2ème Contrôle Continu de Mécanique du Point 2 (14/04/2024) - Faculté de Sciences et Technologie - UPEC

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA (`felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr`)

NOM:________________________ Prénom: ____________________ Numéro: __________

Licence:________________________ Groupe: ____________________ Note: ________

Rappels

- Calculettes, téléphones et feuilles de brouillon **interdits**.
- N'oubliez vos noms en toutes les feuilles, les unités, des flèches au-dessus des vecteurs, etc.
- Champs de force dérivée d'un potentiel:

$$\vec{F}(x,y) = -\frac{\partial E_P(x,y)}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_P(x,y)}{\partial y}\vec{u}_y$$

- Différentiel de travail en coordonnées cartésiennes

$$dw(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = F_x dx + F_y dy$$

- Enérgie mécanique: $E_m = E_P + E_c$.
- Théorème d'énergie mécanique:

$$\Delta E_m = \sum_{\vec{f}\text{ non-conservative}} W_{A\to B}(\vec{f})$$

Q1 Energie potentiel et calcul du travail (5pts)

Etant donné le champ d'énérgie potentiel bidimensionnel $E_P(x,y) = 3xy^2 + 4x^3$, déterminer:

a) Le champ de force $\vec{F}(x,y)$ dérivé de ce potentiel (voir rappel).

b) Le différentiel de travail $dw(\vec{F})$ (voir rappel).

c) Le travail réalisé par la force $\vec{F}$ entre les points $A = (1,1)$ et $B = (2,2)$ ($A \to B$), en intégrant le résultat obtenu en b) selon la droite $y = x$.

d) La différence de potentiel entre A et B, c'est-à-dire: $E_P(A) - E_P(B)$.

e) Expliquer pourquoi les résultats de c) et d) coïncident.

Q2 : Points d'équilibre (3pts)

Etant donné l'énergie potentiel $E_P(x)$, où $x \in [a,b]$ est sa seule coordonnée spatiale. En sachant qu'il y a 3 points d'équilibre différents x_1, x_2, et x_3, où $x_1 < x_2 < x_3$, et que x_2 est le seul point d'équilibre instable (x_1 et x_3 sont stables), répondre les points suivants:

a) Dessiner un exemple d'une courbe pour la fonction $E_P(x)$ (pas besoin de formules) en précisant les points x_1, x_2 et x_3.

b) Préciser la valeur da la première dérivée de E_P ($\frac{dE_P}{dx}$) dans les points x_1, x_2, et x_3.

Q3 : Ressort (12pts)

Un chariot de masse m est initialement largué dans le point $A = (x_0, 0)$ avec vitesse nulle et en contact avec un ressort de raideur k et longueur de repos ℓ_0 (le ressort est donc en compression). Ensuite, le chariot roule sous l'action de la force élastique du ressort (sans frottement) dans un plan horizontale jusqu'au point $B = (\ell_0, 0)$ où il se détache du ressort et initie une trajectoire d'arc de cercle. L'accélération de la pesanteur g pointe verticalement vers le bas. Le but de cette exercice est trouver x_0 minimale tel que le chariot puisse arriver au point C situé à l'hauteur R mesuré depuis le plan horizontale. Conseils: 1) il n'y pas besoin d'utiliser le polaire, 2) notation: E_P^e et E_P^g énergie potentiel dû à la force élastique et au poids, respectivement.

a) Dessiner tous les forces qu'agissent sur le chariot dans le point A et un dans point D quiconque situé entre B et C.

b) Au point A, déterminer l'énergie cinétique $E_c(A)$ et potentiel élastique $E_P^e(A)$ du chariot, en fonction de k, ℓ_0, m et x_0.

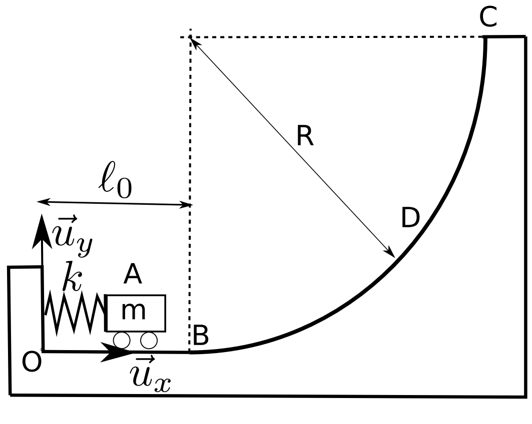
c) Déterminer l'énergie potentiel élastique $E_P^e(B)$.

d) En utilisant le théorème d'énérgie mécanique entre les points A et B, déterminer l'énergie cinétique $E_c(B)$ en fonction de k, ℓ_0, m et x_0 (conseil: il n'y pas variation d'hauteur, donc il n'y pas variation d'énergie potentiel dû à la force poids).

e) En utilisant le théorème d'énérgie mécanique entre les points B et C, déterminer x_0 (conseil: vous pouvez considérer l'énergie potentiel dû à la force du poids au point B comme référence, donc $E_P^g(B)$ est nulle).

f) Calculer numériquement la valeur de x_0 et $E_c(B)$ en utilisant $m = 1kg$, $R = 8m$, $k = 1000N/m$, $\ell_0 = 50cm$ et $g = 10m/s^2$ (Obs: mathématiquement x_0 peut avoir deux valeurs possibles, mais juste une a un sens physique).

g) En présence de frottement, justifier pourquoi le chariot n'arrivera pas au point C. Votre réponse devra être en forme de texte et d'équations (mais sans trop de détails) et bien sûr basée sur le théorème d'énergie mécanique.



Corrigé CC2 - Chim LAS GPI - 18/04/2024 - F.Rocha - UPEC-FST
Méca Point 2.

Q1) $E_p(x,y) = 3xy^2 + 4x^3$

a) Obs: cette question est devenue bonus (1pt).

$$\vec{F}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 + 4x^3)\vec{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}(3xy^2 + 4x^3)\vec{u_y}$$

constant — constant — constant

$$= -3\left((y^2+4x^2)\vec{u_x} + 2xy\vec{u_y}\right)$$

b) $\vec{dr} = dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} \Rightarrow dw = \vec{F}\cdot\vec{dr} = -3\left((y^2+4x^2)dx + 2xy\,dy\right)$

c) pour $x = y \Rightarrow dx = dy$ et $dw = -3(5x^2dx + 2x^2dx) = -21x^2dx$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B dw(\vec{F}) = -21\int_1^2 x^2dx = -7\,x^3\Big|_1^2 = -7(8-1)$$
$$= -49.$$

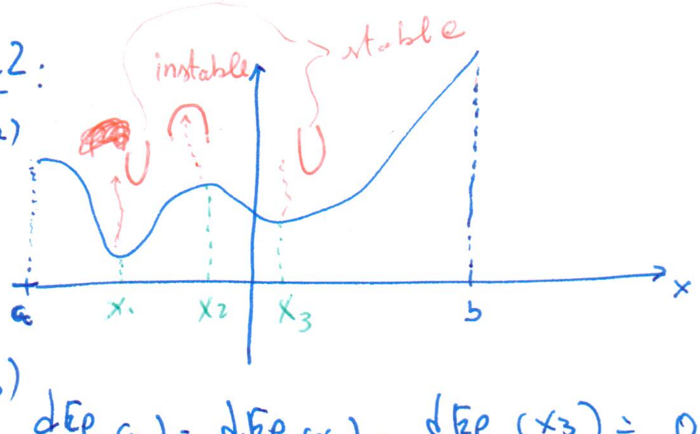
d) $W_{A\to B}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B) = E_p(1,1) - E_p(2,2)$

$= 3\cdot1\cdot1^2 + 4\cdot1^3 - 3\cdot2\cdot2^2 - 4\cdot2^3 = 7 - 3\cdot8 - 4\cdot8 = 7 - 7\cdot8 = -7\cdot7 = -49$

e) Les résultats coïncident car $\vec{F}$ est conservative (elle dérive d'un potentiel).

Q2:

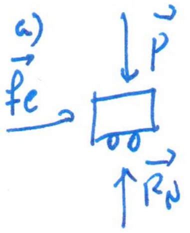
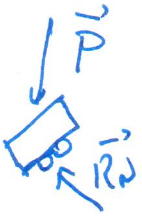
a)



Obs: question ouvert, pas d'importance pour l'hauteur des points. Il faut juste avoir $\cup$ $\cap$ $\cup$ comme concavités.
x_1 x_2 x_3

b) $\frac{dE_p}{dx}(x_1) = \frac{dE_p}{dx}(x_2) = \frac{dE_p}{dx}(x_3) = 0.$

Q3)

a)  

b) $E_c(A) = \frac{1}{2} m V_0^2 = 0\,J$

$E_p^e(A) = \frac{1}{2} k (x_0 - l_0)^2$

c) $E_p^e(B) = \frac{1}{2} k (l_0 - l_0)^2 = 0\,J$ -

d) pas de forces non-conservatives et le travail de la force normale est toujours nulle car elle est perpendiculaire au mouvement $\Rightarrow \Delta E_m = 0$.

$$\overset{0}{\cancel{E_c(A)}} + \cancel{E_p^g(A)} + E_p^e(A) = E_c(B) + \cancel{E_p^g(B)} + \overset{0}{\cancel{E_p^e(B)}}$$

même hauteur.

$$E_c(B) = E_p^e(A) = \frac{1}{2} k (x_0 - l_0)^2$$

e) entre B et C : $\Delta E_m = 0$

$$\Delta E_c + \Delta E_p^e + \Delta E_p^g = 0$$

$$\Delta E_c = E_c(C) - E_c(B) = 0 - \frac{1}{2} k (x_0 - l_0)^2$$

$$\Delta E_p^e = E_p^e(C) - E_p^e(B) = 0 - 0 = 0\,J$$

$$\Delta E_p^g = E_p^g(C) - E_p^g(B) = mgR \quad \text{(C plus haut que B)}$$

finalement : $-\frac{1}{2} k (x_0 - l_0)^2 + mgR = 0$

$$(x_0 - l_0)^2 = \frac{2mgR}{k} \Rightarrow x_0 - l_0 = \pm \sqrt{\frac{2mgR}{k}}$$

$$x_0 = l_0 \pm \sqrt{\frac{2mgR}{k}}$$

f) Juste $x_0 = l_0 - \sqrt{\frac{2mgR}{k}}$ est possible car $x_0 < l_0$.

$$x_0 = 50 \times 10^{-2} - \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 8}{1000}}$$

$$= 50 \times 10^{-2} - \frac{1}{10}\sqrt{16} = 50 \times 10^{-2} - 4 \times 10^{-1}$$

$$= (50 - 40) \times 10^{-2} = 10\ \text{cm}.$$

g) Le travail du frottement est toujours négative, donc $\Delta E_m <$ [illegible] Comme dans le point finale $E_m = E_p^g = mgh$ (h étant l'hauteur par rapport l'origine), on aura E_m plus petit que dans le cas sans frottement étant donné que les conditions initiales sont identiques. Ainsi $mgh < mgR$ donc $h < R$.