Faculté de Sciences et Technologie - UPEC
Préparation 1^{er} Contrôle Continu de Mécanique du Point 2 (07/03/2024)

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA
felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr

Rappels

- Dérivé d'un fonction composé: $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x)$.
- Produit scalaire en deux dimensions : $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \|a\|\|b\| \cos\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
- Quelques relations en repère polaire avec l'angle θ mesuré par rapport $\vec{u}_x$ (ci-dessous dépendance explicite du temps omis, $r = r(t), \theta = \theta(t), \vec{u}_r = \vec{u}_r(t), \vec{u}_\theta = \vec{u}_\theta(t)$):

$$\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y, \quad \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y, \quad ,$$
$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r,$$
$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta, \quad \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

- Règle de la main droite (Figure 1).

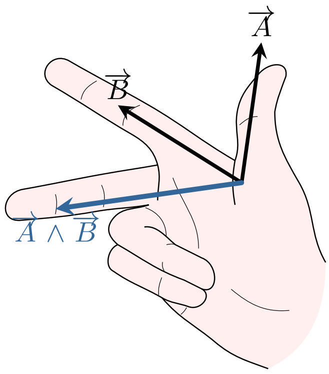

Figure 1: Schéma de la règle de main droite.

Q1 Produit Vectoriel

Dans la Figure 2, le vecteur $\vec{B}$ est aligné vers $\vec{u}_y$ et $\vec{A}$ se trouve dans le plan formé par $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.

a) Dessiner le vecteur $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ dans la Figure 2 (la taille de la flèche n'est pas important).

b) Calculer $\|\vec{C}\|$ en sachant que $\|\vec{B}\| = 1$ et en fonction des constants de la figure?

c) Calculer $\vec{A}$ en fonction de h et θ.

d) Calculer $\vec{C}$ avec l'expression du produit vectoriel et vérifier que $\|\vec{C}\|$ correspond au résultat trouvé dans b).

e) En prenant $\vec{D} = D_x \vec{u}_x$, calculer la valeur de D_x tel que $\vec{B} \wedge \vec{D} = -2\vec{C}$.

f) Dans le plan x-z de la Figure 3, dessiner les vecteurs $\vec{u}_y$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ et $\vec{B} \wedge \vec{D}$. Utilisez respectivement les notations $\otimes$ ou $\odot$ pour représenter un vecteur qui rentre ou qui sort du plan de feuille.

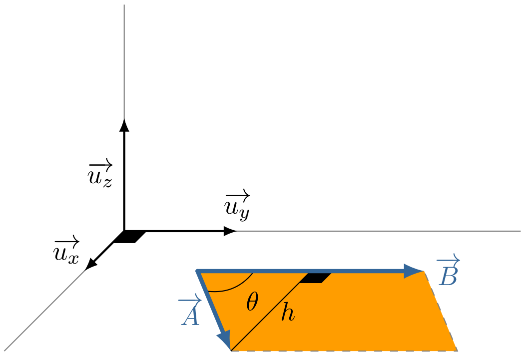

Figure 2

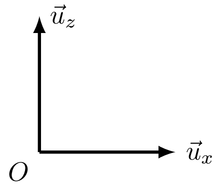

Figure 3

Q2 : Un esquimau sur un igloo

Un enfant esquimau joue sur le toit de son igloo. L'enfant se laisse glisser sans frottement depuis le sommet S de l'igloo qui a la forme d'une demi-sphère de rayon R et de centre O. La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M de masse m est repérée par l'angle θ par rapport à $\vec{u}_x$. La norme de l'accélération de la pesanteur est dénoté g (le vecteur $\vec{g}$ pointe vers le bas). On va étudier ce mouvement en repère polaire. A l'instant initial $t = 0$, l'enfant est situé au sommet de l'igloo et a une vitesse nulle. L'enfant se laisse alors glisser sans frottement sur le toit de l'igloo. Ce mouvement s'effectue entièrement Oxy. Les objectifs de cet exercice est d'étudier le mouvement en repère de Frénet (vous avez déjà étudié ce mouvement en repère polaire en mécanique du point 1).

1. Complétez la Figure 4 ci-dessous en plaçant $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ (Obs: ($\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$) forme un base orthonormée direct).

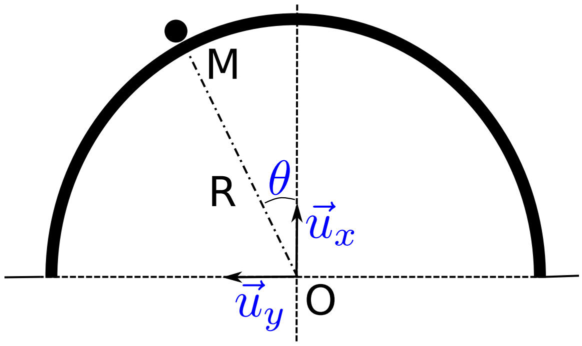

Figure 4: Igloo

2. Donner les expressions de toutes les forces en repère de Frénet.
3. Calculer les moments de chacune de ces forces par rapport au point O.
4. Calculer le moment cinétique de l'enfant par rapport au point O.
5. Appliquer le théorème du moment cinétique à ce mouvement.
6. Appliquer le principe fondamentale de la dynamique (PFD) en repère de Frénet.
7. L'équation différentiel trouvé par projection du PFD sur l'axe $\vec{T}$ est-il la même que celle de 5)? Pourquoi?
8. Trouver la norme de la vitesse dans l'instant que l'énfant décolle d'igloo (obs: utilisez une des équations du PFD).
9. L'application du PFD en repère polaire résulte dans les système:

$$\begin{cases} -mg\cos\theta + R_N = -mR\dot{\theta}^2, \\ mg\sin\theta = mR\ddot{\theta} \end{cases} \tag{1}$$

Montrer ces équations a partir des résultats de 6).

Faculté de Sciences et Technologie - UPEC
Corrigé préparation 1^{er} Contrôle Continu de Mécanique du Point 2 (08/03/2024)

Responsable TD: Felipe FIGUEREDO ROCHA
felipe.figueredo-rocha@u-pec.fr

Q1 Produit Vectoriel

a) Voir Figure 1.

b) On sait $\|\vec{A}\| = h/\sin\theta$ (voir ex Q1.c)), $\|\vec{B}\| = 1$. Donc $\|\vec{C}\| = \|\vec{A}\wedge\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\theta = (h/\sin\theta)\times 1\times\|\sin\theta = h$.

c) C'est possible d'identifier un triangle rectangle tel que A est l'hypotenuse et h l'hauteur qui est côté opposé du l'angle θ. On déduit donc que $\sin\theta = \frac{h}{A} \Rightarrow \|\vec{A}\| = A = \frac{h}{\sin\theta}$.

d) $\vec{C} = (h\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y)\wedge(1\vec{u}_y) = h\vec{u}_x\wedge\vec{u}_y + A_y\vec{u}_y\wedge\vec{u}_y = h\vec{u}_z$. La norme vaut donc h.

e) $\vec{B}\wedge\vec{D} = (1\vec{u}_y)\wedge(D_x\vec{u}_x) = D_x\vec{u}_y\wedge\vec{u}_x = -D_x\vec{u}_z = -2h\vec{u}_z$. Donc $D_x = 2h$.

f) Voir Figure 2. Attention: la position d'un vecteur n'est très important en principe, sauf s'il rélie un point à l'autre, ou s'il s'agit d'un force dont le point de l'application est important pour le calcul du moment. C'est habituel aussi de placer les vecteurs d'une base sortant de la même origine.

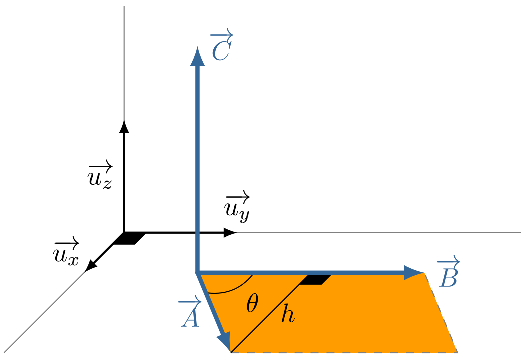

Figure 1

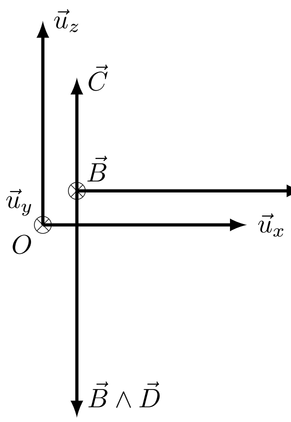

Figure 2

Q2 : Un esquimau sur un igloo

1. Voir Figure 3, en supposant $\dot{\theta} > 0$, sinon il faudrait changer la direction de $\vec{T}$.

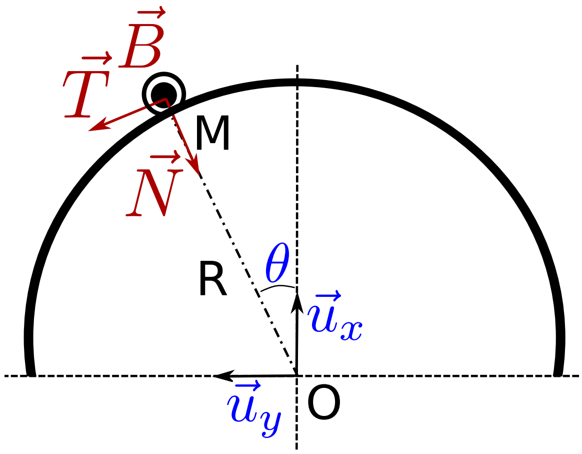

Figure 3: Igloo

2. $\vec{P} = mg(\cos\theta\vec{N} + \sin\theta\vec{T})$ et $\vec{R}_N = -R_N\vec{N}$.

3. $\vec{M}_O(\vec{R}_N) = \vec{0}$ car parallèlle avec $O\vec{M}$. $\vec{M}_0(\vec{P}) = (-R\vec{N}) \wedge mg(\cos\theta\vec{N} + \sin\theta\vec{T}) = mgR\sin\theta\vec{B}$.

4. $\vec{L}_0 = (-R\vec{N}) \wedge (m\dot{s}\vec{T}) = m\dot{s}R\vec{B}$.

5. $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_O(\vec{P}) \Rightarrow mR\ddot{s}\vec{B} = mgR\sin\theta\vec{B} \Rightarrow \ddot{s} = g\sin\theta$.

6. Respectivement projectant sur l'axes $\vec{T}$ et $\vec{N}$:

$$\begin{cases} mg\sin\theta = m\ddot{s}, \\ mg\cos\theta - R_N = m\dfrac{\dot{s}^2}{R} \end{cases} \tag{1}$$

7. Oui, en fait le theorème du moment cinétique ce n'est qu'une consequence du PFD.

8. Cela arrivera quand R_N s'annule, donc $\dot{s} = \sqrt{Rg\cos\theta}$ en simplifiant le PFD projecté sur la normale.

9. En prenant $\dot{s} = R\dot{\theta}$, cela résulte en $\ddot{s} = R\ddot{\theta}$, ce que justifie la première équation au-dessous. Pour la deuxième équation, il faut juste multiplier par (-1) des deux cotés et noter que $\dfrac{\dot{s}^2}{R} = \dfrac{R^2\dot{\theta}^2}{R} = R\dot{\theta}^2$. Finalement on arrivera à:

$$\begin{cases} mg\sin\theta = mR\ddot{\theta}, \\ -mg\cos\theta + R_N = -mR\dot{\theta}^2 \end{cases} . \tag{2}$$

Les équations précedents sont exactement les mêmes obtenues en mécanique du point 1.