$2^{éme}$ Contrôle Continu de Mécanique du Point 2 (19/04/2024) - Faculté de Sciences et Technologie - UPEC

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA (felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr)

NOM:____________________ Prénom: ________________ Numéro: ________

Licence:____________________ Groupe: ________________ Note: ______

Q1 : Ressort (13pts)

Un chariot de masse m est initialement largué dans le point A avec vitesse v_0 verticale vers le bas. Quand il arrive au point B, il rentre en contact avec un ressort de raideur k et longueur de repos ℓ_0. Le ressort originalement en repos va être comprimé à partir de cet instant. Ensuite, le chariot roule sous l'action de la force élastique du ressort dans un plan horizontale jusqu'au point C où il atteint vitesse nulle et le ressort sa compression maximale δ. L'accélération de la pesanteur g pointe verticalement vers le bas et le mouvement se passe **sans frottement**. Le but de cette exercice est trouver la compression maximale du ressort δ, c'est-à-dire, son écart par rapport à ℓ_0. Conseils: 1) il n'y pas besoin d'utiliser le repère polaire ni de Frenet, 2) notation: E_P^e et E_P^g énergie potentiel dû à la force élastique et au poids, respectivement, 3) pas besoin d'en déduire les expressions pour E_P^e et E_P^g, utilisez celles qui vous connaissez déjà.

a) Placer un repère cartésien sur le dessin, c'est-à-dire, $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ selon votre goût.

b) Dessiner tous les forces qu'agissent sur le chariot dans le point A et un dans point D quiconque situé entre B et C.

c) Sans faire des calculs, justifiez pourquoi le travail de la force de réaction normale est nulle (2 lignes max de texte, pas plus!).
Comments: *Ce n'est pas le travail net qui est nulle. Le différentiel de travail est nulle en chaque point car par définition la réaction normale est perpendiculaire au différentiel de déplacement.*

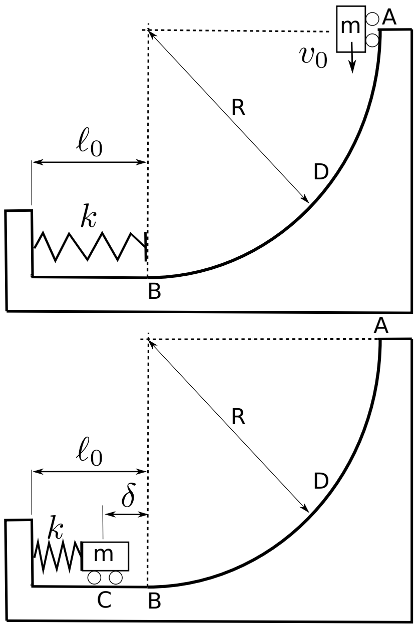
d) Au point A, déterminer l'énergie cinétique $E_c(A)$ et potentiel $E_P^g(A)$. Attention: vous devez utiliser O comme point de référence pour l'energie potentiel, donc $E_P^g(O) = 0$.
Comments: *Si O est placé dans un point plus bas que A, $E_P^g(A) > 0$, et vice-versa. Si O est dans la même hauteur que A, on a $E_P^g(A) = 0$. Il faut se souvenir que vous faites d'éffort pour monter un montagne, donc vous gagnez d'énergie potentiel en montant. En d'autres mots, l'énergie chimie des aliments est converti en energie potentiel (et d'entre autres formes d'énergie comme la cinétique et un partie est perdu dissipé en forme de frottement, énergie thermique qui va ver l'environnement, etc).*

e) En utilisant le théorème d'énérgie mécanique entre les points A et B, déterminer l'énergie cinétique $E_c(B)$.

f) En utilisant le théorème d'énérgie mécanique entre les points B et C, déterminer δ.

g) Calculer numériquement la valeur de δ en utilisant $m = 1kg$, $v_0 = 1m/s$, $R = 8m$, $k = 100N/m$ et $g = 10m/s^2$.

h) En présence de frottement, la valeur de δ serait plus grand ou plus petit que celle que vous avez trouvé. Votre réponse devra être en forme de texte et d'équations (mais sans trop de détails) et bien sûr basée sur le théorème d'énergie mécanique.



Q2 Energie potentiel, calcul du travail, points d'équilibre (7pts)

Etant donné le champ de force bidimensionnel

$$\vec{F}(x, y) = -2(x + y)\vec{u}_x - 2(x + 2y)\vec{u}_y,$$

déterminer:

a) Le travail réalisé par la force $\vec{F}$ entre les points $A = (0, 0)$ et $B = (1, 1)$ $(A \to B)$ selon la droite $y = x$ (Méthode 1 du rappel).

b) En sachant que $\vec{F}$ dérive du potentiel $E_P(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy$ (pas besoin de le vérifier), calculer le travail entre A et B par la méthode 2 du rappel.

c) Expliquer pourquoi les résultats de a) et b) coïncident.
Comments: *Le point clé c'est le suivant: $\vec{F}$ est une force conservative. Donc on point utiliser la méthode 2 et il est équivalent la methode 1. Dans le cadre général n'est même pas possible utiliser la méthode 2 car il n'y a pas de champs potentiel.*

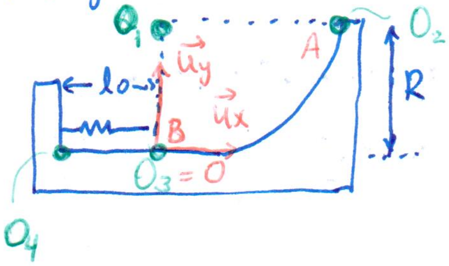
d) Selon la droit $y = x$, est-ce que ce potentiel a un point d'équilibre? quel(s)? **Comments:** *Il faut définir un potentiel auxiliaire $\bar{E}_P(x) = E_P(x, y = x)$ et ensuite le dériver. Le seule point ou la dérivée s'annule est $x = 0$.*

CC2 - SP1 - 19/04/2024 - Corrigé - F. ROCHA UPEC_FST

Méca point2 - GP4

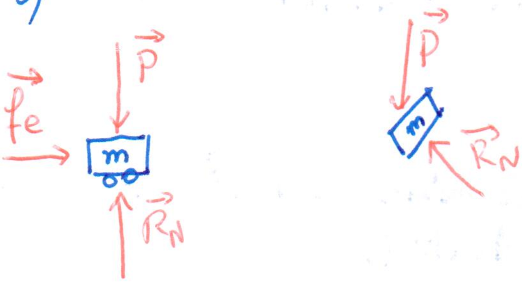
Q1)

a) Il y en a plusieurs options pour l'origine et $R(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$



pour la suite, on va choisir $O = O_3$.

b)



c) La force de réaction normale $\vec{R_N}$ est toujours perpendiculaire au mouvement, donc $dW = \vec{R_N} \cdot d\vec{r} = 0$, ce qui résulte $W_{1\to2}(\vec{R_N}) = 0 \quad \forall$ trajectoire.

d) $E_c(A) = \frac{1}{2} m v_0^2$

$E_p^g(A) = mgR$ (A plus haut que O)

Obs 1: $E_p^g(y) = mgy$ dans ce cas-là.

Obs 2: si $O = O_1$ ou $O = O_2 = A$, $E_p^g(A) = 0$.

e) Aucune force non-conservative et $W_{A\to B}(\vec{R_N}) = 0$, donc $\Delta E_m = 0$

$$E_p^g(A) + \cancel{E_p^e(A)} + E_c(A) = \cancel{E_p^g(B)} + \cancel{E_p^e(B)} + E_c(B)$$

$E_c(B) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgR$

f) Entre B et C : $\Delta E_m = 0$

$$\cancel{E_p^g(B)} + \cancel{E_p^e(B)} + E_c(B) = \cancel{E_p^g(C)} + E_p^e(C) + \cancel{E_c(C)}$$

$\frac{1}{2} m v_0^2 + mgR = \frac{1}{2} k \delta^2$

$$\delta = \sqrt{\frac{m v_0^2 + 2mgR}{k}}$$

g) $$\delta = \sqrt{\frac{1 \times 1^2 + 2 \times 1 \times 10 \times 8}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + 160}{100}} \approx \sqrt{\frac{160}{100}} = \sqrt{\frac{8}{5}}$$

obs: n'importe quelle réponse comme ces dernières seront considérés bonnes.

h) δ sera plus petit que dans le cas sans frottement car $W_{A\to C}(\vec{f}) < 0$, donc l'energie mécanique sera plus petite que celle de A, qui est identique au cas précédent.

Q2 : $\vec{F}(x,y) = -2(x+y)\,\vec{u_x} - 2(x+2y)\,\vec{u_y}$

a) $\vec{dr} = dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y}$

$dw = \vec{F}\cdot\vec{dr} = -2(x+y)\,dx - 2(x+2y)\,dy$

pour $x = y \Rightarrow dw = -4x\,dx - 2\cdot(3x)\,dx = -10x\,dx$
$dx = dy$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B dw = \int_0^1 -10x\,dx = -5x^2\Big|_0^1 = -5\times 1^2 - (-5\times 0)$$
$$= \underline{-5}$$

b) $W_{A\to B}(\vec{F}) = E_P(A) - E_P(B)$

Comme $E_P(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy$, on a

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = 0^2 + 2.0^2 + 2.0.0 - 1^2 - 2.1^2 - 2.1.1$$
$$= \underline{-5.}$$

c) Le travail calculé en a) et b) est le même car $\vec{F}$ est conservative, c'est-à-dire, dérive d'un ~~po~~ potentiel.

d) $$\frac{d}{dx}\left(E_P(x, y(x)=x)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2 + 2x^2 + 2.x.x\right) = \frac{d}{dx}(5x^2) = 10x = 0$$

$\Rightarrow x_{eq} = 0$, donc $(0,0)$ est le point d'équilibre (unique).