Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA, felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr

Diagnotistique du CC1 Mécanique du Point

Points positifs: en général vous maîtrisez:

- Les dimensions variables plus utilisés en mécanique (Q1.1).
- Faire l'analyse dimensionnelle des équations (Q1.2).
- Calcul des dérivés de fonctions simples (y inclus l'utilisation de la règle de la chaîne) (Q2.1).
- Énoncer le PFD et dessiner l'ensemble de force s'agissant sur une particule (Q3.1 et Q3.2).

Points négatifs: en général vous devez travailler d'avantage:

- Conversion d'unités (km $\rightarrow 10^3$m, m $\rightarrow 10^{-3}$km par exemple) (Q1.3).
- Conversion entre différents représentations de puissance 10 (exemples : $2000 = 2 \times 10^3$, $1,5 \times 10^{10} = 15 \times 10^9, 0,013 = 1,3 \times 10^{-2}$ (Q1.3). Faites des exemples vous même sur une calculatrice.
- Calculs simples avec la puissance de 10 (passer du dénominateur pour le numérateur) (Q1.3).
- Dessiner trajectoires étant donné le mouvement en forme paramétrique (Q2.2). Je conseil geogebra.org.
- Interprétation géométrique des vecteurs (position, vitesse et accélération) (Q2.3).
- Propriétés basiques des fonctions trigonométriques: cercle trigonométrique, valeurs des fonctions sinus et cosinus pour les angles plus courants $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots)$, etc (Q2.4).
- Comprendre l'idée intuitive derrière d'une dérivée (pente)/primitive (aire): i) reconnaître une pente positive, négatif et nulle; ii) reconnaître que le pente moyenne de la position est la vitesse moyenne (et si cette pente est constante, la vitesse moyenne est égal à la vitesse instantanée); iii) reconnaître que le commentaire précédent est analogue pour la relation entre vitesse et accélération; iv) savoir calculer les pentes moyennes (Q3.3).
- Utiliser le PFD de forme systématique afin d'aboutir à conclusions des sur de variables inconnues (d'abord il faut reconnaître les données d'entrée et ce qu'on cherche) (Q3.4).
- Représentation vectorielle: il faut reconnaître ce que représente la norme d'un vecteur (et ne pas confondre avec la projection d'un vecteur dans l'un des axes) [1] (Q3 toutes les questions).

Conseils pour bien réussir

- Essayer de faire les TDs chez vous (si possible avant la séance, si n'est pas possible, au moins les lire d'avance aide beaucoup). En tout cas, les refaire vous même dans la même semaine.
- Aller plus loin: faire les exercices supplémentaires sur EPREL, voir même essayer de faire les les exercices résolus des bouquins de la bibliothèque ou sur l'internet.
- Utiliser de façon optimale votre temps d'examen: essayer de faire les questions simples et que ne demandent pas beaucoup de temps d'avance et le plus rapidement possible (comme cela vous garantissez une bonne partie des points) pour laisser le temps pour les questions plus difficiles et laborieuses. Cette ordre ne correspond pas forcement l'ordre d'apresentation sur l'examen. Si vous êtes organisé, même le brouillon peut être évité pour des questions plus simples. Je préfère même laisser la rédaction pour la fin, car c'est vrai qu'une bonne rédaction cause une bonne impression, mais seulement si la réponse est juste (et attention! si votre rédaction est trop longue, vous risquez même de n'êtes pas compris ou dans le pire cas, d'ajouter des erreurs dans une réponse correcte a priori).
- Utilisez toute votre temps. Si vous avez fini les questions en avance, vous pouvez encore: essayer de trouver quelques petites fautes; améliorer la rédaction des réponses; refaire une question utilisant un méthode alternatif, etc.

[1] Règle pratique dans le cas unidimensionnel: i) si votre axe est pointé vers le même sens de votre vecteur, la projection doit correspondre avec la norme ii) si l'axe est dans le sens inverse, la projection est le négatif de la norme. C'est un peu compliqué, je sais. Vous pouvez refaire l'exercise Q3 avec $\vec{u}_z$ opposé, vous allez constaté que les plots seront inversées, mais les mêmes F_f^{12} et F_f^{23} seront rétrouvés.

Q1 (6 pts) : Grandeurs, dimensions et unités

Soit les variables: ℓ une longueur, t le temps, m une masse, ω une fréquence, $\vec{v}$ une vitesse, $\vec{a}$ une accélération, $\vec{f}$ une force.

1. (1,5 pts) En rappelant les notations $[\ell] = L$, $[t] = T$, $[m] = M$. Complétez les dimensions des variables suivantes:
   a) $[\omega] = \boxed{T^{-1}}$, c) $[v] = \boxed{LT^{-1}}$, c) $[f] = \boxed{MLT^{-2}}$

2. (2,0 pts) En termes de consistance dimensionnelle, jugez en étant Vrai (V) ou Faux (F) les équations suivantes:
   (a) (F) $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = \ell^2$ **Justificatif:** Les fonctions trigonométriques ont dimension 1.
   (b) (V) $v = \sqrt{\frac{2f\ell}{m}}$ **Justificatif:** $\sqrt{(MLT^{-2})(L)(M^{-1})} = \sqrt{L^2T^{-1}} = LT^{-1} = [v]$
   (c) (F) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, où $[k] = MT^{-4}$ **Justificatif:** $\sqrt{(MT^{-4})M^{-1})} = \sqrt{T^{-4}} = T^{-2} \neq [\omega]$

3. (2,5 pt) Dans une planète lointaine[2] de masse $m = 1,4 \times 10^{15}\,\text{kg}$ et rayon $r = 7\,\text{km}$, quel est l'accélération de pesanteur g agissant sur un corps placé proche de sa surface? (utilisez $g = \frac{Gm}{r^2}$, en sachant que $G \approx 7 \times 10^{-11}\text{N m}^2\,\text{kg}^{-2}$).
   Réponse: D'abord, on a $r = 7\text{km} = 7 \times 10^3\text{m}$ et $m = 2 \times 7 \times 10^{14}\text{kg}$. Donc

$$g = \frac{Gm}{r^2} = \frac{(7 \times 10^{-11}) \times (2 \times 7 \times 10^{14})}{(7 \times 10^3)^2} = \frac{7^2 \times 2 \times 10^3}{7^2 \times 10^6} = \boxed{2 \times 10^{-3}\text{m/s}^2}$$

Q2 (8 pts): Cinématique en repère cartésien

Le mouvement d'une particule P est décrit par ses équations paramétriques $x(t) = A\cos(\omega t), y(t) = B\sin(\omega t)$, où A et B sont des nombres réels positifs. Dans un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, on pose le vecteur $\vec{OP}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$.

1. (2,5 pt) Calculez la vitesse $\vec{v}(t)$ de cette particule [3] et sa norme v.
   Réponse: On pose les fonctions $g(t) = \omega t$, $f(z) = A\cos z$, $h(z) = B\sin z$, de façon que $x(t) = (f \circ g)(t)$ et $y(t) = (h \circ g)(t)$. Comme $g'(t) = \omega, f'(z) = -A\sin z, h'(z) = B\cos z$, de la définition de vitesse et la règle de la chaîne on a

$$\vec{v}(t) = x'(t)\vec{u}_x + y'(t)\vec{u}_x = (-A\sin\omega t) \times \omega\,\vec{u}_x + (B\cos\omega t) \times \omega\,\vec{u}_y = \boxed{-A\omega\sin\omega t\,\vec{u}_x + B\omega\cos\omega t\,\vec{u}_y}.$$

   Sa norme est donc:

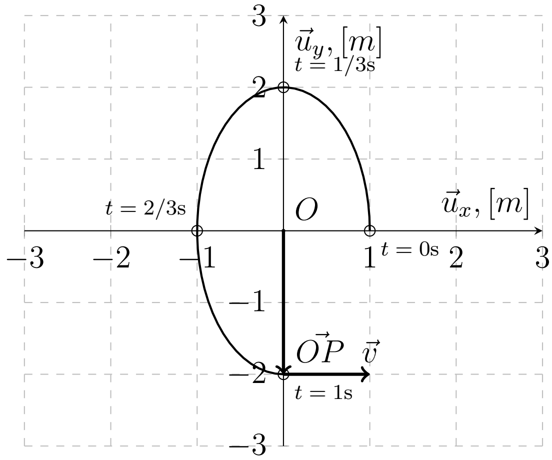
$$v = \sqrt{(-A\omega\sin\omega t)^2 + (B\omega\cos\omega t)^2} = \boxed{\sqrt{A^2\omega^2\sin^2\omega t + B^2\omega^2\cos^2\omega t}}.$$

2. (2 pt) Dessinez la trajectoire de cette particule pour $t \in [0, 1]s$, $B = 2A = 2\,\text{m}$ et $\omega = (3\pi/2)\,\text{rad}/s$.

---

[2] Les propriétés de la planète (45) Eugénie I Petit-Prince ont été adaptés pour rendre le calcul plus facile.

[3] Rappel dérivé en chaîne: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$. Vous avez toujours la liberté de ne pas définir explicitement g si vous semble plus pratique)



Justificatif: On d'abord trouve quelques points clés de la trajectoire, e.g $t \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}$s, et puis on les relient en sachant que la trajectoire se ressemble à celle d'une cercle déformée (ellipse):

$$\begin{aligned}\vec{OP}(t) &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} \times t\right)\vec{u}_x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} \times t\right)\vec{u}_y \\ &\Rightarrow \vec{OP}(0s) = (1,0)\text{m}, \vec{OP}(1/3s) = (0,2)\text{m}, \vec{OP}(2/3s) = (-1,0)\text{m}, \vec{OP}(1s) = (0,-2)\text{m}.\end{aligned}$$

3. (2 pt) Sur le dessin précédent, tracer les vecteurs $\vec{OP}(t = 1s)$ et $\vec{v}(t = 1s)$ (pas besoin de représenter exactement les normes).

   Justificatif: On sait que le vitesse est tangent à la trajectoire et que la position de la particule en $t = 1s$ (Q2.2).

4. (1,5 pts - bônus) Pour quels instants dans l'intervale de temps précédent on a $\vec{v}(t) \perp \vec{OP}(t)$? (notez que cette condition est équivalent à $\cos\theta = 0$ où θ est l'angle entre $\vec{v}(t)$ et $\vec{OP}(t)$).
   Réponse 1 (rigoureux): On cherche d'abord

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) \cdot \vec{OP}(t) &= (-A\omega \sin\omega t\, \vec{u}_x + B\omega\cos\omega t\, \vec{u}_y) \cdot (A\cos\omega t\, \vec{u}_x + B\sin\omega t\, \vec{u}_y) \\ &= (B^2 - A^2)\omega \sin\omega t \cos\omega t = \frac{(B^2 - A^2)\omega}{2}\sin 2\omega t.\end{aligned}$$

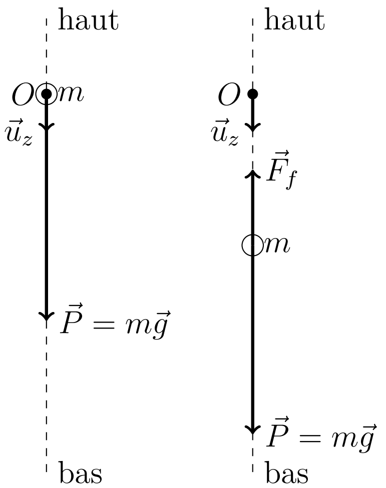
   On a $\vec{v}(t) \perp \vec{OP}(t)$ quand $\vec{v}(t) \cdot \vec{OP}(t) = 0$, ce qui correspond à la condition $\sin 2\omega t = 0$. Du cercle trigonométrique, on a donc que $2\omega t = k\pi, \forall k$ nombre entier. En remplaçant $\omega = 3\pi/2$ et simplifiant pour t on a $t = \frac{k\pi}{2\times(3\pi/2)} = k/3$. Dans l'intervale $t \in [0, 1]$s, cette restriction correspond à $\boxed{t \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}\text{s}}$.

   Réponse 2 (intuitive): Depuis la tracée de la trajectoire, on constate que pour $\boxed{t \in \{0, 1/3, 2/3, 1\}\text{s}}$ on a $\vec{v}(t) \perp \vec{OP}(t)$.

Q3 (8 pts): Le parachutiste

Un parachutiste de masse m est largué d'un hélicoptère en vol stationnaire (c'est-à-dire immobile). On travaillera avec un axe $\vec{u}_z$ vertical et orienté vers le bas avec une origine choisie au point de largage (à $t = 0\,\text{s}, z(t = 0) = 0\,\text{m}$). La trajectoire du parachutiste est donc rectiligne et parallèle à l'axe $\vec{u}_z$. Il saute à $t = 0\,\text{s}$ avec une vitesse initiale nulle. Au début, il n'ouvre pas son parachute, on considérera donc qu'il est en chute libre, donc accéléré avec l'accéleration de la pesanteur $\vec{g} = g\vec{u}_z$ ($g > 0$). Puis à l'instant $t = t_1$, avec une vitesse $v(t_1) = v_{max}$, il ouvre son parachute. On considérera alors des forces de frottements $\vec{F}_f$ que lui ralenti jusqu'à une vitesse limite v_L en $t = t_2$ ($v(t_2) = v_L$), qui reste constante jusqu'à son atterrissage à $t = t_3$. De façon simplifié on va considérer que $F_f(t) = \begin{cases} F_f^{12} & t_1 \le t \le t_2 \\ F_f^{23} & t_2 \le t \le t_3 \end{cases}$ ($F_f(t)$ n'étant pas défini pour $t < t_1$).

1. (2,5 pt) Dessinez l'ensemble des forces qui s'appliquent au parachutiste: i) pour $t \in [0, t_1]$ et ii) pour $t \in [t_1, t_3]$ (n'oubliez pas de placer le vecteur $\vec{u}_z$).



(a) cas i). (b) cas ii).

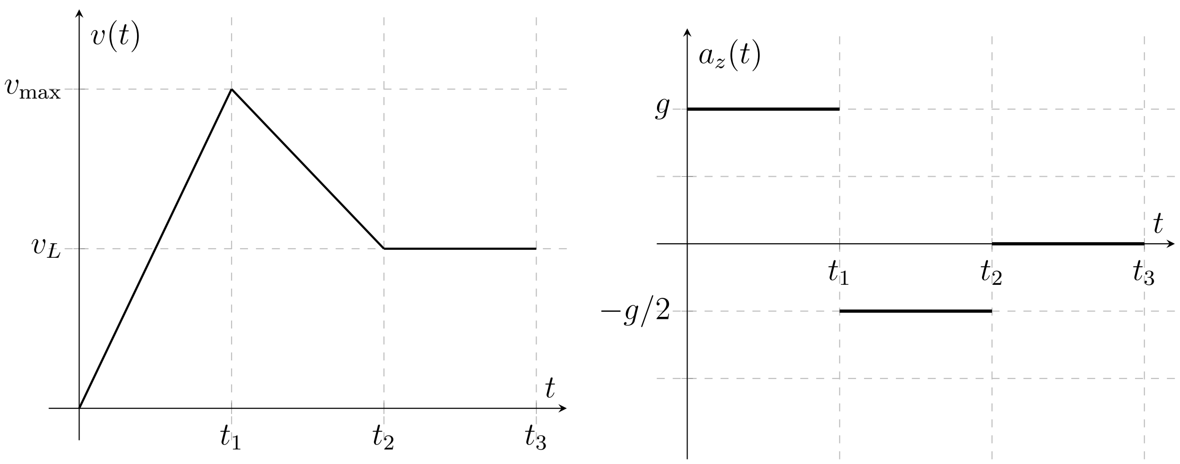
2. (2,5 pts) Ecrivez le Principe Fondamentale de la Dynamique (PFD) pour les cas: i) pour $t \in [0, t_1]$ et ii) pour $t \in [t_1, t_3]$.
Réponse: En appliquant le PFD:

   i) $\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a}(t)}$, $\forall t \in [0, t_1]$.

   ii) $\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_f(t) + \vec{P} = m\vec{a}(t)}$, $\forall t \in (t_1, t_3]$. (ou projection sa en z: $-F_f(t) + mg = ma_z(t)$).

3. (2,5 pts) Etant donné l'évolution de la vitesse ci-dessous, tracer l'accélération en supposant $v_{\max} = 2v_L$ et $t_2 = 2t_1$. **Justificatif:** En $t \in [0, t_1]$ c'est la chute libre, donc $a_z(t) = g$. En $t \in [t_2, t_3]$ la vitesse est constant, donc $a_z(t) = 0\text{m/s}^2$. En $t \in [t_1, t_2]$, la pente de la vitesse est constant et vaut:

$$a_z(t) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(v_{max}/2) - v_{max}}{2t_1 - t_1} = -\frac{1}{2} \times \frac{v_{max}}{t_1} = -\frac{1}{2}g$$



(a) Composante z de la vitesse. (b) Composante z de l'accéleration.

4. (1,5 pts - bônus) En utilisant le PFD de l'exercice 2) cas ii) et les accélérations moyennes de l'exercice 3) pour les intervalles $[t_1, t_2]$ et $[t_2, t_3]$, trouvez les magnitudes F_f^{12} et F_f^{23} en fonction de g et m.
Réponse:

   i) $t \in [t_1, t_2]$:

$$-F_f^{12} + mg = -m(g/2) \Rightarrow \boxed{F_f^{12} = 3mg/2}.$$

   i) $t \in [t_2, t_3]$:

$$-F_f^{23} + mg = m \times 0 \Rightarrow \boxed{F_f^{23} = mg}.$$