Faculté de Sciences et Technologie - UPEC

Corrigé $2^{\text{éme}}$ Contrôle Continu de Mécanique du Point 1 (30/11/2023)

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA
felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr

Diagnostique

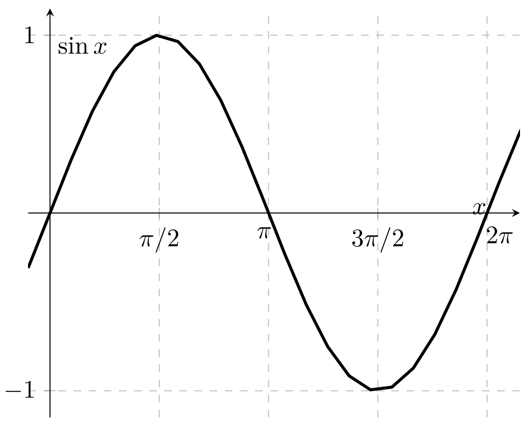
Rappels

- Dérivé d'un fonction composé: $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) g'(x)$.
- Produit scalaire en deux dimensions : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \|a\| \|b\| \cos\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- Quelques relations en repère polaire avec l'angle θ mesuré par rapport $\vec{u}_x$ (ci-dessous dépendance explicite du temps omis, $r = r(t), \theta = \theta(t), \vec{u}_r = \vec{u}_r(t), \vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(t)$):

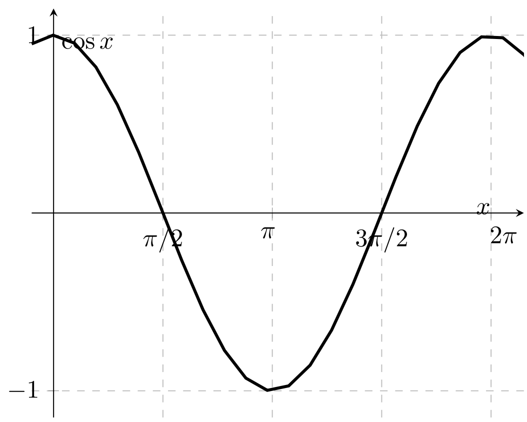
$$\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y, \quad \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y, \quad , \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{u}_r,$$
$$\vec{OM}(t) = r\vec{u}_r, \quad d\vec{OM}(t) = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta, \quad \vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

- Travail d'une force entre A et B : $W_{A \to B}(\vec{F}) = \displaystyle\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$
- Enérgie cinétique en A (instant t_A) : $E_c^A = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(t_A)\|^2$
- Fonctions trigonométriques:

$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x$$
$$\int \sin x \, dx = -\cos x + k, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + k$$



(a) Représentation graphique de la fonction sinus.



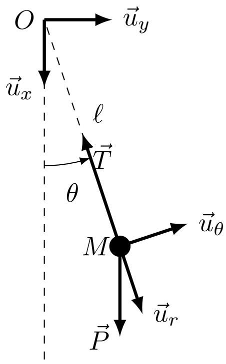
(b) Représentation graphique de la fonction cosinus.

Q1 (15,5 pts) : pendule en repère polaire

Le pendule simple est constitué d'une masse m assimilable à un point matériel M, pendue à un fil inextensible tendu de longueur ℓ ($\vec{OM} = \ell \vec{u}_r$). L'autre extrémité du fil est fixe (au point O). On repère la position du pendule par l'angle θ qu'il fait avec cette verticale descendante. La norme de l'accéleration de la pesanteur est dénoté g (le vecteur $\vec{g}$ pointe vers le bas).

1. (1,5pts) Dessinez le système décrit ci-dessus. Votre dessin doit montrer: i) le points O et M, ii) le fil de longueur ℓ qui relie O et M incliné d'un angle θ avec la verticale descendent, iii) les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ du repère cartésien avec origine en O (rappel, $\vec{u}_x$ pointe vers le bas), iv) les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ du repère polaire (centré sur M par convenance), v) les forces qui agissent sur M.

   réponse: comme dans l'exercise 10 du TD pour i)-iv). Pour v), la force de traction $\vec{T}$ au long du fil et le poids $\vec{P}$ vers le bas.



2. (2,0pts)Appliquer le principe fondamentale de la dynamique (PFD) sur ce système en repère polaire. Votre réponse doit contenir: i) les expressions de toutes les forces en repère polaire (e.g. $\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta$); ii) l'expression simplifié de l'accélération $\vec{a}$ pour un mouvement circulaire (voir rappel) aussi en repère polaire; iii) les deux équations du PFD en lignes séparés (chaque ligne représentant une direction du repère polaire).

   réponse i) $\vec{P} = mg(-\sin\theta\vec{u}_\theta + \cos\ \theta\vec{u}_r)$ et $\vec{T} = -T\vec{u}_r$; ii) comme $r = \ell$, $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, en simplifiant l'équation du rappel on a que $\vec{a}(t) = -\ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r + \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$. iii) du PFD, on a $m\vec{a} = \sum\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$, ce qu'en composant nous donne

$$\boxed{\begin{cases} -mg\sin\theta = m\ell\ddot{\theta} \quad (\text{sur } \vec{u}_\theta), \\ mg\cos\ \theta - T = -m\ell\dot{\theta}^2 \quad (\text{sur } \vec{u}_r) \end{cases}} \tag{1}$$

3. (1,5pts) Nous avons démontré en TD que l'équation différentielle qui gouverne ce problème est $\ddot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = 0$ pour petites oscillations. En comparant cette équation avec celles du PFD (juste la projection sur $\vec{u}_\theta$), explicitez: i) la/les simplification(s) qu'ont été réalisés; ii) ω en fonction de g et ℓ.
   réponse i) On a éliminé la m et fait l'approximation $\sin\theta \approx \theta$. ii) S'on divise les deux côtés de l'équation simplifié par ℓ, on a par comparaison que $\boxed{\omega = \sqrt{g/l}}$.

4. (1,5pts) Vérifiez qu'une solution du type $\theta(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, avec A et B constantes réelles peut satisfaire l'équation différentielle précédent.

   réponse: En dérivant deux fois: $\ddot{\theta}(t) = -\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = -\omega^2\theta(t)$. On a donc $\ddot{\theta}(t) + \omega^2\theta(t) = -\omega^2\theta(t) + \omega^2\theta(t) = 0$, ce que vérifie l'équation différentiel

5. (1,5pts) Déterminer les valeurs de A et B pour les cas: i) $\theta(0) = \pi/50$rad, $\dot{\theta}(0) = 0\,$rad/s, $\omega = 2\pi\,$rad/s; ii) $\theta(0) = 0$rad, $\dot{\theta}(0) = \pi/100$rad/s, $\omega = 2\pi\,$rad/s. Qu'est-ce que représente physiquement chaqu'une de ces constantes A et B?

   réponse: On aura besoin de $\dot{\theta}(t) = \omega A\cos\omega t - B\sin\omega t$. i) $\theta(0) = \pi/50 = A\sin 0 + B\cos 0 = B$ et $\dot{\theta}(0) = 0 = \omega A\cos 0 - B\sin 0 = \omega A$, donc $\boxed{A = 0, B = \pi/50}$. ii) $\theta(0) = 0 = B$ et $\dot{\theta}(0) = \pi/100 = \omega A$, donc $\boxed{A = \frac{\pi/100}{2\pi} = 1/200, B = 0}$.
   Finalement, B correspond à l'angle initiale quand la vitesse initiale est nulle, et A correspond au rapport vitesse initiale versus la pulsation fondamentale (ω) quand l'angle initiale est nulle.

6. (1,5 pts) En sachant qui le fil support un traction maximal de T_{max} (dans lequel il se rompre), en utilisant la deuxième partie du PFD (projection en $\vec{u}_r$ du point Q1.2) déterminer la vitesse angulaire $\dot{\theta}_{max}$ en fonction de θ et de toutes les autres variables nécessaires (symbolique).

   réponse: On sait que $mg\cos\ \theta - T = -m\ell\dot{\theta}^2$ de Q1.2). On a donc $mg\cos\theta - T_{max} = -m\ell\dot{\theta}^2_{\max}$ et finalement

$$\boxed{\dot{\theta} \leq \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{T_{max} - mg\cos\theta}{m\ell}}}$$

7. (1,5 pts) En simplifiant la vitesse de la particule pour le mouvement circulaire (voir rappel pour la expression complète), déterminer l'expression d'énergie cinétique (générique) de la particule en fonction de ℓ, m et $\dot{\theta}$.

   réponse: Pour le mouvement circulaire $r = \ell, \dot{r} = 0$, donc $\vec{v}(t) = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Comme $\|\vec{v}(t)\|^2 = (\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta)\cdot(\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = \ell^2\dot{\theta}(\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta) = \ell^2\dot{\theta}^2$. Finalement $E_c = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(t)\|^2 = \boxed{\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2}$.

8. (1,5 pts) Déterminez le travail $W_{0\to f}(\vec{P})$ réalisé par la force de poids entre θ_0 et θ_f (génériques), en fonction des valeurs génériques de $m, g, \theta_f, \theta_0, \ell$.
   réponse: Comme $d\vec{OM} = \ell d\theta\vec{u}_\theta$ dans ce cas de mouvement circulaire car dr disparaître, on prend en considération juste la composant θ de la force poids (car $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$). On a donc $W_{0\to f}(\vec{P}) = \int_{\theta_0}^{\theta_f} -mg\sin\theta\ell d\theta = mg\ell\cos\theta\Big|_{\theta_0}^{\theta_f} = \boxed{mg\ell(\cos\ \theta_f - \cos\ \theta_0)}$.

9. (1,5 pts)Déterminez le travail d'une force de frottement (non négligeable dans ce cas) constant $\vec{f} = -f\vec{u}_\theta$ (en supposant $\theta_f > \theta_0 > 0$).

   réponse: Le travail de la force de frottement est $W_{0\to f}(\vec{f}) = \int_{\theta_0}^{\theta_f} -f\ell d\theta = \boxed{-f\ell(\theta_f - \theta_0)}$

10. (1,5 pts) Énoncez le théorème d'énergie cinétique (en mots et équations). Appliquez ce résultat en prenant en compte les travail de la force poids et de frottements des cas précédents. Dénotez la vitesse angulaire de particule comme $\dot{\theta}_0$ et $\dot{\theta}_f$ (instant initiale e finale, respectivement).

    réponse: Le théorème d'énergie cinétique nous dit que: l'increment de la énergie cinétique d'une particule entre un instant initiale (0) et finale (f) est égale la somme des travail réalisés par toutes les forces extérieures qui agissent sur cette particule (dans une référentiel galiléen pour être complet). En équations on a

$$\Delta E_c = E_c^f - E_c^0 = \sum_{\vec{F}} W_{0\to f}(\vec{F}).$$

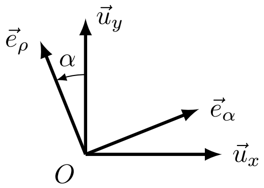
    Appliquant ce théorème à notre cas spécifique on a que:

$$\boxed{\frac{1}{2}m\ell^2(\dot{\theta}_f^2 - \dot{\theta}_0^2) = mg\ell(\cos\ \theta_f - \cos\ \theta_0) - f\ell(\theta_f - \theta_0)}.$$

Q2 (4,5 pts) : repère polaire alternatif (attention! cette repère est similaire mais ne suit pas les mêmes conventions du repère polaire classique)

Imaginons que dans une autre pays du monde la convention préféré pour le repère polaire est tel que la position d'une particule M soit paramétrisé par sa distance $\rho = \rho(t)$ (variable avec le temps) par rapport l'origine O et une angle $\alpha = \alpha(t)$ (variable avec le temps) mesuré par rapport à $\vec{u}_y$ de tel sorte que $\vec{e}_\rho = -\sin\alpha\vec{u}_x + \cos\alpha\vec{u}_y$ et $\vec{e}_\alpha = \cos\alpha\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_y$ représente les vecteurs radiale et circonférentielle de la base, respectivement (notez qu'on a utilisé d'autres lettres pour cette nouvelle base afin de ne pas confondre avec la notation du rappel).

1. (1,5pts) Dessinez le repère $R'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha)$ par rapport au repère cartésien $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (vous pouvez représenter le repère cartésien classique: $\vec{u}_y$ verticale vers le haut et $\vec{u}_x$ horizontale vers la droite).
   réponse:



2. (1,5pts) Démontrez des expressions pour $\dot{\vec{e}}_\rho$ et $\dot{\vec{e}}_\alpha$ (analogues mais différents à celles du rappel).
   réponse:

$$\dot{\vec{e}}_\rho = -(\cos\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_x + (-\sin\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_y = \boxed{-\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha}$$
$$\dot{\vec{e}}_\alpha = (-\sin\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_x + (\cos\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_y = \boxed{\dot{\alpha}\vec{e}_\rho}$$

3. (1,5pts) En sachant que $\vec{OM} = \rho\vec{e}_\rho$, ou de manière explicite $\vec{OM}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(\alpha(t))$, dérivez ce vecteur deux fois pour obtenir l'accélération $\vec{a}$ (analogue mais pas exactement égal à celle du rappel).
   réponse: En dérivant la première fois $\dot{\vec{OM}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\vec{e}_\rho - \rho\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha$. Encore une fois

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{OM}} &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho - \dot{\rho}\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha - \rho\ddot{\alpha}\vec{e}_\alpha - \rho\dot{\alpha}\dot{\vec{e}}_\alpha \\ &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}(-\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha) - \dot{\rho}\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha - \rho\ddot{\alpha}\vec{e}_\alpha - \rho\dot{\alpha}(\dot{\alpha}\vec{e}_\rho) \\ &= \boxed{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\alpha}^2) - (2\dot{\rho}\dot{\alpha} + \rho\ddot{\alpha})\vec{e}_\alpha}.\end{aligned}$$