Faculté de Sciences et Technologie - UPEC

$2^{\text{éme}}$ Contrôle Continu de Mécanique du Point 1 (29/11/2023)

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA
`felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr`

NOM:____________________ Prénom: ________________ Numéro: ________

Licence:____________________ Groupe: ________________ Note: ______

Instructions et rappels

- Calculettes et téléphones portables interdits (stricte! le nom sera remonté aux coordinateurs).
- N'oubliez pas les unités, des flèches au-dessus des vecteurs, etc.
- On négligera la poussé d'Archimède et le frottement sauf si autrement dit.
- Dérivé d'un fonction composé: $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x)$.
- Produit scalaire en deux dimensions : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \|a\|\|b\| \cos\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- Quelques relations en repère polaire avec l'angle θ mesuré par rapport $\vec{u}_x$ (ci-dessous dépendance explicite du temps omis, $r = r(t), \theta = \theta(t), \vec{u}_r = \vec{u}_r(t), \vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(t)$):

$$\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y, \quad \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y, \quad , \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r,$$
$$O\vec{M}(t) = r\vec{u}_r, \quad dO\vec{M}(t) = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta, \quad \vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

- Travail d'une force entre A et B : $W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot dO\vec{M}$
- Enérgie cinétique en A (instant t_A) : $E_c^A = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(t_A)\|^2$
- Theorème d'énergie cinétique entre A et B: $E_c^B - E_c^A = \sum_{\vec{F}} W_{A\to B}(\vec{F})$.

Q1 (10 pts) : skateur dans un half-pipe (analogue pendule)

Un skateur de masse m est sur un half-pipe semi-circulaire (moitié d'un cercle) de rayon R. On va considérer le skateur comme une particule M qui ne décolle jamais du half-pipe, c'est-à-dire, il sera toujours à une distance R de l'origine O. On repère la position du skateur par l'angle θ qu'il fait avec la vertical descendent depuis O. La norme de l'accéleration de la pesanteur est dénoté g (le vecteur $\vec{g}$ pointe vers le bas). On va étudier ce mouvement en repère polaire.

1. Complétez la Figure 1 ci-dessous en plaçant θ, $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ selon la convention usuelle (voir rappel si besoin et notez qu'il de fléchés en plus).
2. Faire un bilan de forces (sans frottement) appliqué sur la particule M et donner les expressions de toutes les forces en repère polaire (n'oubliez pas de dessiner ces vecteurs).

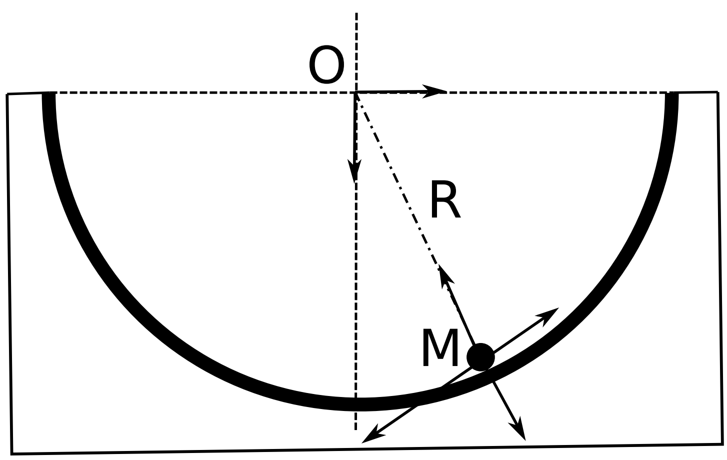


Figure 1

3. Donner les expressions simplifiés pour ce type de mouvement pour les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ en repère polaire (voir rappel).

4. Appliquer le principe fondamentale de la dynamique (PFD) et les projeter sur l'axe $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_r$.

5. En utilisant le PFD sur $\vec{u}_\theta$, déduire l'équation différentiel qui gouverne ce mouvement en utilisant l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ pour des petites oscillations.

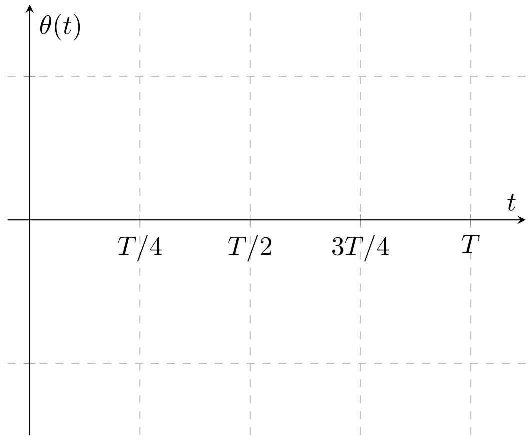
6. Vérifiez qu'une solution du type $\theta(t) = A\sin\omega t$ peut satisfaire l'équation précédent. Donner aussi l'expression pour ω en fonction de g et R.

7. Dans l'instant initial le skateur est au tout au fond du half-pipe, avec $\theta(0) = 0$, et il imprime une vitesse angulaire (par exemple en s'autopropulsant avec ces pieds) de sorte que $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$. Déterminez la constant A en fonction de $\dot{\theta}_0$ et ω. Qu'est-ce que représente A et donner sa dimension.

8. Ce mouvement circulaire est-il uniforme ou non-uniforme? pourquoi?

9. Pour le cas particulier de $R = 10$m, $g = 10$m/s^2, $\dot{\theta}_0 = 5 \times 10^{-2}$rad/s, calculer ω et A.

10. Pour ce cas particulier, tracer $\theta(t)$ pour $t \in [0\text{s}, \text{T}]$, où T est temps nécessaire pour que la fonction sinus complète son cycle. N'oubliez pas de calculer T (en fonction de π) et d'écrire la valeur de T et A sur le dessin.



11. Donner l'expression d'énérgie cinétique générique en fonction de R, m et $\dot{\theta}$ (utilisez la formule de vitesse du l'exercise 3).

12. Pour le cas particulier l'exercise 9 et pour $m = 80$kg, calculer l'énergie cinétique du skateur de masse à l'instant $t = 0$s.

13. Donner l'expression du travail $W_{0\to f}(\vec{P})$ réalisé par la force de poids entre $\theta_0 = 0\,\text{rad}$ et θ_f, en fonction des valeurs génériques de m, g, θ_f.

14. En utilisant le théorème d'énergie cinétique, donner l'expression pour $\dot{\theta}_0$ nécessaire pour que le skateur arrive jusqu'au bord supérieur du half-pipe (à $\theta_f = \pi/2$) mais sans le dépasser.

15. Maintenant, une force de frottement constant est présent $\vec{f} = -f\vec{u}_\theta$ (en supposant $\dot{\theta}_0 > 0$), donner une expression $\dot{\theta}_0$ sous les mêmes conditions du problème précédent.

Q2 (6 pts) : repère polaire alternatif

Imaginons que dans une autre pays du monde la convention préféré pour le repère polaire est tel que la position d'une particule M soit paramétrisé par sa distance $\rho = \rho(t)$ (variable avec le temps) par rapport l'origine O et une angle $\alpha = \alpha(t)$ (variable avec le temps) mesuré par rapport à $\vec{u}_y$ de tel sorte que $\vec{e}_\rho = -\sin\alpha\vec{u}_x + \cos\alpha\vec{u}_y$ et $\vec{e}_\alpha = \cos\alpha\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_y$ représente les vecteurs radiale et circonférentielle de la base, respectivement (notez qu'on a utilisé d'autres lettres pour cette nouvelle base afin de ne pas confondre avec la notation du rappel).

1. (1,5pts) Dessinez le repère $R'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha)$ par rapport au repère cartésien $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ dans l'space ci-dessous.

2. (1,5pts) Vérifiez que $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha\}$ est une base orthonormale, c'est-à-dire, $\|\vec{e}_\rho\| = \|\vec{e}_\alpha\| = 1$ et $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\alpha = 0$.

3. (1,5pts) Démontrez des expressions pour $\dot{\vec{e}}_\rho$ et $\dot{\vec{e}}_\alpha$ (analogues mais différents à celles du rappel).

4. (1,5pts) En sachant que $\vec{OM} = \rho\vec{e}_\rho$, ou de manière explicite $\vec{OM}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(\alpha(t))$, dérivez ce vecteur pour obtenir la vitesse $\vec{v}$ (analogue mais pas exactement égal à celle du rappel).