**Université Paris Est - Créteil Val de Marne**
**Faculté des Sciences et Technologie**
**M1 Mécanique**
**Année 2024-2025, 1er semestre**
**Intervenants:** Felipe ROCHA et Sara TOUHAMI
**Emails:** `felipe.figuereredo-rocha@u-pec.fr` et `sara.touhami@u-pec.fr`

# Analyse numérique et calcul scientifique - 1

# TP 3 (3h)

# Équations différentielles ordinaires

`https://github.com/felipefr/numerical_analysis/tree/main/tp3`

## Objectifs

- Développement numérique de façon autonome avec Python.
- Se familiariser avec les méthodes de quadrature pour les équations différentielles ordinaires (EDO): Euler, Adams-Bashford, Adams-Moulton, Runge-Kutta.
- Stabilité et ordre de convergence des schèmas numériques de résolution d'EDOs.
- Application à des problèmes issues de la mécanique, en particulier pour des EDOs de deuxième ordre.
- Communiquer des résultats scientifiques.

# 1 Introduction

Ce TP s'intéresse à l'implémentation des méthodes numériques pour la résolution d'EDOs avec conditions initiales, à la vérification des ordres de convergence théoriques et des stabilités de ces schémas, ainsi qu'à leur application à des situations mécaniques.

Contrairement aux TPs précédents, l'objectif transversal de ce TP est de développer d'avantage votre autonomie dans la programmation numérique avec Python. Par conséquent, les scripts de base ne seront pas fournis, seulement quelques fonctions isolées ou des références aux scripts des sections précédentes (voir `https://github.com/felipefr/numerical_analysis`). Vous aurez ainsi l'occasion de pratiquer ce que vous avez déjà appris, mais manière plus autonome.

## 1.1 Quelques rappels

Une EDO du 1er ordre se présente sous la forme:

$$\begin{cases} y'(x) = f(t, y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $x \in [a, b] \subseteq \Re$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ doit être lipschitzienne par rapport à son second argument. La solution de cette EDO est une fonction $y(t) \in \mathcal{C}^1([a, b])$ et peut être calculée par points en intégrant $y'(x)$ à partir de la condition initiale donnée.

**Méthodes d'intégration à un pas.** En admettant de connaître la valeur de $y$ dans le point $t_n$, soit $y_n = y(t_n)$, une méthode d'intégration à un pas permet de calculer une approximation de la valeur de $y$ dans le point $t_{n+1} = t_n + h$, soit $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ comme:

$$y_{n+1} \approx y_n + h \times \Phi(t_n, y_n; h) \,. \tag{2}$$

Des exemples de méthodes à un pas sont la méthode d'Euler-Cauchy (EC) et celles de la famille de Runge-Kutta (RK), voir annexe A.

**Méthodes d'intégration multi-pas.** En admettant de connaître les valeurs de $y$ dans les points $\{t_n, x_{i-1}, \dots, x_{i-r}\}$, soit $\{y_n, y_{i-1}, \dots, y_{i-r}\}$, une méthode d'intégration multi-pas (notamment, à $r+1$ pas) permet de calculer une approximation de la valeur de $y$ dans le point $t_{n+1} = t_n + h$, soit $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ comme:

$$y_{n+1} \approx y_n + h \times \Phi(t_n, \dots, x_{i-r}, y_n, \dots, y_{i-r}; h) \,. \tag{3}$$

Des exemples de méthodes multi-pas sont celles de la famille d'Adams-Bashfort (AB).

# 2 Etudes numériques

## 2.1 Stabilité absolue

On considère le problème modèle:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\, y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{4}$$

pour lequel on a $f(t, y(t)) = \lambda\, y(t)$ et dont la solution exacte est $y(t) = \exp(\lambda\, t)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Le cas générale où $\lambda$ peut être complexe est négligé pour l'instant. Pour les implementations numériques suivantes vous pouvez choisir $\lambda \in [-10, -30]$, à votre convenience, ainsi comme $t_{max} > 0$, tel que $t \in [0, t_{max}]$ est votre intervale de simulation. Ces valeurs doivent être fixés au début. Un plan d'étude est proposé ci-dessous, vous devez le suivre tout en commentant les résultats obtenus.

1. Pour la méthode d'Euler explicite, détérminer le plage de valeurs pour $h$ (l'incrément de temps) tel que le schèma est: i) stable sans oscillations, ii) stable mais avec des oscillations, et iii) instable.

2. Tracer les résultats de ces simulations dans une figure unique en parallèle avec la solution analytique pour chaqu'un des cas précedents (séléctioner une valeur de $h$ pour chaque cas).

3. Pour les même valeurs de $h$, appliquer la méthode d'Euler implicite (réputé d'être inconditionnallement stable pour des valeurs négatifs de $\lambda$) pour ce problème. Comme l'EDO est simple, la programmation d'Euler implicite est sans difficultés. Tracer les résultats pour constater sa propriété théorique.

4. Pour la méthode du trapèze, aussi connu comme Crank-Nicholson ou Adams-Moulton d'ordre 2, démontrer que cette méthode incontionnallement stable pour $Re(\lambda) < 0$. Comme rappel vous devez appliquer la formule $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$, et puis constater $|2 + \lambda h| < |2 - \lambda h|$ est l'inégalité qui nous permettra de faire cette analyse. Vous devez analyser l'stabilité pour $\lambda = \lambda_R + \lambda_I i \in \mathbb{C}$ générique.

5. Tracer les courbes pour les mêmes cas de simulation de 2). Commenter les résultats vis-à-vis aux résultats de 2) et 3).

## 2.2 Pendule

En appliquant le principe fondamentale de la dynamique pour le pendule, on a l'EDO de deuxième ordre:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0, \quad \theta(t) = \theta_0, \dot{\theta}(t) = \omega_0. \tag{5}$$

La quantité $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ est la pulsation propre de ce système, le période étant donné par $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

1. Appliquer la méthode d'Euler explicite et RK4 pour ce problème (en format vectoriel) en choisissant librement les paramètres.

2. Tracer la solution pour l'angle et vitesse angulaire pour deux périodes du mouvement.

3. Vérifier que l'énérgie si conserve (rappel $T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2, U = mgl(1 - \theta), E_{tot} = T + U$.

4. (optionnel) Utilisez la méthode du saute-mouton (code fourni) et vérifiez la conservation d'énérgie.

## 2.3 Ordres de convergence

Pour étudier numériquement l'ordre de convergence d'une méthode, il est nécessaire de disposer de sa solution exacte (analytique). Cependant, sauf dans des cas très spécifiques, déterminer la solution d'une EDO est souvent laborieux, voire impossible. Pour contourner cette difficulté, nous allons créer un cas test en utilisant ce que l'on appelle la *méthode des solutions construites*. Prenons par example $y(t) = \exp t^2 \cos(t^3)$ et cherchons $y'(t)$

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2t \exp t^2 \cos t^3 - 3t^2 \exp t^2 \sin t^3 \\ &= 2ty(t) - 3t^2 y(t) \tan t^3 := f(t, y(t)) \end{aligned}$$

Il faut juste appliquer des méthodes étudiés pour $f(t, y(t))$ trouvé en sachant $y(0) = 1$. C'est important de d'écrire la dépéndence en $y(t)$ explicitement sur $f$, de façon qu'on puisse tester la propagation d'erreurs dans chaque méthode.

On va donc s'intéresser aux erreurs moyen et maximum:

$$e_n = |y_n - y(t_n)| \tag{6}$$

$$E_{moyen} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} e_n^2}, \tag{7}$$

$$E_{max} = \max_{n=0,\dots,N} e_n. \tag{8}$$

Pour cette étude vous devez choisir une méthode pour chaque ordre de convergence parmi ceux du appendix. Cela étant: i) la méthode d'Euler explicite (code fourni) est la seul option; ii) pour $\mathcal{O}(h^2)$, vous pouvez choisir une version de Runge-Kutta (RK2) ou Adams-Bashfort ($r = 1$), iii) pour $\mathcal{O}(h^3)$ RK3 ou Adams-Bashfort ($r = 2$) , iv) pour $\mathcal{O}(h^4)$, RK4 est recommendé (code fourni).

1. Implementer les méthodes manquants, c'est-à-dire, d'ordre 2 et 3.
2. Tracer les courbes erreur vs $h$ en échelle logarithmique dans deux axes (code fourni).

# 3 Travail à rendre et structure

Vous rédigerez un compte-rendu scientifique faisant état de vos expériences numériques et de vos acquis. Le compte-rendu doit être rédigé avec soin, de façon à la fois claire et synthétique, en incluant dans le corps du rapport les informations principales et en renvoyant aux annexes pour celles secondaires. Idéalement, la structure du rapport sera la suivante:

- Informations rélevants dans l'en-tête ou page de garde: groupe, Nom, prénom, professeurs, date, université, formation, eventuels logos, etc.
- Table des matières (optionnel mais utile).
- Introduction: présenterez brièvement le ou les problèmes étudiés, l'objectifs, résultats attendus, structure du rapport, etc.
- Méthodologie: introduire des eventuels équations, théoremes, etc, qui vous seront utiles dans les études réalisés. Dans les sections suivantes, vous devez référentier les élements de la méthodologie, e.g., dans l'équation X (ou dans (X)), dans la Figure Y, etc. Suivre le modèle de l'exposé méthodologique du TP, voire même répéter quelques équations de votre façon.

- Une section par étude, avec des sous-sections: détails de l'implémentation, résultats, discussions, eventuels problèmes ouverts ou résultats innatedus (l'honnêteté est appréciée), etc. Vos figures, tableaux, etc, doivent être référentiés au moins une fois dans le texte.
- Conclusion: vous dresserez un bilan synthétique de ce TP en termes d'acquis personnels par rapport aux objectifs prévus
- Références bibliographiques (optionnel mais apprécié): livres, sites, etc.
- Annexes (optionnel): tous les éléments qui vous considérez utiles, mais qui empêchent une lecture fluide du document si placés au corp du text.

Le travail de ce TP devra être envoyé par email (aux deux intervenants!) au plus tard **deux semaines après la fin du TP**. Le travail à rendre est un dossier comprimé (archive `.zip`, `.rar`, ...) nommé `NOM1_NOM2_GPX_TP1` et contenant :

- Un rapport de TP en format `.pdf`. Pour générer ce pdf, vous pouvez utiliser:
  1. (recommandé) Latex: Si vous n'avez utilisé, nous vous conseillons la version en ligne `https://www.overleaf.com/`, très simple à utiliser, avec plein de templates. L'avantage de cette approche est qu'il produit des documents de qualité graphique professionnel (ce document a été rédigé en Latex par exemple), surtout quand il y a des équations. Très avantageux aussi pour maintenir une consistence de numérotation, formatation, etc.
  2. Word: mais attention! vos équations doivent être lisibles, figures bien referéntiés, style de formatation consistent tout au long du document, etc.
- Un sous-dossier nommé `Numerics` avec tous les fichiers utilisés et éventuellement créés lors du TP (données, script et fonctions `Python`, figures, ...).

# Annexes

# A Méthodes à un pas

### Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad \text{(explicite)} \tag{9}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})\text{(implicite)} \tag{10}$$

### Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h)\Phi(x_n, y_n; h) = \sum_{r=1}^{m} c_r k_r\,. \tag{11}$$

avec

$$k_1 = f(t_n, y_n)\,, \qquad \ldots \qquad k_r = f\left(t_n + h\,a_r, y_n + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{r,s}\,k_s\right)\,.$$

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ a_2 & b_{2,1} & & & & \\ a_3 & b_{3,1} & b_{3,2} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_m & b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,m-1} & \\ \hline & c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m \end{array}$$

**RK2** (Heun)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

**RK2** (Euler Modifié)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

**RK3**

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/3 & 1/3 & & \\ 2/3 & 0 & 2/3 & \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

**RK4**

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

# B Méthodes multipas

Notation:

$$f_n = f(x_n, y_n) \tag{12}$$

Ordre pour $r+1$ points:

$$\mathcal{O}(h^{r+1}) \tag{13}$$

**Adams-Bashfort**

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{r} \bar{b}_{j,r} f_{i-j} \, , \tag{14}$$

| $r$ | $\bar{b}_{0,r}$ | $\bar{b}_{1,r}$ | $\bar{b}_{2,r}$ | $\bar{b}_{3,r}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 1 | 3/2 | -1/2 | | |
| 2 | 23/12 | -4/3 | 5/12 | |
| 3 | 55/24 | -59/24 | 37/24 | -3/8 |

**Adams-Moulton**

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{r} \bar{b}_{j,r} f_{i-j+1} \, , \tag{15}$$

| $r$ | $\bar{b}_{0,r}$ | $\bar{b}_{1,r}$ | $\bar{b}_{2,r}$ | $\bar{b}_{3,r}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | |
| 1 | 1/2 | 1/2 | | |
| 2 | 5/12 | 8/3 | -1/12 | |
| 3 | 9/24 | 19/24 | -5/24 | 1/24 |