

Université Paris Est - Créteil Val de Marne
Faculté des Sciences et Technologie
M1 Mécanique
Année 2024-2025, 1er semestre
Intervenants: Felipe ROCHA et Sara TOUHAMI
Emails: felipe.figuereredo-rocha@u-pec.fr et sara.touhami@u-pec.fr

Analyse numérique et calcul scientifique - 1

TP 1 (3h)

Interpolation de données

1 Objectifs

- Lire, comprendre, utiliser et modifier un code Python plus complexe (script, fonctions, classes).
- Se familiariser avec les méthodes d'interpolation par polynôme de Lagrange et spline du 1er ordre, en appréhender les potentialités et les limites.
- Communiquer des résultats scientifiques.

2 Méthodologie

Les méthodes d'interpolation permettent de construire des fonctions interpolant un ensemble de points dits nœuds de l'interpolation. Notant $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$ ces nœuds, la fonction d'interpolation $\varphi(x)$ peut alors s'écrire comme une combinaison linéaire de $N + 1$ fonctions de bases $\Phi_i(x)$ ($i = 0..N$):

$$\varphi(x) = y_0 \Phi_0(x) + y_1 \Phi_1(x) + \dots + y_N \Phi_N(x) = \sum_{i=0..N} y_i \Phi_i(x), \quad (1)$$

Chaque fonction de bases $\Phi_i(x)$ a la propriété suivante:

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in 0 \dots N. \quad (2)$$

La fonction $\varphi(x)$ aura alors la propriété de passer par les nœuds de l'interpolation, soit:

$$\varphi(x_j) = y_j, \quad j \in 0 \dots N. \quad (3)$$

L'expression des fonctions de base change d'une méthode d'interpolation à l'autre.

Interpolation par polynôme de Lagrange. Les fonction de bases de Lagrange sont des polynômes d'ordre N s'écrivant:

$$\Phi_i^{\text{Lagrange}}(x) \equiv L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \dots N \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (4)$$

La fonction d'interpolation est un polynôme d'ordre N dit polynôme de Lagrange:

$$\varphi^{\text{Lagrange}}(x) \equiv p(x) = \sum_{i=0 \dots N} y_i L_i(x). \quad (5)$$

Interpolation par fonctions spline d'ordre 1. Les fonction de bases spline d'ordre 1 sont des polynômes d'ordre 1 par morceaux s'écrivant:

$$\Phi_i^{\text{Spline-1}}(x) \equiv S_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x]; \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & \text{si } x \in [x, x_{i+1}]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6)$$

La fonction d'interpolation est un polynôme d'ordre 1 par morceaux:

$$\varphi^{\text{Spline-1}}(x) \equiv s(x) = \sum_{i=0 \dots N} y_i S_i(x). \quad (7)$$

3 Description des études

Ce TP est compris par trois études:

1. `lagrange.ipynb`: l'objectif principale est d'analyser les erreurs numériques commis dans l'interpolation polynomial, en particulier calculé avec la base de Lagrange.
2. `polynome_morceaux.ipynb`: similaire au premier étude, avec l'interpolation linéaire par morceaux (spline 1).
3. `performace.ipynb`: analyser la performace des méthodes d'interpolation polynomial alternatif au méthode de Lagrange.

Les détails spécifiques des tâches à réaliser sont détaillés en chaque fichier. En outre les scripts Python, les fichiers de données `Data0.txt`, `Data1.txt` et `Data2.txt`, contiennent des couples (x, y) dans la première et deuxième colonne respectivement devront être utilisé pour les études 1 et 2.

4 Structure du rapport scientifique

Vous rédigerez un compte-rendu scientifique faisant état de vos expériences numériques et de vos acquis. Le compte-rendu doit être rédigé avec soin, de façon à la fois claire et synthétique, en incluant dans le corps du rapport les informations principales et en renvoyant aux annexes pour celles secondaires. Idéalement, la structure du rapport sera la suivante:

- Informations rélevants dans l'en-tête ou page de garde: groupe, Nom, prénom, professeurs, date, université, formation, eventuels logos, etc.
- Table des matières (optionnel mais utile).
- Introduction: présenterez brièvement le ou les problèmes étudiés, l'objectifs, résultats attendus, structure du rapport, etc.
- Méthodologie: introduire des eventuels équations, théoremes, etc, qui vous seront utiles dans les études réalisés. Dans les sections suivantes, vous devez référentier les éléments de la méthodologie, e.g., dans l'équation X (ou dans (X)), dans la Figure Y, etc. Suivre le modèle de l'exposé méthodologique du TP, voire même répéter quelques équations de votre façon.
- Une section par étude, avec des sous-sections: paramètres utiles, quelques détails rélevant de code, résultats, discussions, analyse critique, eventuels problèmes ouverts ou résultats innatedus (l'honnêteté est appréciée), etc. Vos figures, tableaux, etc, doivent être référentiés au moins une fois dans le texte.

- Conclusion: vous dresserez un bilan synthétique de ce TP en termes d'acquis personnels par rapport aux objectifs prévus
- Références bibliographiques (optionnel mais apprécié): livres, sites, etc.
- Annexes (optionnel): tous les éléments qui vous considérez utiles, mais qui empêchent une lecture fluide du document.

4.1 Travail à rendre

Le travail de ce TP devra être envoyé par email (aux deux intervenants!) au plus tard **deux semaines après la fin du TP**. Le travail à rendre est un dossier comprimé (archive `.zip`, `.rar`, ...) nommé `NOM1_NOM2_GPX_TP1` et contenant :

- Un rapport de TP en format `.pdf`. Pour générer ce pdf nous vous proposons trois options:
 1. (recommandé 1) Notebook Jupyter: Sur Jupyter même vous pouvez écrire des textes et formules à l'aide de la cellule de texte. Pour les formules il suffit d'écrire les commandes Latex entre `$... $` ou `$$... $$`. Une bonne référence pour trouver ces commandes est le site <https://editor.codecogs.com/>. Pour tous ce que concerne formatation, voici un guide rapide <https://stacklima.com/cellule-markdown-dans-le-bloc-notes-jupyter/>, sinon regardez les commandes que nous avons utilisé sur la fichiers jupyter du TP. A la fin, il vous suffit d'exporter ce fichier en format `.pdf`. L'avantage de cette approche c'est qu'il plus rapide et vous permettra de combiner dans un seule fichier: code, texte, figures, etc.
 2. (recommandé 2) Latex: Si vous n'avez jamais installé sur votre ordinateur, nous vous conseillons la version en ligne <https://www.overleaf.com/>, très simple à utiliser, avec plein de templates. L'avantage de cette approche est qu'il produit des documents de qualité graphique professionnel (ce document a été rédigé en Latex par exemple), surtout quand il y a des équations. Très avantageux aussi pour maintenir une consistance de numérotation, formatation, etc.
 3. Word: mais attention! vos équations doivent être lisibles, figures bien référentiés, style de formatation consistant tout au long du document, etc.
- Un sous-dossier nommé **Numerics** avec tous les fichiers utilisés et éventuellement créés lors du TP (données, script et fonctions **Python**, figures, ...).

4.2 Critères d'évaluation

La formation en modélisation et simulation en mécanique nécessite un niveau d'expression adéquat quant à la description rigoureuse des problèmes physiques, de leurs modèles mathématiques, des algorithmes numériques, regard critique des résultats, etc. Ainsi, vous serez évalué concernant:

- **Forme:** En lien avec l'adhérence aux points de la Section 4. La qualité des figures et équations et bien le fait de les référencier correctement est fort important. Les codes rendus, des éventuels commentaires seront prise en compte également.
- **Contenu:** rigueur et profondeur de l'exposé méthodologique, l'accomplissement des tâches spécifiques demandé au TP (voir détails dans les fichiers de TP `.ipynb`), clarté et synthèse des résultats, qualité et profondeur des discussions critiques, l'originalité des solutions (de code, mathématiques, etc).