 Leitura Complementar Obrigatória

Seções 31.12 e 31.13 de Varian (2006).

13.10 Exercícios

Exercício 13.1. *Considere uma economia na caixa de Edgeworth em que as funções de utilidade dos consumidores são dadas por $U^A(x_A^1, x_A^2) = (x_A^1)^\alpha (x_A^2)^{1-\alpha}$, para algum $0 < \alpha < 1$, e $U^B(x_B^1, x_B^2) = \min(x_B^1, x_B^2)$. Suponha que as dotações iniciais dos consumidores são $(w_A^1, w_A^2) = (0, 1)$ e $(w_B^1, w_B^2) = (1, 0)$.*

(a) *Dado um vetor de preços genérico (p_1, p_2), escreva o problema do consumidor B.*

(b) *Resolva o problema do consumidor B e encontre a sua função demanda (Use apenas lógica, matemática não será de nenhuma utilidade aqui).*

(c) *Encontre o único equilíbrio competitivo desta economia.*

Exercício 13.2. *Considere uma economia com dois bens e dois consumidores com funções de utilidade estritamente crescentes em relação aos dois bens. Suponha, também, que a dotação inicial $[(w_A^1, w_A^2), (w_B^1, w_B^2)]$ seja uma alocação eficiente no sentido de Pareto. Mostre que se (p_1, p_2), $[(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)]$ é um equilíbrio competitivo para esta economia, então (p_1, p_2) e $[(w_A^1, w_A^2), (w_B^1, w_B^2)]$ também é.*

Exercício 13.3 (Múltiplos Equilíbrios). *Suponha que os dois consumidores em nossa economia tenham funções de utilidade dadas por*

$$U^A(x_A^1, x_A^2) = x_A^1 - \frac{1}{8}(x_A^2)^{-8} \text{ e } U^B(x_B^1, x_B^2) = -\frac{1}{8}(x_B^1)^{-8} + x_B^2.$$

As dotações iniciais são dadas por $(w_A^1, w_A^2) = (2, r)$ e $(w_B^1, w_B^2) = (r, 2)$, em que $r := 2^{8/9} - 2^{1/9}$.[13.5]

(a) *Fixe um vetor de preços da forma $(p_1, p_2) = (1, p)$ e escreva as funções demanda para os dois consumidores em termos de p (por enquanto você ainda não precisa substituir o valor de r nas expressões que você encontrar).*

[13.5] Tal valor de r foi escolhido para que os preços de equilíbrio fiquem com valores redondos.

(b) *Usando as funções de demanda encontradas no item (a), escreva a condição de equilíbrio de mercado para o bem 1.*

(c) *Agora sim, substituindo o valor de r na condição de equilíbrio de mercado encontrada acima, verifique que $p = 1, 2$ ou $1/2$ são soluções para aquela equação. Ou seja, nesta economia nós temos 3 equilíbrios competitivos distintos.*

Exercício 13.4. *Considere uma economia na caixa de Edgeworth em que as funções de utilidade dos consumidores sejam dadas por $U^A\left(x_A^1, x_A^2\right) = \left(x_A^1\right)^{\frac{1}{3}}\left(x_A^2\right)^{\frac{2}{3}}$ e $U^B\left(x_B^1, x_B^2\right) = \left(x_B^1\right)^{\frac{2}{3}}\left(x_B^2\right)^{\frac{1}{3}}$. Suponha que as dotações iniciais dos consumidores sejam $\left(w_A^1, w_A^2\right) = (1, 0)$ e $\left(w_B^1, w_B^2\right) = (0, 1)$.*

(a) *Encontre o único equilíbrio competitivo desta economia. Isto é, encontre o vetor de preços e a alocação que constituem um equilíbrio competitivo para esta economia*

(b) *É possível mostrar que a alocação $\left(x_A^1, x_A^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$ e $\left(x_B^1, x_B^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$ é eficiente no sentido de Pareto. Como a economia acima satisfaz as condições do Segundo Teorema do Bem-estar nós sabemos que com uma correta redistribuição das dotações iniciais nós podemos fazer com que tal alocação seja parte de um equilíbrio competitivo. Ou seja, existem $t_1, t_2 > 0$ tais que quando $\left(w_A^1, w_A^2\right) = (1 - t_1, t_2)$ e $\left(w_B^1, w_B^2\right) = (t_1, 1 - t_2)$, a alocação resultante do equilíbrio competitivo da economia é exatamente $\left(x_A^1, x_A^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$ e $\left(x_B^1, x_B^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$. Encontre o vetor de preços e as transferências t_1 e t_2 relacionadas a tal equilíbrio (Atenção! Existem várias combinações de transferências que geram a alocação citada. Vocês podem escolher qualquer uma dentre as combinações que funcionam.)*

13.A Demonstração da Existência de Equilíbrio na Caixa de Edgeworth

Nesta seção nós demonstraremos a existência de equilíbrio competitivo para uma economia de trocas com dois bens e dois consumidores com funções de utilidade contínuas, estritamente crescentes e estritamente quase-côncavas.[13.6] Lembre-se que o problema de um consumidor desse tipo pode ser escrito como

$$\max_{(x^1,x^2)} U\left(x^1, x^2\right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} &p_1 x^1 + p_2 x^2 \leq p_1 w^1 + p_2 w^2 \\ &x^1, x^2 \geq 0. \end{aligned}$$

É fácil notar, que, para qualquer $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}_{++}$ e $\lambda > 0$, as soluções do problema acima são as mesmas do problema

$$\max_{(x^1,x^2)} U\left(x^1, x^2\right)$$

[13.6] Uma função $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é estritamente quase-côncave se sempre que tivermos $U\left(x^1, x^2\right) \geq U\left(y^1, y^2\right)$ para algum $\left(x^1, x^2\right), \left(y^1, y^2\right) \in \mathbb{R}^2$, então $U(\lambda x^1 + (1-\lambda)y^1, \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2) > U\left(y^1, y^2\right)$, pra todo $\lambda \in (0, 1)$.

sujeito a

$$\lambda p_1 x^1 + \lambda p_2 x^2 \leq \lambda p_1 w^1 + \lambda p_2 w^2$$
$$x^1, x^2 \geq 0.$$

Portanto, sem perda de generalidade, durante toda esta seção nós trabalharemos com a normalização $p_1 = 1$ e chamaremos p_2 simplesmente de p. Nós precisamos da seguinte definição:

Definição 13.2. Se o problema do consumidor sempre tem uma única solução $(x^1(p), x^2(p))$ para qualquer valor de $p > 0$, nós chamamos $(x^1(.), x^2(.)) : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^2_+$ de função demanda do consumidor.

O nosso primeiro resultado mostra que um consumidor como o acima sempre tem uma função demanda bem definida e contínua.

Lema 13.1. *Considere um consumidor cuja função de utilidade $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e estritamente quase-côncava e com dotação inicial $(w^1, w^2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$. A função demanda de tal consumidor está bem definida e é contínua.*

Demonstração do Lema. O problema do consumidor pode ser escrito como

$$\max_{(x^1,x^2)} U\left(x^1, x^2\right)$$

sujeito a

$$x^1 + px^2 \leq w^1 + pw^2$$
$$x^1, x^2 \geq 0.$$

A existência de uma solução para o problema acima decorre de um resultado famoso conhecido como Teorema de Weierstrass. Aqui nós vamos nos preocupar em mostrar que a solução é única. Para tanto, suponha que (y^1, y^2) e (z^1, z^2) sejam soluções para o problema acima, e que $(y^1, y^2) \neq (z^1, z^2)$. Isto só pode ocorrer se $U(y^1, y^2) = U(z^1, z^2)$, mas como U é estritamente quase-côncava isto implica que $U\left(\frac{y^1+z^1}{2}, \frac{y^2+z^2}{2}\right) > U(y^1, y^2)$. Como $\left(\frac{y^1+z^1}{2}, \frac{y^2+z^2}{2}\right)$ satisfaz as restrições do problema acima, isto contradiz a otimalidade de (y^1, y^2). Nós concluimos que $(y^1, y^2) = (z^1, z^2)$. Isto mostra que a função demanda do consumidor está bem definida. A continuidade de tal função agora decorre de outro resultado famoso conhecido como Teorema do Máximo.[13.7] $\|$

Agora mostraremos que, para qualquer um dos dois bens, sempre existem valores de p que fazem a demanda por tal bem ser tão grande quanto desejemos.

Lema 13.2. *Considere um consumidor cuja função de utilidade $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua, estritamente quase-côncava e estritamente crescente em relação aos seus dois argumentos. A dotação inicial do consumidor é $(w^1, w^2) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{(0,0)\}$. Se $w^1 > 0$, então, pra qualquer $\gamma > 0$, existe $p > 0$ tal que $x^2(p) > \gamma$. Similarmente, se $w^2 > 0$, então, pra qualquer $\gamma > 0$ existe $p > 0$ tal que $x^1(p) > \gamma$.*

[13.7] Tanto o Teorema de Wierstrass como o Teorema do Máximo vão além do escopo deste curso. Vocês encontram mais sobre eles em qualquer livro de análise no $\mathbb{R}^n$.

Demonstração do Lema. Suponha que $w^1 > 0$. Na esperança de uma contradição, suponha que existe $\gamma > 0$ tal que $x^2(p) \leq \gamma$ pra todo $p > 0$. Isto implica que, pra todo $p > 0$, a solução do problema do consumidor também é a única solução do seguinte problema:

$$\max_{(x^1,x^2)} U\left(x^1, x^2\right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & x^1 + px^2 \leq w^1 + pw^2 \\ & x^1, x^2 \geq 0 \\ & x^2 \leq \gamma. \end{aligned}$$

Por construção, o problema acima induz a mesma função demanda, $(x^1(.), x^2(.))$, que o problema do consumidor tradicional. A diferença agora é que $(x^1(p), x^2(p))$ está definida até mesmo para $p = 0$. Como o problema acima também satisfaz as condições do Teorema do Máximo, nós sabemos que $(x^1(.), x^2(.))$ será contínua em todo ponto $p \geq 0$. Note agora que é evidente que $(x^1(0), x^2(0)) = (w^1, \gamma)$. Como $(x^1(.), x^2(.))$ é contínua, isto implica que

$$\lim_{p\to 0}\left(x^1(p), x^2(p)\right) = \left(w^1, \gamma\right).$$

Mas observe que γ foi escolhido de forma arbitrária. Nós poderíamos repetir a análise acima com 2γ, por exemplo. Como nós não podemos ter $\lim_{p\to 0}(x^1(p), x^2(p)) = (w^1, \gamma)$ e $\lim_{p\to 0}(x^1(p), x^2(p)) = (w^1, 2\gamma)$ ao mesmo tempo, nós chegamos a uma contradição. Nós concluimos que, pra todo $\gamma > 0$, existe $p > 0$ tal que $x^2(p) > \gamma$. Para mostrar que quando $w^2 > 0$, pra todo $\gamma > 0$ existe $p > 0$ tal que $x^1(p) > \gamma$ nós podemos mudar a nossa normalização e fazer $p_2 = 1$ e $p_1 = p$. O raciocínio acima nos garante que, pra todo $\gamma > 0$, existe p tal que $x^1(p, 1) > \gamma$. Mas então $x^1\left(1, \frac{1}{p}\right) > \gamma$ e a demonstração está completa. $\|$

Defina agora a função $z^1 : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ por

$$z^1(p) = x_A^1(p) + x_B^1(p) - w_A^1 - w_B^1.$$

A função acima é conhecida como função de excesso de demanda pelo bem 1. Note que quando $z^1(p) > 0$ existe excesso de demanda pelo bem 1 e quando $z^1(p) < 0$ existe excesso de oferta pelo bem 1. O caso $z^1(p) = 0$ representa a situação em que o mercado do bem 1 está em equilíbrio. Como em uma economia com apenas 2 bens a lei de Walras implica que quando um mercado está equilibrado o outro também automaticamente está, encontrar um preço p^* tal que $z^1(p^*) = 0$ é o mesmo que encontrar um preço p^* que equilibre os dois mercados da nossa economia. O nosso trabalho agora passa a ser encontrar um preço $p^* > 0$ tal que $z^1(p^*) = 0$, então.

Observe primeiro que o Lema 13.2 acima implica que existe $\bar{p} > 0$ tal que $z^1(\bar{p}) > 0$. Na verdade, como consequência da lei de Walras o Lema 13.2 implica também que existe um preço $\underline{p}$ tal que $z^1(\underline{p}) < 0$. Para ver isto, lembre que a lei de Walras diz que para qualquer preço $p > 0$ nós temos

$$\left(x_A^1(p) + x_B^1(p) - w_A^1 - w_B^1\right) + p\left(x_A^2(p) + x_B^2(p) - w_A^2 - w_B^2\right) = 0.$$

Mas então, é claro que sempre que houver excesso de demanda por um dos bens existirá excesso de oferta pelo outro e vice-versa. Como o Lema 13.2 implica que existe $\underline{p}$ tal que $x_A^2(p) + x_B^2(p) - w_A^2 - w_B^2 > 0$, nós aprendemos que para este mesmo $\underline{p}$ nós temos $z^1(\underline{p}) < 0$. Para completar a demonstração, nós observamos que z^1 é uma soma de funções contínuas e, portanto, ela própria é uma função contínua. Agora o teorema do valor intermediário garante que existe $p^* \in (\underline{p}, \bar{p})$ tal que $z^1(p^*) = 0$.[13.8] Isto completa a demonstração da existência de equilíbrio na caixa de Edgeworth.

[13.8] O teorema do valor intermediário diz que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então para qualquer $y \in [f(a), f(b)]$ existe $x \in [a, b]$ com $f(x) = y$.

Capítulo 14

Equilíbrio Geral - Economias com Produção

14.1 Introdução

Nós estudamos os conceitos de eficiência no sentido de Pareto e equilíbrio competitivo em economias de trocas. Agora nós incorporaremos a possibilidade de produção à nossa análise. Como veremos, os principais resultados estudados nas economias de trocas permanecerão válidos para economias com produção.

14.2 Um Consumidor e uma Firma

Como tem sido nosso hábito, nós começamos com a economia mais simples possível que incorpore as modificações que desejamos investigar. Para tanto, vamos assumir que estamos em uma economia que tem um consumidor, uma firma, e apenas dois bens. Um destes bens será o trabalho (ou lazer) do consumidor e o outro será um bem de consumo qualquer que será fabricado pela firma. Seja, então, l o número de horas trabalhadas pelo consumidor e y o bem de consumo produzido pela firma. Nós assumimos que o máximo de trabalho que o consumidor pode fornecer é dado por L. Nós podemos representar a tecnologia de produção da firma por

$$y = f(l).$$

A utilidade do consumidor é representada pela função $U(L-l, y)$.

14.2.1 Alocação Eficiente

O conceito de eficiência no sentido de Pareto assume um formato trivial nesta economia simplificada. Como só temos um agente, eficiência aqui significa simplesmente maximizar a utilidade deste agente dada a tecnologia de produção. Ou seja, significa resolver o seguinte problema:

$$\max_{(l,y)} U(L-l, y)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} y &= f(l) \\ 0 &\leq l \leq L. \end{aligned}$$

Para a nossa discussão intuitiva aqui, nós podemos ignorar a segunda restrição do problema acima. Vamos, então, nos concentrar no seguinte problema:

$$\max_{(l,y)} U(L-l, y)$$

sujeito a

$$y = f(l).$$

O Lagrangeano do problema acima é

$$\mathcal{L} = U(L-l, y) - \lambda[y - f(l)].$$

As condições de primeira ordem do problema são:

$$\begin{aligned} l &: -U_l(L-l, y) + \lambda f'(l) = 0 \\ y &: U_y(L-l, y) - \lambda = 0 \\ \lambda &: y - f(l) = 0. \end{aligned}$$

Isolando λ na segunda condição e substituindo na primeira, nós ficamos com a seguinte condição:

$$-U_l(L-l, y) + U_y(L-l, y) f'(l) = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$f'(l) = \frac{U_l(L-l, y)}{U_y(L-l, y)}.$$

Se nós representarmos a função f em um gráfico, a condição acima significa que no ponto ótimo a curva de indiferenças do consumidor será tangente a f (ver figura 14.1).

14.2.2 Equilíbrio Competitivo

Vamos supor agora que, embora o consumidor seja o proprietário da tecnologia de produção, ele crie uma firma que trabalhe de forma independente, com o único objetivo de maximizar o próprio lucro. Vamos supor, também, que tenhamos um vetor de preços (p_l, p_y) e que tanto a firma quanto o consumidor tratem o vetor de preços como dado.

Primeiramente analisamos o problema da firma que pode ser escrito como

$$\pi = \max_{l} p_y f(l) - p_l l.$$

Ou seja, a firma escolhe a quantidade ótima de mão-de-obra que ela deseja contratar com o intuito de maximizar o seu lucro. A condição de primeira ordem do problema acima é

$$f'(l) = \frac{p_l}{p_y}.$$

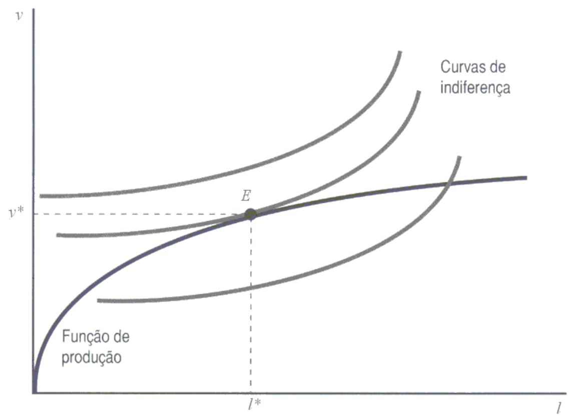

Figura 14.1: Alocação Eficiente

Lembremos que o consumidor é o dono da firma, portanto, embora a firma comporte-se como uma entidade independente, no final do dia ela tem que repassar os seus lucros para o consumidor. Levando isto em consideração, o problema do consumidor pode ser escrito como

$$\max_{(l,y)} U(L-l, y)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} p_y y &= p_l l + \pi \\ 0 &\leq l \leq L. \end{aligned}$$

Novamente, a segunda restrição acima não é importante para a nossa discussão intuitiva aqui e nós vamos ignorá-la. O Lagrangeano do problema acima, sem a segunda restrição, é

$$\mathcal{L} = U(L-l, y) - \lambda [p_y y - p_l l - \pi].$$

As condições de primeira ordem do problema são

$$\begin{aligned} l &: -U_l(L-l, y) + \lambda p_l = 0 \\ y &: U_y(L-l, y) - \lambda p_y = 0 \\ \lambda &: p_y y - p_l l - \pi = 0. \end{aligned}$$

Isolando λ na segunda condição e substituindo na primeira, nós obtemos a seguinte condição:

$$\frac{p_l}{p_y} = \frac{U_l(L-l, y)}{U_y(L-l, y)}.$$

Como já sabíamos, a solução do problema do consumidor ocorre em um ponto em que a sua curva de indiferenças é tangente à restrição orçamentária induzida pelo vetor de preços.

Em geral, para um vetor de preços qualquer, a nossa economia não necessariamente tem que estar em equilíbrio. Ou seja, para um vetor de preços qualquer, é perfeitamente possível que o valor de l que resolve o problema da firma seja diferente do valor de l que resolve o problema do consumidor e, também, o valor de y que resolve o problema do consumidor não necessariamente tem que ser igual a $f(l)$. Mas suponhamos que o vetor de preços (p_l, p_y) equilibre os mercados em nossa economia. Como este equilíbrio iria se parecer graficamente? Nós já vimos que a solução do problema do consumidor é caracterizada por uma curva de indiferenças tangente à restrição orçamentária. Mas do problema da firma acima, nós vemos que a solução deste ocorrerá em um ponto em que a função de produção f é também tangente à restrição orçamentária gerada pelo vetor de preços (p_l, p_y).[14.1] Na figura 14.2 nós vemos a caracterização de tal situação.

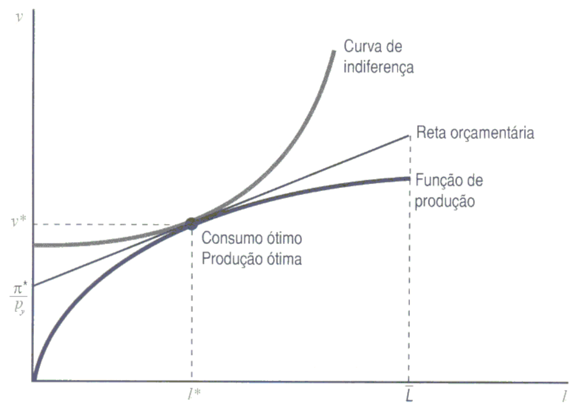

Figura 14.2: Equilíbrio competitivo

14.2.3 Primeiro Teorema do Bem-Estar

Nós vimos na figura 14.1 que o que caracteriza uma alocação eficiente nesta economia simplificada é a tangência entre a curva de indiferenças do consumidor e a função de produção. Por outro lado, vimos na figura 14.2 que o que caracteriza um equilíbrio de mercado é uma curva de indiferenças do consumidor tangente à restrição orçamentária induzida pelo vetor de preços e, também, uma função de produção tangente à mesma reta de restrição orçamentária (chamada no problema da firma de reta de isolucro), no mesmo ponto. Mas se tanto a função de produção quanto a curva de indiferenças do agente são tangentes à reta da restrição orçamentária, então elas são também tangentes entre si. Mas isto, como vimos antes, é o que caracteriza uma alocação eficiente em tal economia.

Isto nada mais é do que uma versão do primeiro teorema do bem-estar aplicada a este tipo de economia. Também aqui, alocações que são parte de um equilíbrio de mercado são eficientes no sentido de Pareto.

[14.1] Quando estamos falando do problema da firma, geralmente chamamos tal reta de reta de isolucro, mas aqui ela coincide exatamente com a reta da restrição orçamentária do problema do consumidor.

14.2.4 Segundo Teorema do Bem-Estar

Agora olhemos novamente para a figura 14.1 acima. Naquela figura está caracterizada uma alocação eficiente. Será que é possível encontrar um vetor de preços que induza aquela alocação em um equilíbrio competitivo? A resposta é sim, e é precisamente isto que fazemos na figura 14.2. Observe que para construir tal equilíbrio competitivo tudo que temos que fazer é escolher um vetor de preços que induza como reta orçamentária exatamente a reta que separa a curva de indiferenças do consumidor da função de produção.

Parece, então, que uma versão do segundo teorema do bem-estar também se aplica a este tipo de economia. De fato, isto é verdade, mas como acontece com tal resultado nas economias de troca, também aqui o teorema depende de hipóteses de convexidade.

No exemplo anterior, a função de produção exibia retornos decrescentes de escala. Ou seja, quanto mais mão-de-obra estivesse sendo utilizada, menor era a produtividade marginal. Graficamente, a função de produção era côncava. Suponha agora que tenhamos uma função com retornos crescentes de escala. Graficamente, isto significa que a função de produção agora é convexa. Como podemos ver na figura 14.3, agora é possível que tenhamos pontos eficientes que não são mais suportados por um equilíbrio de mercado. O ponto (l^*, y^*) na figura é de fato eficiente, mas a reta que é tangente a curva de indiferenças do consumidor e à função de produção em tal ponto não induz um equilíbrio de mercado. Sob tal restrição orçamentária o consumidor de fato escolheria (l^*, y^*), mas a firma teria outras opções mais lucrativas.[14.2]

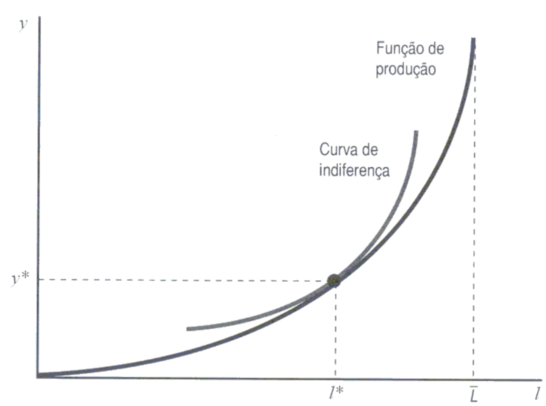

Figura 14.3: Função de produção com retornos crescentes de escala

Mais formalmente, temos o resultado de que se as preferências do consumidor forem convexas e a função de produção tiver retornos não crescentes de escala, então para toda alocação eficiente nós conseguiremos encontrar um vetor de preços tal que essa alocação seja parte de um equilíbrio competitivo com o vetor de preços em questão.

[14.2] Na verdade, o problema da firma representada na figura não tem solução. Tal firma demandaria uma quantidade infinita do bem l.

14.3 Economia com Firmas Privadas

Vamos complicar um pouco a análise que fizemos até agora e permitir que a nossa economia tenha mais consumidores, mais bens produzidos e mais tecnologias de produção, que agora chamaremos de firmas. Para manter a nossa notação simples, nós vamos limitar o número de consumidores e firmas em nossa economia a 2 e vamos assumir que temos apenas um insumo, x, e dois bens produzidos, y e z. Cada consumidor recebe uma dotação inicial w^x do insumo x.

Suponha que ambas as firmas tenham capacidade para produzir cada um dos bens. Formalmente, suponha que existam firmas f e g. O bem y pode ser produzido pela firma f através de uma função de produção $y = f_y(x)$ ou pode ser produzido pela firma g através de outra função de produção $y = g_y(x)$. Similarmente, o bem z pode ser produzido usando funções de produção $z = f_z(x)$ ou $z = g_z(x)$.

14.3.1 Eficiência de Pareto

Chame os consumidores na nossa economia de A e B. A definição de alocação para uma economia como esta é dada por

Definição 14.1. Uma alocação consiste de duas cestas de consumo (x_A, y_A, z_A) e $(x_B, y_B, z_B)]$, e planos de produção $\left(x_{f_y}, x_{f_z}\right)$ e $\left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)$.

Ou seja, uma alocação é uma lista que especifica as cestas consumidas por cada consumidor e a quantidade de insumo utilizada na produção de cada bem, por cada firma. Novamente, nós concentraremos nossa atenção nas alocações ditas factíveis:

Definição 14.2. Uma alocação $[(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right), \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ é dita factível se

(a) $y_A + y_B = f_y\left(x_{f_y}\right) + g_y\left(x_{g_y}\right)$ e $z_A + z_B = f_z\left(x_{f_z}\right) + g_z\left(x_{g_z}\right)$;

(b) $x_A + x_B + x_{f_y} + x_{g_y} + x_{f_z} + x_{g_z} = w_A^x + w_B^x$.

Ou seja, uma alocação é factível se o que é consumido dos bens y e z é exatamente o que é produzido de tais bens e, além disto, a soma do que é consumido do bem x, tanto pelos consumidores quanto pelo processo de produção, é exatamente igual à dotação inicial agregada de tal bem.

Agora estamos preparados para definir eficiência de Pareto para este tipo de economia.

Definição 14.3. Uma alocação factível $[(x_A, y_A, z_A),\ (x_B, y_B, z_B),\ \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right),\ \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ é dita eficiente no sentido de Pareto se não existe nenhuma outra alocação factível $[(\hat{x}_A, \hat{y}_A, \hat{z}_A)$, $(\hat{x}_B, \hat{y}_B, \hat{z}_B),\ \left(\hat{x}_{f_y}, \hat{x}_{f_z}\right),\ \left(\hat{x}_{g_y}, \hat{x}_{g_z}\right)]$ tal que

$$U^A(\hat{x}_A, \hat{y}_A, \hat{z}_A) \geq U^A(x_A, y_A, z_A) \text{ e } U^B(\hat{x}_B, \hat{y}_B, \hat{z}_B) \geq U^B(x_B, y_B, z_B),$$

com pelo menos uma das duas desigualdades acima estrita.

Vemos que a definição de eficiência é basicamente a mesma utilizada em uma economia de trocas. A única mudança é que a definição de alocação factível agora incorpora a possibilidade de produção.

14.3.2 Produção Eficiente

Dado planos de produção $\left(x_{f_y}, x_{f_z}\right)$ e $\left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)$ para cada uma das firmas, a produção agregada de cada bem é $y = f_y\left(x_{f_y}\right) + g_y\left(x_{g_y}\right)$ e $z = f_z\left(x_{f_z}\right) + g_z\left(x_{g_z}\right)$. Nós podemos também definir a quantidade agregada de insumo que está sendo utilizada na produção de cada bem. Isto é, nós podemos definir $x_y = x_{f_y} + x_{g_y}$ e $x_z = x_{f_z} + x_{g_z}$ como as quantidades do insumo x que estão sendo utilizadas para produzir y e z, respectivamente. Agora nós podemos definir o conceito de produção eficiente.

Definição 14.4. Um plano de produção agregada $\left(x_{f_y}, x_{f_z}\right)$ e $\left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)$ é dito eficiente, se $\left(x_{f_y}, x_{g_y}\right)$ e $\left(x_{f_z}, x_{g_z}\right)$ são soluções para os seguintes problemas de maximização:

$$\max_{x_f, x_g} f_y\left(x_f\right) + g_y\left(x_g\right)$$

sujeito a

$$x_f + x_g = x_y$$

e

$$\max_{x_f, x_g} f_z\left(x_f\right) + g_z\left(x_g\right)$$

sujeito a

$$x_f + x_g = x_z.$$

Ou seja, um plano de produção é eficiente se, dadas as quantidades de insumo que estão sendo gastas na produção de cada um dos bens, a sociedade como um todo está produzindo a maior quantidade possível de cada um dos bens. Seria natural esperarmos que a eficiência na produção se relacionasse de algum modo com a eficiência total na economia. O lema abaixo mostra precisamente esta relação.

Lema 14.1. *Suponha que* $[(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right), \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ *seja uma alocação eficiente no sentido de Pareto. Então* $\left(x_{f_y}, x_{f_z}\right)$ *e* $\left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)$ *constituem um plano de produção agregada eficiente.*

Demonstração. Suponha que $\left(x_{f_y}, x_{f_z}\right)$ e $\left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)$ não seja um plano de produção agregada eficiente. Por exemplo, suponha que $\left(x_{f_y}, x_{g_y}\right)$ não seja solução para o problema

$$\max_{x_f, x_g} f_y\left(x_f\right) + g_y\left(x_g\right)$$

sujeito a

$$x_f + x_g = x_y,$$

em que $x_y = x_{f_y} + x_{g_y}$. Isto significa que existe $\left(\hat{x}_{f_y}, \hat{x}_{g_y}\right)$ tal que

$$\hat{x}_{f_y} + \hat{x}_{g_y} = x_y,$$

e $f_y\left(\hat{x}_{f_y}\right) + g_y\left(\hat{x}_{g_y}\right) > f_y\left(x_{f_y}\right) + g_y\left(x_{g_y}\right)$. Defina $\hat{y}_A := y_A + \left(f_y\left(\hat{x}_{f_y}\right) + g_y\left(\hat{x}_{g_y}\right)\right) - \left(f_y\left(x_{f_y}\right) + g_y\left(x_{g_y}\right)\right)$. Por construção $\hat{y}_A > y_A$. Além disto, é fácil ver que $[(x_A, \hat{y}_A, z_A)$, (x_B, y_B, z_B), $\left(\hat{x}_{f_y}, x_{f_z}\right)$, $\left(\hat{x}_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ é uma alocação factível. Como a cesta de consumo do consumidor B não mudou e o consumidor A claramente estaria mais feliz com a sua nova cesta de consumo, isto implica que $[(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right), \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ não é eficiente no sentido de Pareto. Mas isto é uma contradição que foi originada da hipótese de que $\left(x_{f_y}, x_{f_z}\right)$ e $\left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)$ não era um plano de produção agregada eficiente. Nós concluímos que esta hipótese estava incorreta e, portanto, $\left(x_{f_y}, x_{f_z}\right)$ e $\left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)$ constituem um plano de produção agregada eficiente. $\|$

Embora o lema acima tenha sido demonstrado bastante formalmente, observe que a idéia da demonstração é extremamente simples. Se um plano de produção não é eficiente, então é possível produzir uma maior quantidade de um dos bens usando a mesma quantidade de insumo. Mas se fizermos isto e dermos a quantidade excedente produzida para um dos consumidores, claramente este ficará mais feliz. Portanto, alocações que envolvem planos de produção ineficientes não podem ser eficientes no sentido de Pareto.

14.3.3 Equilíbrio Competitivo

Suponha que agora estejamos em uma situação descentralizada em que cada firma age de forma independente com o único objetivo de maximizar o seu lucro. Dado um vetor de preços (p_x, p_y, p_z) os problemas das firmas na nossa economia serão:

$$\pi_f = \max_{x_{f_y}, x_{f_z}} p_y f_y \left(x_{f_y}\right) + p_z f_z \left(x_{f_z}\right) - p_x \left(x_{f_z} + x_{f_y}\right)$$

e

$$\pi_g = \max_{x_{g_y}, x_{g_z}} p_y g_y \left(x_{g_y}\right) + p_z g_z \left(x_{g_z}\right) - p_x \left(x_{g_y} + x_{g_z}\right)$$

Ou seja, cada firma escolhe um plano de produção que maximize o seu lucro. De forma similar ao caso de uma economia com apenas um consumidor e uma tecnologia de produção, também aqui os consumidores são os proprietários das firmas. Formalmente, defina dois vetores $\theta^f := (\theta^f_A, \theta^f_B)$ e $\theta^g := (\theta^g_A, \theta^g_B)$, com $\theta^j_i \geq 0$ pra todo $j = f, g$ e $i = A, B$ e, pra $j = f, g$, $\theta^j_A + \theta^j_B = 1$. A interpretação do vetor θ^j é que ele indica a fração das ações da firma j que cada consumidor possui. Os lucros das firmas serão divididos entre os dois consumidores de acordo com os vetores θ^f e θ^g. Assim, dado o vetor de preços (p_x, p_y, p_z), o problema do consumidor i pode ser escrito como

$$\max_{(x_i, y_i, z_i)} U^i (x_i, y_i, z_i)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & p_x x_i + p_y y_i + p_z z_i \leq p_x w^x_i + \theta^f_i \pi_f + \theta^g_i \pi_g \\ & x_i, y_i, z_i \geq 0. \end{aligned}$$

Ou seja, o problema do consumidor agora incorpora o fato de que este receberá uma parcela θ^j_i dos lucros das firmas. Suponha agora que tenhamos uma alocação $[(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right), \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ em que (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B) sejam soluções para os problemas dos consumidores A e B, respectivamente, e $\left(x_{f_y}, x_{f_z}\right)$ e $\left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)$ sejam soluções para os problemas das firmas. Como no caso anterior, não necessariamente esta alocação será factível. Novamente, quando temos um vetor (p_x, p_y, p_z) tal que os mercados para todos os bens estejam equilibrados, dizemos que a nossa economia está em equilíbrio.

Definição 14.5. Dizemos que uma alocação $[(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right), \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ e um vetor de preços (p_x, p_y, p_z) constituem um equilíbrio competitivo se

(a) $[(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right), \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ é factível;

(b) Dado o vetor de preços (p_x, p_y, p_z), (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B) resolvem os problemas dos dois consumidores na economia;

(c) Dado o vetor de preços (p_x, p_y, p_z), $\left(x_{f_y}, x_{f_z}\right)$ e $\left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)$ resolvem os problemas das firmas.

De novo, a definição de equilíbrio competitivo aqui é similar à definição no caso de uma economia de trocas puras. A única diferença é que incorporamos àquela definição o fato de que agora temos duas firmas maximizadoras de lucro na economia cujas ações estão divididas entre os consumidores.

Observação 14.1. É importante não se confundir aqui entre o que é parte da descrição da economia e o que caracteriza um equilíbrio competitivo. A economia é caracterizada pelas funções de utilidade U^A e U^B dos dois consumidores, as funções de produção f_y, f_z, g_y e g_z das firmas, as dotações iniciais w_A^x e w_B^x que ambos os consumidores possuem do bem x e, finalmente, pelas parcelas de ações (θ_A^f, θ_A^g) e (θ_B^f, θ_B^g) que ambos os consumidores detêm das empresas. Todos esses elementos fazem parte da descrição da nossa economia e permanecem fixos durante a nossa busca por um equilíbrio competitivo.

14.3.4 Lei de Walras e Preços Relativos

Como no caso de uma economia de trocas, aqui também nós só precisamos verificar os mercados para $k-1$ dos bens para garantir que a economia esteja em equilíbrio. Então, novamente, nós só temos 2 equações independentes para determinar o nosso vetor de preços em equilíbrio. A implicação é, então, a mesma de antes. Só preços relativos estarão determinados em uma economia com produção e, na prática, nós sempre escolheremos o preço de um dos bens para funcionar como numerário.

14.3.5 Primeiro e Segundo Teoremas do Bem-Estar

Como no caso de uma economia de trocas, aqui também o primeiro teorema do bem-estar é válido. Formalmente, temos o seguinte resultado:

Teorema 14.1 (Primeiro Teorema do Bem Estar)**.** *Suponha que* $[(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right), \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ *e* (p_x, p_y, p_z) *sejam um equilíbrio competitivo. Então,* $[(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right), \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ *é eficiente no sentido de Pareto.*

Novamente, o primeiro teorema do bem-estar é válido praticamente sem nenhuma hipótese explícita. Lembramos, no entanto, que a hipótese implícita de que a firma e os consumidores são tomadores de preços é essencial para o resultado.

Nós também temos uma versão do segundo teorema do bem-estar para economias com produção. Novamente, tal teorema necessitará de hipóteses explícitas sobre as preferências dos agentes e a tecnologia de produção.

Teorema 14.2 (Segundo Teorema do Bem Estar)**.** *Suponha que todos os consumidores em nossa economia tenham preferências convexas e que as funções de produção das empresas* f *e* g *sejam bem comportadas, então existe uma dotação inicial* (w_A^x, w_B^x)*, uma divisão das ações das firmas* $\theta^f = (\theta_A^f, \theta_B^f)$ *e* $\theta^g = (\theta_A^g, \theta_B^g)$ *e um vetor de preços* (p_x, p_y, p_z) *tais que para a dotação inicial e a divisão de ações anteriores,* $[(x_A, y_A, z_A),\ (x_B, y_B, z_B),\ \left(x_{f_y}, x_{f_z}\right),\ \left(x_{g_y}, x_{g_z}\right)]$ *e* (p_x, p_y, p_z) *constituem um equilíbrio competitivo.*[14.3]

14.3.6 Exemplo

Exemplo 14.1. Considere uma economia com dois consumidores, dois bens e uma firma. Os dois consumidores têm uma dotação inicial de uma unidade do bem 1, mas não possuem inicialmente nenhuma unidade do bem 2. A firma representativa usa o bem 1 para produzir o bem 2 de acordo com a seguinte função de produção:

$$y^2 = 2\left(y^1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Suponha que o consumidor B seja o dono da firma, ou seja, para esta economia $(\theta_A, \theta_B) = (0, 1)$. Para completar, suponha que as funções de utilidade dos consumidores nesta economia sejam dadas por

$$U^A\left(x_A^1, x_A^2\right) = \left(x_A^1\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_A^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$U^B\left(x_B^1, x_B^2\right) = x_B^1 + x_B^2.$$

(a) Dado um vetor de preços (p_1, p_2) e tratando o lucro π da firma como exógeno escreva o problema do consumidor B de forma completa. Isto é, inclua as condições de não negatividade do consumo entre as restrições do problema.

(b) Usando apenas lógica (matemática não vai ser de muita ajuda aqui) descreva a solução do problema do consumidor B. A solução será dividida em 3 casos. Se $p_1 > p_2$, se $p_1 < p_2$ e se $p_1 = p_2$.

(c) Usando o que você aprendeu na parte (b) encontre todos os equilíbrios competitivos para esta economia.

Solução.

(a) O problema do consumidor B é

$$\max_{\left(x_B^1, x_B^2\right)} x_B^1 + x_B^2$$

[14.3] O enunciado do teorema acima não está cem por cento preciso. Para enunciar o teorema precisamente, nós precisaríamos de algumas condições técnicas adicionais que não são importantes no momento. De todo modo, fica aqui o aviso para que o teorema como escrito acima não seja utilizado como fonte de referência para um preciso enunciado do segundo teorema do bem-estar em economias com produção. Vários livros de pós-graduação podem ser utilizados para tanto.

sujeito a

$$\begin{aligned} &p_1 x_B^1 + p_2 x_B^2 \leq p_1 + \pi \\ &x_B^1, x_B^2 \geq 0.^{14.4} \end{aligned}$$

(b) O objetivo do consumidor B é maximizar a soma dos dois bens, dada a sua restrição orçamentária. Mas, então, é óbvio que ele gastará toda a sua renda no bem mais barato. Em outras palavras, os bens 1 e dois são substitutos perfeitos para o consumidor B. Desta forma, se $p_1 > p_2$, então B gastará toda sua renda no bem 2 e a solução do seu problema será

$$\left(x_B^1, x_B^2\right) = \left(0, \frac{p_1 + \pi}{p_2}\right).$$

Similarmente, se $p_1 < p_2$, então

$$\left(x_B^1, x_B^2\right) = \left(\frac{p_1 + \pi}{p_1}, 0\right).$$

Se $p_1 = p_2$, então qualquer combinação (x_B^1, x_B^2) em que o consumidor B gaste toda a sua renda será uma solução para o seu problema. Neste caso as soluções do problema tomam a seguinte forma:

$$\left(x_B^1, x_B^2\right) = \left(\alpha \frac{p_1 + \pi}{p_1}, (1 - \alpha) \frac{p_1 + \pi}{p_2}\right),$$

com α podendo ser qualquer número entre zero e um, incluindo os dois extremos.

(c) A primeira coisa a fazer para encontrar os equilíbrios competitivos é escolher um dos preços como numerário, já que somente preços relativos podem ser determinados. Façamos, então, $p_1 = 1$ e $p_2 = p$. Nosso objetivo agora passa a ser determinar p. Lembremos que o problema do consumidor A é

$$\max_{\left(x_A^1, x_A^2\right)} \left(x_A^1\right)^{\frac{1}{2}} \left(x_A^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} &x_A^1 + p x_A^2 \leq 1 \\ &x_A^1, x_A^2 \geq 0. \end{aligned}$$

O consumidor A é um consumidor Cobb-Douglas, portanto nós já sabemos que a sua função demanda é dada por

$$x_A^1 = \frac{1}{2}\frac{1}{1} \text{ e } x_A^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{p}.$$

[14.4] Lembre-se de que a dotação inicial do consumidor B consiste de apenas uma unidade do bem 1.

Finalmente, nós podemos resolver o problema da firma

$$\max_{y^1} p2\left(y^1\right)^{\frac{1}{2}} - y^1$$

A condição de primeira ordem do problema acima é

$$\frac{p}{\sqrt{y^1}} - 1 = 0$$

O que é equivalente a

$$y^1 = p^2.$$

O lucro da firma será dado por

$$\pi = p^2.$$

Do problema do consumidor B nós sabemos que temos que lidar com 3 casos. Primeiro, vamos ver se existe um equilíbrio em que $p_1 = p_2$, ou seja $p = 1$. Sob tal hipótese sabemos que A estará consumindo a cesta de consumo

$$\left(x_A^1, x_A^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

e a firma estará utilizando 1 unidade do bem 1 no seu processo de produção. Sabemos, também, que qualquer cesta da forma

$$\left(x_B^1, x_B^2\right) = \left(2\alpha, 2\left(1-\alpha\right)\right),$$

para algum α entre zero e um será ótima para o consumidor 2. Tudo que temos que fazer agora é ver se existe algum valor de α que equilibra a nossa economia. Como consequência da lei de Walras sabemos que só precisamos checar o mercado para um dos bens. Chequemos se podemos equilibrar o mercado para o bem 1, então. A condição de equilíbrio para o mercado do bem 1 é

$$x_A^1 + x_B^1 = 2 - y^1,$$

o que em termos das expressões encontradas acima vira

$$\frac{1}{2} + 2\alpha = 2 - 1.$$

Resolvendo a equação acima obtemos $\alpha = 1/4$. Portanto, encontramos o seguinte equilíbrio competitivo para a nossa economia.

$$\begin{aligned}
\left(x_A^1, x_A^2\right) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\
\left(x_B^1, x_B^2\right) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \\
\left(y^1, y^2\right) &= \left(1, 2\right), \\
\left(p_1, p_2\right) &= \left(1, 1\right).
\end{aligned}$$

Temos agora que verificar a existência de equilíbrio para os dois outros casos oriundos da solução do problema do consumidor B. Vamos começar pelo caso $p_1 > p_2$, então. Ou seja, suponha que $1 > p$. Nesta situação temos

$$\begin{aligned} \left(y^1, y^2\right) &= \left(p^2, 2p\right), \\ \pi &= p^2 \\ \left(x_A^1, x_A^2\right) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2p}\right), \\ \left(x_B^1, x_B^2\right) &= \left(0, \frac{1+p^2}{p}\right). \end{aligned}$$

Se tentarmos equilibrar o mercado para o bem 1 nós obtemos

$$\begin{gathered} x_A^1 + x_B^1 = 2 - y^1 \\ \Longleftrightarrow \\ \frac{1}{2} = 2 - p^2 \\ \Longleftrightarrow \\ p^2 = \frac{3}{2}. \end{gathered}$$

A solução positiva da equação acima é $p = \sqrt{3/2}$. Observe que esta solução não satisfaz $p < 1$, portanto não existe equilíbrio competitivo satisfazendo a condição $p_1 > p_2$. Finalmente, temos que testar a condição $p_1 < p_2$, ou seja $1 < p$. Nesta situação temos

$$\begin{aligned} \left(y^1, y^2\right) &= \left(p^2, 2p\right), \\ \pi &= p^2 \\ \left(x_A^1, x_A^2\right) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2p}\right), \\ \left(x_B^1, x_B^2\right) &= \left(1+p^2, 0\right). \end{aligned}$$

Se tentarmos equilibrar o mercado para o bem 2 nós obtemos a seguinte condição:

$$\begin{gathered} x_A^2 + x_B^2 = y^2 \\ \Longleftrightarrow \\ \frac{1}{2p} = 2p \\ \Longleftrightarrow \\ p^2 = \frac{1}{4}. \end{gathered}$$

A solução positiva da equação acima é $p = \sqrt{1/4}$, mas esta solução não satisfaz $p > 1$, portanto, concluímos que não existe equilíbrio competitivo para esta economia satisfazendo $p_1 < p_2$. $\|$

14.4 Leitura Complementar Obrigatória

Na prática, o primeiro e o segundo teoremas do bem-estar têm sérias limitações (principalmente o segundo). A leitura das seções 31.12, 31.13, 32.7, 32.8 e 32.14 de Varian (2006) é fundamental.

14.5 Exercícios

Exercício 14.1. *Considere uma economia com um consumidor e uma firma. Nesta economia existem dois insumos para produção. Trabalho, representado pela letra L e terra, representado pela letra T. O consumidor recebe uma dotação inicial de 15 unidades de L e 10 unidades de T. Trabalho e terra são utilizados para produzir dois tipos de bens, maçãs, representado pela letra A e Bandanas, representado pela letra B. Suponha que a tecnologia de produção de maçãs seja dada pela seguinte função de produção:*

$$A = \min\{L, T\}.$$

Ou seja, para produzir uma unidade de maçã é necessário utilizar pelo menos uma unidade de trabalho e uma unidade de terra. Por outro lado, para se produzir uma unidade de Bandana só é necessário se utilizar uma unidade de trabalho. Ou seja, Bandana tem a seguinte função de produção:

$$B = L.$$

Para finalizar a descrição de nossa economia, suponha que as preferências do nosso consumidor sejam dadas pela seguinte função de utilidade:

$$U(A, B) = A^{\frac{3}{4}} B^{\frac{1}{4}}.$$ [14.5]

Calcule o equilíbrio competitivo desta economia.

Exercício 14.2. *Considere uma economia como a estudada nas notas de aula. Isto é, uma economia com um insumo x, dois bens produzidos, y e z, dois consumidores, A e B, e duas firmas, f e g. As funções de produção das duas firmas são dadas por $f_y(x_{f_y}) = ax_{f_y}$, $f_z(x_{f_z}) = cx_{f_z}$, $g_y\left(x_{g_y}\right) = bx_{g_y}$ e $g_z(x_{g_z}) = dx_{g_z}$, em que $a > b$ e $d > c$.*

(a) *Mostre que em qualquer plano de produção eficiente para esta economia somente a empresa f produz o bem y e somente a empresa g produz o bem z.*

(b) *Escolha o preço do bem x como numerário. Isto é, faça $p_x = 1$. Mostre que em qualquer equilíbrio competitivo da economia acima, em que quantidades positivas dos bens y e z sejam produzidas, o vetor de preços $(1, p_y, p_z)$ é sempre o mesmo. Isto ocorre independentemente de quais sejam as funções de utilidade dos consumidores, independentemente de quais sejam as dotações iniciais do bem x e independentemente de como as ações das firmas estejam distribuídas entre os consumidores (Dica: se tal resultado é independente das funções de utilidade dos consumidores, então provavelmente ele só depende do problema das firmas. A letra (a) facilita a solução, mas, embora dê mais trabalho, também dá para resolver a questão sem utilizá-la.).*

[14.5] É isto mesmo, a utilidade do consumidor só depende de quanto ele consome de maçãs e bandanas.

Exercício 14.3. *Considere a economia no exemplo 1 das notas de aula sobre economias com produção. É possível mostrar que a alocação* $(x_A^1, x_A^2) = (1/4, 1/4)$, $(x_B^1, x_B^2) = (3/4, 7/4)$ *e* $(y^1, y^2) = (1, 2)$ *é eficiente no sentido de Pareto. Aquele exemplo satisfaz as condições do segundo teorema do bem-estar, portanto, sabemos que com a correta redistribuição das dotações iniciais e da propriedade da firma existirá um equilíbrio competitivo que gera a alocação acima. Encontre um destes equilíbrios (Dica: do problema do consumidor A você já consegue descobrir qual vai ser o vetor de preços no equilíbrio. A partir daí, encontrar uma distribuição de dotação inicial e de propriedade da firma que leve a um equilíbrio com a alocação acima é fácil).*

Capítulo 15

Bem-estar Social[15.1]

15.1 Introdução

Idealmente, a função de um governante deveria ser promover o bem-estar social. Isto significa que ao se deparar com alguma decisão o governante deveria fazer a escolha que fosse melhor para a sociedade. O grande problema agora é determinar o que é melhor para a sociedade. Lembre-se, uma sociedade é composta por vários indivíduos com preferências distintas, portanto, o problema de saber quais ações seriam melhores para a sociedade está longe de ser um problema simples. No decorrer do texto nós vamos ver que as dificuldades não são apenas computacionais, sendo em certos casos até mesmo impossível definir um conceito de ótimo social aceitável.

15.2 Agregação de Preferências

O problema de bem-estar social é acima de tudo um problema de agregação de preferências. Nós temos uma sociedade com vários indivíduos com preferências distintas e queremos agregar estas preferências de modo a gerar uma preferência social. Em geral, tal problema não tem uma solução satisfatória, mas no caso em que a economia tem apenas 2 bens as coisas funcionam perfeitamente.

15.2.1 Preferências Sociais sobre Duas Alternativas

Suponha que a nossa economia tenha duas alternativas, x e y. Para ajudar na intuição você pode imaginar que x e y são dois projetos que o governo está pensando em implementar e nós estamos agora tentando descobrir qual deles é preferível de um ponto de vista social.

Nesta sociedade existem N indivíduos e cada indivíduo i tem uma preferência determinada entre as alternativas x e y. Utilizando a notação padrão em economia, escrevemos $x \succ_i y$,

[15.1] Quando eu imprimo o texto na minha impressora, algumas expressões que têm um símbolo de preferência como sobrescrito aparecem apenas como um til. Isto é, a expressão $\succsim^{\succsim}$ aparece apenas como $\succsim^{\sim}$, quando impressa. Ou seja, o arquivo é visualisado corretamente na tela do computador, mas a impressão apresenta tal problema. A única forma que eu encontrei para resolver isto foi imprimir o arquivo como imagem. No meu caso isto é feito selecionando imprimir, depois clicando no botão avançado e depois selecionando a opção imprimir como imagem. Isto é só uma dica caso alguém tenha o mesmo problema.

$x \sim_i y$, $x \prec_i y$ se o indivíduo considera x uma alternativa melhor, indiferente ou pior do que y, respectivamente. Um funcional de preferência social é simplesmente uma regra que associa a cada possível combinação de preferências dos N indivíduos em nossa economia, uma preferência social $\succsim_S$.

Neste caso simplificado, com apenas duas alternativas, temos uma notação que funciona bem. Para um dado indivíduo i, defina f_i como $f_i = 1, 0$ ou -1 se $x \succ_i y$, $x \sim_i y$ ou $x \prec_i y$, respectivamente. Agora o nosso funcional de preferência social pode ser representado por uma função f_S que associa a cada vetor da forma $(f_1, ..., f_N)$ um valor em $\{1, 0, -1\}$. Ou seja, a função f_S tem como argumento um vetor que representa as preferências de todos os agentes em nossa economia e fornece como resposta um ranking social entre x e y. A interpretação é que se $f_S(f_1, ..., f_N) = 1$, 0 ou -1, então x é socialmente preferível, indiferente, ou pior que y, respectivamente.

Observação 15.1. Note que um funcional de bem-estar social associa uma preferência social a todas as possíveis combinações de preferências dos agentes. Suponha que passemos um questionário a todos os agentes de nossa economia perguntando sua opinião a respeito de x e y. O funcional de bem-estar social é, então, uma regra que, para qualquer combinação de respostas possível, associa uma das respostas em $\{x \succ_S y, x \sim_S y, x \prec_S y\}$.

Exemplo 15.1 (Maioria simples)**.** Provavelmente, em um contexto em que nenhum agente possa ser considerado mais importante que o outro, ninguém questionaria que o funcional de bem-estar social mais justo seria o dado por uma votação simples. Usando a notação acima o funcional de bem-estar social associado à regra de votação por maioria simples pode ser escrito como

$$f_S(f_1, ..., f_N) = \begin{cases} 1 \text{ se } \sum_{i=1}^N f_i > 0, \\ 0 \text{ se } \sum_{i=1}^N f_i = 0, \\ -1 \text{ se } \sum_{i=1}^N f_i < 0. \end{cases}$$

Vimos acima o exemplo do funcional de bem-estar social dado por maioria simples. Vamos mudar um pouco a abordagem agora e vamos tentar pensar em algumas propriedades que gostaríamos que um funcional de bem-estar social genérico tivesse. Provavelmente, a propriedade mais indiscutível que qualquer funcional de bem-estar social minimamente aceitável deva satisfazer é a propriedade de unanimidade. Formalmente, podemos representar tal propriedade da seguinte forma:

Definição 15.1. Dizemos que um funcional de bem-estar social f_S respeita unanimidade, ou é Paretiano, se $f_S(1, ..., 1) = 1$ e $f_S(-1, ..., -1) = -1$.

Ou seja, um funcional de bem-estar social é Paretiano se ele respeita um perfil de preferências unânime. Isto é, se todos na sociedade consideram x melhor do que y, então um funcional de bem-estar social Paretiano deve também considerar x melhor do que y. Como dissemos antes, esta propriedade é praticamente inquestionável, no sentido de que qualquer funcional de bem-estar social aceitável deve satisfazê-la.

Exemplo 15.2 (Ditador)**.** Nós dizemos que um funcional de bem-estar social é ditatorial se existe um indivíduo i^* tal que $f_S(f_1, ..., f_{i^*}, ..., f_N) = f_{i^*}$ para qualquer perfil de preferências $(f_1, ..., f_N)$. Ou seja, um funcional de bem-estar social é ditatorial quando ele sempre concorda com a preferência de algum indivíduo específico da sociedade. Observe que um funcional de bem-estar social ditatorial é sempre Paretiano. Ou seja, ao menos ele respeita decisões unânimes.

Como discutimos antes, ser paretiano é uma espécie de propriedade mínima que todo funcional de bem-estar social deve satisfazer, mas como o exemplo acima mostra, mesmo regras intuitivamente super injustas a satisfazem. Agora nós consideraremos três outras propriedades que são desejáveis a um funcional de bem-estar social em um grande número de situações.

Definição 15.2 (Anonimidade)**.** Para qualquer vetor $(f_1, ..., f_N)$, o valor $f_S(f_1, ..., f_N)$ só depende do número de 1's, 0's e -1's em $(f_1, ..., f_N)$.

Ou seja, um funcional de bem-estar social que satisfaz esta propriedade não faz distinção entre os diversos indivíduos na sociedade. Portanto, se 10 indivíduos consideram x melhor do que y, para um funcional que respeita anonimidade não importa quem são esses 10 indivíduos. É claro que esta propriedade só é interessante em situações em que realmente não existem justificativas para considerar a opinião de alguns indivíduos mais importante que a de outros.

A propriedade a seguir é uma espécie de anonimidade entre as alternativas.

Definição 15.3 (Neutralidade Entre Alternativas)**.** Dizemos que um funcional de bem-estar social é neutro entre as alternativas se sempre temos $f_S(f_1, ..., f_N) = -f_S(-f_1, ..., -f_N)$.

Ou seja, um funcional de bem-estar social é neutro entre as alternativas se quando todos os indivíduos da sociedade invertem suas preferências em relação a x e y, então a preferência social também é invertida.

A última propriedade que vamos considerar é a que diz que o funcional de bem-estar social deve ser influenciado por mudanças de preferências individuais de uma forma consistente com estas mudanças.

Definição 15.4 (Resposta Positiva)**.** Dizemos que um funcional de bem-estar social responde de forma positiva a mudanças de preferências individuais, se para quaisquer dois perfis $(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_N)$ e $(f_1, ..., f_N)$ tais que $\hat{f}_i \geq f_i$ pra todo i, com desigualdade estrita para algum i, e $f_S(f_1, ..., f_N) \geq 0$, então $f_S(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_N) = 1$.

Ou seja, suponha que para um dado perfil o nosso funcional de bem-estar social considere x melhor ou pelo menos tão bom quanto y. Agora suponha que alguns indivíduos aumentem a sua consideração por x. A propriedade acima diz que agora o nosso funcional de bem-estar social tem que considerar x estritamente melhor do que y.

Embora existam situações em que nem todas as propriedades acima sejam desejáveis para um funcional de bem-estar social, em geral elas são propriedades bem razoáveis. Em particular, é fácil verificar que a regra da maioria simples satisfaz todas as propriedades acima. Um pouco menos óbvio é o fato de que na verdade maioria simples é o único funcional de bem-estar social que satisfaz Anonimidade, Neutralidade Entre Alternativas e Resposta Positiva. Nós demonstramos tal fato no teorema abaixo.

Teorema 15.1 (Teorema de May)**.** *O único funcional de bem-estar social que satisfaz Anonimidade, Neutralidade Entre Alternativas e Resposta Positiva é a regra da maioria simples.*

Demonstração. Na lista de exercícios vocês vão ter que checar que a regra da maioria sempre satisfaz as três propriedades acima. Agora vamos apenas demonstrar que se f_S é um funcional que satisfaz as três propriedades acima, então f_S é a regra da maioria. Para um dado perfil de preferências $(f_1, ..., f_N)$, defina $n^+(f_1, ..., f_N)$ como o número de indivíduos em $(f_1, ..., f_N)$ que consideram x estritamente melhor do que y, ou seja $n^+(f_1, ..., f_N) := \#\{i : f_i = 1\}$. Similarmente, defina $n^-(f_1, ..., f_N) := \#\{i : f_i = -1\}$. Como f_S satisfaz anonimidade, nós podemos escrever f_S na forma

$$f_S(f_1, ..., f_N) = G\left(n^+(f_1, ..., f_N), n^-(f_1, ..., f_N)\right).$$

A primeira coisa que vamos mostrar agora é que se $n^+(f_1, ..., f_N) = n^-(f_1, ..., f_N)$, então, em conformidade com o que aconteceria com a regra da maioria, o nosso funcional f_S também satisfaz $f_S(f_1, ..., f_N) = 0$. Suponha que $(f_1, ..., f_N)$ é tal que $n^+(f_1, ..., f_N) = n^-(f_1, ..., f_N)$. Por Neutralidade Entre Alternativas nós sabemos que $f_S(f_1, ..., f_N) = -f_S(-f_1, ..., -f_N)$. Mas observe que, por construção, $n^+(f_1, ..., f_N) = n^+(-f_1, ..., -f_N)$ e $n^-(f_1, ..., f_N) = n^-(-f_1, ..., -f_N)$. Como o valor de f_S só depende do número de 1's e -1's em um determinado perfil, nós somos obrigados a concluir que $f_S(f_1, ..., f_N) = f_S(-f_1, ..., -f_N)$. Como antes nós havíamos visto que $f_S(f_1, ..., f_N) = -f_S(-f_1, ..., -f_N)$, nós agora aprendemos que $f_S(-f_1, ..., -f_N) = -f_S(-f_1, ..., -f_N)$ e, portanto, nós temos que ter $f_S(f_1, ..., f_N) = f_S(-f_1, ..., -f_N) = 0$. Já sabemos, então, que quando o número de pessoas que prefere x a y é igual ao número de pessoas que prefere y a x, então f_S realmente age como a regra da maioria. Considere agora um perfil tal que $n^+(f_1, ..., f_N) > n^-(f_1, ..., f_N)$. Isto quer dizer que no perfil $(f_1, ..., f_N)$ temos $n^+(f_1, ..., f_N) - n^-(f_1, ..., f_N)$ pessoas a mais que preferem x a y do que y a x. Considere um novo perfil $(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_N)$ em que nós mudamos o valor dos $n^+(f_1, ..., f_N) - n^-(f_1, ..., f_N)$ primeiros indivíduos que tinham $f_i = 1$ para $\hat{f}_i = 0$. Por construção, o perfil $(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_N)$ satisfaz $n^+(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_N) = n^-(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_N)$ e, pelo que nós aprendemos na primeira parte da demonstração, tem que satisfazer $f_S(\hat{f}_1, ..., \hat{f}_N) = 0$. Mas observe que $f_i \geq \hat{f}_i$ pra todo i, com desigualdade estrita para algum i.[15.2] Usando Resposta Positiva nós concluímos que $f_S(f_1, ..., f_N) = 1$. Para completar, suponha que o perfil $(f_1, ..., f_N)$ é tal que $n^+(f_1, ..., f_N) < n^-(f_1, ..., f_N)$. Isto implica que $n^+(-f_1, ..., -f_N) > n^-(-f_1, ..., -f_N)$. Pelo que acabamos de aprender sabemos, então, que $f_S(-f_1, ..., -f_N) = 1$. Mas agora, usando Neutralidade entre Alternativas nós obtemos $f_S(f_1, ..., f_N) = -f_S(-f_1, ..., -f_N) = -1$. Portanto, f_S comporta-se exatamente como a regra da maioria simples em todas as situações possíveis, o que conclui a demonstração do teorema. ■

15.2.2 Preferências Sociais sobre k Alternativas

Nós agora estudaremos o problema de agregação de preferências sobre um conjunto de K alternativas, com $K \geq 3$. Nós veremos que tal problema tem uma resposta bem menos

[15.2] Mais precisamente, a desigualdade é estrita para os $n^+(f_1, ..., f_N) - n^-(f_1, ..., f_N)$ primeiros indivíduos que satisfazem $f_i = 1$.

satisfatória do que no caso em que $K = 2$. Novamente, suponha que a sociedade seja composta por N agentes e que cada agente i tenha uma preferência $\succsim_i$ sobre um conjunto X de K alternativas. Lembre-se que, usualmente, e será o caso aqui, uma relação de preferência satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 15.1 (Completude)**.** Uma relação de preferência $\succsim_i$ é completa quando para qualquer $x, y \in X$, ou $x \succsim_i y$ ou $y \succsim_i x$.

Ou seja, uma preferência completa $\succsim_i$ sabe comparar qualquer par de alternativas. Para uma preferência completa $\succsim_i$ a afirmação eu não sei como x se compara a y não é uma resposta válida. A outra propriedade usualmente satisfeita pelas relações de preferência utilizadas em economia é a seguinte:

Propriedade 15.2 (Transitividade)**.** Uma relação de preferência $\succsim_i$ é transitiva se para qualquer trio de alternativas x, y e z, toda vez que tivermos $x \succsim_i y$ e $y \succsim_i z$, então necessariamente temos que ter $x \succsim_i z$.

A propriedade acima simplesmente afirma que se x é considerado pelo menos tão bom quanto y pelo agente i e y é considerado pelo menos tão bom quanto z, então o agente i deve considerar x pelo menos tão bom quanto z. Por hipótese, as preferências de todos os agentes em nossa economia satisfarão as duas propriedades acima. Para simplificar a análise, nós faremos uma hipótese adicional, mas ressaltamos que tal hipótese não é necessária para os resultados nesta seção. Por simplicidade, nós suporemos que as preferências dos agentes são todas estritas:

Propriedade 15.3 (Preferências Estritas)**.** Nós dizemos que uma preferência $\succsim_i$ é estrita se para nenhum par de alternativas x e y, com $x \neq y$ nós temos $x \sim_i y$.

Ou seja, os agentes em nossa economia sempre têm uma clara opinião em relação a qualquer par de alternativas. Clara no sentido de que eles sempre sabem apontar qual alternativa é preferida em uma comparação dois a dois.

Uma forma conveniente de representar preferências estritas é através de uma lista ou vetor. Por exemplo, suponha que o nosso conjunto de alternativas seja dado por $X := \{x, y, z\}$. A lista (y, z, x) representa a relação de preferência em que $y \succ z$, $y \succ x$ e $z \succ x$. Nós agora definimos um funcional de bem-estar social no presente contexto:

Definição 15.5. Um funcional de bem-estar social é uma regra que associa a cada possível perfil de preferências estritas $(\succsim_1, ..., \succsim_N)$ uma preferência $\succsim_S$, não necessariamente estrita (mas que satisfaz completude e transitividade).

Nós usaremos a seguinte notação: Para um dado perfil de preferências dos agentes $(\succsim_1, ..., \succsim_N)$, nós representaremos a preferência social induzida por $(\succsim_1, ..., \succsim_N)$, dado um funcional de bem-estar social, pela expressão $\succsim_S^{(\succsim_1,...,\succsim_N)}$. Desta forma, a afirmação $x \succsim_S^{(\succsim_1,...,\succsim_N)} y$ significa que x é socialmente preferível a y, dado o nosso funcional de bem-estar social e dado o perfil de preferências dos agentes $(\succsim_1, ..., \succsim_N)$. De forma similar, $x \succ_S^{(\succsim_1,...,\succsim_N)} y$ significa que x é estritamente socialmente preferível a y.

Exemplo 15.3. Também neste caso, uma das funções de bem-estar social mais imediatas seria a função ditatorial. Ou seja, a função que para qualquer perfil de preferências $(\succsim_1, ..., \succsim_N)$, sempre faz $\succsim_S^{(\succsim_1,...,\succsim_N)} = \succsim_{i^*}$, para algum indivíduo i^*.

Exemplo 15.4. Suponha que $X := \{x, y, z\}$ e que tenhamos três agentes com preferências estritas dadas por (x, y, z), (z, x, y) e (y, z, x). Uma possibilidade para agregar tais preferências seria atribuir 3 pontos para o primeiro colocado, 2 para o segundo e 1 para o último e definir, para cada alternativa em X, uma função de utilidade dada pela soma de sua pontuação no ranking de cada um dos agentes em nossa economia. No exemplo em questão nós teríamos $U(x) = 6$, $U(y) = 6$ e $U(z) = 6$. Logo, o nosso funcional de bem-estar social associaria a este perfil de preferências a seguinte preferência social: $x \sim_S y \sim_S z$.

Novamente, uma propriedade mínima para um funcional de bem-estar social ser considerado aceitável é a propriedade de unanimidade.

Definição 15.6. Um funcional de bem-estar social é Paretiano, ou satisfaz unanimidade, se para qualquer par de alternativas x e y e perfil de preferências $(\succsim_1, ... \succsim_N)$, se é o caso que $x \succ_i y$ para todos os agentes i, então $x \succ_S^{(\succsim_1,...\succsim_N)} y$.

Ou seja, um funcional de bem-estar social é Paretiano se pelo menos ele concorda com a preferência dos agentes quando eles forem unânimes na maneira em que eles comparam x e y.

Nós agora apresentamos outra propriedade que, embora não seja tão indiscutível quanto a propriedade de Paretianismo acima, é bastante comum na análise econômica nos mais diversos contextos.

Definição 15.7. Nós dizemos que um funcional de bem-estar social satisfaz Independência de Alternativas Irrelevantes (IAI) se para quaisquer dois perfis de preferências $(\succsim_1, ..., \succsim_N)$, $(\succsim'_1, ..., \succsim'_N)$ e par de alternativas x e y tais que

$$x \succsim_i y \text{ se e somente se } x \succsim'_i y,$$

para todo i, também é verdade que

$$x \succsim_S^{(\succsim_1,...,\succsim_N)} y \text{ se e somente se } x \succsim_S^{(\succsim'_1,...,\succsim'_N)} y.$$

É importante que o formalismo matemático não prejudique o entendimento da propriedade acima, que na verdade é simples. O que IAI diz é que o ranking social entre qualquer par de alternativas x e y, só deve depender de como os agentes em nossa economia comparam x e y. Ou seja, na hora de comparar x e y, não faz diferença para o nosso ranking social se o agente i considera x a melhor alternativa de todas e y a pior, ou se i considera x a quarta melhor alternativa e y a quinta. Tudo o que o ranking usa é a informação de que i considera x melhor do que y.

É fácil perceber que a propriedade acima é bem mais discutível do que a propriedade de Paretianismo, mas esta também tem as suas justificativas. A principal delas é que se estamos interessados em decidir se x é melhor do que y socialmente, não há justificativa óbvia para concluirmos que tal decisão deva depender de como os agentes em nossa economia comparam x e y com outras alternativas. No entanto, alguns funcionais de bem-estar social interessantes não satisfazem tal condição.

Exemplo 15.5. Considere o funcional de bem-estar social no exemplo 15.4. Modifiquemos um pouco o perfil de preferências naquele exemplo para (x, y, z), (z, x, y) e (y, x, z). Tudo que fizemos foi trocar a posição entre x e z no ranking do último agente. Ou seja, não mudamos, para nenhum agente, a forma como ele compara y e z. Mas observe que agora temos $U(y) = 6$ e $U(z) = 5$. Mas isto implica que agora socialmente nós temos $y \succ_S z$ contrariando IAI.

Na verdade, um resultado famoso provado por Kenneth Arrow mostra que o ocorrido no exemplo acima não foi um caso especial.

Teorema 15.2 (Teorema da Impossibilidade de Arrow)**.** *Suponha que o número de alternativas seja pelo menos 3. Se um funcional de bem-estar social satisfaz Paretianismo e Independência de Alternativas Irrelevantes, então este é um funcional ditatorial.*

A demonstração do teorema acima na sua forma mais geral está um pouco além dos objetivos deste curso, mas nós demonstraremos o resultado para o caso simplificado em que existem apenas dois agentes e três alternativas.

Demonstração do teorema de Arrow com 2 agentes e 3 alternativas. Seja $X := \{x, y, z\}$ o conjunto de alternativas. Suponha que o agente 1 não seja um ditador. Nós vamos mostrar que neste caso o agente 2 será um ditador. Se 1 não é um ditador, então tem que existir um par de alternativas, digamos x e y, e um perfil de preferências tais que $x \succ_1 y$, $y \succ_2 x$, mas $y \succsim_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$.[15.3] Dado IAI, isto implica que na verdade para qualquer perfil em que $x \succ_1 y$ e $y \succ_2 x$ nós teremos $y \succsim_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$. Nós prosseguiremos através de vários passos.

Passo 1. *Para qualquer perfil $(\succsim_1, \succsim_2)$ em que $z \succ_2 x$, nós necessariamente temos $z \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$.*

Demonstração do Passo 1. Considere o seguinte perfil: $\succsim_1 = (x, z, y)$ e $\succsim_2 = (z, y, x)$. Por unanimidade nós temos que ter $z \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} y$, mas pelo que nós aprendemos acima nós também temos que ter $y \succsim_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$. Mas agora transitividade da preferência social implica que $z \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$. Agora IAI e Paretianismo implicam que para qualquer perfil $(\succsim_1, \succsim_2)$ em que $z \succ_2 x$ nós teremos $z \succ_S x$.[15.4] $\|$

Nós precisamos de mais um passo agora.

Passo 2. *Para qualquer perfil $(\succsim_1, \succsim_2)$ em que $y \succ_2 x$, nós necessariamente temos $y \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$.*

Demonstração do Passo 2. Agora considere o seguinte perfil $\succsim_1 = (x, y, z)$ e $\succsim_2 = (y, z, x)$. Por unanimidade nós temos $y \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} z$ e pelo passo anterior temos $z \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$. Agora, por transitividade, temos $y \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$. Por IAI e Paretianismo aprendemos que para qualquer perfil $(\succsim_1, \succsim_2)$ em que $y \succ_2 x$, então $y \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$. $\|$

[15.3] Para chegar a tal conclusão nós estamos usando o fato de que, devido a Paretianismo, sempre que $x \succ_1 y$ e $x \succ_2 y$ nós obrigatoriamente teremos $x \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} y$.

[15.4] Observe que para qualquer perfil $(\succsim_1, \succsim_2)$ em que $z \succ_1 x$ e $z \succ_2 x$, Paretianismo imediatamente nos garante que $z \succ_S^{(\succsim_1, \succsim_2)} x$. É por isto que na demonstração do passo nós só nos preocupamos com o caso em que $x \succ_1 z$ e $z \succ_2 x$.

Todos os outros casos possíveis podem ser demonstrados de forma similiar aos dois passos acima. Isto completa a demonstração do teorema. ■

15.3 Funções de Utilidade Social

Na seção anterior nós vimos um resultado um pouco inquietante. O Teorema de Impossibilidade de Arrow mostrou que sob certas condições de consistência é impossível agregar as preferências dos diversos agentes da nossa economia de uma forma satisfatória. Na verdade, aquele teorema falava de duas propriedades que um funcional de bem-estar social deveria satisfazer. A primeira delas era a propriedade de Paretianismo. Como vimos antes, esta propriedade é totalmente inquestionável. Já a outra propriedade mencionada no enunciado daquele teorema, IAI, é bem mais discutível. Isto deixa aberta a possibilidade de que possamos encontrar funcionais de bem-estar social razoáveis, mas que não satisfaçam IAI.

Em particular, certos tipos de votação que levem em conta o quanto uma pessoa prefere uma alternativa a outra serão possíveis. Como veremos a seguir, o grande problema é que a teoria econômica como foi desenvolvida é totalmente ordinal. Ou seja, a nossa teoria não entende afirmações do tipo x é muito melhor do que y, ou x é 10 pontos superior a y. A teoria econômica como foi desenvolvida é totalmente binária. Ela só entende se x é melhor ou pior do que y, sem espaço para considerações de intensidade.

A discussão acima é um pouco subjetiva demais, e sem um maior conhecimento de teoria da escolha ela torna-se um pouco confusa. Vamos tentar uma abordagem mais prática para a agregação de preferências que ilustrará bem os problemas acima.

Suponha que tenhamos K bens públicos na nossa economia e N consumidores. O que queremos dizer com bens públicos é que todos os agentes em nossa economia sempre recebem a mesma quantidade de cada bem. Você pode pensar nos K bens acima como estradas, serviços de saúde, etc. Uma alocação agora é simplesmente um vetor $\left(x^1,...,x^K\right)$ que diz o quanto de cada bem está sendo oferecido à sociedade. Suponha que tenhamos um conjunto X que represente todas as alocações factíveis em nossa economia. Ou seja, um vetor $\left(x^1,...,x^K\right)$ é factível se e somente se $\left(x^1,...,x^K\right) \in X$. O nosso problema agora é saber que alocações em X são melhores ou piores sob um ponto de vista social.

Cada indivíduo i em nossa economia tem uma relação de preferências $\succsim_i$ bem definida sobre as cestas de consumo em X. Vamos supor que as relações de preferências de todos os indivíduos admitam uma representação por função de utilidade. Isto é, nós vamos supor que para todo indivíduo i, exista uma função U^i tal que para quaisquer cestas de consumo $\left(x^1,...,x^K\right), \left(y^1,...,y^K\right) \in X$,

$$\left(x^1,...,x^K\right) \succsim_i \left(y^1,...,y^K\right) \iff U^i\left(x^1,...,x^K\right) \geq U^i\left(y^1,...,y^K\right).$$

Um jeito fácil e aparentemente justo de agregar as preferências dos consumidores em nossa economia seria, então, simplesmente somar as suas funções de utilidade. Ou seja, nós poderíamos definir uma função de utilidade social dada por

$$U^S\left(x^1,...,x^K\right) := \sum_{i=1}^{N} U^i\left(x^1,...,x^K\right).$$

O grande problema é que o método descrito acima, embora aparentemente justo, é totalmente arbitrário. Lembre-se que a função de utilidade que representa uma dada relação de preferência nunca é única. Formalmente, suponha que a função U^i represente as preferências do agente i. Agora considere qualquer função estritamente crescente V. Não é difícil ver que a função $V\left(U^i(.)\right)$ também representa $\succsim_i$.[15.5]

Em particular, se U^i representa as preferências do agente i, então λU^i, para qualquer $\lambda > 0$ também é uma representação para as mesmas preferências. Isto torna a função de utilidade social acima tão justificável quanto qualquer outra função do tipo

$$U^S\left(x^1, ..., x^K\right) := \sum_{i=1}^{N} \lambda^i U^i\left(x^1, ..., x^K\right),$$

em que pra todo i, $\lambda^i > 0$.

Esta liberdade que temos para multiplicar funções de utilidade por constantes positivas abrange até mesmo a função de utilidade social U^S. Esta constatação faz com que possamos nos concentrar em funções de utilidade social da seguinte forma:

$$U^S\left(x^1, ..., x^K\right) := \sum_{i=1}^{N} \alpha^i U^i\left(x^1, ..., x^K\right),$$

em que $\alpha^i > 0$ pra todo i, e $\sum_{i=1}^{N} \alpha^i = 1$. Ou seja, nossas funções de utilidade social agora são médias ponderadas das utilidades dos diversos agentes. Como discutimos antes, uma função como a acima é tão justificável quanto uma que simplesmente some as utilidades dos agentes. Mas será que a arbitrariedade do método acima o torna completamente inútil? Suponha que nós tenhamos obtido uma função de utilidade social utilizando o método acima para algum vetor α e agora nós vamos usar esta função para escolher a suposta melhor aloção sob um ponto de vista social. Ou seja, para U^S definida como acima, nós vamos resolver o seguinte problema:

$$\max_{(x^1,...,x^K)} U^S\left(x^1, ..., x^K\right)$$

sujeito a

$$\left(x^1, ..., x^K\right) \in X.$$

Suponha que a solução para o problema acima seja $\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right)$. O que nós podemos dizer sobre $\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right)$? Uma propriedade que $\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right)$ certamente terá é eficiência no sentido de Pareto. Formalmente:

[15.5] Formalmente, suponha que U^i representa $\succsim_i$. Ou seja, para qualquer $\left(x^1, ..., x^K\right), \left(y^1, ..., y^K\right) \in X$,

$$\left(x^1, ..., x^K\right) \succsim_i \left(y^1, ..., y^K\right) \iff U^i\left(x^1, ..., x^K\right) \geq U^i\left(y^1, ..., y^K\right).$$

Mas observe que, se V é estritamente crescente, então

$$V\left(U^i\left(x^1, ..., x^K\right)\right) \geq V\left(U^i\left(y^1, ..., y^K\right)\right) \iff U^i\left(x^1, ..., x^K\right) \geq U^i\left(y^1, ..., y^K\right).$$

Logo, $V\left(U^i(.)\right)$ também representa $\succsim_i$.

Proposição 15.1. *Se* $\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right)$ *é uma solução para o problema acima, então* $\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right)$ *é eficiente no sentido de Pareto. Isto é, não existe nenhuma alocação* $\left(x^1, ..., x^K\right) \in X$ *tal que*

$$\left(x^1, ..., x^K\right) \succsim_i \left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right),$$

para todos os agentes i*, com preferência estrita para pelo menos um agente* i^**.*

Demonstração da Proposição. Suponha que exista uma alocação $\left(x^1, ..., x^K\right) \in X$ tal que

$$\left(x^1, ..., x^K\right) \succsim_i \left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right),$$

para todo i e exista i^* tal que

$$\left(x^1, ..., x^K\right) \succ_{i^*} \left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right).$$

Como as funções U^i representam as preferências dos agentes, isto implica que

$$U^i\left(x^1, ..., x^K\right) \geq U^i\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right),$$

pra todo i e

$$U^{i^*}\left(x^1, ..., x^K\right) > U^{i^*}\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right).$$

Mas então,

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha^i U^i\left(x^1, ..., x^K\right) > \sum_{i=1}^{N} \alpha^i U^i\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right),$$

o que contraria o fato de que $\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right)$ é uma solução para o problema de maximização da utilidade social acima. Nós concluímos, então, que $\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right)$ tem que ser eficiente no sentido de Pareto. ‖

A proposição acima nos mostra que as escolhas feitas quando uma função de utilidade social como a definida acima é utilizada pelo menos são eficientes no sentido de Pareto. Como já discutimos antes, eficiência no sentido de Pareto é uma propriedade mínima que toda alocação desejável sob um ponto de vista social deve satisfazer. Mas será que a abordagem acima nos garante algo mais do que eficiência. Infelizmente, pelo menos enquanto as preferências dos nossos agentes forem bem comportadas, a resposta é não. A proposição abaixo formaliza tal resultado.

Proposição 15.2. *Suponha que* X *seja um conjunto compacto e convexo e que todos os agentes tenham preferências contínuas, estritamente monótonas e convexas.*[15.6] *Fixe uma alocação* $\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right)$ *eficiente no sentido de Pareto. Então, existe uma coleção de funções* $\{U^i\}_{i=1}^N$ *sendo que para cada* i*,* U^i *representa* $\succsim_i$ *e um vetor* $\left(\alpha^1, ..., \alpha^N\right)$ *satisfazendo* $\alpha^i \geq 0$ *para todo* i *e* $\sum_{i=1}^N \alpha^i = 1$ *tais que* $\left(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^K\right)$ *é uma solução para o problema de maximização da utilidade para uma função* U^S *definida por*

$$U^S\left(x^1, ..., x^K\right) := \sum_{i=1}^{N} \alpha^i U^i\left(x^1, ..., x^K\right).$$

[15.6] Vocês não precisam se preocupar com estas hipóteses técnicas aqui. Elas estão aqui apenas para que o resultado seja escrito de forma precisa, mas o importante é a idéia de que o resultado é válido se as preferências dos agentes forem razoavelmente bem comportadas.

Observe que para a proposição acima nós temos que permitir que as vezes α^i seja igual a zero para algum agente i. Intuitivamente, existem alocações eficientes que ignoram totalmente o bem-estar de alguns agentes e tais alocações só podem ser obtidas se pudermos associar um peso zero às funções de utilidades de tais agentes na definição de U^S. De qualquer forma, a mensagem da proposição acima é que na maioria das vezes o máximo que uma função de utilidade social pode nos oferecer é a garantia que as escolhas feitas usando-se tal função serão eficientes. Mas isto é muito pouco. Além de nós já termos outros métodos para identificar alocações eficientes, algumas alocações eficientes não parecem aceitáveis sob um ponto de vista social. Na próxima seção nós analisaremos um problema um pouco diferente. Nós abordaremos a questão de como dividir recursos entre os diversos agentes em nossa economia de uma forma justa.

15.4 Alocações Justas

Nas seções anteriores nós vimos alguns resultados negativos a respeito de agregações de preferências a respeito de escolhas sociais. A mensagem que nós podemos tirar de tais resultados é que em geral o problema de agregar as preferências de diversos agentes de uma forma que pareça justa é muito complicado e não tem uma resposta muito satisfatória.

Nós estudaremos agora um problema um pouco diferente. Agora o problema será dividir uma certa quantidade de recursos entre diversos agentes de uma forma justa. Nós vamos ver que tal problema tem uma resposta bem mais satisfatória do que o problema de escolher uma alocação de bens públicos de uma maneira socialmente ótima.

Formalmente, suponha que tenhamos N agentes e K bens na nossa economia. A nossa economia tem uma dotação inicial agregada A^j de cada bem j. Suponha agora que a nossa tarefa seja dividir tais bens de uma maneira justa e eficiente. Provavelmente, ao receber tal tarefa a maioria das pessoas iria propor uma divisão igualitária dos recursos. Ou seja, a proposta mais natural seria oferecer a cesta de consumo $\left(A^1/N, ..., A^K/N\right)$ para todos os agentes. Ninguém pode argumentar que esta divisão seja injusta, afinal de contas estamos tratando todos os agentes de forma absolutamente simétrica. Mas será que esta é uma divisão desejável de um ponto de vista social?

Considere o seguinte exemplo, um pouco exagerado, mas que ilustra bem por que esta divisão geralmente não é muito apropriada sob um ponto de vista social.

Exemplo 15.6. Suponha que tenhamos dois agentes e dois bens na nossa economia. As dotações iniciais agregadas dos dois bens são dadas por $A^1 = A^2 = 1$ e as funções de utilidade dos agentes são dadas por

$$U^A\left(x_A^1, x_A^2\right) = x_A^1 \text{ e } U^B\left(x_B^1, x_B^2\right) = x_B^2.$$

Ou seja, o agente A só se preocupa com o quanto ele consome do bem 1 e o agente 2 só se preocupa com o quanto ele consome do bem 2. No entanto, de acordo com a divisão igualitária acima os dois agentes iriam receber a cesta de consumo $(1/2, 1/2)$. Isto é, o agente A iria receber $1/2$ unidade do bem 2, o qual ele não dá a mínima importância e, similarmente, o agente B iria receber meia unidade do bem 1. É claro, que o problema com tal exemplo é que a divisão igualitária não é nem mesmo eficiente no sentido de Pareto, o que nós já concordamos é uma condição mínima para uma alocação ser socialmente aceitável.

No exemplo acima nós vimos que a divisão igualitária dos bens na nossa economia em geral não tem que ser eficiente no sentido de Pareto. Ainda assim, ninguém pode discordar que esta parece ser uma divisão justa. Tentemos agora encontrar a propriedade que faz com que tal divisão nos pareça justa. Que tal a seguinte definição?

Definição 15.8. Dizemos que uma dada alocação $\left[\left(x_1^1,...,x_1^K\right),...,\left(x_N^1,...,x_N^K\right)\right]$ é equitativa se nenhum agente sente inveja da cesta de consumo recebida pelo outro agente. Formalmente, a alocação acima é equitativa se para nenhum i,j, $U^i(x_j^1,...,x_j^K) > U^i(x_i^1,...,x_i^K)$.

Observe que a alocação igualitária é equitativa. Obviamente, se todo mundo recebe a mesma coisa ninguém pode ter inveja de ninguém. Por outro lado, o conceito de alocação equitativa parece ser uma descrição interessante do que consideraríamos uma alocação justa. O problema é que, como vimos acima, alocações equitativas não necessariamente serão eficientes. Portanto, embora nenhum agente possa reclamar que foi injustiçado em uma alocação equitativa, sob um ponto de vista social estas alocações podem as vezes ser inapropriadas.

A discussão acima motiva a seguinte definição:

Definição 15.9. Dizemos que uma alocação $\left[\left(x_1^1,...,x_1^K\right),...,\left(x_N^1,...,x_N^K\right)\right]$ é justa se esta é uma alocação equitativa e eficiente no sentido de Pareto.

A definição acima parece ser uma descrição apropriada do que seria uma alocação aceitável sob um ponto de vista social. A questão agora é saber se tais alocações sempre existem e, caso a resposta de tal pergunta seja positiva, como fazer para encontrá-las. Contrariando os resultados negativos das seções anteriores, a resposta para tal pergunta é positiva e além disto está relacionada a um conceito que já nos é bastante familiar.

Considere o seguinte procedimento. Comece com a alocação igualitária. Ou seja, ofereça a cesta de consumo $\left(A^1/N,...,A^K/N\right)$ para todos os indivíduos desta economia. Agora encontre um equilíbrio competitivo $(p_1,...,p_K)$ e $\left[\left(x_1^1,...,x_1^K\right),...,\left(x_N^1,...,x_N^K\right)\right]$ para esta economia. A seguinte proposição é de fácil demonstração:

Proposição 15.3. *$\left[\left(x_1^1,...,x_1^K\right),...,\left(x_N^1,...,x_N^K\right)\right]$ é uma alocação justa.*

Demonstração da Proposição. Pelo Primeiro Teorema do Bem-estar nós já sabemos que $\left[\left(x_1^1,...,x_1^K\right),...,\left(x_N^1,...,x_N^K\right)\right]$ é eficiente no sentido de Pareto, portanto nós só temos que mostrar que $\left[\left(x_1^1,...,x_1^K\right),...,\left(x_N^1,...,x_N^K\right)\right]$ é equitativa. Mas observe que todos os consumidores começam com a mesma dotação inicial. Isto implica que todos eles enfrentam exatamente a mesma restrição orçamentária e, consequentemente, qualquer consumidor na nossa economia poderia comprar a cesta de consumo de qualquer outro consumidor se ele assim o quisesse. Então, se o consumidor i comprou a cesta $\left(x_i^1,...,x_i^K\right)$ e não a cesta $(x_j^1,...,x_j^K)$, é porque $U^i\left(x_i^1,...,x_i^K\right) \geq U^i(x_j^1,...,x_j^K)$. Concluímos que em tal alocação nenhum consumidor sente inveja do outro, o que completa a demonstração. ||

15.5 Exercícios

Exercício 15.1. *Considere uma situação em que os agentes têm preferências sobre um par de alternativas x e y. Mostre que o funcional de bem-estar social dado pela regra de votação por maioria simples é Paretiano e satisfaz as propriedades Anonimidade, Neutralidade entre Alternativas e Resposta Positiva.*

Exercício 15.2. *Complete mais dois passos da demonstração do Teorema de Impossibilidade de Arrow para dois agentes e três alternativas. Mais especificamente, usando o que foi aprendido nos passos 1 e 2 nas notas de aula mostre que para qualquer perfil* $(\succsim_1, \succsim_2)$ *em que* $z \succ_2 y$, *nós temos que ter* $z \succ_S^{(\succsim_1,\succsim_2)} y$ *e, posteriormente, mostre que para qualquer perfil* $(\succsim_1, \succsim_2)$ *em que* $x \succ_2 y$, *nós temos que ter* $x \succ_S^{(\succsim_1,\succsim_2)} y$.

Exercício 15.3. *Suponha que estejamos em uma economia como a da seção 4 das notas de aula. Ou seja, os agentes têm preferências sobre suas cestas de consumo individual. Seja* $\left[\left(x_1^1, ..., x_1^K\right), ..., \left(x_N^1, ..., x_N^K\right)\right]$ *uma alocação eficiente no sentido de Pareto. Mostre que existe um agente* i^* *que não inveja ninguém. Ou seja, mostre que existe um agente* i^* *tal que* $U^{i^*}\left(x_{i^*}^1, ..., x_{i^*}^K\right) \geq U^{i^*}\left(x_i^1, ..., x_i^K\right)$ *pra todo* i.

Exercício 15.4. *Suponha que estejamos em uma situação com 3 alternativas* $\{x, y, z\}$ *e três agentes* $\{A, B, C\}$. *As preferências dos agentes são dadas pela tabela abaixo:*

A	B	C
x	y	z
y	z	x
z	x	y

.

Ou seja, o agente A *prefere* x *a* y *e prefere* y *a* z, *e assim por diante. Suponha que nossa tarefa seja escolher uma das alternativas acima com o intuito de fazer o melhor para a sociedade. Considere o seguinte método: primeiro escolha um par de alternativas e realize uma votação entre os agentes. Feito isto, pegue a alternativa vencedora da votação anterior e realize uma nova votação contra a alternativa que ficou de fora da primeira votação.*

(a) *Mostre que tal procedimento é totalmente manipulável. Isto é, mostre que de acordo com a ordem de votação que escolhermos nós podemos influenciar na escolha final.*

(b) *Suponha agora que nós usemos estas votações dois a dois para definir a nossa preferência social entre as alternativas. Ou seja, uma alternativa será socialmente preferível a outra se mais agentes a considerarem melhor do que a outra. Chame a preferência social definida desta forma de* $\succsim_S$. *Não é difícil ver que tal método para definir uma preferência social satisfaz Paretianismo e IAI, mas obviamente não é ditatorial. Parece, então, que algo mais fundamental não está correto aqui. Discuta.*

Capítulo 16

Monopólio

16.1 Introdução

Até o momento, temos estudado apenas mercados competitivos. Quando estudamos equilíbrio geral, por exemplo, trabalhamos durante todo o tempo com a hipótese de que firmas e consumidores eram tomadores de preços. Tais modelos são apropriados para o estudo de economias em que existe um grande número de pequenas empresas e de pequenos consumidores, mas quando temos uma situação de monopólio é claro que a hipótese de que a empresa monopolista age como tomadora de preços não é apropriada.

Neste capítulo estudaremos exatamente modelos em que uma determinada firma age como monopolista em um determinado mercado. Nesta situação é natural que o monopolista reconheça que as suas decisões de produção influenciem o preço final do produto e, portanto, faça as suas escolhas levando tal fato em consideração. Na verdade, o mais natural é até modelarmos o monopolista como se este escolhesse o preço de venda do seu produto. Nós veremos que, nos nossos modelos, interpretarmos o monopolista como escolhendo o preço ou a quantidade produzida são duas abordagens completamente equivalentes. Apenas por conveniência, nós escreveremos o problema do monopolista como aquele de um agente que escolhe a quantidade a produzir.

16.2 Maximização de Lucro do Monopolista

Vamos iniciar pelo problema de maximização de lucros do monopolista. Nós utilizaremos $p(y)$ para representar a curva de demanda inversa do mercado e $c(y)$ para representar a função custo. Seja $r(y) := p(y)\,y$ a função receita do monopolista. O problema do monopolista assume a seguinte forma:

$$\max_y r(y) - c(y).$$

A condição de primeira ordem do problema acima é simplesmente

$$r'(y) = c'(y).$$

Ou seja, a solução do problema acima se dará em um ponto em que a receita marginal do monopolista se iguale ao seu custo marginal. Note que tal fato é bastante intuitivo. Se aumentando um pouco a quantidade produzida a receita aumentasse mais do que o custo, então é claro que o monopolista iria querer produzir mais. Similarmente, se diminuindo um pouco a quantidade produzida o custo diminuísse mais do que a receita, então, obviamente, o monopolista iria querer produzir um pouco menos.

Na verdade, mesmo no caso de uma empresa competitiva, a maximização dos lucros também se dá em um nível de produção que satisfaz a condição acima. A diferença é que naquele caso a receita marginal é simplesmente o preço do produto a ser vendido. No caso do monopolista, como o preço é uma função da quantidade produzida, a expressão para a receita marginal é dada por

$$r'(y) = p'(y)\, y + p(y)\,.$$

Lembre-se que do teorema da função implícita nós temos

$$p'(y) = \frac{1}{y'(p)}.$$

Substituindo isto na expressão para a receita marginal nós podemos escrevê-la como

$$r'(y) = p(y)\left[1 + \frac{1}{\varepsilon(y)}\right],$$

em que

$$\varepsilon(y) := y'(p)\,\frac{p}{y}$$

é o que nós chamamos elasticidade da demanda. Usando a expressão acima na condição de primeira ordem do problema do monopolista nós podemos escrever

$$c'(y) = p(y)\left[1 + \frac{1}{\varepsilon(y)}\right].$$

Como a elasticidade da demanda em relação ao preço é naturalmente negativa, nós vemos que em uma situação de monopólio a quantidade escolhida para a produção induzirá um custo marginal inferior ao preço do produto. Para que tal fato fique sempre claro as vezes vale a pena escrever a expressão acima como

$$c'(y) = p(y)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon(y)|}\right].$$

Lembre-se que em uma situação competitiva a elasticidade da demanda em relação ao preços é infinita, portanto a expressão acima continua nos dando a resposta certa mesmo no caso competitivo. Isto é, numa situação competitiva

$$\begin{aligned} c'(y) &= p(y)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon(y)|}\right] \\ &= p(y)\left[1 - \frac{1}{\infty}\right] \\ &= p(y)\,. \end{aligned}$$

Se isolarmos $p(y)$ na expressão acima nós obtemos

$$p(y) = c'(y)\left[\frac{1}{1 - 1/|\varepsilon(y)|}\right].$$

Ou seja, numa situação de monopólio o preço escolhido pelo monopolista é um *markup* acima do custo marginal.

Para concluir a discussão aqui, observe que se $|\varepsilon(y)|$ fosse menor do que 1, então a receita marginal do monopolista seria negativa. Obviamente o monopolista nunca escolheria tal nível de produção, logo a solução do problema do monopolista sempre se dará em um ponto em que $|\varepsilon(y)| > 1$.

Suponhamos que a curva de demanda inversa do bem y seja linear. Ou seja, suponhamos que ela seja dada pela seguinte expressão:

$$p(y) = a - by,$$

em que $a, b > 0$. Neste caso a função receita será dada por

$$r(y) = ay - by^2,$$

e a receita marginal será dada por

$$r'(y) = a - 2by.$$

Observe que a curva de receita marginal tem o mesmo intercepto vertical, a, que a curva de demanda, mas com uma inclinação duas vezes maior. Este caso simplificado pode ser representado graficamente como na figura 16.1 abaixo.

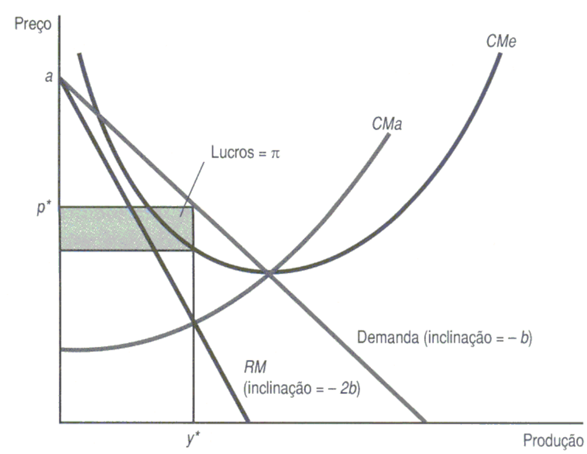

Figura 16.1: Curva de demanda inversa linear

A produção ótima y^*, é o ponto em que a curva de receita marginal intercepta a curva de custo marginal. Após identificado o ponto de produção ótima, nós identificamos o preço relativo a tal nível de produção na curva de demanda inversa (ponto p^* na figura 16.1). A receita do monopolista será p^*y^*, enquanto o seu custo será $c(y^*) = CM_e(y^*)\,y^*$. Obviamente o lucro do monopolista é dado por $p^*y^* - CM_e(y^*)\,y^*$, a área do retângulo cinza na figura 16.1.

16.3 A Ineficiência do Monopólio

A indústria competitiva opera em um ponto em que o preço é igual ao custo marginal. Nós vimos anteriormente que uma indústria monopolista opera em um ponto em que o preço é maior do que o custo marginal. Por este motivo, o preço será em geral maior e a produção menor em uma situação de monopólio do que em uma situação competitiva. Por isto, os consumidores estarão tipicamente em uma situação pior se eles estiverem comprando de uma empresa monopolista.

Pela mesma razão, o monopolista estará em uma situação melhor. A primeira vista, então, não fica claro se no agregado a sociedade estará melhor ou pior em uma situação de monopólio do que numa situação competitiva. Veremos, no entanto, que podemos argumentar contra o monopólio no que tange à eficiência.

Suponha que estejamos em uma situação de monopólio e considere a quantidade y^* e preço $p^* = p(y^*)$ provenientes da solução do problema do monopolista. Como vimos antes, $p^* > c'(y^*)$. Considere agora um preço p entre p^* e $c'(y^*)$. Se o consumidor pudesse comprar uma pequena quantidade do bem y pelo preço p ele estaria em uma melhor situação. Similarmente, o monopolista também ficaria feliz se ele pudesse vender mais um pouco do bem y pelo preço p. Ou seja, tanto o monopolista como o consumidor estariam em uma situação melhor, o que mostra que existe uma certa ineficiência em uma situação de monopólio.

Aprendemos acima que um mercado monopolista é ineficiente. Seria interessante agora obter alguma medida desta ineficiência. Considere a figura 2, em que estão ilustradas as variações nos excedentes do produtor e do consumidor resultantes da passagem da produção monopolista para a competitiva. Observe que a área $A+B$ representa um ganho no excedente do consumidor quando da passagem de uma economia monopolista para uma competitiva. Por outro lado, a região C representa um ganho no excedente do produtor, enquanto a região A representa uma perda de excedente para o monopolista. Note que a região A, então, representa apenas uma transferência de excedente do produtor para o consumidor. Mas as regiões B e C representam aumentos verdadeiros de excedente. Portanto, o ganho agregado de excedente quando passamos de uma situação de monopólio para uma situação competitiva é dado por $B + C$.

Exemplo 16.1 (Economia com um consumidor e uma firma)**.** Suponha que estejamos na economia com um consumidor e uma firma que vimos quando estudamos equilíbrio geral. Suponha que a função de utilidade do consumidor seja dada por $U(x, y) = x + 2\sqrt{y}$. O consumidor tem uma dotação inicial w^x do bem x. O bem y é produzido de acordo com a função de produção $y = \sqrt{x}$. Lembre-se que para tal economia o conceito de eficiência no sentido de Pareto consiste simplesmente na solução do seguinte problema de maximização:

$$\max_{(x,y)} x + 2\sqrt{y}$$

sujeito a

$$y = \sqrt{w^x - x}.$$

O Lagrangeano do problema acima é dado por

$$\mathcal{L} = x + 2\sqrt{y} - \lambda\left[y - \sqrt{w^x - x}\right].$$

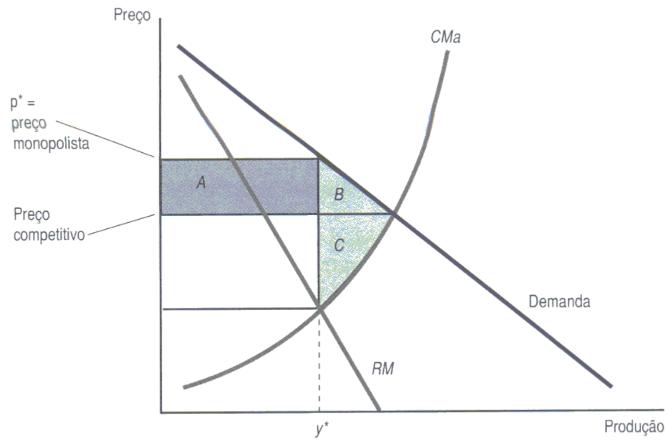

Figura 16.2: Perda de eficiência devida ao monopólio

As condições de primeira ordem da solução do problema são

$$\begin{aligned}
x &: \quad 1-\lambda\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{w^x-x}}=0 \\
y &: \quad \frac{1}{\sqrt{y}}-\lambda=0 \\
\lambda &: \quad y-\sqrt{w^x-x}=0.
\end{aligned}$$

Isolando λ na segunda condição e substituindo na primeira, nós obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}=2\sqrt{w^x-x}.$$

Observe que, como $y=\sqrt{w^x-x}$, a expressão acima pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{y}}=2y,$$

o que implica que $y=\sqrt[3]{1/4}$. Suponha agora que estejamos em uma economia competitiva em que o consumidor e a firma são tomadores de preços. Escolhendo o preço do bem x como numerário nós podemos escrever o problema do consumidor como

$$\max_{(x,y)} x+2\sqrt{y}$$

sujeito a

$$x+py=w^x+\pi.$$

O Lagrangeano do problema acima é

$$\mathcal{L}=x+2\sqrt{y}-\lambda\left[x+py-w^x-\pi\right].$$

As condições de primeira ordem do problema são:

$$\begin{aligned} x &: \quad 1-\lambda = 0 \\ y &: \quad \frac{1}{\sqrt{y}} - \lambda p = 0 \\ \lambda &: \quad x + py - w^x - \pi = 0. \end{aligned}$$

Isolando λ na primeira condição e substituindo na segunda nós obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = p.$$

O problema da firma pode ser escrito como

$$\pi = \max_{x^f} p\sqrt{x^f} - x^f,$$

em que x^f é a quantidade do insumo x utilizada pela firma. A condição de primeira ordem do problema é

$$p\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^f}} - 1 = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$p = 2\sqrt{x^f}.$$

Usando o fato de que em equilíbrio nós temos que ter $x^f = w^x - x$ e usando também a condição derivada do problema do consumidor nós temos

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = p = 2\sqrt{w^x - x}.$$

Novamente, como $y = \sqrt{w^x - x}$, a expressão acima pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{y}} = 2y$$

e, consequentemente, $y = \sqrt[3]{1/4}$. Não é surpresa que a solução obtida ao calcularmos o equilíbrio competitivo seja a mesma que obtivemos quando calculamos a alocação eficiente. Esta é só mais uma manifestação do primeiro teorema do bem-estar. Finalmente, nós podemos calcular o equilíbrio desta economia quando o consumidor age como tomador de preços e a firma age como monopolista.[16.1] O problema do consumidor continua o mesmo e a sua solução é caracterizada da mesma forma que acima. O problema da firma agora tem que incorporar o fato de que esta entende como a sua escolha da quantidade a ser produzida afeta o preço do bem y. Ou seja, tem que incorporar o fato de que do problema do consumidor nós aprendemos que o preço do bem y pode ser escrito como

$$p = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^f}}}.$$

[16.1] A melhor interpretação aqui é que o consumidor na verdade representa um conjunto de vários consumidores iguais, enquanto o monopolista representa realmente uma única firma.

Formalmente, o problema da firma pode ser escrito como

$$\pi = \max_{x^f} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x^f}}} \sqrt{x^f} - x^f$$

A condição de primeira ordem do problema acima é

$$-\frac{1}{2}\left(x^f\right)^{-3/4}\frac{1}{2}\left(x^f\right)^{-1/2}\left(x^f\right)^{1/2} + \left(x^f\right)^{-1/4}\frac{1}{2}\left(x^f\right)^{-1/2} - 1 = 0.$$

Que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{w^x - x},$$

em que nós já usamos a condição de equilíbrio do mercado para o bem x para eliminar x^f da expressão acima. Usando novamente o fato de que $y = \sqrt{w^x - x}$, a expressão acima pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}} = 2y.$$

Isolando y na expressão acima, nós obtemos $y = \sqrt[3]{1/16}$. Como nós já esperávamos, a produção no caso de monopólio é menor do que a produção eficiente.

16.4 Monopólio Natural

Nós vimos nas seções anteriores que em geral em uma situação de monopólio o nível de produção é menor do que o eficiente. Em termos do preço, vimos que numa situação de monopólio a firma cobra um preço maior do que o custo marginal. Do ponto de vista de um governante, aparentemente é fácil regular um mercado monopolizado. Tudo o que temos que fazer é forçar o monopolista a cobrar um preço igual ao custo marginal relativo a quantidade de produção eficiente e deixá-lo maximizar o seu lucro. O problema é que tal abordagem desconsidera uma parte importante da análise. Uma firma jamais entraria num mercado para ter lucro negativo. Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 16.2 (Lucro Negativo)**.** Suponha que a curva de demanda inversa da nossa economia seja dada por

$$p\left(y\right) = a - by,$$

e a função custo da firma seja dada por

$$c\left(y\right) = \alpha + \frac{1}{2}\beta y^2.$$

Ou seja, a firma tem um custo marginal igual a βy. Se deixarmos o monopolista agir de forma desregulada em tal mercado sabemos que ele escolherá o nível de produção em que a receita marginal é igual ao custo marginal, ou seja, ele escolherá um nível de produção que satisfaz:

$$a - 2by^m = \beta y^m.$$

Resolvendo a equação acima para y nós obtemos

$$y^m = \frac{a}{\beta + 2b}.$$

Sabemos que o nível de produção eficiente é encontrado no ponto em que o preço é igual ao custo marginal, ou seja,

$$a - by^e = \beta y^e.$$

O que nos dá o seguinte valor para o nível de produção eficiente

$$y^e = \frac{a}{\beta + b}.$$

Como já sabíamos, o nível de produção eficiente é maior do que o nível de produção de monopólio. Então, aparentemente, tudo o que um regulador neste mercado precisaria fazer é forçar o monopolista a cobrar um preço $p = \beta\left(\frac{a}{\beta+b}\right)$ e deixar que ele produza a quantidade que maximize o seu lucro sob tal preço. Sabemos que em tal situação o monopolista produzirá exatamente o nível de produção eficiente, certo? Não tão rápido, vamos calcular o lucro do monopolista se o preço do bem y for $\beta\left(\frac{a}{\beta+b}\right)$ e ele produzir $\frac{a}{\beta+b}$.

$$\begin{aligned}
\pi &= \beta\left(\frac{a}{\beta+b}\right)^2 - \alpha - \frac{1}{2}\beta\left(\frac{a}{\beta+b}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{a}{\beta+b}\right)^2 - \alpha.
\end{aligned}$$

Mas então, se α, o custo fixo do monopolista for muito alto, o monopolista obteria um lucro negativo em tal situação. Obviamente tal empresa não entraria no mercado.

No exemplo acima vimos que em uma situação em que os custos fixos são altos, se tentarmos forçar o monopolista a produzir a quantidade eficiente ele preferirá abandonar o mercado do que permanecer no negócio. Custos fixos altos são geralmente encontrados em serviços de utilidade pública. Por exemplo, a manutenção dos canos e usinas de tratamento representam um alto custo para uma empresa fornecedora de água, mas, uma vez que a manutenção do sistema já tenha sido feita, o custo de se oferecer alguns litros de água a mais para algumas casas é mínimo.

Tal situação, em que existem grandes custos fixos e custos marginais pequenos é conhecida como monopólio natural. Mercados em que existe uma situação de monopólio natural geralmente são regulados, ou o serviço é provido pelo próprio governo. Em geral, as firmas que atuam em tais mercados sofrem alguma regulação de preços, mas em contrapartida recebem subsídios para que não tenham incentivos para abandonar o mercado.

16.5 Um Exemplo

Suponha que a firma F produza um determinado bem y e que a sua função custo seja dada por

$$C(y) = y^2.$$

Ou seja, para produzir y unidades do bem a firma gasta y^2. Seja a função demanda inversa do bem y dada por

$$p(y) = 2 - y.$$

Considere primeiro o caso em que o mercado para o bem y é competitivo. Vamos calcular o preço e a quantidade produzida do bem y neste caso.

Em um mercado competitivo a firma comporta-se como tomadora de preços. Neste caso o problema da firma pode ser escrito como

$$\max_y py - y^2$$

A condição de primeira ordem do problema acima é simplesmente

$$p - 2y = 0,$$

o que nos dá a condição $y = p/2$. Substituindo tal condição na expressão para a curva de demanda inversa nós obtemos

$$p = 2 - \frac{p}{2}.$$

Resolvendo a equação acima para p nós obtemos $p = 4/3$. Consequentemente, o nível de produção neste caso será $y = 2/3$.

Suponha agora que a firma seja monopolista no mercado do bem y. Vamos calcular o preço e a quantidade produzida do bem y neste caso.

Agora o problema da firma pode ser escrito como

$$\max (2 - y)\, y - y^2$$

A condição de primeira ordem para o problema acima é

$$2 - 4y = 0.$$

O que nos dá um nível de produção $y = 1/2$. Substituindo tal valor na curva de demanda inversa nós obtemos $p = 3/2$.

Finalmente, suponha que o governo queira implementar um esquema de subsídio e imposto de modo a fazer com que a firma monopolista produza a quantidade eficiente, ou seja, $y = 2/3$. O esquema de incentivos funcionará da seguinte forma: Primeiramente, o governo subsidiará uma fração s dos custos da firma. Ou seja, se a firma tiver um custo de produção total igual a x, ela receberá sx do governo. Juntamente com isto, o governo cobrará um imposto sobre os lucros da firma. Tal imposto será uma fração do lucro total da firma. Isto é, se a firma tiver um lucro π, ela terá de pagar $t\pi$ de imposto. Vamos calcular os valores de t e s que satisfazem as seguintes condições: (i) Com tais valores de t e s, a firma produz a quantidade eficiente; (ii) O esquema é balanceado, isto é, a quantidade total paga à firma em forma de subsídio deve ser igual à quantidade recebida da firma na forma de imposto.

O problema da firma neste caso pode ser escrito como

$$\max_y (1 - t) \left[(2 - y)\, y - (1 - s)\, y^2\right]$$

Uma forma de resolver o problema acima seria primeiramente observar que o valor de y que resolve tal problema também resolve o problema

$$\max_y \left[(2-y)\,y-(1-s)\,y^2\right]$$

Aqui nós não vamos fazer tal observação e vamos simplesmente calcular a condição de primeira ordem do problema original. Tal condição vai ser dada por

$$(1-t)\,[2-2y-2\,(1-s)\,y]=0.$$

É fácil agora ver que o termo $(1-t)$ de fato é irrelevante para a solução do problema. Ou seja, o nível de produção escolhido pela firma vai satisfazer a condição

$$2-2y-2\,(1-s)\,y=0.$$

Lembre-se que queremos descobrir o valor do subsídio s que faz com que a firma produza a mesma quantidade que ocorreria em uma situação competitiva. O melhor a fazer, então, é susbtituir o valor $y=2/3$ na expressão acima e resolvê-la para encontrar o valor de s. Fazendo isto nós obtemos a equação

$$2-2\frac{2}{3}-2\,(1-s)\,\frac{2}{3}=0,$$

que resolvida para s nos dá $s=1/2$. Ou seja, para fazer com que a firma produza a quantidade eficiente o governo tem que subsidiar 50% do custo de produção da firma. Como a firma produz $y=2/3$ neste caso, o governo gasta

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

em subsídios à firma. O imposto t é cobrado sobre o lucro da firma. Com tal nível de produção, o preço cobrado pela firma é $p=4/3$, o que dá um lucro, antes do imposto, igual a

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{4}{3}\frac{2}{3}-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Portanto, o valor de t que zera os gastos do governo com a firma resolve a equação

$$\frac{2}{3}t=\frac{2}{9},$$

o que nos dá $t=1/3$.

16.6 Exercícios

Exercício 16.1 (Imposto sobre os lucros)**.** *Considere o exemplo 1 das notas de aula sobre monopólio. Lembre-se que naquele exemplo nós tínhamos dois bens, x e y e um consumidor com função de utilidade $U(x,y) = x + 2\sqrt{y}$. Também tínhamos uma tecnologia de produção dada por $y = \sqrt{x}$, ou seja, o bem x é usado como insumo para produzir o bem y. Finalmente, o consumidor tinha uma dotação inicial w^x do bem x.*

(a) *Calcule o nível de produção em equilíbrio quando a firma age como monopolista (Dica: Quase todo o trabalho já está feito nas notas de aula. Tudo que você tem a fazer é pegar a expressão encontrada lá e usar uma condição de equilíbrio de mercado).*

(b) *Suponha agora que o governo resolva impor um imposto proporcional sobre o lucro do monopolista. Isto é, se o monopolista tiver um lucro π ele terá que pagar um valor $t\pi$ de imposto, em que $0 < t < 1$. O valor arrecadado com o imposto sobre os lucros do monopolista será repassado diretamente ao consumidor na forma de um subsídio de montante fixo.*[16.2] *Calcule o nível de produção de equilíbrio agora.*

(c) *Se você fez as contas corretamente, você percebeu que o nível de produção no item (b) é exatamente o mesmo do item (a). De acordo com tal modelo, parece não haver nenhuma justificativa para a imposição de um imposto sobre os lucros das firmas. É claro que o modelo acima tem uma séria limitação que faz com que o modelo por definição já ignore um possível efeito de tal imposto. Que limitação e que efeito são estes?*[16.3]

Exercício 16.2. *Suponha que a firma F produza um determinado bem y e que a sua função custo seja dada por*

$$C(y) = y^2.$$

Ou seja, para produzir y unidades do bem a firma gasta y^2. Seja a função demanda inversa do bem y dada por

$$p(y) = 3 - y.$$

(a) *Calcule o preço e a quantidade produzida do bem y quando o mercado é competitivo (firma age como tomadora de preços) e quando a firma age como monopolista.*

(b) *Suponha agora que o governo, na tentativa de eliminar a ineficiência do monopólio, implemente o seguinte esquema de incentivo. O governo pagará um bônus de s reais por cada real vendido pela firma. Isto é, se a firma obtiver uma receita de x reais com a venda do bem y, então o governo lhe pagará um bônus de sx reais. Calcule o valor de s que faz com que a firma produza a quantidade eficiente (o valor encontrado no caso competitivo).*

[16.2] Ou seja, o consumidor verá tal subsídio como algo totalmente exógeno e totalmente independente das suas ações.

[16.3] O modelo obviamente tem várias limitações, mas tem uma que é claramente mais relevante para a discussão aqui.

Exercício 16.3. *Uma empresa monopolista produz um bem q de acordo com uma função custo dada por $c(q) = q + q^2$. Suponha que a curva de demanda inversa do mercado seja dada por $p(q) = 13 - q$.*

(a) *Calcule a quantidade q produzida pelo monopolista. Qual o seu lucro?*

(b) *Suponha agora que, embora a empresa monopolista funcione em um mercado protegido contra a importação, esta tenha a opção de vender o seu bem no mercado exterior. Mais especificamente, o monopolista tem a opção de vender o bem no mercado doméstico, em que este enfrenta uma curva de demanda inversa dada por $p_d(q_d) = 13 - q_d$, mas tem também a opção de vender o bem no mercado internacional por um preço $p_i = 11$. O preço do bem no mercado internacional não depende da quantidade q_i vendida pelo monopolista neste mercado. A função custo da firma continua sendo dada por $c(q) = q + q^2$. A diferença é que agora $q = q_d + q_i$. Quanto a firma venderá no mercado doméstico e no mercado internacional? Qual o seu lucro agora? (Dica: A intuição pode ser traiçoeira aqui. É melhor confiar na matemática e resolver o problema do monopolista completo.)*

Exercício 16.4 (Monopsônio)**.** *Suponha que uma empresa produza um bem y que é vendido no mercado internacional por um preço $p_y = 24$. O único insumo para a produção do bem y é um bem super especializado, x. O bem y é produzido de acordo com a função de produção $y := \ln x$. O preço pago por unidade do insumo x segue a curva de oferta inversa $w(x) = 2+x$.*

(a) *Suponha primeiro que o mercado para o bem x seja competitivo. Isto é, suponha que a firma aja como tomadora de preços em relação ao preço w. Calcule quanto a firma utilizará do insumo x neste caso. (Atenção! Embora a firma aja como tomadora de preços em relação a w, posteriormente w tem que ser tal que a oferta e a demanda pelo bem x fiquem equilibradas). (Dica: No final você chegará em uma equação do segundo grau que tem uma raiz positiva e uma negativa. Logicamente, a solução do problema é a raiz positiva.)*

(b) *Suponha agora que a firma seja o único consumidor do insumo x e que esta entenda que a sua decisão em relação a quantidade utilizada de x afeta diretamente o preço pago $w(x)$. Isto é, a firma não é mais tomadora de preços em relação ao bem x. Calcule quanto a firma utilizará do insumo x neste caso. (Dica: Novamente você chegará em uma equação do segundo grau que tem uma raiz positiva e uma negativa em que a solução do problema é a raiz positiva.)*

(c) *Se você fez as contas corretamente, você verificou que a quantidade de insumo x utilizada na letra (a) foi maior do que na letra (b). Suponha que no caso tratado na letra (b) o governo queira implementar um esquema de incentivos que faça com que a firma utilize a mesma quantidade de insumos da letra (a). O esquema funcionará da seguinte forma: o governo subsidiará uma fração s dos custos da firma com o insumo x. Isto é, se os gastos da firma com o insumo x forem l, esta receberá uma ajuda de $s \cdot l$ do governo. Qual o valor de s que faz com que a firma utilize a mesma quantidade de insumo x encontrada na letra (a)?*

Capítulo 17

Discriminação de Preços

17.1 Introdução

Empresas Monopolistas as vezes têm mais opções do que empresas competitivas. Neste capítulo nós vamos estudar algumas estratégias de precificação que de vez em quando estão disponíveis para estas empresas. As estratégias que vamos estudar são conhecidas como discriminação de preços. Formalmente, dizemos que o monopolista está praticando discriminação de preços sempre que este conseguir vender o mesmo bem por preços diferentes para diferentes consumidores. Nós veremos que a prática da discriminação de preços pode ser classificada em 3 tipos, de acordo com a capacidade do monopolista de identificar os diferentes potenciais compradores.

17.2 Discriminação de Preços de Primeiro Grau

A discriminação de preços de primeiro grau é também chamada de discriminação perfeita. A hipótese aqui é que o monopolista pode vender cada unidade do bem à pessoa disposta a pagar mais.

Suponhamos que estejamos falando de um bem que só é vendido em quantidades inteiras. Um exemplo de curva de demanda em tal situação está ilustrado na figura 17.1. Na figura nós também ilustramos um custo marginal constante para a firma. Como o produtor é capaz de praticar uma discriminação de preços perfeita, cada unidade do bem é vendida exatamente ao seu preço de reserva. Na figura, a área escura que geralmente representa o excedente do consumidor, agora representa o excedente do produtor.

Observe que em tal situação, a última unidade do bem será vendida exatamente pelo custo marginal de produção. Como o produtor lucra o máximo possível com cada unidade vendida, a única forma de melhorar o bem-estar do consumidor seria diminuir um pouco o lucro do produtor, portanto tal alocação é eficiente no sentido de Pareto.

A situação de discriminação de preços perfeita pode também ser representada em um gráfico com uma curva de demanda contínua. Novamente, como vemos na figura 17.2, o monopolista que pratica uma discriminação de preços de primeiro grau tem que manter um nível de produção em que o preço se iguale ao custo marginal. Exatamente como no caso competitivo a soma do excedente do consumidor e do produtor é maximizada, mas neste

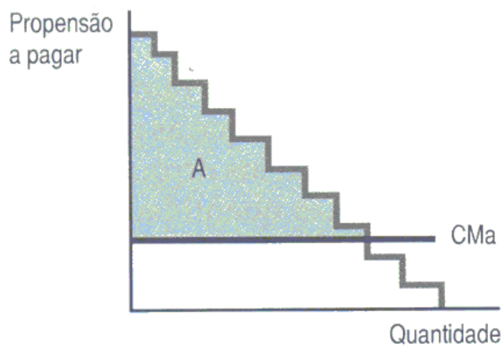

Figura 17.1: Discriminação de preços de primeiro grau

caso o monopolista fica com todo o excedente. Observe que neste caso, o lucro do monolista é dado pela área escura na figura, o que corresponderia ao excedente do consumidor no caso de competição perfeita. Em termos formais, o lucro do monopolista em uma situação de discriminação perfeita de preços é dado por

$$\pi = \int_0^{x^*} p(x)\, dx - c(x^*),$$

em que $p(.)$ representa a curva de demanda inversa pelo bem x, $c(x^*)$ é o custo de se produzir x^* unidades do bem x e x^* é tal que $p(x^*) = c'(x^*)$.

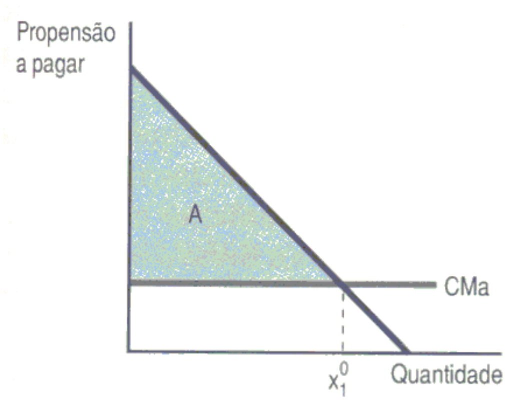

Figura 17.2: Discriminação de preços de primeiro grau com curva de demanda inversa contínua

17.3 Discriminação de Preços de Segundo Grau

Na seção anterior nós estudamos o que aconteceria se o monopolista pudesse vender cada unidade de um determinado bem a um preço específico. Para tanto, o monopolista tinha que ser capaz de identificar cada consumidor individualmente.

Em algumas situações, o monopolista sabe apenas que existem diferentes tipos de consumidores, com hábitos distintos, mas não possui meio de identificá-los. Neste caso, as vezes ainda é possível que o monopolista pratique o tipo de discriminação de preços conhecido como de segundo grau. A discriminação de preços de segundo grau ocorre quando o monopolista oferece um esquema de precificação que faz com que os consumidores, por escolha própria, se separem em classes.

Um exemplo disto ocorre com as empresas de telefonia celular. Observe que estas empresas oferecem dois tipos de contratos. Um tipo de contrato possui um valor mensal fixo alto, porém com um número grande de minutos livres. O outro tipo de contrato oferece um valor fixo mensal mais baixo, porém com poucos minutos livres. Dados tais contratos, os próprios consumidores selecionam o contrato que lhes for mais conveniente.

Vejamos agora um exemplo específico de discrimanação de preços de segundo grau. Nós vamos nos concentrar em uma situação um pouco diferente agora. Suponha que o monopolista ao invés de vender unidades do bem, ele agora vende um pacote com q unidades do bem a um determinado preço p.

Exemplo 17.1 (Venda de Pacotes)**.** Suponha que agora o monopolista vá oferecer ao consumidor um pacote com q unidades do bem por um preço p. Uma forma conveniente de modelar o comportamento do consumidor em tal caso é supor que este tem uma função de utilidade dada pela seguinte expressão:

$$U(p, q) = \theta q - p,$$

em que $\theta > 0$ é um parâmetro relacionado a quanto que o consumidor valoriza quantidade. Suponha que o custo de produção do bem seja dado simplesmente por q^2. Ou seja, para produzir q unidades do bem o monopolista gasta q^2. Que pacote o monopolista ofereceria ao consumidor em tal caso? Não é difícil ver que o monopolista resolveria o seguinte problema:

$$\max_{p,q} p - q^2$$

sujeito a

$$\theta q - p \geq 0.$$

Ou seja, o monopolista escolhe o pacote que maximiza o seu lucro sob a restrição de que o consumidor considere tal pacote pelo menos tão bom quanto não consumir nada. É fácil ver que a solução do problema acima satisfaz

$$\theta q - p = 0.\text{[17.1]}$$

Mas agora é fácil resolver o problema acima e de suas condições de primeira ordem nós obtemos as seguintes expressões:

$$q = \frac{\theta}{2} \text{ e } p = \frac{\theta^2}{2}.$$

[17.1] Se não fosse este o caso o monopolista poderia aumentar ainda mais o preço e claramente obter um lucro maior.

Outra coisa que podemos notar é que tal solução maximiza o excedente de mercado. Isto é, tal solução resolve o seguinte problema:

$$\max U(p,q) + \pi(p,q).$$

Ou seja, tal solução maximiza a soma da utilidade do consumidor com o lucro do produtor. Porém, como acontecia na seção anterior, o monopolista acaba ficando com todo este excedente.

No problema acima havia apenas um consumidor e o monopolista conhecia exatamente a sua função demanda, ou, equivalentemente, a sua função de utilidade. Numa situação mais realista, nós teríamos mais de um consumidor e diferentes consumidores teriam diferentes funções de utilidade. Além disto geralmente não é possível para o monopolista identificar perfeitamente cada consumidor. Mesmo sabendo que diferentes consumidores estarão dispostos a pagar diferentes preços por cada unidade do bem, o monopolista não tem como identificar quem é quem. Uma alternativa para o monopolista é oferecer pacotes com diferentes quantidades do bem por diferentes preços direcionados aos diferentes grupos de consumidores. O problema aqui, é que como o monopolista não consegue diferenciar os consumidores, ele tem que oferecer pacotes tais que os próprios consumidores achem vantajoso escolher os pacotes direcionados a eles. O seguinte exemplo ilustra bem tal situação:

Exemplo 17.2 (Modelo de Mussa e Rosen)**.** A nossa economia tem dois tipos de consumidores, o consumidor L e o consumidor H. Os dois consumidores obtêm a seguinte utilidade se receberem uma quantidade q do bem vendido pelo monopolista e pagarem p por isto.

$$U^L(p_L,q_L) = \theta_L q_L - p_L \text{ e } U^H(p_H,q_H) = \theta_H q_H - p_H,$$

em que $\theta_H > \theta_L > 0$. Para facilitar as contas aqui nós trabalharemos com a hipótese adicional de que $\theta_L > \theta_H/2$. A tecnologia de produção do monopolista é tal que para produzir um pacote com q unidades do bem ele gasta q^2. Ou seja, a única diferença do exemplo aqui para o exemplo anterior é que agora nós temos dois tipos diferentes de consumidores. Nós já estudamos acima que se o monopolista pudesse identificar visualmente cada um dos consumidores ele ofereceria o pacote $(p_L,q_L) = \left(\theta_L^2/2, \theta_L/2\right)$ para o consumidor L e ofereceria o pacote $(p_H,q_H) = \left(\theta_H^2/2, \theta_H/2\right)$ para o consumidor H. Em tal situação a soma dos excedentes dos dois consumidores e do monopolista estaria sendo maximizada, mas o monopolista estaria ficando com todo este excedente. Como discutimos antes, em geral o monopolista não tem como identificar os diferentes tipos de consumidores, portanto ele terá que agir de um modo que os consumidores escolham os pacotes direcionados a eles por vontade própria.

Formalmente, o monopolista tem que oferecer dois pacotes de compra distintos, sob as restrições de que um consumidor não queira comprar o pacote do outro e de que os consumidores prefiram comprar o pacote do que não comprá-lo. O problema do monopolista pode ser escrito da seguinte forma:

$$\max_{(p_L,q_L),(p_H,q_H)} \left(p_L - q_L^2\right) + \left(p_H - q_H^2\right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
&\theta_L q_L - p_L \geq 0,\\
&\theta_H q_H - p_H \geq 0,\\
&\theta_L q_L - p_L \geq \theta_L q_H - p_H,\\
&\theta_H q_H - p_H \geq \theta_H q_L - p_L.
\end{aligned}$$

O problema acima está em um formato que vocês vão rever muitas vezes em economia. As duas primeiras restrições são chamadas de restrições de participação. Elas simplesmente dizem que o monopolista tem que oferecer aos consumidores um pacote que seja pelo menos tão bom quanto não consumir nada. Caso contrário, obviamente os consumidores não iriam querer participar deste mercado. O segundo conjunto de restrições é chamado de restrições de compatibilidade de incentivos. A idéia é que o pacote de consumo que é direcionado a um dado consumidor não pode ser pior, para o consumidor em questão, do que o pacote oferecido ao outro consumidor. Caso contrário o consumidor não iria comprar o pacote direcionado a ele.

A princípio, o problema acima parece ser muito complicado e, como têm restrições em formato de desigualdade, nós não temos ainda o ferramental matemático para resolvê-lo. No entanto, veremos que com uma análise preliminar nós conseguiremos transformá-lo em um problema cuja solução está ao nosso alcance.

Observação 17.1. A restrição de participação do agente do tipo H é implicada pela restrição de participação do tipo L juntamente com a restrição de compatibilidade de incentivos do agente do tipo H.

Demonstração da Observação. Observe que, como $\theta_H > \theta_L$,

$$\begin{aligned}
\theta_H q_H - p_H &\geq \theta_H q_L - p_L\\
&\geq \theta_L q_L - p_L\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Em que a última desigualdade vem da restrição de participação do agente do tipo L. ‖

Ou seja, a observação acima nos mostra que a restrição de participação do agente do tipo H é redundante e, consequentemente, nós podemos escrever o problema do monopolista sem ela. O problema agora torna-se:

$$\max_{(p_L,q_L),(p_H,q_H)} \left(p_L - q_L^2\right) + \left(p_H - q_H^2\right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
&\theta_L q_L - p_L \geq 0,\\
&\theta_L q_L - p_L \geq \theta_L q_H - p_H,\\
&\theta_H q_H - p_H \geq \theta_H q_L - p_L.
\end{aligned}$$

O problema acima ainda continua complicado para podermos atacá-lo diretamente. Vamos usar, então, uma técnica que os economistas adoram. Vamos chutar que a segunda restrição não é importante, e depois nós verificamos se a solução obtida satisfaz ou não àquela restrição.[17.2] Ou seja, vamos tentar resolver o seguinte problema simplificado:

$$\max_{(p_L,q_L),(p_H,q_H)} \left(p_L - q_L^2\right) + \left(p_H - q_H^2\right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
&\theta_L q_L - p_L \geq 0, \\
&\theta_H q_H - p_H \geq \theta_H q_L - p_L.
\end{aligned}$$

As próximas duas observações transfomam o problema acima em um problema que nós sabemos resolver.

Observação 17.2. A solução do problema acima satisfaz $\theta_L q_L - p_L = 0$.

Demonstração da Observação. Fixe qualquer par de pacotes (p_L, q_L) e (p_H, q_H) satisfazendo as restrições do problema acima, mas com

$$\theta_L q_L - p_L > 0.$$

Agora note que se definirmos $\hat{p}_L := \theta_L q_L > p_L$, o par de pacotes $(\hat{p}_L, q_L)$ e (p_H, q_H) ainda satisfaz as duas restrições do problema acima e

$$\left(\hat{p}_L - q_L^2\right) + \left(p_H - q_H^2\right) > \left(p_L - q_L^2\right) + \left(p_H - q_H^2\right).$$

Logo (p_L, q_L) e (p_H, q_H) não pode ser uma solução para o problema acima. Nós concluímos que a solução para o problema acima sempre tem que satisfazer a primeira restrição com igualdade. ‖

O problema agora foi simplificado para

$$\max_{(p_L,q_L),(p_H,q_H)} \left(p_L - q_L^2\right) + \left(p_H - q_H^2\right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
&\theta_L q_L - p_L = 0, \\
&\theta_H q_H - p_H \geq \theta_H q_L - p_L.
\end{aligned}$$

Finalmente, a nossa última observação mostrará que a segunda restrição também tem que ser satisfeita com igualdade.

Observação 17.3. A solução do problema acima satisfaz $\theta_H q_H - p_H = \theta_H q_L - p_L$.

[17.2] O que estamos fazendo aqui não é mágica. Problemas de maximização neste formato aparecem frequentemente em economia e a solução de tais problemas sempre tem esta característica. A restrição de participação de um dos agentes e a restrição de compatibilidade de incentivos do outro podem ser ignoradas.

Demonstração da Observação. Fixe qualquer par de pacotes (p_L, q_L) e (p_H, q_H) satisfazendo as restrições do problema acima, mas com

$$\theta_H q_H - p_H > \theta_H q_L - p_L.$$

Novamente, note que se definirmos $\hat{p}_H := \theta_H q_H - \theta_H q_L + p_L > p_H$, o par de pacotes (p_L, q_L) e $(\hat{p}_H, q_H)$ continua satisfazendo as duas restrições do problema e

$$\left(p_L - q_L^2\right) + \left(\hat{p}_H - q_H^2\right) > \left(p_L - q_L^2\right) + \left(p_H - q_H^2\right).$$

Nós concluímos que a solução do problema acima tem que satisfazer a segunda restrição com igualdade. ‖

Dadas as duas observações acima, nós agora podemos trabalhar com o seguinte problema simplificado:

$$\max_{(p_L, q_L),(p_H, q_H)} \left(p_L - q_L^2\right) + \left(p_H - q_H^2\right)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \theta_L q_L - p_L &= 0, \\ \theta_H q_H - p_H &= \theta_H q_L - p_L. \end{aligned}$$

A forma mais fácil de encontrar a solução para o problema acima é primeiramente resolver o sistema dado pelas duas restrições de modo a escrever os preços como funções das quantidades. Isolando p_L e p_H nas restrições acima nós obtemos:

$$p_L = \theta_L q_L$$

e

$$p_H = \theta_H q_H - (\theta_H - \theta_L)\, q_L.$$

Agora o nosso problema de maximização simplifica-se para

$$\max_{q_L, q_H} \left(\theta_L q_L - q_L^2\right) + \left(\theta_H q_H - (\theta_H - \theta_L)\, q_L - q_H^2\right)$$

As condições de primeira ordem para o problema acima são:

$$\begin{aligned} q_L &: \quad \theta_L - 2q_L - (\theta_H - \theta_L) = 0 \\ q_H &: \quad \theta_H - 2q_H = 0 \end{aligned}$$

o que nos dá as respostas

$$q_L = \theta_L - \frac{\theta_H}{2} \text{ e } q_H = \frac{\theta_H}{2}.$$

Usando os valores acima nas restrições do nosso problema nós obtemos os seguintes preços:

$$p_L = \theta_L \left(\theta_L - \frac{\theta_H}{2}\right) \text{ e } p_H = \frac{\theta_H^2}{2} - (\theta_H - \theta_L)\left(\theta_L - \frac{\theta_H}{2}\right).$$

A solução do problema acima tem as seguintes caracteríticas, que sempre serão verdade para problemas no formato acima:

(a) A quantidade oferecida ao agente do tipo H é a quantidade eficiente.

(b) Embora a quantidade oferecida ao agente L não seja a eficiente, o monopolista extrai todo o excedente da negociação com o agente L. Isto vem do fato que a solução do problema acima satisfaz $U^L(p_L, q_L) = 0$.

(c) O preço oferecido ao agente H é inferior ao que ocorreria se o monopolista pudesse diferenciar os agentes. Isto ocorre, porque a um preço acima do oferecido o agente H preferiria comprar o pacote oferecido ao agente L. Ou seja, a restrição de compatibilidade de incentivos acaba forçando o monopolista a cobrar um preço abaixo do que ele gostaria.

17.4 Discriminação de Preços de Terceiro Grau

Provavelmente a forma de discriminação de preços mais comum acontece quando o monopolista pode identificar diferentes grupos de consumidores, mas, para cada grupo, ele é obrigado a fixar um preço único por unidade do bem vendido. Os exemplos mais comuns são descontos para jovens, idosos, estudantes, etc..

Suponhamos que o monopolista consiga identificar dois grupos de consumidores com curvas de demanda inversa dadas por $p_1(y_1)$ e $p_2(y_2)$, respectivamente. Representamos a função custo do monopolista por $c(y_1 + y_2)$. Sejam $r_1(y_1) := p_1(y_1)\,y_1$ e $r_2(y_2) := p_2(y_2)\,y_2$ as receitas do monopolista oriundas das vendas dos bens 1 e 2, respectivamente. O problema de maximização de lucros do monopolista pode ser escrito como

$$\max_{y_1, y_2} r_1(y_1) + r_2(y_2) - c(y_1 + y_2).$$

Das condições de primeira ordem do problema acima nós obtemos as seguintes expressões:

$$r_1'(y_1) = c'(y_1 + y_2) \text{ e } r_2'(y_2) = c'(y_1 + y_2).$$

Ou seja, de forma similar ao que ocorre quando existe apenas um grupo de consumidores no mercado, a condição de maximização de lucro do monopolista iguala as receitas marginais, com cada um dos grupos, ao custo marginal de produção do bem y. Se refizermos a análise que fizemos no caso com apenas um grupo de consumidores as condições acima podem ser reescritas como

$$p_1(y_1) = c'(y_1 + y_2)\left[\frac{1}{1 - 1/|\varepsilon(y_1)|}\right]$$

e

$$p_2(y_2) = c'(y_1 + y_2)\left[\frac{1}{1 - 1/|\varepsilon(y_2)|}\right].$$

Ou seja, novamente os preços são um *markup* acima do custo marginal e tal *markup* é maior quando a elasticidade da demanda é menor. Desta forma, em uma situação de discriminação de preços como a acima o grupo que apresenta uma demanda menos elástica acaba pagando mais pelo produto. Tal resultado parece estar de acordo com o que observamos na prática. É provável que estudantes e idosos tenham curvas de demanda mais elásticas, portanto seria de se esperar que uma empresa que se preocupe em maximizar lucro discrimine preços a seu favor. Mas observe que a análise acima é feita totalmente sob o ponto de vista de maximização dos lucros do monopolista. Ela não serve, por exemplo, para justificar uma imposição de um desconto estudantil fixo pelo governo.

17.4.1 Discriminaçao de Preços de Terceiro Grau com Curvas de Demanda Lineares

Suponha que tenhamos dois tipos de consumidores em nossa economia e que ambos tenham curvas de demanda lineares dadas pelas seguintes expressões:

$$y_1(p_1) = a - b_1 p_1$$

e

$$y_2(p_2) = a - b_2 p_2.$$ [17.3]

Por simplicidade, vamos assumir que o monopolista tem um custo de produção nulo.[17.4] Ou seja, a função custo será dada por

$$c(y) = 0.$$

Finalmente, nós vamos assumir que $b_1 > b_2$.

Vamos supor primeiro que o monopolista possa praticar discriminação de preços nesta economia. Ou seja, suponha que ele possa cobrar um preço diferente para cada tipo de consumidor.

Se o monopolista pode praticar discriminação de preços, então é como se ele agisse em dois mercados totalmente distintos. Primeiramente, é conveniente derivarmos a curva de demanda inversa para cada um dos mercados. Tais curvas serão dadas por

$$p_1(y_1) = \frac{a}{b_1} - \frac{1}{b_1} y_1$$

e

$$p_2(y_2) = \frac{a}{b_2} - \frac{1}{b_2} y_2.$$

Agora podemos caracterizar as receitas do monopolista em cada um dos mercados. Elas serão dadas pelas expressões:

$$R_1(y_1) = \left(\frac{a}{b_1} - \frac{1}{b_1} y_1 \right) y_1$$

[17.3] Todos os resultados que vamos derivar em tal exercício são também verdade se os interceptos das curvas de demanda dos nossos consumidores não são iguais. Ou seja, se as curvas de demanda inversa dos dois consumidores são

$$y_1(p_1) = a_1 - b_1 p_1$$

e

$$y_2(p_2) = a_2 - b_2 p_2,$$

com $a_1 \neq a_2$. No entanto, as contas são bem mais tediosas em tal caso o que motivou a simplificação acima.

[17.4] Novamente, os resultados continuam válidos sem tal hipótese.

e

$$R_2(y_2) = \left(\frac{a}{b_2} - \frac{1}{b_2}y_2\right)y_2.$$

O que nos dá as seguintes expressões para as receitas marginais:

$$R_1'(y_1) = \frac{a}{b_1} - \frac{2}{b_1}y_1$$

e

$$R_2'(y_2) = \frac{a}{b_2} - \frac{2}{b_2}y_2.$$

Sabemos que a solução do problema do monopolista se dá no ponto em que a receita marginal se iguala ao custo marginal. No caso em questão isto significa no ponto em que a receita marginal se iguala a zero. Ou seja, os níveis de produção no caso com discriminação de preços serão dados por

$$y_1^D = y_2^D = \frac{a}{2}.$$

Note que, dados os níveis de produção acima, nós temos

$$p_1^D = \frac{1}{2}\frac{a}{b_1} \text{ e } p_2^D = \frac{1}{2}\frac{a}{b_2}.$$

Por outro lado, os níveis de preço que zeram as demandas dos consumidores são

$$\overline{p}_1 = \frac{a}{b_1} \text{ e } \overline{p}_2 = \frac{a}{b_2}.$$

Portanto, nós podemos representar graficamente o excedente de cada um dos consumidores acima como na figura 17.3.

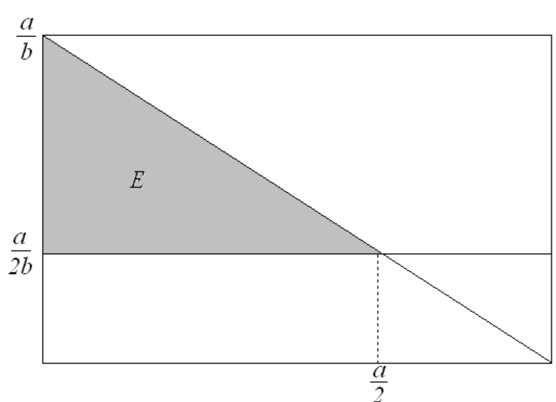

Figura 17.3: Excedente do consumidor em uma situação com discriminação de preços.

Desta forma, os excedentes dos consumidores são simplesmente o triângulo cinza na figura 17.3 e serão dados por

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b_1} - \frac{1}{2}\frac{a}{b_1}\right)\frac{a}{2} = \frac{1}{8}\frac{a^2}{b_1}$$

e

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b_2} - \frac{1}{2}\frac{a}{b_2}\right)\frac{a}{2} = \frac{1}{8}\frac{a^2}{b_2}.$$

Já o lucro do monopolista é dado simplesmente pela soma de suas receitas.[17.5] Ou seja,

$$\begin{aligned}\pi^D &= \left(\frac{a}{b_1} - \frac{1}{b_1}y_1^D\right)y_1^D + \left(\frac{a}{b_2} - \frac{1}{b_2}y_2^D\right)y_2^D \\ &= \frac{1}{4}\frac{a^2}{b_1} + \frac{1}{4}\frac{a^2}{b_2}.\end{aligned}$$

O que nos dá um excedente agregado dado por

$$\begin{aligned}E^D &= \frac{1}{8}\frac{a^2}{b_1} + \frac{1}{8}\frac{a^2}{b_2} + \frac{1}{4}\frac{a^2}{b_1} + \frac{1}{4}\frac{a^2}{b_2} \\ &= \frac{3}{8}\frac{a^2}{b_1} + \frac{3}{8}\frac{a^2}{b_2}.\end{aligned}$$

Suponha agora que discriminação de preços seja algo proibido por lei. Ou seja, agora o monopolista só pode especificar um preço para toda a economia. A curva de demanda agregada da economia agora será dada pela soma das demandas dos dois tipos de consumidores.

Dada a curva de demanda do consumidor 1, nós sabemos que se $p \geq \frac{a}{b_1}$, então o consumidor 1 não consumirá nada. Similarmente, se $p \geq \frac{a}{b_2}$, então o consumidor b não consumirá nada. Como $b_1 > b_2$, nós sabemos que o consumidor 1 vai parar de consumir antes do consumidor 2. Desta forma, nós podemos concluir que a curva de demanda agregada da economia agora será dada por

$$y(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p \geq \frac{a}{b_2} \\ y_2(p) \text{ se } \frac{a}{b_1} \leq p < \frac{a}{b_2} \\ y_1(p) + y_2(p) \text{ se } p < \frac{a}{b_1} \end{cases}.$$

Ou, equivalentemente,

$$y(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p \geq \frac{a}{b_2} \\ a - b_2 p \text{ se } \frac{a}{b_1} \leq p < \frac{a}{b_2} \\ 2a - (b_1 + b_2)p \text{ se } p < \frac{a}{b_1} \end{cases}.$$

Finalmente, a curva de demanda acima nos dá a seguinte curva de demanda inversa para a economia:

$$p(y) = \begin{cases} \frac{a}{b_2} - \frac{1}{b_2}y \text{ se } y \leq \left(1 - \frac{b_2}{b_1}\right)a \\ \frac{2a}{b_1+b_2} - \frac{1}{b_1+b_2}y \text{ se } y > \left(1 - \frac{b_2}{b_1}\right)a \end{cases}.$$

Suponha que a solução para o problema do monopolista no caso em que a discriminação de preços é proibida se dê na região em que os dois tipos de consumidores têm uma demanda não nula. Nós podemos mostrar que o nível de produção agregado será o mesmo que no caso com discriminação de preços.[17.6]

[17.5] Como a firma não tem custos fixos, o excedente do produtor neste caso será simplesmente o lucro da firma.

[17.6] Este não é um fenômeno geral. Ocorre apenas com curvas de demanda lineares.

Para ver isto, note que se a solução do problema do monopolista se dá na região em que ele serve aos dois consumidores, então a curva de demanda inversa da economia é dada por

$$p(y) = \frac{2a}{b_1 + b_2} - \frac{1}{b_1 + b_2} y.$$

Dentro desta região a receita do monopolista é dada por

$$R(y) = \left(\frac{2a}{b_1 + b_2} - \frac{1}{b_1 + b_2} y \right) y.$$

Igualando a receita marginal ao custo marginal, que no caso é zero, nós obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{2a}{b_1 + b_2} - \frac{2}{b_1 + b_2} y = 0.$$

Resolvendo a expressão acima para y, nós encontramos

$$y^{SD} = a.$$

Este é exatamente o nível de produção agregado que obtivemos no caso com discriminação, como queríamos mostrar.

Para facilitar a análise, vamos supor agora que $b_1 = 2$ e $b_2 = 1$. Com tais valores de b_1 e b_2, nós podemos calcular o excedente agregado da economia na situação acima.

Observe que agora nós podemos representar graficamente a curva de demanda inversa da economia como na figura 17.4.

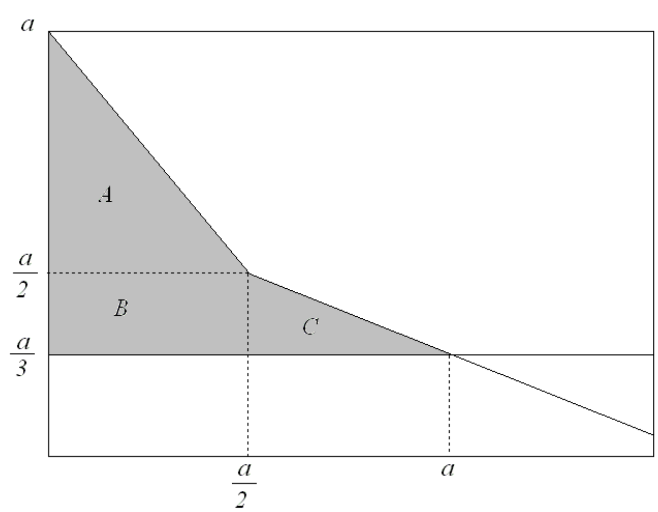

Figura 17.4: Excedente do consumidor em uma situação sem discriminação em que o monopolista serve aos dois consumidores.

Note que o excedente dos consumidores será dado pela soma das áreas A, B e C na figura. Ou seja,

$$\begin{aligned} E_c^{SD} &= \frac{1}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right)\frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right)\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right)\frac{a}{2} \\ &= \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Já o lucro do monopolista, que é simplesmente sua receita, será dado por

$$\begin{aligned}\pi^{SD} &= \left(\frac{2a}{b_1+b_2} - \frac{1}{b_1+b_2}y^{SD}\right)y^{SD} \\ &= \left(\frac{2a}{3} - \frac{1}{3}a\right)a \\ &= \frac{a^2}{3}.\end{aligned}$$

Então, o excedente agregado da economia será dado por

$$\begin{aligned}E^{SD} &= E_c^{SD} + \pi^{SD} \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} \\ &= \frac{7a^2}{12}.\end{aligned}$$

Por outro lado, dados os valores de b_1 e b_2 acima, o excedente agregado no caso com discriminação seria dado por

$$\begin{aligned}E^{D} &= \frac{3}{8}\frac{a^2}{b_1} + \frac{3}{8}\frac{a^2}{b_2} \\ &= \frac{9a^2}{16}.\end{aligned}$$

Mas então,

$$\begin{aligned}E^{SD} &= \frac{7a^2}{12} \\ &> \frac{9a^2}{16} \\ &= E^D.\end{aligned}$$

Ou seja, o excedente agregado da economia aumentou na situação sem discriminação de preços.

Acima nós vimos que se a solução do problema do monopolista no caso sem discriminação de preços ocorre em uma região em que os dois tipos de consumidores têm uma demanda não nula, então o excedente agregado da economia era maior no caso sem discriminação do que no caso com discriminação. Suponha agora que $b_1 = 4$ e $b_2 = 1$. Vamos primeiro calcular o lucro do monopolista, no caso sem discriminação, se ele escolher servir aos dois tipos de consumidores. Isto é, se ele agir como se a curva de demanda agregada da economia for a curva de demanda na região em que os dois tipos de consumidores têm uma demanda não nula.

Neste caso, a solução do problema do monopolista é igual a da análise acima e o lucro do monopolista é dado por

$$\begin{aligned}
\pi &= \left(\frac{2a}{b_1+b_2} - \frac{1}{b_1+b_2}y\right)y \\
&= \left(\frac{2a}{b_1+b_2} - \frac{1}{b_1+b_2}a\right)a \\
&= \frac{a^2}{5}.
\end{aligned}$$

Vamos calcular agora o lucro do monopolista se ele resolver não servir aos consumidores do tipo 1. Ou seja, se ele agir como se a curva de demanda agregada da economia fosse simplesmente a curva de demanda dos consumidores do tipo 2.

Neste caso, a solução do problema do monopolista é igual à solução no caso com discriminação de preços para o consumidor 2. Ou seja, ele produzirá $y = \frac{a}{2}$ e obterá um lucro dado por

$$\begin{aligned}
\pi &= \left(\frac{a}{b_2} - \frac{1}{b_2}y\right)y \\
&= \left(\frac{a}{b_2} - \frac{1}{b_2}\frac{a}{2}\right)\frac{a}{2} \\
&= \frac{a^2}{4},
\end{aligned}$$

que é maior do que o obtido no caso em que os dois consumidores são servidos.

A análise acima mostra que agora, se estivermos em uma situação com discriminação de preços proibida, então o monopolista decidirá servir apenas aos consumidores do grupo 2. Como o monopolista ignora completamente os consumidores do grupo 1, o preço que ele irá cobrar dos consumidores do grupo 2 é o mesmo que ele cobraria se pudesse praticar a discriminação de preços. Ou seja, os consumidores do grupo 2 são indiferentes entre uma situação com discriminação e uma sem discriminação de preços. Os consumidores do grupo 1, por outro lado, não consomem nada em uma situação sem discriminação de preços, portanto eles estariam melhores se a discriminação de preços fosse uma prática permitida. Finalmente, nas duas situações o monopolista obtém a mesma renda com os consumidores do grupo 2, mas se ele puder discriminar os preços ele obtém uma renda extra com as vendas para os consumidores do grupo 1. Ou seja, a passagem de uma situação sem discriminação de preços para uma com discriminação de preços melhora a situação de 2 tipos de agentes em nossa economia sem piorar a situação do terceiro tipo. Ela é, portanto, uma melhora de Pareto. Isto representa um argumento forte em favor da liberação da discriminação de preços neste caso.

17.5 Exercícios

Exercício 17.1 (Descrição gráfica da solução do modelo de Mussa e Rosen). *Considere o modelo de discriminação de preços de segundo grau estudado nas notas de aula (o modelo de Mussa e Rosen). Caracterize graficamente a solução de tal modelo. Atenção, no livro texto tem uma análise gráfica para se chegar a solução de um modelo parecido com o de Mussa e*

Rosen. Não é aquela análise gráfica que eu quero. O que eu quero é algo mais simples. Dada a solução que nós obtivemos nas notas, simplesmente mostre no mesmo gráfico os pacotes de consumo dos dois consumidores, as curvas de indiferenças dos dois consumidores que passam por estes pacotes e os pacotes eficientes, ou seja, os pacotes que teriam sido vendidos se o monopolista pudesse diferenciar os dois consumidores, bem como as curvas de indiferenças que passam por tais pacotes.

Exercício 17.2. *Suponha que a economia tenha dois tipos de consumidores e que a firma monopolista consiga diferenciá-los. A curva de demanda agregada dos consumidores do tipo A é dada por*

$$q_A(p_A) = 20 - p_A$$

e a dos consumidores do tipo B é dada por

$$q_B(p_B) = 16 - \frac{p_B}{2}.$$

O custo de produção da firma monopolista é dado por

$$c(q_A + q_B) = 4(q_A + q_B).$$

(a) *Encontre os preços cobrados pelo monopolista quando a prática de discriminação de preços é permitida. Calcule o excedente agregado dos consumidores neste caso. Isto é, a soma dos excedentes dos dois tipos de consumidores (Dica: Para fazer a questão você primeiro vai ter que derivar as curvas de demanda inversa para os dois tipos de consumidores).*

(b) *Suponha agora que a prática de discriminação de preços seja proibida por lei. Encontre o preço cobrado pela firma neste caso. Também neste caso, calcule o excedente agregado dos consumidores (Dica: Para fazer esta questão você terá que derivar a curva de demanda agregada para este caso. Esta curva terá 3 regiões. Para preços abaixo de um certo valor, os dois tipos de consumidores consomem. Para preços entre o valor previamente mencionado e um valor mais alto apenas um tipo de consumidor consome. Para preços acima do valor mais alto citado anteriormente, nenhum consumidor consome. De posse da curva de demanda agregada, você pode agora derivar a curva de demanda inversa. Esta também será dividida em regiões. A solução do problema da firma se dará na região em que esta resolve atender aos dois tipos de consumidores. Portanto, na hora de resolver o problema da firma você pode assumir que a curva de demanda inversa da economia corresponde à parte da curva da demanda inversa em que a firma atende aos dois consumidores. Porém, para calcular o excedente dos consumidores você precisará olhar para a curva de demanda inversa completa, considerando todas as suas regiões).*

Exercício 17.3 (Descontos para Estudantes)**.** *Suponha que um monopolista venda em um mercado que tenha dois tipos de consumidores: estudantes e consumidores regulares. A curva de demanda dos estudantes é dada por*

$$q_e = (2 - 3p_e)$$

e a dos consumidores regulares é dada por

$$q_r = (1 - p_r)\,.$$

Por simplicidade, suponha que o custo de produção do monopolista é constante e igual a zero.

(a) *Suponha que o mercado seja composto só por estudantes. Que preço o monopolista cobrará? E se o mercado for composto só por consumidores regulares, que preço o monopolista cobrará?*

(b) *Suponha agora que uma fração α dos consumidores seja de estudantes e uma fração $(1-\alpha)$ seja de consumidores regulares. Isto é, o lucro do monopolista assume o seguinte formato: $\pi = \alpha($lucro obtido com estudantes$) + (1-\alpha)\,($lucro obtido com consumidores regulares$)$. Suponha, também, que o governo imponha uma lei que obrigue que o preço cobrado dos estudantes seja sempre igual à metade do preço cobrado dos consumidores regulares. Assumindo que o monopolista vá sempre tentar atender aos dois mercados, calcule o preço cobrado dos consumidores regulares (o preço cobrado dos estudantes será a metade) como função de α. Observe que a fórmula para o preço encontrada é uma função crescente em relação a α, ou seja, quanto maior é a parcela da população composta por estudantes, maior é o preço. Explique intuitivamente por que isto ocorre, utilizando o que você aprendeu na letra (a).*

Capítulo 18

Escolha sob Incerteza

18.1 Introdução

Nos capítulos 2 e 3 nós estudamos teoria da escolha em um contexto determinístico. Naquela situação, nós geralmente tínhamos um conjunto de consequências, X, e nós trabalhávamos com a hipótese de que o nosso agente tinha uma relação de preferências $\succsim$ definida sobre X. Ou seja, para qualquer par de consequências x e y no conjunto X, a relação de preferências nos dizia se o agente considerava x melhor, $x \succ y$, indiferente, $x \sim y$, ou pior do que y, $x \prec y$.[18.1]

Naquela situação, nós estudamos sob que condições uma relação de preferências $\succsim$ pode ser representada por uma função de utilidade. Ou seja, sob que condições existe uma função u definida sobre o conjunto X tal que para qualquer par de alternativas x e y em X,

$$x \succsim y \text{ se e somente se } u(x) \geq u(y).$$

Observe que a situação acima é determinística. Existe um conjunto de consequências e o agente tem uma relação de preferências definida sobre este conjunto de consequências. Suponha agora que tenhamos uma situação um pouco diferente. Suponha que ainda tenhamos um conjunto de consequências X, mas que o agente não possa escolher diretamente os elementos de X. Agora, o agente têm que escolher ações que vão posteriormente implicar alguma consequência em X, mas na hora da escolha da ação o agente não sabe exatamente que consequência será esta. Para facilitar um pouco a vida do nosso agente, e a nossa, vamos fazer a hipótese de que quando o agente escolhe uma ação, embora ele não saiba exatamente que consequência aquela ação implicará no futuro, ele pelo menos conhece a probabilidade de que uma determinada consequência irá ocorrer, dada a ação escolhida por ele.

Este será o tipo de situação que estaremos interessados em estudar nesta parte do curso. Primeiramente, nós estudaremos tal problema para um conjunto de consequências abstrato, como o acima. Ou seja, nós não faremos hipótese alguma a respeito de quem são os elementos

[18.1] Lembre-se que para qualquer par de alternativas x e y, quando dizemos que $x \succsim y$, nós queremos dizer que x é pelo menos tão bom quanto y. Então, de acordo com esta interpretação, quando escrevemos $x \succ y$, queremos dizer que $x \succsim y$, mas não é verdade que $y \succsim x$. Similarmente, quando escrevemos $x \sim y$, queremos dizer que $x \succsim y$ e $y \succsim x$. Já quando escrevemos $x \prec y$ nós queremos dizer que $y \succsim x$, mas não é verdade que $x \succsim y$.

de X. Na segunda parte destas notas, nós faremos a hipótese de que o nosso conjunto X é composto de consequências monetárias. Ou seja, de que os elementos de X são simplesmente somas de dinheiro.

18.2 Teoria da Utilidade Esperada

18.2.1 Utilidade Ordinal e Utilidade Esperada

A chance de alguém ganhar na Mega Sena, comprando apenas um cartão, é de uma em 50.063.860. Ou seja, aproximadamente uma em 50 milhões. Por outro lado, um ganhador dificilmente ganha sozinho mais do que o 100.000.000 de reais em um sorteio. Finalmente, um bilhete de Mega Sena custa mais ou menos 3,50 reais. Dada a probabilidade de vitória acima, mesmo se considerarmos o valor do prêmio como sendo 100.000.000 de reais, o valor esperado de um bilhete de Mega Sena é aproximadamente

$$100.000.000 * \frac{1}{50.000.000} = 2 \text{ reais.}$$

Ou seja, o valor esperado de um bilhete de Mega Sena é mais ou menos 57% do custo do bilhete. Por que as pessoas jogam na Mega Sena, então?

É claro que com um pouco de introspecção nós conseguimos encontrar inúmeras respostas para a pergunta acima. Mas será que conseguimos responder tal pergunta usando a teoria econômica que aprendemos até agora? Vamos tentar.

Primeiramente, podemos dizer que o conjunto de alternativas do nosso agente tem 3 elementos. Ele pode não ganhar e não perder nenhum dinheiro. Chamemos tal alternativa de Ficar na Mesma (FM). Por outro lado, ao comprar o bilhete o agente pode simplesmente perder 3,50 reais. Chamemos esta alternativa de Perder Dinheiro (PD). Finalmente, ele tem também a chance de ganhar 100.000.000. Chamemos tal alternativa de Ganhar 100 Milhões (G100).

Suponha que o agente tenha preferências sobre as alternativas acima dadas por uma função de utilidade U. Uma possível explicação formal para o fato de que o agente compra bilhetes de Mega Sena pode ser que a utilidade que o agente atribui a PD é praticamente a mesma que ele atribui a FM. Por exemplo, podemos dizer que $U(\text{FM}) = 0$ e $U(\text{PD}) = -0,0000000001$. Por outro lado, a utilidade de G100 pode ser muito alta. Por exemplo, $U(\text{G100}) = 50.000.000$. Dadas estas utilidades, nós podemos trabalhar com a hipótese de que na hora de escolher se compra ou não um bilhete de Mega Sena, o que o agente leva em consideração é o que chamamos de utilidade esperada de tal ação. Formalmente, a utilidade esperada de não comprar o bilhete é simplesmente zero, já que neste caso não existe nenhuma probabilidade envolvida. Por outro lado, a utilidade esperada de comprar o bilhete é dada por

$$U(\text{PD}) * \frac{49.999.999}{50.000.000} + U(\text{G100}) * \frac{1}{50.000.000} \cong 1.$$

Ou seja, a utilidade esperada de comprar um bilhete de Mega Sena é maior do que a utilidade esperada de não comprar o bilhete. Aparentemente, então, a nossa teoria econômica, da forma como a temos estudado até agora, já é capaz de responder a pergunta que fizemos no início da seção, mas nós veremos que isto não é exatamente verdade. O primeiro problema com a análise acima é que ela atribui um significado à função de utilidade do agente que é incompatível com a teoria que temos até o momento. Lembre-se do Capítulo 2 que se uma dada função de utilidade U representa as preferências de um dado agente, então a função V definida por $V := W(U)$, em que W é qualquer função estritamente crescente também representa as mesmas preferências. Usando o jargão popularmente utilizado em economia, a nossa teoria da utilidade até o momento é ordinal. Embora funções de utilidade sejam uma forma conveniente de representar as preferências de um determinado agente, a única informação que nós podemos realmente inferir de tais funções é o ranking que o agente faz das diversas alternativas. Voltando ao exemplo acima, a função V dada por $V(\text{FM}) = 0$, $V(\text{PD}) = -1$ e $V(\text{G100}) = 1$ representa exatamente a mesma preferência sobre as três alternativas em questão do que a função de utilidade U acima. Mas para tal função a utilidade esperada da compra de um bilhete de Mega Sena é

$$V(\text{PD}) * \frac{49.999.999}{50.000.000} + V(\text{G100}) * \frac{1}{50.000.000} \cong -1.$$

O que é pior do que zero que continua sendo a utilidade esperada de não comprar o bilhete.

A mensagem da discussão acima é que a teoria que temos até o momento não nos permite falar do conceito de utilidade esperada de uma forma que tenha significado. Para escaparmos de tais problemas, nós teremos que modificar um pouco as bases da nossa teoria. Na próxima seção nós introduziremos o conceito de loteria e passaremos a trabalhar com agentes econômicos que têm uma relação de preferências definida sobre tais objetos. Nós veremos que estas modificações nos permitirão falar do conceito de utilidade esperada de uma forma mais apropriada.

18.2.2 Preferências sobre Loterias

Vamos agora dar um formalismo matemático às idéias discutidas na introdução e na seção anterior. Seja X um conjunto finito. Lembre-se que a nossa interpretação é que X é o nosso conjunto de consequências. A idéia agora é que os objetos de escolha do nosso agente não são as consequências em X diretamente, mas ações que posteriormente levarão a alguma daquelas consequências. Lembre-se, também, que a nossa hipótese é que, dada uma ação, o agente sabe exatamente a probabilidade de obter uma determinada consequência no futuro. Sob tal hipótese, uma forma conveniente de modelar as ações é associar a cada ação um objeto que nós chamamos de loteria. Uma loteria é simplesmente um vetor de probabilidades sobre o conjunto X. Suponha que X tenha N elementos. Neste caso, uma loteria é simplesmente um vetor $p = (p_1, ..., p_N)$ tal que $p_i \geq 0$ pra todo i e $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. A interpretação é que dada a loteria p, a probabilidade de obtermos a consequência x_i é exatamente p_i.

Exemplo 18.1. Suponha que o nosso conjunto de consequências X seja composto de apenas duas alternativas: ficar molhado, representada pela letra m, e não ficar molhado, representado pela letra s. Suponha, também, que a probabilidade de que vá chover seja $1/2$. O nosso agente tem duas ações possíveis: levar um guarda chuva, ou não levar um guarda-chuva. De acordo com o formalismo acima, a ação de levar um guarda chuva pode ser representada pela loteria que diz que a probabilidade do agente não ficar molhado é 1 e a probabilidade do agente ficar molhado é zero. Já o ato de não levar um guarda-chuva pode ser representado pela loteria que diz que a chance do agente ficar molhado, bem como a chance do agente não ficar molhado, são ambas iguais a $1/2$. Ou seja, levar um guarda-chuva pode ser representado pelo vetor de probabilidades $(p(m), p(s)) = (0,1)$ e não levar um guarda-chuva pode ser representado pelo vetor de probabilidades $(p(m), p(s)) = (1/2, 1/2)$.

Então, vimos que um jeito conveniente de representarmos as diversas ações é através de loterias. Dado o nosso conjunto X, defina $\Delta(X)$ como o conjunto de todas as possíveis loterias sobre X. Ou seja $\Delta(X) := \{p \in \mathbb{R}^N : p_i \geq 0 \text{ pra todo } i \text{ e } \sum_{i=1}^N p_i = 1\}$. A nossa hipótese agora é que o agente terá uma relação de preferências definida sobre $\Delta(X)$. Ou seja, $\succsim$ agora é uma relação que, dadas duas loterias p e q em $\Delta(X)$, $\succsim$ nos diz se p é melhor ($p \succ q$), pior ($p \prec q$), ou indiferente a q ($p \sim q$).

Para ficarmos mais familiarizados com a notação e a modelagem acima vamos agora estudar alguns exemplos de relações de preferências sobre loterias.

Exemplo 18.2 (Preferências sobre Loterias)**.**

(a) *Maximizando a probabilidade de obter a consequência favorita.* Suponha que exista uma consequência $x^* \in X$ que o agente considere a melhor de todas. Uma possível relação de preferências sobre loterias neste caso poderia vir da hipótese de que o agente gosta sempre de maximizar a probabilidade de obter a consequência x^*. Formalmente isto é representado pela relação de preferências definida por

$$p \succsim q \text{ se e somente se } p(x^*) \geq q(x^*).$$

(b) *Utilidade esperada.* Suponha que o agente tenha uma função de utilidade u sobre o conjunto de consequências. Uma possível relação de preferências sobre loterias poderia ser aquela que se preocupa em maximizar o que chamamos de utilidade esperada. Ou seja,

$$p \succsim q \text{ se e somente se } \sum_{i=1}^N p(x_i)\, u(x_i) \geq \sum_{i=1}^N q(x_i)\, u(x_i).$$

O segundo tipo de preferências acima está no formato que discutimos na seção anterior. Naquela seção, nós abordamos alguns problemas que nós tínhamos ao tentarmos aplicar a teoria que aprendemos até aqui para caracterizar tal tipo de preferências. Na próxima seção nós veremos como o fato de que agora nossos objetos de escolha são loterias nos permitirá escapar daqueles problemas.

18.2.3 Teorema da Utilidade Esperada

Na seção anterior nós estudamos o conceito de loterias e também introduzimos o conceito de uma relação de preferências sobre o conjunto de loterias. No final da seção nós apresentamos uma classe interessante de preferências sobre loterias: a classe das preferências que têm uma representação por utilidade esperada. Agora, nós vamos investigar algumas propriedades que uma dada relação de preferências sobre loterias pode satisfazer e, posteriormente, nós vamos investigar como tais propriedades se relacionam com o conceito de representação por utilidade esperada.

Na verdade, antes nós vamos ampliar um pouco o nosso espaço de objetos de escolha. Nós permitiremos que existam loterias que paguem como prêmios outras loterias. Nós chamaremos tais objetos de loterias compostas. Por exemplo, suponha que p e q sejam duas loterias (simples) em $\Delta(X)$ e fixe $\alpha \in [0,1]$. Nós escrevemos $\alpha p \oplus (1-\alpha)q$ para representar um sorteio em que com probabilidade α o agente recebe como prêmio a loteria p e com probabilidade $1-\alpha$ recebe como prêmio a loteria q. O agente sabe que posteriormente a loteria p ou a loteria q terão que ser executadas para que o seu prêmio final seja determinado.

Agora que nós já introduzimos o conceito de loteria composta e a notação $\alpha p \oplus (1-\alpha)\, q$, nós estamos preparados para apresentar a nossa primeira propriedade para a preferência $\succsim$.

Axiom 18.1 (Redução de Loterias Compostas (RCL)). *Para todo par de loterias simples* $p, q \in \Delta(X)$ *e todo* $\alpha \in [0,1]$, $\alpha p \oplus (1-\alpha)q \sim \alpha p + (1-\alpha)q =: r$. *Isto é, a loteria composta* $\alpha p \oplus (1-\alpha)q$ *é indiferente à loteria simples* r *tal que, pra todo* $x \in X$, $r(x) = \alpha p(x) + (1-\alpha)q(x)$.

Em palavras, a propriedade de redução de loterias compostas nos diz que tudo que importa para a relação de preferências $\succsim$ são as probabilidades finais de receber cada uma das alternativas em X. Não importa se tais probabilidades finais são induzidas por um processo em dois estágios, como no caso da loteria composta $\alpha p \oplus (1-\alpha)q$, ou são induzidas por um único sorteio, como no caso da loteria simples $r = \alpha p + (1-\alpha)q$.

A próxima propriedade que nós precisamos discutir é o chamado axioma de independência.

Axioma 18.1 (Independência). *Nós dizemos que uma relação de preferências* $\succsim$ *sobre loterias simples e compostas satisfaz Independência se, para quaisquer três loterias simples* p, q *e* r *em* $\Delta(X)$, *e qualquer* α *tal que* $0 < \alpha < 1$,

$$p \succsim q \text{ se e somente se } \alpha p \oplus (1-\alpha)\, r \succsim \alpha q \oplus (1-\alpha)\, r.$$

A motivação para a propriedade acima é a seguinte. Dada as loterias compostas $\alpha p \oplus (1-\alpha)\, r$ e $\alpha q \oplus (1-\alpha)\, r$, o agente sabe que ambas lhe dão uma probabilidade $(1-\alpha)$ de receber a loteria r. Portanto, o que vai diferenciar uma da outra vai ser somente as loterias que ele vai receber com probabilidade α, ou seja, p e q. Mas então, já que em ambas as situações acima o agente só vai olhar para p e q, é natural supor que a opinião do agente vai ser a mesma nos dois casos.

Para podermos apresentar o teorema da utilidade esperada, nós precisamos ainda de mais uma propriedade.

Axioma 18.2 (Propriedade Arquimediana). *Nós dizemos que uma preferência sobre loterias* $\succsim$ *é Arquimediana, se para quaisquer três loterias* p, q *e* r, *se* $p \succ q \succ r$, *então existem* $0 < \alpha, \beta < 1$ *tal que* $\alpha p \oplus (1-\alpha)\, r \succ q$ *e* $q \succ \beta p \oplus (1-\beta)\, r$.

A primeira vista o axioma acima pode não parecer muito plausível. Suponha, por exemplo, que p represente uma situação em que você ganharia 100 reais com probabilidade 1. Suponha, também, que r represente uma morte horrível, digamos por queimadura, também com probabilidade 1. A loteria q pode por exemplo representar a possibilidade de se ganhar

10 reais com probabilidade 1. É razoável se supor que neste caso as preferências de qualquer pessoa satisfaçam $p \succ q \succ r$. Mas é também razoável acreditarmos que existe um valor de α tal que $\alpha p + (1-\alpha) r \succ q$? A primeira vista tal fato pode nos parecer questionável, já que agora nós estamos comparando uma chance de ganhar 10 reais com certeza com uma loteria em que embora você possa ganhar 100 reais, existe também uma possibilidade de você ter uma morte horrível por queimadura. Ao apresentarmos tal exemplo, não é raro ouvirmos argumentos do tipo "nenhum dinheiro vale o risco de ter uma morte horrível como esta".

Porém, é fácil ver que na prática tais argumentos são totalmente falaciosos. Se chegarmos para essas mesmas pessoas e oferecermos a elas 10 reais em mãos ou 100 reais em algum local em que elas vão ter que pegar o carro para ir até lá, elas com certeza vão preferir pegar os 100 reais no outro local. Mas ao pegar o carro não existe uma chance, pequena, mas não nula, de um acidente com uma posterior morte por queimadura? O ponto desta discussão é que mesmo que o axioma da propriedade Arquimediana possa não parecer tão razoável à primeira vista, uma análise mais profunda mostra que as ações das pessoas não têm como contradizê-lo.

As três propriedades acima são tudo que nós precisamos para caracterizar as preferências sobre um conjunto de loterias que admitem uma representação por utilidade esperada.

Teorema 18.1 (Teorema da Utilidade Esperada de Von Neumann e Morgenstern)**.** *Seja $X := \{x_1, ..., x_N\}$ um conjunto com N consequências. Defina $\Delta(X)$ como o conjunto de todas as loterias simples sobre X e seja $\succsim$ uma relação de preferências sobre o espaço de loterias compostas que satisfaz RCL. Então, $\succsim$ satisfaz Independência e a propriedade Arquimediana se e somente se existe uma função de utilidade u sobre X tal que para todo par de loterias p e q em $\Delta(X)$,*

$$p \succsim q \iff \sum_{i=1}^{N} p(x_i) u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{N} q(x_i) u(x_i).$$

O teorema acima nos mostra que as relações de preferências que satisfazem RCL, Independência e a propriedade Arquimediana são exatamente as preferências sobre loterias que admitem uma representação por utilidade esperada.

18.2.4 Motivações Positivas e Normativas para a Utilidade Esperada

Na seção anterior nós estudamos o Teorema da Utilidade Esperada. Tal teorema é o que nós chamamos de teorema de representação. Qual o motivo que nos leva a ter interesse em tal resultado. As motivações para termos interesse em teoremas de representação podem ser de dois tipos: positivas e normativas.

Motivações Positivas para o Teorema da Utilidade Esperada

Um dos possíveis usos para um teorema de representação como o acima é nos fornecer uma ferramenta de teste para que possamos verificar se um dado modelo é consistente com as ações tomadas por agentes econômicos em situações práticas. Por exemplo, suponha que tenhamos interesse na teoria da utilidade esperada. Mais especificamente, suponha que tenhamos interesse em saber se um determinado agente faz uso de uma representação por utilidade esperada para tomar suas decisões. Ou, alternativamente, suponha que estejamos interessados em descobrir se algum modelo de utilidade esperada pode ser usado para explicar as decisões de um determinado agente.

Infelizmente, nenhum agente econômico carrega em sua testa uma tatuagem com a sua função de utilidade para podermos verificar se esta é do tipo Utilidade Esperada ou não. O teorema acima nos fornece, portanto, uma forma de testar se o comportamento do agente está de acordo com a teoria da utilidade esperada. Como nós sabemos que uma preferência que tem representação por utilidade esperada necessariamente satisfaz Independência e a propriedade Arquimediana, nós ao invés de tentarmos descobrir uma possível função de utilidade do agente, nós podemos simplesmente testar se as decisões do agente satisfazem essas duas propriedades. Acreditem, esta é uma tarefa muito mais fácil.

Testar se as decisões dos agentes econômicos satisfazem as propriedades que caracterizam a representação por utilidade esperada é de fato algo que já foi feito por diversas pessoas. Como nós já argumentamos anteriormente, as escolhas dos agentes econômicos em situações práticas sempre satisfazem a propriedade Arquimediana. No entanto, a maior parte das pessoas consistentemente viola o axioma de Independência. Ou seja, o axioma da independência e, consequentemente a teoria da utilidade esperada, não nos proporciona uma boa descrição do comportamento dos agentes, na maioria dos casos. Mas isto quer dizer, então, que o teorema da utilidade esperada é algo inútil? Não exatamente, já que nós veremos que as motivações normativas para tal resultado são bem mais fortes.[18.2]

Motivações Normativas para o Teorema da Utilidade Esperada

Nós vimos na seção acima que como descrição da realidade a teoria da utilidade esperada não é muito precisa. Porém, uma outra razão para que tenhamos interesse em um teorema de representação como o acima pode ser totalmente normativa. Suponha que tenhamos um conjunto X com 4 alternativas, $X := \{x, y, z, w\}$. Nós agora temos que ajudar um dono de empresa a decidir se uma loteria p dada por $(p_x, p_y, p_z, p_w) = (1/8, 1/4, 1/4, 3/8)$ é melhor do que uma loteria q dada por $(q_x, q_y, q_z, q_w) = (1/4, 3/8, 1/8, 1/4)$. Nós já podemos imaginar que em geral tais decisões podem ser muito complicadas.

Por outro lado, os dois axiomas que caracterizam a utilidade esperada parecem fazer bastante sentido. Por exemplo, nós podemos perguntar ao dono da empresa se ele considera as propriedades de Independência e Arquimediana como razoáveis para o processo de decisão em sua empresa. Em caso afirmativo, na hora de decidir qual das duas loterias acima é a melhor, nós poderíamos simplesmente tentar descobrir qual a função de utilidade da empresa sobre as alternativas em X. Agora tudo que temos que fazer é escolher a loteria com a maior utilidade esperada.

Nós não teremos tempo para nos aprofundarmos em tal discussão aqui, mas sob algumas hipóteses, existem justificativas razoáveis para que consideremos os dois axiomas acima como bons guias para tomadas de decisão em um contexto de escolha sob incerteza.

[18.2] Além disto, a teoria da utilidade esperada serve de ponto de partida para várias outras teorias que representam uma descrição melhor das decisões dos agentes. Fora isto, nenhuma outra teoria é analiticamente tão conveniente quanto a teoria da utilidade esperada, o que faz com que esta continue sendo usada intensamente em grande parte dos trabalhos em economia.

18.3 Loterias Monetárias e Aversão ao Risco

18.3.1 Introdução

Na seção anterior nós estudamos o conceito de loterias e utilidade esperada. Naquela seção nós tínhamos um conjunto de alternativas genérico X e nós definimos uma loteria sobre X como sendo simplesmente um vetor de probabilidades sobre os elementos de X. Dada uma loteria p, a interpretação era que para cada $x \in X$, $p(x)$ representava a probabilidade que um agente detentor da loteria p iria acabar recebendo a alternativa ou consequência x no futuro. Agora nós colocaremos um pouco mais de estrutura no nosso conjunto de alternativas X. Mais precisamente, nós trabalharemos com a hipótese de que as alternativas em X são simplesmente valores monetários. Nós veremos que esta estrutura adicional nos permitirá discutir alguns conceitos novos.

18.3.2 Loterias Monetárias

Como nós discutimos na introdução, agora nós trabalharemos com a hipótese de que as alternativas no nosso conjunto X são ganhos monetários. Formalmente, nós definiremos X como o conjunto dos números reais. Ou seja, $X := \mathbb{R}$. Como o nosso conjunto X agora não é mais finito, nós vamos precisar mudar um pouco nossa notação para podermos representar loterias. A notação que usaremos seguirá o seguinte padrão:

$$p := \frac{1}{4}(20) \oplus \frac{3}{4}(100).$$

Na nossa notação, a loteria p acima retorna 20 reais com probabilidade igual a $1/4$ e retorna 100 reais com probabilidade igual a $3/4$. De forma similar, a loteria q abaixo retorna 0 reais com probabilidade igual a $1/4$, retorna 30 reais com probabilidade igual a $1/2$ e retorna 60 reais com probabilidade igual a $1/4$.

$$q := \frac{1}{4}(0) \oplus \frac{1}{2}(30) \oplus \frac{1}{4}(60).$$

Valor Esperado de uma Loteria

Como os prêmios de nossas loterias agora são valores monetários, nós podemos trabalhar com o conceito de valor esperado de uma loteria. Para uma dada loteria p, nós usaremos a notação $E[p]$ para representar o seu valor esperado. Por exemplo, para as duas loterias acima nós temos:

$$E[p] = \frac{1}{4} * 20 + \frac{3}{4} * 100 = 80$$

e

$$E[q] = \frac{1}{4} * 0 + \frac{1}{2} * 30 + \frac{1}{4} * 60 = 30.$$

Preferências sobre Loterias e Utilidade Esperada

Como foi o caso na seção anterior, nós estaremos interessados em estudar agentes que tenham uma relação de preferências $\succsim$ sobre o conjunto de todas as loterias monetárias. Como foi o caso anteriormente, nós estaremos particularmente interessados no caso em que $\succsim$ tem uma representação por utilidade esperada. Isto é, suponha que tenhamos duas loterias

$$p := \frac{1}{2}(10) \oplus \frac{1}{2}(20)$$

e

$$q := \frac{1}{2}(12) \oplus \frac{1}{2}(18).$$

Nestas notas de aula nós assumiremos que existe uma função u, sobre o conjunto de números reais, tal que

$$p \succsim q \text{ se e somente se } \frac{1}{2}u(10) + \frac{1}{2}u(20) \geq \frac{1}{2}u(12) + \frac{1}{2}u(18).$$

A idéia é exatamente a mesma da seção anterior. Como aqui não estamos interessados em discutir as condições que levam à existência de uma representação por utilidade esperada, durante a maior parte do tempo nós evitaremos falar explicitamente de $\succsim$, ficando subentendido que dada a função u, as preferências do agente são simplesmente dadas pela utilidade esperada das diversas loterias. Nós chamaremos as funções u utilizadas em representações por utilidade esperada de funções de Bernoulli e, para uma dada loteria p, nós usaremos $U(p)$ para representar a utilidade esperada de p com relação à função de Bernoulli u. Finalmente, durante todo o tempo nós assumiremos que as nossas funções de Bernoulli u são contínuas e estritamente crescentes.

Exemplo 18.3 (Agente neutro ao risco)**.** Suponha que a função de Bernoulli do agente seja simplesmente a função identidade, isto é, $u(x) = x$, para todo número real x. Como tal agente compara as duas loterias p e q acima? Para respondermos a esta pergunta precisamos calcular a utilidade esperada das duas loterias com respeiro à função u. Mas observe que

$$\begin{aligned} U(p) &= \frac{1}{2}u(10) + \frac{1}{2}u(20) \\ &= \frac{1}{2} * 10 + \frac{1}{2} * 20 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} U(q) &= \frac{1}{2}u(12) + \frac{1}{2}u(18) \\ &= \frac{1}{2} * 12 + \frac{1}{2} * 18 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Portanto, um agente que tem como função de Bernoulli a função de identidade é indiferente entre as loterias p e q.

18.3.3 Aversão ao Risco

No exemplo 18.3 acima nós vimos que o agente era indiferente entre as loterias p e q. Se prestarmos atenção, ambas as loterias têm o mesmo valor esperado. De fato, é fácil ver que dada a função de Bernoulli do agente, a utilidade esperada de qualquer loteria é simplesmente o seu valor esperado. Ou seja, um agente cuja função de Bernoulli é simplesmente a identidade julgará as diversas loterias apenas pelo seu valor esperado. Por exemplo, tal agente é indiferente entre a loteria q acima e uma outra loteria r que retorne um prêmio de 15 reais com probabilidade 1.[18.3]

Um agente que só se importa com o valor esperado das loterias, como o acima, é chamado na literatura de neutro ao risco. De forma similar, nós podemos definir o conceito de um agente avesso ao risco. Um agente avesso ao risco sempre acha o valor esperado de uma determinada loteria pelo menos tão bom quanto a própria loteria. Isto é, dada uma loteria p, um agente avesso ao risco acha a loteria que paga $E[p]$ com probabilidade 1 pelo menos tão boa quanto p. Formalmente, para um agente avesso ao risco nós sempre temos

$$U(1(E[p])) \geq U(p).$$

Se a desigualdade acima é sempre estrita nós dizemos que o agente é estritamente avesso ao risco.

Função de Bernoulli de um Agente Avesso ao Risco

Suponha que tenhamos um agente avesso ao risco e que sua função de Bernoulli seja u. Considere uma loteria p que paga um prêmio x com probabilidade α e um prêmio y com probabilidade $(1-\alpha)$. Na nossa notação:

$$p := \alpha(x) \oplus (1-\alpha)(y).$$

O valor esperado de tal loteria é dado simplesmente por

$$E[p] = \alpha x + (1-\alpha) y.$$

E sua utilidade esperada é dada por

$$U(p) = \alpha u(x) + (1-\alpha) u(y).$$

Como por hipótese o nosso agente é avesso ao risco, nós sabemos que

$$U(1(E[p])) \geq U(p),$$

ou seja,

$$u(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha) u(y).$$

Ou seja, para quaisquer dois números reais x e y nós temos que ter $u(\alpha x + (1-\alpha) y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha) u(y)$. Mas esta é exatamente a condição que caracteriza uma função côncava. Parece, então, que aversão ao risco está relacionada com a concavidade da função de Bernoulli do agente. De fato, temos a seguinte proposição:

[18.3] Na nossa notação: $r := 1(15)$.

Proposição 18.1. *Suponha que a função de Bernoulli de um determinado agente seja dada por u. Então, o agente é avesso ao risco se e somente se a função u é côncava.*

A proposição acima nos fornece um teste simples para verificarmos se um agente é ou não avesso ao risco. Tudo que temos a fazer é verificar se a função de Bernoulli do agente é côncava. Lembre-se que uma função duas vezes derivável u é côncava se e somente se sua derivada segunda é sempre menor ou igual a zero.

Exemplo 18.4 (Funções Côncavas)**.** Suponha que a função de Bernoulli do agente seja dada por $u(x) = -e^{-x}$. Nós podemos facilmente verificar que tal agente é avesso ao risco. De fato,

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -e^{-x},$$

que é menor do que zero para todo x.

Equivalente Certeza

Suponha que tenhamos um agente com função de Bernoulli u e considere uma loteria $p := \alpha(x) \oplus (1-\alpha)(y)$. Quanto será que o agente aceitaria pagar por tal loteria? Ou, em outras palavras, qual o prêmio z que se oferecido ao agente com probabilidade 1 lhe daria a mesma utilidade esperada que a loteria acima. Formalmente, nós estamos interessados em descobrir o valor de z que satisfaz a seguinte equação:

$$u(z) = \alpha u(x) + (1-\alpha) u(y).$$

Nós chamamos o valor de z que resolve a equação acima de equivalente certeza de p. Para uma loteria genérica p e uma dada função de Bernoulli u, nós usamos a notação $c(p, u)$ para representar o equivalente certeza da loteria p com relação à função de Bernoulli u. No exemplo abaixo nós computamos o equivalente certeza para algumas loterias e funções de Bernoulli.

Exemplo 18.5 (Equivalente Certeza)**.**

(a) Suponha que a função de Bernoulli do agente seja $u(x) = x$. Considere uma loteria genérica $p = \alpha(x) \oplus (1-\alpha)(y)$. Observe que

$$U(p) = \alpha x + (1-\alpha) y.$$

Mas, então, a utilidade esperada da loteria p é igual à utilidade esperada da loteria que paga o prêmio $\alpha x + (1-\alpha) y$ com probabilidade 1. Ou seja,

$$c(p, u) = \alpha x + (1-\alpha) y.$$

Conclusão: para um agente neutro ao risco, o equivalente certeza de qualquer loteria é sempre igual ao seu valor esperado.

(b) Suponha que $u(x) = x^2$ e considere a loteria $p = \frac{1}{3}(2) \oplus \frac{2}{3}(1)$. Vamos primeiro calcular a utilidade esperada de p. Esta será dada por

$$\begin{aligned} U(p) &= \frac{1}{3}(2)^2 + \frac{2}{3}(1)^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Mas então, o equivalente certeza de p resolve a equação

$$z^2 = 2,$$

e, portanto, $c(p, u) = \sqrt{2}$.

Suponha, agora, que tenhamos um agente avesso ao risco com função de Bernoulli u. Fixe uma loteria genérica qualquer p. Como o agente é avesso ao risco, nós sabemos que

$$u(E[p]) = U(1(E[p])) \geq U(p).$$

Ou seja, a loteria que paga o valor esperado de p com probabilidade 1 é pelo menos tão boa para o agente quanto p. Isto implica que o agente considerará loterias que pagam um prêmio maior do que o valor esperado de p com probabilidade 1 estritamente melhores do que p. Mas então, para um agente avesso ao risco, o equivalente certeza de p tem que ser necessariamente menor ou igual ao valor esperado de p. De fato, como a proposição abaixo nos mostra, esta é uma caracterização alternativa do conceito de aversão ao risco.

Proposição 18.2. *Suponha que a função de Bernoulli de um determinado agente seja dada por u. Então, o agente é avesso ao risco se e somente se, para toda loteria p, $c(p, u) \leq E[p]$.*

Agora que nós já aprendemos o conceito de aversão ao risco, na próxima seção nós estudaremos como um agente avesso ao risco se comporta em algumas situações de incerteza.

18.3.4 Comportamento de um Agente Avesso ao Risco

Nível Ótimo de Seguro

Suponha que um agente avesso ao risco com função de Bernoulli u tenha uma riqueza inicial igual a W. O agente sabe que existe uma probabilidade α de ele perder D reais. Ou seja, se ele não fizer nada, com probabilidade α sua riqueza no futuro será $W - D$. Suponha, que exista uma seguradora que cobre um preço s para cada real segurado. Isto é, se o agente fizer um seguro de X reais, ele paga sX à seguradora, mas caso o evento que leva à perda D ocorra ele recebe X reais. Ou seja, caso o agente contrate um seguro para X reais, com probabilidade α o evento que leva à perda dos D reais ocorrerá e a riqueza do agente será $W - sX - D + X$. Com probabilidade $(1 - \alpha)$ o evento não ocorrerá, situação esta em que a riqueza do agente será apenas $W - sX$. Como o exemplo abaixo mostra, se nós conhecermos a função de Bernoulli do agente nós podemos facilmente calcular quanto seguro ele vai contratar.

Exemplo 18.6. Suponha que $W = 2$ e que com probabilidade $\alpha = 4/9$ o agente tenha a chance de perder $D = 1$ real. Suponha, também, que o preço cobrado por real segurado seja $s = 5/9$. Finalmente, suponha que a função de Bernoulli do agente seja simplesmente $u(x) = \ln x$. Calcule a quantidade de seguro, X, que o agente vai contratar.

Solução. Quando o agente contrata um seguro para X reais, ele paga sX reais para a seguradora. Caso o evento que desencadeia o pagamento do seguro não ocorra a riqueza do agente será simplesmente $2 - \frac{5}{9}X$. Caso o evento que desencadeia o pagamento do seguro ocorra a riqueza do agente será $2 - 1 + \left(1 - \frac{5}{9}\right) X = 1 + \frac{4}{9}X$. O problema do agente é escolher o valor de X que maximize a sua utilidade esperada. Ou seja,

$$\max_X \frac{5}{9} \ln\left(2 - \frac{5}{9}X\right) + \frac{4}{9} \ln\left(1 + \frac{4}{9}X\right).$$

A condição de primeira ordem do problema acima é dada por

$$\frac{5}{9}\left[-\frac{5}{9}\frac{1}{2 - \frac{5}{9}X}\right] + \frac{4}{9}\left[\frac{4}{9}\frac{1}{1 + \frac{4}{9}X}\right] = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$-\frac{25}{2 - \frac{5}{9}X} + \frac{16}{1 + \frac{4}{9}X} = 0.$$

Que é equivalente a,

$$16\left(2 - \frac{5}{9}X\right) = 25\left(1 + \frac{4}{9}X\right).$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos que a quantidade ótima de seguro contratada é $X = 7/20$ reais. ‖

No exemplo acima nós aprendemos a calcular o nível ótimo de seguro que um agente contrataria. Dado o preço por real segurado o agente acabava segurando apenas $7/20$ reais, embora houvesse uma possibilidade de perda de 1 real caso o evento ruim ocorresse. Isto se deve ao fato de que o seguro estava um pouco caro no exemplo acima. Vamos agora estudar o comportamento do agente se o seguro tivesse um preço justo.

Exemplo 18.7 (Nível ótimo de seguro com preço justo)**.** No exemplo acima, a probabilidade do evento que desencadeia o pagamento do seguro ocorrer é igual a $4/9$. Portanto, se o agente tem X reais segurados, o valor esperado de tal seguro é exatamente $\frac{4}{9}X$. Logo, o preço por unidade segurada que iguala o custo do seguro ao seu valor esperado é exatamente $s = 4/9$. Nós chamamos tal valor de preço justo do seguro. Vejamos quanto seguro o agente contrataria caso o seguro tivesse um preço justo. Neste caso, o problema do agente pode ser escrito como

$$\max_X \frac{5}{9} \ln\left(2 - \frac{4}{9}X\right) + \frac{4}{9} \ln\left(1 + \frac{5}{9}X\right).$$

A condição de primeira ordem do problema acima é dada por

$$\frac{5}{9}\left[-\frac{4}{9}\frac{1}{2 - \frac{4}{9}X}\right] + \frac{4}{9}\left[\frac{5}{9}\frac{1}{1 + \frac{5}{9}X}\right] = 0,$$

que pode ser reescrita como

$$-\frac{1}{2-\frac{4}{9}X}+\frac{1}{1+\frac{5}{9}X}=0.$$

Que é equivalente a,

$$2-\frac{4}{9}X=1+\frac{5}{9}X.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos uma quantidade ótima de seguro $X = 1$ real. Portanto, quando o preço do seguro é justo o agente opta por um seguro total.

O fenômeno descrito acima não depende dos parâmetros específicos do exemplo. Na verdade, sempre que um agento avesso ao risco se defronta com um seguro com preço justo, ele opta por um seguro total. Na lista de exercícios será pedido que vocês mostrem tal fato formalmente.

18.4 Exercícios

Exercício 18.1 (Maximizar a Probabilidade de Obter a Consequência Favorita)**.** *Considere o exemplo de preferência sobre loterias nas notas de aula. Isto é, suponha que o conjunto de alternativas X tenha uma alternativa x^* que é a favorita do agente. Suponha, também, que dadas duas loterias p e q,*

$$p \succsim q \iff p(x^*) \geq q(x^*).$$

Ou seja, o agente sempre busca maximizar a probabilidade de obter a sua consequência favorita. Mostre que tal relação de preferências satisfaz Independência e a propriedade Arquimediana (Dica: Não tente mostrar isto diretamente, use o teorema da utilidade esperada).

Exercício 18.2. *Suponha agora que estejamos falando de loterias monetárias. Lembre-se que para uma dada loteria p, nós usamos a notação $E[p]$ para representar o seu valor esperado. Nós usaremos a notação $Var(p)$ para representar a variância de uma determinada loteria. Por exemplo, para loterias que retornam apenas dois prêmios, isto é, loterias do tipo $p := \alpha(x) \oplus (1-\alpha)(y)$, o valor esperado e a variância têm a seguinte forma*

$$E[p] = \alpha * x + (1-\alpha) * y$$

e

$$Var(p) = \alpha(x - E[p])^2 + (1-\alpha)(y - E[p])^2.$$

(a) *Calcule os valores esperados e as variâncias das loterias $p := \frac{1}{3}(2) \oplus \frac{2}{3}(1)$ e $q := \frac{1}{4}(8) \oplus \frac{3}{4}(4)$.*

(b) *(Dependendo dos seus conhecimentos de probabilidade e estatística este exercício pode ser um pouco mais difícil, mas eu acho que vocês têm condições de resolvê-lo) Suponha agora que o agente tenha uma função de utilidade sobre o conjunto de loterias monetárias dada por*

$$V(p) = E[p] - (E[p])^2 - Var(p).$$

Considerando loterias que retornam apenas dois prêmios, isto é, loterias da forma $\alpha(x) \oplus (1-\alpha)(y)$*, mostre que a função de utilidade acima pode ser escrita no formato de utilidade esperada. Ou seja, mostre que existe uma função* u *sobre os números reais tal que para qualquer loteria* $p := \alpha(x) \oplus (1-\alpha)(y)$*,*

$$V(p) = \alpha u(x) + (1-\alpha) u(y).$$

Exercício 18.3 (Seguro Total)**.** *Lembre-se do exemplo nas notas de aula. Isto é, suponha que tenhamos um agente com riqueza inicial igual a* W*. Com probabilidade* α *um evento que implica em uma perda de* D *reais para o agente vai ocorrer. O agente tem a oportunidade de fazer um seguro para receber* X *reais caso o evento que desencadeie a perda dos* D *reais ocorra. Suponha que o preço pago por cada real segurado seja simplesmente* s*.*

(a) *Suponha que o agente tenha contratado um seguro para* X *reais. Como não sabemos ainda se o evento que ocasiona a perda dos* D *reais vai ocorrer, a riqueza futura do agente é para nós uma variável aleatória, ou, na nossa terminologia, uma loteria. Escreva a loteria que representa a riqueza futura de um agente que contratou um seguro de* X *reais.*

(b) *Observe que para cada possível valor de* X*, a expressão que você encontrou acima representa uma loteria diferente. Deste modo, o problema de escolher o nível ótimo de seguro pode ser interpretado como o problema de escolher a melhor loteria dentre as diversas possíveis acima. Suponha agora que o seguro tenha um preço justo, isto é, suponha que* $s = \alpha$*. Mostre que neste caso o valor esperado das loterias acima é sempre o mesmo, independentemente do valor* X*.*

(c) *Ou seja, quando o seguro tem um preço justo, o problema do agente passa a ser o de escolher entre várias loterias que têm o mesmo valor esperado. Use este fato para argumentar que neste caso um agente avesso ao risco sempre vai escolher um seguro total, ou seja,* $X = D$ *(Dica: Você não tem que fazer conta. A conclusão vem diretamente da definição de aversão ao risco).*

Exercício 18.4 (Demanda por Ativos de Risco)**.** *Suponha que existam dois estados possíveis da natureza,* $\{\omega_1, \omega_2\}$*. A idéia é que no futuro um dos dois estados vai ocorrer. Suponha que a probabilidade de que* ω_1 *vá ocorrer seja* $p(\omega_1) = 1/3$ *e a probabilidade de que* ω_2 *vá ocorrer seja* $p(\omega_2) = 2/3$*. Suponha que a economia tenha dois ativos de risco. O primeiro ativo,* A_1*, paga* 1 *real no estado* ω_1 *e paga* 2 *reais no estado* ω_2*, já o ativo* A_2 *paga* 3 *reais no estado* ω_1 *e paga* 0 *reais no estado* ω_2*.*

(a) *Suponha que os preços por unidade dos ativos* A_1 *e* A_2 *sejam, respectivamente,* $p_{A_1} = 4/3$ *e* $p_{A_2} = 1$*. Seja agora um agente com função de Bernoulli* $u(x) = \ln x$*. Suponha que tal agente tenha 2 reais para gastar entre os dois ativos descritos acima. Quanto ele compraria de cada ativo e, dado o seu portifólio, quanto seria o retorno financeiro do agente em cada um dos estados?*

(b) *Se você fez as contas corretamente, você percebeu que o portifólio escolhido pelo agente na letra (a) dá um retorno maior no estado ω_2 do que no estado ω_1. Este resultado é intuitivo, já que o preço do ativo A_2 corresponde exatamente ao valor esperado de uma unidade de tal ativo enquanto, por outro lado, o preço do ativo A_1 está mais barato do que o valor esperado de uma unidade de tal ativo. Desta forma, é intuitivo que o agente esteja comprando relativamente mais do ativo A_1 e, portanto, o seu retorno monetário seja maior no estado que é mais favorável a tal ativo. Suponha agora que o ativo A_1 também tenha um preço justo. Isto é, suponha que $p_{A_1} = 5/3$. Calcule quanto o agente compraria de cada ativo neste caso e compute o retorno financeiro do agente em cada um dos estados.*

(c) *Se você fez as contas corretamente, você percebeu que no item anterior o retorno financeiro do agente é o mesmo nos dois estados. Tal resultado não depende dos exatos valores utilizados na questão. Em geral, se tivermos um agente avesso ao risco, todos os ativos tiverem um preço justo e a nossa estrutura de ativos for rica o suficiente, o agente vai escolher um portifólio que elimine a incerteza sobre os seus ganhos futuros. No exemplo aqui estudado, a riqueza da estrutura de ativos corresponde ao fato de que os dois ativos acima são negativamente correlacionados. Isto é, o ativo A_1 paga mais no estado ω_2 e o ativo A_2 paga mais no estado ω_1. Mostre que se isto não for verdade, então não existe portifólio que elimine a incerteza sobre os ganhos monetários futuros do agente. Atenção, tal resultado é independente do fato do portifólio ser o ótimo ou não e também não depende dos preços dos ativos. O resultado é bem mais trivial, simplesmente, em tal caso, qualquer portifólio pagará mais em um estado que no outro.*

Capítulo 19

Teoria dos Jogos - Jogos na Forma Normal

19.1 Introdução

No curso de Microeconomia 1 nós estudamos a teoria da decisão individual. Isto é, nós estudamos como um agente econômico isolado faz suas escolhas. Na primeira parte do curso de Microeconomia 2 nós nos concentramos na teoria do equilíbrio geral. Embora a teoria de equilíbrio geral aceite a presença de diversos agentes, a hipótese lá é que os diversos agentes econômicos desconsideram o efeito que as suas decisões vão ter nas decisões dos outros agentes. Desta forma, a teoria do equilíbrio geral ignora completamente quaisquer considerações estratégicas que um agente possa ter na hora de tomar uma decisão.

A teoria do equilíbrio geral é muito útil e tem diversas aplicações em economia, mas algumas situações econômicas relevantes são inerentemente estratégicas, o que nos faz ter interesse em teorias que possam ser aplicadas a tais situações. Considere os seguintes exemplos:

Exemplo 19.1 (Problema dos Sorveteiros)**.** Suponha que tenhamos uma praia que seja atendida por dois sorveteiros. Para simplificar, suponha que as pessoas estejam distribuídas de maneira igual por toda a praia. Onde será que os dois sorveteiros vão se posicionar? Tal problema ainda não está totalmente especificado, mas nós já podemos perceber que este é um problema totalmente estratégico. O lucro do sorveteiro vai depender de onde ele e de onde o seu concorrente estiverem posicionados. Mais ainda, o sorveteiro sabe disto, o seu concorrente sabe disto, ele sabe que o seu concorrente sabe disto, etc.. Fica claro, que as teorias que estudamos até agora não são capazes de lidar com tal problema.

Exemplo 19.2 (Duopólio)**.** Suponha que somente duas empresas vendam o produto y. Existe um grande número de consumidores no mercado, de modo que os consumidores vão agir como tomadores de preço. O problema das duas empresas agora é escolher que preço elas devem cobrar pelo produto y de modo a maximizar os seus lucros. Novamente, o problema acima ainda não está totalmente especificado, mas nós já podemos perceber que ele também é um problema estratégico. O lucro de cada uma das empresas vai depender do preço que ela está cobrando e do preço que a sua concorrente está cobrando. Por outro lado, ambas as empresas sabem que a sua decisão de preço vai afetar a decisão de preço da concorrente. Como saber o que vai acontecer em tal situação?

Os dois exemplos acima mostram que nós precisamos de novas ferramentas para podermos estudar situações econômicas em que situações estratégicas estejam envolvidas. A ferramenta usada em economia para tanto é conhecida como Teoria dos Jogos.

19.2 O Conceito de Jogo

Nesta seção nós estudaremos o conceito de jogo. Um jogo para nós consistirá de três elementos. Primeiramente, nós temos um conjunto de jogadores, digamos $J := \{1, 2, ..., N\}$. Para cada jogador $i \in J$ nós associamos um conjunto de ações ou estratégias A_i. Finalmente, nós precisamos de algo que represente as regras do jogo. Para nós as regras do jogo vão ser representadas pelo que nós chamamos de funções de ganho dos agentes. A função de ganho do agente i, por exemplo, é simplesmente uma função que nos diz qual o prêmio que o agente i recebe dadas as estratégias usadas por todos os jogadores. Ou seja, dado um vetor $(a_1, a_2, ..., a_N)$ em que para cada j, $a_j \in A_j$, a função de ganho U^i do agente i associa um número real $U^i(a_1, ..., a_N)$ que representa o prêmio que o agente i recebe em tal situação. Em geral, nós chamamos um vetor de estratégias $(a_1, a_2, ..., a_N)$, de perfil de estratégias.

Exemplo 19.3 (Problema do Sorveteiro Revisitado)**.** Uma forma de modelar o problema dos sorveteiros como um jogo é representar a praia simplesmente como um segmento de reta ou intervalo. Digamos que nós representemos a praia como o intervalo fechado $[0, 1]$. Agora o problema de cada um dos sorveteiros é simplesmente escolher uma posição, ou número, entre 0 e 1. Ou seja, em tal problema os conjuntos de estratégias dos jogadores são dados por $A_1 = A_2 = [0, 1]$. Finalmente, para completar a descrição do jogo nós só precisamos de duas funções U^1 e U^2 que para cada par de de números a_1 e a_2 entre 0 e 1 nos diga qual o ganho de cada agente. Isto é, $U^1(a_1, a_2)$ nos dirá qual o ganho do sorveteiro 1 quando o sorveteiro 1 se coloca na posição a_1 e o sorveteiro 2 se coloca na posição a_2. De forma similar, $U^2(a_1, a_2)$ nos diz qual o ganho do sorveteiro 2 nesta mesma situação.[19.1]

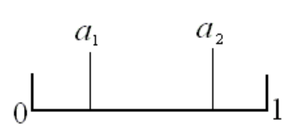

Figura 19.1: Representação gráfica do problema dos sorveteiros

[19.1] Dependendo da nossa modelagem o ganho de cada um dos sorveteiros pode ser, por exemplo, o seu lucro ou número de sorvetes vendidos. Quanto cada sorveteiro vende dada as suas posições na praia vai depender de hipóteses adicionais que nós incorporaremos ao modelo no futuro.

Exemplo 19.4 (Duopólio Revisitado)**.** No duopólio o conjunto de jogadores é logicamente dado pelas duas firmas, ou seja, $J := \{F_1, F_2\}$. Cada firma tem que escolher que preço cobrar pelo produto, portanto suas estratégias são dadas simplesmente por $A_1 = A_2 = [0, \infty)$. Para completar a descrição do jogo só precisamos agora de duas funções U^1 e U^2 que, dados os preços cobrados pelas duas firmas, nos informem o lucro de cada uma delas. Ou seja, dado um vetor de preços (a_1, a_2) com $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$, $U^1(a_1, a_2)$ nos diz qual o lucro da firma F_1 e $U^2(a_1, a_2)$ nos diz qual o lucro da firma F_2.

19.3 Conjuntos de Estratégias Finitos e Jogos na Forma Matricial

Nesta seção nós nos concentraremos em jogos em que o número de jogadores é igual a 2 e o conjunto de estratégias de cada jogador é finito. Para tais jogos existe uma forma bastante conveniente de representação. Nós vamos chamar tal representação de representação matricial de um jogo.

Para visualizar tal representação, comecemos com o caso em que cada um dos dois jogadores têm apenas duas estratégias disponíveis. Por exemplo, suponha que $A_1 := \{C, B\}$ e $A_2 := \{E, D\}$. Neste caso, para completar a descrição do jogo nós só precisamos especificar o ganho de cada um dos agentes em 4 situações distintas. Isto é, nós só precisamos conhecer $U^i(C, E), U^i(C, D), U^i(B, E)$ e $U^i(B, D)$, para $i = 1, 2$. A forma mais conveniente de representar tal jogo é em uma matriz em que o jogador 1 escolha a linha da matriz e o jogador 2 escolhe a coluna. Em cada célula nós escrevemos o ganho dos agentes dadas as duas estratégias jogadas.

$$\begin{array}{cc|c|c|} & & \multicolumn{2}{c}{\text{Jogador 2}} \\ & & E & D \\ \cline{3-4} \text{Jogador} & C & U^1(C,E), U^2(C,E) & U^1(C,D), U^2(C,D) \\ \cline{3-4} 1 & B & U^1(B,E), U^2(B,E) & U^1(B,D), U^2(B,D) \\ \cline{3-4} \end{array} \tag{19.1}$$

Geralmente, na literatura, nós encontraremos o jogador 1 representado como o jogador que escolhe as linhas e o jogador 2 representado como o que escolhe as colunas. Neste curso nós seguiremos esta convenção.

Exemplo 19.5 (Par ou ímpar)**.** Suponha que o jogador 1 tenha sido a pessoa que pediu par. Agora, as estratégias dos jogadores consistem apenas em colocar um número par ou um número ímpar. Digamos que o jogador que ganha o par ou ímpar recebe ganho 1 e o que perde recebe ganho -1. Na representação matricial tal jogo pode ser escrito como

$$\begin{array}{cc|c|c|} & & \multicolumn{2}{c}{\text{Jogador Ímpar}} \\ & & P & I \\ \cline{3-4} \text{Jogador} & P & 1, -1 & -1, 1 \\ \cline{3-4} \text{Par} & I & -1, 1 & 1, -1 \\ \cline{3-4} \end{array} \tag{19.2}$$

O jogo acima é o que chamamos de jogo de soma zero. Se você prestar atenção você vai perceber que em todas as situações a soma dos ganhos dos dois jogadores é igual a zero. Nos seus primórdios a teoria dos jogos dedicou bastante atenção a tais jogos, nem tanto por sua importância econômica, mas sim por ser este um dos únicos tipos de jogo que eles sabiam analisar satisfatoriamente. Após a introdução do conceito de equilíbrio de Nash, que nós estudaremos mais a frente, a importância relativa dos jogos de soma zero diminuiu bastante.

Consideremos mais um exemplo.

Exemplo 19.6 (Batalha dos Sexos)**.** Suponha agora que os jogadores 1 e 2 sejam um casal. Os jogadores têm que decidir aonde ir no sábado a noite. Jogador 1 é a mulher e ela prefere ir para uma discoteca. Já o jogador 2 prefere ir para o seu bar favorito. Como eles são um casal muito apaixonado, caso ambos vão para locais diferentes eles não derivam nenhuma utilidade. Tal situação pode ser representada pelo seguinte jogo:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Homem} \\ & & \begin{array}{cc} D & B \end{array} \\ \text{Mulher} & \begin{array}{c} D \\ B \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 3,1 & 0,0 \\ \hline 0,0 & 1,3 \\ \hline \end{array} \end{array} \tag{19.3}$$

19.4 Jogos Resolvíveis por Dominância

Acima nós vimos que algumas situações econômicas relevantes podem ser representadas pelo conceito de jogo. É claro que uma teoria só é útil se nós pudermos usá-la para fazer previsões. No caso de uma jogo, nós estamos principalmente interessados em saber que estratégias serão usadas pelos jogadores naquele contexto. Na linguagem de teoria dos jogos, em geral nós estamos interessados em saber qual é a solução do jogo.

Vários conceitos de solução já foram discutidos na literatura. O mais famoso, é claro, é o conceito de equilíbrio de Nash. Nós estudaremos tal conceito mais tarde. Agora nós nos concentraremos em um conceito de solução mais básico que, embora não possa ser aplicado para todos os jogos, quando aplicável gera previsões claras, intuitivas, e empiricamente consistentes.

19.4.1 Estratégia Dominante

Suponha que tenhamos um jogo em que o conjunto de jogadores seja dado por $J = \{1, ..., N\}$. Dado um jogador qualquer i, nós dizemos que uma estratégia $a_i^* \in A_i$ é uma estratégia estritamente dominante para o jogador i se, independentemente das estratégias que os outros jogadores estejam jogando, a estratégia a_i^* é a única melhor estratégia para o jogador i. Formalmente, a_i^* é uma estratégia estritamente dominante para o jogador i se para qualquer perfil de estratégias $(a_1, ..., a_N)$, com $a_j \in A_j$ para todo j e $a_i \neq a_i^*$,

$$U^i\left(a_1, ..., a_i^*, ..., a_N\right) > U^i\left(a_1, ..., a_i, ..., a_N\right).$$

Ou seja, não importa o que os outros jogadores estejam jogando, jogar a_i^* é estritamente melhor para o jogador i do que jogar qualquer outra estratégia.

19.4.2 Solução por Estratégias Estritamente Dominantes

Suponha agora que todos os jogadores tenham uma estratégia estritamente dominante. É de se esperar que neste caso todos os jogadores usem exatamente as suas estratégias dominantes. Quando isto acontece nós dizemos que o jogo é resolvível por estratégias estritamente dominantes.

Exemplo 19.7 (Dilema dos Prisioneiros)**.** Dois indivíduos são presos por um crime grave e colocados em celas separadas. O delegado tenta obter uma confissão. Cada um deles, separadamente, recebe a seguinte informação: se um deles confessar e o outro não, quem confessou receberá uma pena leve de apenas um ano e o que não confessou receberá uma pena de dez anos. Caso ambos confessem, os dois receberão uma pena de cinco anos. Se ninguém confessar ainda é possível condenar ambos por um crime menor. Neste caso ambos recebem uma pena de dois anos. Tal situação pode ser representada pelo seguinte jogo em forma matricial:

$$\begin{array}{ccc|c|c|} & & \multicolumn{2}{c}{\text{Prisioneiro 2}} \\ & & \multicolumn{1}{c}{C} & \multicolumn{1}{c}{N} \\ \cline{3-4} \text{Prisioneiro} & C & -5,-5 & -1,-10 \\ \cline{3-4} 1 & N & -10,-1 & -2,-2 \\ \cline{3-4} \end{array} \tag{19.4}$$

No jogo acima, independentemente do que o jogador (prisioneiro) 2 esteja jogando, a melhor estratégia para o jogador 1 é confessar. A mesma coisa acontece para o jogador 2. Portanto, o jogo acima é resolvível por estratégias estritamente dominantes e sua solução é (C, C). Ou seja, o conceito de solução por estratégias estritamente dominantes nos diz que dado o jogo acima os dois prisioneiros confessariam. De fato, dada a matriz de ganhos acima, é difícil imaginar que os jogadores agiriam de forma diferente.

No exemplo acima, embora o jogo tenha uma solução bem natural, nós podemos observar que o ganho final dos agentes não parece ser muito bom, dadas as opções que eles tinham. Em particular, caso ambos não confessassem os dois obteriam um ganho estritamente maior. Ou seja, em termos de ganhos, a solução do jogo não é eficiente no sentido de Pareto. Esta é uma característica marcante de situações estratégicas. Nós vamos ver que em geral, independentemente do conceito de solução usado, as soluções de jogos não têm que ser eficientes.

Jogos resolvíveis por estratégias estritamente dominantes são a melhor situação que podemos encontrar em teoria dos jogos. A solução de tais jogos é simples, intuitiva e geralmente corresponde ao que esperaríamos que ocorresse na vida real. O único problema com tal conceito de solução é que poucos jogos podem ser resolvidos desta maneira. Por exemplo, considere o exemplo do par ou ímpar acima. Suponha que o jogador que pediu ímpar esteja jogando um número ímpar. Neste caso a melhor estratégia para o jogador Par é jogar também um número ímpar. Por outro lado, se o jogador Ímpar estiver jogando um número par, então é melhor para par jogar um número par. Nós vemos que o jogador par não tem uma estratégia dominante neste caso. Uma análise similar mostra que o jogador ímpar também não tem uma estratégia dominante. Também no jogo Batalha dos Sexos nenhum jogador tem uma estratégia dominante. Você consegue ver isto?

19.5 Eliminação Iterativa de Estratégias Dominadas

19.5.1 Estratégias Estritamente Dominadas

Na seção anterior nós estudamos o conceito de uma estratégia estritamente dominante para um dos jogadores. Nós vimos que uma estratégia era estritamente dominante para o jogador i se, independentemente do que os outros jogadores estivessem jogando, ela fosse sempre estritamente melhor para o jogador i do que todas as suas outras estratégias. Agora nós estudaremos o conceito relacionado de uma estratégia estritamente dominada. Intuitivamente, uma estratégia a_i é estritamente dominada para o jogador i, se existe uma outra estratégia $\hat{a}_i$ tal que jogar $\hat{a}_i$ seja estritamente melhor para o jogador i do que jogar a_i, independentemente do que os outros jogadores estiverem jogando.

Formalmente, considere um jogo em que o conjunto de jogadores é dado por $J := \{1, ..., N\}$ e cada jogador j tem um conjunto de estratégias A_j. Pegue um jogador qualquer i. Uma estratégia a_i será estritamente dominada por uma outra estratégia $\hat{a}_i$ se, para qualquer perfil de estratégias $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ dos outros jogadores,

$$U^i(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_N) > U^i(a_1, ..., a_i, ..., a_N).$$

Exemplo 19.8. Considere o seguinte jogo:

Jogador 2

Jogador 1		E	D
	C	$1, -1$	$-1, 1$
	M	$-1, 1$	$1, -1$
	B	$-2, 5$	$-3, 2$

(19.5)

Observe que no jogo acima, independentemente da estratégia que o jogador 2 estiver jogando, a estratégia B dá um ganho estritamente menor para o jogador 1 do que a estratégia M (e do que a estratégia C). Neste caso dizemos que B é uma estratégia estritamente dominada por M.

Abaixo nós utilizaremos o conceito de estratégias estritamente dominadas para definir um novo conceito de solução, ou pelo menos de simplificação de um jogo.

19.5.2 Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas

Suponha que no jogo acima o jogador 2 ao tentar decidir o que fazer esteja tentando averiguar a possibilidade do jogador 1 jogar cada uma de suas estratégias. Ele logo perceberá que a estratégia B é estritamente dominada e, portanto, o jogador 1 nunca irá jogá-la. Desta forma, ao fazer considerações sobre o jogo, o jogador 2 agirá como se a estratégia B não fosse possível. Ou seja, ele agirá como se o jogo na verdade fosse apenas

Jogador 2

Jogador 1		E	D
	C	$1, -1$	$-1, 1$
	M	$-1, 1$	$1, -1$

Consideremos um outro exemplo.

Exemplo 19.9 (Amigo do Juiz)**.** Considere a seguinte variação do dilema dos prisioneiros:

		Prisioneiro 2 C	Prisioneiro 2 N
Prisioneiro 1	C	$-5, -5$	$-1, -10$
	N	$-10, -1$	$0, -2$

A estória agora (admitidamente um pouco boba) é que o prisioneiro 1 é amigo do juiz. Desta forma, quando nenhum dos prisioneiros confessa, ele consegue escapar sem nenhuma pena. Nas demais situações os ganhos de ambos são exatamente iguais aos ganhos no jogo original. Observe que agora confessar não é mais uma estratégia estritamente dominante para o jogador 1. Quando o jogador 2 não estiver confessando a melhor coisa para o jogador 1 seria não confessar. Portanto, agora o jogo não é mais resolvível por dominância. Mas considere a análise que fizemos acima. Ao olhar as opções do jogador 2, o jogador 1 percebe que a estratégia N é estritamente dominada pela estratégia C para aquele jogador. Portanto, sendo o jogador 1 alguém extremamente racional, ele desconsiderará a possibilidade de que o jogador 2 possa jogar N. Mas agora o jogo simplifica-se para

		Prisioneiro 2 C
Prisioneiro 1	C	$-5, -5$
	N	$-10, -1$

Mas agora jogar C é uma estratégia estritamente dominante para o jogador 1, ou, alternativamente, N é estritamente dominada por C para o jogador 1. Se eliminarmos N do jogo acima ficamos, novamente, com a previsão única de que os dois jogadores vão confessar.

Nos dois exemplo acima a eliminação de uma única estratégia estritamente dominada já foi suficiente para simplificar o jogo até um ponto que este pudesse ser resolvido por dominância. Em geral, os nossos agentes em economia são bem mais racionais do que isto e nós assumimos que eles podem aplicar o conceito de eliminação de estratégias estritamente dominadas inúmeras vezes. Considere o seguinte exemplo, aparentemente complexo, mas na verdade simples:

		Jogador 2 A	B	C	D
	E	$0, 7$	$2, 5$	$4, 0$	$2, 1$
Jogador 1	F	$5, 2$	$3, 3$	$5, 2$	$0, 1$
	G	$7, 0$	$2, 5$	$0, 7$	$0, 1$
	H	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$9, -1$

(19.6)

Se você tiver paciência, você pode checar que nenhum jogador tem uma estratégia dominante no jogo acima. Por outro lado, vemos que a estratégia D é estritamente dominada pela estratégia B. Portanto, se aplicarmos o raciocínio de eliminação de estratégias estritamente dominadas nós podemos simplificar o jogo acima para

Jogador 1 \ Jogador 2	A	B	C
E	$0,7$	$2,5$	$4,0$
F	$5,2$	$3,3$	$5,2$
G	$7,0$	$2,5$	$0,7$
H	$0,0$	$0,0$	$0,0$

Mas agora, no jogo simplificado acima, vemos que a estratégia H é estritamente dominada pela estratégia F. Novamente, aplicando o conceito de eliminação de estratégias estritamente dominadas nós obtemos o seguinte jogo, ainda mais simples:

Jogador 1 \ Jogador 2	A	B	C
E	$0,7$	$2,5$	$4,0$
F	$5,2$	$3,3$	$5,2$
G	$7,0$	$2,5$	$0,7$

Continuando com o mesmo procedimento, agora observe que a estratégia E é estritamente dominada pela estratégia F. O jogo reduz-se para

Jogador 1 \ Jogador 2	A	B	C
F	$5,2$	$3,3$	$5,2$
G	$7,0$	$2,5$	$0,7$

Agora a estratégia que é estritamente dominada é do jogador 2. Observe que A é estritamente dominada por B, o que nos dá o seguinte jogo:

Jogador 1 \ Jogador 2	B	C
F	$3,3$	$5,2$
G	$2,5$	$0,7$

Agora G é estritamente dominada por F e o jogo simplifica-se para

Jogador 1 \ Jogador 2	B	C
F	$3,3$	$5,2$

Finalmente, agora C é estritamente dominada por B, o que nos dá a previsão única de que no jogo acima os jogadores acabarão jogando F e B.

19.5.3 Eliminação de Estratégias Fracamente Dominadas

A primeira vista, a nossa definição de uma estratégia estritamente dominada parece ser muito restritiva. Lembre-se que tal definição considera uma estratégia estritamente dominada somente quando existe uma outra estratégia que é estritamente melhor do que ela em todas as outras situações. Uma definição alternativa poderia ser uma similar ao conceito de dominância no sentido de Pareto. Ou seja, poderíamos dizer que uma estratégia a_i é fracamente dominada por uma outra estratégia $\hat{a}_i$ se para qualquer perfil de estratégias $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ dos outros jogadores

$$U^i(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_N) \geq U^i(a_1, ..., a_i, ..., a_N)$$

e para pelo menos um perfil $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ dos outros jogadores,

$$U^i(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_N) > U^i(a_1, ..., a_i, ..., a_N).$$

Ou seja, agora não estamos pedindo que $\hat{a}_i$ seja estritamente melhor do que a_i em todas as situações. Estamos pedindo que $\hat{a}_i$ seja pelo menos tão boa quanto a_i em todas as situações e exista pelo menos uma situação em que $\hat{a}_i$ seja estritamente melhor do que a_i. O conceito de uma estratégia fracamente dominada é razoável e parece que existe espaço para considerarmos o conceito de eliminação de estratégias fracamente dominadas. Embora a eliminação de estratégias fracamente dominadas seja de fato discutida na literatura, tal conceito é mais problemático do que o conceito de eliminação de estratégias estritamente dominadas.

Alguns problemas que acontecem quando aplicamos o conceito de eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas são os seguintes:

(a) A ordem em que eliminamos iterativamente estratégias fracamente dominadas altera o resultado final. Tal fato não ocorre com a eliminação de estratégias estritamente dominadas, embora a demonstração de tal fato esteja um pouco acima das nossas capacidades neste curso.

(b) Perfis de alternativas que são equilíbrios de Nash, algo que nós estudaremos abaixo, podem ser eliminados se aplicarmos o conceito de eliminação iterativa de estratégias fracamente dominadas. Novamente, tal fato não ocorre quando aplicamos o conceito de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

Nós pararemos a discussão a respeito do conceito de eliminação de estratégias fracamente dominadas aqui. Embora tal conceito tenha alguma importância teórica, para nós ele não terá muita utilidade. Tudo que vocês precisam saber é que tal conceito é um pouco problemático o que nos leva a trabalhar sempre com eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

19.6 Equilíbrio de Nash

Até agora nós já aprendemos dois possíveis métodos de solução para jogos. Nós vimos que alguns jogos podem ser resolvidos pela existência de estratégias estritamente dominantes para todos os jogadores e também vimos que alguns outros jogos podem ser resolvidos pela eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Não é difícil ver que o método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas é mais geral do que o método de solução por dominância. Isto é, todo jogo que é resolvível por dominância é também resolvível por eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas e a solução é a mesma.[19.2]

Mesmo sendo mais geral do que o método de solução por dominância, ainda existem vários jogos em que o processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas não nos dá uma solução. Algumas vezes, como no jogo (19.5) acima, tal método até simplifica o jogo, mas não nos fornece uma previsão clara do que os dois jogadores vão fazer.

Nesta seção nós estudaremos o conceito de equilíbrio de Nash. Tal conceito nos fornecerá o método de solução mais utilizado em teoria dos jogos. Nós começamos com o conceito de uma melhor resposta.

19.6.1 Melhores Respostas

Suponha que tenhamos um jogo com N jogadores. Fixe um jogador i qualquer e considere um perfil de estratégias $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ dos outros jogadores. Nós podemos fazer a seguinte pergunta: dado que os outros jogadores estão jogando $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ qual a melhor estratégia (ou as melhores estratégias) para o jogador i. Ou seja, nós podemos tentar encontrar as estratégias $a_i \in A_i$ que resolvem o seguinte problema de maximização:

$$\max_{a_i \in A_i} U^i (a_1, ..., a_i, ..., a_N)$$

As estratégias do jogador i que resolvem o problema acima são chamadas de melhores respostas do jogador i a $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$. É interessante termos uma notação para representar, dado um perfil de estratégias dos outros jogadores, as melhores respostas do jogador i. Defina a correspondência de melhores respostas B^i do jogador i, como um mapa que associa a cada perfil de estratégias dos outros jogadores, o conjunto de alternativas do jogador i que são melhores respostas àquele perfil. Formalmente, dado um perfil de estratégias $(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ para os outros jogadores, defina $B^i (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_N)$ como o conjunto de estratégias do jogador i que resolvem o problema de maximização acima.

Exemplo 19.10. Considere o seguinte jogo:

		Jogador 2			
		A	B	C	D
	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$	$2,1$
Jogador	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$	$0,1$
1	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$	$0,1$
	H	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$9,-1$

É fácil ver que no exemplo acima $B^1 (B) = \{F\}$, ou seja, a única melhor resposta do jogador 1 à estratégia B é exatamente F. Por outro lado, $B^1 (A) = \{F, G\}$, ou seja, tanto F quanto G são melhores respostas para o jogador 1 quando 2 joga A. Para finalizar, observe que $B^2 (F) = \{A, B, C\}$, ou seja, A, B e C são melhores respostas para o jogador 2 quando 1 joga F.

[19.2] Se o jogador i tem uma estratégia estritamente dominante, então todas as suas outras estratégias são estritamente dominadas por tal estratégia e, portanto, serão eliminadas.

19.6.2 Equilíbrio de Nash

Considere o seguinte jogo:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador 1	C	$5,1$	$4,0$
	M	$6,0$	$3,1$
	B	$6,4$	$3,4$

No jogo acima, em termos de melhores respostas, nós temos $B^1(E) = \{M, B\}$, $B^1(D) = \{C\}$, $B^2(C) = \{E\}$, $B^2(M) = \{D\}$ e $B^2(B) = \{E, D\}$. Observe que B é uma melhor resposta para o jogador 1 quando 2 joga E e E é uma melhor resposta para o jogador 2 quando 1 joga B. De certa forma, existe um certo equilíbrio no perfil de estratégias (B, E). Mesmo se 2 já tivesse observado que 1 jogou B, não haveria razão para 2 mudar de estratégia. De forma similar, mesmo que 1 já tivesse observado que 2 jogou E, não haveria motivo para 1 desejar mudar de estratégia. Quando um perfil de estratégias satisfaz tal tipo de condição nós dizemos que tal perfil é um equilíbrio de Nash do jogo.

Formalmente, considere um jogo com N jogadores. Um perfil de estratégias $(a_1^*, ..., a_N^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo se para todo jogador i, $a_i^* \in B^i\left(a_1^*, ..., a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, ..., a_N^*\right)$. Ou seja, em um equilíbrio de Nash todos os jogadores estão fazendo o melhor que eles poderiam fazer dadas as estratégias que estão sendo jogadas pelos outros jogadores.

Exemplo 19.11 (Dilema dos Prisioneiros revisitado)**.** Considere o dilema dos prisioneiros original, isto é:

		Prisioneiro 2	
		C	N
Prisioneiro 1	C	$-5,-5$	$-1,-10$
	N	$-10,-1$	$-2,-2$

Observe que $B^1(C) = \{C\}$ e $B^2(C) = \{C\}$. Ou seja, para qualquer um dos jogadores, se o outro estiver jogando C, então a melhor coisa que ele tem a fazer é jogar C, também. Portanto, o perfil (C, C) é um equilíbrio de Nash do jogo Dilema dos Prisioneiros.

Vimos no exemplo acima que o perfil de estratégias (C, C) é um equilíbrio de Nash para o jogo dilema dos prisioneiros. Lembre-se que tal perfil também era a solução por dominância do jogo. De fato, tal propriedade é geral, como a proposição abaixo mostra:

Proposição 19.1. *Suponha que um perfil $(a_1^*, ..., a_N^*)$ seja a solução por dominância de um determinado jogo. Então, tal perfil é também um equilíbrio de Nash do jogo.*

Demonstração da Proposição. Fixe um jogador qualquer i. Como, por hipótese, a_i^* é uma estratégia estritamente dominante para i, sabemos que para qualquer estratégia $a_i \in A_i$, com $a_i \neq a_i^*$ nós temos que ter

$$U^i(a_1^*, ..., a_i^*, ..., a_N^*) > U^i(a_1^*, ..., a_i, ..., a_N^*).$$

Mas isto implica que $B^i\left(a_1^*, ..., a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, ..., a_N^*\right) = \{a_i^*\}$. Como isto é válido para todos os jogadores i, nós vemos que $(a_1^*, ..., a_N^*)$ satisfaz a condição que define um equilíbrio de Nash. ||

Vamos estudar mais um exemplo.

Exemplo 19.12. Considere o seguinte jogo, que é o mesmo jogo (19.6) estudado acima:

		Jogador 2			
		A	B	C	D
Jogador 1	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$	$2,1$
	F	$5,2$	$3,3$	$5,2$	$0,1$
	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$	$0,1$
	H	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$9,-1$

Nós vimos que se aplicássemos o processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas o único perfil de estratégias que sobreviveria é (F,B). Mas observe que $B^1(B) = \{F\}$ e $B^2(F) = \{B\}$, portanto, (F,B) é também um equilíbrio de Nash do jogo.

Novamente, tal fenômeno é geral como a proposição abaixo, que infelizmente nós não vamos demonstrar, mostra.

Proposição 19.2. *Suponha que ao aplicarmos o procedimento de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas a um determinado jogo somente o perfil* $(a_1^*, ..., a_N^*)$ *sobreviva. Então,* $(a_1^*, ..., a_N^*)$ *é um equilíbrio de Nash do jogo em questão.*

Finalmente, vamos considerar um último exemplo.

Exemplo 19.13. Considere novamente o jogo estudado no exemplo 19.10 acima. Isto é,

		Jogador 2			
		A	B	C	D
Jogador 1	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$	$2,1$
	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$	$0,1$
	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$	$0,1$
	H	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$9,-1$

Observe que $B^1(B) = \{F\}$ e $B^2(F) = \{A,B,C\}$, portanto (F,B) é um equilíbrio de Nash do jogo acima. Agora, observe, também, que a estratégia D é estritamente dominada pela estratégia B. Se nós aplicarmos o princípio da eliminação de estratégias estritamente dominadas nós obtemos o seguinte jogo simplificado:

		Jogador 2		
		A	B	C
Jogador 1	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$
	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$
	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$
	H	$0,0$	$0,0$	$0,0$

Mas agora H é estritamente dominada por F, o que nos permite simplificar o jogo ainda mais para

		Jogador 2		
		A	B	C
Jogador 1	E	$0,7$	$2,5$	$4,0$
	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$
	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$

Finalmente, agora nós observamos que E é estritamente dominada por F, o que nos dá o jogo ainda mais simplificado

		Jogador 2		
		A	B	C
Jogador	F	$7,2$	$3,2$	$5,2$
1	G	$7,0$	$2,5$	$0,7$

Agora nenhum dos jogadores tem mais estratégias estritamente dominadas. No entanto, observe que para o jogo simplificado acima $B^1(B) = \{F\}$ e $B^2(F) = \{A, B, C\}$. Ou seja, o perfi (F, B) ainda é um equilíbrio de Nash do jogo acima.

Novamente, o fenômeno acontecido acima é geral. Isto é, se simplificarmos um jogo usando eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, o conjunto de equilíbrios de Nash do jogo simplificado é o mesmo do jogo original. Tal resultado é formalizado na proposição abaixo.

Proposição 19.3. *Suponha que tenhamos um jogo qualquer e fixe um perfil qualquer* $(a_1^*, ..., a_N^*)$ *deste jogo. Suponha agora que simplifiquemos o jogo usando o método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. O perfil* $(a_1^*, ..., a_N^*)$ *é um equilíbrio de Nash do jogo original se e somente se ele for um equilíbrio de Nash do jogo simplificado.*

A proposição acima nos mostra que se estivermos interessados em encontrar os equilíbrios de Nash de um determinado jogo e este tiver estratégias estritamente dominadas, então é uma boa idéia primeiro usar o método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas para simplificar o jogo o máximo possível para só então tentar encontrar os equilíbrios de Nash do jogo diretamente.

19.7 Aplicações

19.7.1 Equilíbrio de Cournot

Suponha que o mercado de produção de um determinado bem seja dividido entre duas empresas, firma F_1 e firma F_2. Suponha que os custos de produção das duas firmas sejam dados simplesmente por

$$C_i(y) = cy.$$

Ou seja, as duas firmas têm o mesmo custo marginal constante e igual a c. Finalmente, suponha que a curva de demanda inversa pelo bem seja dada por

$$p(y) = a - by.$$

Quanto será que cada uma das firmas vai produzir em tal situação? Primeiramente, observe que a situação acima pode ser descrita por um jogo. Obviamente o conjunto de jogadores é dado por $J = \{F_1, F_2\}$. As estratégias de cada uma das firmas serão escolher as quantidades que elas vão produzir. Ou seja, $A_1 = A_2 = [0, \infty)$. E as funções de ganhos de cada uma das firmas serão dadas pelo seu lucro, ou seja, para a firma i,

$$U^i(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2) y_i - cy_i.$$

Agora que já temos a descrição completa do nosso jogo, nós podemos tentar analisar a situação acima sob uma visão de teoria dos jogos. Suponha, por exemplo, que a firma 2 esteja produzindo uma quantidade qualquer y_2. Qual seriam as melhores respostas da firma 1 a tal estratégia. Para descobrir isto nós temos que resolver o seguinte problema:

$$\max_{y_1} p\left(y_1 + y_2\right) y_1 - c y_1$$

A condição de primeira ordem do problema acima pode ser escrita como

$$p'\left(y_1 + y_2\right) y_1 + p\left(y_1 + y_2\right) = c.^{19.3}$$

Que utilizando as funções que definimos acima pode ser escrita como

$$-b y_1 + a - b\left(y_1 + y_2\right) = c.$$

Resolvendo a equação acima para y_1 nós obtemos:

$$y_1 = \frac{a - b y_2 - c}{2b}.$$

Portanto, a correspondência de melhores respostas para o jogador 1 neste caso é dada simplesmente por

$$B^1\left(y_2\right) = \frac{a - b y_2 - c}{2b}.^{19.4}$$

Nós podemos repetir a mesma análise acima para o jogador 2, o que vai nos dar a seguinte correspondência de melhores respostas para tal jogador:

$$B^2\left(y_1\right) = \frac{a - b y_1 - c}{2b}.$$

Será que existe algum equilíbrio de Nash para este jogo? Isto é, será que existe um perfil de estratégias $\left(y_1^*, y_2^*\right)$ tal que $y_1^* \in B^1\left(y_2^*\right)$ e $y_2^* \in B^2\left(y_1^*\right)$? Como em todas as situações os dois jogadores têm apenas uma única melhor resposta, um perfil que seja equilíbrio de Nash para tal jogo tem que satisfazer as sesguintes condições:

$$y_1^* = \frac{a - b y_2^* - c}{2b}$$

e

$$y_2^* = \frac{a - b y_1^* - c}{2b}.$$

Mas as duas equações acima nos dão um sistema linear que pode ser facilmente resolvido. Resolvendo o sistema acima nós obtemos:

$$y_1^* = y_2^* = \frac{a - c}{3b}.$$

Isto é, o perfil de estratégias $\left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$ é o único equilíbrio de Nash do jogo acima.

19.3 Observe que esta é a velha condição receita marginal é igual ao custo marginal. A diferença agora é que a receita marginal depende do que a empresa F_2 está produzindo.

19.4 Na verdade, para valores de y_2 muito altos a escolha ótima da firma F_1 será produzir zero. Formalmente, a correta correspondência de melhores respostas da firma F_1 é dada por $B^1\left(y_2\right) = \max\left\{\frac{a-by_2-c}{2b}, 0\right\}$. Nós vamos ignorar tal fato, já que não fará muita diferença para a nossa discussão no texto.

19.7.2 Problema dos Sorveteiros

Voltemos agora ao problema dos sorveteiros. Em tal problema nós temos uma praia representada pelo intervalo $[0,1]$ e dois sorveteiros têm que escolher aonde se posicionarem nesta praia. A nossa hipótese é que as pessoas estão distribuídas de forma uniforme pela praia e que ambos os sorveteiros vendem exatamente o mesmo sorvete pelo mesmo preço. Desta forma, as pessoas irão sempre comprar do sorveteiro que estiver mais próximo. Caso os dois se posicionem no mesmo lugar, então metade das pessoas comprará de um deles e a outra metade comprará do outro. Desta forma, para o sorveteiro 1, por exemplo, se ele estiver na posição α e o sorveteiro 2 estiver na posição β, o seu número de sorvetes vendidos será:

$$S^1(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\alpha-\beta}{2} + (1-\alpha), \text{ se } \alpha > \beta \\ \frac{1}{2} \text{ se } \alpha = \beta \\ \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} \text{ se } \beta > \alpha \end{cases}.$$

A figura 19.2 ilustra as duas situações em que os dois sorveteiros posicionam-se em locais distintos. A área cinza na figura representa as pessoas que vão comprar do sorveteiro 1.

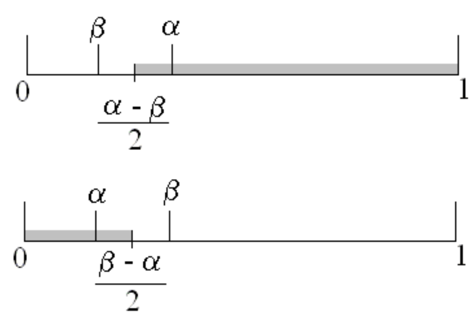

Figura 19.2: Sorvetes vendidos pelo sorveteiro 1

O número de sorvetes vendidos pelo sorveteiro 2 segue padrão similar. Suponha que o sorveteiro 2 esteja na posição β e o sorveteiro 1 esteja na posição α. Então, o número de sorvetes vendidos pelo sorveteiro 2 será dado por

$$S^2(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\beta-\alpha}{2} + (1-\beta), \text{ se } \beta > \alpha \\ \frac{1}{2} \text{ se } \alpha = \beta \\ \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} \text{ se } \alpha > \beta \end{cases}.$$

Para que possamos analisar a situação acima como um jogo que saibamos resolver vamos fazer uma última simplificação. Vamos supor que ambos os sorveteiros só possam escolher posições que sejam múltiplos de 0,05. Ou seja, $A_1 = A_2 = \{0; 0,05; 0,1; 0,15; ...\}$. A descrição do nosso jogo agora está completa. Já temos os conjuntos de estratégias dos dois jogadores, A_1 e A_2, e as funções ganho dos dois jogadores, S^1 e S^2. Tentemos agora identificar as melhores respostas do jogador 1 dado que 2 esteja posicionado em uma posição β. Suponha primeiro que $\beta < 0,5$. Neste caso, é fácil ver que a melhor coisa que 1 pode fazer é escolher a posição

$\alpha^* = \beta + 0,05$ (ver figura 19.3). Deste modo, ele conquistará todos os clientes a sua direita mais 0,025, que corresponde à metade dos clientes entre ele e o sorveteiro 2. Como $\beta < 0,5$ isto dará um número de sorvetes vendidos maior do que 1/2. Portanto é melhor escolher tal posição do que escolher $\alpha = \beta$. Se ele escolhesse um valor de $\alpha > \alpha^*$, então o número de clientes a sua direita iria diminuir. Como ele só fica com metade dos clientes entre ele e o sorveteiro 2, isto significa que ele estaria perdendo clientes (ver figura 19.3). Finalmente, se ele escolhesse um valor de $\alpha < \beta$, então ele estaria conquistando os clientes a sua esquerda mais metade dos clientes entre ele e o sorveteiro 2. Como $\beta < 0,5$ isto dará um número de sorvetes vendidos menor do que 1/2 (ver figura 19.3). Nós verificamos, então, que realmente a melhor resposta neste caso é escolher $\alpha^* = \beta + 0,05$.

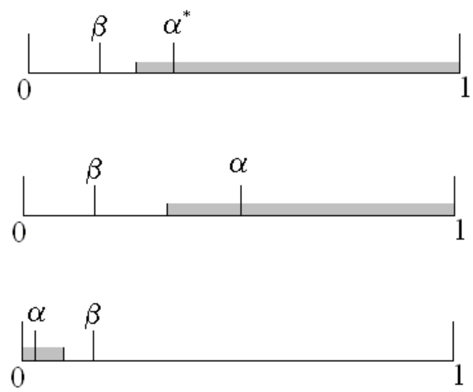

Figura 19.3: Resposta ótima do sorveteiro 1

Uma análise exatamente simétrica ao caso $\beta < 0,5$ nos mostra que se o sorveteiro 2 estiver jogando um valor de $\beta > 0,5$, então a melhor resposta do sorveteiro 1 é escolher a posição $\alpha^* = \beta - 0,05$. E se o jogador 2 estiver posicionado exatamente no meio? Neste caso é fácil ver que qualquer valor de $\alpha > \beta = 0,5$ dá um ganho para o sorveteiro 1 menor do que 1/2 (ver figura 19.4). Similarmente, qualquer valor de $\alpha < \beta = 0,5$ também dá um ganho para o sorveteiro 1 menor do que meio (ver figura 19.4). Ou seja, a melhor resposta para o jogador 1 neste caso é também se posicionar no meio da praia. Isto é, sua melhor resposta é escolher $\alpha^* = 0,5$.

Resumindo a análise acima, nós chegamos à seguinte correspondência de melhores respostas para o sorveteiro 1:

$$B^1(\beta) = \begin{cases} \beta + 0,05 \text{ se } \beta < 0,5 \\ 0,5 \text{ se } \beta = 0,5 \\ \beta - 0,05 \text{ se } \beta > 0,5 \end{cases}.$$

A situação do sorveteiro 2 é absolutamente simétrica, portanto, a sua correspondência de melhores respostas é dada por

$$B^2(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 0,05 \text{ se } \alpha < 0,5 \\ 0,5 \text{ se } \alpha = 0,5 \\ \alpha - 0,05 \text{ se } \alpha > 0,5 \end{cases}.$$

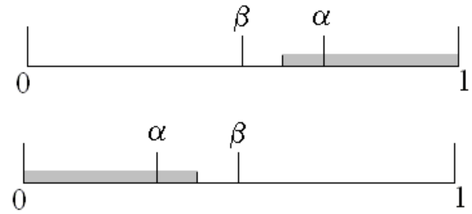

Figura 19.4: Respostas não ótimas do sorveteiro 1 quando 2 está no centro da praia

Agora que já conhecemos as melhores respostas de ambos os jogadores, nós podemos tentar descobrir se este jogo tem algum equilíbrio de Nash. Será que existe algum equilíbrio de Nash em que o sorveteiro 1 escolhe uma posição $\alpha^* < 0,5$? Se $\alpha^* < 0,5$, então a única melhor resposta do sorveteiro 2 é escolher $\beta = \alpha^* + 0,05$. Observe que, por construção, tal valor de β é menor ou igual a $0,5$. Mas para $\beta \leq 0,5$ a melhor resposta do jogador 1 será escolher ou $\alpha = 0,5$, no caso em que $\beta = 0,5$, ou $\alpha = \beta + 0,05$, no caso em que $\beta < 0,5$. Mas tanto $\alpha = 0,5$ como $\alpha = \beta + 0,05 = \alpha^* + 0,05 + 0,05$ são estritamente maiores do que α^*. Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em tal situação.

Será que existe equilíbrio de Nash em que o sorveteiro 1 escolhe um valor $\alpha^* > 0,5$? Se $\alpha^* > 0,5$, então a melhor resposta do sorveteiro 2 é escolher $\beta = \alpha^* - 0,05$. Novamente, por construção, tal valor de β é maior ou igual a $0,5$. Mas para valores de $\beta \geq 0,5$, a melhor resposta do sorveteiro 1 é $\alpha = 0,5$, quando $\beta = 0,5$, e $\alpha = \beta - 0,05$, quando $\beta > 0,5$. De novo, tanto $\alpha = 0,5$, como $\alpha = \beta - 0,05 = \alpha^* - 0,05 - 0,05$ são estritamente menores do que α^*. Nós concluímos que também neste caso não existe equilíbrio de Nash.

Só nos resta testar uma última alternativa. Será que existe equilíbrio de Nash em que o jogador 1 joga $\alpha^* = 0,5$. Neste caso, a melhor resposta do sorveteiro 2 é também se posicionar na posição $\beta^* = 0,5$. Ainda, se o sorveteiro 2 estiver posicionado no centro da praia, a melhor resposta do sorveteiro 1 é, de fato, também se posicionar no centro da praia. Ou seja, $\alpha^* = 0,5$ é realmente uma melhor resposta para o sorveteiro 1 quando $\beta^* = 0,5$. Acabamos de mostrar, então, que o único equilíbrio de Nash do jogo dos sorveteiros é exatamente o perfil em que ambos os sorveteiros se posicionam no centro da praia.

19.8 Exercícios

Exercício 19.1 (Jogo da Produção de Armas Nucleares). *Dois países vizinhos estão considerando a possibilidade de construir armas nucleares. Se ambos construírem armas nucleares, então a situação será* ***ruim para os dois****, já que isto implica em um alto custo financeiro, além do risco que um vizinho detentor de armas nucleares representa. Caso apenas um dos países construa armas nucleares, então o país construtor desfrutará de uma grande vantagem estratégica e esta acaba sendo a* ***melhor situação*** *possível para ele. Por outro lado, o país que não construir ficará numa situação muito ruim, já que ficará praticamente submisso ao vizinho. Esta é a* ***pior situação*** *possível para ele. Finalmente, se ninguém construir armas nucleares, a situação é* ***boa*** *para os dois, já que ambos economizam bastante dinheiro e* *ninguém fica ameaçado. Mesmo assim, ambos os países* ***prefeririam*** *a vantagem estratégica de serem os únicos detentores da tecnologia nuclear.*

(a) *Descreva a situação acima como um jogo matricial. Os exatos valores dos ganhos dos jogadores não importam. Você pode colocar o que você quiser, desde que eles representem a situação acima de forma consistente. Em especial, as informações em negrito têm que estar refletidas no jogo que você escrever.*

(b) *Resolva o jogo que você escreveu utilizando o conceito de solução mais simples possível. Isto é, se o jogo for resolvível por dominância, então resolva-o por dominância. Caso o jogo não seja resolvível por dominância, então tente resolvê-lo por eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Caso ainda assim não seja possível resolver o jogo, então tente resolvê-lo encontrando os seus equilíbrios de Nash (em estratégias puras).*

Exercício 19.2 (Jogo do Dinheiro Grátis)**.** *Dois agentes econômicos extremamente racionais participam do seguinte jogo em que eles podem ganhar mais de um milhão de reais. Primeiramente, ambos os jogadores, em salas separadas, têm que escrever* 1, 100, 10.000 *ou* 1.000.000 *em folhas de papel que posteriormente são colocadas dentro de envelopes. Quando os envelopes são abertos, o jogador que escreveu o menor número recebe uma quantia, em reais, igual à soma dos dois números. O outro jogador não recebe nada. Caso ambos tenham escrito o mesmo número, então cada um recebe, em reais, exatamente o valor que cada um escreveu. Ou seja, se ambos escreverem* 10.000, *por exemplo, então cada jogador recebe* 10.000 *reais.*

(a) *Descreva a situação acima como um jogo matricial.*

(b) *Resolva o jogo que você escreveu na parte (a) por eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas. Será que tais agentes realmente merecem a terminologia racionais?*

Exercício 19.3 (Sorveteiros em Praia Circular)**.** *Considere novamente o problema dos sorveteiros que têm que se posicionar em uma faixa de areia. A diferença agora é que esta faixa de areia se encontra ao redor de uma lagoa circular. Suponha que o perímetro da lagoa seja 1 e que as pessoas estejam distribuídas de maneira uniforme por toda a faixa de areia. Os sorveteiros são idênticos e, portanto, as pessoas sempre compram do sorveteiro mais próximo. Caso mais de um sorveteiro estejam posicionados em uma mesma posição, as pessoas que estão mais próximas daquela posição se dividem igualmente entre todos os sorveteiros lá posicionados.*

(a) *Suponha que apenas dois sorveteiros estejam escolhendo aonde se posicionarem na faixa de areia ao redor da lagoa. Caracterize todos os equilíbrios de Nash deste jogo. (Dica: Você não precisa sair fazendo conta. A caracterização dos equilíbrios pode ser bem intuitiva, você pode usar figuras, etc., mas seja preciso na sua explicação. Finalmente, existe um número* ***enorme*** *de equilíbrios).*

(b) *Suponha que agora tenhamos três sorveteiros escolhendo uma posição na faixa de areia. Caracterize todos os equilíbrios de Nash do jogo agora (Dica: Novamente existirão diversos equilíbrios, mas você terá que dividí-los em duas classes. Equilíbrios em que nenhum dos sorveteiros se posiciona na mesma posição que algum outro sorveteiro e equilíbrios em que pelo menos 2 sorveteiros se posicionam em uma mesma posição).*

Capítulo 20

Teoria dos Jogos - Estratégias Mistas

20.1 Introdução

Agora que nós já conhecemos o conceito de equilíbrio de Nash, nós discutiremos a existência de equilíbrio de Nash. Em geral, é possível que um determinado jogo não tenha equilíbrio de Nash. Mesmo jogos matriciais simples muitas vezes não possuem nenhum equilíbrio. Para escapar de tal situação nós introduziremos o conceito de estratégias mistas. Admitindo a possibilidade de uso de estratégias mistas, jogos matriciais sempre têm equilíbrio de Nash. Por simplicidade, ao estudarmos estratégias mistas nós nos concentraremos em jogos matriciais 2x2. Isto é, jogos com 2 jogadore em que cada um dos jogadores tem apenas duas estratégias puras.

20.2 Estratégias Mistas e Existência de Equilíbrio

Voltemos a um dos primeiros jogos que estudamos: o jogo do par ou ímpar. A matriz de ganhos daquele jogo era dada por

		Jogador Ímpar	
		P	I
Jogador Par	P	$1,-1$	$-1,1$
	I	$-1,1$	$1,-1$

.

Olhando para a matriz de ganhos acima nós vemos que quando o jogador Ímpar joga P, a melhor resposta para o jogador Par é P. Mas se o jogador Par joga P, a melhor resposta para o jogador Ímpar é I. De forma similar, se o jogador Ímpar joga I, a melhor resposta para o jogador Par é I. Mas quando o jogador Par joga I a melhor resposta do jogador Ímpar é P. Nós acabamos de verificar que o jogo acima não tem nenhum equilíbrio de Nash. O jogo de par ou ímpar não tem nada de especial. Na verdade, vários outros jogos não têm equilíbrio de Nash.

Esta situação é aparentemente problemática. Se nem mesmo um jogo tão simples como o jogo de par ou ímpar tem equilíbrio de Nash, qual a utilidade de tal conceito, então? A solução que temos para tal problema vem da própria forma como o jogo de par ou ímpar é jogado na vida real. Na vida real, se o jogador Par jogasse sempre P, então o jogador Ímpar iria acabar descobrindo isto e iria sempre jogar I, ganhando o jogo em todas as ocasiões. A mesma coisa aconteceria se qualquer um dos jogadores jamais variasse a sua estratégia. Por causa disto, o que nós observamos na prática? Na prática, nós observamos que os jogadores de par ou ímpar costumam variar as suas jogadas de forma mais ou menos aleatória.

A idéia de uma escolha aleatória de ações motivou o conceito de estratégias mistas. A idéia agora é trabalhar com um conjunto de estratégias maior para ambos os jogadores. Os jogadores não estarão mais limitados a escolher jogar P ou I, mas poderão, também, escolher jogar P com uma probabilidade α e I com uma probabilidade $(1-\alpha)$. Formalmente, nós estamos usando a matriz de ganhos acima para definir um novo jogo em que o conjunto de estratégias dos dois jogadores agora é dado por $A_1 = A_2 = [0,1]$. A interpretação aqui é que $\alpha \in A_1$ é a probabilidade com que o jogador Par joga P. Por construção, isto implica que ele joga I com probabilidade $1-\alpha$. Nós ainda faremos a hipótese adicional de que no novo jogo os ganhos dos dois jogadores serão dados pelos seus ganhos esperados, dados os ganhos do jogo original. Por exemplo, se Par está jogando a estratégia α e Ímpar está jogando a estratégia β, então o ganho de Par no novo jogo é dado por

$$\begin{aligned} U^{Par}(\alpha,\beta) &= \alpha\beta U^{Par}(P,P) + \alpha(1-\beta)U^{Par}(P,I) \\ &\quad + (1-\alpha)\beta U^{Par}(I,P) + (1-\alpha)(1-\beta)U^{Par}(I,I) \\ &= \alpha\beta * 1 + \alpha(1-\beta) * (-1) + (1-\alpha)\beta * (-1) \\ &\quad + (1-\alpha)(1-\beta) * 1 \\ &= 1 + 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta.\text{[20.1]} \end{aligned}$$

De forma similar, o ganho do jogador Ímpar no novo jogo é dado por

$$\begin{aligned} U^{Ímpar}(\alpha,\beta) &= \alpha\beta U^{Ímpar}(P,P) + \alpha(1-\beta)U^{Ímpar}(P,I) \\ &\quad (1-\alpha)\beta U^{Ímpar}(I,P) + (1-\alpha)(1-\beta)U^{Ímpar}(I,I) \\ &= \alpha\beta * (-1) + \alpha(1-\beta) * 1 + (1-\alpha)\beta * 1 \\ &\quad + (1-\alpha)(1-\beta) * (-1) \\ &= 2\alpha + 2\beta - 1 - 4\alpha\beta.\text{[20.2]} \end{aligned}$$

O nosso novo jogo está, portanto, completamente especificado. É válido perguntarmos, por exemplo, se este novo jogo tem algum equilíbrio de Nash. Nós estudaremos este tipo de jogo na próxima subseção.

20.2.1 Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas

Acima, nós aprendemos como construir, a partir de um jogo em forma matricial, um novo jogo em que as estratégias dos jogadores agora consistem das probabilidades com que cada jogador está jogando cada uma de suas estratégias. Quando fazemos isto dizemos que estamos

[20.1] Nós estamos cometendo um pequeno abuso de notação aqui. Nós estamos usando U^{Par} para denotar tanto o ganho do jogador Par no novo jogo, como os ganhos de par representados na matriz de ganhos original. Como os argumentos de U^{Par} são diferentes nos dois casos, tal abuso de notação não gera confusão.

[20.2] Novamente, nós estamos cometendo um abuso de notação aqui.

permitindo o uso de estratégias mistas. Neste curso, nós só trabalharemos com estratégias mistas de jogos 2x2, isto é, jogos com 2 jogadores em que ambos os jogadores têm apenas 2 estratégias. No entanto, todos os resultados discutidos nesta seção se generalizam para qualquer jogo em que o número de jogadores seja finito e os conjuntos de estratégias de todos os jogadores sejam também finitos.

Considere um jogo 2x2 genérico. Nós podemos representar tal jogo pela seguinte matriz:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador 1	C	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
	B	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$

Como vimos na seção anterior, nós podemos usar o jogo acima para definir um novo jogo em que os conjuntos de estratégias dos dois jogadores agora são $A_1 = A_2 = [0,1]$. A interpretação é que $\alpha \in A_1$ é a probabilidade com que o jogador 1 está jogando C. De forma similar, $\beta \in A_2$ é a probabilidade com que o jogador 2 está jogando E. Finalmente, os ganhos de ambos os jogadores no jogo com estratégias mistas são dados por

$$\begin{aligned} U^1(\alpha,\beta) &= \alpha\left[\beta U^1(C,E) + (1-\beta)U^1(C,D)\right] + (1-\alpha)\left[\beta U^1(B,E) + (1-\beta)U^1(B,D)\right] \\ &= \alpha U^1(1,\beta) + (1-\alpha)U^1(0,\beta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} U^2(\alpha,\beta) &= \beta\left[\alpha U^2(C,E) + (1-\alpha)U^2(B,E)\right] + (1-\beta)\left[\alpha U^2(C,D) + (1-\alpha)U^2(B,D)\right] \\ &= \beta U^2(\alpha,1) + (1-\beta)U^2(\alpha,0). \end{aligned}$$

Observe que os ganhos de ambos os jogadores com estratégias mistas são sempre médias ponderadas dos seus ganhos se eles estivessem usando estratégias degeneradas (que dão probabilidade 1 para uma das duas estratégias puras). Um perfil de estratégias (α^*, β^*) é um equilíbrio de Nash para o jogo acima se

$$U^1(\alpha^*,\beta^*) \geq U^1(\alpha,\beta^*) \text{ para qualquer } \alpha \in [0,1]$$

e

$$U^2(\alpha^*,\beta^*) \geq U^2(\alpha^*,\beta) \text{ para qualquer } \beta \in [0,1].$$

O nosso primeiro resultado nos garante que se aceitarmos o uso de estratégias mistas, então todo jogo matricial tem equilíbrio de Nash.

Teorema 20.1. *Qualquer jogo com um número finito de jogadores e em que o conjunto de estratégias (puras) de cada jogador é também finito tem equilíbrio de Nash em estratégias mistas.*

O teorema acima foi na verdade o segundo resultado demonstrado por Nash em sua dissertação de doutorado. O primeiro resultado dizia que jogos em que os conjuntos de estratégias de todos os jogadores são convexos e compactos e suas funções ganhos são contínuas e côncavas sempre têm equilíbrio de Nash. Na verdade, o teorema acima é um simples corolário deste resultado. Tais fatos são apresentados aqui a título de curiosidade, mas vocês não precisam se preocupar com esses detalhes. O nosso interesse agora é aprender como encontrar tais equilíbrios em estratégias mistas. Para tanto, o resultado abaixo é fundamental.

Proposição 20.1. *Considere um jogo 2x2 qualquer em que nós estamos permitindo o uso de estratégias mistas. Suponha que* (α^*, β^*) *seja um equilíbrio de Nash deste jogo. Se* $0 < \alpha^* < 1$*, então*

$$B^1(\beta^*) = [0, 1].$$

Similarmente, se $0 < \beta^* < 1$*, então*

$$B^2(\alpha^*) = [0, 1].$$

Antes de demonstrar a proposição acima, vamos primeiro tentar entender o que ela nos diz. Olhemos para a primeira parte, por exemplo. Se $0 < \alpha^* < 1$, então o jogador 1 está jogando as suas duas estratégias puras com probabilidades positivas. A proposição, então, nos diz que isto só pode ocorrer se β^* fizer o jogador 1 indiferente entre todas as suas estratégias. Ou seja, todas as estratégias do jogador 1 têm que ser melhores respostas contra β^*. A demonstração da proposição acima é simples e nos mostra por que tal fato tem que ser verdade.

Demonstração da Proposição 20.1. Suponha que (α^*, β^*) seja um equilíbrio de Nash de um jogo 2x2 em que $0 < \alpha^* < 1$. Vimos antes que o ganho do jogador 1 neste caso pode ser escrito como

$$U^1(\alpha^*, \beta^*) = \alpha^* U^1(1, \beta^*) + (1 - \alpha^*) U^1(0, \beta^*).$$

Mas então, se $U^1(1, \beta^*) \neq U^1(0, \beta^*)$, α^* não será uma melhor resposta contra β^*.[20.3] Nós concluímos que $U^1(1, \beta^*) = U^1(0, \beta^*)$. Mas agora é fácil ver que isto implica que $U^1(\alpha, \beta^*) = U^1(\alpha^*, \beta^*)$ para qualquer $\alpha \in [0, 1]$. Um raciocínio idêntico prova a parte da proposição referente a β^*. $\|$

Para nós, a proposição 20.1 terá consequências práticas importantes, já que esta nos fornecerá um método para encontrar equilíbrios de Nash em estratégias mistas para jogos 2x2. A melhor forma de ver como a proposição 20.1 nos ajudará é estudar alguns exemplos.

Exemplo 20.1 (Solução do jogo de par ou ímpar)**.** Considere o jogo de par ou ímpar:

		Jogador Ímpar P	Jogador Ímpar I
Jogador Par	P	$1, -1$	$-1, 1$
	I	$-1, 1$	$1, -1$

Tentemos primeiro encontrar equilíbrios de Nash em que o jogador Par jogue P com probabilidade 1. Isto é, tentemos encontrar equilíbrios de Nash (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 1$. Mas quando o jogador Par joga P com probabilidade 1, a única melhor resposta para o jogador Ímpar é

[20.3] Por exemplo, se $U^1(1, \beta^*) > U^1(0, \beta^*)$, então, obviamente,

$$\begin{aligned} U^1(1, \beta^*) &= \alpha^* U^1(1, \beta^*) + (1 - \alpha^*) U^1(1, \beta^*) \\ &> \alpha^* U^1(1, \beta^*) + (1 - \alpha^*) U^1(0, \beta^*) \\ &= U^1(\alpha^*, \beta^*). \end{aligned}$$

jogar I com probabilidade 1. Porém, se Ímpar joga I com probabilidade 1, a melhor resposta para Par é jogar I com probabilidade 1. Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em que Par jogue P com probabilidade 1.

Tentemos agora encontrar equilíbrios de Nash em que Par jogue I com probabilidade 1. Isto é, tentemos encontrar equilíbrios de Nash (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 0$. Mas quando Par joga I com probabilidade 1, a única melhor resposta para Ímpar é jogar P com probabilidade 1. Porém, se Ímpar joga P com probabilidade 1, a melhor resposta para Par é jogar P com probabilidade 1. Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em que Par jogue I com probabilidade 1.

Nos resta agora tentar encontrar equilíbrios de Nash em que Par jogue alguma estratégia mista não degenerada. Isto é, equilíbrios (α^*, β^*) em que $0 < \alpha^* < 1$. Pela proposição 20.1, nós sabemos que para que isto ocorra β^* tem que ser tal que

$$U^{Par}(1, \beta^*) = U^{Par}(0, \beta^*).$$

Em termos dos ganhos do jogo a expressão acima pode ser escrita como a seguinte equação em função de β^* :

$$\beta^* * 1 + (1 - \beta^*) * (-1) = \beta^* (-1) + (1 - \beta^*) * 1.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\beta^* = 1/2$. Ou seja, para que o jogador Par esteja jogando uma estratégia mista, é necessário que o jogador Ímpar esteja jogando as suas duas estratégias puras com probabilidade igual a $1/2$. Mas isto implica que a estratégia que Ímpar tem que jogar também é mista. Usando a proposição 20.1 novamente, nós sabemos que neste caso α^* tem que ser tal que

$$U^{\acute{I}mpar}(\alpha^*, 1) = U^{\acute{I}mpar}(\alpha^*, 0).$$

Em termos dos ganhos do jogo a expressão acima pode ser escrita como a seguinte equação em função de α^* :

$$\alpha^* * (-1) + (1 - \alpha^*) * 1 = \alpha^* * 1 + (1 - \alpha^*) * (-1).$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\alpha^* = 1/2$. Observe que, de fato, com $\beta^* = 1/2$, qualquer estratégia do jogador Par dará um ganho igual a $1/2$. Similarmente, com $\alpha^* = 1/2$, qualquer estratégia do jogador Ímpar dará um ganho de $1/2$. Ou seja, $\alpha^* \in B^1(\beta^*) = [0, 1]$ e $\beta^* \in B^2(\alpha^*) = [0, 1]$. Nós concluímos que $(\alpha^*, \beta^*) = (1/2, 1/2)$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas do jogo de par ou ímpar. De fato, como nos outros dois casos não havia equilíbrio, nós podemos concluir que este é o único equilíbrio de Nash do jogo.

Consideremos mais um exemplo.

Exemplo 20.2 (Solução do jogo Batalha dos Sexos)**.** Voltemos ao jogo Batalha dos Sexos que vimos na primeira aula sobre jogos.

		Homem	
		D	B
Mulher	D	$3, 1$	$0, 0$
	B	$0, 0$	$1, 3$

.

Tentemos descobrir os equilíbrios de Nash, permitindo estratégias mistas, deste jogo. Busquemos primeiro equilíbrios de Nash em que Mulher jogue D com probabilidade 1. Ou seja, equilíbrios (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 1$. Se Mulher joga D com probabilidade 1, então é fácil ver que a única melhor resposta para Homem é jogar D com probabilidade 1. Além disto, quando Homem joga D com probabilidade 1, a única melhor resposta para mulher é jogar D com probabilidade 1. Nós concluímos que o único equilíbrio de Nash de tal jogo em que Mulher joga D com probabilidade 1 é exatamente $(\alpha^*, \beta^*) = (1, 1)$.

Tentemos agora identificar os equilíbrios de Nash de tal jogo em que Mulher jogue B com probabilidade 1. Isto é, os equilíbrios (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 0$. É fácil ver que se Mulher joga B com probabilidade 1, então a única melhor resposta para Homem é jogar B com probabilidade 1. Além disto, quando Homem joga B com probabilidade 1, a única melhor resposta para Mulher é jogar B com probabilidade 1. Nós concluímos que o único equilíbrio de Nash em que mulher joga B com probabilidade 1 é $(\alpha^*, \beta^*) = (0, 0)$.

Finalmente, tentemos identificar os equilíbrios de Nash em que Mulher jogue uma estratégia mista não degenerada. Isto é, equilíbrios (α^*, β^*) em que $0 < \alpha^* < 1$. Nós sabemos que para isto acontecer β^* tem que ser tal que

$$U^M(1, \beta^*) = U^M(0, \beta^*),$$

o que em termos dos ganhos do jogo acima pode ser escrito como

$$\beta^* * 3 + (1 - \beta^*) * 0 = \beta^* * 0 + (1 - \beta^*) * 1.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\beta^* = 1/4$. Mas isto significa que Homem também estará jogando uma estratégia mista não degenerada. Novamente, nós sabemos que para que isto ocorra nós necessariamente temos que ter

$$U^H(\alpha^*, 1) = U^H(\alpha^*, 0),$$

o que em termos dos ganhos do jogo pode ser escrito como

$$\alpha^* * 1 + (1 - \alpha^*) * 0 = \alpha^* * 0 + (1 - \alpha^*) * 3.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\alpha^* = 3/4$. De fato, é fácil conferir que para qualquer $\alpha \in [0, 1]$, $U^M(\alpha, 1/4) = 3/4$, e para qualquer $\beta \in [0, 1]$, $U^H(3/4, \beta) = 3/4$. Portanto, $3/4 \in B^M(1/4)$ e $1/4 \in B^H(3/4)$. Nós concluímos que $(\alpha^*, \beta^*) = (3/4, 1/4)$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas do jogo Batalha dos Sexos. Como nós esgotamos todas as possibilidades, nós aprendemos que o jogo acima tem três equilíbrios de Nash (quando permitimos o uso de estratégias mistas).

Nos dois jogos acima nós só encontramos equilíbrios em que ambos os jogadores jogavam estratégias puras ou equilíbrios em que os dois jogadores jogavam estratégias mistas não degeneradas. O exemplo a seguir mostrar que isto não tem que ser sempre verdade:

Exemplo 20.3. Considere o seguinte jogo:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador 1	C	$3,1$	$2,0$
	B	$3,0$	$1,3$

.

Tentemos descobrir os equilíbrios de Nash do jogo acima. Primeiro verifiquemos se existe algum equilíbrio em que o Jogador 1 jogue C com probabilidade 1. Ou seja, tentemos encontrar um equilíbrio (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 1$. Se o jogador 1 está jogando C com probabilidade 1, então a única melhor resposta para o jogador 2 é jogar E com probabilidade 1. Ainda, quando o jogador 2 joga E com probabilidade 1, jogar C é de fato uma melhor resposta para o jogador 1. Nós concluímos que o perfil $(\alpha^*, \beta^*) = (1, 1)$ é o único equilíbrio de Nash do jogo acima em que o jogador 1 joga C com probabilidade 1.

Tentemos agora encontrar equilíbrios em que o jogador 1 jogue B com probabilidade 1. Isto é, busquemos equilíbrios (α^*, β^*) em que $\alpha^* = 0$. Mas se o jogador 1 está jogando B com probabilidade 1, então a única melhor resposta do jogador 2 é jogar D com probabilidade 1. Porém, quando o jogador 2 joga D com probabilidade 1, a melhor resposta do jogador 1 é jogar C com probabilidade 1. Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em que o jogador 1 joga B com probabilidade 1.

Finalmente, tentemos encontrar equilíbrios de Nash em que o jogador 1 usa estratégias mistas não degeneradas. Isto é, busquemos equilíbrios (α^*, β^*) em que $0 < \alpha^* < 1$. Pela proposição 20.1, nós sabemos que para que isto ocorra nós precisamos que

$$U^1(1, \beta^*) = U^1(0, \beta^*),$$

o que em termos dos ganhos do jogo pode ser escrito como

$$\beta^* * 3 + (1 - \beta^*) * 2 = \beta^* * 3 + (1 - \beta^*) * 1.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos $\beta^* = 1$. Ou seja, para que tenhamos a chance de obter um equilíbrio de Nash em que o jogador 1 joga uma estratégia mista não degenerada, nós precisamos que o jogador 2 esteja jogando E com probabilidade 1. Finalmente, para que tal perfil seja de fato um equilíbrio de Nash, nós precisamos garantir que jogar E com probabilidade 1 seja uma melhor resposta para o jogador 2. Uma condição necessária e suficiente para isto é que α^* seja tal que

$$U^2(\alpha^*, 1) \geq U^2(\alpha^*, 0).$$

Em termos dos ganhos do jogo, a condição acima pode ser escrita como

$$\alpha^* * 1 + (1 - \alpha^*) * 0 \geq \alpha^* * 0 + (1 - \alpha^*) * 3,$$

o que nos dá a condição $\alpha^* \geq 3/4$. Nós concluímos que o conjunto de equilíbrios de Nash para o jogo acima constitui-se de todos os perfis $(\alpha^*, 1)$ em que $\alpha^* \geq 3/4$.

20.3 Exercícios

Exercício 20.1 (Encontro em Nova Iorque)**.** *Os professores X e Y marcaram um encontro para tomar um café na loja do Starbucks próxima a Universidade de Nova Iorque. O problema é que eles esqueceram de combinar se eles estavam falando da loja no Washington Square*

Park ou da loja na Broadway. Suponha ainda que eles não têm como se comunicar.[20.4] *Tal situação pode ser representada pela seguinte matriz de ganhos:*

		Professor Y: W	B
Professor X	W	$1,1$	$0,0$
	B	$0,0$	$1,1$

Isto é, se ambos forem para o mesmo lugar, ambos recebem um ganho de 1. Se eles forem para lugares diferentes, ambos recebem um ganho de zero. Permitindo o uso de estratégias mistas, encontre todos os equilíbrios de Nash do jogo acima.

Exercício 20.2. *Considere o seguinte jogo:*

		Jogador 2: E	D
Jogador 1	C	$1,1$	$0,1$
	B	$0,1$	$2,0$

Permitindo o uso de estratégias mistas, encontre todos os equilíbrios de Nash do jogo acima.

Exercício 20.3 (Existência do Equilíbrio)**.** *Considere um jogo 2x2 genérico. Isto é, considere um jogo representado pela seguinte matriz de ganhos:*

		Jogador 2: E	D
Jogador 1	C	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
	B	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$

(a) *Suponha que o perfil (C,E) seja um equilíbrio de Nash do jogo acima (sem o uso de estratégias mistas). Considere agora a extensão do jogo acima para o jogo correspondente em que os jogadores podem usar estratégias mistas. Seja α a probabilidade com que o jogador 1 joga C e β a probabilidade com que o jogador 2 joga E. Argumente que o perfil $(\alpha^*, \beta^*) = (1,1)$ é um equilíbrio de Nash do novo jogo, em que estratégias mistas são permitidas.*

(b) *Suponha agora que saibamos que no jogo acima (sem o uso de estratégias mistas) jogar C seja uma melhor resposta para o jogador 1 quando 2 está jogando E. Suponha, também, que o jogo acima não tenha nenhum equilíbrio de Nash em estratégias puras. Isto vai implicar diversas relações entre os ganhos dos agentes nas diversas situações possíveis. Por exemplo, como já sabemos que C é uma melhor resposta contra E para o jogador 1, e já que por hipótese o jogo não tem equilíbrio de Nash em estratégias puras, não pode ser verdade que E seja uma melhor resposta contra C para o jogador 2. Em termos dos ganhos da matriz acima isto equivale a dizer que $U^2(C,D) > U^2(C,E)$. Usando o mesmo tipo de raciocínio compare agora $U^1(C,D)$ com $U^1(B,D)$, depois $U^2(B,E)$ com $U^2(B,D)$ e, finalmente, $U^1(C,E)$ com $U^1(B,E)$.*

[20.4] Este jogo foi criado muito antes da existência do telefone celular.

(c) *(Esta questão é mais difícil, mas prestando atenção na dica ela é resolvível.) Usando o que você aprendeu na letra (b), mostre que existe um valor* $\alpha^* \in (0,1)$ *tal que*

$$\alpha^* U^2 (C,E) + (1-\alpha^*) U^2 (B,E) = \alpha^* U^2 (C,D) + (1-\alpha^*) U^2 (B,D).$$

Similarmente, mostre que existe um valor $\beta^* \in (0,1)$ *tal que*

$$\beta^* U^1 (C,E) + (1-\beta^*) U^1 (C,D) = \beta^* U^1 (B,E) + (1-\beta^*) U^1 (B,D).$$

Dica: Suponha que a,b,c,d,e,f *sejam números tais que*

$$a - c = e > 0$$

e

$$b - d = f > 0.$$

Observe que

$$\frac{f}{e+f}a + \frac{e}{e+f}d = \frac{f}{e+f}c + \frac{e}{e+f}b.$$

(d) *Argumente que* (α^*, β^*) *é um equilíbrio de Nash do jogo acima quando nós permitimos o uso de estratégias mistas. Se você olhar com atenção você notará que a questão inteira é uma demonstração passo a passo de que jogos 2x2 sempre têm equilíbrios de Nash em estratégias mistas.*

Capítulo 21

Teoria dos Jogos - Jogos Sequenciais

21.1 Introdução

Até agora, em todas as situações estratégicas que estudamos, todos os agentes tomavam as suas decisões simultaneamente. No entanto, existem diversas situações econômicas importantes em que os agentes tomam decisões de forma sequencial. Por exemplo, em uma negociação, geralmente um agente faz uma primeira proposta e somente após ouvir tal proposta o outro agente diz se aceita ou não fechar o negócio.

Para que possamos estudar situações em que os agentes tomam decisões em sequência nós precisaremos introduzir o conceito de jogos na forma extensiva. Por simplicidade, ao discutir jogos na forma extensiva nós olharemos apenas para equilíbrios de Nash em estratégias puras. Ainda, nós nos concentraremos em uma classe particular de jogos chamados jogos de informação perfeita.

Embora o conceito de equilíbrio de Nash seja perfeitamente aplicável a jogos sequenciais, nós veremos que alguns destes equilíbrios não parecem razoáveis, dado que os agentes estão tomando decisões em sequência. Isto nos motivará a estudar o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Nós veremos que tal conceito é um refinamento do conceito original que incorpora o fato de que agora nós temos agentes tomando decisões sequenciais.

21.2 Jogos na Forma Extensiva

Lembre-se que o típico jogo 2x2 podia ser representado pela seguinte matriz:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador	C	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
1	B	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$

.

Na representação acima temos a hipótese implícita de que os dois jogadores estão escolhendo as suas estratégias ao mesmo tempo. Mas suponha agora que o jogador 2 seja obrigado a tomar a sua decisão antes do jogador 1 e que somente após ver a decisão tomada por 2 é que 1 faça a sua escolha. A forma mais conveniente de se representar tal situação é através do que chamamos árvore de decisão. A figura 21.1 ilustra a árvore de decisão relativa à situação descrita acima. Os pontos pretos na figura são chamados nós de decisão. Cada nó de decisão é associado a um jogador. A interpretação é que o jogador indicado no nó é quem tem que tomar a decisão naquele ponto. Observe que na figura 21.1, o jogador 2 é quem toma a primeira decisão. Dependendo desta decisão o jogo se move para um dos outros dois nós, quando, então, é a vez do jogador 1 tomar uma decisão. Dependendo das decisões tomadas por ambos os jogadores o jogo atinge um dos quatro nós terminais e os jogadores recebem o ganho correspondente ao nó atingido.

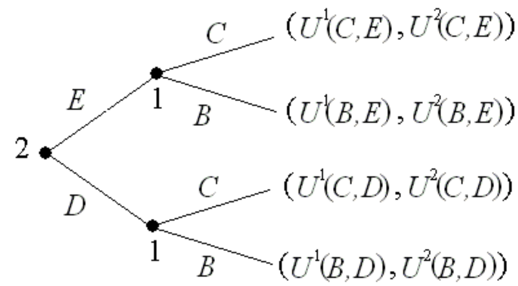

Figura 21.1: Jogo na Forma Extensiva

21.2.1 Estratégias

A situação na figura 21.1, embora sequencial, ainda é estratégica, portanto seria bom se pudéssemos estudá-la com o ferramental de teoria dos jogos que já possuímos. De fato, isto é possível. A primeira coisa que precisamos é definir um conceito de estratégia. Para nós, uma estratégia em um jogo em forma extensiva será uma lista que informa a ação que o jogador em questão tomaria em cada um de seus nós de decisão. Na verdade, esta será a convenção que adotaremos. As opções que o agente tem em cada um de seus nós de decisão serão chamadas de ações. Uma estratégia para nós será um plano que diz a ação que o agente pretende tomar em cada nó de decisão. No exemplo da figura 21.1, o jogador 2 só tem um nó de decisão, portanto uma estratégia para tal jogador consiste simplesmente em dizer se ele joga E ou D naquele nó. Já o jogador 1 possui 2 nós de decisão. Chamemos o nó na parte superior de nó número 1 e o na parte de baixo de número 2. Uma estratégia para o jogador 1 tem que dizer o que ele faria nestes dois nós. Por exemplo, a estratégia CB representa a situação em que o jogador 1 toma a ação C no nó de decisão número 1 e toma a ação B no nó de decisão número 2.

Dada a nossa definição de estratégia para um jogo na forma extensiva, nós vemos que no jogo da figura 21.1 o jogador 2 tem apenas duas estratégias, jogar E ou jogar D. Já o jogador 1 agora tem 4 estratégias, sendo elas jogar CC, CB, BC ou BB. Observe que agora, embora tenhamos começado com um jogo em forma extensiva, com a definição do conjunto de estratégias para ambos os jogadores, nós temos tudo o que é necessário para representar a situação acima como um jogo igual ao que nós temos trabalhado até agora. Por exemplo, nós podemos representar o jogo acima através do seguinte jogo matricial:

		Jogador 2	
		E	D
Jogador 1	CC	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
	CB	$U^1(C,E), U^2(C,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$
	BC	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(C,D), U^2(C,D)$
	BB	$U^1(B,E), U^2(B,E)$	$U^1(B,D), U^2(B,D)$

É importante que fique claro como o jogo matricial acima foi construído. Observe que a primeira coluna representa a situação em que o jogador 2 iniciou o jogo tomando a ação E. Ou seja, representa a situação em que estamos na parte de cima da árvore de decisão na figura 21.1. Mas então, para a determinação dos ganhos finais dos dois jogadores só importará a ação que o jogador 1 estiver tomando no seu nó de decisão número 1. Os ganhos registrados na primeira coluna do jogo matricial acima refletem exatamente isto. Já a segunda coluna representa a situação em que o jogador 2 inicia o jogo tomando a decisão D, na árvore de decisão da figura 21.1. Nós podemos ver que neste caso, para a determinação dos ganhos finais do jogo, tudo o que importa é a ação que o jogador 1 toma em seu nó de decisão número 2. Novamente, os ganhos na segunda coluna do jogo matricial acima refletem exatamente isto.

Mas se nós podemos representar jogos sequenciais como jogos matriciais iguais aos que nós já estamos acostumados a trabalhar, então, em teoria, nós podemos falar de equilíbrios de Nash de tais jogos. É precisamente isto que discutiremos na próxima seção.

21.3 Equilíbrio de Nash de Jogos Sequenciais

Na seção anterior nós introduzimos a noção de jogos sequenciais e vimos como representar tais jogos na forma extensiva. Posteriormente, nós aprendemos a representar um jogo sequencial na forma extensiva como um jogo matricial. Nós usaremos isto para definir o nosso primeiro conceito de solução para jogos sequenciais.

Lembre-se que para um jogo na forma extensiva, uma estratégia para um determinado jogador consiste de uma lista que indica a ação tomada por este jogador em todos os seus nós de decisão. Nós definiremos, então, um perfil de estratégias como um equilíbrio de Nash, quando este perfil de estratégias for um equilíbrio de Nash do jogo matricial induzido pelo jogo sequencial em questão.

Exemplo 21.1 (Versão sequencial do dilema dos prisioneiros)**.** Considere o seguinte jogo na forma extensiva, que é uma representação sequencial do dilema dos prisioneiros:

Na figura 21.2, nós temos uma versão do jogo dilema dos prisioneiros em que o jogador 2 primeiramente escolhe se confessa ou não confessa e, somente depois de ver a decisão tomada pelo jogador 2 é que o jogador 1 decide se confessa ou não. Como nós fizemos acima, nós podemos escrever a versão matricial para tal jogo. Tal abordagem nos dá a seguinte

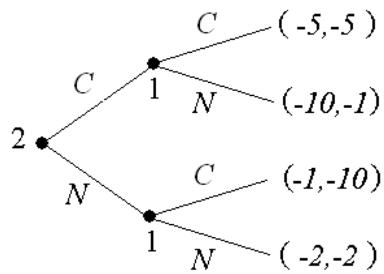

Figura 21.2: Versão sequencial do dilema dos prisioneiros

representação em forma matricial:

Jogador 1 \ Jogador 2	C	N
CC	$-5,-5$	$-1,-10$
CN	$-5,-5$	$-2,-2$
NC	$-10,-1$	$-1,-10$
NN	$-10,-1$	$-2,-2$

.

Observe que no jogo acima a estratégia NN é estritamente dominada por CC. Nós podemos, portanto, simplificá-lo para

Jogador 1 \ Jogador 2	C	N
CC	$-5,-5$	$-1,-10$
CN	$-5,-5$	$-2,-2$
NC	$-10,-1$	$-1,-10$

.[21.1]

Agora nenhum dos jogadores tem estratégias estritamente dominantes ou estritamentes dominadas. De qualquer forma, nós podemos tentar encontrar os equilíbrios de Nash, em estratégias puras, do jogo acima. Primeiramente, quando o jogador 1 joga CC, a melhor resposta para 2 é jogar C. De fato, quando o jogador 2 joga C, jogar CC também é uma melhor resposta para o jogador 1. Portanto, o perfil (CC, C) é um equilíbrio de Nash para o jogo acima. Vejamos agora o que acontece quando o jogador 1 joga CN. Neste caso a melhor resposta do jogador 2 é jogar N. Mas jogar CN não é uma melhor resposta para o jogador 1 quando 2 joga N. Nós concluímos que não existe nenhum equilíbrio de Nash em que 1 jogue CN. Vejamos se existe algum em que 1 jogue NC. Neste caso, a melhor resposta para 2 é jogar C. Mas quando 2 joga C, jogar NC não é uma melhor resposta para o jogador 1. Nós concluímos que o único equilíbrio de Nash da versão sequencial do dilema dos prisioneiros acontece quando o jogador 2 confessa no seu único nó de decisão e o jogador 1 confessa em ambos os seus nós de decisão.

[21.1] Lembre-se que quando nós simplificamos um jogo utilizando eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, o conjunto de perfis de estratégias que são equilíbrios de Nash permanece inalterado.

Acima, nós vimos que o resultado do dilema dos prisioneiros não muda muito quando estudamos sua versão sequencial. Será que o mesmo acontece com a variação do dilema dos prisioneiros que nós chamamos de o Amigo do Juiz?

Exemplo 21.2 (Versão sequencial do Amigo do Juiz)**.** Considere agora o seguinte jogo na forma extensiva:

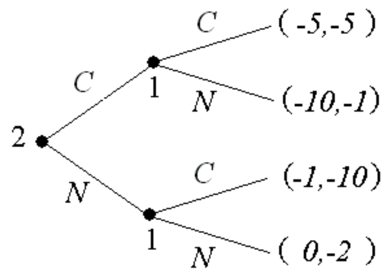

Figura 21.3: Versão sequencial do Amigo do Juiz

Novamente, vamos construir a matriz correspondente ao jogo acima.

Jogador 1 \ Jogador 2	C	N
CC	$-5, -5$	$-1, -10$
CN	$-5, -5$	$0, -2$
NC	$-10, -1$	$-1, -10$
NN	$-10, -1$	$0, -2$

.

Observe que agora a estratégia NC é estritamente dominada por CN. Nós podemos simplificar o jogo acima para

Jogador 1 \ Jogador 2	C	N
CC	$-5, -5$	$-1, -10$
CN	$-5, -5$	$0, -2$
NN	$-10, -1$	$0, -2$

.

Agora, nenhuma outra estratégia é estritamente dominada. Tentemos, então, encontrar os equilíbrios de Nash do jogo acima diretamente. Primeiro chequemos se existe algum equilíbrio de Nash em que 1 jogue CC. Nesta situação, a melhor resposta para 2 é jogar C. E claro, como foi o caso anteriormente, quando 2 joga C, jogar CC é uma melhor resposta para o jogador 1. Nós vemos que, como no caso do dilema dos prisioneiros, o perfil (CC, C) também é um equilíbrio de Nash para a versão sequencial do jogo do amigo do juiz. Mas será que este ainda é o único equilíbrio? Vejamos o que acontece quando o jogador 1 joga CN. Neste caso, a melhor resposta para 2 é N. Quando 2 joga N, CN é de fato uma melhor resposta para 1, portanto, o perfil (CN, N) é também um equilíbrio de Nash para o jogo acima. Finalmente, será que existe algum equilíbrio de Nash em que 1 jogue NN? Se 1 joga NN, então a melhor resposta para 2 é jogar C. Mas quando 2 joga C, NN não é uma melhor resposta para 1.

Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em que 1 jogue NN. Nós encontramos, então, dois equilíbrios de Nash para versão sequencial do jogo do amigo do juiz. Os perfis (CC, C) e (CN, N).

Até agora a estratégia que temos usado para resolver jogos sequenciais tem sido contruir um jogo matricial a partir de tal jogo e, posteriormente, computar os equilíbrios de Nash do jogo matricial construído. Embora tal estratégia de fato nos forneça alguma previsão do que vai acontecer, em um certo sentido ela ignora a natureza sequencial do jogo. Por exemplo, será que os dois equilíbrios de Nash que nós encontramos no jogo acima realmente fazem sentido? Na próxima seção nós introduziremos o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos e apresentaremos o método de solução por indução retroativa. Nós veremos que este novo conceito de solução leva em conta explicitamente a natureza sequencial do jogo e, as vezes, nos ajuda a diferenciar os equilíbrios de Nash que fazem mais sentido em um jogo sequencial dos que não fazem tanto sentido assim.

21.4 Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos e Indução Retroativa

Voltemos à versão sequencial do jogo do amigo do juiz acima. Vejamos o que nós conseguimos aprender a respeito dos dois equilíbrio de Nash daquele jogo. Comecemos com o equilíbrio (CC, C). Em tal equilíbrio 1 está jogando C em seus dois nós de decisão. Observe que em seu segundo nó de decisão jogar C não seria a melhor ação que 1 poderia tomar, mas como 2 está jogando C, aquele nó de decisão não é atingido e, portanto, a ação que 1 planejava tomar naquele nó não afeta o seu ganho. Observe que o fato de que o segundo nó de decisão não é atingido é essencial para que CC seja uma melhor resposta contra C. Isto ilustra uma das propriedades do conceito de equilíbrio de Nash em jogos sequenciais. Tal conceito, em um certo sentido, ignora as decisões tomadas em nós de decisão que não são atingidos. Mas será que esta propriedade é desejável? No jogo em questão, 2 só joga C no começo porque ele acredita que 1 jogaria C caso ele jogasse N. Mas será que esta é uma crença que faz sentido? Dois sabe que se ele jogasse N, 1 teria que decidir entre jogar C e receber um ganho de -1, ou jogar N e receber um ganho de 0. Por que ele acreditaria que 1 iria preferir jogar C e ficar com o ganho de -1?

A discussão acima motivou o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. A idéia de tal conceito é que todos os jogadores têm que tomar decisões ótimas em todos os nós de decisão, independentemente do fato destes serem atingidos ou não na solução do jogo. Para os jogos simplificados que nós estudaremos aqui, os equilíbrio de Nash perfeitos em subjogos serão exatamente os que podem ser obtidos pelo método da indução retroativa. Tal método consiste em irmos resolvendo o jogo do final para o começo. Nós primeiros começamos com os nós de decisão anteriores aos nós terminais e vemos qual a melhor ação que os agentes podem tomar naqueles nós. Após aprendermos o que o agentes fariam naqueles nós, nós elinamos aqueles nós do jogo, substituindo-os pelos ganhos que as ações ótimas dos jogadores implicariam naqueles nós. Isto nos dará um novo jogo reduzido, com nós terminais que acontecem mais cedo do que no jogo original. Nós agora repetimos o mesmo procedimento para o jogo reduzido, para obter um novo jogo reduzido. Continuamos repetindo tal processo até esgotarmos todos os nós de decisão do jogo. Um exemplo será instrutivo para entendermos o método.

Exemplo 21.3 (Resolvendo o jogo do amigo do juiz por indução retroativa)**.** Considere o jogo na figura 21.3 acima. Os dois nós de decisão antes dos nós terminais são do jogador 1. No nó mais acima a melhor coisa que 1 teria a fazer seria tomar a ação C. Já no nó mais abaixo a melhor coisa que 1 teria a fazer seria tomar a ação N. Tais ações gerariam um perfil de ganhos igual a $(-5,-5)$ no primeiro nó e $(0,-2)$ no segundo nó. Após registrarmos as ações tomadas por 1 nesses dois nós, nós os eliminamos do jogo subsituindo-os pelos ganhos que encontramos acima. Nós ficamos agora com o seguinte jogo simplificado:

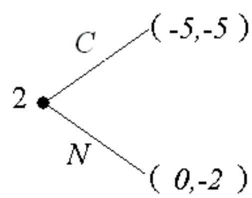

Figura 21.4: Jogo do amigo do juiz após primeiro estágio de indução retroativa

No jogo reduzido acima, é claro que a melhor coisa que 2 tem a fazer é jogar N. Isto dará um perfil de ganhos final igual a $(0,-2)$. Além disto, nós lembramos que a estratégia usada por 1 foi CN. Isto é, confessar no primeiro nó e não confessar no segundo. Mas, então, o perfil final que obtivemos com indução retroativa foi (CN,N) que é exatamente o segundo equilíbrio de Nash para a versão sequencial do amigo do juiz que nós encontramos acima. Tal fato não é uma particularidade deste jogo, como nós discutiremos abaixo.

Resolvendo o jogo do amigo do juiz por indução retroativa, nós acabamos chegando a um dos equilíbrios de Nash que nós tínhamos encontrado anteriormente. De fato, como a proposição abaixo mostra, os perfis de estratégia que nós encontramos por indução retroativa são sempre equilíbrios de Nash.

Proposição 21.1. *Todas as soluções por indução retroativa de qualquer jogo sequencial são sempre equilíbrios de Nash do jogo.*

A proposição acima, juntamente com o exemplo que acabamos de estudar, nos mostra que o método de solução por indução retroativa é uma forma de selecionar, dentre os equilíbrios de Nash do jogo, aqueles que fazem mais sentido dada a natureza sequencial da situação estratégica em questão. Consideremos mais um exemplo.

Exemplo 21.4 (Ameaça vazia)**.** Considere o jogo na figura 21.5:

Não é difícil ver que tal jogo tem apenas 2 equilíbrios de Nash. O primeiro deles consiste do perfil (CC,E) e o segundo do perfil (CB,D).[21.2] Será que o primeiro destes

[21.2] Para praticar, você pode montar a matriz do jogo e encontrar tais equilíbrios, mas com o tempo você deve começar a ser capaz de olhar para um jogo como este e facilmente identificar os seus equilíbrios de Nash.

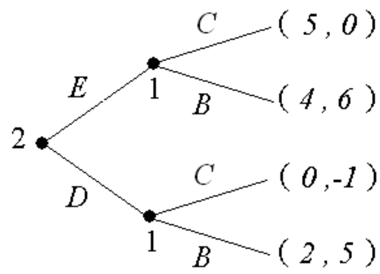

Figura 21.5: Equilíbrio de Nash com ameaça vazia

equilíbrios faz sentido? Primeiramente, note que tal equilíbrio não é perfeito em subjogos ou, equivalentemente, não seria obtido por indução retroativa. Observe que no seu segundo nó de decisão o agente 1 está fazendo uma escolha que não seria ótima para ele. Portanto, o que leva o jogador 2 a jogar E em tal equilíbrio é a ameaça de que se ele jogar D, então o jogador 1 jogará C. A primeira vista, até que esta não parece ser uma explicação muito ruim. O jogador 1, sabendo que ele poderia obter um ganho maior caso o jogador 2 jogasse E, ameaça jogar C se o jogador 2 jogar D. O jogador 2, acreditando nisto, acaba realmente jogando E. Mas será que faz sentido o jogador 2 acreditar em tal ameaça? Observe que se o jogador 2 ignorar a ameaça e jogar D, o jogador 1 não tem nenhum incentivo para levar a ameaça adiante. Tal situação é o que nós chamamos de ameaça vazia.

Em geral, nós sempre trabalharemos com o conceito de perfeição em subjogos e, portanto, consideraremos que equilíbrios de Nash baseados em ameaças vazias não são aceitáveis. Por trás disto, está a idéia de que situações em que algum agente de fato leva ameaças vazias às últimas consequências devem ser representadas com ganhos diferentes, em que as ameaças vazias não são mais vazias. Por exemplo, o jogador 1 poderia sentir algum prazer ao se vingar do jogador 2 e fazê-lo ter um ganho de -1 caso ele jogue D. Mas neste caso o ganho do jogador 1 em tal situação deveria refletir isto. Por exemplo, poderíamos dizer que ele teria um ganho de 3 nesta situação. Note que com esta modificação o perfil (CC, E) seria a solução do jogo por indução retroativa.

21.5 Exercícios

Exercício 21.1 (Batalha dos Sexos Sequencial)**.** *Considere a versão sequencial do jogo Batalha dos Sexos representada pela árvore de decisão abaixo*

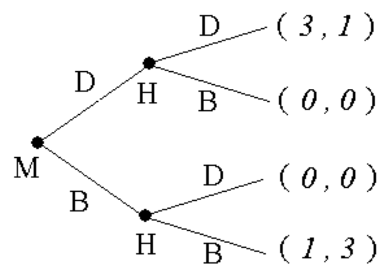

Figura 21.6: Versão sequencial do jogo Batalha dos Sexos

No jogo acima, Mulher primeiramente escolhe ir à danceteria ou ao bar. Após ver a escolha de Mulher, Homem decide se vai à danceteria ou ao bar. Nos nós terminais o ganho do jogador Mulher vem representado na primeira posição. Por exemplo, quando Mulher joga D e Homem toma a ação D no seu nó de decisão superior, Mulher recebe um ganho de 3 e Homem recebe um ganho de 1.

(a) *Represente o jogo acima na forma matricial e encontre todos os seus equilíbrios de Nash (em estratégias puras).*

(b) *Resolva o jogo por indução retroativa e identifique qual dos equilíbrios encontrados na letra (a) é perfeito em subjogos.*

Exercício 21.2 (Barreira a Entrada)**.** *Suponha que a firma F_2 seja monopolista em um mercado que enfrenta a ameaça da entrada de uma nova empresa F_1. Se F_1 resolver ficar de fora do mercado (estratégia F), então F_1 recebe um ganho de 1 e F_2 recebe um ganho de 9. Caso F_1 resolva entrar no mercado (estratégia E), então F_2 tem duas opções. Ela pode lutar com F_1 para expulsá-la do mercado (estratégia L). Neste caso, ambas as empresas têm um alto custo e ficam com um ganho de 0. Por outro lado, F_2 pode decidir não lutar contra F_1 (estratégia N). Neste caso ambas recebem um ganho de 2. Tal situação pode ser caracterizada pela seguinte árvore de decisão:*

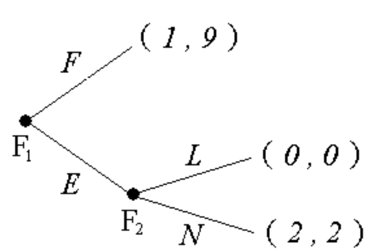

Figura 21.7: Jogo de entrada no mercado

(a) *Resolva o jogo acima por indução retroativa.*

(b) *Suponha agora que F_2, já sabendo da possível entrada de F_1 no mercado, considere a opção de investir imediatamente em um aumento de capacidade. Neste caso, ela incorre um custo de -3 imediatamente. Tal custo se refletirá nos ganhos de F_2 em todas as situações, menos no caso de uma luta pelo mercado. A idéia é que o aumento prévio de capacidade dá uma vantagem a F_2 na luta pelo mercado que compensa o seu custo. Esta nova situação pode ser representada pela seguinte árvore de decisão:*

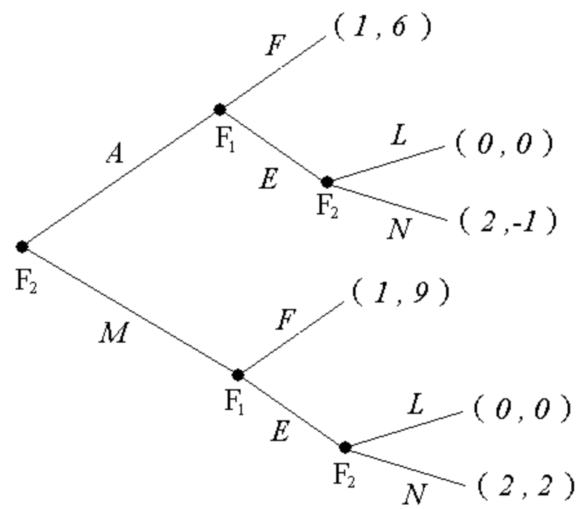

Figura 21.8: Possibilidade de investimento prévio em capacidade

Resolva este novo jogo por indução retroativa.

Exercício 21.3 (Jogo da Centopéia). *Considere o seguinte jogo em que os jogadores alternadamente têm que tomar a decisão de parar ou continuar.*

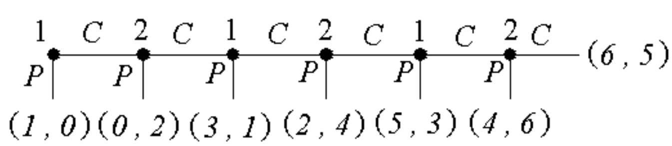

Figura 21.9: Jogo da centopéia

Resolva o jogo por indução retroativa.

Exercício 21.4 (Divisão de Torta). *Suponha que uma torta vá ser dividida entre dois indivíduos. A divisão ocorrerá da seguinte forma. Primeiro o indivídio 1 parte a torta em dois pedaços. Posteriormente o indivíduo 2 escolhe o seu pedaço e o pedaço restante fica para o indivíduo 1. Usando o conceito de indução retroativa de forma intuitiva, descreva todas as soluções por indução retroativa do jogo nas três situações abaixo. Quando eu escrevo* *de forma intuitiva isto significa que você não precisa escrever a árvore de decisão do jogo nem usar matemática. Você deve explicar a sua solução apenas com palavras.*

(a) *Suponha primeiro que a torta seja de um único sabor e ambos os indivíduos gostem do sabor em questão. Descreva todas as soluções por indução retroativa do jogo neste caso.*

(b) *Suponha agora que a torta seja metade de chocolate e metade de baunilha. Suponha ainda que o indivíduo 1 só goste de chocolate e o indivíduo 2 só goste de baunilha. Suponha ainda que ao se deparar com dois pedaços com a mesma quantidade de baunilha o indivíduo 2 prefira aquele que tem menos quantidade de chocolate. Descreva todas as soluções por indução retroativa do jogo neste caso.*

(c) *Suponha agora que a torta seja metade de chocolate e metade de baunilha. Suponha ainda que o indivíduo 1 goste igualmente dos dois sabores, mas que o indivíduo 2 só goste de baunilha. Suponha ainda que ao se deparar com dois pedaços com a mesma quantidade de baunilha o indivíduo 2 prefira aquele que tem menos quantidade de chocolate. Descreva todas as soluções por indução retroativa do jogo neste caso.*

Capítulo 22

Oligopólio

22.1 Introdução

Nos últimos capítulos temos estudado o ferramental de teoria dos jogos. A motivação para isto vem do fato de que várias situações econômicas relevantes são inerentemente estratégicas. Agora nós estudaremos algumas destas situações e para tanto faremos um uso intensivo das ferramentas que aprendemos antes. Em particular, nós nos concentraremos em situações em que mais de uma empresa tomam decisões a respeito de suas quantidades a serem produzidas e seus preços.

22.2 Liderança de Quantidade

Suponha que tenhamos duas empresas que produzem o mesmo produto, digamos firmas F_1 e F_2. Suponha que as funções custo das duas firmas sejam dadas simplesmente por

$$C_i\left(y_i\right) = cy_i, \text{ para } i = 1, 2.$$

Ou seja, ambas as firmas têm custo marginal constante e igual a c. Ainda, suponha que a demanda pelo bem y possa ser representada por uma curva de demanda inversa linear. Isto é, suponha que o preço cobrado pelo bem y seja dado pela seguinte fórmula:

$$p\left(y_1 + y_2\right) = a - b\left(y_1 + y_2\right).$$

Finalmente, para completar a descrição da situação que queremos estudar, nós faremos a hipóstese de que a firma F_1 toma a sua decisão de produção antes da firma F_2 e, somente após tomar conhecimento da decisão de produção da firma F_1, é que a firma F_2 escolhe quanto produzir.

A situação descrita acima tem um componente estratégico forte. A firma F_2 tomará uma decisão completamente informada, já que ela observará o que a firma F_1 fará primeiro. Por outro lado, a firma F_1 sabe disto e, além do mais, ela sabe que F_2 tomará uma decisão ótima dada a informação que ela tiver no momento de sua escolha. Logo, a firma F_1 vai levar tal fato em consideração na hora de tomar sua decisão de produção e agirá estrategicamente com o objetivo de maximizar o seu lucro.

Como a situação acima envolve considerações estratégicas, a melhor forma de modelá-la é através de um jogo. Já que a firma F_2 só toma a sua decisão após ver o que F_1 fez, tal jogo tem que ser sequencial. A árvore de decisão de tal jogo está representada na figura 22.1. Na figura, nós vemos que primeiramente a firma F_1 toma a sua decisão de produção e escolhe o seu nível de produção y_1. Após ver o nível de produção y_1 escolhido pela firma F_1, a firma F_2 escolhe o seu nível de produção y_2. Os ganhos do jogo são dados pelos lucros de ambas as firmas.

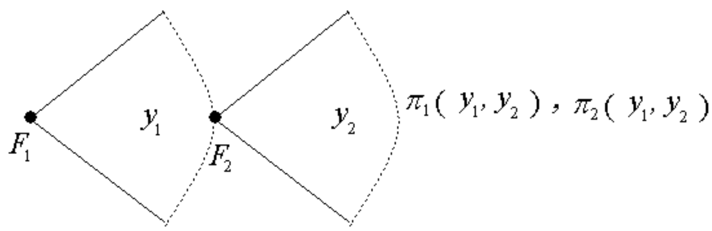

Figura 22.1: Liderança de Quantidade

Observe que, dadas as escolhas de produção das firmas, os seus lucros podem ser escritos como

$$\pi_1(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)\, y_1 - cy_1$$

e

$$\pi_2(y_1, y_2) = p(y_1 + y_2)\, y_2 - cy_2.$$

Agora que nós já temos a descrição completa do nosso jogo, tudo que nós temos a fazer é resolvê-lo.[22.1] Como vimos na aula sobre jogos sequenciais, pelo menos se não estamos interessados em equilíbrios de Nash baseados em ameaças vazias, o método de solução mais adequado para tais jogos é o da indução retroativa. Ou seja, primeiro identificaremos as melhores respostas da firma F_2 para cada possível escolha y_1 da firma F_1. De posse de tal informação podemos, então, identificar qual a escolha ótima de F_1.

Suponha, então, que a firma F_1 tenha escolhido um nível de produção y_1. Qual a melhor estratégia para a firma F_2? Como F_2 está preocupada em maximizar o seu lucro, a decisão ótima de F_2 resolverá o seguinte problema de maximização:

$$\max_{y_2} p(y_1 + y_2)\, y_2 - cy_2$$

A condição de primeira ordem do problema acima é

$$p'(y_1 + y_2)\, y_2 + p(y_1 + y_2) = c.$$

[22.1] Tal jogo é conhecido na literatura como jogo ou modelo de Stackelberg. Segundo Varian (2006), o economista Stackelberg foi a primeira pessoa a estudar as interações lider-seguidor de forma sistemática. O interessante é que o seu trabalho foi publicado em 1934, antes mesmo da criação do conceito de equilíbrio de Nash.

Em termos da curva de demanda inversa linear que nós estamos assumindo aqui a condição acima pode ser escrita como

$$-by_2 + a - b\,(y_1 + y_2) = c.$$

Resolvendo a equação acima para y_2 nós encontramos

$$y_2\,(y_1) = \frac{a - by_1 - c}{2b}.$$[22.2]

Ou seja, a análise acima nos permite escrever a escolha ótima da firma F_2 como função do nível de produção da firma F_1. Dada a racionalidade dos nossos jogadores, a hipótese com que trabalhamos em teoria dos jogos é que a firma F_1 consegue prever este comportamento da firma F_2 e, portanto, tomará a sua decisão de produção levando tal fato em conta. Em termos da árvore de decisão do jogo, isto significa que agora temos a situação simplificada representada na figura 22.2

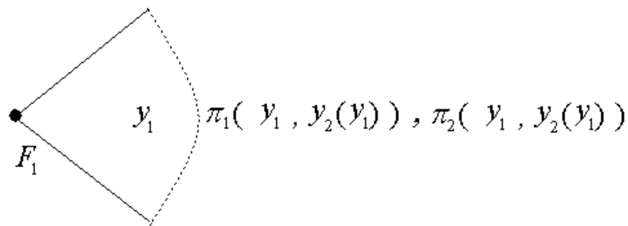

Figura 22.2: Jogo após primeiro estágio de indução retroativa

Nós vemos na figura 22.2 que a firma F_1 tomará a sua decisão de produção levando em conta o que a firma F_2 fará no período seguinte. O fato mais importante representado na figura é que dadas as decisões ótimas de F_2, o lucro da firma F_1 passa a ser função apenas da sua decisão de produção. Ou seja, o lucro da firma F_1 será dado por

$$\begin{aligned}
\pi_1\,(y_1, y_2\,(y_1)) &= p\,(y_1 + y_2\,(y_1))\,y_1 - cy_1 \\
&= p\left(y_1 + \frac{a - by_1 - c}{2b}\right) y_1 - cy_1 \\
&= p\left(\frac{y_1}{2} + \frac{a - c}{2b}\right) y_1 - cy_1.
\end{aligned}$$

[22.2] Na verdade, para valores de y_1 muito grandes a expressão acima nos dará um valor negativo para y_2. Em tais situações a melhor resposta da firma F_2 seria produzir zero. A expressão mais correta para as respostas ótimas da firma F_2 é

$$y_2\,(y_1) = \max\left\{\frac{a - by_1 - c}{2b}, 0\right\}.$$

No entanto, nós vamos ignorar tal complicação aqui e agir como se a firma F_2 pudesse de fato escolher um nível de produção negativo se ela desejasse. Isto não afetará a nossa discussão intuitiva aqui e, além do mais, o equilíbrio de Nash que vamos encontrar é o mesmo que encontraríamos se trabalhássemos com a expressão mais correta acima.

Como sempre, o objetivo da firma F_1 é maximizar o seu lucro. Ou seja, F_1 resolve o seguinte problema de maximização:

$$\max_{y_1} p\left(\frac{y_1}{2}+\frac{a-c}{2b}\right)y_1 - cy_1$$

A condição de primeira ordem do problema acima é

$$\frac{1}{2}p'\left(\frac{y_1^*}{2}+\frac{a-c}{2b}\right)y_1^* + p\left(\frac{y_1^*}{2}+\frac{a-c}{2b}\right) = c.$$

Em termos da curva de demanda inversa linear que nós estamos assumindo aqui a expressão acima pode ser escrita como

$$-\frac{b}{2}y_1^* + a - b\left(\frac{y_1^*}{2}+\frac{a-c}{2b}\right) = c.$$

Resolvendo a equação acima para y_1^* nós obtemos

$$y_1^* = \frac{a-c}{2b}.$$

Utilizando a caracterização que nós obtivemos para as respostas ótimas da firma F_2 acima nós obtemos

$$\begin{aligned} y_2^* &= \frac{a-by_1^*-c}{2b} \\ &= \frac{a-c}{4b}. \end{aligned}$$

Ou seja, a solução por indução retroativa do jogo acima é

$$(y_1^*, y_2^*) = \left(\frac{a-c}{2b}, \frac{a-c}{4b}\right).$$

Observe que com tais níveis de produção o preço cobrado pelo bem será dado por

$$\begin{aligned} p^* &= a - b\left(\frac{a-c}{2b}+\frac{a-c}{4b}\right) \\ &= \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}c. \end{aligned}$$

Já os lucros das firmas serão dados por

$$\begin{aligned} \pi_1^* &= \left(\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}c\right)\left(\frac{a-c}{2b}\right) - \left(\frac{a-c}{2b}\right)c \\ &= a\frac{(a-c)}{8b} - c\frac{(a-c)}{8b} \\ &= \frac{(a-c)^2}{8b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \left(\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}c\right)\left(\frac{a-c}{4b}\right)-\left(\frac{a-c}{4b}\right)c \\ &= a\frac{(a-c)}{16b}-c\frac{(a-c)}{16b} \\ &= \frac{(a-c)^2}{16b}.\end{aligned}$$

Observe que, embora a firma F_2 tenha a oportunidade de fazer a sua escolha de produção já tendo conhecimento de quanto a firma F_1 está produzindo, em termos estratégicos isto é uma desvantagem. Como a firma F_1 é capaz de prever o comportamento da firma F_2, ela acaba escolhendo um nível de produção relativamente alto, já sabendo que isto levará F_2 a produzir relativamente menos. Portanto, liderar é uma vantagem.

22.3 Fixação Simultânea de Preços

Nas seção anterior nós estudamos o comportamento de duas empresas em uma situação de duopólio quando uma das empresas assumia o papel de líder na escolha da quantidade a produzir. Agora nós estudaremos o problema da determinação simultânea de preços.

Considere um mercado em que duas empresas, F_1 e F_2 produzem o mesmo item. Suponha que o custo de produção de ambas as empresas seja dado por

$$C(y_i) = cy_i, \text{ para } i = 1, 2.$$

Novamente, nós trabalharemos com a hipótese de que a curva de demanda do mercado é linear. Ou seja, nós representaremos o comportamento dos consumidores por uma curva de demanda do tipo

$$y(p) = a - bp.$$

Finalmente, nós estamos interessados em estudar o comportamento de duas empresas que concorrem através da determinação de seus preços. Como as duas empresas vendem exatamente o mesmo produto, caso uma empresa esteja com o preço maior do que a outra todos os consumidores vão comprar da empresa que vende mais barato. Caso ambas cobrem o mesmo preço, então metade dos consumidores comprará de uma empresa e a outra metade comprará de outra.

A situação acima pode ser descrita como um jogo.[22.3] Primeiramente, os conjuntos de estratégias de ambos os jogadores são dados por $A_1 = A_2 = [c, a/b)$, em que a interpretação é que cada valor $p_i \in A_i$ é o preço escolhido pela empresa i.[22.4] Os ganhos de cada um dos jogadores serão os seus lucros. Desta forma, a função ganho da empresa 1, por exemplo, será

[22.3] Tal jogo é conhecido na literatura como modelo de concorrência de Bertrand. Assim como Cournot, Joseph Bertrand foi um matemático francês.

[22.4] Observe que para um preço maior ou igual a a/b, a demanda pelo bem será nula. Portanto, por simplicidade, nós estamos ignorando a possibilidade das empresas escolherem preços acima de tal valor. Por razão similar, nós estamos ignorando a possibilidade de que as empresas escolham preços menores do que o seu custo marginal, o que lhes daria um lucro negativo.

dada por

$$\pi^1(p_1, p_2) = \begin{cases} p_1 y(p_1) - cy(p_1), \text{ se } p_1 < p_2, \\ p_1 \frac{y(p_1)}{2} - c\frac{y(p_1)}{2}, \text{ se } p_1 = p_2, \\ 0, \text{ se } p_1 > p_2. \end{cases}$$

O ganho, ou lucro, da empresa F_2 será análogo. Agora que temos a descrição completa do jogo, nós podemos investigar se este possui algum equilíbrio de Nash. Como a proposição abaixo nos mostra, o único equilíbrio de Nash de tal jogo corresponde à situação em que ambas as empresas escolhem um preço igual ao custo marginal c.

Proposição 22.1. *O único equilíbrio de Nash do jogo de Bertrand é o perfil* $(p_1, p_2) = (c, c)$.

Demonstração da Proposição. Considere primeiro um perfil em que $p_1 > p_2$. Se $p_2 > c$, então seria melhor para F_1 escolher um preço entre c e p_2. Isto lhe daria um lucro positivo que é melhor que o lucro zero que ela estava obtendo anteriormente. Suponha, então que $p_2 = c$. Neste caso, F_2 está obtendo um lucro de zero, quando ela poderia obter um lucro positivo se escolhesse um preço entre c e p_1. Nós concluímos que não existe nenhum equilíbrio de Nash em que $p_1 > p_2$. Um raciocínio absolutamente análogo mostra que não existe nenhum equilíbrio de Nash em que $p_2 > p_1$. Ou seja, em qualquer equilíbrio de Nash do jogo acima nós necessariamente temos que ter $p_1 = p_2$. Considere agora um perfil em que $p_1 = p_2 > c$. Neste caso ambas as empresas estão dividindo o mercado. Mas seria melhor para F_1, por exemplo, cobrar um preço um pouco menor do que p_2. Deste modo a demanda pelo bem não iria mudar muito e ela não teria mais que dividir o mercado com F_2. Nós concluímos que nenhum perfil em que $p_1 = p_2 > c$ é equilíbrio de Nash do jogo em questão. Só nos resta uma última possibilidade, o perfil $p_1 = p_2 = c$. Neste caso, ambas as empresas estão obtendo um lucro nulo. Mas qualquer outro preço fará com que elas não vendam nada e, portanto, continuem com lucro zero. Ou seja, $p_1 = c$ é de fato uma melhor resposta para F_1 quando F_2 joga $p_2 = c$ e $p_2 = c$ é de fato uma melhor resposta para F_2 quando F_1 joga $p_1 = c$. Nós concluímos que $(p_1, p_2) = (c, c)$ é o único equilíbrio de Nash do jogo.[22.5] $\|$

A proposição acima nos mostra que quando duas empresas concorrem através da fixação simultânea de preços elas acabam se comportando como se estivessem em um caso de competição perfeita. Observe que o preço do produto neste caso acaba sendo igual ao custo marginal, o que é exatamente o que aconteceria no caso de competição perfeita. Tal resultado vem principalmente da nossa hipótese de que ambas as empresas vendem exatamente o mesmo produto. Deste modo, qualquer diferença de preços faz com que as vendas da empresa que esteja cobrando mais caro reduzam-se imediatamente a zero.

22.4 Fixação Simultânea de Quantidades

Nós agora retornamos ao modelo de Cournot que estudamos em teoria dos jogos. A diferença é que agora nós trabalharemos com um número arbitrário de firmas. Suponha, então, que

[22.5] Na nossa modelagem, nós assumimos, por simplicidade, que os conjuntos de estratégias de ambos os jogadores eram dados por $[c, a/b)$. Nós obteríamos exatamente o mesmo resultado se trabalhássemos com $A_1 = A_2 = [0, \infty)$. A única diferença é que teríamos que considerar mais casos na hora de demonstrar a proposição.

N firmas produzam o mesmo produto, sob a seguinte função custo:

$$C(y_i) = cy_i,\ i = 1, ..., N.$$

A demanda agora será representada por uma curva de demanda inversa linear, isto é

$$p(y_1 + ... + y_N) = a - b(y_1 + ... + y_N).$$

Para finalizar a descrição do modelo, nós vamos supor que todas as empresas tenham que determinar as suas quantidades produzidas simultaneamente. Tal situação pode ser perfeitamente descrita como um jogo. Os conjuntos de estratégias de todos os jogadores serão dados por $A_1 = ... = A_N = [0, \infty)$, em que $y_i \in A_i$ é a quantidade produzida pela empresa i. Os ganhos de cada um dos jogadores serão dados pelo seu lucro, ou seja,

$$\pi^i(y_1, ..., y_N) = p(y_1 + ... + y_N)\, y_i - cy_i.$$

Tentemos encontrar os equilíbrios de Nash de tal jogo, então. Caracterizemos primeiro as melhores respostas de uma firma i, dadas as estratégias utilizadas pelas outras empresas. Tais melhores respostas têm que resolver o seguinte problema de maximização:

$$\max_{y_i} p(y_1 + ... + y_N)\, y_i - cy_i$$

A condição de primeira ordem do problema acima é

$$p'(y_1 + ... + y_N)\, y_i + p(y_1 + ... + y_N) = c.$$

Dada a forma funcional que nós assumimos para p, a equação acima pode ser escrita como

$$-by_i + a - b(y_1 + ... + y_N) = c.$$

Isolando y_i na equação acima nós obtemos

$$y_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1 + ... + y_{i-1} + y_{i+1} + ... y_N}{2}.$$

Tais condições de primeira ordem, uma para cada empresa, nos dão um sistema com N equações e N incógnitas. Com um pouco de paciência nós poderíamos resolver tal sistema, mas dada a natureza simétrica do nosso problema, nós podemos perceber que tal sistema terá uma solução em que todas as empresas produzem a mesma coisa. Usando isto na condição de primeira ordema acima nós ficamos com a seguinte equação:

$$y_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{(N-1)\, y_i}{2}.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos

$$y_i = \frac{a-c}{(N+1)\, b}.$$

Observe que, de fato, quando $N = 1$, nós obtemos a solução de monopólio que havíamos encontrado antes. Da mesma forma, quando $N = 2$, nós obtemos

$$y_i = \frac{a-c}{3b},$$

que é a solução que havíamos obtido no caso de duopólio. Para completar a análise, vamos calcular o nível de produção agregado e o preço que tais escolhas implicam. O nível de produção agregado é simplesmente a soma do que todas as empresas produzem e, portanto, será dado por

$$y_{Agregado} = \frac{N(a-c)}{(N+1)b}.$$

Já o preço cobrado será

$$\begin{aligned} p(y_{Agregado}) &= a - b(y_1 + ... + y_N) \\ &= a - b\left(\frac{N(a-c)}{(N+1)b}\right). \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N(a-c)}{(N+1)b} = \frac{a-c}{b}$$

e

$$\lim_{N\to\infty} a - b\left(\frac{N(a-c)}{(N+1)b}\right) = c.$$

Ou seja, a medida que o número de empresas cresce, a produção agregada e o preço aproximam-se dos valores que são obtidos em um mercado competitivo em que as firmas agem como tomadoras de preço. Tal resultado é geralmente mencionado como uma justificativa de teoria dos jogos para a hipótese de competição perfeita.

22.5 Exercícios

Exercício 22.1 (Fixação Simultânea de Preços com Custos Marginais Distintos)**.** *Suponha que duas empresas vendam exatamente o mesmo produto e a competição se dê através da fixação simultânea dos seus preços. A parte da demanda neste mercado é modelada por uma curva de demanda linear, ou seja,*

$$y(p) = a - bp.$$

Quando as empresas cobram preços diferentes, somente a empresa com o menor preço atende o mercado. As vendas e, consequentemente, o lucro da outra empresa são iguais a zero. No caso em que as duas empresas cobram o mesmo preço, a nossa hipótese será que somente a firma 1 vende.[22.6] *Finalmente, nós assumimos que as empresas têm as seguintes funções de custo:*

$$C(y_1) = c_1 y_1$$

[22.6] Esta hipótese tem que ser feita por razões técnicas. Sem tal hipótese, razões que não são economicamente interessantes acabam fazendo com que o jogo não tenha equilíbrio de Nash.

e

$$C(y_2) = c_2 y_2,$$

em que $c_2 > c_1$ *e* $a/b > c_2$.[22.7]

(a) *Suponha primeiramente que a empresa 2 não exista. Ou seja, suponha que a empresa 1 seja monopolista neste mercado. Que preço ela cobrará?*

(b) *O caso em que as duas empresas escolhem os seus preços simultaneamente pode ser modelado como um jogo. Por simplicidade, suponha que os conjuntos de estratégias dos jogadores sejam* $A_1 := [c_1, a/b)$ *e* $A_2 := [c_2, a/b)$*. A interpretação aqui é que* $p_i \in A_i$ *é o preço escolhido pela firma i. Os ganhos de ambos os jogadores serão dados pelos seus lucros obtidos, de acordo com os preços escolhidos por ambas as firmas. Seja* $\overline{p}$ *o preço que você encontrou na letra (a) e suponha que* $c_2 \geq \overline{p}$*. Uma das empresas tem uma estratégia estritamente dominante neste caso. Qual delas e que estratégia é esta?*

(c) *Dado o que nós aprendemos na letra (b), é possível perceber que o jogo acima tem um número infinito de equilíbrios de Nash que têm a mesma característica. A característica de tais equilíbrios é que apenas uma empresa venderá neste mercado. A outra empresa escolherá qualquer preço que seja superior ao cobrado pela sua concorrente. Descreva esses equilíbrios.*

(d) *Suponha agora que* $c_2 < \overline{p}$*. Agora, embora o jogo tenha um único equilíbrio de Nash, este continua tendo a mesma característica. Ou seja, nós continuamos tendo apenas uma empresa vendendo em equilíbrio. Encontre o equilíbrio de Nash do jogo neste caso.*

Exercício 22.2 (Cournot com Custos Fixos)**.** *Suponha que duas empresas vendam exatamente os mesmos produtos e que a competição entre ambas se dê pela fixação simultânea das quantidades a serem produzidas. Novamente, suponha que a demanda seja representada por uma curva de demanda inversa linear, ou seja,*

$$p(y_1 + y_2) = a - b(y_1 + y_2).$$

Suponha, também, que o custo de produção de ambas as firmas seja dado por

$$C(y_i) = d + cy_i.$$

(a) *Suponha que as empresas paguem o custo fixo d, mesmo se decidirem não produzir. Isto é, suponha que mesmo que a empresa i escolha* $y_i = 0$*, ainda assim seu custo seja dado por* $C(0) = d + c * 0 = d$*. Encontre o único equilíbrio de Nash do jogo neste caso.*

(b) *Suponha que* $a = 5$*,* $b = 1$*,* $d = 2$ *e* $c = 2$*. Calcule o lucro que ambas as empresas obteriam no equilíbrio acima.*

(c) *Se você fez as contas corretamente, você notou que o lucro obtido por ambas as empresas no equilíbrio acima foi negativo. Suponha agora que ambas as empresas tenham uma estratégia adicional de não entrar no mercado. Neste caso, elas não produzem nada, mas também não têm nenhum custo. Suponha que a empresa 2 esteja usando esta estratégia. Qual a melhor resposta para a firma 1?*

[22.7] A segunda condição garante que com um preço $p = c_2$ a demanda pelo bem é estritamente positiva.

(d) *Mostre que, dados os valores dos parâmetros na letra (b), quando a firma 1 produz a quantidade que você encontrou na letra (c), a melhor resposta para a firma 2 é realmente ficar fora do mercado. Isto é, mostre que qualquer quantidade que a firma 2 resolva produzir lhe dará um lucro negativo.*

Exercício 22.3 (Liderança de quantidade com custo quadrático)**.** *Suponha que duas empresas produzam o mesmo produto e suas funções de custo sejam dadas por* $c(y_i) = y_i^2$*. Suponha também que a demanda pelo bem* y *seja representada pela seguinte curva de demanda inversa:*

$$p(y_1 + y_2) = 56 - (y_1 + y_2).$$

Finalmente, suponha que a firma 1 tome a sua decisão de produção antes da firma 2. Somente após tomar conhecimento da decisão de produção da firma 1 é que a firma 2 decide o quanto ela vai produzir. Modele a situação acima como um jogo sequencial e encontre as quantidades que as duas firmas vão produzir em equilíbrio usando o método de indução retroativa.

Capítulo 23

Economia da Informação

23.1 Introdução

Até o presente momento, nós temos estudado modelos em que todos os agentes são perfeitamente informados sobre todos os fatores envolvidos na situação em questão. Ainda mais importante do que isto, nós nos concentramos em situações em que todos os agentes tinham acesso a exatamente às mesmas informações. Nós agora estudaremos situações em que alguns agentes têm alguma vantagem informacional em relação aos outros agentes. Vários problemas interessantes se enquadram nesta categoria e nós estudaremos alguns deles agora.

23.2 Seleção Adversa

O simples fato de você retirar um carro zero da concessionária já reduz o seu valor de revenda significantemente. À primeira vista, esta parece ser uma situação que não faz muito sentido. Afinal de contas, o carro continua sendo o mesmo e, portanto, deveria continuar tendo o mesmo valor. Para entendermos a causa de tal fenômeno nós precisamos analisar a situação em um contexto mais geral. Na verdade, intuitivamente, a explicação para a queda no preço do carro logo após a saída da concessionária é simples.

Pouquíssimas pessoas compram um carro zero já pensando em revendê-lo. Em geral, uma pessoa só irá vender um carro novo se por alguma razão ela não estiver satisfeita com o carro. Mas então, um cliente que observa alguém querendo vender um carro novo sabe que a probabilidade do vendedor ter tido algum problema com o carro é alta. Portanto, ele só aceita pagar um valor bem baixo pelo carro.

O problema acima é chamado de seleção adversa. A estrutura de mercado acaba fazendo com que os carros bons não sejam vendidos. Nós agora estudaremos um modelo formal de tal situação. Nós veremos que isto nos permitirá descobrir algumas propriedades novas do problema de seleção adversa.

Suponha que nós tenhamos uma certa quantidade de carros para serem vendidos na nossa economia. Cada carro é representado simplesmente pela sua qualidade q. Por simplicidade, nós assumiremos que a qualidade q de um carro pode variar entre 0 e 1. Mais do que isto, nós assumiremos que a qualidade dos carros vendidos na nossa economia se distribui uniformemente entre 0 e 1. Para completar a descrição do modelo, nós vamos assumir que dado um carro de qualidade q, os potenciais compradores do carro estariam dispostos a pagar um valor $q + \alpha$ pelo carro, em que $\alpha > 0$. Finalmente, quando o consumidor não sabe a qualidade do carro que ele está pensando em comprar, ele aceita pagar um valor igual ao valor esperado da qualidade do carro mais α.

Por exemplo, se todos os carros na nossa economia estivessem a venda, o consumidor aceitaria pagar um preço

$$p = \frac{0+1}{2} + \alpha = \frac{1}{2} + \alpha.$$ [23.1]

Tal fato é uma consequência da nossa hipótese de que a qualidade dos carros se distribui uniformemente entre 0 e 1, mas você pode encarar isto como um dado do problema. De forma similar, se apenas carros com qualidade inferior a uma certa qualidade q^* estivessem sendo vendidos, então o preço que os consumidores aceitariam pagar por um carro novo seria

$$p = \frac{0+q^*}{2} + \alpha = \frac{q^*}{2} + \alpha.$$

O conceito que nós usaremos para analisar esta situação é o conceito de equilíbrio competitivo, mas nós teremos que adaptar um pouco a definição de equilíbrio competitivo para a situação aqui. Formalmente, nós trabalharemos com a seguinte definição:

Definição 23.1. Para o modelo acima, um equilíbrio competitivo será um preço p^* tal que se todos os carros com qualidade inferior a p^* estiverem sendo vendidos, então a qualidade esperada q^* de um carro que esteja sendo vendido satisfaça $q^* + \alpha = p^*$.

A definição acima parte da idéia de que existe um número grande de potenciais compradores de carros. Portanto, se a qualidade esperada dos carros que estiverem sendo vendidos mais α for maior do que o preço, então mais clientes desejarão comprar carros, elevando o preço. Por outro lado, se a qualidade esperada dos carros que estiverem sendo vendidos mais α for menor do que o preço, então nenhum cliente comprará carro, diminuindo assim o preço. Deste modo, a única situação de equilíbrio tem que satisfazer exatamente a definição acima.

Suponha que os consumidores estejam dispostos a pagar um preço p por um carro novo. Neste caso, todos os vendedores que possuem um carro com qualidade inferior a p estarão dispostos a vender os seus carros. Isto é, os carros a venda serão dados pelo intervalo $[0, p]$. Mas isto significa que a qualidade média de um carro novo a venda no mercado será dada por $\frac{0+p}{2} = \frac{p}{2}$. O que implicaria que os consumidores estariam dispostos a pagar $\frac{p}{2} + \alpha$ por um carro novo. Para obtermos uma situação de equilíbrio nós precisamos que o preço que os consumidores estão dispostos a pagar por um carro novo seja igual a qualidade esperada de um carro novo mais α. Ou seja, nós precisamos que

$$\frac{p}{2} + \alpha = p.$$

Resolvendo a equação acima nós obtemos

$$p = 2\alpha.$$

[23.1] Se a qualidade dos carros é distribuída uniformemente entre zero e um, então a qualidade esperada de um carro sorteado de maneira aleatória é exatamente $1/2$.

Observe que, quando $\alpha = 0$, ou seja, quando os consumidores só aceitam pagar exatamente a qualidade esperada por um carro novo, nenhum carro é vendido. Similarmente, quando $\alpha = \frac{1}{2}$, os consumidores acabam pagando um preço igual a qualidade máxima que um carro pode ter e todos os carros são vendidos. Para valores de α entre 0 e $\frac{1}{2}$, os consumidores acabam pagando um preço igual a 2α, e apenas carros de qualidade inferior a 2α são vendidos. Em geral, é de se esperar que o valor de α não seja muito alto, portanto, a previsão gerada por tal modelo está de acordo com o que vemos na prática. O preço dos carros é baixo e, em equilíbrio, somente carros de qualidade baixa são vendidos.

23.3 Sinalização

No exemplo da seção anterior os proprietários de carros com uma qualidade maior acabam não podendo vender os seus carros. O fato de que os compradores não conseguem diferenciar um carro de alta qualidade de um de baixa acaba fazendo com que estes só queiram pagar um valor muito baixo por um carro, o que acaba tirando os carros de qualidade mais alta do mercado. Numa situação econômica real seria natural que isto levasse a mecanismos de sinalização. Isto é, seria natural que houvessem atitudes que os proprietários de carro de qualidade maior pudessem tomar para sinalizar aos compradores que o carro que eles estão considerando é de qualidade. Por exemplo, algo bastante comum é que o proprietário de um carro usado de qualidade permita que o comprador leve o carro para o seu mecânico de confiança para fazer uma avaliação.

Tais idéias levaram ao desenvolvimento dos chamados modelos de sinalização em economia. Nós aqui estudaremos uma versão simplificada do modelo de Spence (1973, 1974). Suponha que existam dois tipos de trabalhadores. Os de produtividade alta, que conseguem produzir uma quantidade $\theta_H > 0$ e os de produtividade baixa, que só conseguem produzir uma quantidade θ_L tal que $\theta_H > \theta_L > 0$. Suponha que a proporção de trabalhadores do tipo θ_H na economia seja α e a de trabalhadores do tipo θ_L seja $1 - \alpha$. Ao contratar um trabalhador a firma não tem como saber de qual tipo este é. Nós aqui vamos supor que existe um número grande de firmas, o que leva o mercado das firmas a ser competitivo. Na prática, isto vai implicar que em uma situação em que não houvesse a possibilidade de sinalização, a firma ofereceria um salário $w = \alpha\theta_H + (1 - \alpha)\theta_L$ para todos os trabalhadores.

23.3.1 Educação

Nós agora introduziremos a possibilidade de obter educação. No modelo, educação não terá nenhum efeito sobre a produtividade dos trabalhadores, mas potencialmente esta poderá ser usada pelos trabalhadores mais produtivos como um sinal. Embora educação não tenha nenhum efeito sobre a produtividade dos agentes, nós assumiremos que para obtê-la os trabalhadores de baixa produtividade incorrem em um custo. Se um agente do tipo L resolve obter educação, ele tem que pagar um custo $c_L > 0$.

Para completar a descrição dos trabalhadores, nós precisamos definir quais serão as suas funções de utilidade. A nossa hipótese será que, dado um salário w, a utilidade de um trabalhador do tipo H será simplesmente w, já a utilidade de um trabalhador do tipo L será w se ele não tiver obtido educação e será $w - c_L$ se ele tiver obtido educação.

Finalmente, nós precisamos descrever o comportamento das firmas. As firmas não podem observar o tipo dos agentes, mas podem observar se eles obtiveram ou não educação. Nós assumiremos um comportamento bem simplificado para as firmas. Se os dois jogadores decidirem obter educação, ou ambos decidirem não obter educação, então as firmas oferecerão um salário igual a $\alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L$ para todos os trabalhadores. Caso um dos trabalhadores resolva obter educação e o outro não, então as firmas conseguirão diferenciar os dois tipos de trabalhadores. Neste caso, as firmas oferecerão um salário θ_H para o trabalhador H e um salário θ_L para o trabalhador L.

A situação acima está no formato de um jogo em que as estratégias dos dois jogadores são obter ou não obter educação. O jogo pode ser representado pela seguinte matriz de ganhos:

		Jogador L	
		E	N
Jogador H	E	$\alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L, \alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L - c_L$	θ_H, θ_L
	N	$\theta_H, \theta_L - c_L$	$\alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L, \alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L$

Nós agora podemos estudar os equilíbrios de Nash do jogo acima. Nós faremos isto através de duas proposições:

Proposição 23.1. *Se $\alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L - c_L > \theta_L$, então o jogo acima não tem nenhum equilíbrio de Nash em estratégias puras.*

Demonstração da Proposição. Quando o jogador H joga E, por construção a melhor resposta do jogador L é jogar E. Mas se o jogador L está jogando E, é claro que a melhor resposta para o jogador H é jogar N. Nós concluímos que não existe equilíbrio com o jogador H jogando E. Suponha agora que H esteja jogando N. Neste caso, a melhor resposta para L é jogar N. Mas quando L joga N, a melhor resposta para H é jogar E. Nós concluímos que o jogo não tem nenhum equilíbrio de Nash neste caso. $\|$

É interessante discutir o por quê da ausência de equilíbrios neste caso. Na verdade, como o custo de obter educação é muito baixo, então o agente do tipo L tem uma tendência a imitar o que o agente do tipo H faz. Porém, por outro lado, o agente do tipo H sempre tem uma tendência a fazer algo diferente do que o agente do tipo L faz. Isto leva a ausência de equilíbrio no jogo. A próxima proposição completa a caracterização das soluções do jogo acima.

Proposição 23.2. *Se $\alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L - c_L \leq \theta_L$, então o único equilíbrio de Nash do jogo acima é (E, N).*

Demonstração da Proposição. Quando o jogador L joga N, então a melhor resposta para H é jogar E. Dada a hipótese, quando o jogador H joga E, jogar N é de fato uma melhor resposta para L. Portanto (E, N) é o único equilíbrio de Nash do jogo em que L joga N. Suponha agora que L jogue E. Neste caso a melhor resposta para H é jogar N. Mas quando H joga N a melhor resposta para L é jogar N. Nós concluímos que não existe equilíbrio de Nash em que L jogue E. Nós concluímos que o único equilíbrio de Nash do jogo é (E, N). $\|$

Portanto, dado o nosso modelo, quando o custo de obter educação para um trabalhador menos qualificado for alto o suficiente, o agente H escolherá obter educação para se diferenciar do trabalhador do tipo L.

23.4 Filtragem em Mercado Competitivo

Na seção anterior nós investigamos a situação em que o trabalhador H procurava obter um nível de educação que, embora não afetasse a sua produtividade, sinalizava para as firmas o seu tipo. Numa situação prática, nós esperaríamos que as firmas também desenvolvessem mecanismos para tentar descobrir o quão produtivo os trabalhadores que elas pretendem contratar são.

Suponha agora que a firma tenha a possibilidade de oferecer contratos para os trabalhadores em que cada contrato especifique um salário w e uma tarefa com nível de dificuldade t. A nossa hipótese é que t poderá ser qualquer número positivo e que a tarefa com dificuldade t não afeta a produção do trabalhador. Embora t não afete a produção do trabalhador, este tem uma desutilidade ao executar a tarefa que varia positivamente com t. Desta forma, um trabalhador do tipo i, com $i = H$ ou L, ao assinar um contrato (w_i, t_i) recebe uma utilidade

$$U^i(w_i, t_i) = w_i - c_i t,$$

em que $c_H < c_L$. Novamente, nós assumiremos que uma fração α dos trabalhadores é do tipo H e uma fração $1 - \alpha$ é do tipo L. Além disto, nós trabalharemos com a hipótese de que o mercado de firmas é competitivo. Isto terá algumas implicações para o conceito de equilíbrio que utilizaremos mais a frente. O problema da firma que está atuando no mercado será escolher um par de contratos (w_H, t_H) e (w_L, t_L) que serão direcionados aos dois tipos de agentes. Dado tal par de contratos, o lucro da firma será dado por

$$\pi = \alpha(\theta_H - w_H) + (1 - \alpha)(\theta_L - w_L).$$

O nosso conceito de equilíbrio satisfará as seguintes propriedades:

Definição 23.2. Um equilíbrio com mercado de firmas competitivo é um par de contratos (w_H, t_H) e (w_L, t_L) que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Os dois contratos dão utilidades não negativas aos agentes, ou seja,

$$w_H - c_H t_H \geq 0$$

e

$$w_L - c_L t_L \geq 0.$$

(b) Os agentes do tipo H têm incentivo a aceitar o contrato (w_H, t_H) e os agentes do tipo L tem incentivo a aceitar o contrato (w_L, t_L), ou seja,

$$w_H - c_H t_H \geq w_L - c_H t_L$$

e

$$w_L - c_L t_L \geq w_H - c_L t_H;$$

(c) O par de contratos que a firma oferece lhe dá lucro zero. Ou seja, $\alpha(\theta_H - w_H) + (1 - \alpha)(\theta_L - w_L) = 0$;

(d) Não existe contrato que uma firma que entrasse neste mercado pudesse oferecer que lhe desse um lucro positivo.

Investiguemos primeiro a situação em que as firmas podem identificar os dois tipos de agentes. Neste caso, nós podemos mostrar que o único equilíbrio será o par de contratos $(w_H, t_H) = (\theta_H, 0)$ e $(w_L, 0) = (\theta_L, 0)$. Observe que, como a firma pode diferenciar os agentes, um agente não pode aceitar o contrato oferecido ao outro agente. Como ambos os contratos dão utilidades estritamente positivas para ambos os agentes, os dois aceitam os contratos. Portanto, a primeira propriedade que caracteriza um equilíbrio é satisfeita. Obviamente a terceira propriedade também é satisfeita, portanto só precisamos mostrar que a quarta propriedade é satisfeita. Mas suponha que uma nova firma queira entrar no mercado. Para entrar no mercado ela tem que oferecer um contrato que seja aceito por pelo menos um dos tipos de agente. Mas observe que ambos os agentes estão recebendo um salário igual a sua produtividade e realizando uma tarefa de dificuldade zero. Portanto, a única forma de uma firma entrante oferecer um contrato mais atrativo para um dos tipos de agente seria aumentar o seu salário. Mas isto claramente daria um lucro negativo para a firma entrante. Nós concluímos que a quarta propriedade também é satisfeita e, portanto, o par de contratos acima é de fato um equilíbrio quando a firma pode diferenciar os dois tipos de trabalhadores.

Temos ainda que mostrar que não existem outros equilíbrios. Suponha que exista um equilíbrio em que o agente do tipo i, com $i = H$ ou L, esteja assinando um contrato (w_i, t_i) com $w_i < \theta_i$. Mas então, uma firma entrante poderia oferecer um contrato $\left(\tilde{w}_i, \tilde{t}_i\right)$, direcionado aos agentes do tipo i em que $\tilde{t}_i = t_i$ e $w_i < \tilde{w}_i < \theta_i$. Os agentes do tipo i de fato aceitariam este novo contrato e a firma entrante receberia um lucro estritamente positivo. Nós concluímos que em equilíbrio nós temos que ter $w_i \geq \theta_i$ para $i = H, L$. Obviamente, se $w_i > \theta_i$ para um dos tipos de trabalhador, então o lucro da firma estaria sendo negativo, o que contraria a condição 3. Portanto, em qualquer equilíbrio nós temos que ter $w_i = \theta_i$ para $i = H, L$. Finalmente, suponha que o par de contratos de equilíbrio inclua um contrato (θ_i, t_i) com $t_i > 0$ para $i = H$ ou L. Mas então, um firma entrante poderia oferecer um contrato $\left(\tilde{w}_i, \tilde{t}_i\right)$ em que $\tilde{t}_i = 0$ e $\theta_i - c_i t_i < \tilde{w}_i < \theta_i$. Tal contrato atrairia os agentes do tipo i e daria um lucro positivo para a firma entrante. Nós concluímos que de fato o único equilíbrio em tal caso é o par de contratos citado acima.

Vamos agora trabalhar com o caso em que a firma não pode identificar os dois tipos de trabalhadores, mas, é claro, ela pode oferecer dois contratos de modo que os próprios trabalhadores se auto selecionem. Nós analisaremos tal modelo através de várias proposições:

Proposição 23.3. *Em equilíbrio, o contrato oferecido ao trabalhador H é diferente do contrato oferecido ao trabalhador L.*

Demonstração da Proposição. Suponha que a firma esteja oferecendo o mesmo contrato (w, t) para ambos os trabalhadores. Como a firma tem que estar tendo lucro zero, então o contrato oferecido tem que satisfazer

$$\alpha\left(\theta_H - w\right) + (1-\alpha)\left(\theta_L - w\right) = 0.$$

Como $\theta_H > \theta_L$, nós obrigatoriamente temos que ter $\theta_H - w > 0$. Mas então, uma firma entrante poderia oferecer um novo contrato $\left(\tilde{w}, \tilde{t}\right)$ em que $w < \tilde{w} < \theta_H$ e $\tilde{t} = t + \frac{1}{\frac{c_H + c_L}{2}} \left(\tilde{w} - w\right)$ (ver figura 23.1)[23.2].

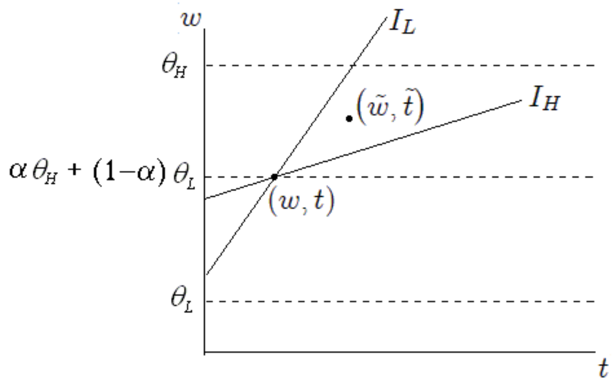

Figura 23.1: Não existência de equilíbrio quando dois tipos recebem o mesmo contrato.

Observe que

$$\begin{aligned} \tilde{w} - c_H \tilde{t} &= \tilde{w} - c_H t - \frac{c_H}{\frac{c_H + c_L}{2}} \left(\tilde{w} - w\right) \\ &> \tilde{w} - c_H t - \left(\tilde{w} - w\right) \\ &= w - c_H t. \end{aligned}$$

Portanto, os agentes do tipo H prefeririam este contrato. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{w} - c_L \tilde{t} &= \tilde{w} - c_L t - \frac{c_L}{\frac{c_H + c_L}{2}} \left(\tilde{w} - w\right) \\ &< \tilde{w} - c_L t - \left(\tilde{w} - w\right) \\ &= w - c_L t. \end{aligned}$$

Ou seja, os agentes do tipo L ainda prefeririam o contrato antigo. Portanto, os agentes do tipo H mudariam para a firma entrante, mas os agentes do tipo L permaneceriam com a firma antiga. Mas então, o lucro da firma entrante seria dado por

$$\theta_H - \tilde{w} > 0.$$

Isto contradiz a definição de equilíbrio com que nós estamos trabalhando e, portanto, nós concluímos que em equilíbrio a firma não pode estar oferecendo o mesmo contrato para ambos os jogadores. ‖

Proposição 23.4. *Em equilíbrio, para $i = H, L$, o contrato (w_i, t_i) oferecido ao trabalhador do tipo i necessariamente tem que satisfazer $w_i = \theta_i$.*

[23.2] Na figura, I_L é a curva de indiferença do trabalhador do tipo L e I_H é a curva de indiferença do trabalhador H.

Demonstração da Proposição. Suponha primeiro que o contrato oferecido ao trabalhador do tipo L satisfaça $w_L < \theta_L$. Neste caso, uma firma entrante poderia oferecer um contrato $\left(\tilde{w}_L, \tilde{t}_L\right)$ em que $w_L < \tilde{w}_L < \theta_L$ e $\tilde{t}_L = t_L$ (ver figura 23.2). Observe que os trabalhadores do tipo L aceitariam tal contrato. Além disto, com qualquer trabalhador que aceitasse tal contrato, seja ele do tipo H ou L, a firma entrante obteria um lucro estritamente positivo. Nós concluímos que em equilíbrio o contrato (w_L, t_L) oferecido ao trabalhador do tipo L tem que satisfazer $w_L \geq \theta_L$.

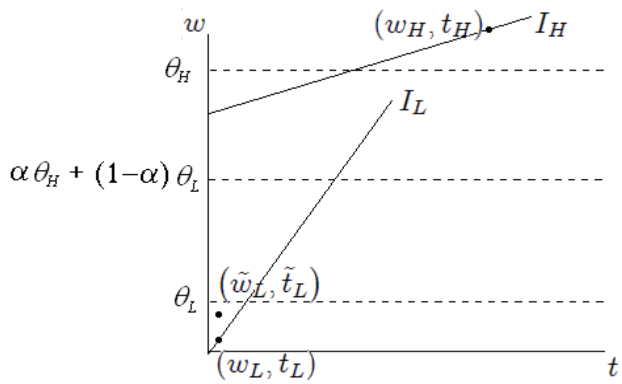

Figura 23.2: Salário oferecido a tipo L tem que ser maior ou igual a θ_L.

Suponha agora que o contrato (w_H, t_H) oferecido ao trabalhador do tipo H satisfaça $w_H < \theta_H$. Neste caso, uma firma entrante poderia oferecer um contrato $\left(\tilde{w}_H, \tilde{t}_H\right)$ tal que $w_H < \tilde{w}_H < \theta_H$ e $\tilde{t}_H = t_H + \frac{1}{\frac{c_H+c_L}{2}}\left(\tilde{w}_H - w_H\right)$ (ver figura 23.3). Observe primeiro que

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_H - c_H\tilde{t}_H &= \tilde{w}_H - c_H t_H - \frac{c_H}{\frac{c_H+c_L}{2}}\left(\tilde{w}_H - w_H\right) \\
&> \tilde{w}_H - c_H t_H - \left(\tilde{w}_H - w_H\right) \\
&= w_H - c_H t_H.
\end{aligned}$$

Portanto, os trabalhadores do tipo H prefeririam este novo contrato. Observe, também, que

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_H - c_L\tilde{t}_H &= \tilde{w}_H - c_L t_H - \frac{c_L}{\frac{c_H+c_L}{2}}\left(\tilde{w}_H - w_H\right) \\
&< \tilde{w}_H - c_L t_H - \left(\tilde{w}_H - w_H\right) \\
&= w_H - c_L t_H \\
&\leq w_L - c_L t_L.
\end{aligned}$$

Portanto, os trabalhadores do tipo L não seriam atraídos por tal contrato. Mas então, ao oferecer tal contrato uma firma entrante atrairia somente os trabalhadores do tipo H e obteria lucro positivo. Como isto contradiz a definição de equilíbrio, nós concluímos que em equilíbrio nós temos que ter $w_H \geq \theta_H$. Finalmente, como $w_L \geq \theta_L$ e $w_H \geq \theta_H$ e, além disto, $\alpha\left(\theta_H - w_H\right) + (1-\alpha)\left(\theta_L - w_L\right) = 0$, nós vemos que a única possibilidade é $w_H = \theta_H$ e $w_L = \theta_L$. ‖

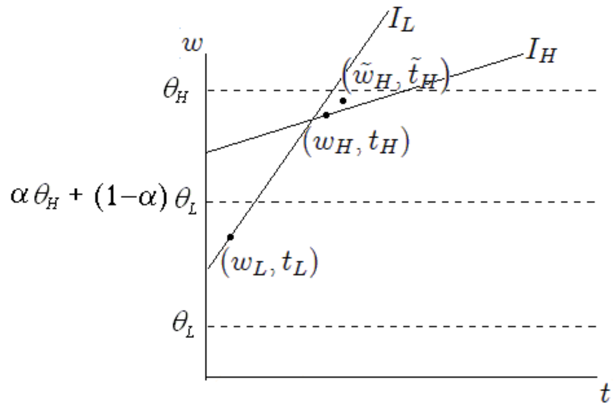

Figura 23.3: Salário oferecido a tipo H tem que ser maior ou igual a θ_H.

Proposição 23.5. *Em equilíbrio,* $(w_L, t_L) = (\theta_L, 0)$.

Demonstração da Proposição. Nós já sabemos que $w_L = \theta_L$, portanto, nós só precisamos mostrar que $t_L = 0$. Suponha, então, que nós tenhamos um equilíbrio em que $t_L > 0$. Mas então, uma firma entrante poderia oferecer um contrato $\left(\tilde{w}_L, \tilde{t}_L\right)$ em que $\tilde{t}_L = 0$ e $\theta_L - c_L t_L < \tilde{w}_L < \theta_L$ (ver figura 23.4). Observe que sob tal contrato,

$$\tilde{w}_L - \tilde{t}_L > \theta_L - c_L t_L.$$

Ou seja, os trabalhadores do tipo L aceitariam tal contrato. Por outro lado, com qualquer trabalhador que aceitasse tal contrato a firma entrante teria um lucro positivo. Como isto contradiz a nossa definição de equilíbrio, nós concluímos que o contrato oferecido ao trabalhador L em equilíbrio tem que ser $(w_L, t_L) = (\theta_L, 0)$.

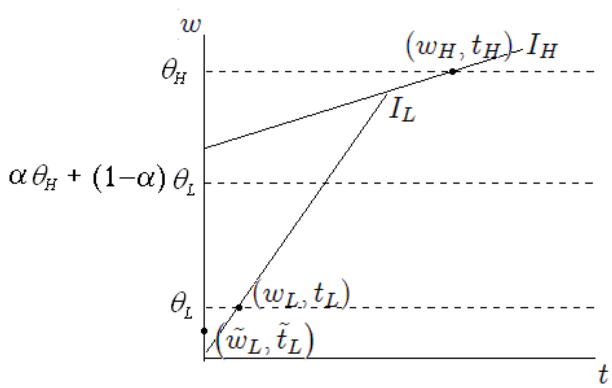

Figura 23.4: Em equilíbrio, $t_L = 0$.

‖

Proposição 23.6. *Em equilíbrio,* $(w_H, t_H) = \left(\theta_H, \frac{\theta_H - \theta_L}{c_L}\right)$.

Demonstração da Proposição. Nós já sabemos que o contrato oferecido ao agente do tipo L em equilíbrio é $(w_L, t_L) = (\theta_L, 0)$. Para que os agentes do tipo L aceitem tal contrato, é necessário que eles considerem tal contrato pelo menos tão bom quanto o contrato oferecido ao agente do tipo H. Ou seja, é necessário que

$$\theta_L \geq \theta_H - c_L t_H.^{23.3}$$

Isolando t_H na desigualdade acima nós obtemos que $t_H \geq \frac{\theta_H - \theta_L}{c_L}$. Suponha que $t_H > \frac{\theta_H - \theta_L}{c_L}$. Neste caso, uma firma entrante poderia oferecer um contrato $\left(\tilde{w}_H, \tilde{t}_H\right)$ em que $\tilde{t}_H = \frac{\theta_H - \theta_L}{c_L}$ e $\theta_H - c_H\left(t_H - \tilde{t}_H\right) < \tilde{w}_H < \theta_H$ (ver figura 23.5). Observe que

$$\begin{aligned} \theta_L &= \theta_H - c_L \tilde{t}_H \\ &> \tilde{w}_H - c_L \tilde{t}_H. \end{aligned}$$

Portanto tal contrato não atrairia agentes do tipo L. Por outro lado,

$$\begin{aligned} w_H - c_H t_H &= \theta_H - c_H t_H \\ &= \theta_H - c_H\left(t_H - \tilde{t}_H\right) - c_H \tilde{t}_H \\ &< \tilde{w}_H - c_H \tilde{t}_H. \end{aligned}$$

Portanto, tal contrato atrairia os agentes do tipo H e a firma entrante obteria lucro positivo com ele. Nós concluímos que em equilíbrio o contrato ofererecido ao trabalhador do tipo H tem que ser $(w_H, t_H) = \left(\theta_H, \frac{\theta_H - \theta_L}{c_L}\right)$.

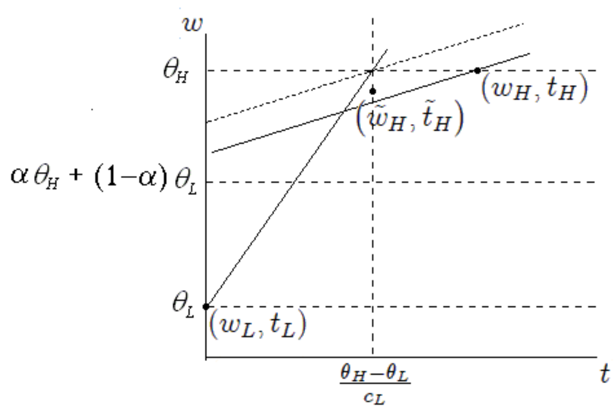

Figura 23.5: Em equilíbrio t_H não pode ser maior do que $\frac{\theta_H - \theta_L}{c_L}$.

‖

O conjunto de proposições acima caracteriza o equilíbrio com mercado de firmas competitivo que nós definimos acima, mas tal análise tem uma pequena falha. Embora nós tenhamos caracterizado o possível equilíbrio deste modelo, em nenhum momento nós mostramos que o equilíbrio existe. De fato, dependendo do valor dos parâmetros acima, é possível que o modelo não tenha equilíbrio. Nós abdicaremos da discussão de tais tipos de problemas aqui e trabalharemos sempre com a hipótese de que os parâmetros dos modelos são tais que o equilíbrio existe.

[23.3] Nós já estamos usando aqui o fato de que em equilíbrio $w_H = \theta_H$.

23.5 Perigo Moral

Até agora nós temos estudado situações em que o agente tem mais informações do que o principal. Agora, nós vamos mudar um pouco o foco e estudar uma situação em que, embora o principal conheça exatamente o tipo do agente, ele não consegue observar a ação que o agente toma. Mais especificamente, nós estudaremos o problema de uma firma que pretende contratar um gerente para implementar um projeto. O lucro de tal projeto é incerto, mas ele depende positivamente do esforço do gerente. Se o gerente se esforçar, a probabilidade do lucro ser alto é maior. O grande problema é que a firma só observa o lucro final, sem saber se o gerente se esforçou ou não. Tal situação é conhecida na literatura como uma situação de perigo moral. Nós estudaremos tal problema através de um modelo formal.

Uma empresa pretende contratar um gerente para a realização de um projeto. O retorno deste projeto é aleatório, mas depende da dedicação do gerente. O projeto pode ter um lucro alto, π_H ou um lucro baixo π_L. Se o gerente se esforçar, então a probabilidade do lucro ser alto é p_e. Se o gerente não se esforçar, a probabilidade do lucro ser alto é apenas p_n. A nossa hipótese será que $p_e > p_n > 0$. Se esforçar tem um custo c_e para o gerente. Se o gerente não se esforçar ele não tem custo algum. A empresa oferecerá um contrato que estipula o salário do gerente no caso de um lucro alto e no caso de um lucro baixo. Nós assumiremos que a empresa é neutra ao risco, portanto o seu problema será simplesmente maximizar o seu lucro (retorno do projeto menos salário do gerente) esperado. Para completar, nós assumiremos que a função de utilidade do gerente assume a forma simplificada:

$$u(w) - c,$$

em que w é o salário recebido pelo gerente, c é o custo do gerente, caso ele tenha se esforçado (se o gerente não se esforçar, então $c = 0$) e u é uma função contínua, estritamente crescente e estritamente côncava.[23.4] Dada tal função, o gerente preocupa-se em maximizar a sua utilidade esperada.

23.5.1 Esforço Observável

Vamos supor primeiro que a empresa consegue observar o esforço empregado pelo gerente. Neste caso, o problema da empresa terá duas partes. Primeiramente ela analisará qual o melhor contrato a oferecer no caso do gerente se esforçar e no caso dele não se esforçar. Feito isto, a firma compara o seu lucro nos dois casos e decide que contrato oferecer.

Suponha primeiro que a firma queira que o gerente se esforce. Neste caso, o seu problema é

$$\Pi_e = \max_{w_H, w_L} p_e (\pi_H - w_H) + (1 - p_e)(\pi_L - w_L)$$

sujeito a

$$p_e (u(w_H) - c_e) + (1 - p_e)(u(w_L) - c_e) \geq 0.$$

Não é difícil ver que na solução do problema acima a restrição obviamente tem que ser satisfeita com igualdade.[23.5] Podemos, portanto, escrever o lagrangeano do problema acima

[23.4] Isto implica que nós estamos assumindo que o gerente é estritamente avesso ao risco.

[23.5] Caso contrário, a firma poderia diminuir um pouco o salário do gerente em qualquer um dos casos e aumentar o seu lucro.

como

$$\mathcal{L} = p_e (\pi_H - w_H) + (1 - p_e)(\pi_L - w_L) + \lambda \left[p_e (u(w_H) - c_e) + (1 - p_e)(u(w_L) - c_e) \right].$$

As condições de primeira ordem do problema são

$$\begin{aligned} w_H &: \quad -p_e + \lambda p_e u'(w_H) = 0 \\ w_L &: \quad -(1 - p_e) + (1 - p_e) u'(w_L) = 0. \end{aligned}$$

As duas condições acima podem ser simplificadas para

$$\begin{aligned} w_H &: \quad \lambda u'(w_H) = 1 \\ w_L &: \quad \lambda u'(w_L) = 1. \end{aligned}$$

Isolando λ, ou dividindo uma equação pela outra nó obtemos

$$u'(w_H) = u'(w_L).$$

Como u é estritamente côncava, u' é estritamente decrescente. Portanto, a condição acima só pode ser verdade se $w_H = w_L$. Usando tal fato, nós aprendemos que a escolha ótima da firma será pagar um salário fixo w_e que satisfaça a seguinte condição:

$$u(w_e) = c_e.$$

Tal solução é bastante intuitiva. Como, por hipótese, a firma é neutra ao risco e o gerente é avesso, a firma assume todo o risco da situação. Isto, logicamente, aumenta o lucro esperado da firma, já que o gerente por ser avesso ao risco acaba aceitando abrir mão de um pouco de renda em troca da segurança de não ter incerteza sobre o seu salário. O problema da firma quando ela não quer que o gerente se esforce é similar. Neste caso ela resolve o problema

$$\Pi_n = \max_{w_H, w_L} p_n (\pi_H - w_H) + (1 - p_n)(\pi_L - w_L)$$

sujeito a

$$p_n u(w_H) + (1 - p_n) u(w_L) \geq 0.$$

Se nós resolvermos o problema acima, novamente nós vamos concluir que a melhor opção para a firma é pagar um salário fixo que satisfaça a restrição acima com igualdade. Portanto, o salário w_n que a firma paga neste caso satisfaz

$$u(w_n) = 0.$$

De posse destas duas opções de contrato, a firma vai escolher aquela que lhe der maior lucro. Ou seja, a firma vai comparar Π_e e Π_n e decidir se vale a pena pagar mais para o gerente se esforçar ou não.

23.5.2 Esforço Não Observável

Suponha agora que o esforço do gerente não seja observável. Agora a firma não pode mais estipular o nível de esforço no seu contrato de trabalho. Neste caso, o contrato de trabalho da firma vai ter que oferecer incentivos ao gerente para que ele realize o esforço desejado. Suponha primeiro que a firma não queira que o gerente se esforce. Neste caso o problema da firma pode ser escrito como

$$\Pi_n = \max_{w_H, w_L} p_n (\pi_H - w_H) + (1 - p_n)(\pi_L - w_L)$$

sujeito a

$$p_n u(w_H) + (1 - p_n) u(w_L) \geq 0$$

e

$$p_n u(w_H) + (1 - p_n) u(w_L) \geq p_e (u(w_H) - c_e) + (1 - p_e)(u(w_L) - c_e).$$

Ignoremos a segunda restrição por um instante. Neste caso o problema é o mesmo do caso em que o esforço é observável e já sabemos que a solução será dada por um salário fixo w_n que satisfaz

$$u(w_n) = 0.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} p_e (u(w_n) - c_e) + (1 - p_e)(u(w_n) - c_e) &= u(w_n) - c_e \\ &< 0 \\ &= u(w_n) \\ &= p_n u(w_n) + (1 - p_n) u(w_n). \end{aligned}$$

Portanto, o salário fixo w_n também satisfaz a segunda restrição do problema acima. Como ele era a escolha ótima num problema com menos restrições, logicamente ele é também a escolha ótima no problema com a restrição adicional. Nós concluímos, então, que se a firma não quiser que o gerente se esforce ela pode simplesmente oferecer ao gerente o mesmo contrato que ela ofereceria no caso de esforço observável. Tal solução é intuitivamente bastante razoável. Já que a firma não quer que o gerente se esforce, ela oferece ao gerente o mesmo contrato ruim que ela ofereceria ao gerente caso ela tivesse certeza de que ele não iria se esforçar. De posse daquele contrato o gerente tem que escolher se se esforça ou não. Mas como o seu salário não depende do desempenho da empresa, é claro que ele não tem nenhum incentivo para se esforçar.

Suponha agora que a firma queira que o gerente se esforce. Neste caso, ela resolve o seguinte problema:

$$\Pi_e = \max_{w_H, w_L} p_e (\pi_H - w_H) + (1 - p_e)(\pi_L - w_L)$$

sujeito a

$$p_e (u(w_H) - c_e) + (1 - p_e)(u(w_L) - c_e) \geq 0$$

$$p_e (u(w_H) - c_e) + (1 - p_e)(u(w_L) - c_e) \geq p_n u(w_H) + (1 - p_n) u(w_L).$$

É possível se demonstrar que na solução do problema acima as duas restrições têm que ser satisfeitas com igualdade. Tal demonstração é uma das questões da lista de exercícios. O problema acima simplifica-se para

$$\Pi_e = \max_{w_H, w_L} p_e (\pi_H - w_H) + (1 - p_e)(\pi_L - w_L)$$

sujeito a

$$p_e (u(w_H) - c_e) + (1 - p_e)(u(w_L) - c_e) = 0$$
$$p_e (u(w_H) - c_e) + (1 - p_e)(u(w_L) - c_e) = p_n u(w_H) + (1 - p_n) u(w_L).$$

Em geral, as duas restrições acima nos dão um sistema de equações em que podemos calcular os valores de w_H e w_L que solucionam o problema da firma quando ela quer que o gerente se esforce. Mesmo sem especificarmos a forma funcional da função de utilidade do gerente, nós podemos usar a última restrição para fazer algumas observações sobre o contrato ótimo oferecido pela firma. Observe que a segunda restrição pode ser reescrita como

$$u(w_H) - u(w_L) = \frac{c_e}{p_e - p_n}.$$

Como $\frac{c_e}{p_e - p_n} > 0$, nós aprendemos que $u(w_H) > u(w_L)$. Por hipótese, u é estritamente crescente, portanto, isto implica que $w_H > w_L$. Tal resultado é bastante intuitivo, já que através dele nós aprendemos que para induzir o gerente a se esforçar a firma é forçada a pagar um salário maior no caso de um lucro maior. Observe que isto não é uma questão de justiça e sim de incentivo. É possível generalizar o modelo acima para um modelo em que o gerente pode escolher diferços níveis de esforço e em que vários níveis de lucro são possíveis. No modelo com vários níveis de esforço possíveis, o resultado análogo ao acima diz que para induzir um certo nível de esforço a firma tem que oferecer um contrato de trabalho que pague mais para os níveis de lucro que são mais prováveis dado aquele nível de esforço. Por exemplo, se um esforço médio gera uma probabilidade alta de obter um lucro médio, então o contrato que induz um esforço médio pagará mais se o lucro obtido pela firma for médio.

23.6 Exercícios

Exercício 23.1. *Considere a seguinte variação do modelo de seleção adversa que estudamos nas notas de aula. Como nas notas de aula, existe uma certa quantidade de potenciais vendedores de carros cuja qualidade se distribui de maneira uniforme entre 0 e 1. O proprietário de um carro de qualidade q aceita vendê-lo por qualquer preço maior ou igual a q. Existe um número grande de potenciais compradores de carro. A nossa hipótese agora será que se a qualidade média (ou esperada) dos carros a venda for $\bar{q}$, então o preço que faz o potencial comprador indiferente entre comprar ou não um carro é $\alpha\bar{q}$, em que $1 < \alpha < 2$.*

(a) *Baseado na definição nas notas de aula, defina um equilíbrio competitivo para este modelo.*

(b) *Mostre que, independentemente do valor de α, o único equilíbrio competitivo do modelo acima é a situação em que nenhum carro é vendido.*

Exercício 23.2 (Sinalização com custo para agente produtivo)**.** *Considere o modelo de sinalização que estudamos nas notas de aula. A única diferença é que agora assumiremos que o agente do tipo H também tem que pagar um custo c_H para obter educação.*

(a) *Escreva a representação matricial do jogo com esta pequena modificação.*

(b) *Suponha que $\theta_H - c_H > \alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L$. Mostre que neste caso a solução do jogo não se altera. Isto é, mostre que as proposições 1 e 2 nas notas de aula continuam válidas.*

(c) *Suponha agora que $\theta_H - c_H < \alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L$. Mostre que, independentemente de outras hipóteses, o jogo pode ser resolvido por eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.*

Exercício 23.3 (Inexistência de Equilíbrio no Modelo de Filtragem)**.** *Considere o modelo de filtragem que nós estudamos nas notas de aula. Lembre-se que nós mostramos que caso o modelo tenha equilíbrio, então o contrato direcionado ao trabalhador do tipo L será $(w_L, t_L) = (\theta_L, 0)$ e o direcionado ao trabalhador do tipo H será $(w_H, t_H) = \left(\theta_H, \frac{\theta_H - \theta_L}{c_L}\right)$.*

(a) *Represente tal equilíbrio graficamente (está praticamente feito nas notas de aula).*

(b) *Suponha que $\alpha\theta_H + (1-\alpha)\,\theta_L > w_H - c_H t_H$. Represente este fato no gráfico que você fez na letra (a).*

(c) *Mostre que se a condição em (b) for verdade, existe um tipo de contrato que uma empresa entrante pode oferecer que atrai os dois tipos de trabalhadores e lhe dá um lucro estritamente positivo. Conclua que neste caso o modelo não tem equilíbrio.*

Exercício 23.4. *Considere o modelo de perigo moral nas notas de aula. Lá nós afirmamos que, no caso em que o esforço não é observável e a firma quer induzir o gerente a se esforçar, as duas restrições do problema da firma serão satisfeitas com igualdade. Mostre isto (principalmente mostrar que a segunda restrição tem que ser satisfeita com igualdade não é tão simples. Se você preferir, você pode escrever apenas a intuição do fato, sem se preocupar muito com os detalhes).*[23.6]

Exercício 23.5 (Perigo Moral com gerente neutro ao risco)**.** *Considere novamente o modelo de perigo moral que estudamos nas notas de aula, mas agora suponha que a função u do gerente é dada simplesmente por $u(w) = w$. Ou seja, o gerente também é neutro ao risco.*

(a) *Considere primeiro o caso em que o esforço é observável. Argumente que, tanto no caso em que a empresa quer induzir o gerente a se esforçar, quanto no caso em que ela não quer, o problema da firma tem infinitas soluções, todas elas dando o mesmo lucro esperado para a firma, é claro.*

[23.6] Ou você pode apenas ler a solução para pegar a intuição. Eu não faço questão que vocês saibam este exercício, mas pode ser divertido.

(b) *Suponha que no caso em que o esforço é observável, a melhor opção para a firma seja contratar o gerente e exigir que ele se esforce. Considere agora o caso em que a firma não pode observar o esforço, mas ela quer induzir o gerente a se esforçar. Uma das soluções do problema da firma no caso em que o esforço é observável ainda é uma solução para o problema agora. A solução admite a seguinte interpretação: A firma vende o projeto para o gerente e deixa ele tomar a decisão de se esforçar ou não. Escreva os detalhes desta solução (Dica1: Vender o projeto para o gerente simplesmente significa que o lucro da firma será constante, independentemente de o projeto ter lucro alto ou baixo. Dica2: Você não tem que fazer conta. Por favor, nada de Lagrangeano nem coisas do gênero. Apenas use a única solução do caso com esforço observável que dá um lucro constante para a firma.).*

Exercício 23.6. *Um investidor está pensando em comprar um campo de petróleo. A probabilidade de que existam 20 barris de petróleo no campo é igual a* $1/3$*, a probabilidade de que existam 40 é também* $1/3$*. Por fim, novamente com probabilidade igual a* $1/3$ *pode ser que existam* 120 *barris de petróleo no campo. O dono atual do campo de petróleo poderia obter um lucro de 1 real por barril. Ou seja, se o campo tivesse 40 barris o seu lucro seria de 40 reais. O investidor é um produtor mais eficiente e conseguiria obter um lucro de 1,50 reais por barril caso este comprasse o campo. Ou seja, se o campo tivesse 40 barris ele obteria um lucro de 60 reais. O dono do campo fez uma pesquisa intensa e sabe exatamente quantos barris existem lá, mas o investidor não sabe. O investidor é neutro ao risco, ou seja, sua única preocupação é maximizar o seu lucro esperado. Seja* p *o preço pelo qual o campo de petróleo está sendo vendido. Além disto, suponha que se o dono do campo de petróleo fosse indiferente entre vender ou não vender o campo pelo preço* p*, então ele venderia. Qual o máximo valor de* p *pelo qual um investidor inteiramente racional aceitaria comprar o campo?*

Capítulo 24

Externalidades e Bens Públicos[24.1]

24.1 Introdução

Dizemos que uma situação econômica envolve externalidades se as preferências ou escolhas de um ou mais agentes dependem diretamente das escolhas de consumo ou produção de outro agente. O exemplo mais clássico é o de dois companheiros de quarto em que apenas um deles fuma. Neste caso, o bem estar do agente não fumante depende diretamente da quantidade de cigarros que o seu companheiro de quarto fuma, embora esta não seja uma decisão de consumo sua.

Outro exemplo clássico é o da geração de poluição. Por exemplo, se uma empresa siderúrgica polui um rio ou mar, isto acaba atrapalhando a produção de peixes de uma possível indústria pesqueira que atue naquelas águas.

Os dois exemplos acima envolvem externalidades negativas, no sentido de que as escolhas de um agente acabam afetando negativamente o bem-estar do outro agente. É fácill, também, pensar em exemplos de externalidades positivas. Por exemplo, um produtor de maçãs sofreria uma externalidade positiva de um possível produtor de mel que se localizasse próximo a ele. Isto ocorreria porque as abelhas ajudariam a polinizar a plantação de maçãs.

24.2 Externalidades e Eficiência

24.2.1 Fumante e Não-fumante.

Suponha que tenhamos dois companheiros de quarto, digamos A e B e que apenas A fume. Suponha que A tenha preferências sobre sua riqueza e o quanto ele fuma. Formalmente, nós assumiremos que A tem uma função de utilidade $U^A(x_A, f_A)$ em que x_A representa a riqueza de A e f_A representa a quantidade de fumaça produzida por A. Por simplicidade, suponha que a quantidade de fumaça possa variar entre 0 e 1, em que 0 representa a situação quando A não fuma nada e 1 representa a situação em que A fuma a máxima quantidade de cigarros que ele consegue e o quarto fica totalmente tomado pela fumaça. Como A gosta de fumar, é razoável assumirmos que U^A é crescente em relação aos seus dois argumentos.

[24.1] A primeira parte destas notas de aula segue Varian (2006), capítulo 34. As figuras no texto também foram retiradas desta mesma fonte.

Olhemos agora para B. Embora B não fume, a fumaça gerada pelo cigarro de A lhe incomoda. A nossa hipótese será, então, que as preferências de B são representadas por uma função de utilidade $U^B(x_B, f_A)$. Observe que os argumentos da função de utilidade de B são a sua riqueza e a quantidade de fumaça produzida por A. É claro que no caso de B sua função de utilidade é crescente em relação ao primeiro argumento e decrescente em relação ao segundo.

Embora a interpretação seja um pouco diferente, nós podemos representar tais preferências em um diagrama no estilo da caixa de Edgeworth.

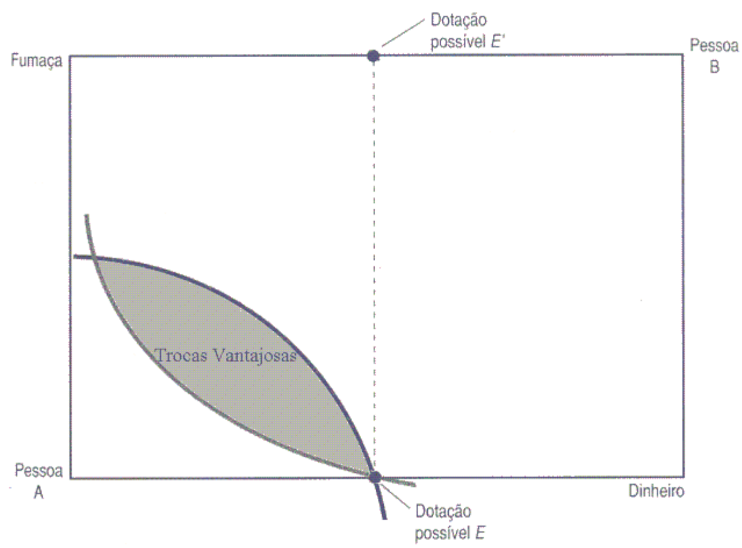

Figura 24.1: Representação Gráfica de Situações de Externalidade

Quando olhamos o diagrama na figura 24.1 sob sua orientação normal, nós vemos a representação das cestas de consumo do agente A. No eixo x nós temos a riqueza de A e no eixo y nós temos a quantidade de fumaça produzida por A. Por outro lado, para representarmos a situação sob o ponto de vista de B, nós visualizamos o eixo x da direita para esquerda (como fazíamos na caixa de Edgeworth tradicional), mas continuamos medindo a quantidade de fumaça de baixo para cima, já que neste caso ainda estamos falando da quantidade de fumaça produzida por A. Porém, note que o bem-estar de B aumenta quando o consumo de fumaça de A diminui, portanto, quando representamos as curvas de indiferenças de B sob esta perspectiva, acabamos obtendo um diagrama que é visualmente muito similar à caixa de Edgeworth.

Uma outra diferença com relação a representação de uma economia de trocas tradicional na caixa de Edgeworth é que a interpretação da dotação inicial é um pouco mais sutil. É claro que a dotação inicial de riqueza de ambos ainda corresponde exatamente à mesma interpretação que tínhamos antes, mas o que queremos dizer quando representamos uma dotação inicial de fumaça no diagrama da figura 24.1?

A interpretação aqui é que a dotação inicial de fumaça está relacionada com os direitos legais do fumante. Por exemplo, a dotação inicial E na figura 24.1 representa a situação em que o fumante não pode fumar nada, já a dotação E' representa a situação em que o fumante pode fumar o quanto quiser. Em situações reais, estas são as duas dotações iniciais mais comuns. Como já discutimos um pouco antes, a ausência de direitos de propriedade bem definidos é o que acaba gerando ineficiência em situações de externalidades.

Suponha que B tivesse direito de propriedade sobre o ar puro. Em termos da dotação inicial isto corresponderia a dotação inicial E. Dadas as curvas de indiferenças de ambos os agentes representadas na figura 24.1, é fácil ver que tal alocação não é eficiente. Ambos estariam melhor se pudessem escolher uma alocação na região entre as suas duas curvas de indiferenças. Ou seja, se o direito de propriedade sobre o ar puro fosse bem definido, A pagaria um pouco para B para que este lhe permitisse fumar um pouco. Pela figura, nós vemos que existem situações deste tipo que fariam ambos mais felizes.

De fato, as alocações eficientes em tal diagrama se parecem exatamente com as alocações eficientes na caixa de Edgeworth. Para que não existam mais trocas vantajosas para ambos, as curvas de indiferenças dos dois agentes têm que ser tangentes (ver figura 24.2). Como poderíamos atingir tais alocações eficientes? Quando estudamos economias de troca, nós vimos que uma opção seria usar um mecanismo de preços. Dada uma dotação inicial, qualquer preço que equilibre o mercado de fumaça, necessariamente tem que gerar uma alocação eficiente (novamente, ver figura 24.2). Mas é claro, tal mecanismo só poderia ser utilizado se o direito de propriedade sobre o ar puro, ou sobre a produção de fumaça, estivesse bem definido. Como na prática isto não acontece, geralmente numa situação como a descrita acima a possibilidade de trocas não existe. Tipicamente, a dotação inicial será a alocação final. Como não existe nenhuma razão para que a dotação inicial seja necessariamente eficiente, geralmente uma situação com externalidade como a acima, gerará uma alocação ineficiente no final.

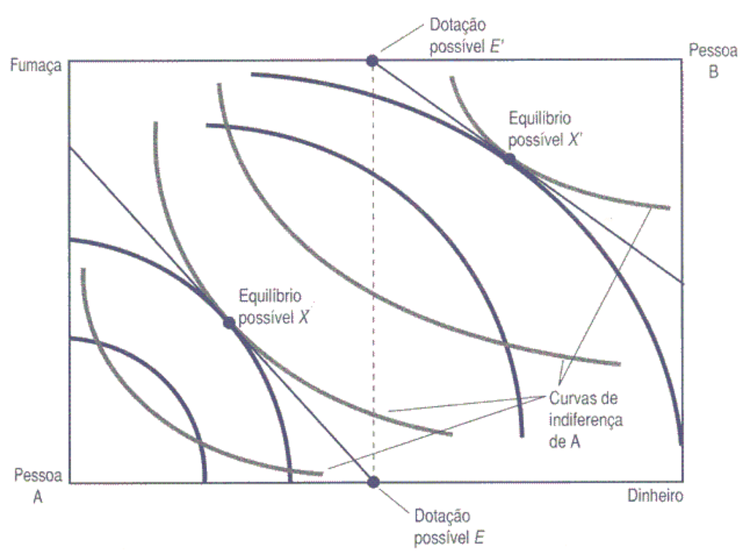

Figura 24.2: Alocações Eficientes

24.3 Externalidades na Produção

Suponha agora que tenhamos duas empresas. A empresa A produz aço e a B peixes. O processo de produção da empresa siderúrgica polui a água do mar ou rio onde a indústria pesqueira atua, gerando, portanto, uma externalidade negativa para a produção de peixes.

Formalmente, o custo de produção da empresa A será função de quanto ela produz de aço e quanta poluição ela gera no processo. Nós representaremos tal custo pela função $c^A(s,x)$, em que s é a quantidade de aço produzida por A e x é a quantidade de poluição gerada no processo. Por hipótese, nós assumiremos que c^A satisfaz

$$c_s^A(s,x) := \frac{dc^A(s,x)}{ds} > 0,$$

$$c_x^A(s,x) := \frac{dc^A(s,x)}{dx} < 0$$

e

$$\frac{dc_x^A(s,x)}{dx} = \frac{d^2c^A(s,x)}{dx^2} > 0.$$

Ou seja, o custo de A aumenta quanto mais aço ele produz e tal custo diminui com o nível de poluição gerado. A última condição diz que quanto maior o nível de poluição, menor é a diminuição marginal dos custos gerada por mais poluição.

Já o custo da empresa B será função da quantidade de peixes produzida, é claro, mas também será função do nível de poluição gerado pela firma A. Nós representaremos tal custo pela função $c^B(f,x)$, em que f representa a quantidade de peixes produzida e x é o nível de poluição gerado pela empresa A. Por hipótese, nós assumiremos que c^B satisfaz

$$c_f^B(f,x) := \frac{dc^B(f,x)}{df} > 0$$

e

$$c_x^B(f,x) := \frac{dc^B(f,x)}{dx} > 0.$$

Ou seja, o custo da empresa B aumenta com o aumento da produção de peixes e também aumenta conforme o nível de poluição gerado por A.

24.3.1 Equilíbrio de Mercado

Suponha que aço seja vendido por um preço p_s e peixe seja vendido por um preço p_f. Quais as condições que caracterizariam um equilíbrio de mercado nesta economia? Para responder tal pergunta temos que investigar os problemas das duas firmas acima. O problema da firma A seria

$$\max_{s,x} p_s s - c^A(s,x)$$

Como sempre, o problema de A é maximizar o seu lucro, que é dado por sua receita, $p_s s$, menos o seu custo, $c^A(s,x)$. Ou seja, A escolhe o quanto produzir e o quanto gerar de poluição de forma a maximizar o seu lucro. As condições de primeira ordem do problema acima são:

$$s : p_s = c_s^A(s,x)$$

e

$$x : 0 = c_x^A (s, x) .$$

Já o problema da firma B é

$$\max_f p_f f - c^B (f, x)$$

Observe que, embora o nível de poluição x afete os custos de produção de B, este não é uma variável de escolha para B. A decisão de o quanto poluir encontra-se completamente nas mãos de A. A condição de primeira ordem do problema acima é

$$f : p_f = c_f^B (f, x) .$$

Observe que as três condições acima estão no formato usual preço igual ao custo marginal. Note, no entanto, que o preço da poluição no nosso exemplo é zero. Intuitivamente, o preço zero para a poluição não parece socialmente apropriado. A poluição gerada por A gera um impacto negativo na tecnologia de produção da empresa B e um preço igual a zero ignora totalmente este impacto. Parece que um preço negativo para a poluição seria socialmente mais justo. De fato, em tal situação, usualmente esperaríamos que A poluísse demais gerando níveis de produção ineficientes na nossa economia.

24.3.2 Nível de Poluição Eficiente

Tentemos agora indentificar quais seriam os níveis de produção eficientes nesta economia. Numa economia com duas firmas, eficiência é caracterizada simplesmente pela maximização do lucro agregado. Ou seja, os níveis de produção eficientes têm que resolver o seguinte problema de maximização:

$$\max_{s,f,x} p_s s + p_f f - c^A (s, x) - c^B (f, x)$$

As condições de primeira ordem para o problema acima são:

$$s : p_s = c_s^A (s, x)$$

$$f : p_f = c_f^B (s, x)$$

e

$$x : c_x^A (s, x) = -c_x^B (f, x) .$$

Note que a única condição que muda é a relativa ao nível de poluição x. Como era de se esperar, a condição agora leva em conta o impacto marginal que o nível de poluição tem sobre os custos da empresa B. Mais do que isto, como por hipótese $-c_x^B (f, x) < 0$ e c_x^A é crescente em relação a x, nós vemos que existe uma tendência que o nível de poluição eficiente seja menor do que o que ocorreria num equilíbrio de mercado. Na próxima subseção estudaremos 3 possíveis soluções para o problema da externalidade neste caso.

24.3.3 Soluções para a Externalidade

Imposto sobre a Poluição

Suponha que o governo resolva impor um imposto t por unidade de poluição gerada pela firma A. O problema de A agora pode ser escrito como

$$\max_{s,x} p_s s - c^A(s,x) - tx$$

As condições de primeira ordem de tal problema são:

$$s : p_s = c_s^A(s,x)$$

e

$$x : c_x^A(s,x) = -t.$$

Mas então, se fizermos $t = c_x^B(f^e, x^e)$, em que f^e e x^e são os níveis eficientes que calculamos na subseção anterior, a solução para o problema da empresa A será a mesma do caso eficiente.

Um imposto como o acima é conhecido como imposto de Pigou. No entanto, tal imposto, embora teoricamente correto, tem poucas aplicações práticas. Para podermos corrigir o problema da externalidade usando um imposto, teríamos que conhecer primeiramente os níveis eficientes de poluição e peixes. Mesmo que conhecêssemos tais valores, faria pouco sentido usarmos um imposto para resolver o problema da externalidade. Seria mais fácil obrigarmos a firma A a gerar a quantidade eficiente de poluição sem precisar da complicação de um imposto.

Mercado para a Poluição

Nós já discutimos antes que uma possível maneira de eliminar o problema das ineficiências causadas por uma situação de externalidade no caso de uma externalidade de consumo era a atribuição de direitos de propriedade. No caso de uma externalidade de produção isto também é verdade. Suponha, que o direito de propriedade sobre a limpeza da água seja atribuído à indústria pesqueira. Agora, para que a empresa siderúrgica gere poluição ela tem que pagar para a indústria pesqueira.

Suponha que preço por unidade de poluição gerada seja q. O problema da firma A agora é

$$\max_{s,x} p_s s - c^A(s,x) - qx$$

As condições de primeira ordem do problema acima são:

$$s : p_s = c_s^A(s,x)$$

e

$$x : c_x^A(s,x) = -q.$$

Já o problema da firma B torna-se:

$$\max_{f,x} p_f f - c^B(f,x) + qx$$

Observe que agora o nível de poluição x é uma variável de escolha para o problema da firma B. Isto ocorre porque B tem que escolher que quantidade de poluição ela quer vender à firma A. As condições de primeira ordem do problema acima são:

$$p_f = c_f^B(f, x)$$

e

$$c_x^B(f, x) = q.$$

Juntando as condições de primeira ordem relativas a x nos problemas das duas firmas nós obtemos

$$c_x^A(s, x) = -c_x^B(f, x),$$

que é exatamente a condição que nós encontramos quando caracterizamos os níveis de produção eficientes.

Internalização da Externalidade

A terceira solução para a externalidade é o que chamamos internalização. Como vimos acima, os níveis de produção eficientes são exatamente os que maximizam o lucro agregado das duas firmas. Portanto, se a existência de externalidades no processo produtivo das duas empresas está gerando ineficiências, isto pode ser um sinal de que a estrutura do mercado não está perfeita. Na situação acima, por exemplo, seria melhor para as duas empresas se estas se unissem. Assim, de uma certa forma, nós podemos interpretar a existência de externalidades como uma deficiência na estrutura das empresas. Em vista disto, a solução mais simples parece ser a sua fusão. Observe que no momento que isto ocorre, o problema da nova empresa passa a ser exatamente o problema que resolvemos para identificar os níveis de produção eficientes. Isto é chamado de internalização da externalidade.

Na prática, o próprio mercado já fornece um sinal para a internalização da externalidade. Como a fusão de duas empresas, em uma situação de externalidades, gera um aumento do lucro agregado, é natural que as empresas percebam isto e coordenem suas ações.

24.4 Bens Públicos

Agora nós estudaremos um conjunto de problemas relacionados à existência do que chamaremos de bens públicos. Bens públicos são bens que satisfazem duas propriedades que serão definidas abaixo. Tais bens são não exclusivos e não rivais. Intuitivamente, bens públicos são bens como o ar puro. Ou seja, bens dos quais todos consomem a mesma quantidade e não se pode impedir que ninguém tenha acesso a eles.

Como escrevemos acima, bens públicos são caracterizados por duas propriedades. Primeiramente, nós dizemos que bens públicos são não exclusivos. Um bem é dito não exclusivo se é impossível impedir que indivíduos específicos tenham acesso a ele. Por exemplo, defesa nacional é um bem não exclusivo. Depois que o sistema de defesa está implementado, todos no país se beneficiam dele, tendo eles pago por isto ou não.

A segunda propriedade que caracteriza bens públicos é que estes são ditos não rivais. Um bem é dito não rival quando unidades adicionais do mesmo podem ser consumidas a um custo social marginal igual a zero. Por exemplo, o sinal de tv aberta é claramente um bem não rival. Depois que a rede de tv já está transmitindo um determinado programa o custo para que mais um telespectador capte o sinal é nulo.

Em geral as duas propriedades acima são bastante relacionadas. Muitos bens não exclusivos são também não rivais, mas existem excessões.

24.5 Quando Prover um Bem Público

Suponha que dois colegas de quarto estejam pensando em comprar uma tv. Note que podemos tratar a tv como um bem público.

Sejam w_1 e w_2 a riqueza de cada um deles, respectivamente. Chamemos de g_1 e g_2 quanto cada um deles se diz disposto a contribuir pela tv. Chamemos de x_1 e x_2 os gastos dos indivíduos com outros bens de consumo. A restrição orçamentária dos agentes é dada por

$$x_i + g_i = w_i,\ i = 1, 2.$$

A tv só será comprada quando $g_1 + g_2 \geq c$, em que c é o preço da tv. Os dois agentes têm funções de utilidades que são funções de quanto eles consomem e da existência ou não da tv. Formalmente, a utilidade do indivíduo i é dada por $u_i(x_i, G)$, em que $G = 0$ se a tv não for comprada e $G = 1$ se a tv for comprada.

Suponha que o indivíduo 2 não existisse. Quanto o indivíduo 1 estaria disposto a pagar pela tv neste caso? É fácil ver que o máximo valor que o indivíduo 1 aceitaria pagar pela tv satisfaz

$$u_1(w_1, 0) = u_1(w_1 - r_1, 1).$$

O valor r_1 acima é chamado de preço de reserva. O preço de reserva r_1 é o valor que faz o indivíduo 1 indiferente entre gastar toda a sua renda em consumo e gastar r_1 para ter a tv, podendo, neste caso, consumir apenas $w_1 - r_1$. Similarmente, o preço de reserva do indivíduo 2 é definido por

$$u_2(w_2, 0) = u_2(w_2 - r_2, 1).$$

24.5.1 Eficiência

Suponha que $r_1 + r_2 > c$. Nós podemos fazer algumas observações:

Primeiramente, suponha que a tv esteja sendo comprada, $g_1 + g_2 = c$ e $g_i \leq r_i$, $i = 1, 2$. Nós podemos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 24.1. *Tal alocação é eficiente no sentido de Pareto.*

Demonstração da Proposição. As utilidades dos agentes com a alocação acima são $u_1(w_1 - g_1, 1)$ e $u_2(w_2 - g_2, 1)$. Observe que, pra $i = 1, 2$,

$$u_i(w_i - g_i, 1) \geq u_i(w_i - r_i, 1) = u_i(w_i, 0).$$

Portanto, não comprar a tv não é uma melhora de Pareto em relação à alocação acima. Mas em qualquer alocação em que a tv esteja sendo comprada um dos consumidores estará pagando mais pela tv do que na alocação acima. Tal consumidor logicamente estará numa situação pior. Isto mostra que é impossível melhorar a situação de um dos consumidores sem piorar a do outro e, portanto, a alocação acima é eficiente no sentido de Pareto. ||

Considere agora a alocação em que a tv não é comprada. Nós podemos demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 24.2. *A alocação em que a tv não é comprada não é eficiente no sentido de Pareto.*

Demonstração da Proposição. Quando a televisão não é comprada a utilidade dos consumidores é $u_1(w_1, 0)$ e $u_2(w_2, 0)$. Considere quaisquer g_1 e g_2 tais que $g_1 + g_2 = c$ e $g_2 = r_2$. Por construção,

$$u_1(w_1 - g_1, 1) > u_1(w_1 - r_1, 1) = u_1(w_1, 0).$$

Portanto, o indivíduo 1 estará melhor neste caso do que quando a tv não é comprada. Além disto:

$$u_2(w_2 - g_2, 1) = u_2(w_2 - r_2, 1) = u_2(w_2, 0).$$

Portanto o indivíduo 2 não estará pior neste caso. Concluímos que não comprar a tv não é eficiente no sentido de Pareto. ||

24.5.2 O que acontecerá na prática?

Acima nós vimos que quando $r_1 + r_2 > c$ é eficiente comprar a tv. Mas os dois jogadores realmente tomarão a decisão de comprar a tv?

Tal situação pode ser descrita como um jogo em que os jogadores escolhem a sua contribuição g_i. Tentemos encontrar os equilíbrios de Nash de tal jogo.

Suponha primeiro que $r_1 + r_2 > c$, mas $r_1 < c$ e $r_2 < c$. Neste caso, nós podemos fazer duas observações:

Observação 24.1. O perfil $(g_1, g_2) = (0, 0)$ é um equilíbrio de Nash do jogo.

Demonstração da Observação. Quando o indivíduo 1 joga $g_1 = 0$, como $r_2 < c$, a melhor resposta para o indivíduo 2 é jogar $g_2 < c$. Portanto, $g_2 = 0$ é uma melhor resposta para o indivíduo 2 contra $g_1 = 0$. O mesmo raciocínio mostra que $g_1 = 0$ é uma melhor resposta para o indivíduo 1 quando o indivíduo 2 joga $g_2 = 0$. Ou seja, $(g_1, g_2) = (0, 0)$ é um equilíbrio de Nash do jogo. ||

Observação 24.2. Qualquer perfil (g_1, g_2) em que $g_1 + g_2 = c$, $g_1 \leq r_1$ e $g_2 \leq r_2$ é equilíbrio de Nash do jogo.

Demonstração da Observação. Como $g_1 + g_2 = c$, quando o indivíduo 1 joga g_1 comprar a tv pagando g_2 é uma melhor resposta para o indivíduo 2 do que não comprá-la. Além disto, é óbvio que comprar a tv pagando apenas g_2 é melhor do que comprá-la pagando um preço maior do que g_2. O mesmo raciocínio mostra que g_1 é uma melhor resposta contra g_2. Nós concluímos que (g_1, g_2) é equilíbrio de Nash do jogo. ||

As duas observações acima mostram que tanto uma situação em que a tv não é comprada, quanto situações em que a tv é comprada são compatíveis com o nosso conceito de equilíbrio para a modelagem acima. Na verdade, o mais apropriado para estudar a situação acima seria incluí-la em um modelo de barganha. Porém, tais modelos estão fora do escopo do presente curso.

24.5.3 Problema do carona

Suponha agora que $r_1 > c$ e $r_2 < c$. Nós podemos mostrar que a seguinte observação é verdade:

Observação 24.3. O perfil$(g_1, g_2) = (c, 0)$ é equilíbrio de Nash do jogo.

Demonstração da Observação. Como $g_1 = c$, a tv vai ser comprada independentemente da contribuição do indivíduo 2. Neste caso, é claro que a melhor resposta para o indivíduo 2 é jogar $g_2 = 0$. Se $g_2 = 0$, então, sob o ponto de vista do indivíduo 1, a tv só será comprada se o indivíduo 1 jogar um valor $g_1 \geq c$. Como $g_1 = c$ é suficiente para que a tv seja comprada, é claro que a única melhor resposta do indivíduo 1 é jogar $g_1 = c$. Nós concluímos que $(g_1, g_2) = (c, 0)$ é equilíbrio de Nash do jogo. ‖

No equilíbrio de Nash acima acontece o que chamamos em economia de situação de carona. Como o indivíduo 1 tem uma propensão grande a comprar a tv, o indivíduo 2 aproveita-se disto para não contribuir com nada. Em problemas envolvendo bens públicos é comum aparecerem situações de carona.

Apenas para que a análise aqui fique completa, note que o equilíbrio acima é apenas um dos possíveis equilíbrios. O jogo possui equilíbrios em que o indivíduo 2 também contribui para a compra da tv.

24.6 Subprovisão de Bens Públicos

Suponha que dois agentes tenham que decidir quanto gastar em um determinado bem público. As funções de utilidades dos dois agentes são dadas por

$$U(x_i, G) = x_i + v(G),$$

em que x_i é quanto o agente gasta em bens privados e $G := g_1 + g_2$ é quanto os agentes gastam no bem público. Nós trabalharemos com as hipóteses de que v é estritamente crescente e estritamente côncava.

24.6.1 Eficiência

Sejam w_1 e w_2 as rendas dos dois indivíduos. Como os agentes têm preferências quasi-lineares, as alocações eficientes resolvem o seguinte problema:

$$\max_{x_1, x_2, g_1, g_2} x_1 + v(g_1 + g_2) + x_2 + v(g_1 + g_2)$$

sujeito a

$$x_1 = w_1 - g_1$$

e

$$x_2 = w_2 - g_2.$$

Utilizando as duas restrições, nós podemos escrever o problema de forma simplificada como:

$$\max_{g_1, g_2} w_1 - g_1 + v\left(g_1 + g_2\right) + w_2 - g_2 + v\left(g_1 + g_2\right)$$

As condições de primeira ordem para o problema acima são:

$$\begin{aligned} g_1 &: v'\left(g_1 + g_2\right) = \frac{1}{2} \\ g_2 &: v'\left(g_1 + g_2\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Seja G^e tal que $v'\left(G^e\right) = \frac{1}{2}$. O que as condições acima nos dizem é que qualquer alocação em que a contribuição agregada para o bem público seja G^e, isto é, qualquer alocação em que $g_1 + g_2 = G^e$, é eficiente. Nós chamaremos G^e de nível de provisão eficiente do bem público.

24.6.2 Nível do bem público em equilíbrio

Suponha agora que os dois indivíduos estejam agindo de forma não coordenada. Neste caso, o conceito de solução apropriado é o de equilíbrio de Nash. Suponha que o indivíduo 2 esteja contribuindo com um nível genérico g_2 do bem público. A melhor resposta de 1 neste caso resolve o problema:

$$\max_{x_1, g_1} x_1 + v\left(g_1, g_2\right)$$

sujeito a

$$x_1 = w_1 - g_1$$

Usando a restrição nós podemos simplificar o problema acima para:

$$\max_{g_1} w_1 - g_1 + v\left(g_1, g_2\right)$$

A condição de primeira ordem do problema acima é

$$v'\left(g_1 + g_2\right) = 1.$$

Nós podemos repetir a mesma análise para o indivíduo 2 para concluir que, dada uma estratégia genérica, g_1, para o indivíduo 1, a melhor resposta do indivíduo 2 satisfaz $v'\left(g_1 + g_2\right) = 1$. Seja G^* tal que $v'\left(G^*\right) = 1$. A análise acima mostra que qualquer perfil $\left(g_1, g_2\right)$ em que $g_1 + g_2 = G^*$ é equilíbrio de Nash do jogo. Nós chamamos G^* de nível de provisão de equilíbrio do bem público. Como v é estritamente côncava, v' é uma função estritamente decrescente. Isto implica que $G^e > G^*$. Ou seja, em equilíbrio, a quantidade provida do bem público é menor do que o nível eficiente. A intuição para isto vem novamente do problema do carona. Como estamos trabalhando com um bem público, ambos os indivíduos contribuem com uma quantidade pequena do bem para tentar fazer com que o outro indivíduo contribua com um pouco mais. Em outras palavras, um indivíduo tenta pegar carona na contribuição do outro e isto acaba fazendo com que o nível de contribuição que os dois dão seja pequeno.

24.7 Exercícios

Exercício 24.1. *Suponha que dois agentes estão decidindo o quão rápido dirigir. O agente i escolhe a velocidade* x_i *e recebe utilidade* $u(x_i)$ *por isto. Por hipótese,* $u'(x_i) > 0$ *e* $u''(x_i) < 0$. *Contudo, quanto mais rápido os agentes dirigirem, maior é a probabilidade de eles terem um acidente. Suponha que os agentes podem escolher apenas velocidades entre 0 e 1/2. Neste caso, a probabilidade de um acidente será dada por* $p(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. *Para completar a descrição das utilidades dos agentes, suponha que em caso de acidente o agente i tenha um prejuízo* $c_i > 0$. *Finalmente, a nossa hipótese é que os agentes maximizam a sua utilidade esperada e que as suas funções de utilidade (Bernoulli) são quasi-lineares em relação ao dinheiro. Isto é, a utilidade do agente i é dada por*

$$\begin{aligned} U^i(x_1, x_2) &= p(x_1, x_2)(u(x_i) - c_i) + (1 - p(x_1, x_2))\, u(x_i) \\ &= u(x_i) - p(x_1, x_2)\, c_i. \end{aligned}$$

(a) *Encontre as condições que caracterizam as velocidades que maximizam a soma das utilidades dos dois agentes (velocidades eficientes).*

(b) *A situação acima está no formato de um jogo em que as estratégias dos jogadores é escolher* x_i. *Encontre as condições que caracterizam um equilíbrio de Nash para tal jogo e mostre que os jogadores dirigirão mais rápido do que as velocidades eficientes.*

(c) *Suponha agora que em caso de acidente o agente i receba uma multa* t_i. *De quanto deve ser a multa cobrada de cada agente para que eles escolham os níveis de velocidade eficientes?*

Exercício 24.2. *Suponha que uma firma produza um determinado produto x que é vendido por um preço p. Ao produzir x a firma gera uma externalidade negativa h. O custo de produção da firma é representado por uma função* $c(x, h)$, *em que*

$$c_x(x, h) = \frac{dc(x, h)}{dx} > 0$$

e

$$c_h(x, h) = \frac{dc(x, h)}{dh} < 0.$$

A externalidade afeta um único consumidor cuja utilidade é dada por $w - \phi(h)$, *em que w é a riqueza do consumidor, que nós consideraremos aqui como fixa.*

(a) *Como a função de utilidade do consumidor é linear em relação a sua renda, o conceito apropriado para determinar os níveis socialmente ótimos de produção neste caso é maximizar a soma da utilidade do consumidor mais o lucro da firma. Escreva tal problema de maximização e determine as condições de primeira ordem que caracterizam sua solução.*

(b) *Escreva o problema da firma quando ela tem como objetivo maximizar o seu lucro e encontre as condições de primeira ordem que caracterizam a solução de tal problema.*

(c) *Suponha agora que o governo queira colocar um imposto sobre o nível de produção do bem x. Mostre que com tal tipo de imposto não é possível fazer com que a firma produza as quantidades eficientes de x e h. Mostre que com um imposto diretamente sobre a produção de h isto é possível.*

(d) *Mostre, no entanto, que se h for sempre produzido como uma proporção fixa de x, isto é, $h(x) = \alpha x$, para algum $\alpha > 0$, então um imposto sobre a produção de x pode restituir a eficiência.*

Exercício 24.3 (competição x cooperação). *Um dono de restaurante pode escolher entre dois esquemas de incentivos para gerenciar os seus dois garçons. Ele pode dividir as mesas entre os garçons de modo que cada um deles atenda somente às mesas que lhe são designadas, ou ele pode permitir que ambos cooperem e atendam a todas as mesas. No primeiro caso, quando o primeiro garçom coloca um esforço x e o segundo um esforço y, o lucro do estabelecimento é igual a $10x+10y$. Além disto, o primeiro garçom recebe uma gratificação igual a $\frac{1}{10} * 10x = x$ e o segundo recebe uma gratificação igual a $\frac{1}{10} * 10y = y$. Ou seja, ambos os garçons recebem uma gratificação igual a 10% do que eles venderam. No segundo caso, quando os garçons cooperam, existe uma externalidade positiva entre eles e o lucro do estabelecimento acaba sendo igual a $10x + 10y + \theta 10xy$, em que θ é um parâmetro. Neste caso, cada garçom recebe uma gratificação igual a 5% do lucro do estabelecimento. Ou seja, a gratificação de cada garçom é dada por $\frac{1}{20}(10x + 10y + \theta 10xy) = \frac{x+y+\theta xy}{2}$. Finalmente, em ambos os casos, quando o primeiro garçon faz um esforço x, este paga um custo igual a x^2. Similarmente, quando o segundo garçon faz um esforço y este paga um custo igual a y^2. A utilidade de cada garçon é dada pela diferença entre o que ele recebe de gratificação e o custo que ele paga pelo esforço. Ou seja, no primeiro caso a utilidade do primeiro garçom é $x - x^2$ e no segundo é $\frac{x+y+\theta xy}{2} - x^2$. A utilidade do segundo garçom tem um formato análogo.*

(a) *Suponha que o dono do restaurante implemente o primeiro esquema de incentivos. Quanto cada garçom se esforçará e qual será o lucro do restaurante neste caso?*

(b) *Suponha agora que o dono do restaurante implemente o segundo esquema de incentivos. Quanto cada garçom se esforçará agora? Calcule o lucro do restaurante para $\theta = 0, 1$ e 2, e diga que esquema de incentivos é melhor (do ponto de vista do dono do restaurante) em cada caso (Dica: A situação agora é estratégica e vocês já sabem que tipo de ferramenta tem que ser usada para modelar situações estratégicas).*

Exercício 24.4 (Provimento de bem público). *Suponha que dois países vizinhos estejam decidindo o quanto investir em um determinado bem público G. As funções de utilidade dos países são dadas por $U(x_i, G) := x_i + 2\sqrt{G}$, em que x_i é o quanto o país i gasta em consumo privado e $G := g_1+g_2$ é a soma das contribuições dos dois países para o bem público. Suponha que o país 1 tenha uma renda igual a w_1 e o país 2 tenha uma renda igual a w_2. Nós temos que ter $w_i = x_i + g_i$, para $i = 1, 2$.*

(a) *Calcule a quantidade eficiente de investimento agregado no bem público. Isto é, a quantidade que maximiza a soma das utilidades dos dois países. Atenção! Existem várias combinações de g_1 e g_2 que estão relacionadas a alocações eficientes, mas a soma $g_1 + g_2$ é a mesma em todas elas.*

(b) *Suponha agora que os dois países estejam agindo de forma não coordenada. Quanto será produzido do bem público? Agora, várias combinações de* g_1 *e* g_2 *serão equilíbrios de Nash do jogo, mas em todos esses equilíbrios a soma* $g_1 + g_2$ *é a mesma.*

Capítulo 25

Implementação de Projeto Público

25.1 Exercício Resolvido

Exercício 25.1. *Considere o seguinte problema. Uma associação de moradores está estudando se constrói ou não uma ponte. O custo de construção da ponte é* $c > 0$*. Cada um dos* N *moradores associa à ponte um valor* $v_i > 0$*. Embora a associação de moradores não tenha como descobrir os* v_i*'s dos diversos moradores, ela sabe que só é socialmente desejável construir a ponte se* $\sum_{i=1}^{N} v_i \geq c$*. Além disto, a associação não conta com recursos externos, portanto, caso a opção seja por construir a ponte, os recursos têm que vir dos próprios moradores. O problema da associação é desenvolver um mecanismo que a permita descobrir se* $\sum_{i=1}^{N} v_i \geq c$ *e além disto pague os custos da ponte caso a opção seja por construí-la.*

(a) *Considere o seguinte mecanismo. Cada jogador anuncia um valor* s_i*. Caso* $\sum_{i=1}^{N} s_i \geq c$ *a ponte é construída e cada indivíduo i contribui com exatamente* s_i*. Discuta por que tal mecanismo não é muito bom. Como os moradores se comportariam diante de tal mecanismo?*

(b) *Considere um outro mecanismo, então. Cada jogador anuncia um valor* s_i*. Caso* $\sum_{i=1}^{N} s_i \geq c$ *a ponte é construída e cada indivíduo i contribui com exatamente* $\frac{c}{N}$*. Discuta por que tal mecanismo não é muito bom. Como os moradores se comportariam diante de tal mecanismo?*

(c) *Finalmente, considere o mecanismo de Clarke. Cada jogador anuncia um valor* s_i*. Caso* $\sum_{i=1}^{N} s_i \geq c$ *a ponte é construída e cada indivíduo i contribui com* $\frac{c}{N}$*. Além disto, os indivíduos pivotais pagam uma multa caso a ponte seja construída ou não. Definamos primeiro o que é um indivíduo pivotal. Dado um anúncio* s_i *do jogador* i*, nós definimos o benefício líquido anunciado pelo jogador* i *como* $\tilde{s}_i = s_i - \frac{c}{N}$*. Observe que dizer que* $\sum_{i=1}^{N} s_i \geq c$ *é o mesmo que dizer que* $\sum_{i=1}^{N} \tilde{s}_i \geq 0$*. Isto motiva a seguinte definição:*

Definição 25.1. O indivíduo i é dito pivotal se $\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{N} \tilde{s}_j < 0$ ou $\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j < 0$ e $\sum_{j=1}^{N} \tilde{s}_j \geq 0$. Intuitivamente, i é pivotal se o seu anúncio muda a opinião social a respeito da ponte.

Caso o indivíduo i seja pivotal, ele paga uma multa $t_i = \left|\sum_{j\neq i} \tilde{s}_j\right|$. *Observe que mesmo quando a ponte não é construída um indivíduo pivotal tem que pagar multa. Mostre que ao se deparar com tal mecanismo, anunciar um valor* $s_i = v_i$ *é uma estratégia fracamente dominante para o jogador i. Isto é, independentemente do anúncio dos outros indivíduos, se i anunciar* $s_i = v_i$ *o seu ganho é garantidamente maior ou igual ao ganho que ele teria se anunciasse qualquer outro valor* s_i.

(d) *Mostre que o mecanismo é superavitário. Isto é, mostre que a soma do valor dos pagamentos de todos os agentes é maior ou igual a c, no caso em que a ponte é construída, e é maior ou igual a zero, no caso em que a ponte não é construída. Note que as duas desigualdades anteriores podem ser estritas, dependendo do caso.*

(e) *Argumente que a alocação final obtida por tal mecanismo não é eficiente no sentido de Pareto, mas a medida que o número de indivíduos aumenta este problema torna-se menor, podendo até mesmo desaparecer.*

Solução.

(a) O problema com tal mecanismo é que o quanto o morador i paga pela construção da ponte é uma função direta do seu anúncio. Por causa disto, é de se esperar que os moradores anunciem valores menores do que o valor que eles realmente atribuem à ponte. Eles fazem isto na esperança de que as constribuições dos outros moradores já sejam suficientes para a construção da ponte. É o velho problema do carona. Os moradores tentam pegar carona na contribuição dos outros. Tudo isto fará com que em certas situações em que é socialmente vantajoso construir a ponte esta não seja construída.

(b) Na verdade, agora o problema é exatamente o contrário do que ocorria na situação anterior. Note que agora o anúncio de cada morador só afeta a probabilidade da ponte ser construída ou não, mas não muda o quanto este teria que pagar no caso da construção da ponte. Considere um indivíduo i tal que $v_i < \frac{c}{N}$. Para este indivíduo a construção da ponte é um mal negócio, portanto, ele vai fazer tudo ao seu alcance para impedir a construção da mesma. Como a única coisa que ele pode fazer é anunciar s_i, ele anunciará o menor s_i possível. Digamos $s_i = 0$. Por outro lado, considere um indivíduo j tal que $v_j > \frac{c}{N}$. Para este indivíduo a construção da ponte é um bom negócio, portanto, ele vai fazer tudo ao seu alcance para que esta seja construída. No caso, ele anunciará o maior valor s_j possível. Não é difícil imaginar que tais considerações, em muitos casos, levarão a ineficiências. Ou a ponte será construída quando não é socialmente ótimo fazê-lo ou a ponte não será construída quando na verdade seria melhor socialmente construí-la.

(c) Observe, primeiramente, que em qualquer situação o anúncio s_i do indivíduo i não afeta diretamente o valor do seu pagamento.[25.1] O único efeito do anúncio s_i é fazer o indivíduo i pivotal ou não. Mais precisamente, dado $\sum_{j\neq i} \tilde{s}_j$, só existem dois possíveis

[25.1] Note que $t_i = \left|\sum_{j\neq i} \tilde{s}_j\right|$. Ou seja, o valor s_i não entra no cálculo de t_i.

ganhos para o jogador i, um ganho no caso de ele ser pivotal e outro no caso de ele não ser pivotal. Estas observações facilitam a nossa comparação do ganho que i obteria anunciando $s_i = v_i$ com os outros possíveis, anúncios, já que só precisamos olhar para uma comparação.

Precisamos analisar 4 casos. Comecemos com o caso $\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j \geq 0$ e $\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j + v_i - \frac{c}{N} < 0$. Neste caso, quando i anuncia $s_i = v_i$, i é pivotal, a ponte não é construída e seu ganho é dado por

$$-t_i = -\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j.$$

Pela discussão anterior, nós sabemos que só precisamos comparar o ganho acima com o ganho que i obtém quando este não é pivotal. Neste caso a ponte é construída e o ganho de i é

$$v_i - \frac{c}{N}.$$

Mas por hipótese,

$$\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j + v_i - \frac{c}{N} < 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$-\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j > v_i - \frac{c}{N}.$$

Portanto, escolher $s_i = v_i$ é realmente uma melhor escolha para i neste caso.

Suponha agora que $\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j \geq 0$ e $\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j + v_i - \frac{c}{N} \geq 0$. Neste caso, quando i anuncia $s_i = v_i$, i é não é pivotal, a ponte é construída e seu ganho é dado por

$$v_i - \frac{c}{N}.$$

Por outro lado, se i anunciasse um valor que o fizesse ser pivotal a ponte não seria construída e o seu ganho seria

$$-t_i = -\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j.$$

Mas por hipótese,

$$\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j + v_i - \frac{c}{N} \geq 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$v_i - \frac{c}{N} \geq -\sum_{j \neq i} \tilde{s}_j.$$

Portanto, escolher $s_i = v_i$ é realmente uma melhor escolha para i neste caso.

Agora consire o caso em que $\sum_{j\neq i}\tilde{s}_j < 0$ e $\sum_{j\neq i}\tilde{s}_j + v_i - \frac{c}{N} < 0$. Neste caso, quando i anuncia $s_i = v_i$, i não é pivotal, a ponte não é construída e o seu ganho é igual a 0. Por outro lado, se i anunciar um valor que o faça pivotal o seu ganho é

$$\sum_{j\neq i}\tilde{s}_j + v_i - \frac{c}{N}.$$

Como, por hipótese, este ganho é menor do que 0, nós concluímos que anunciar $s_i = v_i$ é realmente uma melhor escolha para i neste caso.

Finalmente, considere o caso em que $\sum_{j\neq i}\tilde{s}_j < 0$ e $\sum_{j\neq i}\tilde{s}_j + v_i - \frac{c}{N} \geq 0$. Neste caso, anunciar $s_i = v_i$ faz i pivotal e implica na construção da ponte. O seu ganho é dado por

$$\sum_{j\neq i}\tilde{s}_j + v_i - \frac{c}{N}.$$

Por hipótese, este ganho é maior ou igual a 0 que seria o ganho de i caso este fizesse um anúncio que não o tornasse pivotal. Nós novamente concluímos que anunciar $s_i = v_i$ é uma melhor escolha para i neste caso. Como este era o último caso que faltava ser testado, nós concluímos que anunciar $s_i = v_i$ é de fato fracamente dominante para i.

(d) Se a ponte é construída todos os agentes pagam $\frac{c}{N}$ e, além disto, os agentes pivotais pagam mais a multa t_i. Como a soma das parcelas $\frac{c}{N}$ já cobre o custo da ponte, o pagamento adicional feito pelos possíveis indivíduos pivotais torna a arrecadação com o mecanismo potencialmente superior aos custos. Se a ponte não for construída não existe custo algum e os moradores não têm que pagar as parcelas $\frac{c}{N}$. Mas mesmo neste caso os possíveis indivíduos pivotais ainda têm que pagar multa, o que novamente torna a arrecadação com o mecanismo potencialmente superior aos custos, que neste caso são iguais a zero.

(e) No mecanismo, o incentivo para as pessoas anunciarem o seu verdadeiro valor vem das multas que estas têm que pagar caso sejam pivotais. Como vimos acima, isto faz com que potencialmente o valor dos pagamentos supere o custo total da ponte. Por esta razão, embora o mecanismo gere a escolha socialmente eficiente relativamente a construir ou não a ponte, a alocação final não é necessariamente eficiente, já que um pouco de dinheiro pode estar sendo descartado. Com um número grande de indivíduos a probabilidade de que alguém seja pivotal diminui bastante. Na verdade, na maioria das vezes, com um número grande de indivíduos é provável que ninguém seja pivotal. Como somente indivíduos pivotais pagam multa, com um número grande de indivíduos é provável que o mecanismo gere uma alocação eficiente.[25.2] ‖

[25.2] Isto não significa que o mecanismo é perfeito. Na verdade, a análise feita aqui ignora um problema grave com relação à implementação de mecanismos na prática. No nosso exemplo nós estamos assumindo que todas as pessoas são obrigadas a participar do mecanismo, mas na vida real garantir isto pode ser complicado. Nem todos os moradores precisam ser membros da associação e, mesmo se todos forem, pode ser difícil forçar uma pessoa que não tem interesse na construção da ponte a participar do mecanismo. Para levar em conta tal complicação prática nós precisaríamos incorporar uma restrição de participação ao nosso mecanismo, mas agora nós já estamos nos distanciando muito dos nossos modestos objetivos aqui. Vocês estudarão tais considerações mais a fundo se algum dia fizerem um curso de desenho de mecanismos.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

Kreps, D. M. (1988). *Notes on the theory of choice.* Underground classics in economics. Colorado: Westview Press Inc.

Mandler, M., P. Manzini, and M. Mariotti (2012). A million answers to twenty questions: Choosing by checklist. *Journal of Economic Theory 147*(1), 71–92.

Varian, H. (2006). *Microeconomia - Princípios Básicos: Uma Abordagem Moderna.* tradução da sétima edição inglesa.