$2^{éme}$ Contrôle Continu de Mécanique du Point 1 (10/12/2024) - Faculté de Sciences et Technologie - UPEC

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA (felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr)

NOM:______________________________ Prénom: ______________________ Numéro: _________

Licence:______________________________ Groupe: ______________________ Note: _______

Rappels (regarder le tableau aussi)

- Calculettes et téléphones **interdits**.
- N'oubliez vos noms en toutes les feuilles, les unités, des flèches au-dessus des vecteurs, etc.
- Quelques relations en repère polaire avec l'angle θ mesuré par rapport $\vec{u}_x$:

$$\vec{u}_r(t) = \cos\theta(t)\vec{u}_x + \sin\theta(t)\vec{u}_y,$$
$$\vec{u}_\theta(t) = -\sin\theta(t)\vec{u}_x + \cos\theta(t)\vec{u}_y,$$
$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta,$$
$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

- Theorème du l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum_{\vec{F}} W_{A\to B}(\vec{F})$$

- Travail réalisé par une force $\vec{F}$:

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

- Force élastique:

$$\vec{F}_e = -k(x-\ell_0)\vec{u}_x$$

- Derivées et primitives importants:

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (\sin x)' = \cos x$$
$$\int \cos x dx = \sin x + k \quad \int \sin x dx = -\cos x + k$$

Q1 : Travail fourni par un ressort (6pts)

Un chariot de masse m de déplace horizontalement avec vitesse v_0 vers la gauche (donc $\vec{v} = -v_0\vec{u}_x$), jusqu'à toucher un ressort de raideur k, initialement non deformée avec taille ℓ_0, sa longueur de repos. Depuis cet instant, le chariot ralenti jusqu'à vitesse nulle sous l'effet de la force élastique du ressort.

a) (0,5pts) Pour ce mouvement, exprimez le déplacement élementaire $d\vec{r}$.

b) (1,5pts) Calculer le travail réalisé par le ressort entre les points $x_A = \ell_0$ et $x_B = \ell_0 - \delta$.

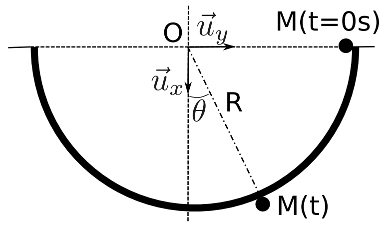
c) (1,5pts) En utilisant le théorème d'énérgie cinétique, trouvez la deformation δ tel que la vitesse du chariot en x_B est nulle.

d) (1,5pts) pour $m = 10$ kg, $k = 1000$ N/m, $v_0 = 2$ m/s, $\ell_0 =$ 1m, trouver la valeur de δ du exercice précédent.

e) (1,0pts) A-t-il d'autres forces qui agissent sur le chariot? quelles? pourquoi elles n'ont pas été prise en considération pour les calculs précédents?

Q2 : Un esquimau tombé dans un trou (14,5pts)

Un enfant esquimau tombe dans un trou sur la neige quand il jouait avec ses amis aux alentours de l'extremité droit du trou. Ce trou a le format d'une demi-sphère de rayon R et de centre O. Il va glisser vers le fond du trou avec un force de frottement $\vec{f}$, tel que $\frac{\|\vec{f}\|}{\|\vec{R}_N\|} = \alpha$, $\vec{R}_N$ étant la force de réaction normale du trou sous l'esquimau et α un coefficient positif. La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M de masse m est repérée par l'angle θ par rapport à $\vec{u}_x$ (augmentant vers la direction de $\vec{u}_y$). La norme de l'accéleration de la pesanteur est dénoté g, tel $\vec{g} = g\vec{u}_x$ pointe vers le bas. L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement entre $\theta \in [0, \pi/2]$ et $\dot{\theta} < 0$ rad/s, c'est-à-dire, entre l'extremité droit du trou jusqu'au point plus bas (Obs: le cas général est un peu plus compliqué).



a) (1,5pts) Faire un bilan de forces en dessinant les vecteurs forces et en les exprimant en coordonées polaires.

b) (1,5pts) Simplifiez les équations de vitesse et accélération du rappel pour le mouvement circulaire. Ce mouvement s'agit-il d'un mouvement circulaire uniforme ou non uniforme? justifiez.

c) (2,0pts) Appliquer le principe fondamentale de la dynamique (PFD) en coordonées polaires et explicitez les deux équations résultants.

d) (2,0pts) En combinant ces deux équations pour éliminer la dépendence de R_N (inconnue), trouvez une équation différentiel pour ce problème.

e) (2,0pt) Calculez le travail effectué par la force poids $\vec{P}$ et la réaction normale $\vec{R}_N$ entre $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_B = 0$ rad.

f) (2,0pts) L'équation différentiel obtenue en d) étant très difficile à résoudre, on va donc approcher la force de frottement variable, par son valeur moyen $\bar{f}$, tel que $\vec{f} = \bar{f}\vec{u}_\theta$. Calculez $W_{A\to B}(\vec{f})$.

g) (2,0pts) En sachant que la vitesse initiale du esquimau est nulle, en utilisant le thèoreme d'énergie cinétique, calculez sa vitesse quand il arrive en bas du trou.

h) (1,25pts) La vitesse sera-t-il plus grand ou plus petite sans frottement? justifiez votre réponse avec le thèoreme d'énergie cinétique.

Corrigé CC2 - SPI MP1 10/12/24

Q1

a) $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x$, car le mouvement se place juste dans l'horizontale

b)

$$W_{A\to B}(\vec{F}_e) = \int_{l_0}^{l_0-\delta} \left(-k(x-l_0)\vec{u}_x\right)\cdot\vec{u}_x\,dx$$

$$= \int_{l_0}^{l_0-\delta} -k(x-l_0)\,dx = -\frac{k}{2}(x-l_0)^2\Big|_{l_0}^{l_0-\delta}$$

$$= -\frac{k}{2}\left(-0^2 + (l_0-\delta-l_0)^2\right)$$

$$= -\frac{k}{2}\left(+\delta^2\right) = \boxed{-\frac{k}{2}\delta^2}$$

c) $E_c(A) = \frac{1}{2}mv_0^2$, $E_c(B) = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = 0J$

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{k}{2}\delta^2$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\,v_0$$

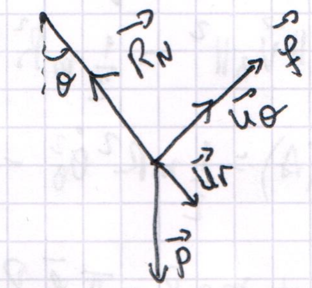
d) $\delta = \sqrt{\frac{10}{1000}}\,2 = \sqrt{10^{-2}}\cdot 2 = 10^{-1}\cdot 2$

$= 0,2\,m.$

e) Oui, la réaction normale et le poids. Elles sont orthogonales à $d\vec{r}$, donc elles auront le travail nulle.

Q2

a)



$$\vec{f} = \|\vec{f}\|\vec{u}_\theta = \alpha\,\overbrace{\|\vec{R}_N\|}^{R_N}\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{P} = mg\left(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta\right)$$

$$\vec{R}_N = -R_N\,\vec{u}_r$$

b) $r(t) = R \Rightarrow \dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$

$\vec{V} = R\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$, $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

Étant donné que $\dot{\theta} \neq cte$, $\|\vec{V}\| \neq cte$, donc le mouvement est circulaire non uniforme.

c)

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} mR\ddot{\theta} = \alpha R_N - mg\sin\theta & (\vec{u}_\theta) \\ -mR\dot{\theta}^2 = -R_N + mg\cos\theta & (\vec{u}_r) \end{cases}$$

d) $\alpha\times(Eq\ \vec{u}_r) + (Eq\ \vec{u}_\theta) =$ résulte

$$\Rightarrow mR\left(-\alpha\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\right) = mg\left(\alpha\cos\theta - \sin\theta\right)$$

e)

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_{\pi/2}^{0}\left(P_r\,\vec{u}_r + P_\theta\,\vec{u}_\theta\right)\cdot R\,d\theta\,\vec{u}_\theta$$

$$= R\int_{\pi/2}^{0}\Big(P_r\,\underbrace{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_\theta}_{0} + P_\theta\,\underbrace{\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_\theta}_{1}\Big)\,d\theta$$

$$= R\int_{\pi/2}^{0}\left(-mg\sin\theta\right)d\theta = mgR\cos\theta\Big|_{\pi/2}^{0}$$

$$= mgR\Big(\underbrace{\cos 0}_{1} - \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\Big) = mgR$$

$W_{A\to B}(\vec{R}_N) = 0J$ (car $\vec{R}_N \perp d\vec{r} = R\,d\theta\,\vec{u}_\theta$)

f)

$$W_{A\to B}(\vec{f}) = \int_{\pi/2}^{0}\bar{f}\,\cancel{\vec{u}_\theta}\cdot R\,\vec{u}_\theta\,d\theta = \bar{f}R\,\theta\Big|_{\pi/2}^{0}$$

$$= \bar{f}R\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\bar{f}R$$

g) $E_c(A) = E_c(t=0) = \frac{1}{2} m 0^2 = 0\,J$

$E_c(B) = \frac{1}{2} m \|\vec{V}_B\|^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_B^2$

• $\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_B^2 - 0 = \sum_{\vec{F}} W_{A\to B}(\vec{F}) = W_{A\to B}(\vec{R_N}) + W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{f})$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}_B^2 = 0 + mgR - \frac{\pi}{2} \bar{f} R$

$\dot{\theta}_B = -\sqrt{\dfrac{2mgR - \pi \bar{f} R}{mR^2}} = -\sqrt{\dfrac{2mg - \pi \bar{f}}{mR}}$ (obs $\dot{\theta}_B$ doit être negatif

$\vec{V}_B = R \dot{\theta}_B \vec{u_\theta} = -R\sqrt{\dfrac{2mg - \pi \bar{f}}{mR}} = -\sqrt{\dfrac{R(2mg - \pi \bar{f})}{m}}$

h) En utilisant le theorème d'énergie cinétique, on aura la même analyse de g) pour $\bar{f} = 0N$. En valeurs absolues la vitesse sans frottement sera plus important car

$|\dot{\theta}_B| = \sqrt{\dfrac{2mg}{mR}} > \sqrt{\dfrac{2mg - \pi \bar{f}}{mR}}$ (car $\bar{f}$ est positive).

pour $\|\vec{V}_B\|$ le raisonnement est analogue. En valeurs signées la vitesse (et vitesse angulaire) sera plus petite.