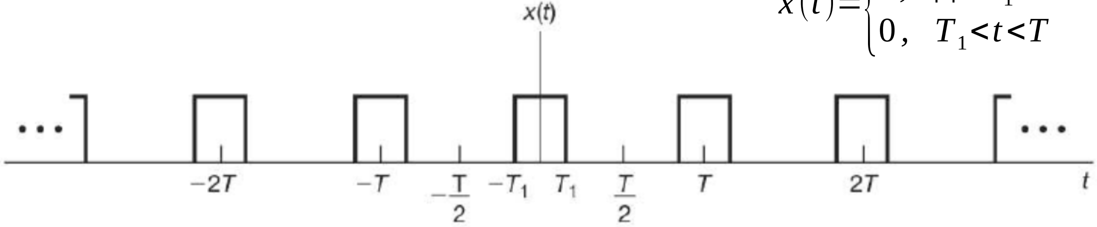
LAB004 - Python em SS:

Transformada de Fourier - FT

O livro apresenta a Transformada de Fourier – FT através da representação da Serie de Fourier – FS. Usando os coeficientes da FS e sua envoltória para a onda quadrada periódica da Figura.

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<t<T\end{cases}$$



Onde é demonstrado que ao diminuir a relação *T*/*T*1 o sinal se torna mais parecido com o sinal aperiódico, de forma que os coeficientes da FS ficam mais densos. O programa FT_ondaQuadrada.py apresenta um demonstração dessa ideia. Execute o programa!

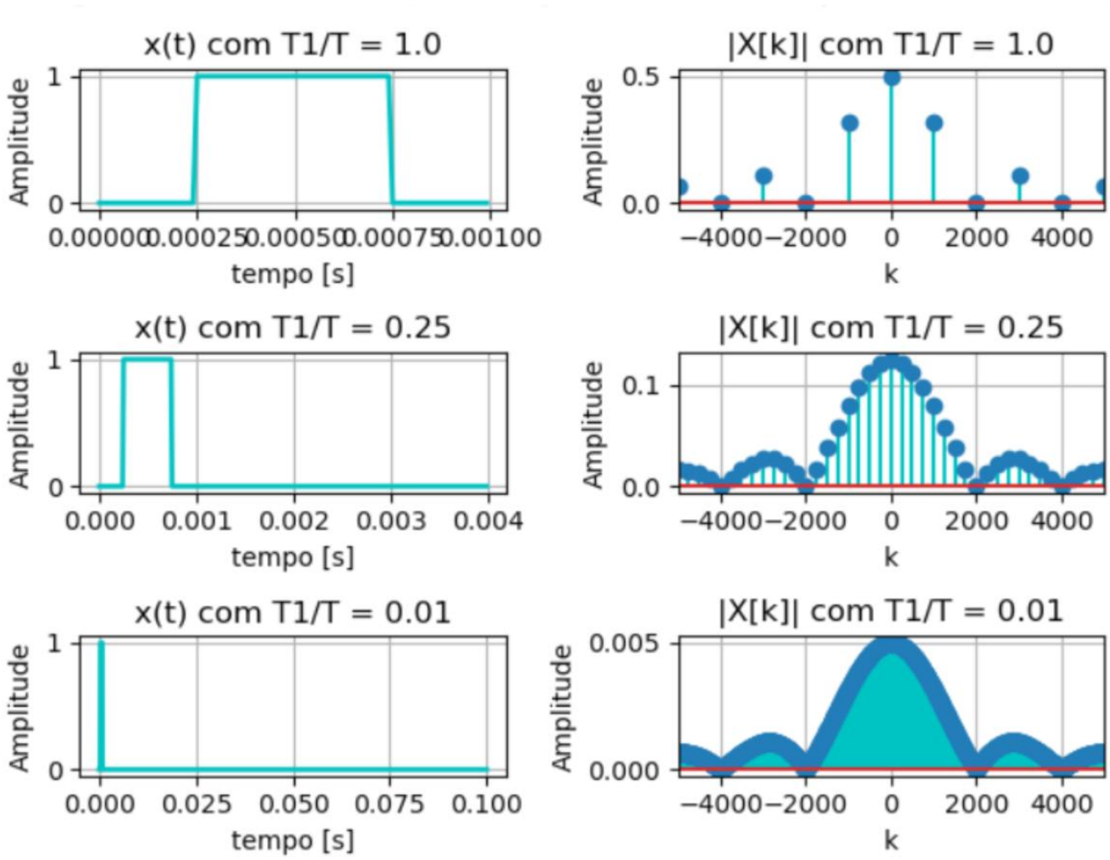


Figura 1 - Gráfico gerado pelo programa FT_ondaQuadrada

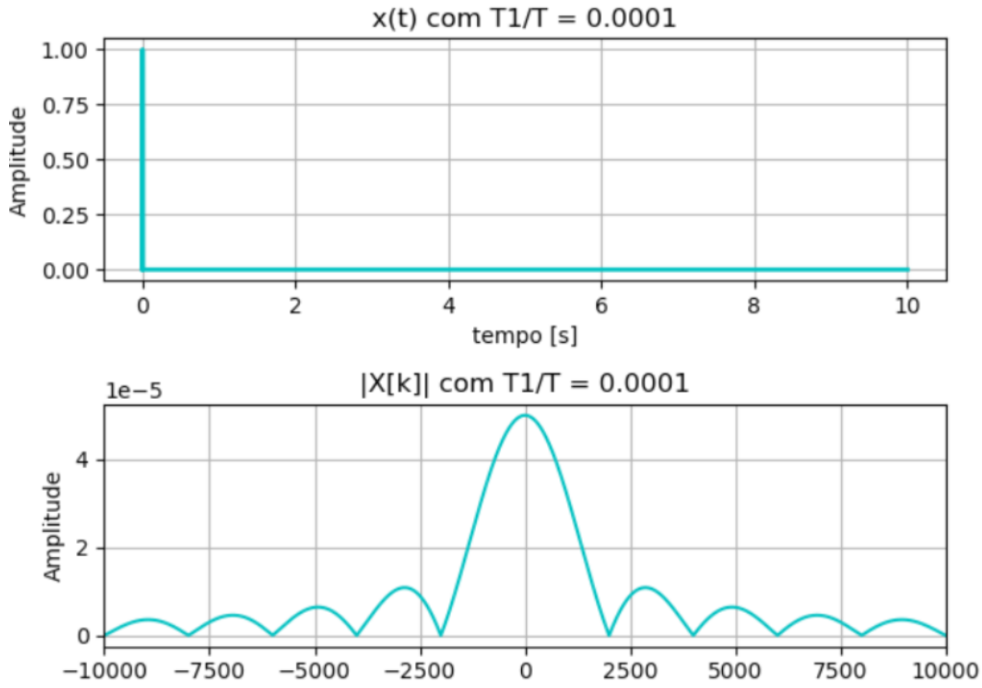
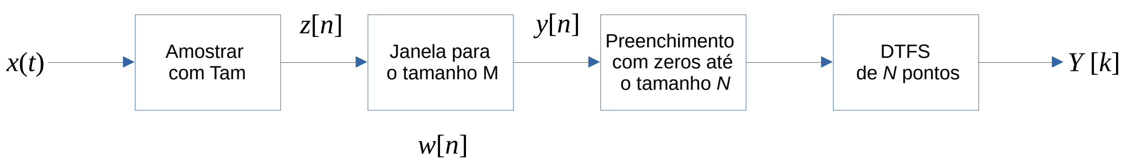


Figura 2 –Destaque dos gráficos gerado pelo programa

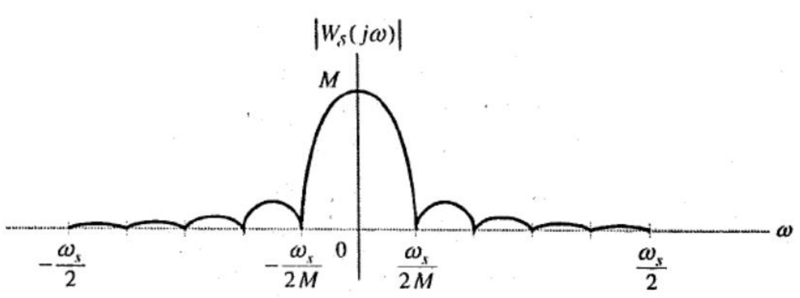
Aproximando a FT:

A FT aplica-se a sinais não periódicos de tempo contínuo. A DTFS é computada usando-se N valores de um sinal de tempo discreto. Para se usar a DTFS para aproximar a FT devemos amostrar o sinal de tempo contínuo e reter, no máximo, *N* amostras. Supondo que *Tam* é o intervalo de amostragem e que *M* < *N* amostras do sinal do tempo continuo são capturados.

Então temos o esquema mostrado:



O *janelamento* é a quantidade de amostras do sinal contínuo e como deve ser finito provoca que o sinal seja multiplicado (no domínio da frequência) pela figura abaixo.



O problema em questão é determinar quão bem os coeficientes *Y*[*k*] da DTFS aproxima *X*(j*ω*), que é a FT de *x*(*t*). Tanto a operação de amostragem como o de janelamento são fontes potenciais de erros na aproximação.

Temos que ter cuidado para que:

- O sinal deve ser amostrado em uma frequência de forma que não se tenha o *aliasing*, ou de forma que o efeito seja desprezível;
- E o sinal deve ter uma quantidade de amostras suficiente para que o janelamento não atrapalhe.

Assim a aproximação com DTFS estará relacionada com o espectro de sinal original de acordo com

$$Y[k]=\frac{1}{N\cdot Tam}\cdot X\left(jk\frac{\omega_s}{N}\right)$$

DTFS

FT

Se o intervalo de amostragem na frequência desejada for no mínimo $\Delta\omega$ necessitamos que

$$N \geq \frac{\omega_s}{\Delta\omega}$$

Exemplo 1): Use a DTFS para aproximar a FT do sinal

$$x(t)=e^{t/10}u(t)(\cos(10t)\ +\ \cos(12t))$$

Suponhamos que a faixa de frequência de interesse seja -20 < *ω* < 20 e que o intervalo de amostragem na frequência seja *Δω* = π/20.

Solução:

Primeiro vamos avaliar a FT de *x*(*t*).

$$X(j\omega)=\frac{\frac{1}{10}+j\omega}{\left(\frac{1}{10}+j\omega\right)^2+10^2}+\frac{\frac{1}{10}+j\omega}{\left(\frac{1}{10}+j\omega\right)^2+12^2}$$

Que tem a figura:

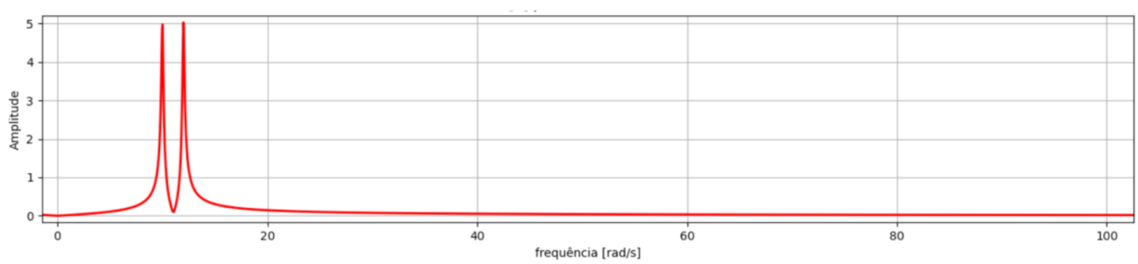


Figura 3 - FT

Analisando a equação percebemos que o sinal não tem uma limitação em frequência e da sua figura percebemos que depois de ω >>12 a magnitude de X(jω) decresce rapidamente. (proporcionalmente a 1/ω). Com isso vamos escolher uma frequência máxima para o sinal de forma que o *aliasing* seja desprezível.

Assim escolhemos a $\omega_{máx}$ = 500, o que provoca um período de amostragem de

$$Tam < \frac{2\pi}{500} = 0.0125$$

Escolhemos *Tam* = 0.01, e consequentemente $\omega_{am} = \omega_s = 200\pi$. E com $\Delta\omega = \pi/20$ temos

$$N \geq \frac{200\pi}{\Delta\omega}$$
$$N \geq 4000$$

Escolhemos $N = 2^{12} = 4096$. E vamos computar a DTFS com dois janelamentos (valores de *M*):

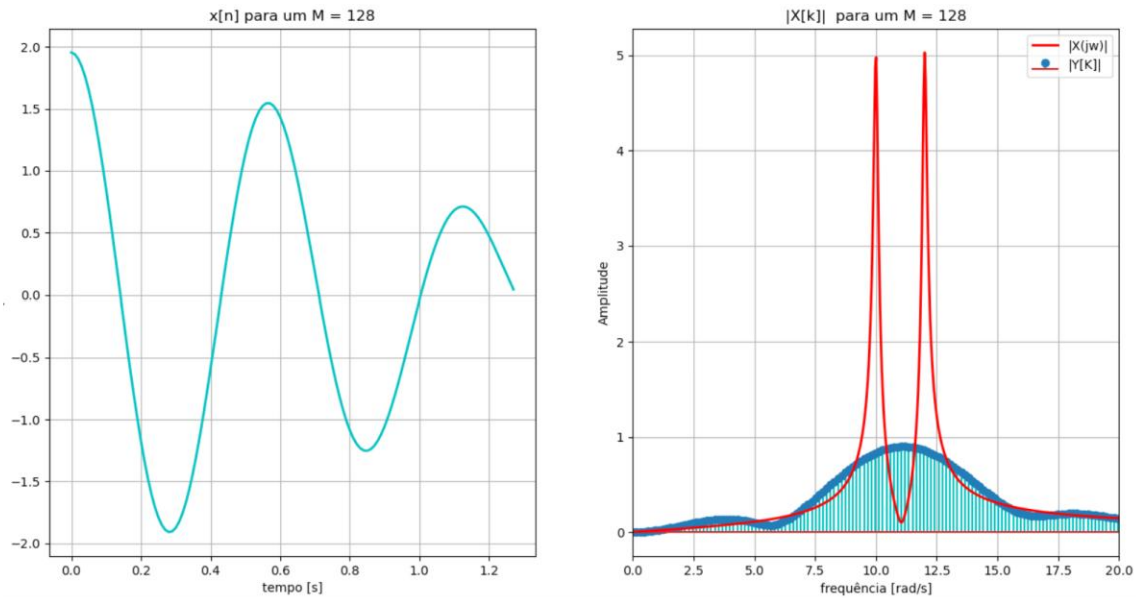


Figura 4 – *M* = 128 amostras (|X(jω)| - da equação, |Y[k]| - Aproximação da FT)

Note que |*Y*[*k*]| não consegue apresentar os dois picos, pois falta resolução nos dados amostrados, pois *M* é pequeno.

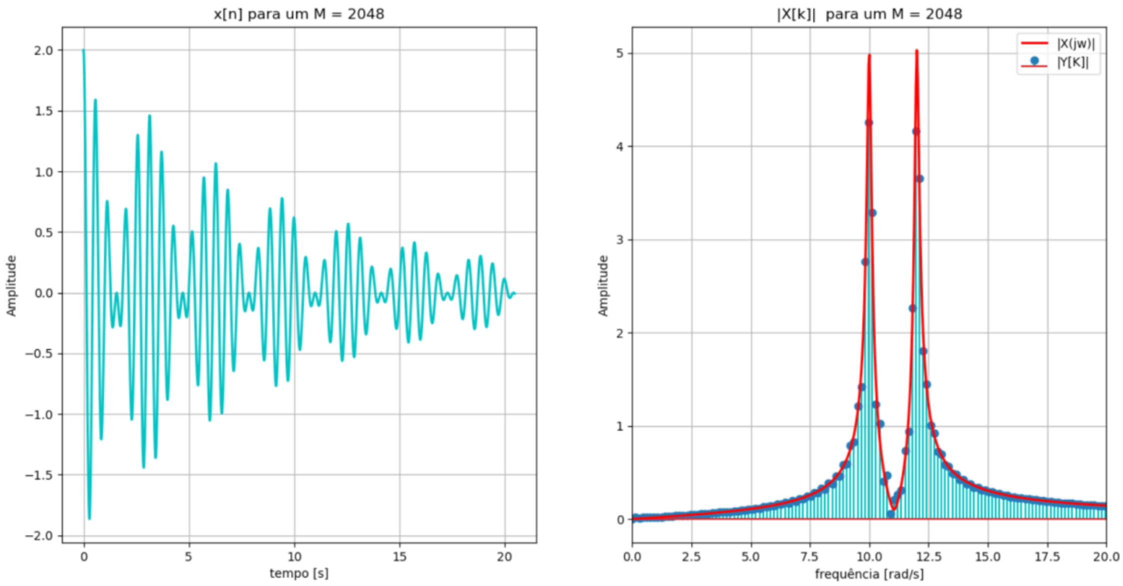


Figura 5 - *M* = 2048 amostras (|X(jω)| - da equação, |Y[k]| - Aproximação da FT)

Note que com o aumento de M o gráfico de $|Y[k]|$ melhorou bastante ao conseguir acompanhar o gráfico de $|X(j\omega)|$.

Vamos agora aumentar o valor de N e vamos comparar os gráficos:

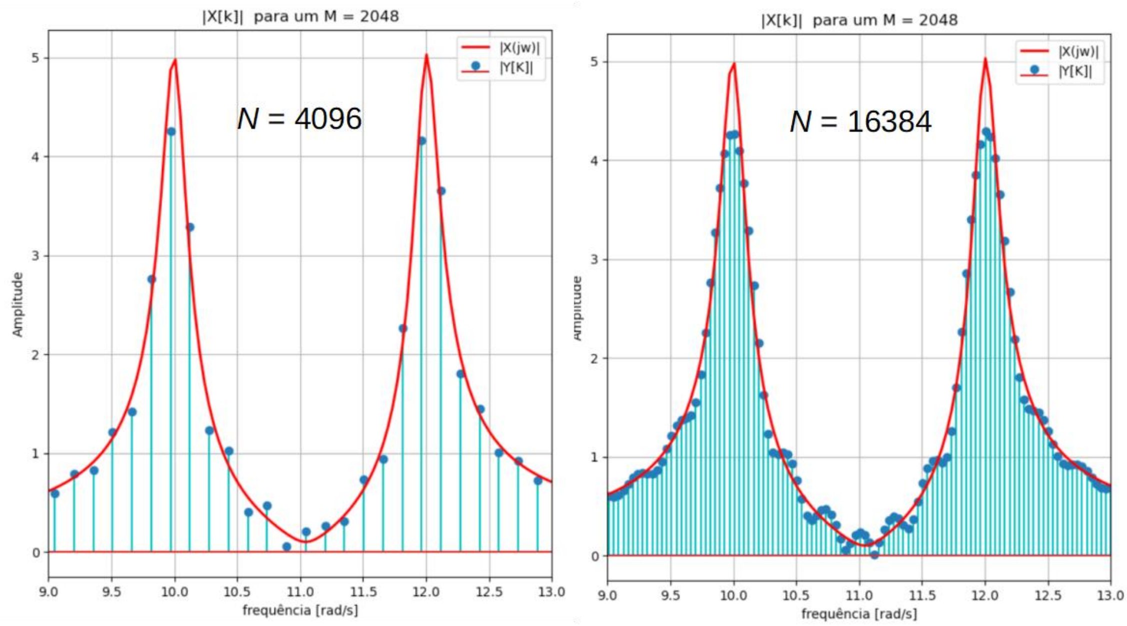


Figura 6 - Mantendo *M* = 2048, porém aumentando o tamanho da DTFS *N* = 16384

Note que a aproximação com DTFS da FT melhora à medida que N aumenta.

Exemplo 2) Considere o sinal

$$y(t)=e^{-|t|}\cdot\cos(10t)$$

Encontre a FT com o Python:

Solução: Exemplo2_lab007.py

Analisando a equação percebemos devido ao fator $e^{-|t|}$ que o sinal decai rapidamente quando se afasta de zero tanto ao +∞ quanto a -∞. Quando t = 4,60 o termo $e^{-|t|}$ provoca uma atenuação de 100 vezes o valor em t = 0. Dessa forma vamos escolher os limites do vetor de tempo entre -5 e 5.

Agora temos escolher o período de amostragem, da equação o termo *cos*(10*t*) implica que o sinal tem um componente forte na frequência ω = 10. Então primeiramente vamos escolher a frequência de amostragem duas vezes maior que maior frequência.

Ficando:

- ω_{am} = 20 rad/s o que implica que T_{am} = 2π/20 = 0.3142

E vamos escolher um N = 4096, para plotar a figura.

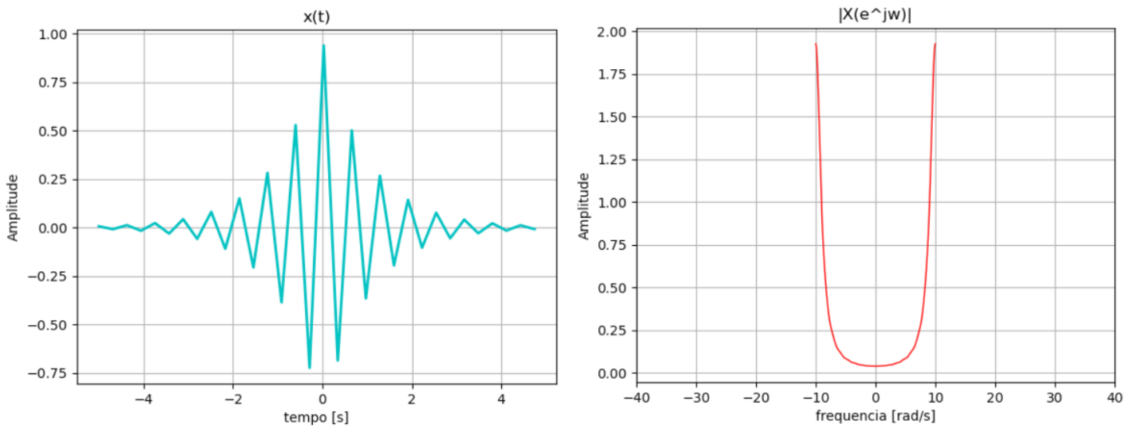


Figura 7 - Com M = 32, N = 4096, ω_{am} = 2*10 rad/s, T_{am} = 0.3142.

Note que o gráfico da frequência não consegue mostrar corretamente as frequências maiores de 10 rad/s. Então vamos aumentar um pouco a taxa de amostragem.

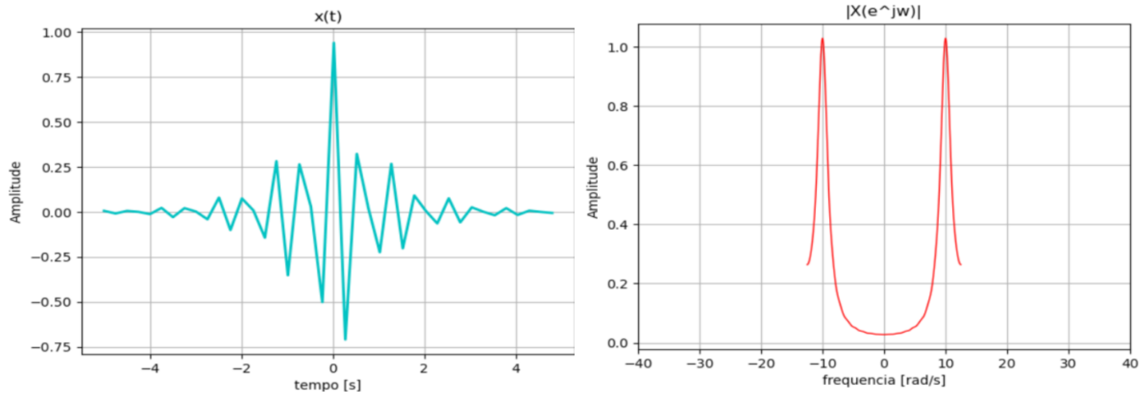


Figura 8 - Com M = 40, N = 4096, ω_{am} = 2.5*10 rad/s, T_{am} = 0.251.

Note que o gráfico da frequência já consegue mostrar o pico de frequência esperado. Note que a quantidade de amostra M aumentou muito pouco. Mas vamos novamente aumentar a frequência de amostragem.

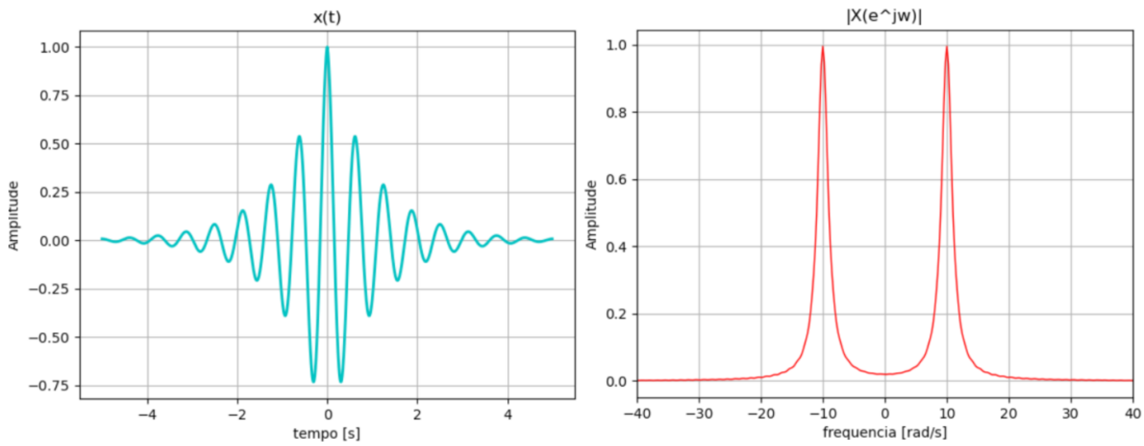


Figura 9 - Com M = 1592, N = 4096, ω_{am} = 100*10 rad/s, T_{am} = 0.006.

Com o aumento para 100 vezes a frequência máxima do sinal, temos agora um gráfico muito bom tanto para o tempo como para a frequência. Porem o número de amostras M necessárias aumentou.

A conclusão é que a aproximação com DTFS da FT melhora à medida que T_{am} diminui, ($M*T_{am}$) aumenta e N aumenta. Na pratica, as limitações de memórias e custo de hardware geralmente limitam estes parâmetros.

Sinais e Sistemas - SS

Exercício 1) O sinal y(t) é igual ao sinal da portadora

$$p(t)=\cos(10t)$$

sendo **modulada** pelo sinal modulante

$$x(t)=0.2[r(t+5)-2r(t)+r(t-5)]$$

Em $r(t)$ é um sinal rampa unitário

a) Plote o sinal modulante $x(t)$ no tempo e a magnitude da FT no domínio da frequência.

b) Plote o sinal $y(t)$ no tempo e a magnitude da FT no domínio da frequência.

Escolha cuidadosamente os intervalos de frequência e de tempo dos gráficos.

Exercício 2) Plote o sinal no tempo, a magnitude e fase da FT de:

a) Na mesma figura com cores diferentes:

$$x_{1a}(t)=u(t)-u(t-2)$$
$$x_{1b}(t)=u(t)-u(t-1)$$
$$x_{1c}(t)=u(t)-u(t-0.35)$$

b)

$$x_2(t)=e^{-t}u(t)$$

c)

$$x_3(t)=sen(350t)$$

d)

$$x_4(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\cdot 10)$$

Escolha cuidadosamente os intervalos de frequência e de tempo dos gráficos.