1^{er} Contrôle Continu de Mécanique du Point 2 (14/03/2024) - Faculté de Sciences et Technologie - UPEC

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA (felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr)

NOM:____________________ Prénom: ________________ Numéro: ________

Licence:____________________ Groupe: ________________ Note: ______

Rappels (regarder le tableau aussi)

- Calculettes et téléphones **interdits**.
- N'oubliez vos noms en toutes les feuilles, les unités, des flèches au-dessus des vecteurs, etc.
- Norme produit vectoriel: $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \|a\|\|b\|| \sin\theta(\vec{a}, \vec{b})|$.
- Si $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est dite une base orthonormé direct, on a: $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$, $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$, $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$.

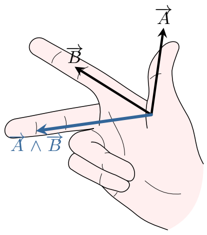


Figure 1: Régle de la main droite.

- $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$, $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ sont des bases orthonormés directs (dans cette l'ordre).
- Repère de Frénet : $\dot{s} = \|\vec{v}\|$, $\vec{v} = \dot{s}\vec{T}$ et $\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \dfrac{\dot{s}^2}{R}\vec{N}$
- Theorème du moment cinétique :

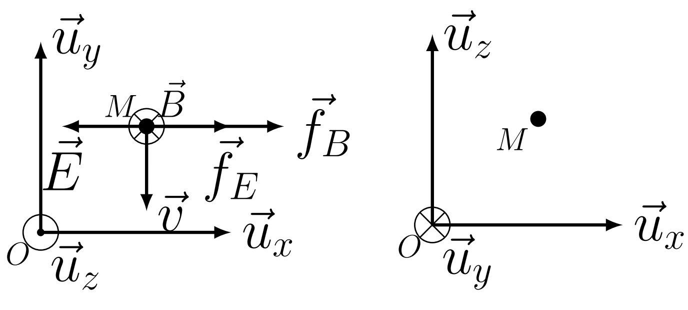
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}_0(\vec{f}), \quad \text{où } \vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}, \vec{M}_0(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}$$

Q1 Application du produit vectoriel dans la force électromagnétique (4pts)

La force électromagnétique appliqué à une particule M de charge q, vitesse $\vec{v}$, dans un champs électrique $\vec{E}$ et champs magnétique $\vec{B}$ est donné par $\vec{f}_{EB} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. On pose $\vec{f}_E = q\vec{E}$, $\vec{f}_B = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$, tel que $\vec{f}_{EB} = \vec{f}_E + \vec{f}_B$. On va considérer que q est **négatif** et $\vec{E} = -E\vec{u}_x$, $\vec{B} = -B\vec{u}_z$, $\vec{v} = -v\vec{u}_y$, avec E, B et v nombres **positifs**.

a) (1,5pts) L'ensemble des vecteurs du l'ennoncé sont affichés selon le plan Oxy dans la Figure 2(a), qui contient **1 (un)** erreur. Trouvez cette erreur et corrigez-le dans la Figure 2(a).

b) (2,5pts) Dessiner le même ensemble de vecteurs (y inclus la correction) selon le plan Oxz dans la Figure 2(b).



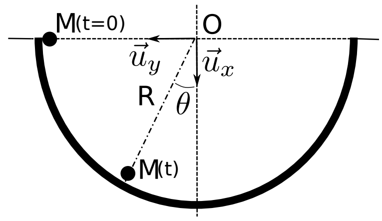
(a) Plan Oxy. (b) Plan Oxz.

Figure 2: Q2

Q2 : Un esquimau tombé dans un trou (8pts)

Un enfant esquimau tombe dans un trou sur la neige quand il jouait avec ses amis aux alentours de l'extremité gauche du trou. Ce trou a le format d'une demi-sphère de rayon R et de centre O. Il va glisser vers le fond du trou avec un frottement $\vec{f}$ (avec sa norme noté par f). La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M de masse m est repérée par l'angle θ par rapport à $\vec{u}_x$ (augmentant vers la direction de $\vec{u}_y$). La norme de l'accéleration de la pesanteur est dénoté g, tel $\vec{g} = g\vec{u}_x$ pointe vers le bas. L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement en repère de **Frénet**.

a) (1,5pt) Complétez la figure ci-dessous en plaçant $\vec{T}$ (**supposant** $\dot{\theta} < 0$) et $\vec{N}$.



b) (1,5pt) Donner les expressions de toutes les forces en repère de Frénet.

c) (2,0pt) Appliquer le principe fondamentale de la dynamique (PFD) en repère de Frénet.

d) (1,0pt) Expliciter $\theta(t = 0)$ et $\dot{s}(t = 0)$.

e) (2,0pt) On va supposer que $f = \alpha R_N$ ($\alpha > 0$ un coefficient donné). Pour l'instant initial, déterminer $R_N(t = 0), f(t = 0)$ et $\ddot{s}(t = 0)$ en utilisant les deux équations différentielles trouvés dans le PFD.

Q3 : Le modèle de Bohr (8pts)

Le modèle de Bohr représente l'atome d'hydrogène constitué par un proton ponctuel de charge q et de masse m_P autour duquel gravite, en orbite circulaire, un électron de charge $-q$ et de masse m_e. On note O le centre de l'orbite (le proton), M la position du électron, R son rayon et v la norme de la vitesse orbitale (tangentielle au cercle). On néglige toutes les forces, sauf la force de Coulomb de norme $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (obs1: le vecteur $\vec{F}$ sera défini en fonction du repère choisi, obs2: ε_0 est une constante).

a) (2 pts) Dessiner un schèma du problème avec les éléments décrits ci-dessus, y inclus le vecteur $\vec{F}$ agissant sur l'électron. Répresenter aussi les vecteurs de base repère (cylindrique ou de Frénet selon votre préférence).

b) (1,5pt) Ecrire les vecteurs $\vec{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{F}$ dans la base choisi.

c) (1,5pts) Montrer que $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{0}$.

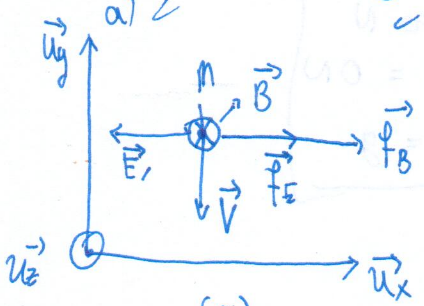
d) (1,5pts) Le moment cinétique $\vec{L}_0$ du électron sera-t-il conservé? justifier votre réponse en utilisant le theorème du moment cinétique.

e) (1,5pt) Calculer $\vec{L}_0$.

Corrigé CCI - Chim Méca Point 2 : 14/03/2024

Q1 : $\vec{E} = -E\vec{u_x}$, $\vec{B} = -B\vec{u_z}$, $\vec{V} = -v\vec{u_y}$, $E, B, v > 0$, $\begin{cases} \vec{f_B} = q(\vec{V} \wedge \vec{B}) \\ \vec{f_E} = q\vec{E} \end{cases}$, $q<$

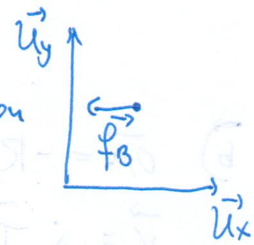
a)



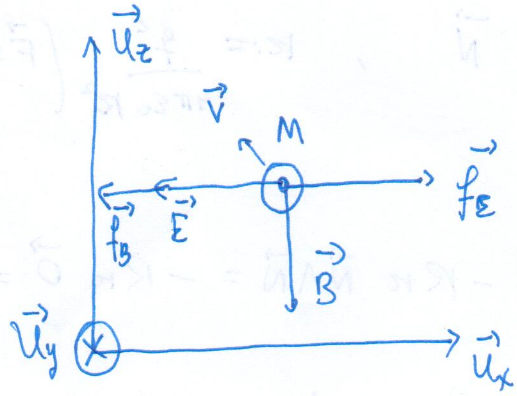
(a)

Réponse : erreur : $\vec{f_B}$ pointe vers $(-\vec{u_x})$

Correction

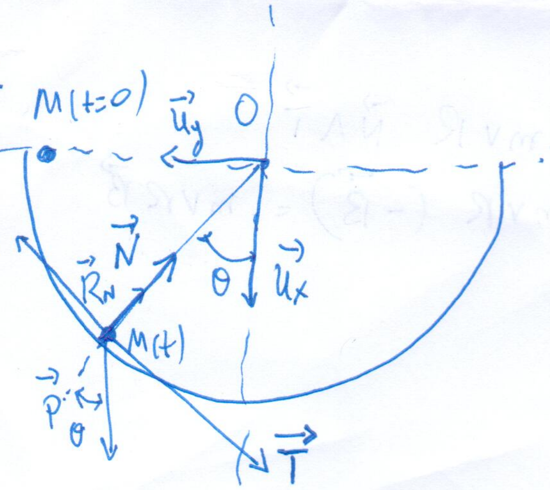


b)



Q2

a)



b) $\vec{P} = mg(-\cos\theta\,\vec{N} + \sin\theta\,\vec{T})$

$\vec{f} = -f\,\vec{T}$

$\vec{R_N} = R_N\,\vec{N}$

c) $m\vec{a} = \Sigma\vec{F} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{s} = mg\sin\theta - f & (1) \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{R} = -mg\cos\theta + R_N & (2) \end{cases}$

$\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \dfrac{\dot{s}^2}{R}\vec{N}$

d) $\theta(0) = \dfrac{\pi}{2}$ rad et $\dot{s}(0) = R\,\dot{\theta}(0) = 0$ m/s

e) $f = \alpha R_N$, (1) et (2) pour $t=0$ deviennent $\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{s}(0) = mg\sin\dfrac{\pi}{2} - f(0) & (1^*) \\ m.\dfrac{0^2}{R} = -mg\cos\dfrac{\pi}{2} + R_N(0) & (2^*) \end{cases}$

$\Rightarrow$ de $(2^*) \Rightarrow 0 = 0 + R_N(0) \Rightarrow R_N(0) = 0$ Newtons.

$\rightarrow f(0) = \alpha R_N(0) = \alpha \cdot 0 = 0$ Newtons.

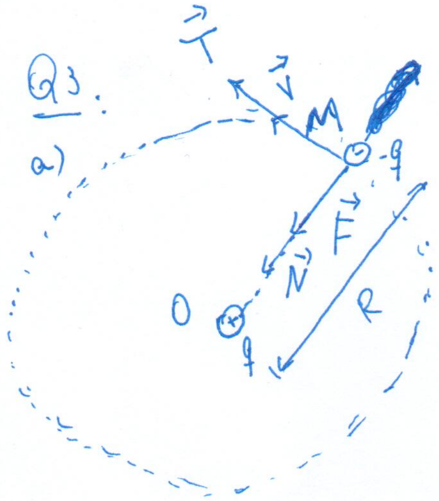
e) Continuation.

de (1*) $m\ddot{s}(0) = mg \cdot 1 - 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{s}(0) = g}$

en résumé : $\boxed{\begin{array}{l} \varphi(0) = 0 \text{ N} \\ R_N(0) = 0 \text{ N} \\ \ddot{s}(0) = g \end{array}}$

Q3.

a)



b) $\vec{OM} = -R\vec{N}$

$\vec{V} = \dot{s}\,\vec{T} = v\,\vec{T}$

$\vec{F} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\vec{N}$, $k := \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ $(\vec{F} = k\vec{N})$ pour simplifier.

c) $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = -R\vec{N} \wedge k\vec{N} = -Rk\,\vec{N}\wedge\vec{N} = -Rk\,\vec{0} = \vec{0}$

d) Oui, car $\dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$, donc $\vec{L_O}$ = vecteur constant

e) $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{V} = -R\vec{N} \wedge mv\vec{T} = -mvR\ \vec{N}\wedge\vec{T}$

$= -mvR\,(-\vec{B}) = mvR\,\vec{B}$