

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA
felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr

Diagnostic

Rappels

- Dérivé d'une fonction composée: $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x)$.
- Produit scalaire en deux dimensions : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$, où θ est l'angle entre \vec{a} et \vec{b} .
- Quelques relations en repère polaire avec l'angle θ mesuré par rapport \vec{u}_x (ci-dessous dépendance explicite du temps omis, $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\vec{u}_r = \vec{u}_r(t)$, $\vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(t)$):

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y, \quad \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y, \quad \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta, \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{u}_r, \\ O\vec{M}(t) = r\vec{u}_r, \quad dO\vec{M}(t) = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta, \quad \vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

- Travail d'une force entre A et B : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot dO\vec{M}$
- Énergie cinétique en A (instant t_A) : $E_c^A = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(t_A)\|^2$
- Théorème d'énergie cinétique entre A et B : $E_c^B - E_c^A = \sum_{\vec{F}} W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$.

Q1 (14 pts) : skateur dans un half-pipe (analogue pendule)

Un skateur de masse m est sur un half-pipe semi-circulaire (moitié d'un cercle) de rayon R . On va considérer le skateur comme une particule M qui ne décolle jamais du half-pipe, c'est-à-dire, il sera toujours à une distance R de l'origine O . On repère la position du skateur par l'angle θ qu'il fait avec la vertical descendant depuis O . La norme de l'accélération de la pesanteur est dénoté g (le vecteur \vec{g} pointe vers le bas). On va étudier ce mouvement en repère polaire.

1. (0,5 pts) Complétez la Figure 1 ci-dessous en plaçant θ , \vec{u}_x , \vec{u}_y , \vec{u}_r , \vec{u}_θ selon la convention usuelle (voir rappel si besoin et notez qu'il y a de flèches en plus). **réponse** En bleu:

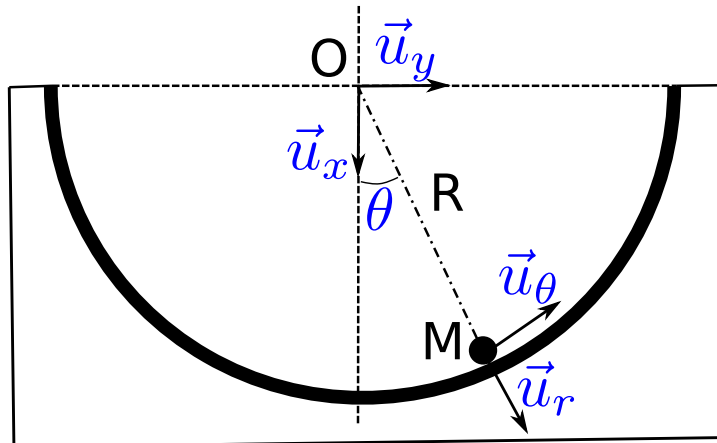
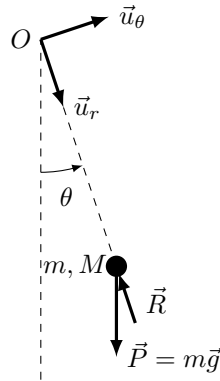


Figure 1

2. (1 pts) Faire un bilan de forces (sans frottement) appliquer sur la particule M et donner les expressions de toutes les forces en repère polaire (n'oubliez pas de dessiner ces vecteurs).

réponse: $\vec{P} = mg(-\sin \theta \vec{u}_\theta + \cos \theta \vec{u}_r)$ et $\vec{R}_N = -R_N \vec{u}_r$ (les vecteurs de base peuvent être placés n'importe où).



3. (1 pts) Donner les expressions simplifiées pour ce type de mouvement pour les vecteurs vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} en repère polaire (voir rappel).

réponse: Comme $r = R = cte$, donc $\ddot{r} = \dot{r} = 0$. On a donc:

$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \vec{a}(t) = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

4. (1 pts) Appliquer le principe fondamentale de la dynamique (PFD) et les projeter sur l'axe \vec{u}_θ et \vec{u}_r .

réponse: du PFD, on a $m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R}_N$. En composant on a

$$\begin{cases} -mg \sin \theta = mR\ddot{\theta} & (\text{sur } \vec{u}_\theta), \\ mg \cos \theta - R_N = -mR\dot{\theta}^2 & (\text{sur } \vec{u}_r) \end{cases}$$

5. (1 pts) En utilisant le PFD sur \vec{u}_θ , déduire l'équation différentiel qui gouverne ce mouvement en utilisant l'approximation $\sin \theta \approx \theta$ pour des petites oscillations.

réponse: $R\ddot{\theta} + g\theta = 0$.

6. (1 pts) Vérifiez qu'une solution du type $\theta(t) = A \sin \omega t$ peut satisfaire l'équation précédent. Donner aussi l'expression pour ω en fonction de g et R .

réponse: En remplaçant $\dot{\theta} = -\omega^2 A \sin \omega t$ sur l'ED on a

$$(-\omega^2 R + g)A \sin \omega t = 0.$$

Cette équation est vraie si : $A = 0, \forall \omega, t$ (pas très amusant) et $\omega = \sqrt{g/R}, \forall A, t$.

7. (1 pts) Dans l'instant initial le skateur est au tout au fond du half-pipe, avec $\theta(0) = 0$, et il imprime une vitesse angulaire (par exemple en s'autopropulsant avec ces pieds) de sorte que $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$. Déterminez la constante A en fonction de $\dot{\theta}_0$ et ω . Qu'est-ce que représente A et donner sa dimension.

réponse: D'abord on vérifie $\theta(0) = A \sin \omega \times 0 = 0$, ce qui correspond à la condition initiale. Par contre cette condition ne nous permet pas de trouver A . Prenons sa dérivée dans l'instant $t = 0$: $\dot{\theta}(0) = \omega A \cos \omega \times 0 = \omega A$. De la condition

initiale de la vitesse angulaire, on trouve que $\omega A = \dot{\theta}_0 \Rightarrow A = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}$. Finalement A représente l'angle maximale qui la particule M atteint, ce qui est une grandeur sans dimension (ou égale 1). Cette interprétation vient directement de l'expression de $\theta(t)$. Alternativement on trouve que A est sans dimension car $\dot{\theta}_0$ et ω ont les mêmes dimensions.

8. (0,5 pts) Ce mouvement circulaire est-il uniforme ou non-uniforme? pourquoi?

réponse: Non-uniforme car la vitesse angulaire n'est pas constant.¹

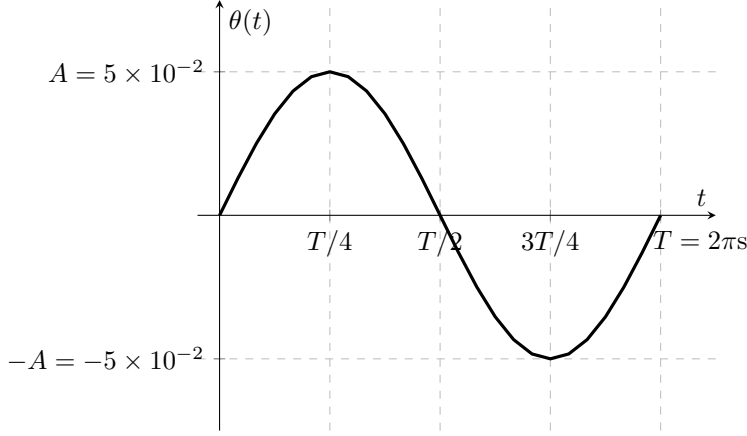
9. (1 pts) Pour le cas particulier de $R = 10\text{m}$, $g = 10\text{m/s}^2$, $\dot{\theta}_0 = 5 \times 10^{-2}\text{rad/s}$, calculer ω et A .

réponse: $\omega = \sqrt{10/10} = 1\text{rad/s}$ et $A = 5 \times 10^{-2}/1 = 5 \times 10^{-1}\text{rad}$. Obs: rad est optionnel.

10. (1 pts) Pour ce cas particulier, tracer $\theta(t)$ pour $t \in [0s, T]$, où T est temps nécessaire pour que la fonction sinus complète son cycle. N'oubliez pas de calculer T (en fonction de π) et d'écrire la valeur de T et A sur le dessin.

¹Le mouvement est accéléré ($\vec{a} \neq \vec{0}$) même pour le cas uniforme (vitesse angulaire constant, c'est-à-dire, $\ddot{\theta} = 0$).

réponse: $T = 2\pi/\omega = 2\pi/1 = 2\pi\text{s}$.



11. (1 pts) Donner l'expression d'énergie cinétique générique en fonction de R , m et $\dot{\theta}$ (utilisez la formule de vitesse du l'exercice 3).

réponse: $E_c = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta}\vec{u}_\theta) \cdot (R\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = \boxed{\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2}$.

12. (1 pts) Pour le cas particulier l'exercice 9 et pour $m = 80\text{kg}$, calculer l'énergie cinétique du skateur de masse à l'instant $t = 0\text{s}$. **réponse:** $E_c^0 = E_c(t = 0) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2} \times 80 \times 10^2 \times (5 \times 10^{-2})^2 = 40 \times 25 \times 10^{-2} = \boxed{10\text{J}}$.

13. (1 pts) Donner l'expression du travail $W_{0 \rightarrow f}(\vec{P})$ réalisé par la force de poids entre $\theta_0 = 0\text{rad}$ et θ_f , en fonction des valeurs génériques de m, g, θ_f , et R .

réponse: Comme $d\vec{OM} = R d\theta \vec{u}_\theta$, on prend en considération juste la composant θ de la force poids. On a donc $W_{0 \rightarrow f}(\vec{P}) = \int_0^{\theta_f} -mg \sin \theta R d\theta = mgR \cos \theta \Big|_0^{\theta_f} = \boxed{mgR(\cos \theta_f - 1)}$.

14. (1 pts) En utilisant le théorème d'énergie cinétique, donner l'expression pour $\dot{\theta}_0$ nécessaire pour que le skateur arrive jusqu'au bord supérieur du half-pipe (à $\theta_f = \pi/2$) mais sans le dépasser.

réponse: Sachant que $\vec{R}_N \perp d\vec{OM}$ son travail est nulle. Comme M ne peut pas dépasser le bord supérieur, sa vitesse doit être nulle à $\theta_f = \pi/2$, donc $E_c^f = 0\text{J}$. Dans l'instant initiale $E_c^0 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2$. Finalement, du TEC, viens que ²

$$E_c^f - E_c^0 = W_{0 \rightarrow f}(\vec{P}) \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2 = mgR(\cos \pi/2 - 1)$$

$$-\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2 = -mgR \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2 \times g}{R}}}$$

15. (1 pts) Maintenant, une force de frottement constant est présent $\vec{f} = -f\vec{u}_\theta$ (en supposant $\dot{\theta}_0 > 0$), donner une expression $\dot{\theta}_0$ sous les mêmes conditions du problème précédent.

réponse: Le travail de la force de frottement est $W_{0 \rightarrow f}(\vec{f}) = \int_0^{\pi/2} -f R d\theta = -fR\pi/2$. Finalement, du TEC, viens que

$$E_c^f - E_c^0 = W_{0 \rightarrow f}(\vec{P}) + W_{0 \rightarrow f}(\vec{f}) \Rightarrow -\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_0^2 = -mgR - fR(\pi/2)$$

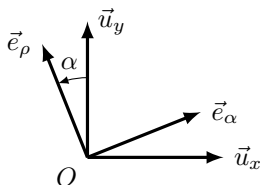
$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2mg + f\pi}{mR}}}$$

Q2 (6 pts) : repère polaire alternatif

Imaginons que dans une autre pays du monde la convention préféré pour le repère polaire est tel que la position d'une particule M soit paramétrisé par sa distance $\rho = \rho(t)$ (variable avec le temps) par rapport l'origine O et une angle $\alpha = \alpha(t)$ (variable avec le temps) mesuré par rapport à \vec{u}_y de tel sorte que $\vec{e}_\rho = -\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_y$ et $\vec{e}_\alpha = \cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_y$ représente les vecteurs radiale et circonférentielle de la base, respectivement (notez qu'on a utilisé d'autres lettres pour cette nouvelle base afin de ne pas confondre avec la notation du rappel).

1. (1,5pts) Dessinez le repère $R'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha)$ par rapport au repère cartésien $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ dans l'espace ci-dessous.

réponse:



²Pas besoin de résoudre le résultat finale.

2. (1,5pts) Vérifiez que $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\alpha\}$ est une base orthonormale, c'est-à-dire, $\|\vec{e}_\rho\| = \|\vec{e}_\alpha\| = 1$ et $\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\alpha = 0$.
réponse:

$$\begin{aligned}\|\vec{e}_\rho\| &= \sqrt{(-\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 1 \\ \|\vec{e}_\alpha\| &= \sqrt{(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2} = 1 \\ \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\alpha &= (-\sin \alpha) \times (\cos \alpha) + (\cos \alpha) \times (\sin \alpha) = 0\end{aligned}$$

3. (1,5pts) Démontrez des expressions pour $\dot{\vec{e}}_\rho$ et $\dot{\vec{e}}_\alpha$ (analogues mais différents à celles du rappel). **réponse:**

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_\rho &= -(\cos \alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_x + (-\sin \alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_y = \boxed{-\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha} \\ \dot{\vec{e}}_\alpha &= (-\sin \alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_x + (\cos \alpha)\dot{\alpha}\vec{u}_y = \boxed{\dot{\alpha}\vec{e}_\rho}\end{aligned}$$

4. (1,5pts) En sachant que $O\vec{M} = \rho\vec{e}_\rho$, ou de manière explicite $O\vec{M}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(\alpha(t))$, dérivez ce vecteur pour obtenir la vitesse \vec{v} (analogue mais pas exactement égal à celle du rappel).

réponse: $O\dot{\vec{M}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \boxed{\dot{\rho}\vec{e}_\rho - \rho\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha}$