1er Contrôle Continu de Mécanique du Point 2 (13/03/2024) - Faculté de Sciences et Technologie - UPEC

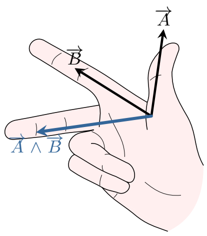
Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA (felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr)

NOM:____________________ Prénom: ________________ Numéro: ________

Licence:____________________ Groupe: ________________ Note: ______

Rappels (regarder le tableau aussi)

- Calculettes et téléphones **interdits**.
- N'oubliez vos noms en toutes les feuilles, les unités, des flèches au-dessus des vecteurs, etc.
- Norme produit vectoriel: $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \|a\|\|b\|| \sin\theta(\vec{a}, \vec{b})|$.
- Si $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est dite une base orthonormé direct, on a: $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$, $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$, $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$.



- Repère polaire: $\begin{cases} \vec{u}_r &= \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_\theta &= -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y \end{cases}$
- Repère de Frénet : $\dot{s} = \|\vec{v}\|$, $\vec{v} = \dot{s}\vec{T}$ et $\vec{a} = \ddot{s}\vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{N}$
- Theorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}_0(\vec{f}), \quad \text{où } \vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}, \vec{M}_0(\vec{f}) = \vec{OM} \wedge \vec{f}$$

Q1 Application du produit vectoriel dans la force électromagnétique (8pts)

La force électromagnétique appliqué à une particule M de charge q, vitesse $\vec{v}$, dans un champs électrique $\vec{E}$ et champs magnétique $\vec{B}$ est donné par $\vec{f}_{EB} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. On pose $\vec{f}_E = q\vec{E}$, $\vec{f}_B = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$, tel que $\vec{f}_{EB} = \vec{f}_E + \vec{f}_B$. On va considérer que q est **négatif** et $\vec{E} = E\vec{u}_x$, $\vec{B} = B\vec{u}_y$, $\vec{v} = v\vec{u}_z$, avec E, B et v nombres **positifs**. Choisissez 2 plans entre les 3 possibilités en repère cartésien (Oxy, Oxz ou Oyz) pour les questions suivantes.

a) Indiquer votre choix dans les cases correspondants et placer le troisième vecteur de la base cartésienne à l'origine cohérent avec votre choix (rappel: $\otimes$ ou $\odot$ sont respectivement un vecteur rentrant ou sortant du plan.)

b) Dessiner les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{B}$ et $\vec{E}$ (obs: dans les deux plans, la taille des flèches n'est pas important).

c) Dessiner les vecteurs $\vec{f}_E$ et $\vec{f}_B$ (même observations que b)).

d) Donner l'expression de $\vec{f}_{EB}$ en fonction de q, E, B et v.

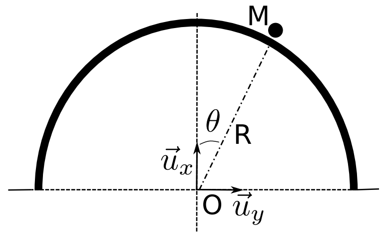
e) Pour quelle valeur de v (en fonction des autres données), la force $\vec{f}_{EB} = \vec{0}$.

f) On pose v_0 la valeur critique trouvé en e). Dessiner le vecteur $\vec{f}_{EB}$ pour $v > v_0$ (même observation que b)).

Q2 : Un esquimau sur un igloo (12pts)

L'enfant se laisse glisser avec frottement $\vec{f}$ (avec sa norme noté par f) depuis le sommet de l'igloo qui a la forme d'une demi-sphère de rayon R et de centre O. La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M de masse m est repérée par l'angle θ par rapport à $\vec{u}_x$ (augmentant un direction à $\vec{u}_y$) . La norme de l'accélération de la pesanteur est dénoté g, tel $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ point vers le bas. L'objectif de cet exercice est d'étudier le mouvement en repère de **Frénet**.

a) (1,0pt) Complétez la figure ci-dessous en plaçant $\vec{T}$ (supposant $\dot{\theta} > 0$), $\vec{N}$ et $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ (Obs: ($\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$) forme un base orthonormée direct).



b) (1,5pt) Donner les expressions de toutes les forces en repère de Frénet.

c) (1,5pt) Calculer les moments de chacune de ces forces par rapport au point O.

d) (1,5pt) Calculer le moment cinétique de l'enfant par rapport au point O.

e) (1,5pt) Appliquer le théorème du moment cinétique à ce mouvement.

f) (1,5pt) Appliquer le principe fondamentale de la dynamique (PFD) projeté sur le vecteur normale du repère de Frénet.

g) (2,0pt) On va supposer que $f = \alpha R_N$ ($\alpha > 0$ un coefficient donné). Trouver une équation différentielle unique avec les résultats des exercises e) et f).

h) (1,5pt) Expliquer la différence principale entre le vecteur $\vec{T}$ en repère de Frénet et de $\vec{u}_\theta$ dans le repère cylindrique. Quel est l'intérêt de l'utilisation du repère Frénet pour modéliser le frottement par rapport l'utilisation du repère cylindrique.

Q1 correction

a) Voir figure.

b) Voir figure.

c) Comme q est négatif $\vec{f}_E$ est dans le sens contraire à $\vec{E}$. $\vec{f}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qvB\vec{u}_z \wedge \vec{u}_y = -qvB\vec{u}_x$. Comme $(-qvB) > 0$, $\vec{f}_B$ pointe dans le sens positif de $\vec{u}_x$. Voir la figure pour le dessin.

d) On sait que $\vec{f}_E = q\vec{E} = qE\vec{u}_x$. De la question précédent, on a donc $\vec{f}_{EB} = \vec{f}_E + \vec{f}_B = q(E - Bv)\vec{u}_x$.

e) On aura $\vec{f}_{EB} = \vec{0}$ pour $v = E/B$.

f) Si $v > v_0 = E/B$, le terme $q(E - vB) > 0$, donc $\vec{f}_{EB}$ pointe vers $\vec{u}_x$ (voir figure).

g) On a $\vec{f}_{EB} = q(E - vB)\vec{u}_x$, donc:

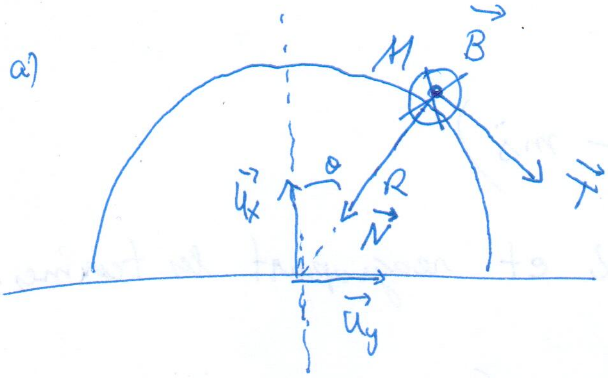
$$\begin{aligned}
\vec{M}_0(\vec{f}_{EB}) &= (a\vec{u}_x + b\vec{u}_y + c\vec{u}_z) \wedge q(E - vB)\vec{u}_x \\
&= q(E - vB)b\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x + q(E - vB)c\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x \\
&= -q(E - vB)b\vec{u}_z + q(E - vB)c\vec{u}_y
\end{aligned}$$

Corrigé CC1 - SPI Méca Point 2 13/03/2024

Q1 : Voir pdf

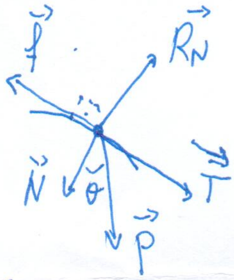
Q2 :

a)



$\dot{\theta} > 0$, donc $\vec{T}$ pointe dans le sens horaire selon la convention de θ qui croîte de $\vec{u_x}$ vers $\vec{u_y}$

b) $\vec{P} = mg\,(\cos\theta\,\vec{N} + \sin\theta\,\vec{T})$, $\vec{R_N} = -R_N\,\vec{N}$, $\vec{f} = -f\,\vec{T}$



c) $\cdot\ \vec{M_O}(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = (-R\vec{N}) \wedge (\cos\theta\,\vec{N} + \sin\theta\,\vec{T})\,mg$

$= -mgR\,(\cos\theta\,\underbrace{\vec{N}\wedge\vec{N}}_{\vec{0}} + \sin\theta\,\underbrace{\vec{N}\wedge\vec{T}}_{-\vec{B}}) = mgR\sin\theta\,\vec{B}$

$\cdot\ \vec{M_O}(\vec{f}) = -R\vec{N} \wedge (-f\vec{T}) = Rf\,\vec{N}\wedge\vec{T} = -Rf\,\vec{B}$

$\cdot\ \vec{M_O}(\vec{R_N}) = -R\vec{N} \wedge R_N\vec{N} = -R\,R_N\,\vec{N}\wedge\vec{N} = \vec{0}$

d) $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = -R\vec{N} \wedge m\dot{s}\vec{T} = -Rm\dot{s}\,\vec{N}\wedge\vec{T} = Rm\dot{s}\,\vec{B}$

e) $\dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = \Sigma\,\vec{M_O}(\vec{F}) \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(Rm\dot{s}\,\vec{B}) = Rm\ddot{s}\,\vec{B} = (mgR\sin\theta - Rf)\,\vec{B}$

$\Rightarrow m\ddot{s} = mg\sin\theta - f$

f) $m\vec{a} = \Sigma\vec{F} \Rightarrow m\dfrac{\dot{s}^2}{R} = mg\cos\theta - R_N$

g) $f = \alpha R_N$ (3), rappel $\begin{cases} m\ddot{s} = mg\sin\theta - f & (1) \\ \dfrac{m\dot{s}^2}{R} = mg\cos\theta - R_N & (2) \end{cases}$

remplaçant (3) en (1) : $m\ddot{s} = mg\sin\theta - \alpha R_N \Rightarrow R_N = \frac{1}{\alpha}\left(mg\sin\theta - m\right.$ (4)

remplaçant (4) en (2) :

$$\frac{m\dot{s}^2}{R} = mg\cos\theta - \frac{1}{\alpha}\left(mg\sin\theta - m\ddot{s}\right)$$

multipliant les deux côtés par α et regroupant les termes :

$$\alpha\frac{m\dot{s}^2}{R} - m\ddot{s} = \alpha mg\cos\theta - mg\sin\theta = mg\left(\alpha\cos\theta - \sin\theta\right)$$

multipliant par $\left(-\frac{R}{m}\right)$, on a :

$$\cancel{-\alpha\dot{s}^2 + R\ddot{s} = \alpha R g\cos\theta}$$

$$\boxed{R\ddot{s} - \alpha\dot{s}^2 = Rg\left(-\alpha\cos\theta + \sin\theta\right)}$$

h) $\vec{T}$ pointe toujours dans le sens de la vitesse. Contrairement, la vitesse ~~peut pointer~~ n'a aucune relation intreseque avec $\vec{u}_\theta$. Dans le cas du mouvement circulaire $\vec{T}$ et $\vec{u}_\theta$ sont colineaires, mais pas forcement coïncidents pour tout le mouvement.

Ainsi, le frottement se modélise avec plus de facilité en repère de Frenet, car il est toujours contre la vitesse du mouvement.