

ANÁLISIS Y MODELACIÓN DEL SISTEMA DE LORENZ

ANALYSIS AND MODELING OF LORENZ'S SYSTEM

Daniel Forero Corredor, Andrés Felipe Florián, and Sara Gallego Rivera

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación (MACC) – Universidad Del Rosario - Bogotá – Colombia

2 de Diciembre del 2020

I. INTRODUCCIÓN

El sistema de Lorenz fue encontrado por el matemático y meteorólogo Edward Lorenz(1917-2008), conocido como el padre de la teoría del caos, quien en 1963, con el objetivo fallido de encontrar un sistema que pudiera predecir el clima, halló este sistema conocido como “El Sistema de Lorenz”. Este descubrimiento aportó mucha información a la matemática, ya que fue el primer sistema tridimensional autónomo en el cual se encontró un atractor caótico conocido como “La mariposa de Lorenz”.

La descripción de atractores de sistemas dinámicos caóticos ha sido uno de los grandes logros de la teoría del caos. Un atractor es un conjunto al que todas las trayectorias vecinas convergen. En este informe, estudiaremos un caso de atractor extraño, que es El Sistema de Lorenz. Estos atractores exhiben una dependencia extrema a las condiciones iniciales. Es decir, que trayectorias que empiecen en uno de estos atractores se separan de forma exponencial y por tanto presentan un comportamiento caótico. Además, se caracterizan porque nunca se intersectan a sí mismos ni repiten la misma trayectoria.

II. MODELO

Sistema de Lorenz

El sistema de Lorenz está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy\end{aligned}\tag{1}$$

Donde $\sigma, \rho, \beta > 0$, son tres constantes que determinan el comportamiento del sistema.

Simulaciones del sistema

Para las simulaciones del sistema se usó como condición inicial $x_0 = (0, 1, 20)^T$ y se tomaron los siguientes parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$. Las gráficas respectivas se muestran a continuación:

* Solución numérica del sistema realizada en MATLAB por medio de ode45:

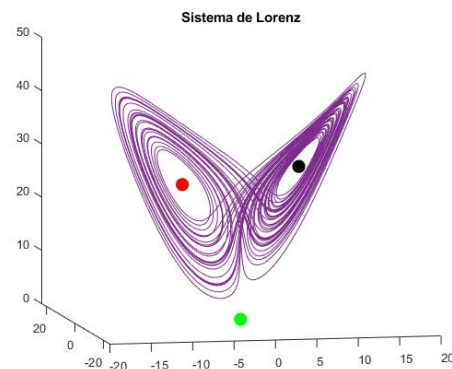


Figura 1: Sistema de Lorenz

* La reflexión en el plano $x - y$ nos ayuda a percibir la tridimensionalidad del sistema. En la figura 2 podemos observar como la gráfica se solapa en el medio, mostrando así la tridimensionalidad del Sistema de Lorenz.

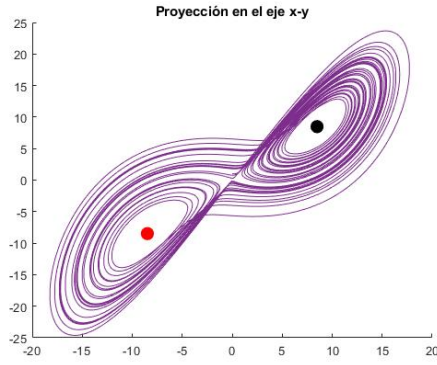


Figura 2: Proyección eje $x-y$

- * La reflexión bajo el $x-z$ se muestra como una mariposa, es por esto que se le conoce como el efecto mariposa.

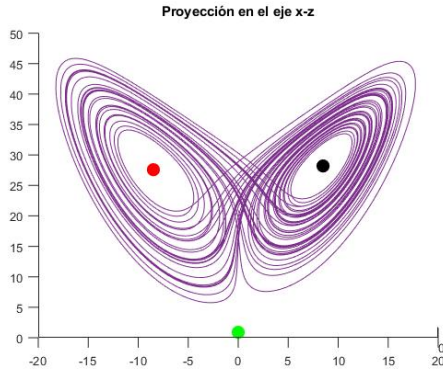


Figura 3: Proyección eje $x-z$

- * Bajo el eje $y-z$ la gráfica muestra una forma similar a la de una máscara de lechuza.

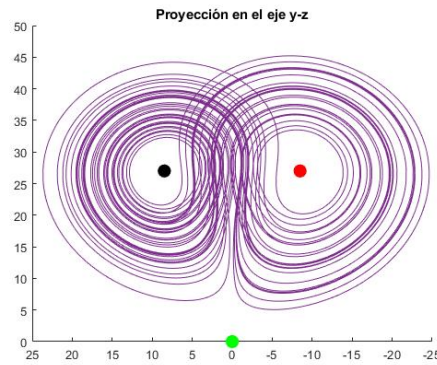


Figura 4: Proyección eje $y-z$

III. ANÁLISIS MATEMÁTICO DEL SISTEMA

Simetría bajo el eje z

Proposición 1 El sistema de Lorenz es simétrico bajo el eje z .

Demostración 1 Demostraremos que el Sistema de Lorenz es simétrico bajo el eje z para ello basta con mostrar que

existe una matriz R tal que $Rf(x) = f(Rx)$ donde $f(x)$ es el sistema de ecuaciones diferenciales. Considere:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ x(\rho-z)-y \\ xy-\beta z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donde $f(x)$ es el sistema de Lorenz y $\mathbf{x}^T = (x, y, z)$. Posteriormente se procede a demostrar que $Rf(x) = f(Rx)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Rf(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ x(\rho-z)-y \\ xy-\beta z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(x-y) \\ x(z-\rho)+y \\ xy-\beta z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego tomando $f(R\mathbf{x})$, se obtiene:

$$\begin{aligned} f(R\mathbf{x}) &= f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(x-y) \\ x(z-\rho)+y \\ xy-\beta z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De esta manera queda demostrado que.

$$Rf(\mathbf{x}) = f(R\mathbf{x})$$

Así pues, podemos concluir que el Sistema de Lorenz es simétrico bajo el eje z ($(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$). ☺

Linearización del sistema

Los puntos de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales se encuentran al igualar el sistema a 0, realizando lo anterior en el sistema 1, se obtienen los siguientes puntos:

$$P_1 = (0, 0, 0)$$

$$P_2 = (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

$$P_3 = (-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

Para la linearización considere:

$$F = \frac{dx}{dt}, \quad Q = \frac{dy}{dt}, \quad R = \frac{dz}{dt}$$

Así la matriz Jacobiana del sistema linearizado está dada por las derivadas parciales de F, Q y R :

$$A = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix}_{\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}^*} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}_{\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{x}^*}$$

Ahora, evaluando la matriz Jacobiana en cada punto de equilibrio tenemos:

* Para P_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

* Para P_2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{pmatrix}$$

* Para P_3 :

$$A_3 = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{pmatrix}$$

Así pues, obtenemos tres sistemas $\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}$ con $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ y $i \in \{1, 2, 3\}$.

Por otro lado, tomamos el campo vectorial respectivo de cada sistema lineal con el fin de observar el comportamiento del punto de equilibrio asociado a uno de estos para $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$.

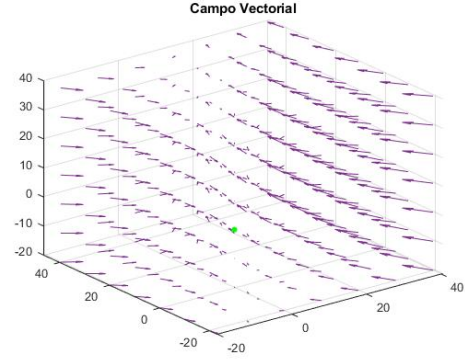


Figura 5: Campo Vectorial $\dot{\mathbf{x}}(t) = A_1 \mathbf{x}$

Se puede observar que para P_1 las direcciones de los vectores asociados al campo tienden a acercarse entre si. No obstante, estos en general no tienden a acercarse al punto de equilibrio.

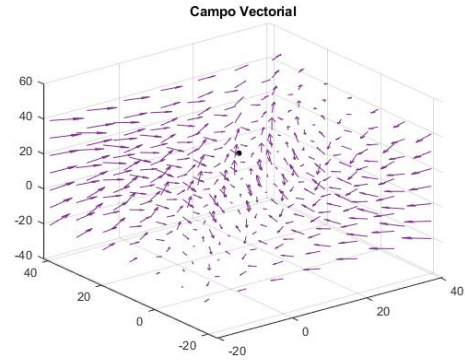


Figura 6: Campo Vectorial $\dot{\mathbf{x}}(t) = A_2 \mathbf{x}$

Para P_2 podemos observar que el campo no tiene un comportamiento estable. Además, las direcciones tienden a repeler el punto de equilibrio P_2 .

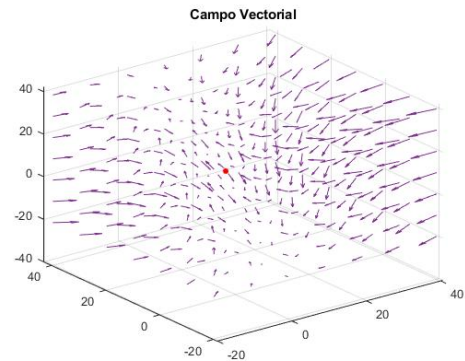


Figura 7: Campo Vectorial $\dot{\mathbf{x}}(t) = A_3 \mathbf{x}$

Finalmente, para P_3 se obtiene un comportamiento similar a el de P_2 , pues las direcciones de los vectores asociados al campo no tienden hacia el punto de equilibrio.

De lo anterior podemos concluir que para cada punto se evidencia un comportamiento inestable, pues estos presentan un comportamiento repulsivo. Por otro lado, Ainoa López en su texto *Different dynamical aspects of Lorenz system* [6] realiza un análisis matemático acerca de los puntos de equilibrio del *Sistema de Lorenz*, en donde nos dice que si $\rho > 1$ el origen es un punto inestable en el sistema. Igualmente para los puntos P_1 y P_2 realiza un análisis tomando en cuenta los autovalores del sistema y el parámetro ρ y define que si $\rho > \rho_h$ el punto es inestable, donde $\rho_h = \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-\beta-1}$, el cual es nuestro caso, pues $\rho = 28$ y $\rho_h \approx 24.73$. Así pues, los puntos de equilibrio para los parámetros analizados son inestables.

Variación de parámetros

Sabemos que el atractor de Lorenz pertenece al grupo de atractores extraños. Este tipo de atractores se caracterizan por demostrar una dependencia extrema a las condiciones iniciales, es decir, son demasiado sensibles a estas, y cualquier cambio realizado en ellas puede causar comportamientos completamente diferentes o caóticos. Esta característica se puede evidenciar a continuación, donde se tienen las condiciones iniciales $x_0 = (1.1547e^{-04}, -5.7493e^{-05}, -5.7976e^{-05})^T$ y los parámetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$, y a medida que, tanto las condiciones iniciales como los parámetros varían, el sistema empieza a presentar un comportamiento completamente diferente e impredecible.

La figura presentada a continuación representa el Sistema de Lorenz con las condiciones iniciales y los parámetros mencionados anteriormente, donde los puntos que se ven en la gráfica representan los puntos de equilibrio del sistema.

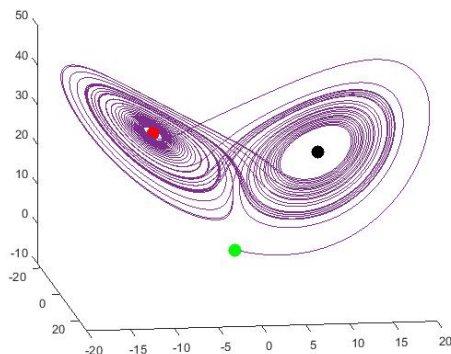


Figura 8

Las gráficas presentadas en Fig. 9 representan el mismo

sistema, pero con una variación de las condiciones iniciales tal que en la primera gráfica se le sumó 0.1 a cada componente de la condición inicial, y en la segunda gráfica se le sumó 1.

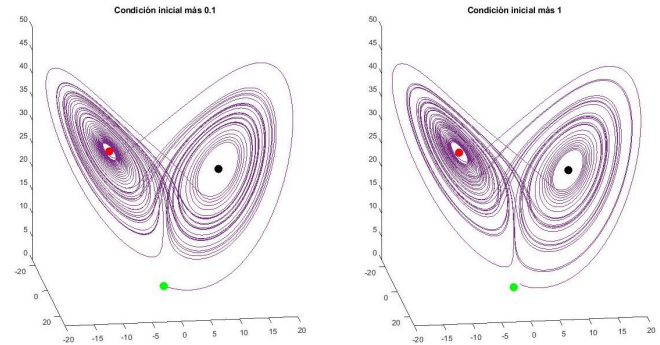


Figura 9: Variación de las condiciones iniciales

Finalmente, estas figuras representan el mismo sistema pero con una variación de parámetros tal que, en la Figura. 10, se varía el parámetro σ , sumándole en la primera gráfica 1 y en la segunda gráfica 10. En la Figura. 11, se varía el parámetro ρ , sumándole igualmente 1 en la primera gráfica y 10 en la segunda gráfica. Por ultimo, en la Figura. 12, se varía el parámetro β , sumándole 0.1 en la primera gráfica y 1 en la segunda. De estas gráficas presentadas podemos concluir que el parámetro mas sensible a las variaciones es β , pues al hacer pequeñas modificaciones en este parámetro, la gráfica cambia su comportamiento de forma mas abrupta.

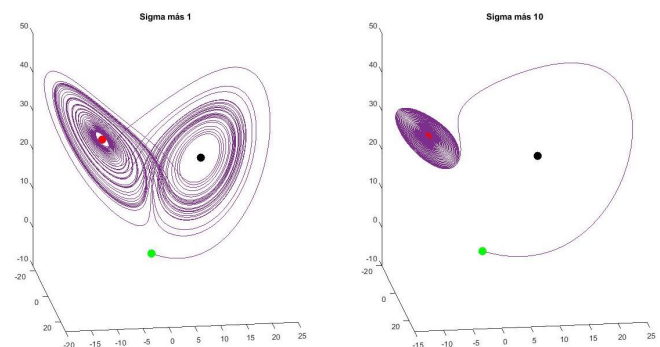


Figura 10: Variación del parámetro Sigma

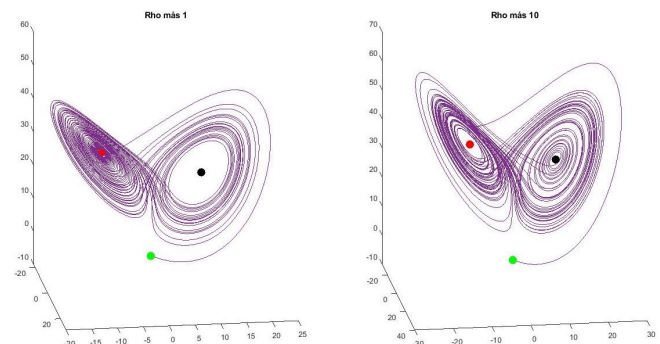


Figura 11: Variación del parámetro Rho

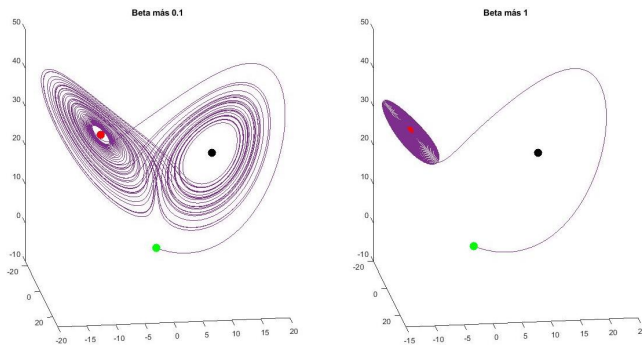


Figura 12: Variación del parámetro Beta

Las figuras presentadas nos permiten ver y entender el comportamiento caótico característico de este sistema, pues pequeñas variaciones realizadas en sus condiciones iniciales y en sus parámetros cambian completamente la trayectoria y como se comporta el sistema. Vale aclarar que los valores de las condiciones iniciales y parámetros presentados fueron tomados de la tesis de Ainoa López [6].

IV. Conclusiones

- El Sistema de Lorenz al ser un sistema caótico no permite gran variación de los parámetros y las condiciones iniciales, es decir un pequeño cambio a uno de estos hace que el comportamiento del sistema cambie en su totalidad.
- La estabilidad de los puntos de equilibrio llega a depender de los valores de estos. Además, evidenciamos que para los parámetros estudiados los puntos de equilibrios son inestables.
- La linearización del sistema permite realizar un análisis acerca de los puntos de equilibrio de este. Sin embargo, no es posible analizar el sistema en su totalidad por medio de este método, pues únicamente llega a ser una optimización alrededor de cada punto de equilibrio.
- La estabilidad de los puntos de equilibrio puede cambiar al variar los parámetros y condiciones iniciales debido al comportamiento caótico del sistema.
- Las simulaciones nos dicen que el Sistema de Lorenz genera gráficas que lo caracterizan como la presentada en el documento. En particular a esta gráfica se le conoce como la mariposa de Lorenz, siendo esencial en el estudio de este sistema.
- El sistema tiende a tener un comportamiento caótico

dependiendo de los valores de los parámetros y sus condiciones iniciales.

Referencias

- [1] Boyce, DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 8a Ed. Wiley, 2005.
- [2] Luenberger, D. *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models & Applications*. Wiley & Sons, 1979.
- [3] Hateley, James. *The Lorenz System*
- [4] Calderón, Pablo. *Descripción del Modelo de Lorenz con aplicaciones*. Universidad EAFIT. Departamento de Ciencias Básicas, 2007.
- [5] Enrique, Claudio. (n.d.). Recuperado de: *El atractor mariposa o atractor de Lorenz*
- [6] López, Ainoa. *Different dynamical aspects of Lorenz system*. Universidad de Barcelona. Departamento de Matemáticas e Informática, 2018.