

NOM: \_\_\_\_\_ Prénom: \_\_\_\_\_ Numéro: \_\_\_\_\_  
 Licence: \_\_\_\_\_ Groupe: \_\_\_\_\_ Note: \_\_\_\_\_

## Rappels (regarder le tableau aussi)

- Calculatrices et téléphones **interdits**.
- N'oubliez vos noms en toutes les feuilles, les unités, des flèches au-dessus des vecteurs, etc.
- Quelques relations en repère polaire avec l'angle  $\theta$  mesuré par rapport  $\vec{u}_x$ :

$$\begin{aligned}\vec{u}_r(t) &= \cos \theta(t) \vec{u}_x + \sin \theta(t) \vec{u}_y, \\ \vec{u}_\theta(t) &= -\sin \theta(t) \vec{u}_x + \cos \theta(t) \vec{u}_y, \\ \vec{v}(t) &= \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \\ \vec{a}(t) &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

- Théorème du l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

- Travail réalisé par une force  $\vec{F}$ :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Force élastique:

$$\vec{F}_e = -k(x - \ell_0) \vec{u}_x$$

- Dérivées et primitives importants:

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= -\sin x & (\sin x)' &= \cos x \\ \int \cos x dx &= \sin x + k & \int \sin x dx &= -\cos x + k\end{aligned}$$

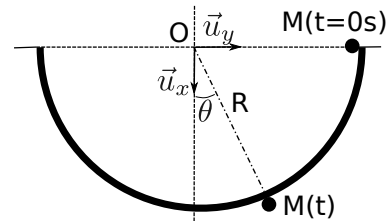
## Q1 : Travail fourni par un ressort (6pts)

Un chariot de masse  $m$  se déplace horizontalement avec vitesse  $v_0$  vers la gauche (donc  $\vec{v} = -v_0 \vec{u}_x$ ), jusqu'à toucher un ressort de raideur  $k$ , initialement non déformé avec taille  $\ell_0$ , sa longueur de repos. Depuis cet instant, le chariot ralentit jusqu'à vitesse nulle sous l'effet de la force élastique du ressort.

- (0,5pts) Pour ce mouvement, exprimez le déplacement élémentaire  $d\vec{r}$ .
- (1,5pts) Calculer le travail réalisé par le ressort entre les points  $x_A = \ell_0$  et  $x_B = \ell_0 - \delta$ .
- (1,5pts) En utilisant le théorème d'énergie cinétique, trouvez la déformation  $\delta$  tel que la vitesse du chariot en  $x_B$  est nulle.
- (1,5pts) pour  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 1000 \text{ N/m}$ ,  $v_0 = 2 \text{ m/s}$ ,  $\ell_0 = 1 \text{ m}$ , trouver la valeur de  $\delta$  du exercice précédent.
- (1,0pts) A-t-il d'autres forces qui agissent sur le chariot? quelles? pourquoi elles n'ont pas été prise en considération pour les calculs précédents?

## Q2 : Un esquimau tombé dans un trou (14,5pts)

Un enfant esquimau tombe dans un trou sur la neige quand il jouait avec ses amis aux alentours de l'extrémité droit du trou. Ce trou a le format d'une demi-sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$ . Il va glisser vers le fond du trou avec une force de frottement  $\vec{f}$ , tel que  $\frac{\|\vec{f}\|}{\|\vec{R}_N\|} = \alpha$ ,  $\vec{R}_N$  étant la force de réaction normale du trou sous l'esquimau et  $\alpha$  un coefficient positif. La position de l'enfant, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$  est repérée par l'angle  $\theta$  par rapport à  $\vec{u}_x$  (augmentant vers la direction de  $\vec{u}_y$ ). La norme de l'accélération de la pesanteur est dénoté  $g$ , tel  $\vec{g} = g \vec{u}_x$  pointe vers le bas. L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement entre  $\theta \in [0, \pi/2]$  et  $\dot{\theta} < 0 \text{ rad/s}$ , c'est-à-dire, entre l'extrémité droit du trou jusqu'au point plus bas (Obs: le cas général est un peu plus compliqué).



- (1,5pts) Faire un bilan de forces en dessinant les vecteurs forces et en les exprimant en coordonnées polaires.
- (1,5pts) Simplifiez les équations de vitesse et accélération du rappel pour le mouvement circulaire. Ce mouvement s'agit-il d'un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme? justifiez.
- (2,0pts) Appliquez le principe fondamentale de la dynamique (PFD) en coordonnées polaires et explicitiez les deux équations résultants.
- (2,0pts) En combinant ces deux équations pour éliminer la dépendance de  $R_N$  (inconnue), trouvez une équation différentielle pour ce problème.
- (2,0pt) Calculez le travail effectué par la force poids  $\vec{P}$  et la réaction normale  $\vec{R}_N$  entre  $\theta_A = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta_B = 0 \text{ rad}$ .
- (2,0pts) L'équation différentielle obtenue en d) étant très difficile à résoudre, on va donc approcher la force de frottement variable, par son valeur moyen  $\bar{f}$ , tel que  $\vec{f} = \bar{f} \vec{u}_\theta$ . Calculez  $W_{A \rightarrow B}(\bar{f})$ .
- (2,0pts) En sachant que la vitesse initiale du esquimau est nulle, en utilisant le théorème d'énergie cinétique, calculez sa vitesse quand il arrive en bas du trou.
- (1,25pts) La vitesse sera-t-il plus grand ou plus petite sans frottement? justifiez votre réponse avec le théorème d'énergie cinétique.