

NOM: _____ Prénom: _____ Numéro: _____
Licence: _____ Groupe: _____ Note: _____

Rappels (regarder le tableau aussi)

- Calculatrices et téléphones : **interdits**.
- N'oubliez pas d'inscrire vos **noms** sur toutes les feuilles.
- Pensez à numéroter vos pages comme X/Y , où Y c'est le nombre totale de pages, e.g., 2/4, deuxième page parmi 4.
- Pensez à indiquer les **unités** dans vos réponses, ainsi que les **flèches** au-dessus des vecteurs, etc.
- Quelques relations en repère polaire, avec l'angle θ mesuré par rapport à \vec{u}_x :

$$\begin{aligned}\vec{u}_r(t) &= \cos \theta(t) \vec{u}_x + \sin \theta(t) \vec{u}_y, \\ \vec{u}_\theta(t) &= -\sin \theta(t) \vec{u}_x + \cos \theta(t) \vec{u}_y, \\ \vec{v}(t) &= \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \\ \vec{a}(t) &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

- Travail réalisé par une force \vec{F} :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Dérivées et primitives importants:

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= -\sin x & (\sin x)' &= \cos x \\ \int \cos x dx &= \sin x + k & \int \sin x dx &= -\cos x + k\end{aligned}$$

- Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a donc, $F'(x) = f(x)$ et:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Q1 : Cinématique en coordonnées polaires (7pts)

Soit $\vec{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$, la position du point matériel exprimée en coordonnées polaires. On s'intéresse à démontrer certaines équations du rappel.

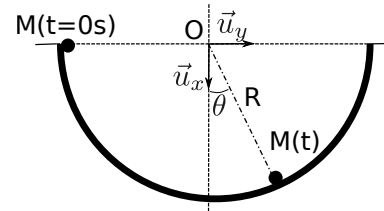
- (2,0 pts) Déterminez $\dot{\vec{u}}_r$ et $\dot{\vec{u}}_\theta$ en fonction de $\dot{\theta}$, \vec{u}_r et \vec{u}_θ .
- (1,5 pts) En utilisant le résultat de a), montrez l'expression de $\vec{v}(t)$, la vitesse.
- (2,0 pts) En utilisant les résultats des parties a) et b), montrez l'expression de $\vec{a}(t)$, l'accélération.
- (1,5 pts) Sous l'hypothèse d'un mouvement circulaire ($r(t) = R$, constant), simplifiez les expressions de $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ pour ce cas particulier.

Q2 : Un esquimau tombé dans un trou (13,5pts)

Un enfant esquimau tombe dans un trou sur la neige alors qu'il jouait avec ses amis aux alentours de l'extrémité gauche de ce trou. Ce dernier a la forme d'une demi-sphère de rayon R et de centre O . L'enfant glisse vers le fond du trou sous l'effet d'une force de frottement \vec{f} , telle que $f = \alpha R_N$, où R_N est la norme de la force de réaction normale \vec{R}_N exercée par le trou sur l'enfant, f est la norme de \vec{f} , et α est une constante positive.

La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M de masse m , est décrite par l'angle θ , mesuré par rapport à \vec{u}_x (qui augmente dans la direction de \vec{u}_y). La norme de l'accélération de la pesanteur est notée g , et le vecteur $\vec{g} = g\vec{u}_x$ pointe vers le bas.

L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement de l'enfant pour $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \theta_{\max}]$ et $\dot{\theta} > 0$ rad/s, c'est-à-dire depuis l'extrémité gauche du trou jusqu'à l'angle θ_{\max} où le mouvement s'inverse (la vitesse angulaire change de signe). (Remarque : on se fixe ce cadre car le cas général est un peu plus complexe).



- (0,75 pts) S'agit-il d'un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme ? Justifiez votre réponse.
- (1,5 pts) Effectuez un bilan des forces en dessinant les vecteurs forces agissant sur l'enfant et en exprimant ces forces en coordonnées polaires.
- (2,0 pts) Appliquez le principe fondamental de la dynamique (PFD) en coordonnées polaires et explicitez les deux équations résultantes.
- (2,0 pts) En combinant les deux équations obtenues à la question précédente pour éliminer la dépendance à R_N (inconnue), établissez une équation différentielle décrivant ce problème.
- (2,0 pts) Calculez les travaux effectués par i) la force poids \vec{P} et ii) la réaction normale \vec{R}_N , entre $\theta_A = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta_B = \theta_{\max}$.
- (2,0 pts) L'équation différentielle obtenue en d) étant difficile à résoudre, on approche donc la force de frottement variable par sa valeur moyenne \bar{f} , avec $\vec{f} = -\bar{f}\vec{u}_\theta$. Déterminez $W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$, le travail effectué par la force de frottement entre A et B.
- (2,0 pts) Sachant que la vitesse initiale de l'enfant est nulle, utilisez le théorème de l'énergie cinétique pour établir une équation permettant de déterminer θ_{\max} , où la vitesse à B est nulle aussi. (Cette équation étant difficile à résoudre à la main, il n'est pas nécessaire de la résoudre ici.)
- (1,25 pts) En l'absence de frottement, l'angle θ_{\max} sera-t-il plus grand ou plus petit ? Justifiez votre réponse à l'aide du théorème de l'énergie cinétique. Si cet angle peut être déterminé facilement, calculez-le.