Université Paris Est - Créteil Val de Marne
Faculté des Sciences et Technologie
M1 Mécanique
Année 2024-2025, 1er semestre
Intervenants: Felipe ROCHA et Sara TOUHAMI
Emails: `felipe.figuereredo-rocha@u-pec.fr` et `sara.touhami@u-pec.fr`

Analyse numérique et calcul scientifique - 1

TP Chp 2 (3h)

Intégration numérique

1 Objectifs

- Programmer en réutilisant des fonctions déjà devélopées en Python (création d'une librarie).
- Se familiariser avec les méthodes d'intégration numérique: famille des méthodes Newton-Cotes et Quadrature Gaussienne.
- Etudier les notions de précision et convergence.
- Communiquer des résultats scientifiques.

2 Méthodologie

Les méthodes d'intégration numérique permettent de calculer numériquement l'intégrale $\mathcal{I}$ d'une fonction f (que l'on supposera suffisamment régulière) sur un intervalle $[a, b]$ appartenant au domaine de définition de f.

En général, une méthode de quadrature, dont on notera $\mathcal{Q}$ le résultat, peut s'écrire:

$$\mathcal{I} \equiv \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) \equiv \mathcal{Q}\,, \tag{1}$$

où w_i et x_i sont les poids, respectivement les points de quadrature.

Parmi les différentes méthodes de quadrature, les méthodes dites de Newton-Cotes (NC) et de Gauss (GA) sont particulièrement importantes.

La méthode de NC à n_p points (NCn_p) s'écrit:

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{NC}n_p} \equiv (b-a) \sum_{i=0}^{n} B_{i,n} f(x_i)\,, \tag{2}$$

où les coefficients $B_{i,n}$ sont tabulés (voir annexe) et les $n_p = n+1$ points de quadrature x_i constituent une discrétisation uniforme de l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles, soit $x_i = x_0 + i\,h$, avec $x_0 = a$, $x_n = b$ et $h = (b-a)/n$.

La méthode de GA à n_p points (GAn_p) s'écrit:

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{GA}n_p} \equiv \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)\,, \tag{3}$$

où les les n_p poids w_i sont tabulés et les n_p points de quadrature x_i doivent être calculés à partir des nœuds de Gauss ξ_i que l'on trouve tabulés pour l'intervalle $[-1,1]$, soit $x_i = (b+a)/2 + (b-a)/2 \times \xi_i$ (voir annexe).

L'erreur commise par une méthode de quadrature $\mathcal{Q}_*$ (où $*$ identifie la méthode de quadrature) s'écrit:

$$E_* \equiv |\mathcal{I} - \mathcal{Q}_*|\,. \tag{4}$$

Description du problème

On se propose de calculer l'intégrale dans le temps du signal mesuré dans le fichier `Data0.txt` du *TP-Chp1*. Pour simplifier les calculs, au lieu de considérer les données brutes, on utilisera plutôt une représentation analytique de celles-ci. En utilisant une méthode d'interpolation par fonctions exponentielles, on parvient à l'expression suivante:

$$f(x) = c_0 + c_1 \exp(-x/T_1) + c_2 \exp(-x/T_2)\,, \tag{5}$$

où $c_0 = 1.05$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $T_1 = 1$ et $T_2 = 100$.

Travail à réaliser

Afin de calculer l'intégrale de f, vous allez utiliser sept méthodes de quadrature appartenant aux familles de NC et de GA:

NC2 Méthode de Newton-Cotes à 2 points ($n = 1$) ou *méthode des trapèzes*;

NC3 Méthode de Newton-Cotes à 3 points ($n = 2$) ou *méthode de Simpson*;

NC4 Méthode de Newton-Cotes à 4 points ($n = 3$) ;

NC5 Méthode de Newton-Cotes à 5 points ($n = 4$) ;

Ga1 Méthode de Gauss à 1 point ($n = 0$) ou *méthode du point milieu*;

Ga2 Méthode de Gauss à 2 points ($n = 1$).

Ga3 Méthode de Gauss à 3 points ($n = 2$).

Si vous le souhaitez, vous pourrez utiliser également d'autres méthodes. Si par hasard, vous n'avez pas réussi à implémenter l'un des méthodes, c'est préférables que vous fassiez les méthodes d'ordre plus bas de chaque famille.

Les résultats des méthodes de quadrature seront comparés avec le résultat exact (obtenu en calculant la primitive de f) en utilisant la formule de l'erreur dans l'éq. (4).

Dans cet ordre vous devez explorer les fichiers suivantes:

1. `integration_polynomes.ipynb` : Dans ce fichier on va implementer et tester les méthodes pour des polynômes simples. Merci de suivre soigneusement chaque étape. Vous devez compléter `quadrature_lib.py` pour créer une librarie de méthodes réutilisable (instructions dans le fichier `.ipynb`).

2. `integration_morceaux.ipynb` : Dans ce fichier on va étudier la fonction plus compliqué donné par le fichier expériemental et modelisé par (5). Dans ce cas plus complexe, nous aurons le besoin d'implementer la stratégie d'intégration par morceaux, dont on va également étudier la convergence.

Travail à rendre et structure

Voir instructions du TP1.

Annexes

A Paramètres des formules de quadrature

Newton-Cotes

n_p	$B_{0,n}$	$B_{1,n}$	$B_{2,n}$	$B_{3,n}$	$B_{4,n}$
2	1/2	1/2			
3	1/6	4/6	1/6		
4	1/8	3/8	3/8	1/8	
5	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90

Gauss

n_p	w_i	ξ_i
1	2	0
2	1, 1	$-1/\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$
3	5/9, 8/9, 5/9	$-\sqrt{3/5}$, 0, $\sqrt{3/5}$

Note: $i = 0..(n_p - 1)$.