1^{er} Contrôle Continu de Mécanique du Point 1 (12/11/2024) - Faculté de Sciences et Technologie - UPEC
Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA (`felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr`)

NOM:______________________________ Prénom: ______________________ Numéro: ________

Licence:______________________________ Groupe: ______________________ Note: _______

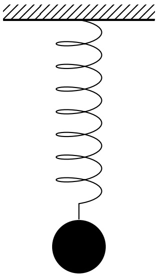
Instructions et règles

- Durée : $1h10\,\text{min}$ (après instructions).
- Il est bien sûr interdit d'utiliser des calculettes et portables!
- N'oubliez pas les unités à la fin du calcul et flèches pour les vecteurs.
- $\pi \approx 3$ afin de faciliter les calculs.
- $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$, $\int e^{at}dt = \frac{1}{a}e^{at} + k$.
- $\lim_{t\to\infty} e^{at} = +\infty$ et $\lim_{t\to\infty} e^{-at} = 0$, avec $a > 0$.
- Période d'oscilation : $T = 2\pi/\omega$.

Q2 (10 pts) : Ressort verticale

On considère le ressort verticale ci-dessous avec raideur k et longueur au repos ℓ_0. Une masse m est attaché au bout du ressort et l'acclèration de la pesanteur g pointe vers le bas.

1. $(1,0$ pts) Après avoir placé l'axe verticale $\vec{u}_y$ et l'origine O d'un répère cartésien (selon votre convenience), exprimer les forces qui agissent sur m.
2. $(1,0$ pts) Etablir le PFD pour ce système et ensuite le projecter sur l'axe y pour établir l'EDO associé.
3. $(1,5$ pts) Déterminer la position d'équilibre y_{eq} pour ce système (obs: équilibre = absence d'accélération).
4. $(1,5$ pts) Vérifier que la solution du type $y(t) = y_{eq} + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ satisfait l'EDO du problème, où A, B et ω sont des constants à déterminer.
5. $(1,5$ pts) Déterminer ω, A et B pour le cas où $y(0) = y_{eq}$ et $\dot{y}(0) = v_0$, en fonction de k, m et v_0.
6. $(1,5$ pts) Pour $k = 36N/m$, $m = 1g$ $v_0 = 6m/s$, déterminer ω, A et B et le période T.
7. $(2,0$ pts) Tracer en détail la position $y(t)$ et vitesse $\dot{y}(t)$ pour $t \in [0s, 2\times T]$.



Q2 (10 pts): Le nageur

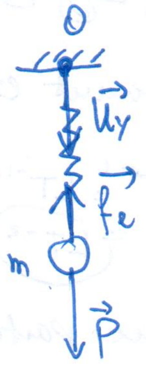
Un nageur de masse $m = 80kg$ commence son mouvement en repos à l'instant $t = 0s$ au point O. On va supposer d'abord que le mouvement est rectigline selon l'axe horizontale $\vec{u}_x$ (vecteur unitaire) et on choisi O comme l'origine. La vitesse horizontale est donné par $v_x(t) = A(1 - e^{-\frac{b}{A}t})$, avec A et b des constantes positives. Le nageur exerce une force dite de propulsion $\vec{F}_p(t)$ pointé vers le sens du mouvement, tandis l'eau lui exerce une force de frottement $\vec{F}_f(t)$ (la traînée), contraire au mouvement.

1. (1,5 pt) Déterminer l'accélération $a_x(t)$ et position $x(t)$.
2. (1,25 pt) Qu'est-ce que se passe avec l'accélération $a_x(t)$ quand t est grand (t tend vers l'infini)? et quand $t = 0s$?
3. (1,25 pt) Qu'est-ce que se passe avec vitesse $v_x(t)$ quand t est grand (t tend vers l'infini)? et quand $t = 0$?
4. (1,0 pt) Déterminer les dimensions de A et b. Qu'est-ce que ces deux constants réprésentent physiquement?
5. (1,5 pt) En prenant également en compte l'axe verticale $\vec{u}_y$, faire le bilan des forces et écrire le PFD en projectant sur les deux axes.
6. (1,0 pt) En considérant que la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ équilibre la force poids sur la direction $\vec{u}_y$, calculer $\vec{F}_A$ (obs: le résultat numérique sera donné en utilisant $g = 10m/s^2$ et en format vectoriel).
7. (1,5 pts) En considérant que la force de frottement est donné par $\vec{F}_{frot}(t) = -B\vec{v}(t)$, determiner la dimension de la constant B et la force de propulsion $\vec{F}_{prop}(t)$ en fonction de A, b, B et m.
8. (1,0 pts) Quand est-ce que la force de propulsion s'équilibre avec la force de frottement? A ce moment, déterminer F_p en fonction de A et B.

Corrigé CC1 - ~~[illegible]~~ SP1 GP3 Méca point ; 12/11/2024.

Q1.

1)



$\vec P = mg\,\vec u_y$

$\vec f_e = -k(y-l_0)\,\vec u_y$

2) $\sum \vec F = m\vec a \Rightarrow mg\,\vec u_y - k(y-l_0)\,\vec u_y = m\vec a$

$\Rightarrow mg - k(y-l_0) = m\,\ddot y(t)$

$\Rightarrow \boxed{\ddot y(t) + \frac{k}{m} y = g + \frac{k}{m} l_0}$. (2)

3) $y_{eq} \Leftrightarrow \ddot y(t) = 0$

$\Rightarrow \frac{k}{m} y_{eq} = g + \frac{k}{m} l_0$

$\boxed{y_{eq} = \frac{gm}{k} + l_0}$

4) $y(t) = y_{eq} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\ddot y(t) = -\omega^2 (A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

$= -\omega^2 (y(t) - y_{eq})$

en remplaçant en (2)

$-\omega^2 (y(t) - y_{eq}) + \frac{k}{m} y(t) = g + \frac{k}{m} l_0$

$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) y(t) = -\omega^2 y_{eq} + \frac{k}{m}\underbrace{\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)}_{y_{eq}}$

$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) y(t) = \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) y_{eq}$

$\Rightarrow \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right)\left(y(t) - y_{eq}\right) = 0$

Si $y(t) \neq y_{eq}$, il faut choisir ω de façon approprié pour satisfaire l'EDO

5) $-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$y(0) = y_{eq}$, $\dot y(0) = V_0$ (conditions initiales)

$y(0) = y_{eq} + A\cos(0) + B\sin(0)$

$= y_{eq} + A \underset{\uparrow\ \text{condition.}}{=} y_{eq} \Rightarrow \boxed{A = 0}$ m.

$\dot y(t) = -\omega A \sin\omega t + \omega B\cos\omega t$

$\dot y(0) = -\omega A \cdot 0 + \omega B \cdot 1 = \omega B \underset{\text{condition}}{=} V_0$

$\Rightarrow \boxed{B = \frac{V_0}{\omega}}$

6) $k = 36$ N/m , $m = 1$ g $= 10^{-3}$ kg , $V_0 = 6$ m/s

$\omega = \sqrt{\frac{36}{10^{-3}}} = \sqrt{6^2 \cdot 10^2 \cdot 10}$

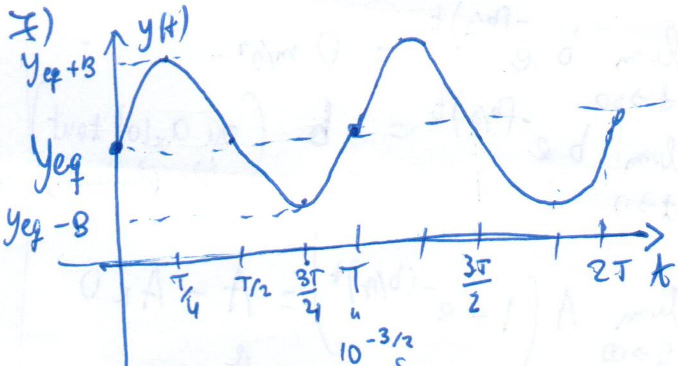
$= 6 \cdot 10\sqrt{10} = 60\sqrt{10}$ rad/s.

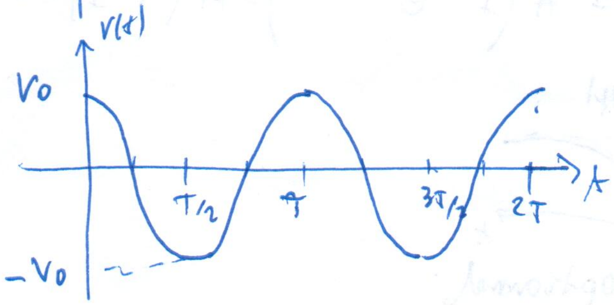
$A = 0$ m

$B = \frac{6}{60\sqrt{10}} = \frac{10^{-1}}{\sqrt{10}} = 10^{-1} \times 10^{-1/2} = 10^{-3/2}$ m.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\times 3}{60\sqrt{10}} = \frac{10^{-1}}{\sqrt{10}} = 10^{-3/2}$ s

7)





Q2

1) $V_x(t) = A\left(1 - e^{-(b/A)t}\right)$

$a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = A\left(0 - \left(\frac{-b}{A}\right)e^{-(b/A)t}\right)$

$= \frac{b}{A} \times A \times e^{-(b/A)t} = b\, e^{-(b/A)t}$

$X(t) = \int V_x(t)\,dt = \int A\left(1 - e^{(-b/A)t}\right)dt + k$

$= A\left(t - \frac{1}{\left(\frac{-b}{A}\right)} e^{-\frac{b}{A}t}\right) + k$

$= A\left(t + \frac{A}{b} e^{-\frac{b}{A}t}\right) + k$

$x(0) = A\left(0 + \frac{A}{b} e^{0}\right) + k = \frac{A^2}{b} + k = 0$

$k = -\frac{A^2}{b}$.

$X(t) = At + \frac{A^2}{b} e^{(-b/A)t} + \frac{A^2}{b}$

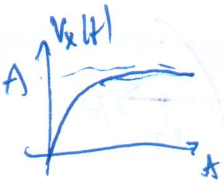
$= At + \frac{A^2}{b}\left(1 + e^{-b/A\,t}\right)$

2) $\lim_{t\to\infty} b\, e^{-(b/A)t} = 0\ m/s^2$

$\lim_{t\to 0} b\, e^{-(b/A)t} = b$ (ou $a_x(0)$ tout simplement)

3) $\lim_{t\to\infty} A\left(1 - e^{-(b/A)t}\right) = A - A\times 0 = A$

$V_x(0) = A\left(1 - e^{(-b/A)\times 0}\right) = A(1-1) = 0\ m/s$.



optionnel.

4)

$[A] = [V_x] = LT^{-1}$ car $\left[1 - e^{(-\frac{b}{A})t}\right] = 1$

~~pour b : $\left[\frac{-b}{A}\right] =$ (car l'argument~~

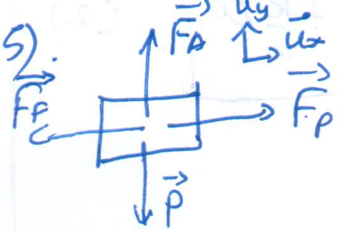
pour b : $\left[\frac{-b}{A} t\right] = 1$ (argument expo

$\frac{[b]}{[A]} T = 1 \Rightarrow [b] = [A]T^{-1} = LT^{-1}T^{-1} = LT^{-2}$

A : vitesse physiquement, en particul la vitesse maximale.

b : Accélération, en particulier l'accélération initiale.

5)



$\vec{F_A}$: archimède

$\vec{P}$: poids.

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} x: & F_P - F_f = m\, a_x(t) \\ y: & F_A - P = m\, a_y(t) \end{cases}$ ~~équilibre~~

6)

$F_A - P = m \times \overset{0\ \text{equilibre}}{a_y} = 0$

$F_A = P = m \times g = 80 \times 10 = 800\ N$.

7) $\vec{F_f} = -B\vec{V}(t)$ $\quad [\vec{F_f}] = [B][\vec{V}]$

$F_f = -BV_x$ $\quad MLT^{-2} = [B]\,LT^{-1}$

$[B] = MT^{-1}$

du PFD :

$F_P = F_f + m\,a_x(t) = -BV_x(t) + m\,a_x(t)$

$= -BA\left(1 - e^{-\frac{b}{A}t}\right) + m \times b\, e^{(-b/A)t}$

$= -BA + (BA + mb)\, e^{(-b/A)t}$.

8) À l'infini car la l'accélération est nulle.

Alternative : $F_f \xrightarrow{t\to\infty} -BA$, $F_p \xrightarrow{t\to\infty} -BA$) = la même chose