2^{éme} Contrôle Continu de Mécanique du Point 1 (10/12/2024) - Faculté de Sciences et Technologie - UPEC
Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA (`felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr`)

NOM:____________________ Prénom: ________________ Numéro: ________

Licence:____________________ Groupe: ________________ Note: ______

Rappels (regarder le tableau aussi)

- Calculatrices et téléphones : **interdits**.
- N'oubliez pas d'inscrire vos **noms** sur toutes les feuilles.
- Pensez à numéroter vos pages comme X/Y, où Y c'est le nombre totale de pages, e.g., 2/4, deuxième page parmi 4.
- Pensez à indiquer les **unités** dans vos réponses, ainsi que les **flèches** au-dessus des vecteurs, etc.
- Quelques relations en repère polaire, avec l'angle θ mesuré par rapport à $\vec{u}_x$:

$$\begin{aligned}\vec{u}_r(t) &= \cos\theta(t)\vec{u}_x + \sin\theta(t)\vec{u}_y,\\ \vec{u}_\theta(t) &= -\sin\theta(t)\vec{u}_x + \cos\theta(t)\vec{u}_y,\\ \vec{v}(t) &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta,\\ \vec{a}(t) &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

- Theorème du l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum_{\vec{F}} W_{A\to B}(\vec{F})$$

- Travail réalisé par une force $\vec{F}$:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

- Derivées et primitives importants:

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (\sin x)' = \cos x$$
$$\int \cos x dx = \sin x + k \quad \int \sin x dx = -\cos x + k$$

- Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une primitive de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on a donc, $F'(x) = f(x)$ et:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Q1 : Cinématique en coordonées polaires (7pts)

Soit $\vec{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$, la position du point matériel exprimée en coordonnées polaires. On s'intéresse à démontrer certaines équations du rappel.

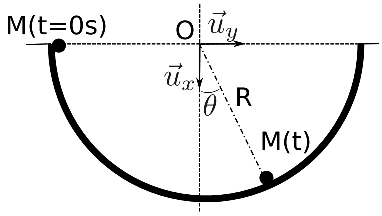
1. (2,0 pts) Déterminez $\dot{\vec{u}}_r$ et $\dot{\vec{u}}_\theta$ en fonction de $\dot{\theta}$, $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.
2. (1,5 pts) En utilisant le résultat de a), montrez l'expression de $\vec{v}(t)$, la vitesse.
3. (2,0 pts) En utilisant les résultats des parties a) et b), montrez l'expression de $\vec{a}(t)$, l'accélération.
4. (1,5 pts) Sous l'hypothèse d'un mouvement circulaire ($r(t) = R$, constant), simplifiez les expressions de $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ pour ce cas particulier.

Q2 : Un esquimau tombé dans un trou (13,5pts)

Un enfant esquimau tombe dans un trou sur la neige alors qu'il jouait avec ses amis aux alentours de l'extrémité gauche de ce trou. Ce dernier a la forme d'une demi-sphère de rayon R et de centre O. L'enfant glisse vers le fond du trou sous l'effet d'une force de frottement $\vec{f}$, telle que $f = \alpha R_N$, où R_N est la norme de force de réaction normale $\vec{R}_N$ exercée par le trou sur l'enfant, f est la norme de $\vec{f}$, et α est une constante positive.

La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M de masse m, est décrite par l'angle θ, mesuré par rapport à $\vec{u}_x$ (qui augmente dans la direction de $\vec{u}_y$). La norme de l'accélération de la pesanteur est notée g, et le vecteur $\vec{g} = g\vec{u}_x$ pointe vers le bas.

L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de l'enfant pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \theta_{\max}\right]$ et $\dot{\theta} > 0\,\mathrm{rad/s}$, c'est-à-dire depuis l'extrémité gauche du trou jusqu'à l'angle $\theta_{\max}$ où le mouvement s'inverse (la vitesse angulaire change de signe). (Remarque : on se fixe ce cadre car le cas général est un peu plus complexe).



a) (0,75 pts) S'agit-il d'un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme ? Justifiez votre réponse.

b) (1,5 pts) Effectuez un bilan des forces en dessinant les vecteurs forces agissant sur l'enfant et en exprimant ces forces en coordonnées polaires.

c) (2,0 pts) Appliquez le principe fondamental de la dynamique (PFD) en coordonnées polaires et explicitez les deux équations résultantes.

d) (2,0 pts) En combinant les deux équations obtenues à la question précédente pour éliminer la dépendance à R_N (inconnue), établissez une équation différentielle décrivant ce problème.

e) (2,0 pts) Calculez les travaux effectués par i) la force poids $\vec{P}$ et ii) la réaction normale $\vec{R}_N$, entre $\theta_A = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta_B = \theta_{\max}$.

f) (2,0 pts) L'équation différentielle obtenue en d) étant difficile à résoudre, on approche donc la force de frottement variable par sa valeur moyenne $\bar{f}$, avec $\vec{f} = -\bar{f}\vec{u}_\theta$. Déterminez $W_{A\to B}(\vec{f})$, le travail effectué par la force de frottement entre A et B.

g) (2,0 pts) Sachant que la vitesse initiale de l'enfant est nulle, utilisez le théorème de l'énergie cinétique pour établir une équation permettant de déterminer $\theta_{\max}$, où la vitesse à B est nulle aussi. (Cette équation étant difficile à résoudre à la main, il n'est pas nécessaire de la résoudre ici.)

h) (1,25 pts) En l'absence de frottement, l'angle $\theta_{\max}$ sera-t-il plus grand ou plus petit ? Justifiez votre réponse à l'aide du théorème de l'énergie cinétique. Si cet angle peut être déterminé facilement, calculez-le.

Corrigé CC2 Maths MP1 10/12/24

Q1

a) i) $\dot{\vec{u_r}} = ?$

$\vec{u_r}(t) = \cos\theta(t)\vec{u_x} + \sin\theta(t)\vec{u_y}$

$\dot{\vec{u_r}}(t) = -\sin\theta(t)\dot{\theta}(t)\vec{u_x} + \cos\theta(t)\dot{\theta}(t)\vec{u_y}$

$= \dot{\theta}(t)\Big[\underbrace{-\sin\theta(t)\vec{u_x} + \cos\theta(t)\vec{u_y}}_{\vec{u_\theta}}\Big]$

$\boxed{\dot{\vec{u_r}} = \dot{\theta}(t)\vec{u_\theta}}$

ii) $\dot{\vec{u_\theta}} = ?$

$\vec{u_\theta}(t) = -\sin\theta(t)\vec{u_x} + \cos\theta(t)\vec{u_y}$

$\dot{\vec{u_\theta}}(t) = \dot{\theta}\big(\underbrace{-\cos\theta\,\vec{u_x} - \sin\theta\,\vec{u_y}}_{= -\vec{u_r}}\big)$

$\boxed{\dot{\vec{u_\theta}} = -\dot{\theta}\vec{u_r}}$

b) $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{OM} = \frac{d}{dt}\big(r(t)\vec{u_r}(t)\big)$

$= \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\vec{u_r}}$

$= \boxed{\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}}$

c) $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \ddot{r}\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\vec{u_r}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\dot{\vec{u_\theta}}$

$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u_\theta}}$

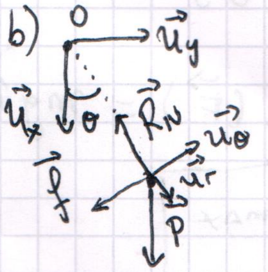
d) pour $r(t) = R \Rightarrow \dot{r} = 0,\ \ddot{r} = 0$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$, $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$

Q2

a) mouvement circulaire non uniforme, car $\dot{\theta}$ varie donc $\|\vec{v}\| \neq$ cte.

b)



$\vec{R_N} = -R_N\vec{u_r}$

$\vec{f} = -f\vec{u_\theta} = -\alpha R_N\vec{u_\theta}$

$\vec{P} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$

c) $\sum\vec{F} = m\vec{a} = m(-R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta})$

$$\Rightarrow \begin{cases} -R_N + mg\cos\theta = -R\dot{\theta}^2 m & (\vec{u_r})\ (1) \\ -\alpha R_N - mg\sin\theta = R\ddot{\theta}m & (\vec{u_\theta})\ (2) \end{cases}$$

d) $(-\alpha)\times(1) + (2)$ résulte:

$\alpha\cancel{R_N} - \alpha mg\cos\theta = m\alpha R\dot{\theta}^2$

$-\cancel{\alpha R_N} - mg\sin\theta = mR\ddot{\theta}$ (+)

$\boxed{-mg(\alpha\cos\theta + \sin\theta) = mR(\alpha\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta})}$

e) $W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}} mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})\cdot R\vec{u_\theta}\,d\theta$

$= mgR\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}}(-\sin\theta)\,d\theta = mgR\cos\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}}$

$= mgR\left(\cos\theta_{max} - \cos -\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{mgR\cos\theta_{max}}$

$W_{A\to B}(\vec{R_N}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}} -R_N\vec{u_r}\cdot R\vec{u_\theta}\,d\theta = 0$ J.

f) $W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}} -f\vec{u_\theta}\cdot R\vec{u_\theta}\,d\theta$

$= -fR\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}} d\theta = -fR\,\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_{max}} = \boxed{-fR\left(\theta_{max} + \frac{\pi}{2}\right)}$

g) $E_c(A) = E_c(t=0) = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = 0\ J$
$E_c(B) = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = 0\ J$
$\Big\}\ \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = 0\,J.$

• $\Delta E_c = 0 = \sum W_{A\to B}(\vec{F}) = mgR\cos\theta_{max} - R\bar{f}\left(\theta_{max} + \frac{\pi}{2}\right) + 0$

$\Rightarrow \boxed{\theta_{max} + \frac{\pi}{2} = \frac{mg}{\bar{f}} \cos\theta_{max}}.$

h) Si le frottement est negligé $W_{A\to B}(\vec{f}) = 0\ J.$, on aura donc $\Delta E_c = 0 = W_{A\to B}(\vec{P}) = mgR\cos\theta_{max}$, depuis le Th. Énergie Cinétique

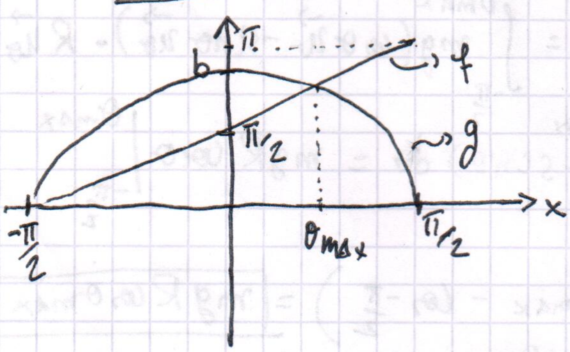
$\Rightarrow \theta_{max} = \arccos 0 \Rightarrow \theta_{max} = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$.

Comme $-\frac{\pi}{2}$ est l'angle initial $\boxed{\theta_{max} = \frac{\pi}{2}}$.

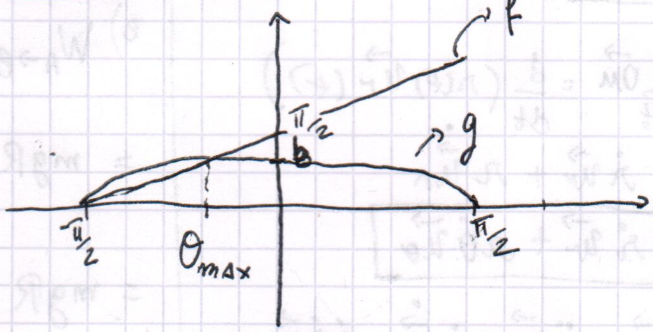
Soit $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ et $g(x) = b\cos x$, où $b = \frac{mg}{\bar{f}} > 0$, $\bar{f} \neq 0$.

θ_{max} est tel que $f(\theta_{max}) = g(\theta_{max})$.

Cas 1 : $b > \pi/2$



cas 2 : $b < \pi/2$



Dans les deux cas $\theta_{max} < \pi/2$, donc pour le cas sans frottement on aura θ_{max} maximale, ce qui était déjà attendu car il n'y aura pas dissipation d'énergie mécanique.