Université Paris Est - Créteil Val de Marne
Faculté des Sciences et Technologie
M1 Mécanique
Année 2024-2025, 1er semestre
Intervenants: Felipe ROCHA et Sara TOUHAMI
Emails: `felipe.figuereredo-rocha@u-pec.fr` et `sara.touhami@u-pec.fr`

Analyse numérique et calcul scientifique - 1

TP 3 (3h)

Équations différentielles ordinaires

Objectifs

- Développement numérique de façon autonome avec Python.
- Se familiariser avec les méthodes de quadrature pour les équations différentielles ordinaires (EDO): Euler, Adams-Bashford, Adams-Moulton, Runge-Kutta.
- Stabilité et ordre de convergence des schèmas numériques de résolution d'EDOs.
- Application à des problèmes issues de la mécanique, en particulier pour des EDOs de deuxième ordre.
- Communiquer des résultats scientifiques.

1 Introduction

Ce TP s'intéresse à l'implementation des méthodes numériques pour la résolution d'EDOs aux conditions initiales, la constantation d'ordres de convergence théoriques et stabilités de ces schèmas, ainsi comme leur application à situations de la mécanique. En comparaison avec les TPs précedents, ce TP a comme but transversale de bâtir l'autonomie dans le développement numérique en Python. Cela étant, les scripts de base ne seront pas fournies, juste quelque fonctions isolés ou des références à des scripts des sections précedents. Vous aurez donc l'occasion de pratiquer ce que vous avez déjà appris de façon autonome.

1.1 Quelques rappels

Une EDO du 1er ordre se présente sous la forme:

$$\begin{cases} y'(x) = f(t, y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $x \in [a, b] \subseteq \Re$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ doit être lipschitzienne par rapport à son second argument. La solution de cette EDO est une fonction $y(t) \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et peut être calculée par points en intégrant $y'(x)$ à partir de la condition initiale donnée.

Méthodes d'intégration à un pas. En admettant de connaître la valeur de y dans le point t_n, soit $y_n = y(t_n)$, une méthode d'intégration à un pas permet de calculer une approximation de la valeur de y dans le point $t_{n+1} = t_n + h$, soit $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ comme:

$$y_{n+1} \approx y_n + h \times \Phi(t_n, y_n; h)\,. \tag{2}$$

Des exemples de méthodes à un pas sont la méthode d'Euler-Cauchy (EC) et celles de la famille de Runge-Kutta (RK), voir annexe A.

Méthodes d'intégration multi-pas. En admettant de connaître les valeurs de y dans les points $\{t_n, x_{i-1}, \ldots, x_{i-r}\}$, soit $\{y_n, y_{i-1}, \ldots, y_{i-r}\}$, une méthode d'intégration multi-pas (notamment, à $r+1$ pas) permet de calculer une approximation de la valeur de y dans le point $t_{n+1} = t_n + h$, soit $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ comme:

$$y_{n+1} \approx y_n + h \times \Phi(t_n, \ldots, x_{i-r}, y_n, \ldots, y_{i-r}; h)\,. \tag{3}$$

Des exemples de méthodes multi-pas sont celles de la famille d'Adams-Bashfort (AB).

2 Stabilité absolue

On considère le problème modèle:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\, y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{4}$$

pour lequel on a $f(t, y(t)) = \lambda\, y(t)$ et dont la solution exacte est $y(t) = \exp(\lambda\, t)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Le cas générale où λ peut être complexe est négligé pour l'instant. Pour les implementations numériques suivantes vous pouvez choisir $\lambda \in [-10, -30]$, à votre convenience, ainsi comme $t_{max} > 0$, tel que $t \in [0, t_{max}]$ est votre intervale de simulation. Ces valeurs doivent être fixés au début. Un plan d'étude est proposé ci-dessous, vous devez le suivre tout en commentant les résultats obtenus.

1. Pour la méthode d'Euler explicite, détérminer le plage de valeurs pour h (l'incrément de temps) tel que le schèma est: i) stable sans oscillations, ii) stable mais avec des oscillations, et iii) instable.

2. Tracer les résultats de ces simulations dans une figure unique en parallèle avec la solution analytique pour chaqu'un des cas précedents (séléctioner une valeur de h pour chaque cas).

3. Pour les même valeurs de h, appliquer la méthode d'Euler implicite (réputé d'être inconditionnallement stable pour des valeurs négatifs de λ) pour ce problème. Comme l'EDO est simple, la programmation d'Euler implicite est sans difficultés. Tracer les résultats pour constater sa propriété théorique.

4. Pour la méthode du trapèze, aussi connu comme Crank-Nicholson ou Adams-Moulton d'ordre 2, démontrer que cette méthode incontionnallement stable pour $Re(\lambda) < 0$. Comme rappel vous devez appliquer la formule $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$, et puis constater $|2+\lambda h| < |2-\lambda h|$ est l'inégalité qui nous permettra de faire cette analyse. Vous devez analyser l'stabilité pour $\lambda = \lambda_R + \lambda_I i \in \mathbb{C}$ générique.

5. Tracer les courbes pour les mêmes cas de simulation de 2). Commenter les résultats vis-à-vis aux résultats de 2) et 3).

3 Ordres de convergence

Pour étudier numériquement l'ordre de convergence d'une méthode on doit avoir l'accès à sa solution exacte (analytique). Sauf pour de cas très spécifiques, trouver la solution d'une EDO s'avère pénible voire impossible. On va donc construire nous-même un cas test en utilisant ce qu'on appelle "la méthode de solutions construites". Prenons par example $y(t) = \exp t^2 \cos(t^3)$ et cherchons $y'(t)$

$$y'(t) = 2t \exp t^2 \cos t^3 - 3t^2 \exp t^2 \sin t^3$$

$$= 2ty(t) - 3t^2 y(t) \tan t^3 := f(t, y(t))$$

Il faut juste appliquer des méthodes étudiés pour $f(t, y(t))$ trouvé en sachant $y(0) = 1$. On va donc s'intéresser au erreur moyen et maximum:

$$e_n = |y_n - y(t_n)| \tag{5}$$

$$E_{moyen} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} e_n^2}, \tag{6}$$

$$E_{max} = \max_{n=0,\ldots,N} e_n. \tag{7}$$

Pour cette étude vous devez choisir une méthode pour chaque ordre de convergence parmi ceux du appendix. Cela étant: i) la méthode d'Euler explicite (code fourni) est la seul option; ii) pour $\mathcal{O}(h^2)$, vous pouvez choisir une version de Runge-Kutta (RK2) ou Adams-Bashfort ($r = 1$), iii) pour $\mathcal{O}(h^3)$ RK3 ou Adams-Bashfort ($r = 2$) , iv) pour $\mathcal{O}(h^4)$, RK4 est recommendé (code fourni).

1. En choisissant une fonction $y(t)$ un peu compliquée pour la solution exacte (comme celle du exemple, mais pas la même!), trouver $f(t, y(t))$ et la condition initiale. Il faut que la dépédence $y(t)$ aparraît au moins une fois dans f.
2. Implementer les méthodes manquants.
3. Tracer les courbes erreur vs h en échelle logarithmique dans deux axes.

4 Pendule

En appliquant le principe fondamentale de la dynamique pour le pendule, on a l'EDO de deuxième ordre:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin \theta t = 0, \quad \theta(t) = \theta_0, \dot{\theta}(t) = \omega_0. \tag{8}$$

La quantité $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ est la pulsation propre de ce système, le période étant donné par $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

1. Appliquer la méthode d'Euler explicite et RK4 pour ce problème (en format vectoriel) en choisissant librement les paramètres.

2. Tracer la solution pour l'angle et vitesse angulaire pour deux périodes du mouvement.

3. Vérifier que l'énérgie si conserve (rappel $T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2, U = mgl(1 - \theta), E_{tot} = T + U$.

4. (optionnel) Utilisez la méthode du saute-mouton (code fourni) et vérifiez la conservation d'énérgie.

5 Travail à rendre et structure

Voir instructions du TP1.

Annexes

A Méthodes à un pas

Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad \text{(explicite)} \tag{9}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})\text{(implicite)} \tag{10}$$

Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h)\Phi(x_n, y_n; h) = \sum_{r=1}^{m} c_r k_r \,. \tag{11}$$

avec

$$k_1 = f(t_n, y_n)\,, \qquad \dots \qquad k_r = f\left(t_n + h\,a_r, y_n + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{r,s}\,k_s\right)\,.$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
a_2 & b_{2,1} & & & & \\
a_3 & b_{3,1} & b_{3,2} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
a_m & b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,m-1} & \\
\hline
 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m
\end{array}$$

RK2 (Heun)

$$\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1/2 & 1/2 & \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}$$

RK2 (Euler Modifié)

$$\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1 & 1 & \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}$$

RK3

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1/3 & 1/3 & & \\
2/3 & 0 & 2/3 & \\
\hline
 & 1/4 & 0 & 3/4
\end{array}$$

RK4

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$

B Méthodes multipas

Notation:

$$f_n = f(x_n, y_n) \tag{12}$$

Ordre pour $r+1$ points:

$$\mathcal{O}(h^{r+1}) \tag{13}$$

Adams-Bashfort

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{r} \bar{b}_{j,r} f_{i-j} \,, \tag{14}$$

r	$\bar{b}_{0,r}$	$\bar{b}_{1,r}$	$\bar{b}_{2,r}$	$\bar{b}_{3,r}$
0	1			
1	3/2	-1/2		
2	23/12	-4/3	5/12	
3	55/24	-59/24	37/24	-3/8

Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{r} \bar{b}_{j,r} f_{i-j+1} \,, \tag{15}$$

r	$\bar{b}_{0,r}$	$\bar{b}_{1,r}$	$\bar{b}_{2,r}$	$\bar{b}_{3,r}$
0	1			
1	1/2	1/2		
2	5/12	8/3	-1/12	
3	9/24	19/24	-5/24	1/24