Faculté de Sciences et Technologie - UPEC
Corrigé préparation 1^{er} Contrôle Continu de Mécanique du Point 2 (08/03/2024)

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA
felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr

Q1 Produit Vectoriel

a) Voir Figure 1.

b) On sait $\|\vec{A}\| = h/\sin\theta$ (voir ex Q1.c)), $\|\vec{B}\| = 1$. Donc $\|\vec{C}\| = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin\theta = (h/\sin\theta) \times 1 \times \|\sin\theta = h$.

c) C'est possible d'identifier un triangle rectangle tel que A est l'hypotenuse et h l'hauteur qui est côté opposé du l'angle θ. On déduit donc que $\sin\theta = \frac{h}{A} \Rightarrow \|\vec{A}\| = A = \frac{h}{\sin\theta}$.

d) $\vec{C} = (h\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y) \wedge (1\vec{u}_y) = h\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y + A_y\vec{u}_y \wedge \vec{u}_y = h\vec{u}_z$. La norme vaut donc h.

e) $\vec{B} \wedge \vec{D} = (1\vec{u}_y) \wedge (D_x\vec{u}_x) = D_x\vec{u}_y \wedge \vec{u}_x = -D_x\vec{u}_z = -2h\vec{u}_z$. Donc $D_x = 2h$.

f) Voir Figure 2. Attention: la position d'un vecteur n'est très important en principe, sauf s'il rélie un point à l'autre, ou s'il s'agit d'un force dont le point de l'application est important pour le calcul du moment. C'est habituel aussi de placer les vecteurs d'une base sortant de la même origine.

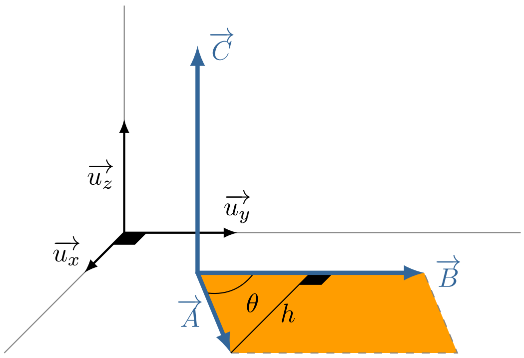

Figure 1

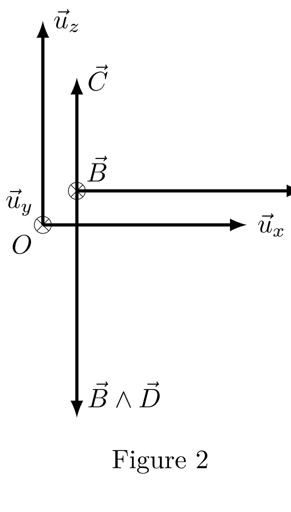

Figure 2

Q2 : Un esquimau sur un igloo

1. Voir Figure 3, en supposant $\dot{\theta} > 0$, sinon il faudrait changer la direction de $\vec{T}$.

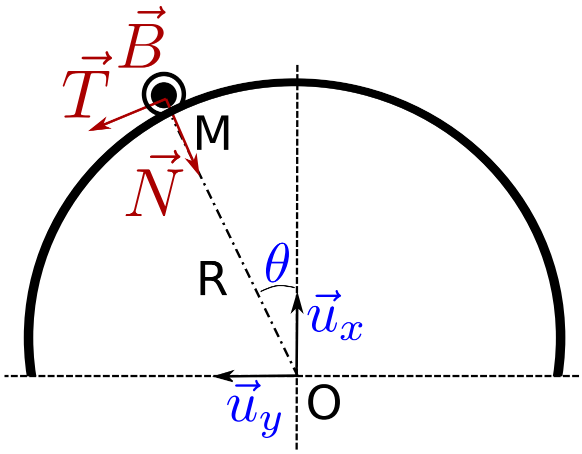

Figure 3: Igloo

2. $\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{N} + \sin\theta\vec{T})$ et $\vec{R}_N = -R_N\vec{N}$.
3. $\vec{M}_O(\vec{R}_N) = \vec{0}$ car parallèlle avec $\vec{OM}$. $\vec{M}_0(\vec{P}) = (-R\vec{N}) \wedge mg(\cos\theta\vec{N} + \sin\theta\vec{T}) = mgR\sin\theta\vec{B}$.
4. $\vec{L}_0 = (-R\vec{N}) \wedge (m\dot{s}\vec{T}) = m\dot{s}R\vec{B}$.
5. $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) \Rightarrow mR\ddot{s}\vec{B} = mgR\sin\theta\vec{B} \Rightarrow \ddot{s} = g\sin\theta$.
6. Respectivement projectant sur l'axes $\vec{T}$ et $\vec{N}$:
$$\begin{cases} mg\sin\theta = m\ddot{s}, \\ mg\cos\theta - R_N = m\dfrac{\dot{s}^2}{R} \end{cases} \tag{1}$$
7. Oui, en fait le theorème du moment cinétique ce n'est qu'une consequence du PFD.
8. Cela arrivera quand R_N s'annule, donc $\dot{s} = \sqrt{Rg\cos\theta}$ en simplifiant le PFD projecté sur la normale.
9. En prenant $\dot{s} = R\dot{\theta}$, cela résulte en $\ddot{s} = R\ddot{\theta}$, ce que justifie la première équation au-dessous. Pour la deuxième équation, il faut juste multiplier par (-1) des deux cotés et noter que $\dfrac{\dot{s}^2}{R} = \dfrac{R^2\dot{\theta}^2}{R} = R\dot{\theta}^2$. Finalement on arrivera à:
$$\begin{cases} mg\sin\theta = mR\ddot{\theta}, \\ -mg\cos\theta + R_N = -mR\dot{\theta}^2 \end{cases} . \tag{2}$$
Les équations précedents sont exactement les mêmes obtenues en mécanique du point 1.