Faculté de Sciences et Technologie - UPEC
Préparation 1^{er} Contrôle Continu de Mécanique du Point 2 (07/03/2024)

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA
felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr

Diagnostique

Rappels

- Dérivé d'un fonction composé: $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) g'(x)$.
- Produit scalaire en deux dimensions : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \|a\| \|b\| \cos\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- Quelques relations en repère polaire avec l'angle θ mesuré par rapport $\vec{u}_x$ (ci-dessous dépendance explicite du temps omis, $r = r(t), \theta = \theta(t), \vec{u}_r = \vec{u}_r(t), \vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(t)$):

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_r &= \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y, \quad \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y, \quad , \\
\dot{\vec{u}}_r &= \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{u}_r, \\
\vec{v}(t) &= \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta, \quad \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta
\end{aligned}
$$

- Règle de la main droite (Figure 1).

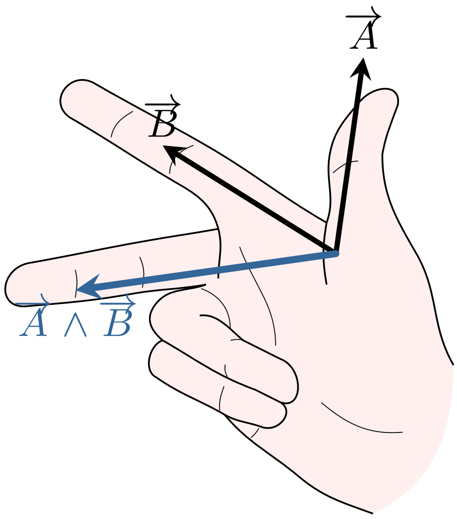


Figure 1: Schéma de la règle de main droite.

Q1 Produit Vectoriel

Dans la Figure 2, le vecteur $\vec{B}$ est aligné vers $\vec{u}_y$ et $\vec{A}$ se trouve dans le plan formé par $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.

a) Dessiner le vecteur $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ dans la Figure 2 (la taille de la flèche n'est pas important).

b) Calculer $\|\vec{C}\|$ en sachant que $\|\vec{B}\| = 1$ et en fonction des constants de la figure?

c) Calculer $\vec{A}$ en fonction de h et θ.

d) Calculer $\vec{C}$ avec l'expression du produit vectoriel et vérifier que $\|\vec{C}\|$ correspond au résultat trouvé dans b).

e) En prenant $\vec{D} = D_x \vec{u}_x$, calculer la valeur de D_x tel que $\vec{B} \wedge \vec{D} = -2\vec{C}$.

f) Dans le plan x-z de la Figure 3, dessiner les vecteurs $\vec{u}_y$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ et $\vec{B} \wedge \vec{D}$. Utilisez respectivement les notations $\otimes$ ou $\odot$ pour représenter un vecteur qui rentre ou qui sort du plan de feuille.

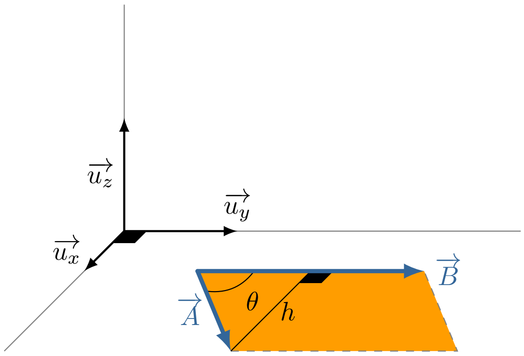


Figure 2

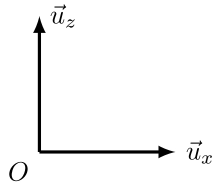


Figure 3

Q1 (14 pts) : skateur dans un half-pipe (analogue pendule)

Un skateur de masse m est sur un half-pipe semi-circulaire (moitié d'un cercle) de rayon R. On va considérer le skateur comme une particule M qui ne décolle jamais du half-pipe, c'est-à-dire, il sera toujours à une distance R de l'origine O. On repère la position du skateur par l'angle θ qu'il fait avec la vertical descendent depuis O. La norme de l'accéleration de la pesanteur est dénoté g (le vecteur $\vec{g}$ pointe vers le bas). On va étudier ce mouvement en repère polaire.

1. (0,5 pts) Complétez la Figure 1 ci-dessous en plaçant θ, $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ selon la convention usuelle (voir rappel si besoin et notez qu'il y a de flèches en plus). **réponse** En bleu:

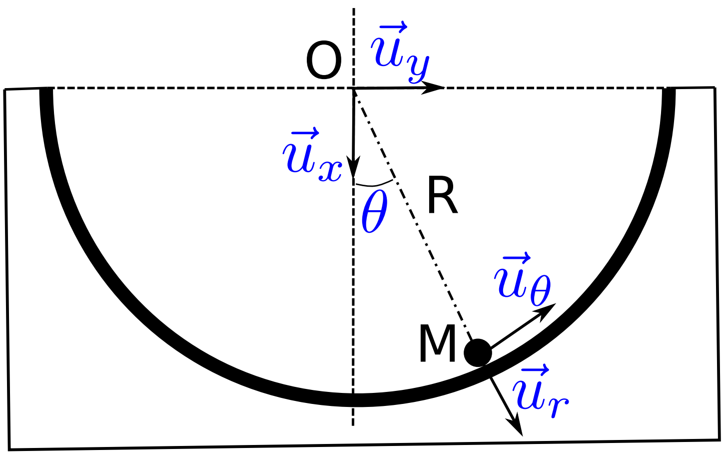
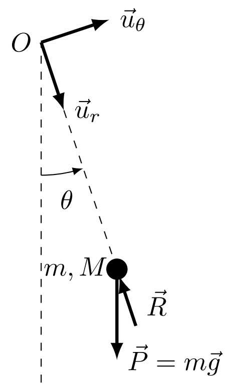


Figure 4

2. (1 pts) Faire un bilan de forces (sans frottement) appliquer sur la particule M et donner les expressions de toutes les forces en repère polaire (n'oubliez pas de dessiner ces vecteurs).
   réponse: $\boxed{\vec{P} = mg(-\sin\theta\vec{u}_\theta + \cos\ \theta\vec{u}_r)}$ et $\boxed{\vec{R}_N = -R_N\vec{u}_r}$ (les vecteurs de base peuvent être placés n'importe où).



3. (1 pts) Donner les expressions simplifiés pour ce type de mouvement pour les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ en repère polaire (voir rappel).
   réponse: Comme $r = R = cte$, donc $\ddot{r} = \dot{r} = 0$. On a donc:

$$\boxed{\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

4. (1 pts) Appliquer le principe fondamentale de la dynamique (PFD) et les projeter sur l'axe $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_r$.
   réponse: du PFD, on a $m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R}_N$. En composants on a

$$\boxed{\begin{cases} -mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} \quad (\text{sur } \vec{u}_\theta), \\ mg\cos\ \theta - R_N = -mR\dot{\theta}^2 \quad (\text{sur } \vec{u}_r) \end{cases}}$$

5. (1 pts) En utilisant le PFD sur $\vec{u}_\theta$, déduire l'équation différentiel qui gouverne ce mouvement en utilisant l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ pour des petites oscillations.
   réponse: $\boxed{R\ddot{\theta} + g\theta = 0}$.

6. (1 pts) Vérifiez qu'une solution du type $\theta(t) = A\sin\omega t$ peut satisfaire l'équation précédent. Donner aussi l'expression pour ω en fonction de g et R.
   réponse: En replaçant $\ddot{\theta} = -\omega^2 A\sin\omega t$ sur l'ED on a

$$(-\omega^2 R + g)A\sin\omega t = 0.$$

   Cette équation est vrai si : $A = 0, \forall\omega, t$ (pas très amusant) et $\boxed{\omega = \sqrt{g/R}}, \forall A, t$.

7. (1 pts) Dans l'instant initial le skateur est au tout au fond du half-pipe, avec $\theta(0) = 0$, et il imprime une vitesse angulaire (par exemple en s'autopropulsant avec ces pieds) de sorte que $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$. Déterminez la constant A en fonction de $\dot{\theta}_0$ et ω. Qu'est-ce que représente A et donner sa dimension.

   réponse: D'abord on vérifie $\theta(0) = A\sin\omega \times 0 = 0$, ce qui correspond à la condition initiale. Par contre cette condition ne nous permet pas de trouver A. Prenons sa dérivé dans l'instant $t = 0$: $\dot{\theta}(0) = \omega A\cos\omega \times 0 = \omega A$. De la condition initiale de la vitesse angulaire, on trouve que $\omega A = \dot{\theta}_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}}$. Finalement A représente l'angle maximale qui la particule M atteint, ce qui est une grandeur sans dimension (ou égale 1). Cette interprétation vient directement de l'expression de $\theta(t)$. Alternativement on trouve que A est sans dimension car $\dot{\theta}_0$ et ω ont les mêmes dimensions.

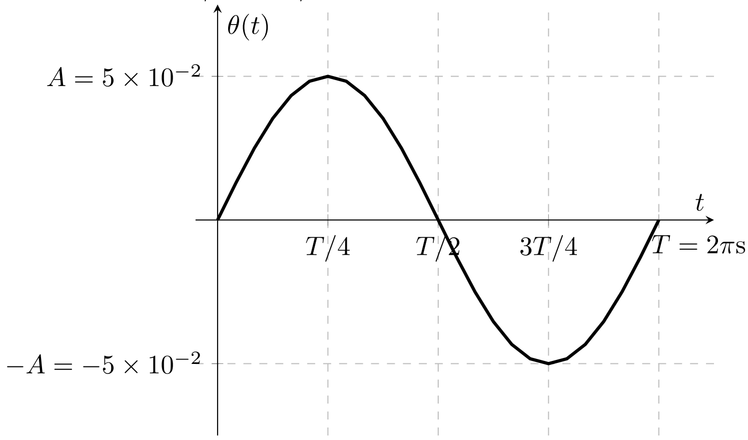
8. (0,5 pts) Ce mouvement circulaire est-il uniforme ou non-uniforme? pourquoi?
   réponse: Non-uniforme car la vitesse angulaire n'est pas constant. [1].

9. (1 pts) Pour le cas particulier de $R = 10$m, $g = 10$m/s^2, $\dot{\theta}_0 = 5 \times 10^{-2}$rad/s, calculer ω et A.
   réponse: $\omega = \sqrt{10/10} = \boxed{1\,\text{rad/s}}$ et $A = 5 \times 10^{-2}/1 = \boxed{5 \times 10^{-1}\text{rad}}$. Obs: rad est optionnel.

10. (1 pts) Pour ce cas particulier, tracer $\theta(t)$ pour $t \in [0\text{s}, \text{T}]$, où T est temps nécessaire pour que la fonction sinus complète son cycle. N'oubliez pas de calculer T (en fonction de π) et d'écrire la valeur de T et A sur le dessin.

[1] Le mouvement est accéléré ($\vec{a} \neq \vec{0}$) même pour le cas uniforme (vitesse angulaire constant, c'est-à-dire, $\ddot{\theta} = 0$).

réponse: $T = 2\pi/\omega = 2\pi/1 = 2\pi$s.



11. (1 pts) Donner l'expression d'énergie cinétique générique en fonction de R, m et $\dot{\theta}$ (utilisez la formule de vitesse du l'exercise 3).
   réponse: $E_c = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta}\vec{u}_\theta)\cdot(R\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = \boxed{\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2}$.

12. (1 pts) Pour le cas particulier l'exercise 9 et pour $m = 80$kg, calculer l'énergie cinétique du skateur de masse à l'instant $t = 0$s. **réponse:** $E_c^0 = E_c(t=0) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2}\times 80\times 10^2\times(5\times 10^{-2})^2 = 40\times 25\times 10^{-2} = \boxed{10\text{J}}$.

13. (1 pts) Donner l'expression du travail $W_{0\to f}(\vec{P})$ réalisé par la force de poids entre $\theta_0 = 0\,\text{rad}$ et θ_f, en fonction des valeurs génériques de m, g, θ_f, et R.
   réponse: Comme $d\vec{OM} = Rd\theta\vec{u}_\theta$, on prend en considération juste la composant θ de la force poids. On a donc $W_{0\to f}(\vec{P}) = \displaystyle\int_0^{\theta_f} -mg\sin\theta R d\theta = mgR\cos\theta\Big|_0^{\theta_f} = \boxed{mgR(\cos\ \theta_f - 1)}$.

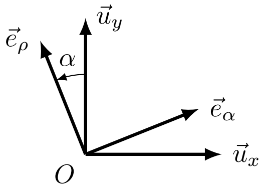
14. (1 pts) En utilisant le théorème d'énergie cinétique, donner l'expression pour $\dot{\theta}_0$ nécessaire pour que le skateur arrive jusqu'au bord supérieur du half-pipe (à $\theta_f = \pi/2$) mais sans le dépasser.
   réponse: Sachant que $\vec{R}_N \perp d\vec{OM}$ son travail est nulle. Comme M ne peut pas dépasser le bord supérieur, sa vitesse doit être nulle à $\theta_f = \pi/2$, donc $E_c^f = 0$J. Dans l'instant initiale $E_c^0 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2$. Finalement, du TEC, viens que [2]
   $$E_c^f - E_c^0 = W_{0\to f}(\vec{P}) \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2 = mgR(\cos\pi/2 - 1)$$
   $$-\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2 = -mgR \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2\times g}{R}}}.$$

15. (1 pts) Maintenant, une force de frottement constant est présent $\vec{f} = -f\vec{u}_\theta$ (en supposant $\dot{\theta}_0 > 0$), donner une expression $\dot{\theta}_0$ sous les mêmes conditions du problème précédent.
   réponse: Le travail de la force de frottement est $W_{0\to f}(\vec{f}) = \int_0^{\pi/2} -fRd\theta = -fR\pi/2$. Finalement, du TEC, viens que
   $$E_c^f - E_c^0 = W_{0\to f}(\vec{P}) + W_{0\to f}(\vec{f}) \Rightarrow -\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2 = -mgR - fR(\pi/2)$$
   $$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2mg + f\pi}{mR}}}.$$

Q2 (6 pts) : repère polaire alternatif

Imaginons que dans une autre pays du monde la convention préféré pour le repère polaire est tel que la position d'une particule M soit paramétrisé par sa distance $\rho = \rho(t)$ (variable avec le temps) par rapport l'origine O et une angle $\alpha = \alpha(t)$ (variable avec le temps) mesuré par rapport à $\vec{u}_y$ de tel sorte que $\vec{e}_\rho = -\sin\alpha\vec{u}_x + \cos\alpha\vec{u}_y$ et $\vec{e}_\alpha = \cos\alpha\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_y$ représente les vecteurs radiale et circonférentielle de la base, respectivement (notez qu'on a utilisé d'autres lettres pour cette nouvelle base afin de ne pas confondre avec la notation du rappel).

1. (1,5pts) Dessinez le repère $R'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha)$ par rapport au repère cartésien $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ dans l'space ci-dessous.
   réponse:



[2]Pas besoin de résoudre le résultat finale.

2. (1,5pts) Vérifiez que $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha\}$ est une base orthonormale, c'est-à-dire, $\|\vec{e}_\rho\| = \|\vec{e}_\alpha\| = 1$ et $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\alpha = 0$.
réponse:

$$\begin{aligned}
\|\vec{e}_\rho\| &= \sqrt{(-\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2} = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1 \\
\|\vec{e}_\alpha\| &= \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = 1 \\
\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\alpha &= (-\sin\alpha) \times (\cos\alpha) + (\cos\alpha) \times (\sin\alpha) = 0
\end{aligned}$$

3. (1,5pts) Démontrez des expressions pour $\dot{\vec{e}}_\rho$ et $\dot{\vec{e}}_\alpha$ (analogues mais différents à celles du rappel). **réponse:**

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e}}_\rho &= -(\cos\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_x + (-\sin\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_y = \boxed{-\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha} \\
\dot{\vec{e}}_\alpha &= (-\sin\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_x + (\cos\alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_y = \boxed{\dot{\alpha}\vec{e}_\rho}
\end{aligned}$$

4. (1,5pts) En sachant que $O\vec{M} = \rho\vec{e}_\rho$, ou de manière explicite $O\vec{M}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(\alpha(t))$, dérivez ce vecteur pour obtenir la vitesse $\vec{v}$ (analogue mais pas exactement égal à celle du rappel).
réponse: $O\dot{\vec{M}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \boxed{\dot{\rho}\vec{e}_\rho - \rho\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha}$