1er Contrôle Continu de Mécanique du Point 1 (21/10/2025)
Faculté de Sciences et Technologie - UPEC
Responsable TD: Felipe ROCHA (`felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr`)
NOM:____________________ Prénom: ________ Numéro: ________
Licence:____________________ Groupe: ________ Note: ______

Instructions et règles

- Durée : $1h20\,\text{min}$ (après instructions).
- Calculettes et portables interdits!
- N'oubliez pas les unités à la fin du calcul et flèches pour les vecteurs.
- Dessins peuvent être sur la feuille ou le sujet du CC.
- $\pi \approx 3$ afin de faciliter les calculs.

Q1 (7 pts): Le nageur

Un nageur de masse $m = 72$ kg commence son mouvement à partir du repos à l'instant $t = 0$ s au point O. On suppose que le mouvement est rectiligne selon l'axe horizontal $\vec{u}_x$, et on choisit O comme origine. Sa position $x(t)$ (en mètres) est donnée par la fonction suivante :

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{18}t^2, & \text{pour } t \in [0,\ 30] \text{ s}, \\ 50 + \dfrac{10}{3}(t-30), & \text{pour } t \in (30,\ 60] \text{ s}. \end{cases} \tag{1}$$

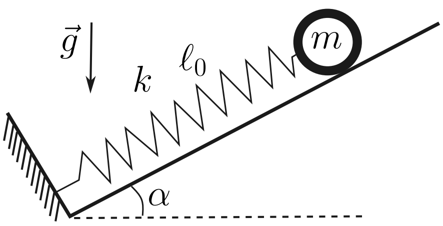
Le nageur exerce une force dite de propulsion orientée dans le sens du mouvement, tandis que l'eau exerce sur lui une force de frottement (la traînée) opposée au mouvement. On note la résultante de ces deux forces $\vec{F}(t)$.

1. (2,0 pts) Déterminer la vitesse $v_x(t)$ et l'accélération $a_x(t)$.
2. (2,5 pts) Tracer les courbes de $x(t)$, $v_x(t)$ et $a_x(t)$.
3. (1,5 pts) Appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) uniquement sur l'axe $\vec{u}_x$. Calculer $\vec{F}(t)$ pour les deux phases du mouvement.
4. (1,0 pt) Pendant la phase de mouvement rectiligne uniforme, le nageur exerce-t-il encore une force de propulsion ? Justifiez votre réponse.

Q2 (13 pts) : Ressort diagonale

On considère le ressort diagonal ci-dessous de raideur k et de longueur au repos ℓ_0. Une masse m est accrochée à l'extrémité du ressort et glisse sans frottement sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g}$ dirigée vers le bas.

1. (0,75 pt) Placer le repère cartésien $R(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ tel que les axes $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ soient respectivement parallèles et perpendiculaires au plan incliné.
2. (1,5 pt) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur m (schéma et expression vectorielle de chaque force).
3. (2,0 pts) Appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) au système. En projetant sur l'axe x, établir l'équation différentielle associée. En projetant sur l'axe y, calculer la réaction normale.
4. (1,5 pt) Déterminer la position d'équilibre x_{eq} pour ce système (remarque : équilibre = absence d'accélération).
5. (1,75 pt) Vérifier qu'une solution de la forme $x(t) = x_{\text{eq}} + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ satisfait l'équation différentielle du problème, où A, B et ω sont des constantes à déterminer.
6. (1,75 pt) Déterminer ω, A et B dans le cas $x(0) = x_{\text{eq}}$ et $\dot{x}(0) = v_0$, en fonction de k, m et v_0.
7. (1,75 pt) Pour $k = 9N/m$, $m = 1kg$ (ajouté au tableau), $v_0 = 6m/s$, déterminer ω, A, B et la période T.
8. (2,0 pts) Tracer en détail la position $x(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$ pour $t \in [0,\ 2T]$.



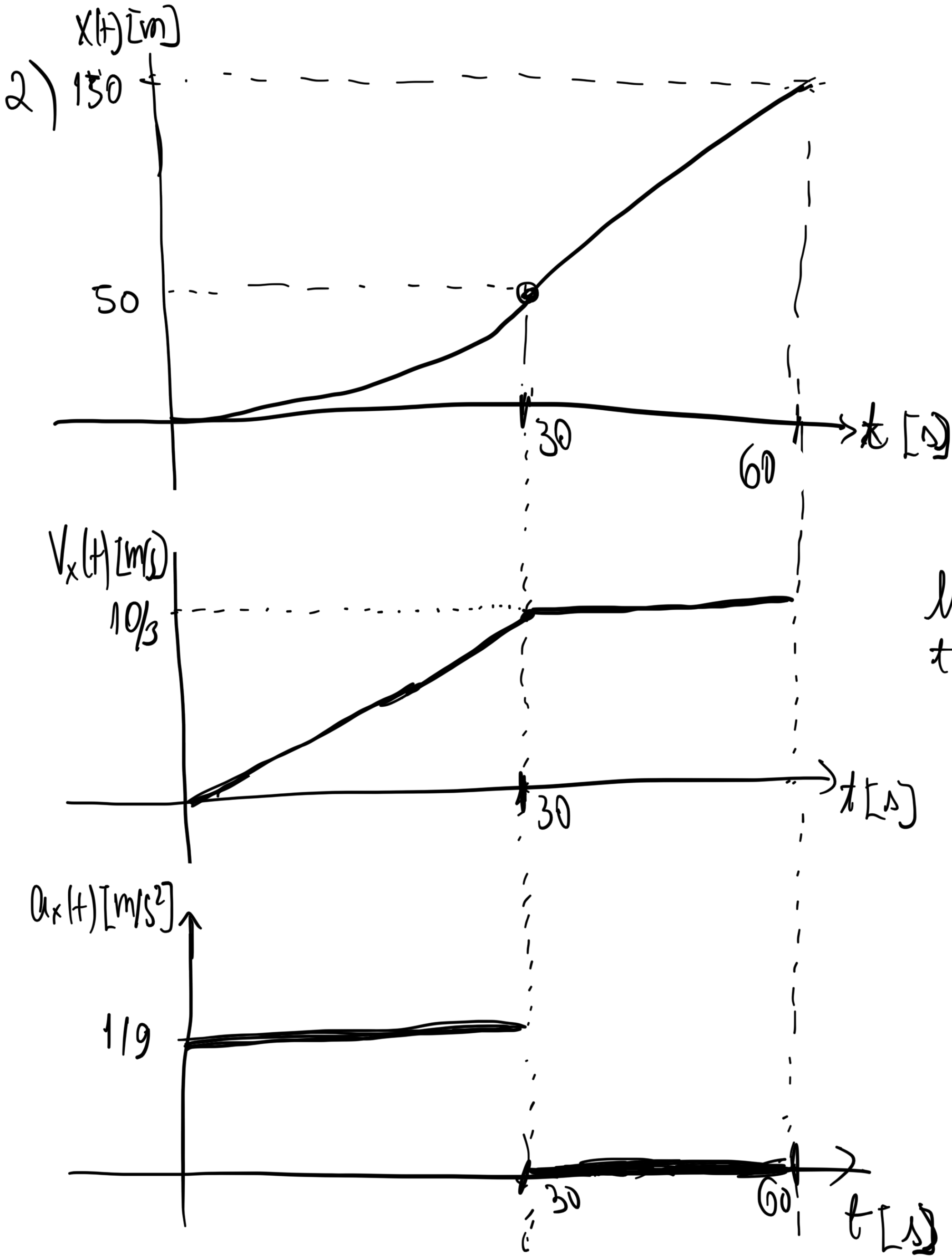
Q1

1) $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{18} t^2 , & t \in [0,30] , \\ 50 + \frac{10}{3}(t-30) , & t \in (30,60] \end{cases}$ $[m]$

$v_x(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{9} t , & t \in [0,30) \\ \frac{10}{3} , & t \in (30,60) \end{cases}$ $[m/s]$

$a_x(t) = \frac{d v_x(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{9} , & t \in (0,30) \\ 0 , & t \in (30,60) \end{cases}$ $[m/s^2]$

2)



Verification:

$\lim_{t \to 30^-} x(t) = \frac{1}{18}(30)^2 = \frac{\cancel{9} \cdot \cancel{100}^{50}}{\cancel{9} \cdot \cancel{2}} = 50m$

$\lim_{t \to 30^+} x(t) = 50 + \frac{10}{3}(30-30) = 50_m$

$x(60) = 50 + \frac{10}{3} \cdot (60-30)$
$= 50 + \frac{10}{3} \cdot 30 = 150m$

$\lim_{t \to 30^-} v_x(t) = \frac{1}{\cancel{9}_3} \cdot \cancel{30}^{10} = \frac{10}{3} = \lim_{t \to 30^+} v_x(t)$

3) $\vec{F}(t)$ est la resultante des forces à l'horizontal $\Rightarrow \vec{F}(t) = F(t)\vec{u_x}$

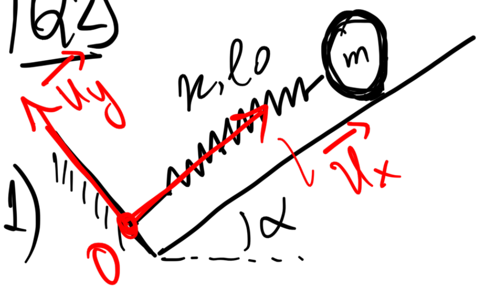
sur $\vec{u_x}$: $\left(\sum \vec{F_i}\right)\cdot\vec{u_x} = \left(m\vec{a}\right)\cdot\vec{u_x}$

$$F(t) = m a_x(t) = \begin{cases} \frac{70}{9} & , t\in(0,30) \\ 0 & , t\in(30,60) \end{cases} \quad [N]$$

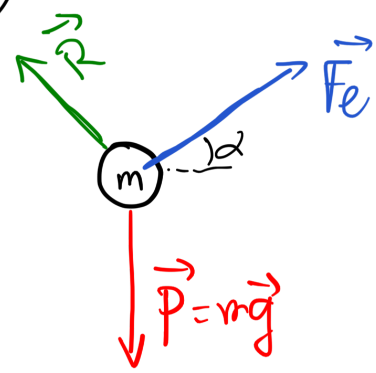
4) Oui, car F(t) étant nulle, cela veut dire tout simplement que la force de propulsion est égale, mais avec sens opposé, à la force de frottement (trainée). Comme la force de frottement est non-nulle car l'eau va empêcher le mouvement du nageur dès que sa vitesse est non-nulle, il est nécessaire donc une force de propulsion non-nulle appliqué au nageur.

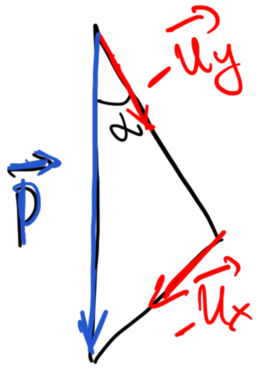
$\boxed{Q2}$

1)



2)





$\vec{P} = -mg\left(\sin\alpha\,\vec{u_x} + \cos\alpha\,\vec{u_y}\right)$

$\vec{R} = R\,\vec{u_y}$

$\vec{Fe} = -k(x-l_0)\,\vec{u_x}$

3) $\sum\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F_e} = m\ddot{x}(t)\,\vec{u_x}$ $\Rightarrow \begin{cases} -k(x(t)-l_0) - mg\sin\alpha = m\ddot{x}(t) & (\text{sur } \vec{u_x}) \\ R - mg\cos\alpha = 0 & (\text{sur } \vec{u_y}) \end{cases}$

conclusions :

i) $m\ddot{x}(t) + kx(t) = kl_0 - mg\sin\alpha$ (équation differentielle)

ii) $R = mg\cos\alpha$

4) pour $\ddot{x}(t)=0 \Rightarrow$ $$K x_{eq} = K l_0 + mg\sin\alpha$$
$$\Rightarrow x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$$

5) $$x(t) = x_{eq} + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 (A\cos\omega t + B\sin\omega t) = -\omega^2 (x(t) - x_{eq}).$$

en remplaçant :

$$-\omega^2 m (x(t) - x_{eq}) + K x(t) = \underbrace{K l_0 + mg\sin\alpha}_{K x_{eq}}$$

$$-\omega^2 m (x(t) - x_{eq}) + k(x(t) - x_{eq}) = 0$$

$$(-\omega^2 m + k)(x(t) - x_{eq}) = 0 \quad \forall t, x, A, B$$

$\Rightarrow -\omega^2 m + k = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (condition pour satisfaire l'équation différentielle).

6) $$x(0) = x_{eq} + A\cos 0 + B\sin 0 = x_{eq} + A = x_{eq} \Rightarrow A = 0$$
$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$
$$\dot{x}(0) = -\omega A\cdot\sin 0 + B\omega\cdot\cos 0 = +B\omega = V_0 \Rightarrow B = \frac{V_0}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ (de 5)}, \quad A = 0, \quad B = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = V_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

7) $k = 9\,N/m$, $V_0 = 6\,m/s$, $m = 1\,kg$ (donné au tableau).

$$\omega = \sqrt{\frac{9}{1}} = 3\,rad/s, \quad A = 0\,m, \quad B = 6\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{6}{3} = 2\,m.$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\cdot 3}{3} = 2\,s.$$

8) En resumé : $x(t) = x_{eq} + 2\sin 3t$

$\dot{x}(t) = 6\cos 3t$