Variable Compleja
Conjuntos de Julia y Mandelbrot

Sara Gallego Rivera y Andrés Felipe Florián Quitián

Universidad del Rosario

Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Septiembre 6 del 2020

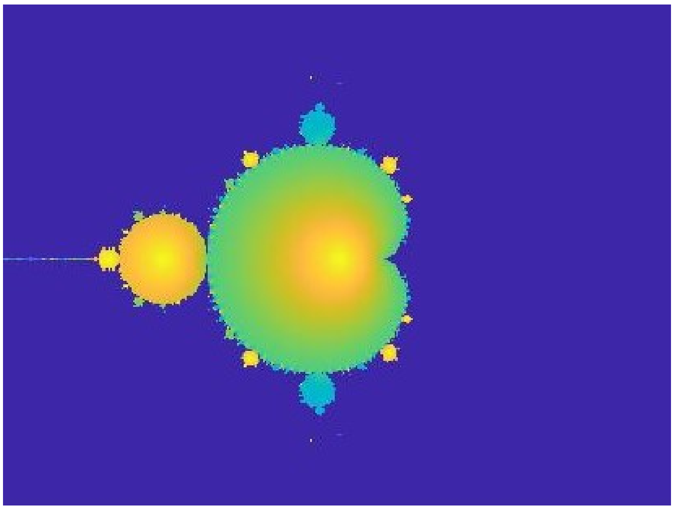
1 Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot representa el conjunto de números complejos c, para los cuales la función compleja $f_c(z) = z^2 + c$ no diverge al iterar 0 sobre esta. En otras palabras, es la secuencia de valores representada por la ecuación $z_{n+1} = z_n^2 + c$, donde z, $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ y $z_0 = c$, que está acotada en su valor absoluto, o el conjunto $\mathcal{M}$ de números complejos c cuyas sucesiones tienen magnitud acotada por 2.

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \forall n \in \mathbb{Z}_+, |z_n| \leq 2\}$$

Para obtener una representación gráfica del conjunto de Mandelbrot, generalmente se evalúa la convergencia de la función al iterar 0 sobre esta para diferentes números complejos c, si la función converge el número complejo c se incluye en el conjunto, de lo contrario no se incluye.

Los colores de la representación gráfica del conjunto de Mandelbrot son asignados según lo rápido que la órbita del 0 se escapa a infinito, es decir, según sea el momento en el que aparece el primer número complejo con magnitud o módulo mayor que 2 en la órbita del 0, entonces dicha órbita tiende a infinito y teniendo en cuenta esto se van asignando los colores como se muestra a continuación:



Representación gráfica del conjunto de Mandelbrot

Pseudocódigo

Algorithm 1 Conjunto de Mandelbrot

Input: Intervalos en x y y
Output: Gráfica del conjunto de Mandelbrot

$n = 2000$
$y1$ vector en donde cada una de sus entradas tiene un incremento d, su primera entrada es el límite inferior de y y su ultima entrada el limite superior de y
$x1$ vector en donde cada una de sus entradas tiene un incremento d, su primera entrada es el límite inferior de x y su ultima entrada el limite superior de x
A una matriz en donde cada una de sus filas es una copia de $x1$
B una matriz en donde cada una de sus columnas es una copia de $y1$
$z = A + iB$
for k; $k++$; $|1 \leq k \leq n|$ **do**
    $z = f(z)$
$w = e^z$
Gráfica de w

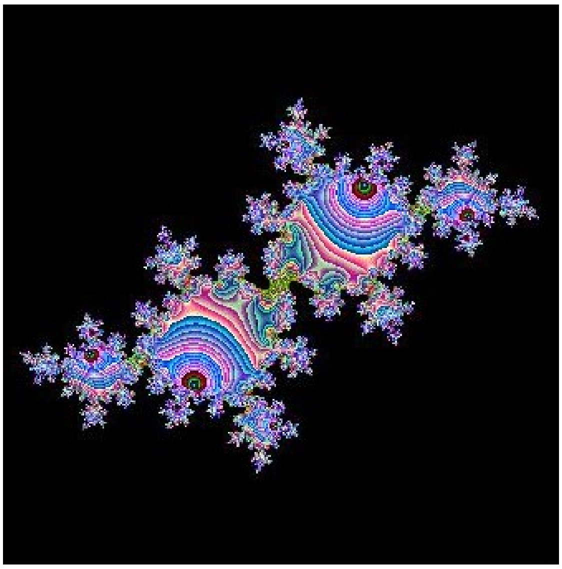
2 Conjunto de Julia

El conjunto de Julia se obtiene al evaluar para que valores de z una función de la forma $f_c(z) = g(z) + c$ converge para varias iteraciones, con $c \in \mathbb{C}$ y $g(z)$ una función holomorfa.

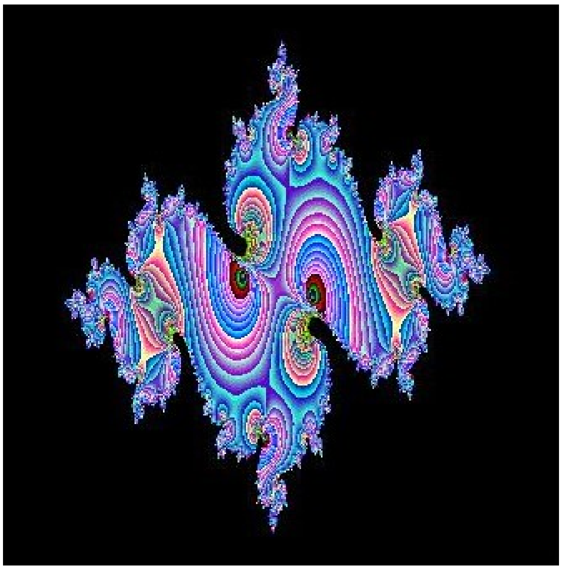
El conjunto de Mandelbrot forma una especie de índice en el conjunto de Julia. Un conjunto de Julia está conectado o desconectado dependiendo de los valores de c elegidos, si estos están dentro del conjunto de Mandelbrot entonces están conectados mientras que los del exterior del conjunto de Mandelbrot están desconectados. Los conjuntos desconectados consisten en puntos individuales sin importar la resolución a la que se miren.

Al igual que en el conjunto de Mandelbrot, para obtener una representación gráfica del conjunto de Julia, se evalúa la convergencia de la función para diferentes números complejos, si la función converge el número complejo se incluye en el conjunto, si no converge no se incluye.

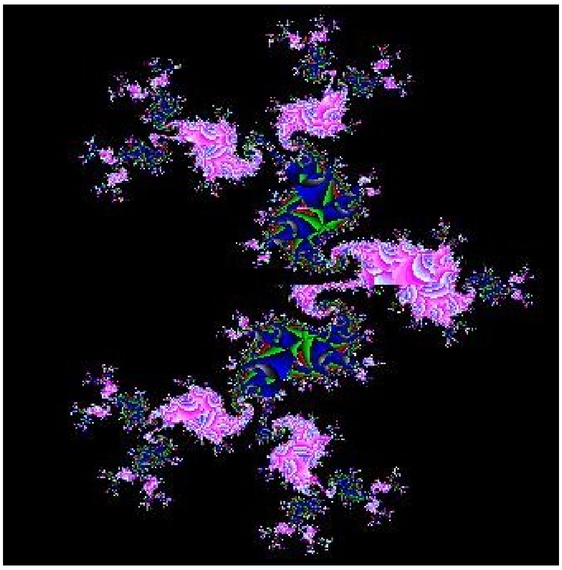
Algunos ejemplos de conjuntos de Julia para diferentes valores de c y $f(z)$:



$c = -0.4 + 0.6i,\ f_c(z) = z^2 + c$



$c = -0.4745429 + 0.11308i,\ f_c(z) = z^2 + c$



$c = 0.268 + 0.06i,\ f(z) = \frac{z^2+z}{ln(z)} + c$

Pseudocódigo

Algorithm 2 Conjunto de Julia

Input: Función f, e intervalos en x y y.
Output: Gráfica del conjunto de Julia

$n = 2000$
$x1$ vector, que representa el intervalo x dividido en n pedazos
$y1$ vector, que representa el, intervalo y dividido en n pedazos
A una matriz en donde cada una de sus filas es una copia de $x1$ y A es de orden n
B una matriz en donde cada una de sus columnas es una copia de $y1$ y B es de orden n
$z = A + iB$
for k; $k++$; $|1 \leq k \leq 25|$ **do**
    $z = f(z)$
$w = e^z$
Gráfica de w

3 Pseudocódigos para la creación del vídeo

Para la creación del vídeo, se realizó un código para la creación de las imágenes y otro para la creación del vídeo, sus pseudocódigos se muestran a continuación:

Algorithm 3 Creación Imágenes

$c = -0.70176 - 0.3842i$
for k; $+_{¿}+$ $1 \leq k \leq 200$ **do**
    name = string de k
    a =Intervalo en x y y: $-1.5 \leq x, y \leq 1.5$
    $f(z) = z^2 + c$
    $Julia(f, a, a)$
    Guardar el plot de Julia con nombre name y extensión .jpg
    if $k < 100$ **then**
        $c = c + (0.005 + 0.001i)$
    else
        $c = c - (0.005 + 0.001i)$

Algorithm 4 Creación Vídeo

vídeo = Objeto que sera usado para la creación del vídeo
FrameRate = 15
for k; $+_{¿}+$ $1 \leq k \leq 200$ **do**
    name = string de k concatenado con la extensión de la imagen
    f = lectura de la imagen
    frame = f como frame
    Añadir frame con tiempo FrameRate en video

4 Demostración Matemática

Proposición 1 *Sea* $f(z) = z+c$ *con* $c \in \mathbb{C}$*, la sucesión generada por* $f(z)$ *empezando en cero es:* $0, c, c^2 + c...$*, tomemos estos términos como* $z_0, z_1, z_2, ..,$ *y suponga que la sucesión* z_n *la genera.* z_n *diverge si para algún* $z_i \in z_n$*,* $|z_i| > 2$*, es decir que la magnitud de* z_i *sea mayor a* 2*.*

Demostración 1 *Sea* $f(z) = z^2 + c$ *con* $c \in \mathbb{C}$*. Suponga que la sucesión* z_n *genera los términos de* $f(z)$*, así pues,*

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0 \\
z_1 &= c \\
z_2 &= c^2 + c \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}
$$

Veamos que si $|z| > 2$ *y* $|z| > c$ *la sucesión* z_n *no es acotada, es decir que no es convergente, entonces* $|\frac{|f(z)|}{|z|} > |z| - 1 > 1$*, además por inducción se tiene que la sucesión de magnitudes crecerá geométricamente, luego*

$$
\begin{aligned}
\frac{|f(z)|}{|z|} &= \frac{|z^2 + c|}{|z|} \\
&\geq \frac{|z^2 - c|}{|z|} && \textit{(Desigualdad triangular)} \\
&= |z| - \frac{|c|}{|z|} \\
&> |z| - 1 && (|z| > |c|) \\
&> 1 && (|z| > 2) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Observe que se tienen dos casos.

* ***Caso 1:*** *Si* $|c| \leq 2$ *y* $|z_n| > 2$, *así*

$$\begin{aligned} -|c| &> 2 \qquad (|z| > 0) \\ -\frac{|c|}{|z|} &> -\frac{2}{|z|} \\ |z| - \frac{|c|}{|z|} &> |z| - \frac{2}{|z|} \end{aligned}$$

entonces por Eq.1, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{|z^2 + c|}{|z|} &\geq |z| - \frac{|c|}{|z|} \\ &> |z| - 1 \end{aligned}$$

note que se satisface la hipotésis pues, $|z_n| > 2$ *y* $|z| > c$, *entonces podemos decir que la sucesión no es acotada. Por tanto, la sucesión* z_n *es divergente.*

* ***Caso 2:*** *Si* $|c| > 2$, *entonces*

$$\begin{aligned} |c^2 + c| &\geq |c|^2 - |c| \quad \textit{(Desigualdad triangular)} \\ &= |c|(|c| - 1) \\ &> |c| \\ &> 2 \end{aligned}$$

Por lo que se satisface la hipótesis, por tanto es divergente.

Así pues, por los dos casos se tiene que si $|z| > 2$ *y* $|z| > c$ *la sucesión* z_n *es no acotada por lo que es divergente. Por lo tanto, si* $|z| \leq 2$ *se tiene que la sucesión* z_n *converge. Así, la magnitud de cada* $z_i \in z_n$ *es menor o igual a 2.* ■

References

[1] *Escape Radious*.

[2] *Assembly - Registers*.

[3] *¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?: historia y construcción*. 22 de Noviembre, 2011.

[4] *The Mandelbrot Set - Numberphile*. 25 de Julio, 2014.

[5] *Filled Julia Set*. 30 de Septiembre, 2014.

[6] *Pi and the Mandelbrot Set - Numberphile*. 1 de Octubre, 2015.

[7] *Julia Set Fractal (2D)*. Junio, 2001.

[8] *Un viaje interactivo y muy didáctico al conjunto de Mandelbrot*. 29 de Abril, 2019.